Opgave 1

1a: Bestem koordinaterne til hjørnerne *C*, *E*, *F* og *G*.

Metode

Ved at betragte figuren og udnytte at alle sider står vinkelret på hinanden, kan vi ræsonnere os frem til koordinaterne til C, D, F og G.

Beregning

$A := \langle 0|0|0 \rangle$
$B := \langle 6|0|0 \rangle$
$D := \langle 0|10|0 \rangle$
$H := \langle 0|0|8 \rangle$

$C := B + D = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$F := B + D + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$E := B + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$G := D + H = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Konklusion

Koordinaterne til kassens øvrige hjørner er blevet bestemt til:

$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

1b: Bestem en ligning for den plan α, der går gennem hjørnerne *B*, *D* og *H*.

Metode

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$, de udspænder da en plan α der går gennem B, D, og H.
Vi krydser $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{BD} := D^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} := H^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - B^{\%T} \right) = 0$$

$$80x + 48y + 60z - 480 = 0$$

Konklusion

Planen α's ligning kan skrives ved: $80x + 48y + 60z - 480 = 0$

1c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem planen α og linjen l, der går gennem punkterne A og F.

Metode

Først bestemmer jeg en parameterfremstilling for linjen l.
Dernæst udnytter jeg at vi allerede har bestemt planens ligning. Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l.

Beregning

Parameterfremstilling for l

$$\overrightarrow{AF} := F^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 10t \\ 8t \end{pmatrix}$$

Bestemmelse af skæringspunktet

$$lign1 := 80x - 480 + 48y + 60z = 0$$

$$lign2 := A[1] + t \cdot \overrightarrow{AF}[1]$$

$$lign3 := A[2] + t \cdot \overrightarrow{AF}[2]$$

$$lign4 := A[3] + t \cdot \overrightarrow{AF}[3]$$

$$solve(\{lign1,\, lign2,\, lign3,\, lign4\}, \{t, x, y, z\})$$

$$t = \frac{1}{3},\ x = 2,\ y = \frac{10}{3},\ z = \frac{8}{3}$$

Konklusion

Skæringspunktet mellem planen α og linjen l er i punktet $\begin{pmatrix} 2 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Opgave 2

2a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje *l*.

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og D.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til D og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AD}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$A := \langle 1|2|0 \rangle$
$B := \langle 3|4|0 \rangle$
$C := \langle 2|6|0 \rangle$
$D := \langle 2|5|7 \rangle$

$\overrightarrow{AD} := D^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2 + 3t \\ 7t \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2b: Bestem en ligning for den plan π, der indeholder punkterne $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{D}$.

Metode

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ bestemte vi i forrige opgave, vektorerne udspænder da en plan π der går gennem A, B, og D.
Vi krydser $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A^{\%T} \right) = 0$$

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

Konklusion

Ligningen for planen π kan skrives ved:

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

2c: Bestem afstanden mellem punktet M og linjen l.

Metode

Vi ved at distancen mellem et punkt og en linje i rummet er givet ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|\right|}{||\overrightarrow{r}||}$$

hvor $\overrightarrow{r}$ er en retningsvektor for linjen og $\overrightarrow{P_0P}$ er vektoren fra P_0 til P.

Beregning

Da punktet M er midtpunkt på linjestykket CD.

- $C\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\end{pmatrix}$
- $D\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\end{pmatrix}$

Må punktet M have koordinaterne $\begin{pmatrix}2 & 5.5 & 3.5\end{pmatrix}$.

$M := \langle 2|5.5|3.5\rangle$

$\overrightarrow{DM} := M^{\%T} - D^{\%T} = \begin{pmatrix}0\\0.5\\-3.5\end{pmatrix}$

$\text{dist}(M, l) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DM}\right|\right|}{\left|\left|\overrightarrow{AD}\right|\right|} = 1.88$

Konklusion

Afstanden mellem punktet M og linjen l er 1.88.

Opgave 3

3a: Bestem arealet A

Metode

Vi integrerer $f(x)$ fra π til 3π.

Beregning

$f(x) := \cos(x) + 1$

$A = \int_{\pi}^{3\pi} f(x)\,dx = 2\pi$

Konklusion

Tværsnitsarealet af volden er 2π.

3b: Bestem, hvor mange liter vand bassinet kan rumme, hvis det fyldes til randen

Metode

Vi ved at volumen for at omdrejningslegeme, der er drejet om andenaksen er givet ved:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

Vi ved at grafen for funktionen f er givet ved:

$$f(x) = \cos(x) + 1\,, \quad x \in [\pi;\, 3\pi]$$

Derfor kan bassinet rumme:

$$2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi)\,dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x)\,dx$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

Beregning

$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi)\,dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x)\,dx = 142.465$

Omregn fra kubikmeter til liter.

$1000 \cdot V = 142465$

Konklusion

Bassinet kan indeholde 142465 liter.

Opgave 4

4a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og B.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til B og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AB}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$A \coloneqq \langle 2|5|3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
$B \coloneqq \langle 3|7|-1 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \coloneqq B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4b: Bestem en ligning for planen π

Metode

Vi har bestemt en retningsvektor for linjen l, der også er en normalvektor for planen.
Vi kender et fast punkt $C = (3; 4; 8)$, der ligger i planen π.
For at finde planens ligning prikker vi normalvektoren $\overrightarrow{n}$ med $\overrightarrow{P_0P}$.

$$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Så får vi planens ligning.

Beregning

Vi ved at linjen l står vinkelret på en plan π, der indeholder punktet $C\begin{pmatrix}3 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

$C := \langle 3|4|8\rangle = \begin{pmatrix}3 & 4 & 8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_0P} := \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} - C^{\%T} = \begin{pmatrix}x-3 \\ y-4 \\ z-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

Konklusion

Planen π's ligning kan skrives ved:

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

4c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen *l* og planen π

Metode

Vi har allerede bestemt en parameterfremstilling for linjen l og planens ligning.
Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l.

Beregning

$eq1 := x = A[1] + t \cdot \overrightarrow{AB}[1]$
$eq2 := y = A[2] + t \cdot \overrightarrow{AB}[2]$
$eq3 := z = A[3] + t \cdot \overrightarrow{AB}[3]$

$eq4 := \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$

$solve\left(\{eq1, eq2, eq3, eq4\}, \{t, x, y, z\}\right)$

$$t = -1,\ x = 1,\ y = 3,\ z = 7$$

Konklusion

Skæringspunktet mellem linjen l og planen π er i punktet $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Opgave 5

5a: Bestem, ved beregning, hallens diameter

Metode

Vi bestemmer først f's skæring med x-aksen ved at løse ligningen:

$$0 = 17 \cdot \cos(0.0628 \cdot x)$$

Her får vi radius, den ganger vi med 2 for at få diameteren.

Beregning

$f(x) := 17 \cdot \cos(0.0628 \cdot x)$

$r := solve\left(f(x) = 0\right) = 25.01268036$

$D = r \cdot 2 = 50.02536072$

Konklusion

Hallens diameter er ca. 50 m.

5b: Bestem, ved integralregning, hvor mange tilskuere, der maksimalt må være i hallen

Metode

Vi kan bestemme volumen af hallen ved:

$$V_y = 2\pi \int_0^r x \cdot f(x)\, dx + 8\pi r^2$$

Resultatet bliver i kubikmeter, for at udregne det maksimale antal tilskuere skal man blot dividere det med 20 m^3.

Beregning

$V_y := 2\pi \int_0^r x \cdot f(x)\, dx + 8\pi r^2 = 31183.23206$

$\frac{V_y}{20} = 1559.161603$

Konklusion

Der må maksimalt være 1559 tilskuere i hallen.

Opgave 6

6a: Bestem længden af linjestykket DE

Metode

Vi bestemmer vektor $\overrightarrow{DE}$ og beregner størrelsen af vektoren.

Beregning

$D := \langle 0|0|2\rangle$
$E := \langle 4|4|1.6\rangle$

$$\overrightarrow{DE} := E^{\%T} - D^{\%T} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left|\overrightarrow{DE}\right|\right| = 5.670978752$$

Konklusion

Længden af linjestykket DE er 5.67 enheder.

6b: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l, der går gennem punkt A og punkt C

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og C.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer vi vektoren der går fra A til C og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AC}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$A := \langle 0|0|0 \rangle$
$C := \langle 5|5|2 \rangle$
$\overrightarrow{AC} := C^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for den rette linje l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6c: Bestem vinklen mellem linje m og linje l.

Metode

Først bestemmer vi en retningsvektor for linje l og m.
Derefter benytter vi sammenhængen med prikproduktet af to vektorer og vinklen imellem dem:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(v)$$

Vi isolerer v.

Beregning

Vektor $\overrightarrow{DE}$ er en retningsvektor for linjen m.
Vektor $\overrightarrow{AC}$ er en retningsvektor for linjen l.

$v = solve\left(\overrightarrow{DE} \bullet \overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{DE}\right|\right| \cdot \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| \cdot \cos(v)\right) \cdot \frac{360}{2\pi} = 19.83786034$

Konklusion

Vinklen mellem linje m og l er ca. $19.84°$.

6d: Bestem arealet af trekanten ABC

Metode

Vi bestemmer arealet af trekanten ABC ved:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right|$$

Netop da det er gældende at $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(v)$, det vi genkender som $h \cdot g$.

Beregning

$B := \langle 3|0|0 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right| = 8.077747210$

Konklusion

Arealet af trekanten ABC er ca. 8.08 enh^2.