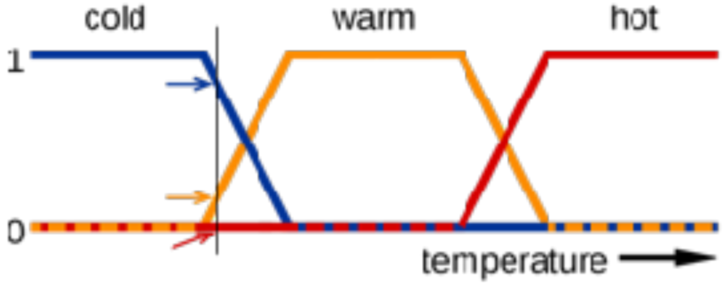
Lógica Difusa



Historia

- 1965: Propuesta por Lotfi Asker Zadeh, University of California, Berkeley.
- 1974: Primeras aplicaciones (Mamdani). Desarrollo del primer controlador difuso diseñado para una máquina de vapor.
- 1987 Hitachi Ltd. usa un controlador difuso para el control del tren de Sendai.
- En 1993, Fuji la aplica para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua por primera vez en Japón.

Historia

Desde los 90's

- Productos de consumo: Cámaras, lavadoras, hornos, televisores.
- Elevadores, trenes, automóviles (caso de los sistemas de transmisiones, de frenos y mejora de la eficiencia del uso de combustible en motores)
- Controles de tráfico
- Sistemas de control de aire acondicionado que evitan las oscilaciones de temperatura
- Sistemas de reconocimiento de escritura.

Historia

- En los últimos cincuenta años, esta metodología ha generado alrededor de cincuenta mil patentes solo en Japón y Estados Unidos.

Definición

- La lógica difusa permite tratar situaciones con modos de razonamiento imprecisos.

- Con la lógica difusa, a diferencia de la clásica, es posible modelar los modos imprecisos de razonamiento que juegan un papel esencial en la habilidad del ser humano de tomar decisiones racionales en un entorno de incertidumbre e imprecisión.

SI (antecedente) ENTONCES (consecuente)

- SI hace muchísimo frío. ENTONCES aumento drásticamente la temperatura.
- SI voy a llegar un poco tarde. ENTONCES aumento levemente la velocidad.

Definición

La lógica difusa (fuzzy logic) se adapta mejor al mundo real en el que vivimos, e incluso puede comprender y funcionar con nuestras expresiones, del tipo:

«hace mucho calor»

«no es muy alto»

«el ritmo del corazón está un poco acelerado»

La lógica difusa se basa en cuantificadores de cualidad:

Mucho, muy, un poco, pequeño, menos, mas, súper, nada, si, no, extremo, mas o menos, equilibrado, casi, grande, enorme, satisfecho, insatisfecho, elevado, favorable, desfavorable, regular, bueno, malo, excelente, aceptable, deficiente, sobresaliente.

Definición

Ejemplo

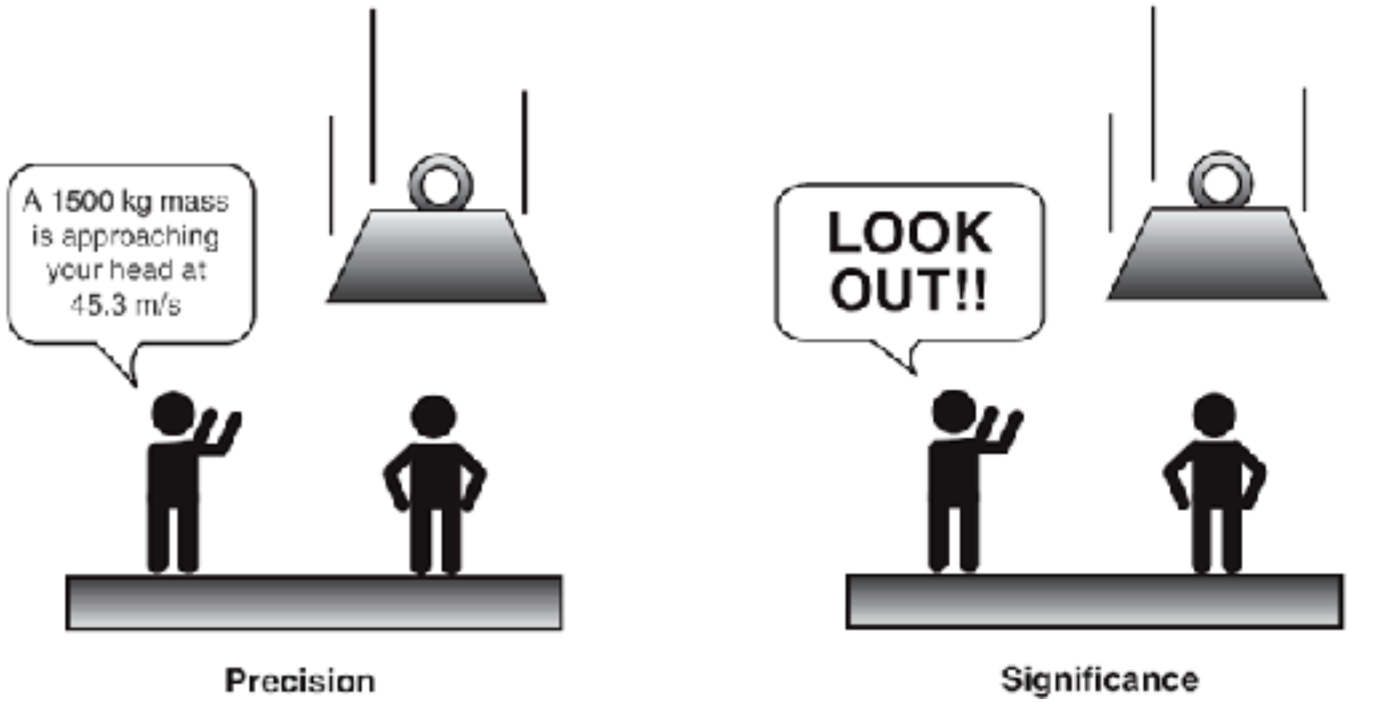
- En la lógica tradicional, solo tienes resultados como verdadero o falso (0 - 1).

- En la difusa, tienes valores entre 0 y 1, siendo 0 falso y 1 verdadero, es algo como la **cantidad de probabilidad de verdad**.

- "Yo siempre como hamburguesas“, sin embargo el solo come hamburguesas de lunes a viernes. En la lógica tradicional esto sería falso
- Lógica difusa sería 5 de 7, es decir 0.71, ósea un 71% de probabilidad de verdad.

Precisión e importancia de la información

- El grado de importancia de la información no esta siempre relacionado con su precisión.



Introducción lógica difusa

https://www.youtube.com/watch?v=rln_kZbYaWc

Conjuntos difusos

- Definición de conjuntos difusos
- Representación de conjuntos difusos

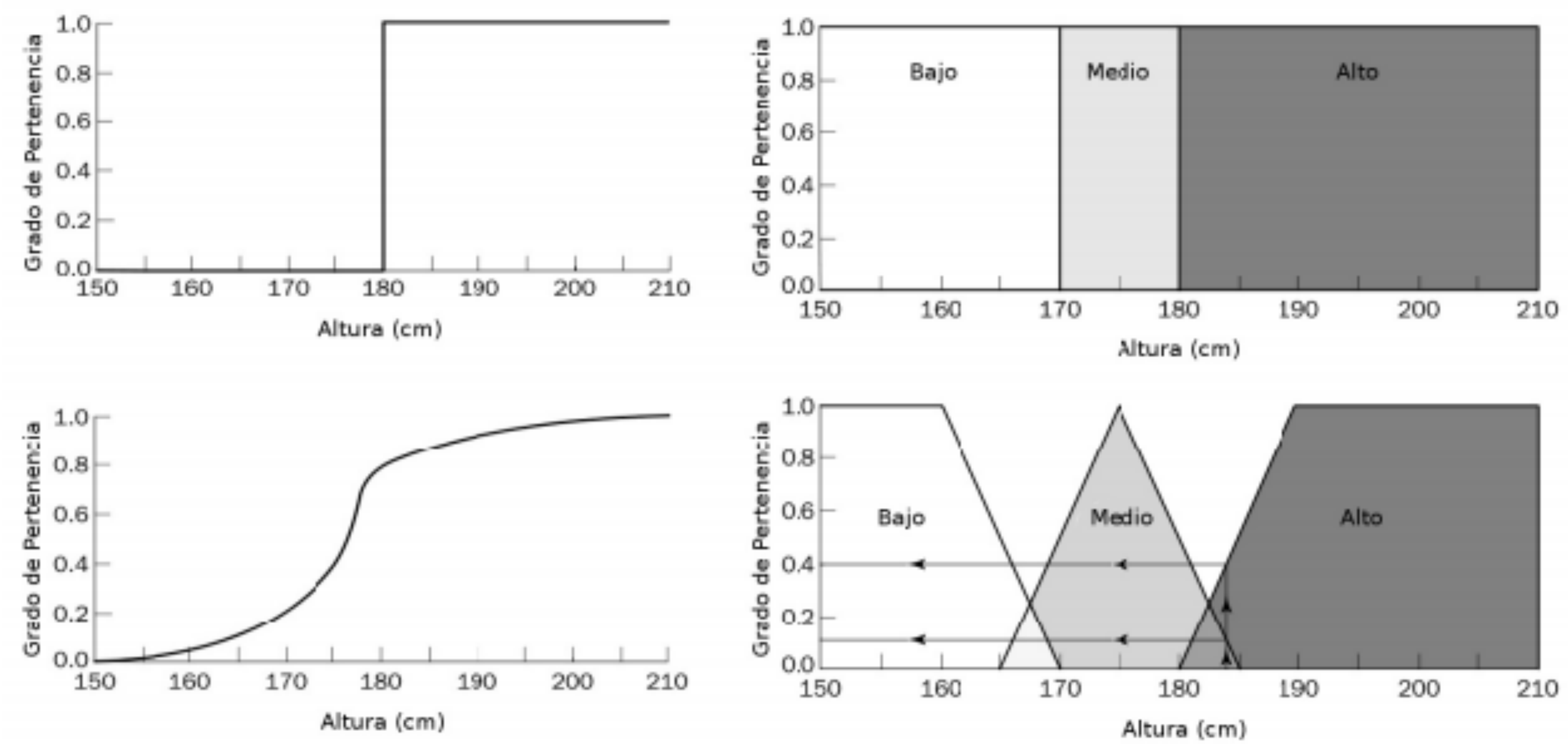
Lógica Clásica:

- Establece que un elemento del universo pertenece o no pertenece a un conjunto. Cualquier enunciado o proposición puede tener un valor lógico verdadero o falso.

Lógica Difusa:

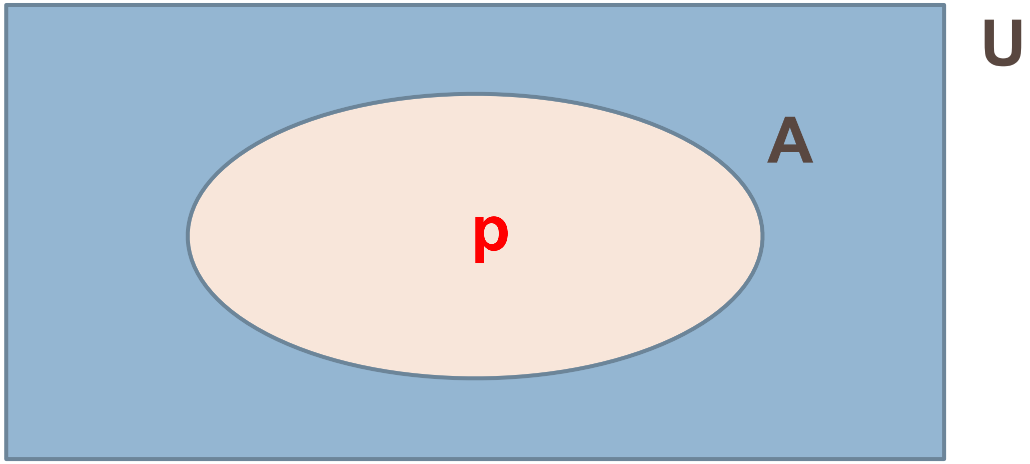
- Introduce una función de pertenencia que expresa el grado de “pertenencia” de elemento del universo tomando valores en el rango de 0 a 1.

Grado de Pertenencia – ejemplo estatura



Conjuntos Clásicos

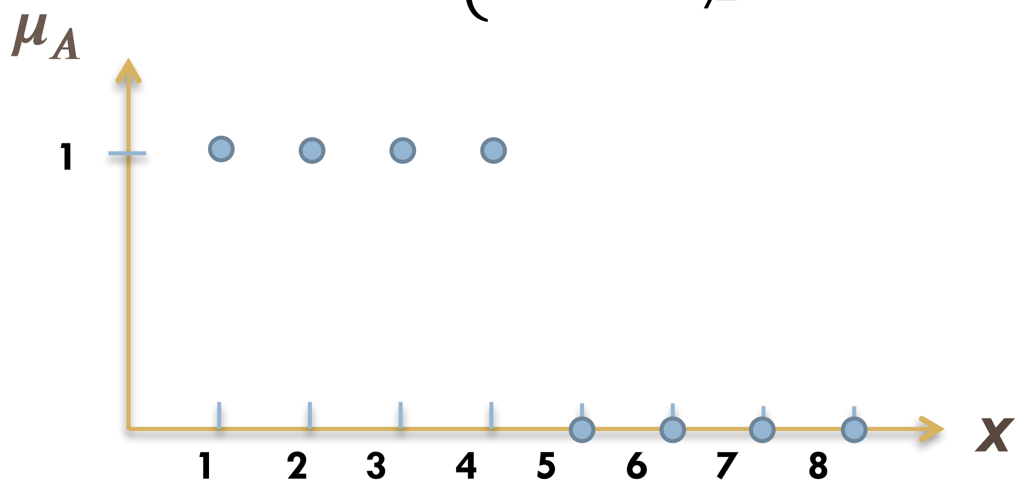
Alguna propiedad de ***p*** determina su pertenencia al conjunto *A*.



Conjuntos Clásicos - Ejemplo

A = El conjunto de números naturales menores que cinco.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

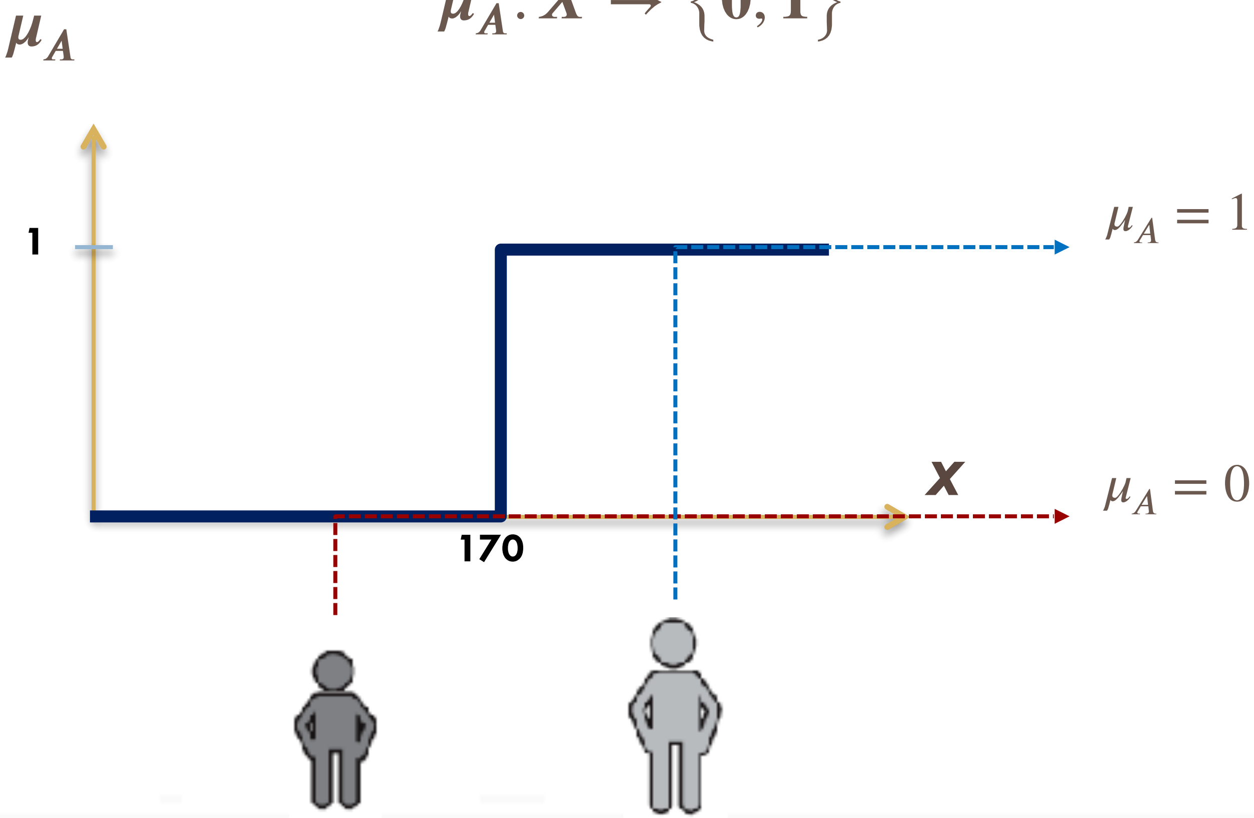


donde X es el universo de discurso, y $\mu_A : X \mapsto \{0,1\}$ la función de pertenencia

Conjuntos Clásicos - Ejemplo

A : Conjunto de personas de estatura alta

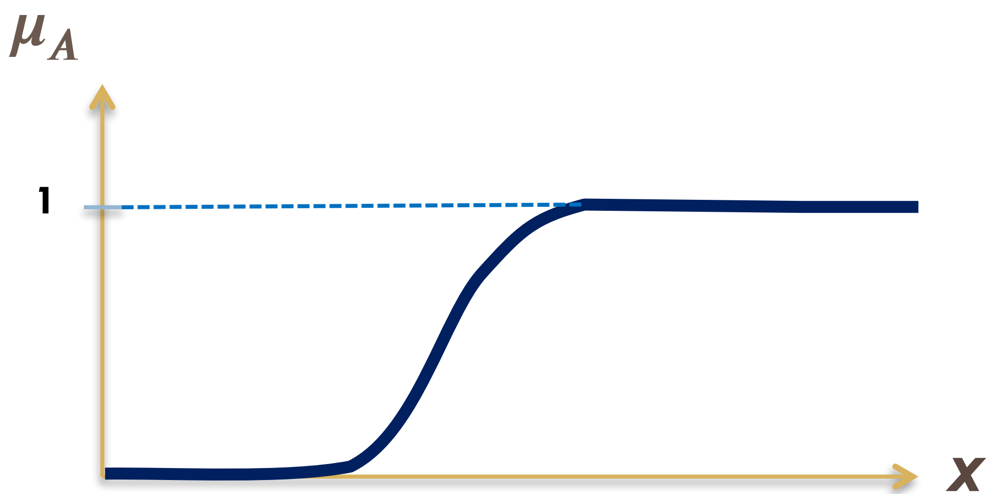
$$\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$



Conjuntos Difusos

- Un conjunto difuso (A) se caracteriza por,

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$



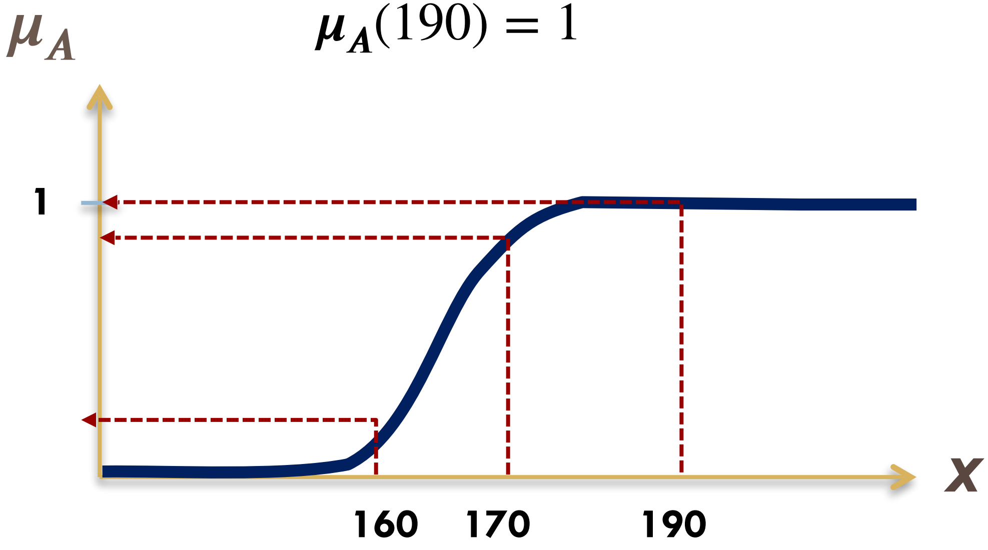
Conjuntos Difusos - Ejemplo

- Para cada elemento $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\mu_A}(x)$ es el grado de pertenencia al conjunto difuso A.

$$\mu_A(160) = 0{,}2$$

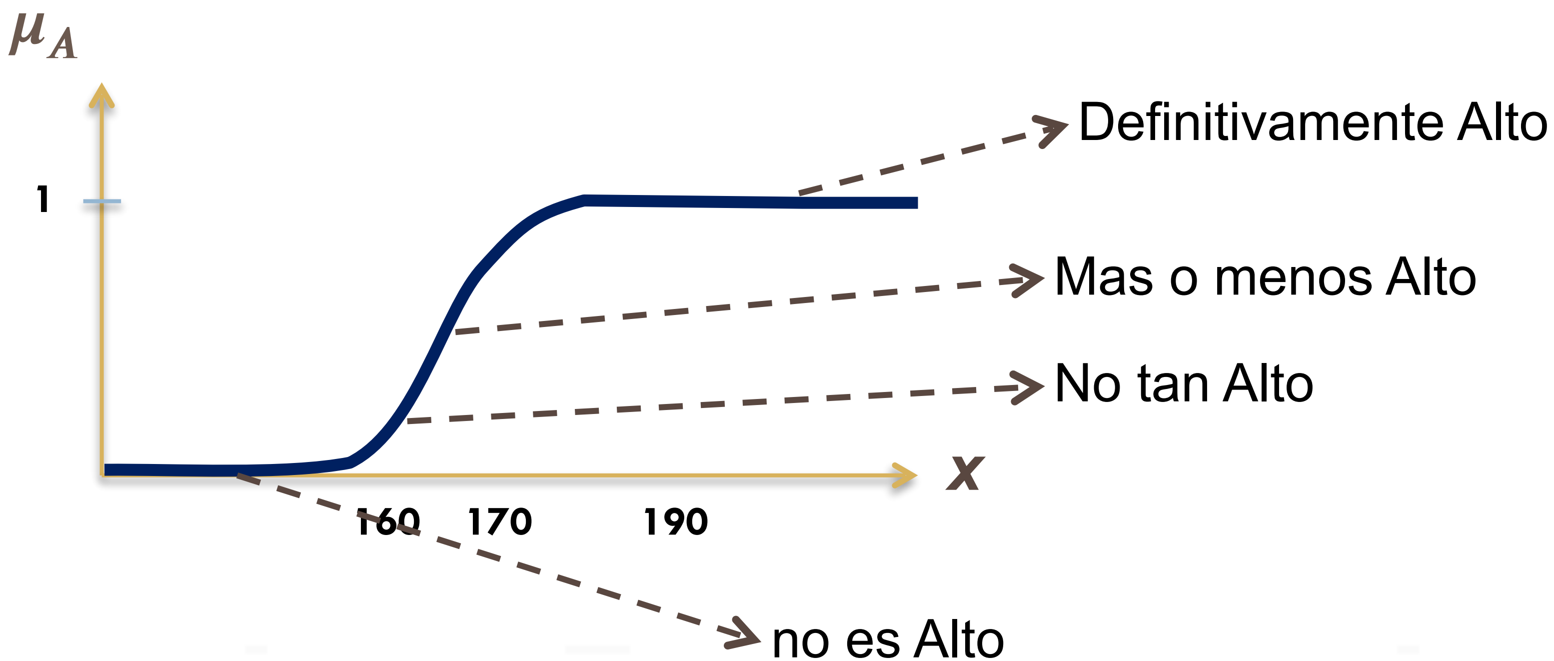
$$\mu_A(170) = 0{,}9$$

$$\mu_A(190) = 1$$

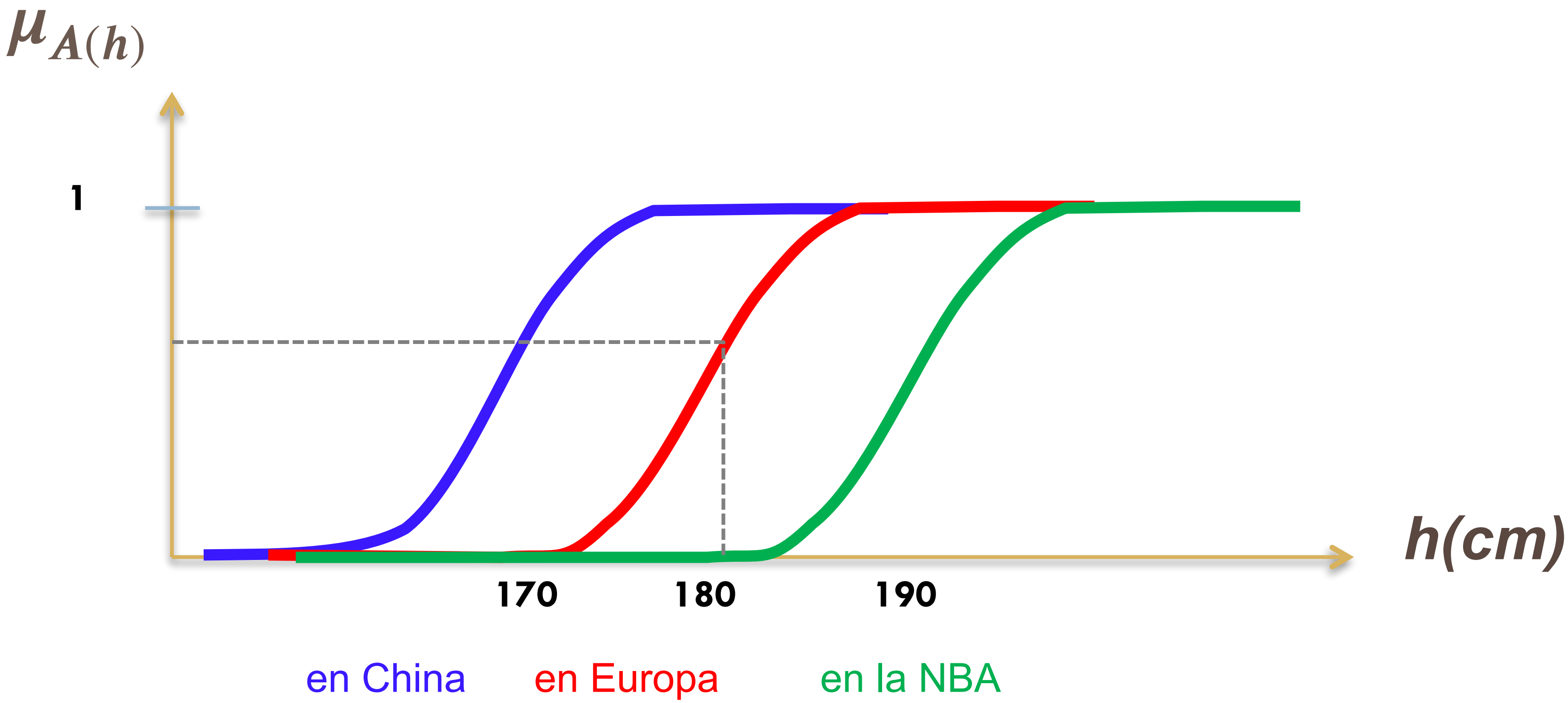


Conjuntos Difusos - Ejemplo

- Para cada elemento $\boldsymbol{x}$, $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia al conjunto difuso A.



Conjuntos Difusos – Perfil subjetivo



Conjunto Difuso: Definición

- **Definición formal:** Un conjunto difuso ***A*** en ***X*** se expresa como un conjunto de pares ordenados:

$$B = \left\{ \left(x, \mu_B(x) \right) \;\middle|\; x \in X \right\}$$

$$A = \left\{ \left(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Función de pertenencia (MF)}} \right) \;\middle|\; x \in X \right\}$$

Conjunto difuso

Función de pertenencia (MF)

Universo o Universo de discurso

> *Un conjunto difuso esta completamente caracterizado por una función de pertenencia*

Conjuntos Difusos: Definición

- **Función de pertenencia:** Un conjunto difuso A sobre el dominio (universo) $\boldsymbol{X}$, es un conjunto definido por la función de pertenencia $\boldsymbol{\mu_A(x)}$, la cual es un mapeo desde el universo $\boldsymbol{X}$ al intervalo unitario.

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

- Para cada elemento $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ es el grado de pertenencia al conjunto difuso A.

Representación de conjuntos difusos

- Conjuntos difusos con Universo Discreto
- Conjuntos difusos con Universo Continuo
- Conjuntos difusos Singleton

Representación de conjuntos difusos

- Conjuntos difusos con universo discreto,

$$X = \left\{x_1, x_2, \cdots, x_n\right\}$$

- Función de pertenencia,

$$\mu_A = \left\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \cdots, \mu_A(x_n)\right\}$$

- Representación alternativa,

$$A = \left\{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, \cdots, \mu_A(x_n)x_n\right\}$$

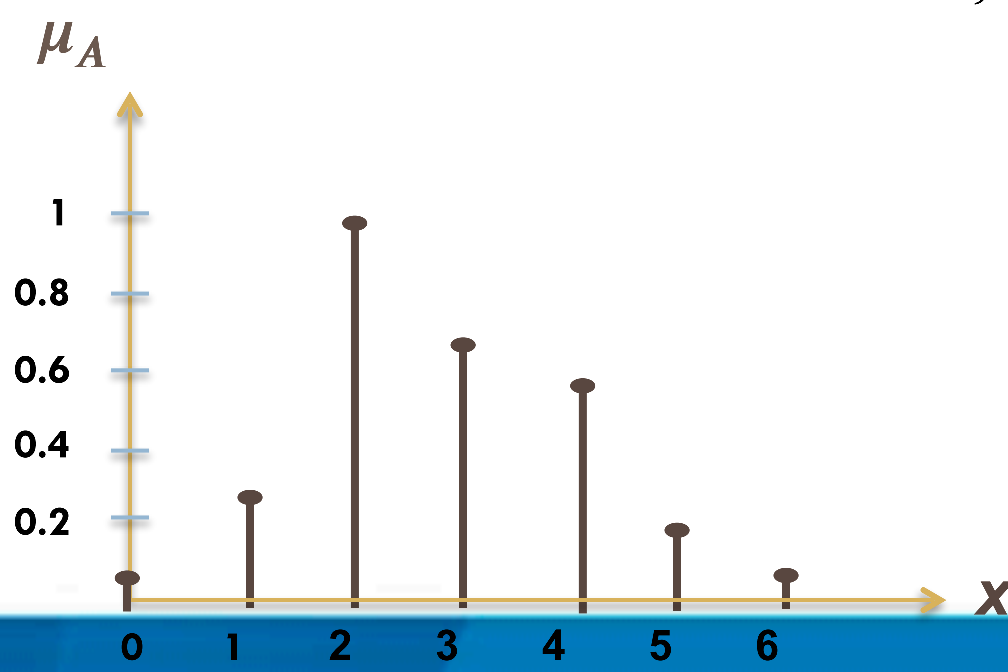
Conjunto difuso con universo discreto

A = “numero razonable de hijos”

$$X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$ (universo discreto)

$$\mu_A = \{0.1,\ 0.3,\ 1,\ 0.7,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1\}$$

$$A = \{0.1/0,\ 0.3/1,\ 1/2,\ 0.7/3,\ 0.6/4,\ 0.2/5,\ 0.1/6\}$$

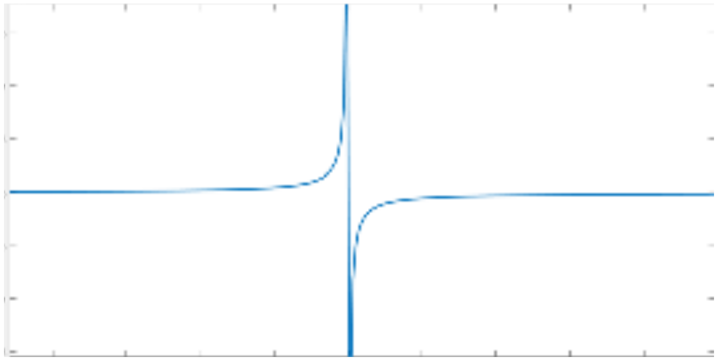


Representación de conjuntos difusos

- Conjuntos difusos con Universo Continuo

La función de pertenencia tiene una formula analítica.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad x \in R$$



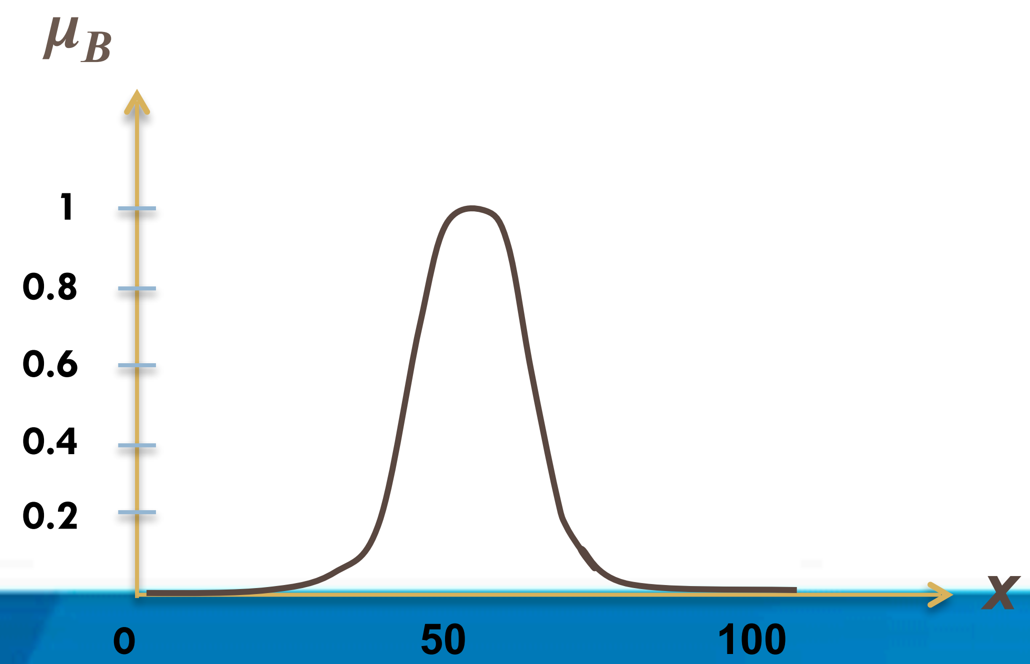
Conjunto difusos con universo continuo

B = "cerca de 50 años de edad"

X = Conjunto de números reales positivos (continuo)

$$B = \left\{ (x, \mu_B(x)) \;\middle|\; x \in X \right\}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10} \right)^2}$$



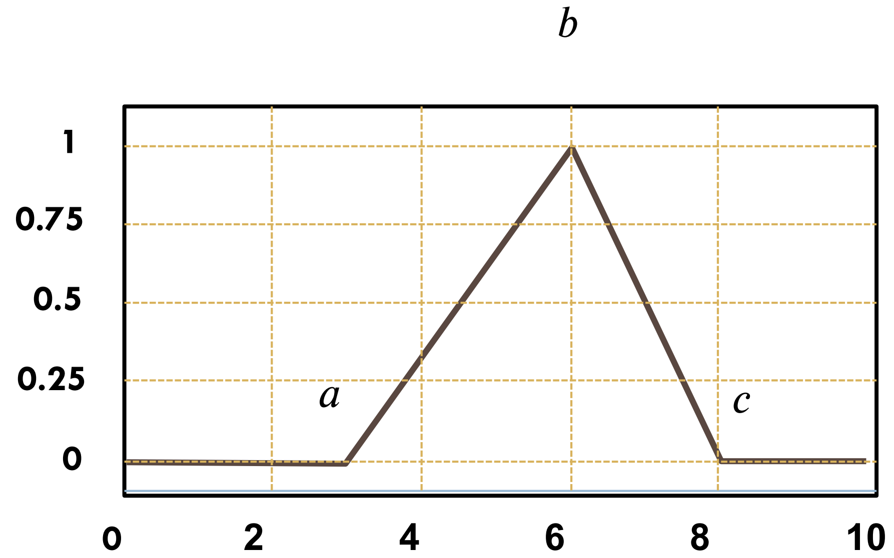
Funciones de Pertenencia - MF

- Habitualmente se utilizan funciones de pertenencia estándar, entre las más comunes están:
    - Triangular
    - Trapezoidal
    - Gaussiana
    - Campana generalizada
    - Sigmoidal

- Nos permite representar las funciones de forma compacta, a la vez que se simplifican los cálculos.

MF Triangular

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ \frac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & c\le x\end{cases}$$

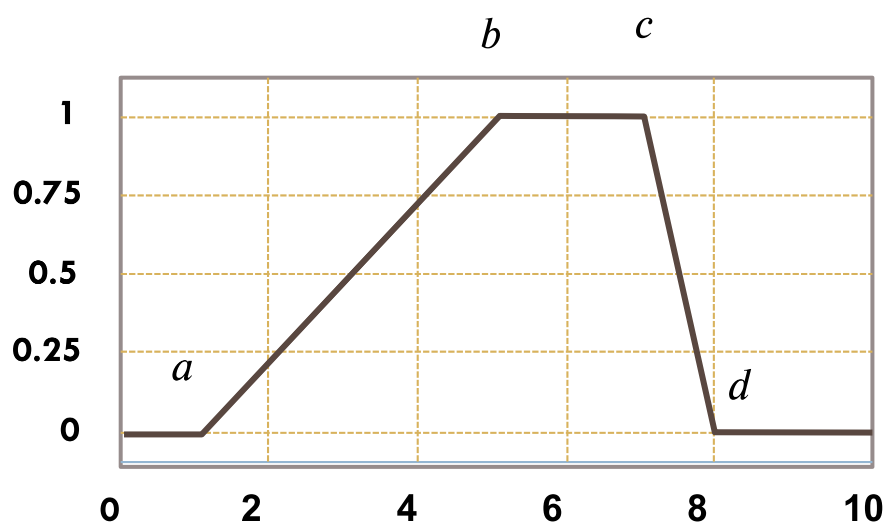


$f(x;3,6,8)$

$$f(x;a,b,c)=max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{c-x}{c-b}\right),0\right)$$

MF Trapezoidal

$$f(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & d \le x \end{cases}$$

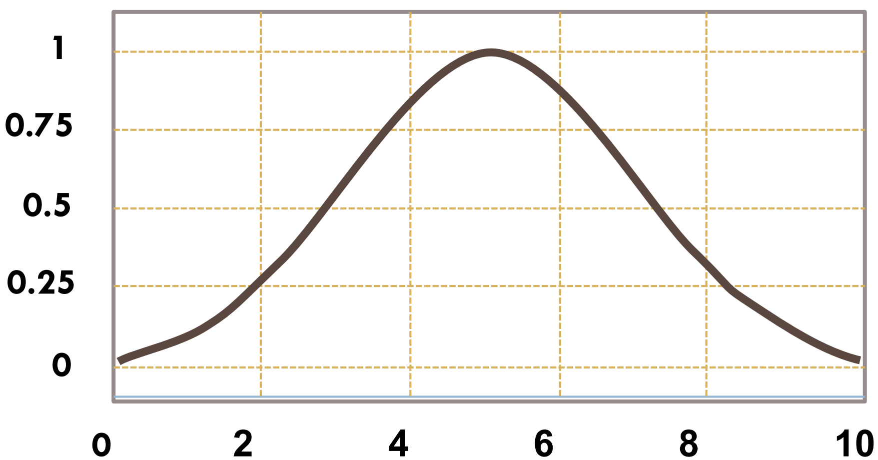


$f(x;1{,}5{,}7{,}8)$

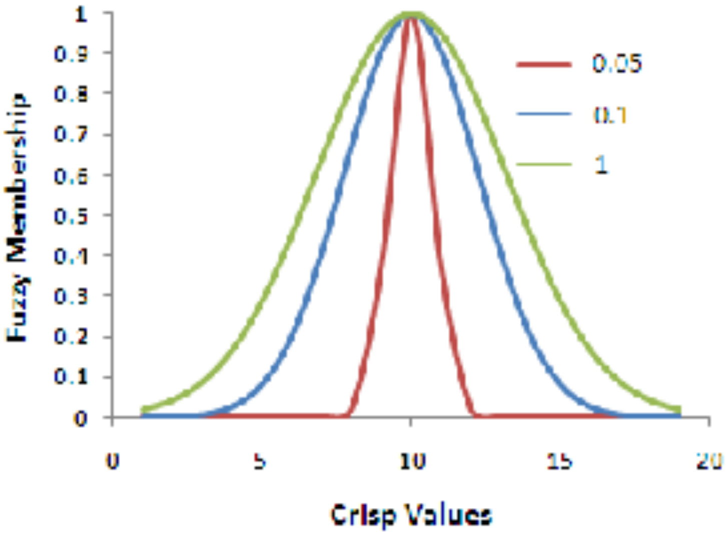
$$f(x;a,b,c,d) = max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$

MF Gaussiana

$$f(x;\sigma,c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$



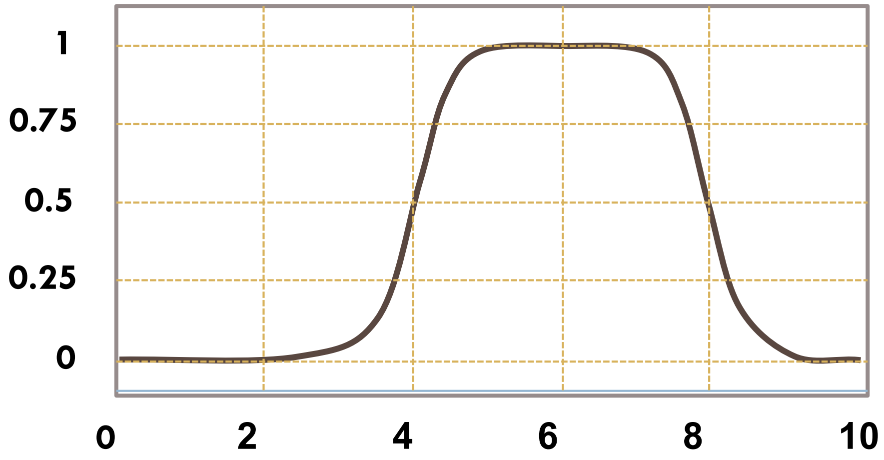
$f(x;2,5)$



"Cuanto mas pequeña sea la desviación estándar la campana será mas estrecha"

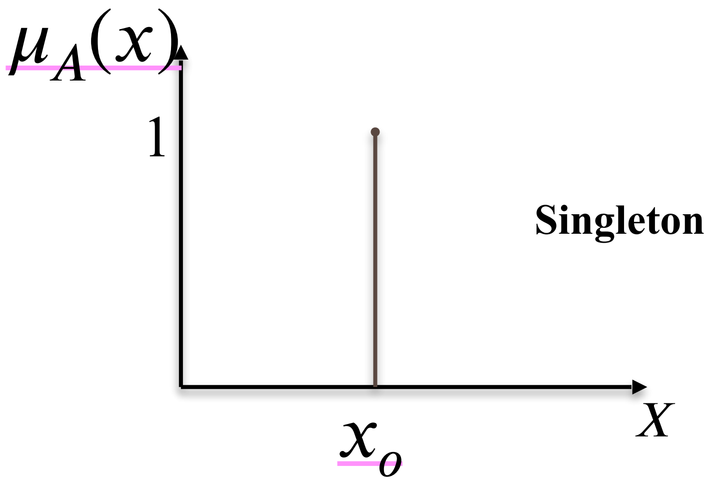
MF Campana generalizada

$$f(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}$$



$f(x; 2,4,6)$

Conjunto singleton



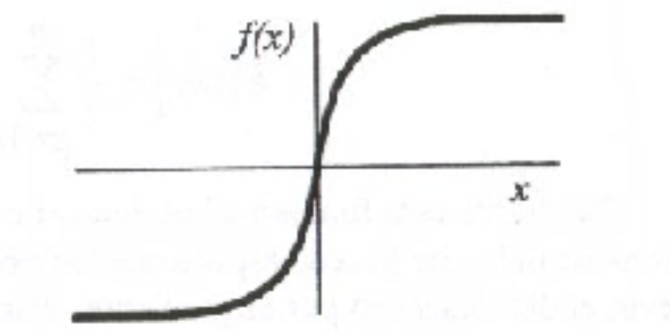
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = x_o \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- Mapea un punto con valor-real $x_o \in X$ a un conjunto difuso A en X el cual tiene valor de membresía 1 en x_o y 0 en todos los otros puntos en X.

MF Sigmoide

Tarea:

Consultar la función de pertenencia sigmoidal y realizar un algoritmo en Matlab que la represente.



Variables lingüísticas

Variable Lingüística

- Una variable lingüística, como su nombre lo sugiere, es una variable cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o sintético.

- Ejemplo: "Edad" es una variable lingüística y si sus valores son por ejemplo, "joven", "adulto", "anciano".

- **Cada valor de una variable lingüística representa un conjunto difuso en un universo determinado, y debe tener asociado una función de pertenencia.**

Variable Lingüística

- Una variable numérica toma valores numéricos:

  Edad = 40

- Una variable lingüística toma valores lingüísticos:

  Edad: adulto

- Los valores de una variable lingüística son conjuntos difusos.

Variable Lingüística

- **Definición**: Una variable lingüística esta definida por,

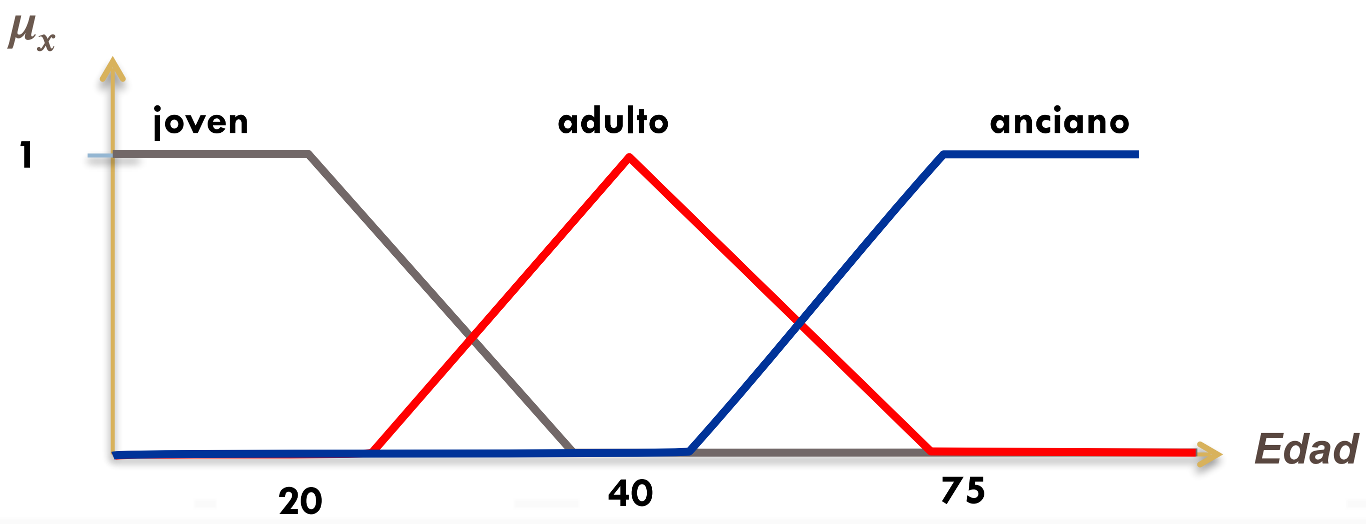
$$(x,\ T(x),\ X,\ M)$$

donde:

- x es el nombre de la variable
- $T(x)$ es el conjunto de valores lingüísticos (o términos)
- X es el universo del discurso
- M es una regla semántica que proporciona los significados para los valores lingüísticos.

Variable Lingüística: Edad

- x Edad
- T(x) = { joven, adulto, anciano }
- X = [0, 100] años
- M es una regla semántica que proporciona los significados para los valores lingüísticos.



Utilidad de las variables lingüísticas

- Es una forma de comprimir información (Zadeh 1994): Una etiqueta incluye muchos valores posibles.
- Ayuda a caracterizar fenómenos que o están mal definidos o son complejos de definir o ambas cosas (Zadeh 1975).
- Es un medio de trasladar conceptos o descripciones lingüísticas a descripciones numéricas que pueden ser tratadas computacionalmente.
- Relaciona o traduce el proceso simbólico a un proceso numérico.

Bibliografía

- J.-S. Roger Jang, Slides for Fuzzy Sets, Ch. 2 of Neuro-Fuzzy and Soft Computing. CS Dept., Tsing Hua Univ., Taiwan.
- Robert Babuska. Fuzzy and neural control. DISC Course Lecture Notes, October 2001.
- Roger Jang. Neuro-Fuzzy and Soft Computing. Prentice Hall, 1997.

Preguntas

Gracias…