

## Opgave 1

**1a: Bestem koordinaterne til hjørnerne  $C$ ,  $E$ ,  $F$  og  $G$ .**

### Metode

Ved at betragte figuren og udnytte at alle sider står vinkelret på hinanden, kan vi ræsonnere os frem til koordinaterne til  $C$ ,  $D$ ,  $F$  og  $G$ .

### Beregning

$$\begin{aligned} A &:= \langle 0|0|0 \rangle \\ B &:= \langle 6|0|0 \rangle \\ D &:= \langle 0|10|0 \rangle \\ H &:= \langle 0|0|8 \rangle \end{aligned}$$

$$C := B + D = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F := B + D + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E := B + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$G := D + H = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

### Konklusion

Koordinaterne til kassens øvrige hjørner er blevet bestemt til:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

**1b: Bestem en ligning for den plan  $\alpha$ , der går gennem hjørnerne  $B$ ,  $D$  og  $H$ .**

**Metode**

Først bestemmes vektor  $\overrightarrow{BH}$  og  $\overrightarrow{BD}$ , de udspænder da et plan  $\alpha$  der går gennem  $B$ ,  $D$ , og  $H$ . Vi krydser  $\overrightarrow{BH}$  og  $\overrightarrow{BD}$  for at bestemme en normalvektor til planen. Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\vec{n} \bullet \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

**Beregning**

$$\overrightarrow{BD} := D^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} := H^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - B^{\%T} \right) = 0$$

$$80x + 48y + 60z - 480 = 0$$

**Konklusion**

Planen  $\alpha$ 's ligning kan skrives ved:  $80x + 48y + 60z - 480 = 0$

**1c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem planen  $\alpha$  og linjen  $l$ , der går gennem punkterne  $A$  og  $F$ .**

### Metode

Først bestemmer jeg en parameterfremstilling for linjen  $l$ .

Dernæst udnytter jeg at vi allerede har bestemt planens ligning. Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for  $l$ .

### Beregning

#### Parameterfremstilling for $l$

$$\overrightarrow{AF} := F^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 10t \\ 8t \end{pmatrix}$$

#### Bestemmelse af skæringspunktet

$$lign1 := 80x - 480 + 48y + 60z = 0$$

$$lign2 := A[1] + t \cdot \overrightarrow{AF}[1]$$

$$lign3 := A[2] + t \cdot \overrightarrow{AF}[2]$$

$$lign4 := A[3] + t \cdot \overrightarrow{AF}[3]$$

$$solve(\{lign1, lign2, lign3, lign4\}, \{t, x, y, z\})$$

$$t = \frac{1}{3}, x = 2, y = \frac{10}{3}, z = \frac{8}{3}$$

### Konklusion

Skæringspunktet mellem planen  $\alpha$  og linjen  $l$  er i punktet  $(2 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{8}{3})$

## Opgave 2

### 2a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje $l$ .

#### Metode

Vi ved at linjen  $l$  går igennem punkterne  $A$  og  $D$ .

For at bestemme en parameterfremstilling for linjen  $l$  bestemmer jeg vektoren der går fra  $A$  til  $D$  og stedvektoren til  $A$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$\vec{A}$  angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordinatsystem. Mens  $\overrightarrow{AD}$  angiver retningen og  $t$  sørger for at vi rammer alle punkter.

#### Beregning

$$A := \langle 1|2|0 \rangle$$

$$B := \langle 3|4|0 \rangle$$

$$C := \langle 2|6|0 \rangle$$

$$D := \langle 2|5|7 \rangle$$

$$\overrightarrow{AD} := D^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \\ 7t \end{pmatrix}$$

#### Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen  $l$  kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**2b: Bestem en ligning for den plan  $\pi$ , der indeholder punkterne  $A$ ,  $B$  og  $D$ .**

**Metode**

Først bestemmes vektor  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  bestemte vi i forrige opgave, vektorerne udspænder da et plan  $\pi$  der går gennem  $A$ ,  $B$ , og  $D$ .

Vi krydser  $\overrightarrow{AB}$  og  $\overrightarrow{AD}$  for at bestemme en normalvektor til planen.

Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\vec{n} \bullet \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

**Beregning**

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A^{\%T} \right) = 0$$

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

**Konklusion**

Ligningen for planen  $\pi$  kan skrives ved:

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

**2c: Bestem afstanden mellem punktet  $M$  og linjen  $l$ .****Metode**

Vi ved at distancen mellem et punkt og en linje i rummet er givet ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{\|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\vec{r}\|}$$

hvor  $\vec{r}$  er en retningsvektor for linjen og  $\overrightarrow{P_0P}$  er vektoren fra  $P_0$  til  $P$ .

**Beregning**

Da punktet  $M$  er midtpunkt på linjestykket  $CD$ .

- $C \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
- $D \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Må punktet  $M$  have koordinaterne  $\begin{pmatrix} 2 & 5.5 & 3.5 \end{pmatrix}$ .

$$M := \langle 2|5.5|3.5 \rangle$$

$$\overrightarrow{DM} := M^{\%T} - D^{\%T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(M, l) = \frac{\|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DM}\|}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1.88$$

**Konklusion**

Afstanden mellem punktet  $M$  og linjen  $l$  er 1.88.

## Opgave 3

### 3a: Bestem arealet A

#### Metode

Vi integrerer  $f(x)$  fra  $\pi$  til  $3\pi$ .

#### Beregning

$$f(x) := \cos(x) + 1$$

$$A = \int_{\pi}^{3\pi} f(x) \, dx = 2\pi$$

#### Konklusion

Tværsnitsarealet af volden er  $2\pi$ .

### 3b: Bestem, hvor mange liter vand bassinet kan rumme, hvis det fyldes til randen

#### Metode

Vi ved at volumen for at omdrejningslegeme, der er drejet om andenaksen er givet ved:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

Vi ved at grafen for funktionen  $f$  er givet ved:

$$f(x) = \cos(x) + 1, \quad x \in [\pi; 3\pi]$$

Derfor kan bassinet rumme:

$$2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi) \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x) \, dx$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

#### Beregning

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi) \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x) \, dx = 142.465$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

$$1000 \cdot V = 142465$$

#### Konklusion

Bassinet kan indeholde 142465 liter.

## Opgave 4

### 4a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje $l$

#### Metode

Vi ved at linjen  $l$  går igennem punkterne  $A$  og  $B$ .

For at bestemme en parameterfremstilling for linjen  $l$  bestemmer jeg vektoren der går fra  $A$  til  $B$  og stedvektoren til  $A$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\vec{A}$  angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordinatsystem. Mens  $\overrightarrow{AB}$  angiver retningen og  $t$  sørger for at vi rammer alle punkter.

#### Beregning

$$A := \langle 2|5|3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B := \langle 3|7|-1 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

#### Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen  $l$  kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



**4b: Bestem en ligning for planen  $\pi$** **Metode**

Vi har bestemt en retningsvektor for linjen  $l$ , der også er en normalvektor for planen.

Vi kender et fast punkt  $C = (3; 4; 8)$ , der ligger i planen  $\pi$ .

For at finde planens ligning prikker vi normalvektoren  $\vec{n}$  med  $\overrightarrow{P_0P}$ .

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Så får vi planens ligning.

**Beregning**

Vi ved at linjen  $l$  står vinkelret på en plan  $\pi$ , der indeholder punktet  $C (3 \ 4 \ 8)$ .

$$C := \langle 3|4|8 \rangle = (3 \ 4 \ 8)$$

$$\overrightarrow{P_0P} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - C^{\%T} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

**Konklusion**

Planen  $\pi$ 's ligning kan skrives ved:

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

**4c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen  $l$  og planen  $\pi$** **Metode**

Vi har allerede bestemt en parameterfremstilling for linjen  $l$  og planens ligning.

Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for  $l$ .

**Beregning**

$$eq1 := x = A[1] + t \cdot \overrightarrow{AB}[1] :$$

$$eq2 := y = A[2] + t \cdot \overrightarrow{AB}[2] :$$

$$eq3 := z = A[3] + t \cdot \overrightarrow{AB}[3] :$$

$$eq4 := \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0 :$$

$$\text{solve}(\{eq1, eq2, eq3, eq4\}, \{t, x, y, z\})$$

$$t = -1, x = 1, y = 3, z = 7$$

**Konklusion**

Skæringspunktet mellem linjen  $l$  og planen  $\pi$  er i punktet  $(1 \ 3 \ 7)$ .

## Opgave 5

### 5a: Bestem, ved beregning, hallens diameter

#### Metode

Vi bestemmer først  $f$ 's skæring med x-aksen ved at løse ligningen:

$$0 = 17 \cdot \cos(0.0628 \cdot x)$$

Her får vi radius, den ganger vi med 2 for at få diameteren.

#### Beregning

$$f(x) := 17 \cdot \cos(0.0628 \cdot x) :$$

$$r := \text{solve}(f(x) = 0) = 25.01268036$$

$$D = r \cdot 2 = 50.02536072$$

#### Konklusion

Hallens diameter er ca. 50 m.

### 5b: Bestem, ved integralregning, hvor mange tilskuere, der maksimalt må være i hallen

#### Metode

Vi kan bestemme volumen af hallen ved:

$$V_y = 2\pi \int_0^r x \cdot f(x) \, dx + 8\pi r^2$$

Resultatet bliver i kubikmeter, for at udregne det maksimale antal tilskuere skal man blot dividere det med  $20 \text{ m}^3$ .

#### Beregning

$$V_y := 2\pi \int_0^r x \cdot f(x) \, dx + 8\pi r^2 = 31183.23206$$

$$\text{displaystyle} \frac{V_y}{20} = 1559.161603$$

#### Konklusion

Der må maksimalt være 1559 tilskuere i hallen.