

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

**SHORTEST MATCHING IN THE
PLANE**

Finančni praktikum

Avtorici:
Iza Čebulj, Barbara Pal

Ljubljana, 2022

1 Navodilo

Naj bo P množica z $2n$ točkami na ravnini. Najkrajše ujemanje za P je množica segmentov z minimalno skupno dolžino, za katere velja da je vsaka točka iz množice P končna točka natanko enega segmenta.

Formuliraj problem kot CLP. Preko eksperimentov poišči pričakovano vrednost celotne dolžine najkrajšega ujemanja, ko so točke izbrane naključno v:

- enotskem kvadratu,
- enotskem krogu,
- enakostraničnem trikotniku, ...

Ugotovi, ali se vrednost z večanjem n povečuje ali zmanjšuje.

Obravnavaj tudi problem, ko je množica P sestavljena iz n rdečih in n modrih točk in so končne točke segmentov različnih barv - bikromatsko najkrajše ujemanje. Primerjaj vrednost v primeru, ko točke ločimo po barvah in v primeru, ko jih ne.

2 Opis problema

Množici P z $2n$ točkami lahko priredimo nepovezan graf $G(P)$, oziroma samo G . Množica vozlišč grafa G je kar množica P , množica povezav v grafu E pa so neurejeni pari (u, v) , za katere velja $u, v \in P$ in $u \neq v$. Cena povezave je razdalja $d(u, v)$ med vozliščema u in v . Ujemanje na grafu G oziroma na množici P je množica povezav M , za katero velja, da nobeno vozlišče v P ne sovpa z več kot eno povezavo v M . Popolno ujemanje v P je tako ujemanje M , kjer vsako vozlišče sovpa z natanko eno povezavo v M . Velikost popolnega ujemanja je n . Ceno ujemanja definiramo kot $\sum_{(u,v) \in M} d(u, v)$, kar je vsota cen vseh povezav v M .

Naša naloga pri problemu najkrajšega ujemanja v ravnini - *shortest matching in the plane* - je poiskati popolno ujemanje množice P z najnižjo ceno.

Ta problem ima uporabno vrednost v operacijskih raziskavah, prepoznavanju vzorcev in statistiki. Uporabljajo ga pri določanju učinkovitega gibanja mehanskih risalnikov, kar je poseben primer problema kitajskega poštarja. Iskanje najkrajšega ujemanja in njemu podobni problemi so rešljivi v polinomskega časa z najbolj osnovnim algoritmom, seveda pa se pojavlja vprašanje, ali algoritme lahko še izboljšamo.

Drugi del naloge se v strokovni literaturi pojavlja pod imenom Evklidski dvodelni problem ujemanja (*ang. The Euclidean Bipartite Matching Problem, EBM*). Množico P sestavljata množica n rdečih točk, R , in množica n modrih točk B , $P = R \cup B$. V tem primeru je $G(P, E)$ dvodelen graf z lastnostjo, da med dvema točkama obstaja povezava, če in samo če sta različnih barv. Cene povezav (u, v) so prav tako razdalje med vozlišči, $d(u, v)$.

3 Pričakovani rezultati

4 Načrt dela

V nadaljevanju bova najprej problem zapisali kot celoštevilski linearni program, nato pa bova še v programskem jeziku *Python* zapisali algoritma in ju preizkusili za različne n . Pri tem naju bo zanimala pričakovana vrednost najkrajšega popolnega ujemanja, torej celotna cena oziroma dolžina povezav, ki so v množici M , med točkami, ki se nahajajo v enotskih likih. Ugotovili bova tudi, ali se ta pričakovana vrednost zmanjšuje ali povečuje z večanjem števila n , ter kakšna je v dvodelnem grafu.