

Opgave 1

1a: Bestem koordinaterne til hjørnerne C , E , F og G .

Metode

Ved at betragte figuren og udnytte at alle sider står vinkelret på hinanden, kan vi ræsonnere os frem til koordinaterne til C , D , F og G .

Beregning

$$\begin{aligned} A &:= \langle 0|0|0 \rangle \\ B &:= \langle 6|0|0 \rangle \\ D &:= \langle 0|10|0 \rangle \\ H &:= \langle 0|0|8 \rangle \end{aligned}$$

$$C := B + D = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F := B + D + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$E := B + H = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$G := D + H = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Konklusion

Koordinaterne til kassens øvrige hjørner er blevet bestemt til:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1b: Bestem en ligning for den plan α , der går gennem hjørnerne B , D og H .

Metode

Først bestemmes vektor \overrightarrow{BH} og \overrightarrow{BD} , de udspænder da et plan α der går gennem B , D , og H . Vi krydser \overrightarrow{BH} og \overrightarrow{BD} for at bestemme en normalvektor til planen. Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{BD} := D^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH} := H^{\%T} - B^{\%T} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - B^{\%T} \right) = 0$$

$$80x + 48y + 60z - 480 = 0$$

Konklusion

Planen α 's ligning kan skrives ved: $80x + 48y + 60z - 480 = 0$

1c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem planen α og linjen l , der går gennem punkterne A og F .

Metode

Først bestemmer jeg en parameterfremstilling for linjen l .

Dernæst udnytter jeg at vi allerede har bestemt planens ligning. Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l .

Beregning

Parameterfremstilling for l

$$\overrightarrow{AF} := F^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AF}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 10t \\ 8t \end{pmatrix}$$

Bestemmelse af skæringspunktet

$$lign1 := 80x - 480 + 48y + 60z = 0$$

$$lign2 := A[1] + t \cdot \overrightarrow{AF}[1]$$

$$lign3 := A[2] + t \cdot \overrightarrow{AF}[2]$$

$$lign4 := A[3] + t \cdot \overrightarrow{AF}[3]$$

$$solve(\{lign1, lign2, lign3, lign4\}, \{t, x, y, z\})$$

$$t = \frac{1}{3}, x = 2, y = \frac{10}{3}, z = \frac{8}{3}$$

Konklusion

Skæringspunktet mellem planen α og linjen l er i punktet $(2 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{8}{3})$

Opgave 2

2a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l .

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og D .

For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til D og stedvektoren til A .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

\vec{A} angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordinatsystem. Mens \overrightarrow{AD} angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$$A := \langle 1|2|0 \rangle$$

$$B := \langle 3|4|0 \rangle$$

$$C := \langle 2|6|0 \rangle$$

$$D := \langle 2|5|7 \rangle$$

$$\overrightarrow{AD} := D^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y, z \rangle = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \\ 7t \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2b: Bestem en ligning for den plan π , der indeholder punkterne A , B og D .

Metode

Først bestemmes vektor \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} bestemte vi i forrige opgave, vektorerne udspænder da et plan π der går gennem A , B , og D .

Vi krydser \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AD} for at bestemme en normalvektor til planen.

Dernest prikker vi normalvektoren med en vilkårlig vektor i planen.

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

Vi får planens ligning.

Beregning

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A^{\%T} \right) = 0$$

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

Konklusion

Ligningen for planen π kan skrives ved:

$$14x - 14y + 4z + 14 = 0$$

2c: Bestem afstanden mellem punktet M og linjen l .**Metode**

Vi ved at distancen mellem et punkt og en linje i rummet er givet ved:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{\|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\|}{\|\vec{r}\|}$$

hvor \vec{r} er en retningsvektor for linjen og $\overrightarrow{P_0P}$ er vektoren fra P_0 til P .

Beregning

Da punktet M er midtpunkt på linjestykket CD .

- $C \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
- $D \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Må punktet M have koordinaterne $\begin{pmatrix} 2 & 5.5 & 3.5 \end{pmatrix}$.

$$M := \langle 2|5.5|3.5 \rangle$$

$$\overrightarrow{DM} := M^{\%T} - D^{\%T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{dist}(M, l) = \frac{\|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{DM}\|}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1.88$$

Konklusion

Afstanden mellem punktet M og linjen l er 1.88.

Opgave 3

3a: Bestem arealet A

Metode

Vi integrerer $f(x)$ fra π til 3π .

Beregning

$$f(x) := \cos(x) + 1$$

$$A = \int_{\pi}^{3\pi} f(x) \, dx = 2\pi$$

Konklusion

Tværsnitsarealet af volden er 2π .

3b: Bestem, hvor mange liter vand bassinet kan rumme, hvis det fyldes til randen

Metode

Vi ved at volumen for at omdrejningslegeme, der er drejet om andenaksen er givet ved:

$$V_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

Vi ved at grafen for funktionen f er givet ved:

$$f(x) = \cos(x) + 1, \quad x \in [\pi; 3\pi]$$

Derfor kan bassinet rumme:

$$2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi) \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x) \, dx$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

Beregning

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x \cdot f(2\pi) \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot f(x) \, dx = 142.465$$

Omregn fra kubikmeter til liter.

$$1000 \cdot V = 142465$$

Konklusion

Bassinet kan indeholde 142465 liter.

Opgave 4

4a: Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l

Metode

Vi ved at linjen l går igennem punkterne A og B .

For at bestemme en parameterfremstilling for linjen l bestemmer jeg vektoren der går fra A til B og stedvektoren til A .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

\vec{A} angiver placeringen i det tredimensionelle kartesiske koordinatsystem. Mens \overrightarrow{AB} angiver retningen og t sørger for at vi rammer alle punkter.

Beregning

$$A := \langle 2|5|3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B := \langle 3|7|-1 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} := B^{\%T} - A^{\%T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{\%T} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Konklusion

Parameterfremstillingen for linjen l kan skrives ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4b: Bestem en ligning for planen π **Metode**

Vi har bestemt en retningsvektor for linjen l , der også er en normalvektor for planen.

Vi kender et fast punkt $C = (3; 4; 8)$, der ligger i planen π .

For at finde planens ligning prikker vi normalvektoren \vec{n} med $\overrightarrow{P_0P}$.

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Så får vi planens ligning.

Beregning

Vi ved at linjen l står vinkelret på en plan π , der indeholder punktet $C (3 \ 4 \ 8)$.

$$C := \langle 3|4|8 \rangle = (3 \ 4 \ 8)$$

$$\overrightarrow{P_0P} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - C^{\%T} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

Konklusion

Planen π 's ligning kan skrives ved:

$$x + 2y - 4z + 21 = 0$$

4c: Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen l og planen π **Metode**

Vi har allerede bestemt en parameterfremstilling for linjen l og planens ligning.

Vi opstiller 4 ligninger med 4 ubekendte, hvor vi bruger planens ligning og parameterfremstillingen for l .

Beregning

$$eq1 := x = A[1] + t \cdot \overrightarrow{AB}[1] :$$

$$eq2 := y = A[2] + t \cdot \overrightarrow{AB}[2] :$$

$$eq3 := z = A[3] + t \cdot \overrightarrow{AB}[3] :$$

$$eq4 := \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0 :$$

$$\text{solve}(\{eq1, eq2, eq3, eq4\}, \{t, x, y, z\})$$

$$t = -1, x = 1, y = 3, z = 7$$

Konklusion

Skæringspunktet mellem linjen l og planen π er i punktet $(1 \ 3 \ 7)$.