Projekt Kagedeling

MATEMATIK A

Cecilie Horshauge

28. april 2024

A:

Opstil en rekursionsligning, der fastlægger udviklingen i antallet af stykker kage udover samuraimesterens.

Reglerne for kagedeling er givet ved:

- Alle kagestykker halveres
- Samuraimesteren tildeles ét af stykkerne
- Denne proces gentages et passende antal gange.

NB: Jeg antager at for hver gentagelse at samuraimesteren får et stykke kage.
Rekursionsligningen $y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 1$ må lige netop være en passende rekursionsligning. Da antallet afhænger af antallet af stykker der var skåret lige inden y_n og ved y_{n+1} fordobles antallet af stykker ved at hvert kagestykke halveres. Der tages højde for samuraimesterens kagestykker ved at trække 1 fra.
Udviklingen i antal kagestykker udover samuraimesterens kan derfor beskrives med rekursionsligningen

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 1.$$

B:

Bestem ligningens fuldstændige løsning.

Rekursionsligningen er inhomogen. Først vil samtlige løsninger bestemmes med udgangspunkt i sætning 3.
Jeg antager først at z_n er en løsning rekursionsligningen

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - 1.$$

Dernæst gætter jeg på at $z_n = c$, altså at løsningen z_n er en konstant. Vi kan derfor lave denne manipulation af udtrykket og isolere for c.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 2 \cdot z_n - 1 \\ c &= 2 \cdot c - 1 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Som følge af sætning 3 bliver den fuldstændige løsning

$$y_n = 1 + k \cdot 2^n$$

C:

Bestem de partikulære løsninger med udgangspunkt i begyndelsesværdierne $y_0 = 1$*,* $y_0 = 2$*,* $y_0 = 3$ *samt* $y_0 = s$*.*

$\underline{y_0 = 1}$
Da $n = 0$ og $y_0 = 1$ indsætter jeg i den fuldstændige løsning og isolerer for k og på den måde bestemmer den partikulære løsning med begyndelsesværdien $y_0 = 1$.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + k \cdot 2^0 \\ 1 &= 1 + k \cdot 1 \\ k &= 0 \end{aligned}$$

og dermed bliver den partikulære løsning $y_n = 1 + 0 \cdot 2^n$ altså blot $y_n = 1$.

$\underline{y_0 = 2}$
Samme metode benyttes.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + k \cdot 2^0 \\ 2 &= 1 + k \cdot 1 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Den partikulære løsning bliver da $y_n = 1 + 2^n$.

$\underline{y_0 = 3}$
Samme metode benyttes.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + k \cdot 2^0 \\ 3 &= 1 + k \cdot 1 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Den partikulære løsning bliver da $y_n = 1 + 2 \cdot 2^n$.

$\underline{y_0 = s}$
Samme metode benyttes.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + k \cdot 2^0 \\ s &= 1 + k \cdot 1 \\ k &= s - 1 \end{aligned}$$

Den partikulære løsning bliver da $y_n = 1 + (s-1) \cdot 2^n$. ✔

D:

Opstil talrækkerne ud fra de partikulære løsninger med begyndelsesværdierne i sp. C og sammenlign svaret med rekursionsligningen fra sp. A.

Jeg udregner hver af talrækkerne ved brug af de partikulære løsninger. Man indsætter blot det n man ønsker at beregne for. Talrækkerne bliver som følger:
$y_0 = 1,\ y_1 = 1\ y_2 = 1,\ y_3 = 1\ldots$
$y_0 = 2,\ y_1 = 3\ y_2 = 5,\ y_3 = 9\ldots$
$y_0 = 3,\ y_1 = 5\ y_2 = 9,\ y_3 = 17\ldots$
$y_0 = s,\ y_1 = 2s-1\ y_2 = 4s-3,\ y_3 = 8s-7\ldots$

De stemmer alle overens med rekursionsligningen $y_{n+1} = 2y_n - 1$

E:

Udvælg en funktionsforskrift og vis hvordan Newtons metode kan anvendes til at bestemme nulpunkt/nulpunkter.

Jeg vælger $\ln(x)$ og bruger newtons metode til at bestemme nulpunkt for funktionen. Man tilnærmer sig værdien ved rekursivt at løse ligningen $0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Den næste tilnærmede værdi $x_{n+1} = N(x_n)$ findes ved

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Jeg vælger mit gæt til at være 2. Dvs. $x_0 = 2$ og jeg indsætter i $N(x)$ jeg får da.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{\ln(2)}{\frac{1}{2}} = 2 - 2\cdot\ln(2) = 0.613705639$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.613705639 - \frac{\ln(0.613705639)}{\frac{1}{0.613705639}} = 0.9133412073$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.9133412073 - \frac{\ln(0.9133412073)}{\frac{1}{0.9133412073}} = 0.9961317034$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.9961317034 - \frac{\ln(0.9961317034)}{\frac{1}{0.9961317034}} = 0.9999925085$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0.9999925085 - \frac{\ln(0.9999925085)}{\frac{1}{0.9999925085}} = 1.0000000000$$

Sådan har jeg brugt Newtons metode til at bestemme nulpunkt for $\ln(x)$. Hvis jeg havde valgt et begyndelsesgæt ret meget over 2.6 ville x_1 ligge uden for ln's definitionsmængde og det ville ikke give mening. Nulpunktet blev bestemt til $x = 1$ som forventet.

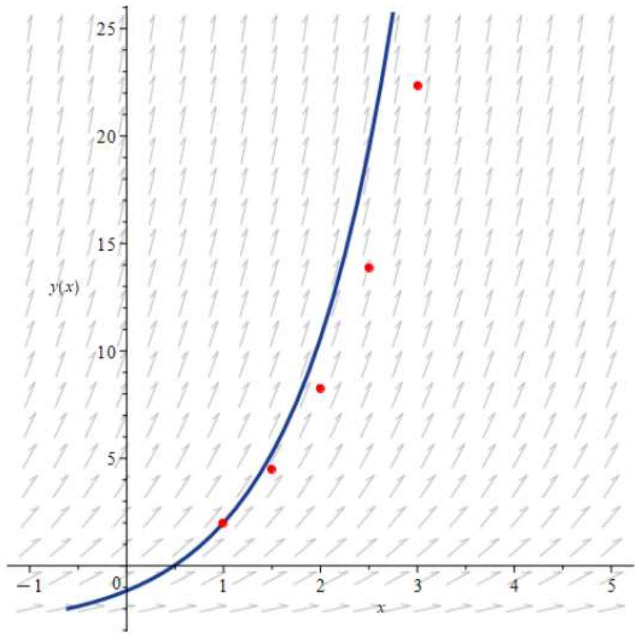
F:

Udvælg en differentialligning og vis, hvordan Eulers metode kan anvendes til at bestemme punkter på løsningskurven.

Jeg vælger differentialligningen $y' = 3 + y$. Eulers metode fungerer på den måde at ved en given differentialligning $\frac{dy}{dx} = g(y)$ med begyndelsesbetingelse $y_0 = s$ og med valg af afstand $h > 0$ mellem punkterne på den tilnærmede løsningskurve, kan et estimeret punkt bestemmes ud fra det forrige ved:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot g(y_n)$$

Her bliver $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $h = 0.5$ og $g(y) = 3 + y$. Vi får da:
$y_1 = y_0 + h \cdot g(y_0) = 4.5$
$y_2 = y_1 + h \cdot g(y_1) = 8.25$
$y_3 = y_2 + h \cdot g(y_2) = 13.875$
$y_4 = y_3 + h \cdot g(y_3) = 22.3125$
Nedenfor ses et plot af de estimerede punkter sammen med den sande løsningskurve.



Jo længere væk fra begyndelsesværdien vi kommer jo dårligere bliver punkterne estimeret. Hvis jeg derimod havde valgt $h = 0.1$ ville punkterne ligge noget tættere på den sande løsningskurve, men det ville samtidigt resultere i flere beregninger.