Opgave 1

1a: Bestem koordinaterne til hjørnerne $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ og $\boldsymbol{G}$.

Metode

Ved at betragte figuren og udnytte at alle sider står vinkelret på hinanden, kan vi ræsonnere os frem til koordinaterne til C, D, F og G.

Beregning

$A \coloneqq \langle 0|0|0 \rangle$
$B \coloneqq \langle 6|0|0 \rangle$
$D \coloneqq \langle 0|10|0 \rangle$
$H \coloneqq \langle 0|0|8 \rangle$

$C \coloneqq B + D = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

$F \coloneqq B + D + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$E \coloneqq B + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$G \coloneqq D + H = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

Konklusion

Koordinaterne til kassens øvrige hjørner er blevet bestemt til:

$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

1b: Bestem en ligning for den plan α, der går gennem hjørnerne B, D og H.

Metode

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$, de udspænder da et plan α der går gennem B, D, og H.
Vi krydser $\overrightarrow{BH}$ og $\overrightarrow{BD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{BD} := D^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} := H^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - B^{\%T} \right) = 0$$

$$80x + 48y + 60z - 480 = 0$$

Konklusion

Planen α's ligning kan skrives ved: $80x + 48y + 60z - 480 = 0$

1c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem planen α og linjen l, der går gennem punkterne $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{F}$.

Metode

Først bestemmer jeg en parameterfremstilling for linjen l.
Dernæst udnytter jeg at vi allerede har bestemt planens ligning. Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l.

Beregning

Parameterfremstilling for l

$\overrightarrow{AF} := F^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AF}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 10t \\ 8t \end{pmatrix}$$

Bestemmelse af skæringspunktet

$lign1 := 80x - 480 + 48y + 60z = 0$

$lign2 := A[1] + t \cdot \overrightarrow{AF}[1]$

$lign3 := A[2] + t \cdot \overrightarrow{AF}[2]$

$lign4 := A[3] + t \cdot \overrightarrow{AF}[3]$

$solve(\{lign1, lign2, lign3, lign4\}, \{t, x, y, z\})$

$$t = \frac{1}{3},\ x = 2,\ y = \frac{10}{3},\ z = \frac{8}{3}$$

Konklusion

Skæringspunktet mellem planen α og linjen l er i punktet $\begin{pmatrix} 2 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

Opgave 2

2a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje *l*.

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og D.
For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til D og stedvektoren til A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{A}$ angiver placeringen i det tredimensionelle kartiesiske koordanatsystem. Mens $\overrightarrow{AD}$ angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$A := \langle 1|2|0 \rangle$
$B := \langle 3|4|0 \rangle$
$C := \langle 2|6|0 \rangle$
$D := \langle 2|5|7 \rangle$

$\overrightarrow{AD} := D^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2 + 3t \\ 7t \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2b: Bestem en ligning for den plan π, der indeholder punkterne A, B og D.

Metode

Først bestemmes vektor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ bestemte vi i forrige opgave, vektorerne udspænder da et plan π der går gennem A, B, og D.
Vi krydser $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ for at bestemme en normalvektor til planen.
Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A^{\%T} \right) = 0$$

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

Konklusion

Ligningen for planen π kan skrives ved:

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

2c: Bestem afstanden mellem punktet M og linjen l.

Metode

Vi ved at distancen mellem et punkt og en linje i rummet er givet ved:

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|\right|}{||\overrightarrow{r}||}$$

hvor $\overrightarrow{r}$ er en retningsvektor for linjen og $\overrightarrow{P_0P}$ er vektoren fra P_0 til P.

Beregning

Da punktet M er midtpunkt på linjestykket CD.

- $C\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\end{pmatrix}$
- $D\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\end{pmatrix}$

Må punktet M have koordinaterne $\begin{pmatrix}2 & 5.5 & 3.5\end{pmatrix}$.

$M := \langle 2|5.5|3.5\rangle$

$\overrightarrow{DM} := M^{\%T} - D^{\%T} = \begin{pmatrix}0\\0.5\\-3.5\end{pmatrix}$

$\operatorname{dist}(M,l) = \dfrac{\left|\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DM}\right|\right|}{\left|\left|\overrightarrow{AD}\right|\right|} = 1.88$

Konklusion

Afstanden mellem punktet M og linjen l er 1.88.

Opgave 3

3a: Bestem arealet A

Metode

Vi integrerer $f(x)$ fra π til 3π.

Beregning

$f(x) := \cos(x) + 1$

$$A = \int_{\pi}^{3\pi} f(x)\, dx = 2\pi$$

Konklusion

Tværsnitsarealet af volden er 2π.

3b: Bestem, hvor mange liter vand bassinet kan rumme, hvis det fyldes til randen

Metode

Vi ved at volumen for at omdrejningslegeme, der er drejet om andenaksen er givet ved:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

Vi ved at grafen for funktionen f er givet ved:

$$f(x) = \cos(x) + 1\,, \quad x \in [\pi;\, 3\pi]$$

Derfor kan bassinet rumme:

$$2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi)\, dx - 2\pi \int_\pi^{2\pi} x \cdot f(x)\, dx$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

Beregning

$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi)\, dx - 2\pi \int_\pi^{2\pi} x \cdot f(x)\, dx = 142.465$

Omregn fra kubikmeter til liter.

$1000 \cdot V = 142465$

Konklusion

Bassinet kan indeholde 142465 liter.