Opgave 1

1a

Ved at betragte figuren og udnytte at alle sider står vinkelret på hinanden, kan vi ræsonnere os frem til koordinaterne til C, D, F og G.

1b

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$, de udspænder da et plan α der går gennem B, D, og H.
Vi krydser $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

1c

Først bestemmer vi en parameterfremstilling for linjen l.
Dernæst udnytter vi at vi allerede har bestemt planens ligning. Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l.

Opgave 2

2a

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og D.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer vi vektoren der går fra A til D og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartiesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AD}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

2b

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$, de udspænder da et plan π der går gennem A, B, og D.
Vi krydser $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

2c

Vi ved at distancen mellem et punkt og en linje i rummet er givet ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{\left| \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{P_0P} \right|}{\left| \overrightarrow{r} \right|}$$

hvor $\overrightarrow{r}$ er en retningsvektor for linjen og $\overrightarrow{P_0P}$ er vektoren fra P_0 til P.

Opgave 3

3a

Vi integrerer $f(x)$ fra π til 3π.

3b

Vi ved at volumen for at omdrejningslegeme, der er drejet om andenaksen er givet ved:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

Vi ved at grafen for funktionen f er givet ved:

$$f(x) = \cos(x) + 1\,, \quad x \in [\pi;\, 3\pi]$$

Derfor kan bassinet rumme:

$$2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi)\, dx - 2\pi \int_\pi^{2\pi} x \cdot f(x)\, dx$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

Opgave 4

4a

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og B.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til B og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartiesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AB}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

4b

Vi bestemmer er retningsvektor for linjen l:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Vi kender et fast punkt $C = (x_0; y_0; z_0) = (3; 4; 8)$, der ligger i planen π.
Vi indsætter i planens ligning og ganger ud:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

4c

Vi har allerede bestemt en parameterfremstilling for linjen l og planens ligning.
Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l.

Opgave 5

5a

Vi bestemmer først f's skæring med x-aksen ved at løse ligningen:

$$0 = 17 \cdot \cos(0.0628 \cdot x)$$

Her får vi radius, den ganger vi med 2 for at få diameteren.

5b

Vi kan bestemme volumen af hallen ved:

$$V_y = 2\pi \int_0^r x \cdot f(x)\, dx + 8\pi r^2$$

Resultatet bliver i kubikmeter, for at udregne det maksimale antal tilskuere skal man blot dividere det med 20 m^3.

Opgave 6

6a

Brug pythagoras sætning af 2 omgange.

6b

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og C.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer vi vektoren der går fra A til C og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartiesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AC}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

6c

Først bestemmer vi en retningsvektor for linje l og m.
Derefter benytter vi sammenhængen med prikproduktet af to vektorer og vinklen imellem dem:

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos(v)$$

Vi isolerer v.

6d

Vi bestemmer arealet af trekanten ABC ved:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|$$

Netop da det er gældende at $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin(v)$, det vi genkender som $h \cdot g$.