Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

NAJCENEJŠE PRIREJANJE V RAVNINI

Finančni praktikum

Avtorici:
Iza Čebulj, Barbara Pal

Ljubljana, 2022

1 Navodilo

Naj bo P množica z $2n$ točkami na ravnini. Najcenejše prirejanje za P je množica daljic z minimalno skupno dolžino, za katere velja da je vsaka točka iz množice P končna točka natanko ene daljice.
Formuliraj problem kot CLP. Preko eksperimentov poišči pričakovano vrednost celotne dolžine najkrajšega ujemanja, ko so točke izbrane naključno v:

- enotskem kvadratu,
- enotskem krogu,
- enakostraničnem trikotniku, ...

Ugotovi, ali se vrednost z večanjem n povečuje ali zmanjšuje.
Obravnavaj tudi problem, ko je množica P sestavljena iz n rdečih in n modrih točk in so končne točke daljic različnih barv - dvobarvno najcenejše prirejanje. Primerjaj vrednost v primeru, ko točke ločimo po barvah in v primeru, ko jih ne.

2 Opis problema

Množici P z $2n$ točkami lahko priredimo neusmerjen graf $G(P)$, oziroma samo G. Množica vozlišč grafa G je kar množica P, množica povezav v grafu E pa so neurejeni pari (u, v), za katere velja $u,\ v \in P$ in $u \neq v$. Cena povezave je razdalja $d(u, v)$ med vozliščema u in v. Prirejanje na grafu G oziroma na množici P je množica povezav M, za katero velja, da nobeno vozlišče v P ne sovpada z več kot eno povezavo v M. Popolno prirejanje v P je tako prirejanje M, kjer vsako vozlišče sovpada z natanko eno povezavo v M. Velikost popolnega prirejanja je n. Ceno prirejanja definiramo kot $\sum_{(u,v)\in M} d(u, v)$, kar je vsota cen vseh povezav v M.

Naša naloga pri problemu najcenejšega prirejanja v ravnini - *shortest matching in the plane* - je poiskati popolno prirejanje množice P z najnižjo ceno.

Ta problem ima uporabno vrednost v operacijskih raziskavah, prepoznavanju vzorcev in statistiki. Uporabljajo ga pri določanju učinkovitega gibanja mehanskih risalnikov, kar je poseben primer problema kitajskega poštarja. Iskanje najcenejšega prirejanja in njemu podobni problemi so rešljivi v polinomskem času z najbolj osnovnim algoritmom, seveda pa se pojavlja vprašanje, ali algoritme lahko še izboljšamo.

Drugi del naloge se v strokovni literaturi pojavlja pod imenom Evklidski dvodelni problem ujemanja *(ang. The Euclidean Bipartite Matching Problem, EBM).* Množico P sestavljata množica n rdečih točk, R, in množica n

modrih točk B, $P = R \cup B$. V tem primeru je $G(P, E)$ dvodelen graf z lastnostjo, da med dvema točkama obstaja povezava, če in samo če sta različnih barv. Cene povezav (u, v) so prav tako razdalje med vozlišči, $d(u, v)$.

3 Načrt dela

V nadaljevanju bova najprej problem zapisali kot celoštevilski linearni program, nato pa bova še v programskem jeziku *Python* in s pomočjo *CoCalc-a* zapisali algoritem in ga preizkusili za različne n ter pri večkratnih naključnih izbirah točk v enotskih likih. Pri tem naju bo zanimala pričakovana vrednost najcenejšega popolnega prirejanja, torej celotna cena oziroma dolžina povezav, ki so v množici M, med točkami, ki se nahajajo v enotskih likih. Ugotovili bova tudi, ali se ta pričakovana vrednost zmanjšuje ali povečuje z večanjem števila n, ter kakšna je v dvobarvnem grafu ter kakšno je trajanje algoritma - če deluje v linearnem, polinomskem ali eksponentnem času. Končno pa bova rezultate eksperimentov prikazali z vizualizacijami.