Ejercicio 1:

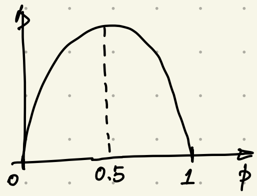
Dado una VA X que modela el resultado de tirar una moneda con probabilidad p de obtener cara ó ceca. Calcular $H(X)$:

tenemos que $X = \begin{cases} 0 & \text{si ceca} \\ 1 & \text{si cara} \end{cases} \rightsquigarrow X \sim \mathrm{Ber}(p) \Rightarrow p_X(x;p) = p^x (1-p)^x$

$$p_X = \begin{cases} p^x & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \end{cases}$$

Con esto podemos calcular $H(X)$:

$$H(X) = -\sum_i p_i \log p_i = -\left(p \cdot \log p + (1-p) \log (1-p) \right) \rightsquigarrow$$



Ejercicio 2:

Dada la siguiente tabla de probabilidades conjuntas, determinar $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(X,Y)$ y $I(X;Y)$

Y \ X	1	2	3	4	p_Y
1	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/4	0	0	0	1/4
p_X	1/2	1/4	1/8	1/8	

1. Primero calculamos las marginales p_X, p_Y

2. Calculamos $H(X)$ y $H(Y)$:

$$H(X) = -\left(\tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \log \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{8} \log \tfrac{1}{8} \right)$$

$$= 1{,}213 \text{ Nats}$$

$$H(Y) = -4 \, \frac{1}{4} \log \tfrac{1}{4} = 1{,}38 \text{ nats}$$

$$H(X,Y) = -\left(2 \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} + 6 \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} \log \frac{1}{32} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \right)$$

$$H(X,Y) = 1{,}6725$$

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 0{,}46$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 0{,}29$$

$$\rightsquigarrow \boxed{I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0{,}923}$$

Ejercicio 3:

	Maradona	Messi	Riquelme	
# partidos	91	142	51	← n_i
Goles promedio	0,37	0,5	0,33	← $\bar{x}_i$
Desvio est.	4,6	5,9	3,4	← S_i

$$N = \sum_i n_i = 91 + 142 + 51 = 284$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i n_i \cdot x_i = \frac{1}{284} \cdot (91 \cdot 0{,}37 + 142 \cdot 0{,}5 + 51 \cdot 0{,}33)$$

$$= 0{,}43$$

$$S_e^2 = \frac{1}{3-2} \cdot \left(91 \cdot (0{,}37 - 0{,}43)^2 + 142\,(0{,}5 - 0{,}43)^2 + 51\,(0{,}33 - 0{,}43)^2 \right)$$

$$= 0{,}94$$

$$S_d^2 = \frac{1}{281} \left(90 \cdot 4{,}6^2 + 141 \cdot 5{,}9^2 + 50 \cdot 3{,}4^2 \right) = 26{,}3$$

$$\leadsto \quad F = \frac{S_e^2}{S_d^2} = 0{,}036$$

$$\mathcal{F}_{(2,281),\, 1-\alpha} \; ; \quad \text{con } \alpha = 0{,}05 \leadsto \text{p-value} = 0{,}05$$

$$\Rightarrow \quad H_0 \text{ no se rechaza}$$

Notas Adicionales: (Se pueden demostrar)

- Respecto a Entropia Máxima, se puede ver que:
  - Si $f_X \in A \subset \mathbb{R}$ / $A = [a,b]$ (f_X tiene un dominio cerrado) $\leadsto$ la distribución f_X que maximiza $H(X)$ es la Uniforme
  - Si $f_X \in A = \mathbb{R}$ (f_X tiene dominio en todo $\mathbb{R}$) $\leadsto$ la distrib. f_X que maximiza $H(X)$ es la Normal