

---

# Le mouvement brownien

---

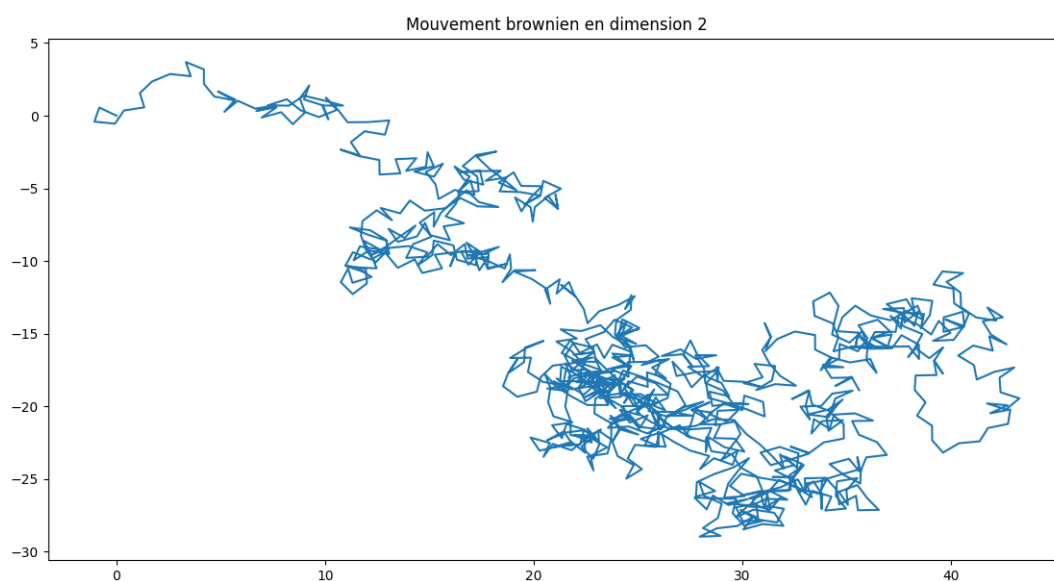


FIGURE 1 – Exemple de mouvement brownien

Macé Sébastien - Thys Eliot

*Tuteur* : Huguet Baptiste

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus stochastique</b>	<b>3</b>
1.1	Préambule . . . . .	3
1.2	Loi de dimension finie d'un processus stochastique . . . . .	4
1.3	Équivalence de processus stochastiques . . . . .	4
1.4	Processus gaussiens . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Le mouvement Brownien</b>	<b>8</b>
2.1	Définition et caractérisation . . . . .	8
2.2	Invariance du mouvement Brownien . . . . .	10
2.3	Continuité des trajectoires du mouvement brownien . . . . .	10
2.4	Non différentiabilité . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Construction</b>	<b>14</b>
3.1	Limite de marche aléatoire . . . . .	14
3.2	Théorème de Donsker . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Modélisation</b>	<b>18</b>
4.1	Estimateur . . . . .	18
4.2	Mouvement dans une rivière . . . . .	19
4.3	Maximum de vraisemblance . . . . .	20
4.4	Mouvement de marée . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>25</b>
5.1	Lemme de Slutsky . . . . .	25
5.2	Fonctions python . . . . .	26

# Introduction

En 1827, le botaniste Robert Brown observe au microscope dans les grains de pollen des particules ayant un mouvement erratique dans le fluide qui les contient. Pour des raisons matérielles, il a fallu attendre le XXIème siècle pour pouvoir en faire l'étude plus précise. Le mouvement Brownien sert dans de nombreux domaines, allant de la thermodynamique à la finance. Il a notamment permis de déterminer précisément le nombre d'Avogadro dès 1909.

Il s'agit d'un domaine des probabilités essentiels pour comprendre le fonctionnement précis de phénomènes. De plus, ce mouvement a de nombreuses propriétés mathématiques très intéressantes comme la continuité et la non différentiabilité des trajectoires.

# Chapitre 1

## Processus stochastique

Un processus est l'étude de l'état d'une caractéristique d'un objet à travers une fonction  $t \mapsto X(t)$ . Par exemple, en prenant  $t$  le temps, on peut étudier la position d'un objet. Les processus stochastiques correspondent au cas où l'aléa affecte l'évolution par rapport au temps de la fonction. Il convient alors d'étudier  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ , en posant convenablement les ensembles de départ et d'arrivée, tel que pour  $t$  fixée, la fonction  $(\omega) \mapsto X_t(\omega)$  soit une variable aléatoire. Les processus stochastiques sont, bien entendu, étudiés en mathématiques et essentiel pour construire des objets comme nous allons le voir avec le mouvement Brownien. Mais c'est aussi un outil essentiel dans l'étude des comportements décrivant la réalité (comme l'exemple les particules du pollen citées précédemment). Ainsi ils sont fréquemment utilisés en physique, en économie, biologie.

### 1.1 Préambule

#### Définition :

Un processus stochastique adapté est la donnée  $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, (X_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  où :

- $\Omega$  est l'univers des possibles,
- $\mathcal{F}$  est une tribu de  $\Omega$ ,
- $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{F}$ , appelée filtration de  $\mathcal{F}$  indexée par  $\mathbb{T}$ ,
- $\mathbb{P}$  est une mesure de probabilité de  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,
- $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une famille de variable aléatoire indexée par  $\mathbb{T}$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{T}$  fixée,  $X_t$  soit  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Le processus  $((X_t)_{t \in \mathbb{T}})$  est à valeur dans un espace topologique  $\mathbb{E}$  que l'on muni de la tribu des boréliens de  $\mathbb{E}$ . Par la suite, nous travailleront principalement dans le cas  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$ .

#### Remarques :

- La condition de croissance des tribus  $\mathcal{F}_t$  et la  $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de  $X_t$  implique que pour  $t' > t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_{t'}$ -mesurable.
- On peut définir une filtration, dite naturelle :  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_{t'}, t' \leq t)$ .  
La suite de tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est croissante et rend les  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -mesurables. Il s'agit alors de la petite filtration possible, en effet : pour toute filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  et tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. D'où  $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$ , et, par croissance de la famille  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on a, pour tout  $t' \leq t$ ,  $\sigma(X_{t'}) \subset (\mathcal{F}_t)$ . Donc  $\mathcal{F}_t$  est une tribu qui contient l'image réciproque de chaque  $X_{t'}$ , et par l'argument de minimalité  $\sigma(X_{t'}, t' \leq t) \subset (\mathcal{F}_t)$ .
- Pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est appelé trajectoire du processus correspondant à l'éventualité  $\omega$ . Par la suite, nous chercherons à obtenir des propriétés sur les trajectoires d'un processus stochastique adapté.

## 1.2 Loi de dimension finie d'un processus stochastique

#### Définition :

Soit  $X$  un processus stochastique adapté.

Pour tous  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , on note  $I$  le vecteur  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  et  $P_I$  la loi du vecteur  $X_I = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ .

On appelle loi de dimension finie d'un processus  $X$  l'ensemble  $\{P_I | I \in \mathcal{P}_f(T)\}$ , où  $\mathcal{P}_f(T)$  désigne l'ensemble des parties finies de  $T$ .

#### Proposition :

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux processus  $(\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P}_2)$ .

Si les deux processus ont les mêmes lois de dimensions finies, alors  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  sont égaux sur  $\sigma(X_t, t \in T)$ .

Soit  $I$  une partie finie de  $T$ .

Les images réciproques des boréliens de  $\mathbb{E}^I$  par  $X_I$  (notés  $\gamma$  pour la suite) sont de probabilités égales car les lois de dimension finie sont égales. De plus,  $\gamma$  est un  $\Pi$ -système et l'ensemble des événements tel que  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$  est une classe monotone qui contient  $\gamma$ .

Ainsi la classe monotone engendrée par  $\gamma$  est incluse dans l'ensemble des événements tel que  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ .

Donc par le théorème des classes monotones, pour toutes parties finies  $I$  de  $T$ ,  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$  sur  $\sigma(X_{t'}, t' \in I)$ .

## 1.3 Équivalence de processus stochastiques

L'intérêt de cette notion essentielle est le théorème de Kolmogorov (1937) qui est essentiel pour définir les propriétés du mouvement Brownien mais en restant plus général car il s'applique à n'importe quel processus stochastique.

#### Définition

Soit  $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $X' = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$  deux processus.

On dit que :

- les processus  $X$  et  $X'$  sont équivalents s'ils ont les mêmes lois de dimension finie,
- les processus  $X$  et  $X'$  sont une modification (ou une version) l'un de l'autre si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$  et si pour tout  $t \in T$ ,  $X_t$  et  $X'_t$  sont égaux  $\mathbb{P}$ -presque partout,
- les processus  $X$  et  $X'$  sont indiscernables si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$  et si  $\mathbb{P}(\omega | \forall t \in T, X_t(\omega) = X'_t(\omega)) = 1$ .

### Propositions

- Deux processus  $X$  et  $X'$  indiscernables sont des modifications l'un de l'autre, en effet, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\mathbb{P}(\omega | X_t(\omega) = X'_t(\omega)) = 1$ .
- Deux processus  $X$  et  $X'$  qui sont de modifications l'un de l'autre sont équivalents, en effet, si pour tout  $t \in \mathbb{T}$  on note  $N_t$  l'ensemble négligeable tel que  $X_t \neq X'_t$ , alors pour tout  $I = (t_1, \dots, t_n)$ , on a  $N_I = \bigcup_{k=1}^n N_{t_k}$  qui est aussi de probabilité nul. Donc  $X_t$  et  $X'_t$  sont égaux  $\mathbb{P}$ -presque partout.
- Deux processus  $X$  et  $X'$ , modifications l'un de l'autre ne sont pas forcément indiscernables : Pour  $E = \mathbb{R}$ ,  $T = \Omega = [0, 1]$ ,  $\mathbb{P}$  la mesure de Lebesgue,  $(X_t)_{t \in T}$  le processus nul et  $(X'_t)_{t \in T} = (\mathbb{1}_{\{t\}})_{t \in T}$ , suite de fonctions mesurables car  $\{t\}$  est mesurable alors pour tout  $t \in T$ , on a  $X_t = X'_t$ ,  $\mathbb{P}$ -presque partout. Cependant  $(\omega | \forall t \in T, X_t(\omega) = X'_t(\omega)) = \emptyset$ .

### Définition

Dans le cadre de l'étude de processus continus, nous travaillerons avec soit  $\mathbb{T} = [0, a]$  avec  $a$  un réel positif, soit  $T = [0, \infty[$ .

Un processus  $X$  est continu si pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{E}$ .

Un processus  $X$  est continu  $\mathbb{P}$ -presque sûrement s'il existe un ensemble négligeable  $N$  tel que pour tout  $\omega \in \Omega \setminus N$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{E}$ .

Deux processus continus et modifications l'un de l'autre sont indiscernables.

Soient  $X$  et  $X'$  deux processus continus et étant une modification l'une de l'autre et  $\mathbb{T}$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}$ , on pose  $A_q$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que  $X_q(\omega) = X'_q(\omega)$ .

Alors pour tout  $q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}$ ,  $\mathbb{P}(A_q) = 1$ , car  $X$  et  $X'$  sont modifications l'un de l'autre. D'où  $\mathbb{P}(\bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} A_q) = 1$ .

Pour tout  $\omega \in \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} A_q$ , l'application de  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R} : q \mapsto (X_q - X'_q)(\omega)$  se prolonge par continuité à  $\mathbb{T}$ , par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ . Or, pour tout  $\omega \in \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} A_q$  et tout  $q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}$   $(X_q - X'_q)(\omega) = 0$ , on déduit donc que le prolongement est la fonction nul sur  $\mathbb{T}$ .

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X'_t = X_t$  sur l'ensemble  $\bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{T}} A_q$  qui est de mesure 1. Donc  $X$  et  $X'$  sont indiscernables.

### Théorème de Kolmogorov

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  un processus à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ .

S'il existe des constantes  $C, \alpha, \beta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  tels que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  vérifie :

$$\forall s, t \in \mathbb{T}, \mathbb{E}(|X_t - X_s|^\beta) \leq C|t - s|^{1+\alpha}.$$

Alors il existe une version  $\hat{X}$  de  $X$ , à trajectoires continues. De plus, sur tout compact  $[0, a] \subset \mathbb{T}$ , les trajectoires de  $X$  sont holdériennes d'exposant  $\gamma$  pour tout  $\gamma$  positif strictement inférieur à  $\frac{\alpha}{\beta}$ , c'est-à-dire que pour tout  $\omega \in \Omega$ , il existe une constante  $K_\omega > 0$  telle que pour tous  $s, t \in [0, a]$ ,  $|\hat{X}_t(\omega) - \hat{X}_s(\omega)| \leq K_\omega |t - s|^\gamma$ .

Traitons le cas  $[0, a]$  avec  $a$  réel.

Posons  $D = (\frac{ak}{2^n} | \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket)$ . L'ensemble  $D$  est dense dans  $[0, a]$ .

Travaillons en 3 étapes :

- En dehors d'un ensemble négligeable de trajectoires  $\omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est uniformément continue sur  $D$ .
- Cette application est holdérienne.
- Elle se prolonge à  $\mathbb{T}$  en une version du processus.

Étape 1 :

Soit  $\gamma \in ]0, \frac{\alpha}{\beta}[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} B_k$  où  $B_k = \left\{ |X_{\frac{(k+1)a}{2^n}} - X_{\frac{ka}{2^n}}| \geq 2^{-n\gamma} \right\}$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la probabilité de l'ensemble  $A_N$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_N) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{2^N-1} B_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2^N-1} P(B_k), \text{ par } \sigma\text{-additivité,} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^N-1} C 2^{N\gamma\beta - N(1+\alpha)} a^{1+\alpha}, \text{ par l'inégalité de Markov,} \\ &\leq C a^{1+\alpha} 2^{-N(\alpha-\gamma\beta)} \end{aligned}$$

La suite de probabilité  $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable, d'où par le lemme de Borel-Canteli, on a  $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ , donc  $\mathbb{P}(\liminf A_n^c) = 1$ .

Ainsi il existe  $\omega$  dans  $\liminf A_n^c$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $m > n$ , on a  $\omega \notin A_m$ . C'est à dire, si  $m > n$  et si  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ , alors  $|X_{\frac{ka}{2^m}} - X_{\frac{(k+1)a}{2^m}}| < 2^{-m\gamma}$  [1].

Soit  $m > n$  et  $t \in D$ .

Il existe un entier  $k_0$  tel que  $t \in \left[ \frac{ak_0}{2^m}, \frac{a(k_0+1)}{2^m} \right[$ .

Comme  $t$  est dans  $D$ , on en déduit qu'il existe un entier  $j$  tel que  $t = \frac{ak_0}{2^m} + \sum_{k=m+1}^j d_k \frac{a}{2^k}$  avec  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Cela correspond à décomposition en base 2 de  $t$ .

En utilisant cette écriture et en se ramenant à [1], on obtient que :

$$|X_{\frac{k_0 a}{2^m}} - X_t| \leq \sum_{k=m+1}^j |X_{u_k} - X_{u_{k-1}}| \text{ avec } u_k = \frac{ak}{2^m} + \sum_{l=m+1}^j d_l \frac{1}{2^l} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Si  $d_k = 0$ , alors  $u_k = u_{k-1}$ , sinon  $d_k = 1$  et on peut appliquer [1] et majorer. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} |X_{\frac{k_0 a}{2^m}} - X_t| &\leq \sum_{k=m+1}^j |X_{u_k} - X_{u_{k-1}}| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^j 2^{-k\gamma} \\ &\leq 2^{-(m+1)\gamma} \frac{(1 - 2^{-(j-m)\gamma})}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &\leq \frac{2^{-(m+1)\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \end{aligned}$$

Soit  $m > n$  et  $t, t' \in D$ , tel que  $|t - t'| < \frac{a}{2^m}$ .

Supposons que  $t < t'$ . On dispose d'un entier  $k_0$  tel que  $t \in \left[ \frac{ak_0}{2^m}, \frac{a(k_0+1)}{2^m} \right[$ .

Il y a deux cas soit  $t' \in \left[ \frac{ak}{2^m}, \frac{a(k+1)}{2^m} \right[$ , soit  $t \in \left[ \frac{a(k+1)}{2^m}, \frac{a(k+2)}{2^m} \right[$ .

Dans le premier cas, on a :

$$|X_{t'} - X_t| \leq |X_{\frac{k_0 a}{2^m}} - X_t| + |X_{\frac{k_0 a}{2^m}} - X_{t'}| \leq 2 \frac{2^{-(m+1)\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}}.$$

Dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned} |X_{t'} - X_t| &\leq |X_{\frac{ka}{2^m}} - X_t| + |X_{\frac{ka}{2^m}} - X_{\frac{(k+1)a}{2^m}}| + |X_{\frac{(k+1)a}{2^m}} - X_{t'}| \\ &\leq 2^{-m\gamma} + 2 \frac{2^{-(m+1)\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &= 2^{-m\gamma} \left( 1 + 2 \frac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \right). \end{aligned}$$

Notons  $K = (1 + 2^{\frac{2^{-\gamma}}{1-2^{-\gamma}}})$ .

Dans les deux cas, on a  $|X_{t'} - X_t| \leq K 2^{-m\gamma}$  [2].

On en déduit que la fonction  $X_t(\omega)$  est uniformément continue sur  $D$ .

Étape 2 :

Soit  $t, t'$  dans  $D$  tel que  $|t - t'| \leq \frac{a}{2^{-m}}$ .

Il existe  $n > m$  tel que  $\frac{a}{2^{n+1}} \leq |t - t'| \leq \frac{a}{2^n}$ . Alors avec [2] on a :

$$\begin{aligned} |X_t - X_{t'}| &\leq K 2^{-n\gamma} \\ &\leq K |t - t'|^\gamma a^{-\gamma} 2^\gamma \text{ (a est non nul car on prend un segment non vide).} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $t$  et  $t'$  sont distant de plus de  $\frac{a}{2^m}$ , alors, en supposant par exemple  $|t - t'| \leq \frac{2a}{2^{-m}}$  et  $t > t'$ , :

$$\begin{aligned} |X_t - X_{t'}| &\leq |X_t - X_{\frac{t+t'}{2}}| + |X_{\frac{t+t'}{2}} - X_{t'}| \\ &\leq K |t - \frac{t+t'}{2}|^\gamma a^{-\gamma} 2^\gamma + K |t' - \frac{t+t'}{2}|^\gamma a^{-\gamma} 2^\gamma \\ &\leq 2K |t - t'|^\gamma a^{-\gamma} 2^\gamma \end{aligned}$$

Ce calcul peut se faire de même avec  $2^m$  fois la distance  $\frac{a}{2^m}$ .

Ainsi en posant  $K' = a^{-\gamma} 2^{\gamma+m}$ , on a bien que  $X_t(w)$  est holdérienne.

Étape 3 :

On a vu que pour tout  $\omega$  dans  $\liminf A_n^c$ , on a défini sur  $D$  une fonction holdérienne.

Comme  $D$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , que  $\mathbb{R}^d$  est un Banach, et que l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est uniformément continue sur  $D$ , il existe un unique prolongement  $\tilde{X}$  tel que  $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$  soit uniformément continue.

Montrons maintenant que  $\tilde{X}_t = X_t$   $\mathbb{P}$  presque-sûrement.

Pour commencer,  $\tilde{X}_t = X_t$   $\mathbb{P}$  presque-sûrement pour tout  $t$  dans  $D$ .

Soient  $t$  dans  $[0, a]$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $t$  à valeur dans  $D$ .

Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\tilde{X}_{t_n} - X_t| > \epsilon) = 0$ , par l'inégalité de l'hypothèse combinée à l'inégalité de Markov.

Ainsi on a la convergence en probabilité, donc il y a la convergence presque-sûrement pour une sous-suite de  $\tilde{X}_{t_n}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_{t_n} = \tilde{X}_t$ .

Donc par unicité de la limite,  $\tilde{X}_t = X_t$   $\mathbb{P}$  presque-sûrement et  $\tilde{X}$  est une version holdérienne de  $X$ .

## 1.4 Processus gaussiens

### Définition

Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ .

Ce vecteur  $X$  est dit gaussien si pour tout vecteur  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire  $X \cdot a$  suit une loi gaussienne dans  $\mathbb{R}$ .

Un processus est dit gaussien réel si ses lois de dimension finie sont gaussiennes.

Soit  $X = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$  un processus gaussien.

On note alors  $m : T \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$  la moyenne du processus gaussien et  $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}, (t, t') \mapsto \text{Cov}(X_t, X_{t'})$  la covariance du processus gaussien.



# Chapitre 2

## Le mouvement Brownien

On peut maintenant s'intéresser à la définition du mouvement Brownien puis la caractériser à l'aide des processus gaussiens. La suite nous donnera des informations sur les propriétés des trajectoires du mouvement Brownien comme la continuité et la non différentiabilité.

### 2.1 Définition et caractérisation

#### Définition

Soit  $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  avec  $T = \mathbb{R}^+$  un processus à valeur réel.

On dit que  $B$  est un mouvement brownien unidimensionnel s'il vérifie les hypothèses :

- $B_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -presque-sûrement (1)
- Pour tout  $(s, t)$  tel que  $0 \leq s \leq t$ , alors la variable aléatoire  $B_t - B_s$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, t - s)$  (2)
- Pour tout  $(s, t)$  tel que  $0 \leq s \leq t$ , alors la variable aléatoire  $B_t - B_s$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_s$  (3)

On peut étendre cette définition au mouvement brownien multidimensionnel en considérant un vecteur aléatoire dont les coordonnées sont des mouvements browniens mutuellement indépendants.

#### Propositions

- Soit  $s \in \mathbb{R}^+$ .  
 $F_s$  contient au moins la filtration naturelle. Donc (3) assure que pour tout  $t \geq s$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\sigma(X_{s'}, s' \leq s) \subset (F_s)$ .  
Donc  $B_{s'}$  est indépendant de  $B_t - B_s$  pour tout  $s \geq s'$ .
- Pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^+$  tel que  $0 \leq s \leq t$ , la variable  $B_t - B_s$  est indépendant de  $F_r$  pour tout  $r \leq s$ , par croissance de la tribu  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .
- Soit  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ .  
Alors les variables  $B_{t_4} - B_{t_3}$  et  $B_{t_2} - B_{t_1}$  sont indépendants. En effet,  $B_{t_2} - B_{t_1}$  est  $F_{t_2}$  mesurable ( $B_{t_2}$  est  $F_{t_2}$  mesurable et  $B_{t_1}$  est  $F_{t_1}$  mesurable, par croissance de la filtration,  $F_{t_2}$  mesurable).  
Donc avec la remarque précédente, on a l'indépendance.

### Caractérisation du mouvement Brownien

Un mouvement Brownien est un processus gaussien centré (1) tel que :

- $B_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -presque-sûrement (2)
- Pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(B_t B_s) = \min(s, t)$  (3)

Réciproquement, un processus  $X$  qui vérifie ces propriétés (1,2,3) est un mouvement brownien naturel, c'est-à-dire vis-à-vis de sa filtration naturelle.

#### Sens direct :

On considère le processus  $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ , un mouvement brownien.

On a déjà  $B_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -presque-sûrement selon (1).

Montrons par récurrence que le mouvement Brownien est un processus gaussien centré.

Cas  $n = 1$  : Pour  $a = (a_1)$  non nul, le vecteur  $a_1 B_{t_1} = a_1(B_{t_1} - B_0)$  suit la loi  $\mathcal{N}\left(0, \frac{t_1}{\sqrt{|a_1|}}\right)$

On suppose l'existence d'un entier  $k$  tel pour tout  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $a_1 B_{t_1} + a_2 B_{t_2} + \dots + a_k B_{t_k}$  suit une loi normale centrée.

Soit  $a' = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ .

Alors  $a_1 B_{t_1} + a_2 B_{t_2} + \dots + a_{k+1} B_{t_{k+1}} = a_{k+1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + (a_k + a_{k-1})(B_{t_k}) + \dots + a_1 B_{t_1}$

On sait que  $(a_{k+1} B_{t_{k+1}}) + (a_k + a_{k-1})(B_{t_k}) + \dots + a_1 B_{t_1}$  suit une loi normale centrée (par hypothèse de récurrence) et  $a_{k+1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$  suit aussi une loi normale centrée. De plus,  $a_{k+1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$  est indépendante des  $B_t$  avec  $t \leq t_k$ . Donc la somme est bien une loi normale centrée.

Montrons maintenant que : pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(B_t B_s) = \min(s, t)$ .

Supposons  $t \geq s$ , alors  $\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) = \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$  selon (3) et (2).

D'où  $\mathbb{E}((B_s(B_t - B_s))) = \mathbb{E}(B_s B_t) - \mathbb{E}(B_s B_s) = 0$ .

Ainsi  $\mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}(B_s B_s) = \mathbb{E}((B_s - B_0)(B_s - B_0)) = s = \min(t, s)$

Ce qui conclut l'implication directe.

#### Sens réciproque :

Soit  $X$  un processus gaussien centré tel que :

- $X_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -presque-sûrement
- Pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(X_t X_s) = \min(s, t)$

La propriété (1) est alors vérifiée

Soit  $s$  et  $t$  deux réels positifs tels que  $s < t$ .

Étudions la loi finie de  $(X_s, X_t)$ . Comme  $X$  est un processus gaussien centré, on sait que  $X_s - X_t$  suit une loi normale centrée de variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t - X_s) &= \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] - \mathbb{E}[X_t - X_s]^2 \\ &= \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] \\ &= \mathbb{E}[X_t^2 + 2X_s X_t + X_s^2] \\ &= t - 2\mathbb{E}[X_t X_s] + s \\ &= t - 2s + s \\ &= t - s \end{aligned}$$

Ce qui prouve le point (2).

Il reste maintenant à montrer que pour tout  $t, s$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de  $F_s$ , et dans le cas d'une filtration naturelle, il s'agit de montrer que  $X_t - X_s$  est indépendant de  $X_r$  pour tout  $r \leq s$  (car  $F_s = \sigma(X_r, r \leq s)$ ), on a dans ce cas :

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)X_r) = \mathbb{E}(X_t X_r) - \mathbb{E}(X_s X_r) = r - r = 0 = \mathbb{E}(X_t - X_s)\mathbb{E}(X_r) = 0$$

Donc  $X$  est un mouvement brownien.

### Propositions

- Un vecteur gaussien est entièrement déterminé par sa matrice de covariance  $\Gamma = (Cov(X_j X_i))_{1 \leq i, j \leq n}$  et son espérance  $\mu$ .
- Deux mouvements browniens distincts suivent la même loi de dimension finie. On a donc unicité du mouvement brownien à équivalence près.

## 2.2 Invariance du mouvement Brownien

### Théorème

Soit  $B = (\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un mouvement Brownien. Soit  $t', c > 0$ . Alors les processus définis sur  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  par :

- $B_t^1 = -B_t$
- $B_t^2 = B_{t+t'} - B_{t'}$
- $B_t^3 = cB_{\frac{t}{c^2}}$
- $B_t^4 = tB_{\frac{1}{t}}$  pour  $t > 0$  et  $B_0^4 = 0$

sont des mouvements Browniens.

Pour les deux premiers, par rapport à la même filtration que  $B$ , pour le troisième par rapport à la filtration  $(F_{\frac{t}{c^2}})_{t \geq 0}$  et pour le quatrième par rapport à la filtration naturelle.

On remarque que  $B_0^i = 0$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Soit  $0 \leq s \leq t$ , alors :

- La variable  $B_t^1 - B_s^1 = -B_t + B_s = -(B_t - B_s)$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$  et est indépendante de  $F_s$ .
- La variable  $B_t^2 - B_s^2 = B_{t+t'} - B_{t'} - B_{s+t'} + B_{t'} = B_{t+t'} - B_{s+t'}$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t + t' - (s + t')) = \mathcal{N}(0, t - s)$  et est indépendante avec  $F_{s+t'}$ , donc est indépendante avec  $F_s$ .
- La variable  $B_t^3 - B_s^3 = c(B_{\frac{t}{c^2}} - B_{\frac{s}{c^2}})$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$  est indépendant avec  $F_{\frac{s}{c^2}}$ .
- Pour le cas 4, on utilise la caractérisation du mouvement Brownien. On remarque que le processus est clairement gaussien centré.

Il reste à montrer que :  $\mathbb{E}(B_t^4 B_s^4) = \min(s, t) = s$ .

Donc  $\mathbb{E}(B_t^4 B_s^4) = \mathbb{E}(tB_{\frac{1}{t}} sB_{\frac{1}{s}}) = st\mathbb{E}(B_{\frac{1}{t}} B_{\frac{1}{s}}) = st\min(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}) = st\frac{1}{t} = s$ . Le cas où  $s = 0$  se traite trivialement.

## 2.3 Continuité des trajectoires du mouvement brownien

### Propriétés

Soit  $B = (\Omega, F, (F_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  un mouvement brownien.

Il existe une version de  $B$  dont les trajectoires sont holdériennes d'exposant  $a$  sur tout intervalle compact, pour tout  $a < \frac{1}{2}$ .

L'idée est de se ramener au critère de Kolmogorov.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < s < t$ .

La variable  $B_t - B_s$  est de loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$ , alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|B_t - B_s|^{2n}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp -\frac{x^2}{2(t-s)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t-s)^n \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} \exp -\frac{u^2}{2} du \text{ en posant } u = \frac{x}{\sqrt{2(t-s)}} \\
&= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (t-s)^n
\end{aligned}$$

avec  $K = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} \exp -\frac{u^2}{2} du$  une constante indépendante de  $t$  et  $s$ .

Le théorème de Kolmogorov nous assure qu'il existe alors une version holdérienne d'exposant  $\gamma < \frac{n-1}{2n}$  pour le  $n$  fixé (on prend  $\beta = 2n$  et  $\alpha = n-1$ ). Notons  $B^{(n)}$  cette version.

Les versions  $B^{(n)}$  et  $B^{(m)}$  sont indiscernables car sont continues et des versions l'une de l'autre.

Donc en notant, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n,m} = \{w \in \Omega | \forall t \geq 0, B_t^{(n)}(\omega) = B_t^{(m)}(\omega)\}$ , la probabilité de l'ensemble  $A_{n,m}$  est  $\mathbb{P}(A_{n,m}) = 1$ .

Ainsi, en prenant  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} (A_{n,m})$  qui est de probabilité 1,  $B'$  la restriction de  $B$  sur cet espace, égale à la fonction nul pour tout  $\omega \in A_{n,m}^c$  est bien une version de  $B$  qui est holdérienne d'exposant  $a$  sur tout compact, pour tout  $a < \frac{1}{2}$ .

## 2.4 Non différentiabilité

La question se pose donc, maintenant que nous savons que le mouvement Brownien contient une version à trajectoires continues, on peut se demander s'il est différentiable. D'abord nous montrons que les variations du mouvement Brownien sont presque sûrement non bornées. Cela nous pousse donc à penser qu'il n'est pas différentiable. Il faut attendre 1933 en avoir une démonstration (produite par Paley, Wiener et Zygmund).

### Définition

Soient  $f[s, t] \mapsto \mathbb{R}$  et  $\pi$  une subdivision telle que  $\pi : s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ .

On appelle variation de  $f$  le nombre  $V_\pi = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$ .

On note aussi  $V_{[s,t]}^f = \sup_\pi V_\pi$  et  $V_\pi^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} |(f(t_{k+1}) - f(t_k))^2|$

Dans le cas du mouvement Brownien, on pose  $[f]_{a,b} = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} V_\pi^{(2)}$  avec  $|\pi| = \max_{0, \dots, n-1} (t_{k+1} - t_k)$

### Propriétés

Le réel  $\mathbb{E}((V_\pi^{(2)} - (t-s))^2)$  converge vers 0 quand  $|\pi|$  tends vers 0.

On remarque que par télescopage des termes, on a  $t - s = \sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1} - t_k$ .

Ainsi on a  $V_\pi^{(2)} - t - s = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t_{k+1} - t_k$

De plus,  $(X_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} = ((B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t_{k+1} - t_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une suite de variable aléatoire centrée et indépendante (par propriété du mouvement Brownien).

L'espérance de la variable  $V_\pi^{(2)} - (t - s)^2$  est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_\pi^{(2)} - (t - s)^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^n (X_k)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (X_k^2)\right) \text{ Car les termes croisés sont de la forme } \mathbb{E}(X_k)E(X_{k'}) = 0 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t_{k+1} - t_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbb{E}\left(\left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}\right)^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Or  $C = \mathbb{E}\left(\left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}\right)^2 - 1\right)$  est constant car  $\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}$  suit une loi  $N(0, 1)$ .

Donc  $\mathbb{E}(V_\pi^{(2)} - (t - s)^2) \leq \max_{0, \dots, k} (t_{k+1} - t_k) C$

On conclut donc que  $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \mathbb{E}(V_\pi^{(2)} - (t - s)^2) = 0$

#### Corollaire

Soit  $B$  un mouvement brownien continu.

Soit  $0 < s < t$ , les trajectoires de  $B$  sont presque sûrement à variation non bornée sur le segment  $[s, t]$ .

#### Démonstration :

Soit  $\omega \in \Omega$  et  $\pi$  une subdivision de  $[s, t]$ . Alors

$$\begin{aligned}
V_\pi^{(2)}(\omega) &= \sum_{k=0}^n (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega))^2 \\
&\leq \sup_{0, \dots, k} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)) \sum_{k=0}^n (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)) \\
&\leq \sup_{0, \dots, k} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)) V_\pi(\omega)
\end{aligned}$$

Par uniforme continuité de  $B_t(\omega)$  sur  $[s, t]$  (théorème de Heine), on que :

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \left( \sup_{0, \dots, k} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)) \right) = 0$$

Si  $V_\pi(\omega) < \infty$ , alors  $V_\pi^{(2)}(\omega) = 0$

Or, grâce à la propriété précédente, on déduit que  $V_\pi^{(2)} = t - s$  dans  $L^2$ .

Donc il y a convergence presque sûrement pour une sous suite (noté  $\pi_k$ ).

Donc l'ensemble des  $\omega$  tel qu'il existe  $\pi_k$  tel que  $V_{\pi_k}^{(2)}(\omega) = t - s$  (notons le  $A_{s,t}$ ) est de probabilité 1.

Donc l'ensemble des  $\omega$  tel que  $V_\pi(\omega) < \infty$  est inclus dans  $A_{s,t}^c$  et l'ensemble des  $\omega$  tel que  $V_\pi(\omega) = \infty$  contient  $A_{s,t}$ .

Donc  $\mathbb{P}(V_\pi(\omega) = \infty) = 1$ .

Donc  $\mathbb{P}(\bigcup_{s,t \in \mathbb{Q}} A_{s,t}) = 1$

D'où le corollaire.

### Théorème

Les trajectoires du mouvement brownien ne sont, presque sûrement, dérivables en aucun point.

On travaillera sur les trajectoires de l'intervalle  $[0, 1]$ .

Soit  $M > 0$  et  $n \geq 4$ .

Posons :  $A_n = \{\omega \in \Omega, \exists s \in [\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}] : |t - s| \leq \frac{2}{n} \Rightarrow |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq 2M|s - t|\}$

La suite  $A_n$  est croissante, notons alors  $A^m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

Si la trajectoire de  $B_t(\omega)$  est dérivable en un point  $t \in ]0, 1[$  avec une dérivée en valeur absolue inférieure à  $M$ , alors  $\omega \in A^m$ .

Soit  $k$  le plus grand entier tel que  $\frac{k}{n} \leq s$ .

Alors, on a, en posant  $\Delta_k(\omega) = \max\{|B_{\frac{k+2}{n}}(\omega) - B_{\frac{k+1}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{k}{n}}(\omega)|, |B_{\frac{k}{n}}(\omega) - B_{\frac{k-1}{n}}(\omega)|\}$ ,

$\Delta_k(\omega) \leq 3 \times \frac{2M}{n}$ , (1)

En posant  $\tilde{A}_n = \{\omega \in \Omega, \exists k \leq n - 2 \Rightarrow \Delta_k(\omega) \leq \frac{6M}{n}\}$ , on remarque que  $\tilde{A}_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} (\Delta_k \leq \frac{6M}{n})$  et par (1), on déduit que  $\tilde{A}_n \subset A_n$ .

Donc  $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\tilde{A}_n)$ .

On a alors  $\mathbb{P}(A^M) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tilde{A}_n)$ , par continuité croissante de  $A_n$

$$\begin{aligned}
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-2} (\Delta_k \leq \frac{6M}{n})\right) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(\Delta_k \leq \frac{6M}{n}) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-2} (\mathbb{P}(X \in [-\frac{6M}{n}, \frac{6M}{n}]))^3 \text{ par ce qui précède} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \left( \int_{-\frac{6M}{n}}^{\frac{6M}{n}} \frac{\exp \frac{-x^2 n}{2}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}} dx \right)^3 \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{6M}{n}}^{\frac{6M}{n}} \exp \frac{-x^2 n}{2} dx \right)^3 \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6M}^{6M} \frac{1}{n} \exp \frac{-x^2}{2n} dx \right)^3 \text{ en posant } u = \frac{x}{n} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{3}{2}}} T_n \text{ avec } T_n \text{ qui tend vers } 12M \text{ par convergence dominée.} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ce qui conclut que  $\mathbb{P}(A^M) = 0$ .

Or  $A^M$  contient toutes les  $\omega$  tel qu'il y ait un point dans  $]0, 1[$  dérivable de dérivée dont la valeur absolue est plus petite que  $M$ .

Donc  $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} A^M$  contient tous les  $\omega$  tel que la trajectoire de  $B_t(\omega)$  soit dérivable en au moins un point.

On en déduit le théorème.

# Chapitre 3

## Construction

Les propriétés de stabilité d'indice 2 et d'inversion du temps du mouvement Brownien permettent de construire un mouvement brownien sur tout intervalle à partir d'un mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.1 Limite de marche aléatoire

L'épreuve la plus simpliste en probabilité est le lancer de pièce. On va donc chercher à construire un mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, 1]$  à l'aide de variable de Rademacher.

#### Théorème de convergence des variables de Rademacher

Soit  $(\xi_k)_{k \geq 1}$ , une famille de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. On note ensuite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite des variables aléatoires des sommes partielles, c'est-à-dire :

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On définit alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la marche aléatoire  $(X_t^{(n)})_{t \in \frac{1}{n}\mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}$  telle que :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt} \text{ pour tout } t \in \frac{1}{n}\mathbb{N}$$

On prolonge  $X_t^{(n)}$  sur  $\mathbb{R}^+$  par interpolation linéaire. On a ainsi :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} ((nt - k)S_{k+1} + (k + 1 - nt)S_k) \text{ quand } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } k = \lfloor nt \rfloor.$$

Alors les lois de dimension finie du processus  $(X_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}^+}$  convergent vers les lois de dimension finie correspondantes du mouvement Brownien.

Soient  $p \geq 1$  et  $0 < t_1 < \dots < t_p$ .

Notons  $t_0 = 0$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (S_{\lfloor nt_j \rfloor} - S_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^N \xi_{\lfloor nt_j \rfloor + k} \text{ où } N = \lfloor nt_j \rfloor - \lfloor nt_{j-1} \rfloor.$$

Notons  $Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^N \xi_{\lfloor nt_j \rfloor + j}$ .

Étape 1 : La variable  $Y$  est gaussienne.

La fonction caractéristique de  $Y$  est, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(t) &= \mathbb{E}[\exp(itY)] \\
&= \mathbb{E} \left[ \prod_{k=1}^N \exp \left( \frac{it}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor + j} \right) \right] \text{ par définition de } Y \\
&= \prod_{k=1}^N \mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{it}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor + j} \right) \right] \text{ par mutuelle indépendance de la famille } (\xi_k)_{k \geq 1} \\
&= \cos \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^N \text{ car les } (\xi_k)_{k \geq 1} \text{ sont des variables de Rademacher} \\
&= \left( 1 - \frac{1}{n} \left( \frac{t^2}{2} + \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right)^N \text{ où } \varepsilon \text{ est une fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{C} \text{ qui tends vers 0 en 0} \\
&= \exp \left( N \log \left( 1 - \frac{1}{n} \left( \frac{t^2}{2} + \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right) \right) \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{t^2}{2} + \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \right) = 0 \\
&= \exp \left( - \left( \frac{Nt^2}{2n} + \frac{N}{n} \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right) \\
&= \exp \left( - \left( \frac{Nt^2}{2n} \right) \right) \exp \left( \frac{N}{n} \varepsilon \left( \frac{1}{n} \right) \right)
\end{aligned}$$

Finalement,  $\Phi_Y(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left( - \left( \frac{(t_j - t_{j-1})t^2}{2} \right) \right)$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N}{n} = t_j - t_{j-1}$  par encadrement.

La fonction caractéristique de  $Y$  converge vers la fonction caractéristique de la loi normale de paramètre  $(0, t_j - t_{j-1})$ .

Étape 2 : Convergence du vecteur  $(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$

La mutuelle indépendance des  $(\xi_k)_{k \geq 1}$  assure l'indépendance des coordonnées du vecteur  $(\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_j \rfloor} - S_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor}))$  qui converge alors en loi vers le vecteur  $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  où  $B$  est le mouvement Brownien.

En remarquant que  $S_{k+1} = S_k + \xi_{k+1}$ , on peut écrire l'expression précédente sous la forme :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (S_k + (nt - k)\xi_{k+1}) \text{ quand } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } k = \lfloor nt \rfloor.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $\tilde{X}_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$  et  $\tilde{S}_j = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt_j \rfloor} - S_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor})$ . Alors pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a :

$$\tilde{X}_j - \tilde{S}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} ((nt_j - \lfloor nt_j \rfloor)\xi_{\lfloor nt_j \rfloor + 1} - (nt_{j-1} - \lfloor nt_{j-1} \rfloor)\xi_{\lfloor nt_{j-1} \rfloor + 1}).$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_{k+1}$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}^+$  :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(nt - \lfloor nt \rfloor)\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \text{ est à valeurs dans } \left[ -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

D'où  $\tilde{X}_j - \tilde{S}_j$  converge en probabilité vers la constante 0 donc en loi.

Le lemme de Slutsky assure alors que  $(\tilde{S}_j, \tilde{X}_j - \tilde{S}_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  converge en loi vers le vecteur  $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 0)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ .



La continuité de la fonction  $(a_j, b_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} \mapsto (a_j + b_j)_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  assure que le vecteur  $(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  converge en loi vers  $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ .

Étape 3 : Convergence du vecteur  $(X_{t_j})_{j \in \llbracket 0, p \rrbracket}$

Le vecteur  $(X_{t_j})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est obtenu par transformation continu du vecteur  $(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  par l'application  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_p)$  donc le vecteur  $(X_{t_j})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  converge en loi vers le vecteur  $(B_{t_j})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ .

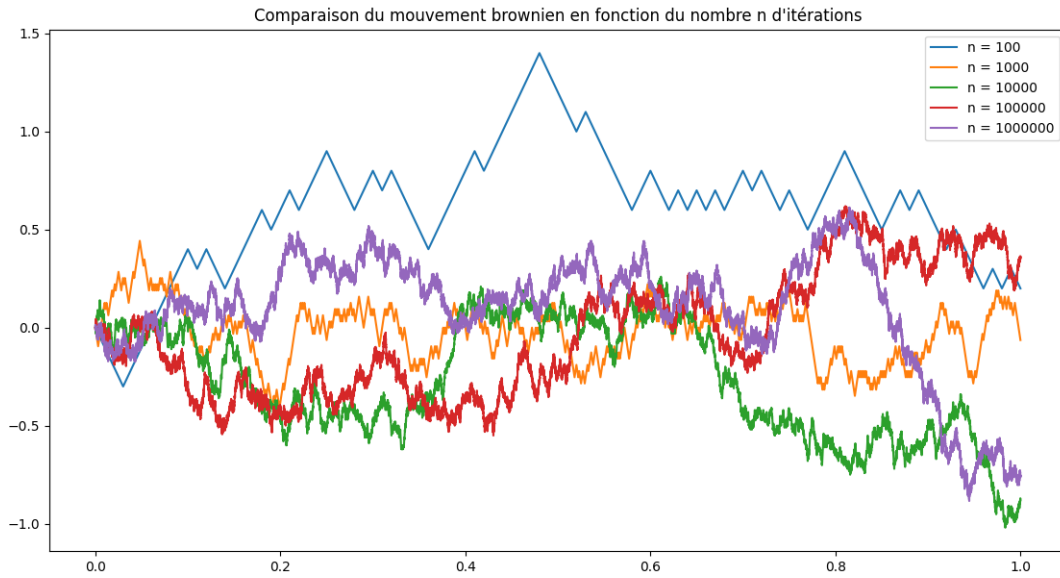


FIGURE 3.1 – Comparaison des itérations de  $X_t^{(n)}$  en fonction de  $n$

## 3.2 Théorème de Donsker

Le résultat précédent n'est pas restreint aux variables de Rademacher. Il s'étend à toute variable aléatoire centrée de carré intégrable.

### Théorème de Donsker

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de variables aléatoires indépendamment distribuées, centrées, de carrées intégrable et de variance  $\sigma^2$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on construit le processus  $(X_n(t))_{t \geq 0}$  par interpolation linéaire de la marche aléatoire  $(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{nt} U_k)_{t \in \frac{1}{n}\mathbb{N}}$ .

Alors la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers le mouvement brownien  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ .

Soient  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, indépendamment distribuées, centrées et de carré intégrable et  $\sigma^2$  leur variance.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit de même que précédemment le processus d'ordre  $n$  par interpolation linéaire, ce qui donne, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} U_k + \Phi_{n,t} \text{ où } \Phi_{n,t} = \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sigma\sqrt{n}} U_{\lfloor nt \rfloor + 1}.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$\mathbb{P}(|\Phi_{n,t}| \geq \epsilon) \leq \frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc  $\Phi_{n,t}$  converge en probabilité vers la constante 0. Ainsi le théorème limite centrale assure que

pour tout  $t_i$  et  $t_j$  tels que  $t_i > t_j$ , on a  $X_n(t_i) - X_n(t_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt_i \rfloor - \lfloor nt_j \rfloor} U_{\lfloor nt_j \rfloor + k} + \Phi_{n,t_i} - \Phi_{n,t_j}$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne de paramètre  $(0, t_i - t_j)$ .

On peut alors conclure de la même façon que précédemment.

# Chapitre 4

## Modélisation

Le mouvement brownien est lié aux propriétés microscopique de la matière comme l'énergie thermique. Pouvoir estimer son amplitude permet alors d'accéder à ces données à partir de la seule mesure du mouvement.

### 4.1 Estimateur

#### Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité.

On s'intéresse à une variable aléatoire  $X$  de loi de probabilité inconnue et à un paramètre  $\theta$  qui dépend de la loi de  $X$ .

On suppose qu'on dispose d'un  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables indépendantes et identiquement distribuées qui suivent la loi de  $X$ .

Ce  $n$ -uplet est appelé un échantillon à  $n$  éléments de la variable aléatoire  $X$ .

Pour cela, on définit un estimateur comme une fonction qui fait correspondre à chaque réalisation possible  $x_1, \dots, x_n$  de l'échantillon à  $n$  éléments la valeur  $\hat{\theta}(x)$  que l'on nomme estimé :

$$\hat{\theta}_n(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

#### Propriétés

On définit plusieurs propriétés de l'estimateur :

- Le biais d'un estimateur est l'écart entre l'espérance de l'estimateur  $\hat{\theta}$  et la valeur de  $\theta$  :

$$\text{Biais}(\hat{\theta}) \equiv \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta.$$

- L'erreur quadratique moyenne est l'espérance du carré de l'erreur entre la vraie valeur et sa valeur estimée :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) \equiv \mathbb{E} \left( (\hat{\theta} - \theta)^2 \right).$$

- La convergence en probabilité si :  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ . On parle alors d'estimateur consistant.
- La convergence forte si :  $\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta \right) = 1$ . On parle alors d'estimateur fortement consistant.

## 4.2 Mouvement dans une rivière

### Modélisation

On modélise le déplacement d'une particule le long d'une rivière par un déplacement unidimensionnel le long d'un axe rectiligne et en la repérant par sa distance à sa position au temps  $t = 0$

On définit donc le processus  $X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto X(t)$  qui donne la position de la particule au temps  $t$ .

On considère, dans un premier temps, que la particule suit un mouvement brownien caractérisée par le coefficient  $\beta$  représentant la température par la loi de Stokes-Einstein et à un phénomène de dérive dû à la vitesse  $\alpha$  du courant :

$$X : t \mapsto \alpha t + \beta B_t, \text{ où } (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ et } t \mapsto B_t \text{ est un mouvement brownien.}$$

On cherche, d'abord, à estimer le paramètre  $\alpha$  du courant.

On observe régulièrement la particule à plusieurs instants  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et on note  $s$  le vecteur de coordonnée  $s_i = t_i - t_{i-1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ce qui fournit l'échantillon  $(X_0, \dots, X_n)$  où  $X_i = \alpha t_i + \beta B_{t_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Comme les  $(X_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  ne sont pas indépendants, on définit les variables aléatoires  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  où  $Y_i = (X_i - X_{i-1})$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On a donc :  $Y_i = \alpha s_i + \beta(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Comme  $t \mapsto B_t$  est un mouvement brownien, le vecteur  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  suit la loi  $\mathcal{N}(\alpha s, \beta^2 s)$  et ses coordonnées sont mutuellement indépendantes.

La loi des grands nombres nous incite alors à définir :  $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{s_i}$ .

Par linéarité de l'espérance, on a  $\mathbb{E}[\hat{\alpha}] = \alpha$  donc  $\hat{\alpha}$  est un estimateur sans biais.

Sa moyenne quadratique est :

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\alpha}) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{Y_i}{s_i} - \alpha \right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{Y_i}{s_i} - \alpha \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{Y_i}{s_i} - \alpha \right) \left( \frac{Y_j}{s_j} - \alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i^2} \mathbb{E} [(Y_i - \alpha s_i)^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{Y_i}{s_i} - \alpha \right) \left( \frac{Y_j}{s_j} - \alpha \right) \right] \right) \\ MSE(\hat{\alpha}) &= \frac{\beta^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\alpha}) = 0$ ,  $\hat{\alpha}$  converge en probabilité vers  $\alpha$ , car  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha$  sont dans  $\mathbb{L}^2$ , par le lemme de Riesz-Scheffé. L'estimateur  $\hat{\alpha}$  est donc consistant.

On va illustrer la convergence de  $\hat{\alpha}$  en étudiant le mouvement de 5 particules dont le mouvement est de paramètres  $(\alpha, \beta) = (1, 0.3)$  et en échantillonnant ces mouvements pour différentes valeurs de  $n$ .

Le calcul du facteur  $\beta = \sqrt{2D}$  où  $D = \frac{k_B T}{6\pi\mu r}$ , par la loi de Stokes-Einstein donne  $\beta$  de l'ordre de  $10^{-7}$  pour un grain de pollen dérivant sur de l'eau à 20°C. Le mouvement brownien est alors trop faible pour être observé à l'oeil nu. C'est pourquoi on choisit de travailler avec  $\beta = 0.03$  pour avoir des résultats exploitable.

Chaque particule est représentée par une courbe différente qui représente la valeur de l'estimateur.

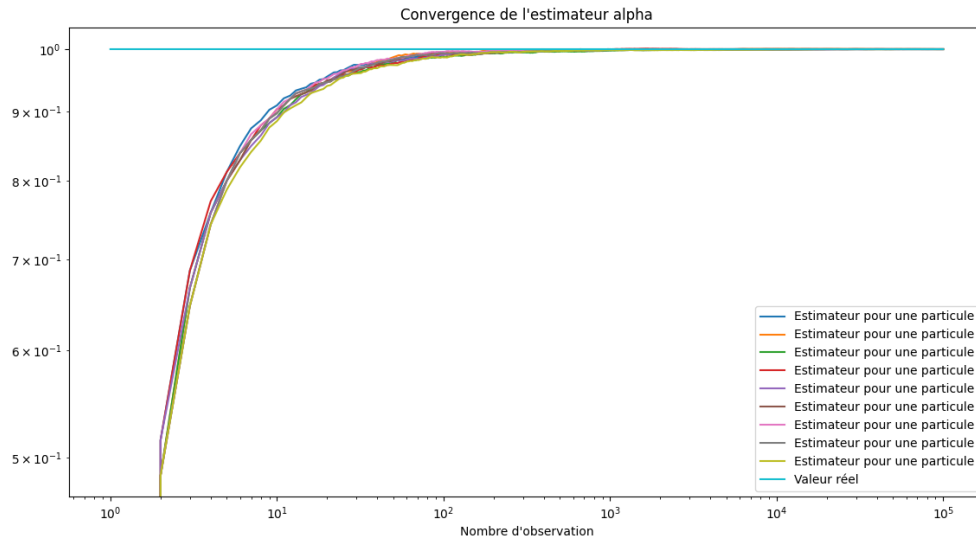


FIGURE 4.1 – Convergence de l'estimateur



FIGURE 4.2 – Convergence de l'estimateur pour n grand

### 4.3 Maximum de vraisemblance

On a ainsi obtenu un estimateur efficace pour  $\alpha$  dans le cas simplifié d'un mouvement brownien avec dérive. Pour pouvoir approcher  $\beta$ , il nous faut introduire une méthode plus générale.

#### Définition

Soient  $X$  une variable aléatoire réelle, à densité, dont on veut estimer un certain paramètre  $\Theta$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  un échantillon de  $X$ .

On appelle vraisemblance de  $\Theta$  au vu de  $(x_1, \dots, x_n)$  le réel  $L(\theta)$  égale à la densité de l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  pour une certaine valeur  $\theta$  de  $\Theta$ .

L'idée très heuristique est alors que le choix  $\theta^*$  qu'il convient d'effectuer pour  $\theta$ , est celui pour lequel cette densité est maximale pour les valeurs  $(x_1, \dots, x_n)$  observées.

Avec les notations précédentes, le vecteur  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un vecteur gaussien de paramètre  $(as, \beta^2 s)$ , en  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  effet, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i Y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i s_i + \beta \sum_{i=1}^n x_i B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i s_i + \beta \left( x_n B_{t_n} + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) B_{t_i} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme étant constant et le second suivant une loi normale car le vecteur  $(B_{t_i})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est gaussien,  $\sum_{i=1}^n x_i Y_i$  suit une loi normale et  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est un vecteur gaussien, de densité :

$$L(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \beta^{2n} \prod_{i=1}^n s_i}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{\beta^2 s_i} \right)$$

Comme  $L$  est strictement positive, la croissance du logarithme assure que le maximum de  $L$  est atteint au même point que pour la fonction  $g : (\alpha, \beta) \mapsto -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\beta) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(s_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{\beta^2 s_i}$ .

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \alpha s_i}{\beta^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^3} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{s_i} - n\beta^2 \right).$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) &= 0 \text{ si et seulement } \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n s_i} \\ - \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta) &= 0 \text{ si et seulement } \beta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{s_i}. \end{aligned}$$

Ainsi le gradient de  $g$  s'annule au point  $\left( \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n s_i}, \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{s_i}} \right)$ , de plus, comme  $\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n s_i$ ,

$\frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha, \beta) = -\frac{2}{\beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$  et que  $\frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2}(\alpha, \beta) = -3\beta \frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta) - 2n$ , la matrice hessienne de  $g$  est définie négative en ce point.

Ce qui conclut que  $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n s_i}$  et  $\hat{\beta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha s_i)^2}{s_i}}$  sont des estimateurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

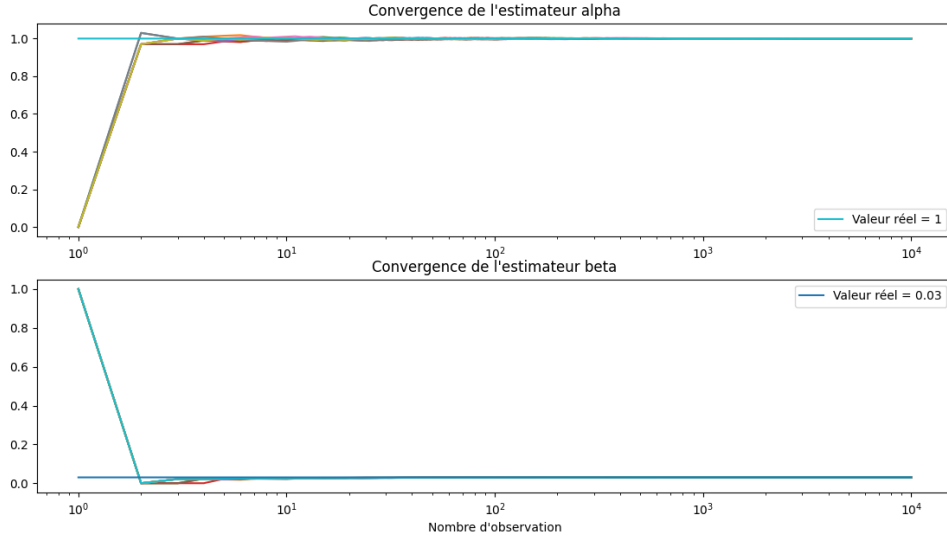


FIGURE 4.3 – Convergence pour  $\beta = 0.03$

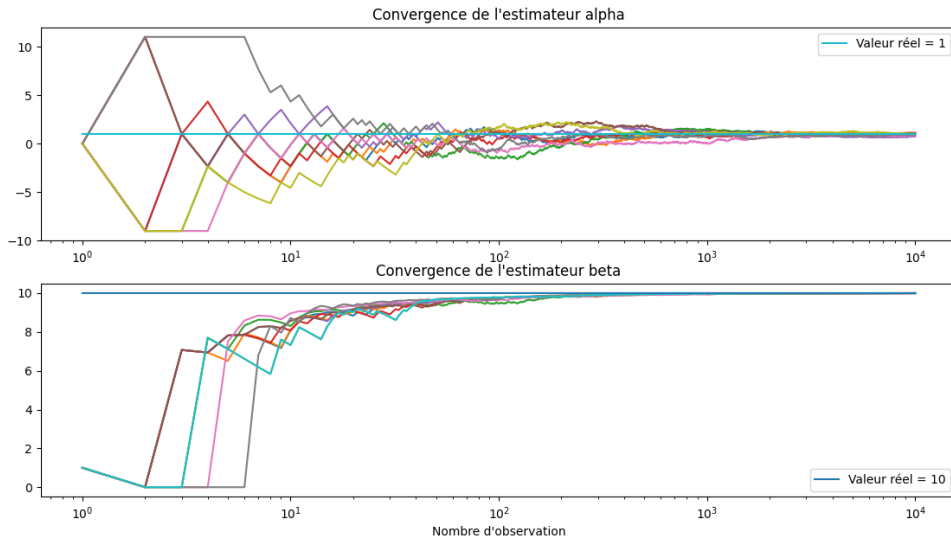


FIGURE 4.4 – Convergence pour  $\beta = 10$

## 4.4 Mouvement de marée

On maintenant un mouvement périodique de la forme  $(X_t = \alpha \cos(\omega t) + \beta B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

On observe régulièrement la particule à plusieurs instants  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et on note  $s$  le vecteur de coordonnée  $s_i = t_i - t_{i-1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ce qui fournit l'échantillon  $(X_0, \dots, X_n)$  où  $X_i = \alpha \cos(\omega t_i) + \beta B_{t_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Comme les  $(X_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  ne sont pas indépendants, on définit les variables aléatoires  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  où  $Y_i = (X_i - X_{i-1})$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Notons alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $r_i(\omega) = \cos(\omega t_i) - \cos(\omega t_{i-1})$ .

On suppose connaître la valeur de  $\omega$ , par un raisonnement physique ou en estimant sur la forme du mouvement, par exemple.

Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $Y_i$  suit la loi normale de paramètre  $(\alpha r, \beta^2 s)$ , ce qui assure que la vrai-

semblance du couple  $(\alpha, \beta)$  est :

$$L(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \beta^{2n} \prod_{i=1}^n s_i}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha r_i)^2}{\beta^2 s_i} \right)$$

On définit de même  $g : (\alpha, \beta) \mapsto -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\beta) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha r_i)^2}{\beta^2}$ .

La fonction  $g$  est dérivable par rapport  $\alpha$  et  $\beta$  et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s_i} (Y_i - \alpha r_i) \text{ et}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^3} \left( \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha r_i)^2}{s_i} - n\beta^2 \right)$$

Ces deux expressions sont, aux coefficients  $(r_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  près, les mêmes que précédemment.

On dispose alors des valeurs des  $(r_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et d'un estimateur pour  $\hat{\beta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha r_i)^2}{s_i}}$ .

Dans le cas où on a  $\sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{s_i} \neq 0$ , on dispose d'un estimateur pour  $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \frac{r_i}{s_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{s_i}}$ , ce qui est le cas si la fréquence d'échantillonnage des mesures est différente de la fréquence du mouvement étudié.

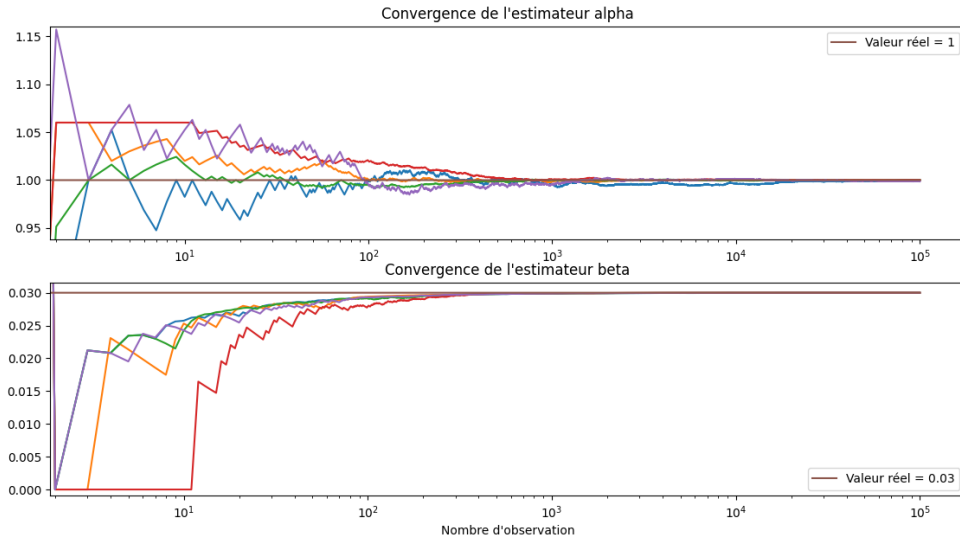


FIGURE 4.5 – Convergence pour  $\beta = 0.03$



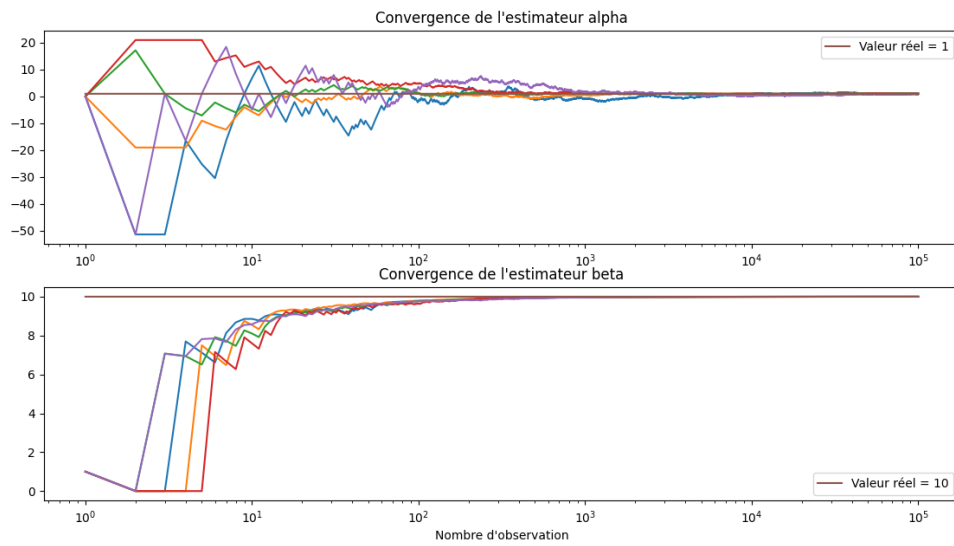


FIGURE 4.6 – Convergence pour  $\beta = 10$

# Chapitre 5

## Annexe

### 5.1 Lemme de Slutsky

#### Lemme de Slutsky

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de variables aléatoires et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X, Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \text{ et } Y \text{ est presque sûrement constante.}$$

Alors :

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X, Y).$$

#### Démonstration :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $Z_n = Y_n - Y$ .

Par continuité de la fonction continue  $U \mapsto U - Y$ , on a  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} 0$

Pour tout  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_{(X_n, Z_n)}(s, t) - \varphi_{(X, 0)}(s, t)| &\leq |\varphi_{(X_n, Z_n)}(s, t) - \varphi_{(X_n, 0)}(s, t)| + |\varphi_{(X_n, 0)}(s, t) - \varphi_{(X, 0)}(s, t)| \\ &\leq |\varphi_{(X_n, Z_n)}(s, t) - \varphi_{X_n}(s)| + |\varphi_{X_n}(s) - \varphi_X(s)| \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par continuité de  $r \mapsto e^{irt}$ , on dispose de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$  :

$$|u| < \delta \implies |e^{itu} - 1| < \varepsilon.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |\varphi_{(X_n, Z_n)}(s, t) - \varphi_{X_n}(s)| &\leq |\mathbb{E} [e^{i(sX_n + tZ_n)} - e^{isX_n}]| \\ &\leq \mathbb{E} [|e^{i(sX_n + tZ_n)} - e^{isX_n}|] \\ &\leq \mathbb{E} [|e^{itZ_n} - 1|] \\ &\leq \mathbb{E} [|e^{itZ_n} - 1| \mathbf{1}_{|Z_n| \leq \delta}] + \mathbb{E} [|e^{itZ_n} - 1| \mathbf{1}_{|Z_n| > \delta}] \\ &\leq \varepsilon + 2\mathbb{P}(|Z_n| > \delta). \end{aligned}$$

Comme  $Z_n$  converge en loi vers la constante 0,  $Z_n$  converge en probabilité, donc  $\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Comme  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ ,  $|\varphi_{X_n}(s) - \varphi_X(s)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Ainsi  $|\varphi_{(X_n, Z_n)}(s, t) - \varphi_{(X, 0)}(s, t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  et  $(X_n, Z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X, 0)$ .

La continuité de la fonction  $(U, V) \mapsto (U, V + Y)$  assure finalement que  $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X, Y)$ .

## 5.2 Fonctions python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random

def brownien2D(p):
    L = [0+0j]
    for i in range(p):
        theta = 2*np.pi*random.random()
        L.append(np.exp(1j*theta)+L[-1])
    Z = np.array(L)
    plt.plot(np.real(Z),np.imag(Z))
    plt.title("Mouvement brownien en dimension 2")
    plt.show()

brownien2D(1000)

def mouvement(x):
    dx = 2 * random.randint(0,1) - 1
    return(x + dx)

def brownien(n):
    coord = np.zeros(n)
    for t in range(n - 1):
        coord[t + 1] = mouvement(coord[t])
    return(coord / np.sqrt(n))

def brownien_comparaison(L):
    X = [0]
    i = 0
    for n in L:
        while i < n-1:
            X.append(mouvement(X[-1]))
            i = i+1
        plt.plot(np.linspace(0,1,n),np.array(X)/np.sqrt(n),\
            label = "n = "+str(n))
    plt.legend()
    plt.title("Comparaison du mouvement brownien " + \
        " en fonction du nombre n d'iterations")
    plt.show()

brownien_comparaison([100,1000,10000,100000])

def estimateur_affine(T,X):
    Y = (X[1:] - X[:-1]) / (T[1:] - T[:-1])
    a = np.average(Y)
    return(a)

def estimateur_lineaire_alpha(a,b,N,p):
    M = np.linspace(1,N+1,N+1)
    for i in range(p):
        A = [0]
        for n in range(1,N+1):
            a_e = ( n * A[-1] + a + b * ( 2 * random.randint(0,1) - 1 ) ) / ( n + 1 )
            A.append( a_e )
        plt.plot(M,A)
    plt.plot(M,[a]*len(M),label="Valeur reel = "+str(a))
    plt.xscale('log')
    plt.yscale('log')
    plt.xlabel("Nombre d'observation")
    plt.legend()
    plt.title("Convergence de l'estimateur alpha")
    plt.show()

estimateur_lineaire_alpha(1,0.03,100000,9)

def estimateur_lineaire_beta(a,b,N,p):
    M = np.linspace(1,N+1,N+1)
    for i in range(p):
        B = [1]
        for n in range(N):
            b_e = ( n * B[-1]**2 + (b * ( 2 * random.randint(0,1) - 1 ))**2 ) / (n+1)
            B.append( np.sqrt(b_e) )
        plt.plot(M,B)
    plt.plot(M,[b]*len(M),label="Valeur reel = "+str(b))
    plt.xscale('log')
    plt.yscale('log')
    plt.xlabel("Nombre d'observation")
    plt.legend()
    plt.title("Convergence de l'estimateur beta")
    plt.show()

estimateur_lineaire_beta(1,0.03,10000,9)

def estimateur_lineaire(a,b,N,p):
    M = np.linspace(1,N+1,N+1)
    for i in range(p):
        A = [0]
        B = [1]
        for n in range(N):
            y_i = a + b * ( 2 * random.randint(0,1) - 1 )
            a_e = ( n * A[-1] + y_i ) / ( n + 1 )
            A.append( a_e )
            b_e = ( n * B[-1]**2 + (y_i - a_e )**2 ) / (n+1)
            B.append( np.sqrt(b_e) )

        plt.subplot(2,1,1)
        plt.plot(M,A)
```

```

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(M,B)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(M,[a]*len(M),label="Valeur reel = "+str(b))
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.legend()
plt.title("Convergence de l'estimateur alpha")

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(M,B)
plt.plot(M,[b]*len(M),label="Valeur reel = "+str(b))
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.xlabel("Nombre d'observation")
plt.legend()
plt.title("Convergence de l'estimateur beta")
plt.show()

estimateur_lineaire(1,0.03,10000,9)
estimateur_lineaire(1,10,10000,9)

def maree(a,b,f,n):
    T = np.linspace(0,n,10*n+1)
    brown = brownien(10*n+1)
    X = a * np.cos(2*np.pi*f*T) + b * brown
    plt.plot(T,X,label="trajectoire")
    plt.plot(T, a * np.cos(2*np.pi*f*T),label="Mouvement sinusoidale")
    plt.legend()
    plt.title("Mouvement de maree avec beta = "+str(b))
    plt.show()

maree(1,0.03,1/10,100)
maree(1,10,1/10,100)

def estimateur_periodique(a,b,f,N,p):
    M = np.linspace(1,N+1,N+1)
    for i in range(p):
        A = [0]
        B = [1]
        R = 0
        for n in range(N):
            r = np.cos(2*np.pi*f*(i+1)) - np.cos(2*np.pi*f*i)
            y_i = a*r + b * ( 2 * random.randint(0,1) - 1 )
            a_e = ( R * A[-1] + y_i*r ) / ( R + r**2 )
            A.append( a_e )
            b_e = ( n * B[-1]**2 + (y_i - a_e*r)**2 ) / (n+1)
            B.append( np.sqrt(b_e) )
            R += r**2

        plt.subplot(2,1,1)
        plt.plot(M,A)
        plt.subplot(2,1,2)
        plt.plot(M,B)

    plt.subplot(2,1,1)
    plt.plot(M,[a]*len(M),label="Valeur reel = "+str(a))
    plt.xscale('log')
    plt.legend()
    plt.title("Convergence de l'estimateur alpha")

    plt.subplot(2,1,2)
    plt.plot(M,[b]*len(M),label="Valeur reel = "+str(b))
    plt.xscale('log')
    plt.xlabel("Nombre d'observation")
    plt.legend()
    plt.title("Convergence de l'estimateur beta")
    plt.show()

estimateur_periodique(1,0.03,1/10,100000,5)
estimateur_periodique(1,10,1/10,100000,5)

```

# Bibliographie

- [1] Gallardo, Léonard. 2008. Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corrigés. Paris : Hermann.
- [2] Université de Rennes 1 – Épreuve de modélisation - Agrégation Externe de Mathématiques – 2008
- [3] V. Genon-Catalot. Cours de statistique des diffusions.