U.T.N.–F.R.A.

Teoría de Variable Compleja

Trabajo Práctico N° 1

Año: 2021

Cátedra: Análisis de Señales y Sistemas (Ing. Electrónica)

Prof.: Lic. Leonardo Niekraszewicz
J.T.P.: Prof. Pablo Di Nardo

ÁLGEBRA DE LOS N^S COMPLEJOS.-

1) Dados los números complejos $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$, $z_3 = 2 - 2i\sqrt{3}$ y $z_4 = 8 + 4i\sqrt{5}$ calcular:

a) $2z_1 - (z_2^2 - z_3) - z_2/z_1$

d) $\sqrt[3]{z_1}$

b) z_1^{10}

e) $\ln z_3$

c) $\sqrt{z_4}$

f) $z_1^{z_2}$

2) Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i) = 5$

c) $x^{2i} - 2x^{i} + 2 = 0$

b) $x^2 - (2 + i)x + 3 + i = 0$

d) $x^{2\sqrt{3}} - x^{\sqrt{3}} + 1 = 0$

3) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1+i)x - iy = 2 + i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$$

4) Representar los conjuntos de puntos del plano que verifican las siguientes relaciones:

a) $\mathrm{Re}(z) = -2$

f) $|z + 1| + |z - 1| = 3$

b) $-2 \leq \mathrm{Im}(z) < 3$

g) $z - \bar{z} = i$

c) $|z + 1| > 2$

h) $\bar{z} - z^{-1} = 0$

d) $-0{,}5 < \mathrm{Re}(z) < 0{,}5 \ \wedge \ |z| = 2$

i) $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

e) $\pi/4 \leq \ \mathrm{Arg}\, z \leq 3\pi/4 \ \wedge \ |z| < 2$

j) $|z + i| = |z + 2i|$

5) Demostrar:

a) $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$

f) $\cos iz = \operatorname{ch} z$

b) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

g) $\nexists\ z \in \mathbb{C} \ / \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z$

c) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

h) $\operatorname{ch} iz = \cos z$

d) $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \operatorname{sen} z$

i) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

e) $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$

j) $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{sh} z$

6) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} z = 0$

d) $\operatorname{sen} z = \operatorname{ch} 4$

b) $\cos z = 0$

e) $\ln z = \dfrac{\pi i}{2}$

c) $e^{4z} = i$

f) $2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.-

7) Dada w = f(z); hallar *u*(x, y) y *v*(x, y); indicar su dominio y decir cuáles son funciones uniformes o multiformes:

a) $f(z) = z^3$

b) $f(z) = iz + 3$

c) $f(z) = \sqrt{z}$

d) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

e) $f(z) = \ln z$

f) $f(z) = e^{-iz}$

g) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

h) $f(z) = \mathrm{sh}\,(2z)$

i) $f(z) = z\,\mathrm{ch}\,z$

j) $f(z) = |z|^2$

k) $f(z) = \mathrm{arcsen}\,z$

l) $f(z) = \mathrm{sen}\,(z^2)$

8) a) Demostrar que $|\cos z|^2 = \mathrm{sh}^2\,y + \cos^2 x$ o bien que $|\cos z|^2 = \mathrm{ch}^2\,y - \mathrm{sen}^2\,x$.

b) Usando a) demostrar que f (z) = cos z no es una función acotada.

9) Deducir la forma logarítmica de las siguientes funciones utilizando la rama principal:

a) $w = \mathrm{arcsen}\,z$

b) $w = \mathrm{argth}\,z$

LÍMITE.-

10) Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{z\to 1+i}(z^2 - 5z + 10)$

b) $\lim\limits_{z\to 2e^{\frac{\pi}{2}i}} \dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$

c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$

d) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{iz^3-1}{z+i}$

e) $\lim\limits_{z\to 2i}\left[y\dfrac{\mathrm{sen}\;x}{x} + \dfrac{i(x-1)\cdot\mathrm{tg}[2(y-2)]}{y^2-4}\right]$

f) $\lim\limits_{z\to 0}(\mathrm{sen}z)^{\mathrm{tg}z}$

CONTINUIDAD.-

11) ¿Para qué valores de z son c/u de las siguientes funciones continuas?

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

b) $f(z) = \mathrm{cosec}\,z$

c) $f(z) = \mathrm{cotg}\,z$

d) $f(z) = 1 - \sec z$

DIFERENCIACION COMPLEJA.-

12) Mediante la definición, encontrar la derivada de $w = f(z) = z^3 - 2z$ en el punto donde, a) $z = -1$, b) $z = z_0$

13) Aplicando la definición (sino por reglas), hallar la derivada de las siguientes funciones, si existen:

a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$

b) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

d) $f(z) = |z|^2$

f) $f(z) = e^z$

g) $f(z) = x^2 + i\,y^2$

h) $f(z) = \ln z$

i) $f(z) = \sqrt[3]{z}$ (*Ayuda:* trabajar en forma polar)

e) $f(z) = iz + 2$ j) $f(z) = \cos z$

14) Mostrar que $\dfrac{d\bar{z}}{dz}$ no existe para ningún $z \in \mathbb{C}$.

15) Si $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, encontrar, a) $\dfrac{dw}{dz}$, b) determinar donde f(z) no es analítica.

16) Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, indicar cuáles de las funciones del ejercicio 13 son analíticas y en qué dominio.

17) Determinar si las siguientes funciones en coordenadas polares son analíticas:

a) $f(z) = \rho^2 \cos^2 \theta + i\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ b) $f(z) = \rho^4 \operatorname{sen} 4\theta - i\rho^4 \cos 4\theta$

18) Hallar los valores que deben tomar las constantes *a*, *b* y *c* para que la función f(z) sea analítica:

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ b) $f(z) = \cos x\,(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \operatorname{sen} x\,(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$

19) Si f(z) es analítica en un dominio D y $f'(z) = 0$ en todo punto de D. Demostrar que f(z) = cte.

FUNCIONES ARMÓNICAS.-

20) Verificar si las siguientes funciones son armónicas, y en caso de serlo, hallar su conjugada armónica y en qué región. Reconstruya si es posible la función analítica.

a) $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ g) $u(x, y) = e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$

b) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y - 3$ h) $u(x, y) = x\, e^x \cos y - y\, e^x \operatorname{sen} y$

c) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ i) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

d) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y$ j) $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$

e) $u(x, y) = e^x \cos y$ k) $v(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + x - 2y$

f) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$ l) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

21) a) Demostrar que no hay una función analítica tal que su parte imaginaria sea $v(x, y) = x^2 - 2y$.

b) Hallar una función analítica cuya parte real sea $u(x, y) = e^{-x}(x \cos y + y \operatorname{sen} y)$ y $f(0) = i$.

En aerodinámica y en mecánica de los fluidos las funciones Φ y Ψ, donde $f(z) = \Phi + i\Psi$ es analítica se llaman potencial de velocidad y función de flujo respectivamente. La familia de curvas a un parámetro $\Phi(x, y) = \alpha$ y $\Psi(x, y) = \beta$ donde α y β son constantes, son familias ortogonales que se llaman respectivamente las líneas y trayectorias equipotenciales del flujo (curvas equipotenciales y curvas de corriente). En movimiento uniforme, las trayectorias representan los caminos reales de las partículas del fluido en el modelo de flujo.

c) Si el potencial de velocidad es $x^2 + 4x - y^2 + 2y$ hallar la función de flujo.

d) Ídem anterior para $\Phi = V_0(x \cos \delta + y \operatorname{sen} \delta)$. Determinar las ecuaciones para las trayectorias y líneas equipotenciales.

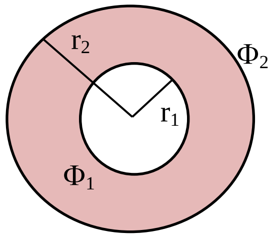
22) Si $g(x)\left[e^{2y} - e^{-2y}\right]$ es armónica, g(0) = 0, g'(0) = 1, determinar g(x).

23) a) Mostrar que $u(\rho,\theta) = \rho^2 \cos 2\theta$ es una función armónica.

b) Encontrar la función $v(\rho, \theta)$ armónica conjugada de $u(\rho, \theta)$, y mostrar que también satisface la ecuación de Laplace en todo el plano.

24) Siendo la función armónica $\Phi = x^2 - y^2 + 2y$ en una región finita del plano Z. Demostrar que Φ es armónica en el plano W bajo la transformación $z = w^3$.

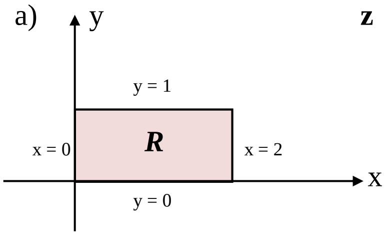
25) Una región está acotada por dos conductores cilíndricos concéntricos infinitamente largos, de radios r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$) los cuales están cargados a potenciales Φ_1 y Φ_2 respectivamente (ver figura). Encontrar el potencial.
(Ayuda: Considere la función $\Omega = A \ln z + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$ y $z = re^{i\theta}$)



TRANSFORMACIÓN LINEAL Y CUADRATICA.-

26) Hallar la imagen de un conjunto ***R*** dado a través de la transformación w = f(z). Graficar.

a)



a') $w = z + (1 - 2i)$

a'') $w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z$

a''') $w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z + (1 - 2i)$

b) *R* = 1^er^ cuadrante del plano z con $w = z^2$

c) $R = \{z \in \mathbb{C} \,/\, x \le 1 \wedge y \le 1 \wedge x + y \ge 1\}$ con $w = z^2$

TRANSFORMACIÓN INVERSIÓN.-

27) Mediante $w = \frac{1}{z}$, hallar las siguientes imágenes. Graficar.

a) El círculo $A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 3| \le 5\}$.

b) El ángulo perteneciente al 1^er^ cuadrante cuyos lados están incluidos en las rectas y = 0 e y = x.

c) El menor segmento circular determinado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$.

d) La familia de circunferencias $x^2 + y^2 = ax$.

28) Hallar la preimagen de Re (w) > 1, por la transformación $w = \frac{1}{z}$. Graficar.

TRANSFORMACIÓN BILINEAL.-

29) a) Encontrar la transformación bilineal que transforma $z_0 = 0$ en $w_0 = 2$, $z_1 = i$ en $w_1 = -1$ y $z_2 = -1$ en $w_2 = 0$.

b) Encontrar los puntos fijos de la transformación anterior.

30) Explique en qué se transforman los recintos indicados mediante las funciones dadas.

a) El cuadrante x > 0, y > 0; $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

b) El semicírculo | z | < 1, Im(z) > 0; $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

c) El ángulo $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$; $w = \dfrac{z}{z-1}$.

INTEGRACIÓN.-

31) Calcular las siguientes integrales complejas:

a) $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z}\,dz$ siendo *C* la poligonal: $-1 + i \to 1 \to 1 - i$

b) $\displaystyle\int_C z^2 e^{-z} dz$ siendo *C* el segmento de origen πi y extremo $-\pi i$.

c) $\displaystyle\int_C |z|^2\,dz$ siendo *C* : i) el arco de parábola $x = y^2$ recorrido desde A(0,0) hasta B(1,1)

ii) el arco de circunferencia $|z - i| = 1$ recorrido desde $z_1 = 0$ hasta $z_2 = 1 + i$, recorrido en sentido positivo.

d) $\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$ siendo *C* la poligonal: $-i \to 1 - i \to 1$

32) Para cada función f(z) y caminos *C* dados, encontrar el valor de $\displaystyle\int_C f(z)dz$. Representar el camino en cada ítem.

a) $f(z) = z^2$ *C*: $z(t) = t + \frac{1}{2}ti$ $t \in [0,2]$

b) $f(z) = z^2$ $C = C_1 \cup C_2$ donde $\begin{cases} C_1 : z_1(t) = t & t \in [0,2] \\ C_2 : z_2(t) = 2 + ti & t \in [0,1] \end{cases}$

c) $f(z) = \bar{z}$ *C*: $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$ $t \in [0,\pi]$

d) $f(z) = \bar{z}$ *C*: $z(t) = t^2 + it$ $t \in [0,2]$

e) $f(z) = \bar{z}$ *C*: $z(t) = t + \frac{1}{2}ti$ $t \in [0,4]$

f) $f(z) = \bar{z}$ $C = C_1 \cup C_2$ donde $\begin{cases} C_1 : z_1(t) = it & t \in [0,2] \\ C_2 : z_2(t) = t + 2i & t \in [0,4] \end{cases}$

g) Comparar los resultados obtenidos en a) y b).

h) Ídem anterior en d), e) y f).

i) ¿En cuál de las situaciones anteriores podría afirmar que la integral es independiente del camino?

j) ¿Qué condición debe cumplir f(z) para que se cumpla dicha afirmación?

33) Calcular $\int_C \frac{z+2}{z}dz$ donde *C* es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$ con $-\pi \le \theta \le 0$.

34) Verificar que $\int_1^{3-i} [2x + y - i(x^2 + y^2)]dz = -\frac{4}{3} - \frac{85}{6}i$ a lo largo del camino *C* dado por la poligonal de vértices (1,0), (3,0) y (3, –1).

35) Aplicar el Teorema de Cauchy y justificar.

a) $\oint_{C:|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-i)^2}dz$

b) $\oint_{C:|z|=3} \frac{e^z + e^2}{z}dz$

c) $\oint_{C:|z-1+i|=\sqrt{3}} \frac{4+z}{\operatorname{sen} z - \frac{1}{2}}dz$

d) $\oint_{C:|z-2|+|z+2|=20} \frac{\cos^2 z}{(z+12i)^3}dz$

36) Hallar el valor numérico de $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ donde *C* es una curva simple cerrada y z = a está, a) fuera de *C*; b) dentro de *C*.

37) Aplicando previamente la Fórmula de la Integral de Cauchy, calcular las siguientes integrales.

a) $\oint_{C:|z|=\frac{1}{4}} \frac{2z+1}{z^2+z}dz$

b) $\oint_{C:|z+1|=1} \frac{dz}{z^3+1}$

c) $\oint_{C:|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}dz$

d) $\oint_{C:|z-2-j|=1} \frac{dz}{(z-1)^2 z}$

e) $\oint_{C:|z|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$

f) $\oint_{C:|z|=3} \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$

g) $\oint_C \frac{dz}{3z^2 - 7z + 2}$ siendo C: |z - in | = 2 con n = 0, 1, 2, 3, ...

h) $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+1)^n}$ siendo C: |z| = 2 y n = 0, 1, 2, 3, ... ¿Qué valor tomará la integral si n = -1, -2, -3, ...?

i) $\oint_{C:|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$

j) $\oint_{C:|z|=4} \frac{z+2}{z(z-1)^3(z+3)^2}dz$

k) $\oint_{C:|z-2i|=5} \frac{z+6}{(z-i)^2(z^2+4)}dz$

l) $\oint_{C:|z|=3} \frac{z^3+z-1}{z^2(z^2-3z+2)}dz$

ll) $\oint_{C:|z|=1} \frac{\operatorname{sen}^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3 z}dz$

m) $\oint_{C:|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3(z^2+2z-1)}dz$

SERIES DE POTENCIAS.-

38) Hallar la región de convergencia de las series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

39) Desarrollar en Serie de Taylor alrededor de z_0, e indicar en cada caso la región de convergencia.

a) $f(z) = \cos z$ $z_0 = -\frac{\pi}{4}$

b) $f(z) = e^{-z}$ $z_0 = 0$

c) $f(z) = \ln(z+1)$ $z_0 = 0$

d) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ $z_0 = 0$

e) $f(z) = \dfrac{1}{2z-i}$ $z_0 = -1$

f) $f(z) = z\, e^{2z}$ $z_0 = -1$

g) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ $z_0 = 0$

h) $f(z) = \ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ $z_0 = 0$

40) Desarrollar en Serie de Laurent alrededor de las singularidades y clasificar las mismas.

a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^6}$

b) $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$ d) $f(z) = (z-3)\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{z+2}$ f) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS.-

41) Utilizando el Teorema de Ceros y Polos, determinar los polos de las siguientes funciones, su orden y calcular el residuo en cada uno.

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ d) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$ g) $f(z) = \operatorname{tg} z$

b) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ e) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ h) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

c) $f(z) = \dfrac{4z-1}{z^2+3z+2}$ f) $f(z) = \dfrac{2z \quad 4}{z^2 \quad 4z+4}$ i) $f(z) = (\cos z - \operatorname{sen} z)^{-1}$

42) Aplicar el Teorema de los Residuos para calcular.

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 e^z}$ d) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^z \cdot \sec(\pi z)\, dz$ g) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{z}\, dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{\operatorname{sh} z}$ e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \coth(z)\ dz$ h) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}} \operatorname{sen}\frac{1}{z}\, dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{1-\cos z}$ f) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{e^{z}}{chz}\,dz$

EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES.-

43) Verificar las siguientes integrales reales.

<u>TIPO I:</u> $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(sen\theta, \cos\theta)d\theta$, $F(sen\,\theta, \cos\theta)$ es una función racional de sen θ y cos θ.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+sen\theta} = \pi$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3sen\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$

<u>TIPO II:</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$, F(x) es una función racional.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{5\pi}{288}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{7\pi}{50}$

<u>TIPO III:</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ senmx\end{Bmatrix}dx$, F(x) es una función racional.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \pi\frac{e^{-m}}{2}$ $m > 0$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$ $m > 0$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xsen\pi x}{x^2+2x+5}\,dx = -\pi e^{-2\pi}$

RESPUESTAS AL TRABAJO PRÁCTICO

1) a) $(8 + 2\sqrt{3}) + (2 + 3\sqrt{3})i$ c) $w = \pm(\sqrt{10} + i\sqrt{2})$

d) $\rho = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $w_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}\right)\right]$ con $k = 0, 1, 2.$

2) a) 1, i, –1, –i

b) $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - i$

c) $x = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi - i\ln\sqrt{2}} \ \vee \ x = e^{\frac{7}{4}\pi+2k\pi - i\ln\sqrt{2}}$ $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = e^{\pi i \frac{\sqrt{3}}{9}} \ \vee \ x = e^{5\pi i \frac{\sqrt{3}}{9}}$

3) $x = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$, $y = -\frac{16}{13} + \frac{11}{13}i$

4) a) Es la recta $x = -2$

b) $\{(x, y) / -2 \le y < 3\}$

c) Es el exterior de la circunferencia de centro (–1,0) y radio 2.

d) $\{(x, y) / -½ < x < ½ \ \wedge \ x^2 + y^2 = 4\}$

e) $\{(\varphi, \rho) / 45^\circ \le \varphi \le 135^\circ \ \wedge \ \rho < 2\}$

f) Es la elipse de semidiámetros $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

g) $\{(x, y) / y = ½\}$

h) Es la circunferencia centrada en el origen, de radio 1.

i) Es la unión de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, y el eje real, salvo el origen.

j) $\left\{(x, y) / y = -\frac{3}{2}\right\}$

5) a) Reemplazar $z = x + iy$ en el miembro izquierdo y desarrollar el coseno de la suma.

b) Ídem anterior para el sen z.

c) Reemplazar $\mathrm{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2$ y $\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$ y desarrollar.

d) Utilizar las identidades dadas.

e) Reemplazar en sen z, la z por $z_1 + z_2$ en la identidad correspondiente y desarrollar.

f y j) Ídem d) para cos z y sen z, reemplazando z por iz.

g) Utilizar las identidades trigonométricas.

h) Utilizar las identidades del punto 16 reemplazando z por iz.

6) a) $z = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

b) $z = (k + ½)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

c) $z = \frac{\pi}{8} i + \frac{k\pi}{2} i \ , \ k \in \mathbb{Z}$

d) $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(\text{ch}4 \pm \text{sh}4) \ , \ k \in \mathbb{Z}$

e) $z = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i} \ , \ k \in \mathbb{Z}$

f) $z_1 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$ y $z_2 = -\ln 3 + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i \ , \ k \in \mathbb{Z}$

7) a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \ , \ v(x, y) = 3x^2y - y^3 \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

b) $u(x, y) = -y + 3 \ , \ v(x, y) = x \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

c) $u(x, y) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} \ , \ v(x, y) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} \ , \ D_f = \mathbb{C}$, multiforme

d) $u(x, y) = x \ , \ v(x, y) = 0 \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

e) $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} \ , \ v(x, y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \ , \ D_f = \mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\}$, multiforme

f) $u(x, y) = e^y \cos x \ , \ v(x, y) = -e^y \text{ sen } x \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

g) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \ , \ v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \ , \ D_f = \mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\}$, uniforme

h) $u(x, y) = \text{sh } 2x \cos 2y \ , \ v(x, y) = \text{ch } 2x \text{ sen } 2y \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

i) $u(x, y) = x \text{ ch } x \cos y - y \text{ sh } x \text{ sen } y \ , \ v(x, y) = y \text{ ch } x \cos y + x \text{ sh } x \text{ sen } y \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

j) $u(x, y) = x^2 + y^2 \ , \ v(x, y) = 0 \ , \ D_f = \mathbb{C}$, uniforme

k) $u(x, y) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]\right)$

$v(x, y) = \text{argch}\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]\right) \ , \ D_f = \mathbb{C}$, multiforme

9) a) $w = i^{-1} \ln (iz + \sqrt{1-z^2})$

b) $w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

10) a) $5 - 3i$

b) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} i$

c) no existe

d) 0

e)

f) 1

11) a) $z = \mathbb{C} - \{-i, i\}$

c) $z = \mathbb{C} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $z = \mathbb{C} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $z = \mathbb{C} - \{(k + \frac{1}{2})\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

12) a) $f'(-1) = 1$ b) $f'(z_0) = 3z_0^2 - 2$

13) a), b) no existe $f'(z)$

c) $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$

d) no existe $f'(z)$ si $z \neq 0$

e) $f'(z) = i$

f) $f'(z) = e^z$

g) no existe $f'(z)$ si $x \neq y$

h) $f'(z) = \dfrac{1}{z}$

i) $f'(z) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}$

j) $f'(z) = -\operatorname{sen} z$

14) Por definición, $\dfrac{df(z)}{dz} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

si este límite existe independientemente de la manera como $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ tiende a cero.

Entonces $$\frac{d\bar{z}}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x + iy}}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si $y = 0$, el límite exigido es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

Si $x = 0$, el límite exigido es $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$

Entonces ya que el límite depende de la manera como $\Delta z \to 0$, la derivada no existe, es decir, $f(z) = \bar{z}$, no es analítica.

15) a) $f'(z) = \dfrac{2}{(1 - z)^2}$

b) La función $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{1\}$, donde la derivada no existe y la función no es analítica. El punto $z = 1$ es un "punto singular" de $f(z)$.

16) a), b), d) y g) no es analítica en $\mathbb{C}$

c), h) e i) analítica en $\mathbb{C} - \{0_{\mathbb{C}}\}$

e), f) y j) analítica en $\mathbb{C}$

18) a) $c = 1$, $b = -a$; $f(z) = (1 - ai)\,z$

b) $a = b = -1$; $f(z) = e^{iz}$

20) a) $u(x, y)$ es armónica; $v(x, y) = -e^{-x}(y \operatorname{sen} y + x \cos y) + k$ $\qquad f(z) = -i\bar{z}e^{-\bar{z}} + ik$

b) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - 2x + k$ $\qquad f(z) = z^3 - iz - 3 + ik$

c) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + k$ $\qquad f(z) = (1+ i)z^2 - (2 + 3i)z + ik$

d) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = -\operatorname{ch} x \cos y + k$ $\qquad f(z) = -i \cos(iz) + ik$

e) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + k$ $\qquad f(z) = e^z + ik$

f) $u(x, y)$ no es armónica.

g) $u(x, y)$ es armónica; $v(x, y) = -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + k$ $\qquad f(z) = -ie^{iz^2} + ik$

h) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = ye^x \cos y + xe^x \operatorname{sen} y + k$ $\qquad f(z) = ze^z + ik$

i) $u(x, y)$ “ ; $v(x, y) = 4xy - x^3 + 3xy^2 + k$ $\qquad f(z) = 2z^2 - iz^3 + ik$

j) $v(x, y)$ es armónica; $u(x, y) = \dfrac{x}{2(x^2 + y^2)} - 2xy + k$ $\qquad f(z) = \dfrac{1}{2z} + iz^2 + 3i + k$

k) $v(x, y)$ “ ; $u(x, y) = -2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - 2x - y + k$ $\qquad f(z) = 2i \ln z - (2 - i)z + k$

l) $u(x, y)$ no es armónica.

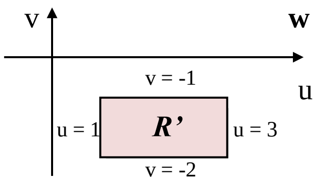
21) b) $f(z) = z\, e^{-z} + i$

22) $g(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

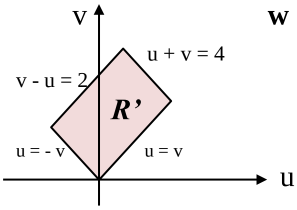
23) b) $v(\rho, \theta) = \rho^2 \operatorname{sen} 2\theta + k \quad (k \in \mathbb{R})$

25) $\Phi = \dfrac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln r + \dfrac{\Phi_1 \ln r_2 - \Phi_2 \ln r_1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

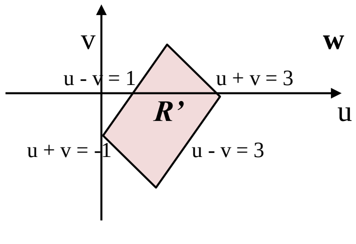
26) a) a’) $x = 0 \to u = 1$
$y = 0 \to v = -2$
$x = 2 \to u = 3$
$y = 1 \to v = -1$



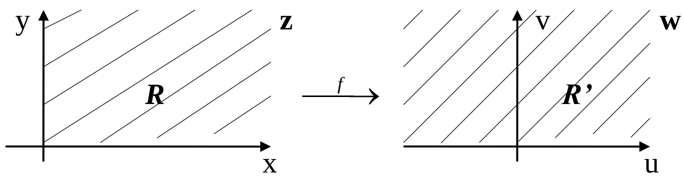
a’’) $x = 0 \to u = -v \quad x = 2 \to u = 4 - v$
$y = 0 \to u = v \quad y = 1 \to u = v - 2$



a’’’) $x = 0 \to u + v = -1$
$y = 0 \to u - v = 3$
$x = 2 \to u + v = 3$
$y = 1 \to u - v = 1$

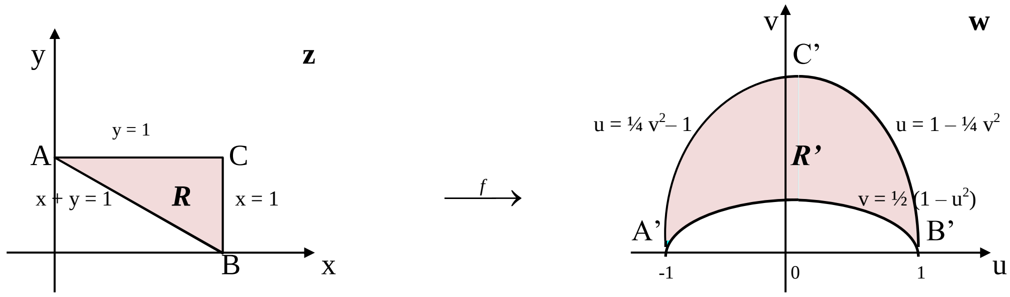


b)



Los puntos en el plano **z** se rotan un ángulo dos veces el que tenían.

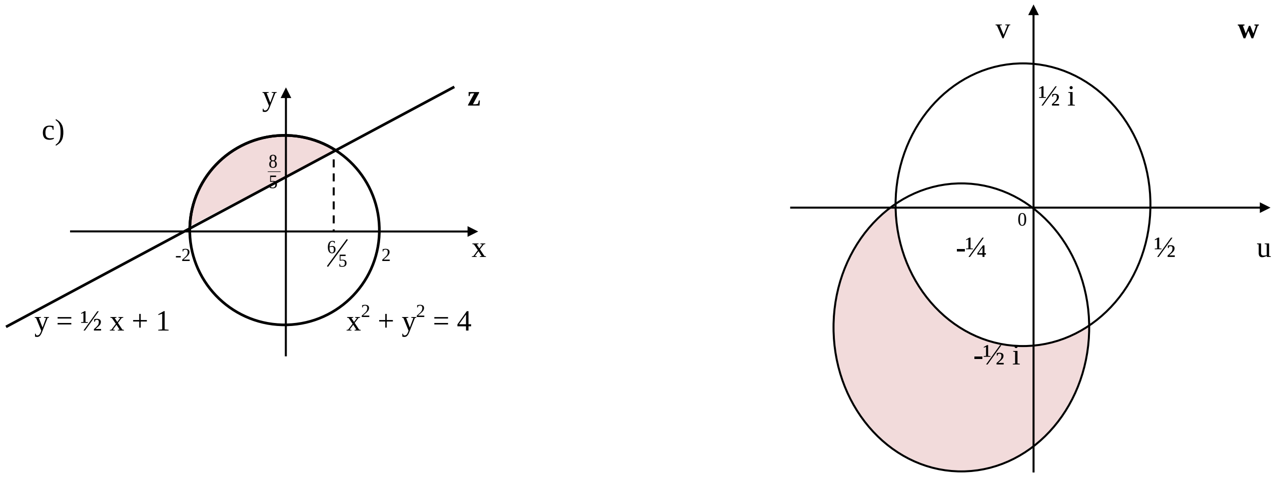
c)



27) a) $(x-3)^2 + y^2 \leq 5^2 \xrightarrow{f} \left(u + \frac{3}{16}\right)^2 + v^2 \geq \frac{25}{256}$

b)

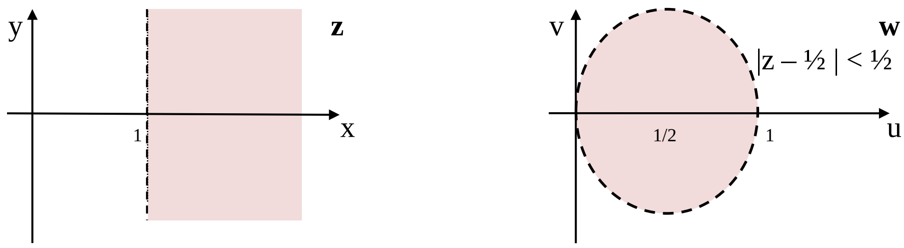
c)



$x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{f} v^2 + u^2 = ¼$ $\qquad$ $y = ½\, x + 1 \xrightarrow{f} (u + ¼)^2 + (v + ½)^2 = \frac{5}{16}$

d) La familia de las rectas $u = \frac{1}{a}$ paralelas al eje imaginario (que no comprende al propio eje imaginario).

28) Preimagen de Re(w) > 1 es el interior del círculo con centro en (½, 0) y radio ½.



29) a) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ $\quad\therefore\quad w = \dfrac{z+1}{\left(-1+\frac{3}{2}i\right)z+\frac{1}{2}}$ $\quad$ con $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = -1+\frac{3}{2}i \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$

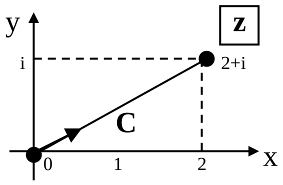
30) a) En el semicírculo | w | < 1, Im(w) < 0.

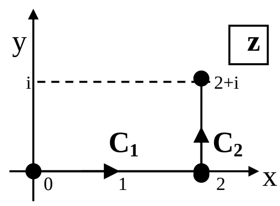
b) En el recinto que contiene el punto w = 0 y está limitado por los arcos de las circunferencias | w | = 1 y $\left|w+\frac{5}{4}i\right| = \frac{3}{4}$

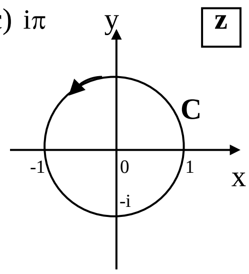
c) En el recinto que se obtiene al excluir del semiplano inferior (Im w < 0) la parte del círculo $\left|w-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ perteneciente a este semiplano.

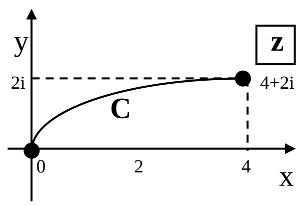
31) a) 0 $\quad$ b) $-4i\pi$ $\quad$ c) i) $\frac{6}{5}+\frac{8}{15}i$ $\quad$ ii) $2+\frac{\pi}{2}+i$ $\quad$ d) 2i

32) a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{3}i$ $\quad$ b) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{3}i$ $\quad$ c) $i\pi$ $\quad$ d) $10-\dfrac{8}{3}i$



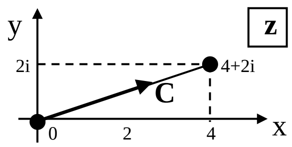


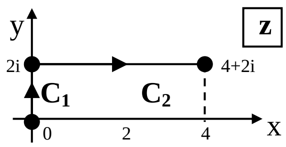




$C: y = \dfrac{1}{2}x$ $\quad C_1: \begin{cases} x = t,\ t\in[0,2] \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad C_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = t,\ t\in[0,1] \end{cases}$ $\quad C: x^2 + y^2 = 1$ $\quad C: y = \sqrt{x}$

e) 10 $\quad$ f) 10 – 8i





$C: y = \dfrac{1}{2}x$ $\quad C_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = t,\ t\in[0,2] \end{cases}$ $\quad C_2: \begin{cases} x = t,\ t\in[0,4] \\ y = 2 \end{cases}$

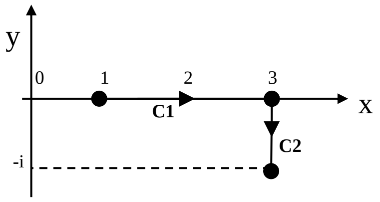
i, j) La integral es independiente del camino en los puntos a) y b); y la condición que se debe cumplir es que la función integrando sea analítica en Z.

33) $4 + 2\pi i$

34) Sabemos que $\int_C f(z)dz = \int_a^b \left(u\dfrac{dx}{dt} - v\dfrac{dy}{dt}\right)dt + i\int_a^b \left(v\dfrac{dx}{dt} + u\dfrac{dy}{dt}\right)dt$ con $t \in [a, b]$, entonces tendremos para la integral

$$\int_1^{3-i} \left[2x + y - i\left(x^2 + y^2\right)\right] dz$$

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = -x^2 - y^2 \end{cases} \qquad C_1: \begin{cases} x = t,\ t\in[1,3] \\ y = 0 \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = t,\ 0 \geq t \geq -1 \end{cases}$$



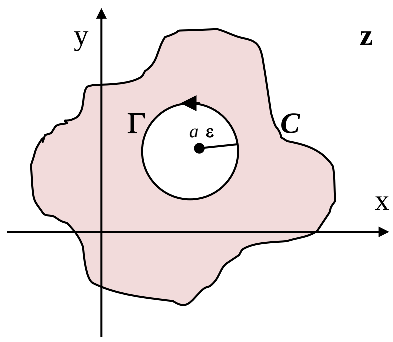
Reemplazando tendremos, para las integrales sobre C_1 y C_2 el resultado esperado $-\frac{4}{3}-\frac{85}{6}i$.

35) a) 0 ; f(z) es analítica en la región que encierra la curva *C*.

b) ¿? ; f(z) no es analítica en la región que encierra la curva *C*, entonces no podemos aplicar el TEOREMA DE CAUCHY y por lo tanto la integral debe ser calculada por otro método.

c) ídem b)

d) ídem a)



36) a) Si *a* está fuera de *C*, entonces $f(z)=\frac{1}{z-a}$ es analítica en todas partes dentro y sobre *C*. Por lo tanto, según el Teorema de Cauchy, $\oint_C \frac{dz}{z-a}=0$.

b) Supongamos *a* está dentro de *C* y se Γ un círculo de radio ε con centro en z = *a* de modo que Γ está dentro de *C* (esto se puede hacer ya que z = *a* es un punto interior).

Entonces, como f(z) es analítica en la región sombreada limitada por las curvas simples cerradas *C* y Γ y también sobre *C* y Γ, se tiene que

$$\oint_C \frac{dz}{z-a}=\oint_\Gamma \frac{dz}{z-a} \qquad (1)$$

Ahora en $\Gamma:|z-a|=\varepsilon$ o $z-a=\varepsilon e^{i\theta}$, o sea, $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$. En este caso, puesto que $dz=i\varepsilon e^{i\theta}$,

El lado derecho de (1) se convierte en $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$ que es valor buscado.

37) a) $2\pi i$

d) 0 π

h) $\begin{cases} n\ge 1 \quad \Rightarrow \quad \oint = \dfrac{2\pi i^n e^{-i}}{(n-1)!} \\ n=0 \quad \Rightarrow \quad \oint = 0 \\ n\le -1 \quad \Rightarrow \quad \oint = 0 \end{cases}$

b) $\frac{2}{3}\pi i$

e) $\frac{2\pi i}{25}(5\cos 1-2\operatorname{sen}1)$

i) $\frac{8}{3}\pi e^{-2}i$

k) $\frac{9\left(7\pi^2-6\sqrt{3}\pi+6\right)\ i}{8\pi^2}$

c) $-\pi i$

f) $4\pi i$

j) $2\pi i$

l) $\pi i\left(4\sqrt{2}-6\right)$

38) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Si $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, entonces $u_{n+1}=\dfrac{(-1)^{n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Por esto, excluyendo z = 0 para el cual la serie dada converge, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{z^2(2n-1)!}{(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!|z|^2}{(2n+1)2n(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^2}{(2n+1)2n}=0$$

para todo z finito. De tal modo que la serie converge (absolutamente) para todo z, y decimos que la serie converge para | z | < ∞. Se puede decir, equivalentemente, que el círculo de convergencia es infinito o que el radio de convergencia es infinito.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$

Si $u_n=n!z^n$, $u_{n+1}=(n+1)!z^{n+1}$. Entonces excluyendo z = 0 para el cual la serie dada converge, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=\infty$$

De tal modo que la convergencia es sólo en z = 0.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

Si $u_n=\dfrac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$, entonces $u_{n+1}=\dfrac{(z+2)^{n}}{(n+2)^3 4^{n+1}}$. Por esto, excluyendo z = -2 para el cual la serie dada converge, tenemos

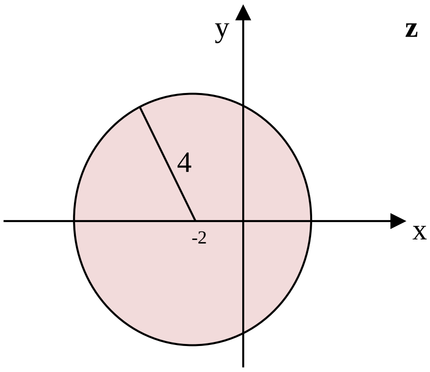
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)(n+1)^3}{4(n+2)^3}\right|=\frac{|z+2|}{4}$$

Entonces la serie converge (absolutamente) para $\dfrac{|z+2|}{4}<1$, o sea $|z+2|<4$. El punto z = -2 está incluido en $|z+2|<4$.

Si $\dfrac{|z+2|}{4}=1$, o sea $|z+2|=4$, el criterio del cociente falla. Sin embargo se ve que en este caso

$$\left|\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}\right|=\left|\frac{(z+2)^{n-1}}{4^{n-1}}\right|\cdot\frac{1}{4(n+1)^3}=\left(\frac{|z+2|}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4(n+1)^3}=\frac{1}{4(n+1)^3}\le\frac{1}{n^3}$$

y puesto que $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, la serie dada converge (absolutamente). Se deduce que la serie dada converge (absolutamente) para $|z+2| \le 4$. Geométricamente este es el conjunto de puntos dentro y sobre el círculo de radio 4 con centro en z = -2, llamado el **círculo de convergencia**; el radio de convergencia es igual a 4.



39) a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2(2n)!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + (-1)^n \frac{\sqrt{2}}{2(2n+1)!}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right]$. Converge en $|z| < \infty$.

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n!}$. Converge en $|z| < \infty$.

c) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$. Converge en $|z| < 1$.

d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Converge en $|z| < 1$.

e) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (z+1)^n}{(-2-i)^{n+1}}$. Converge en $|z+1| < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

f) $f(z) = -e^{-2} - e^{-2}(z+1) + \frac{4e^{-2}}{3!}(z+1)^3 + \frac{16e^{-2}}{4!}(z+1)^4 + \frac{48e^{-2}}{5!}(z+1)^5 + \ldots$. Converge en $|z| < \infty$.

g) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$. Converge en $|z| < 1$.

h) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$. Converge en $|z| < 1$.

40) a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ en $z_0 = 1$

$$f(z) = e^2(z-1)^{-3} + 2e^2(z-1)^{-2} + 2e^2(z-1)^{-1} + \frac{4}{3}e^2 + \frac{2}{3}e^2(z-1) + \ldots$$

z = 1 es un polo de orden 3, o polo triple.

b) $f(z)=\dfrac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}$ en $z_0 = 0$

$f(z)=\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^4}{7!}-\ldots.$ $z = 0$ es una singularidad evitable.

c) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$

I) en $z_0 = i$ $f(z)=-\dfrac{i}{2}(z-i)^{-1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{i}{8}(z-i)-\dfrac{1}{16}(z-i)^2-\dfrac{i}{32}(z-i)^3+\dfrac{1}{64}(z-i)^4+\ldots$

$z = i$ es un polo de orden 1, o polo simple.

II) en $z_0 = -i$ $f(z)=\dfrac{i}{2}(z+i)^{-1}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{i}{8}(z+i)-\dfrac{1}{16}(z+i)^2+\dfrac{i}{32}(z+i)^3+\dfrac{1}{64}(z+i)^4-\ldots$

$z = -i$ es un polo de orden 1, o polo simple.

d) $f(z)=(z-3)\operatorname{sen}\dfrac{1}{z+2}$ en $z_0 = -2$

$f(z)=1-5(z+2)^{-1}-\dfrac{1}{6}(z+2)^{-2}+\dfrac{5}{6}(z+2)^{-3}+\dfrac{1}{120}(z+2)^{-4}-\ldots$

$z = -2$ es una singularidad esencial.

e) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^6}$ en $z_0 = 0$

$f(z)=z^{-6}-\dfrac{1}{2!}z^{-4}+\dfrac{1}{4!}z^{-2}-\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{8!}z^2-\ldots$

$z = 0$ es un polo de orden 6.

f) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z}$ en $z_0 = 0$

$f(z)=\dfrac{1}{2!}z-\dfrac{1}{4!}z^3+\dfrac{1}{6!}z^5-\dfrac{1}{8!}z^7+\ldots$

$z = 0$ es una singularidad removible o evitable.

41) a) $z = 0$ polo de orden 3

$\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{1}{6}$

b) $z = -1$ polo simple

$\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=-2$

c) $z = -1$ polo simple

e) $z = \pm 1$ polos dobles

$\operatorname*{Res}_{1} f(z)=-\dfrac{1}{4}$

$\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\dfrac{1}{4}$

f) $z = 2$ polo simple

$\operatorname*{Res}_{2} f(z)=2$

$\operatorname{Res}_{-1} f(z) = -5$

$z = -2$ polo simple

$\operatorname{Res}_{-2} f(z) = 9$

d) $z = -1$ polo doble

$\operatorname{Res}_{-1} f(z) = -\dfrac{14}{25}$

$z = \pm 2i$ polos simples

$\operatorname{Res}_{2i} f(z) = \dfrac{7}{25} + \dfrac{1}{25} i$

$\operatorname{Res}_{-2i} f(z) = \dfrac{7}{25} - \dfrac{1}{25} i$

g) $z = \dfrac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ polos simples

$\operatorname{Res}_{\frac{2k+1}{2}\pi} f(z) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$

h) $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ polos simples

$\operatorname{Res}_{k\pi} f(z) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$

i) , $k \in \mathbb{N}_0$ polos simples

42) a) $-2\pi i$ d) 0 g) $8\pi i$

b) $-2\pi i$ e) $-4i \operatorname{sh}\dfrac{1}{2}$ h) 0

c) 0 f) $2\pi i$ i) $2\pi i$