HYDRODYNAMIK

FYSIK EKSAMENSPROJEKT

Cecilie Horshauge

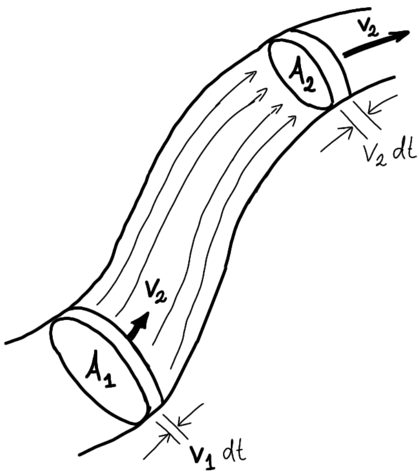
9. marts 2024

1 Hypotese

2 Teori

2.1 Strømning i væsker

Væskestrømninger opdeles overordnet set i to grupper: Turbulent og laminar strømning.[1] En turbulent strømning betyder at strømningen indeholder strømhvirvler, en strømning der ikke har det kaldes laminar. Derudover siger vi, at en strømning er stationær, hvis hastigheden af en vilkårlig væskepartikel på et givent sted altid har samme retning og størrelse.



Figur 1: Strømningslinjer

På figur 1 ses et rør med indtegnede strømningslinjer i. Der antages om væsken i røret, at den er inkompressibel, dvs. at densiteten ρ er ens overalt, hvilket gælder for væsker, men ikke for gasser. Der er vist to tværsnit, A_1 og A_2, på figuren. På grund af rørets tykkelse vil væsken bevæge sig hurtigere ved A_2 end ved A_1.

Der ses på situationen hvor i tidsrummet dt strømmer væsken afstanden ds_1 ved A_1 gennem røret og ligeledes stykket ds_2 ved A_2.
Betragt nu disse udtryk for væskerumfangene.

$$dV_1 = A_1 ds_1 \qquad dV_2 = A_2 ds_2$$

[1]Hansen, O. W. 2008

Derudover er de to rumfang med sikkerhed ens, eftersom væsken er inkompressibel. Vi får da: $V_1 = V_2$. Strækningen ds_1 og ds_2 kan også defineres ud fra hastigheden og tiden ved:

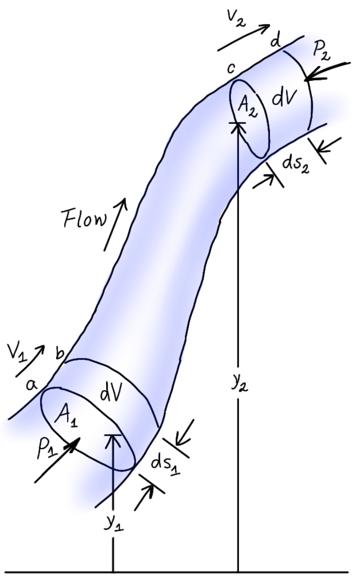
$$ds_1 = v_1 dt \qquad ds_2 = v_2 dt$$

Derfor kan vi skrive

$$A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt$$
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{1}$$

2.2 Bernoullis lov

Bernoullis lov beskriver sammenhængen mellem trykket p i et punkt af væsken med strømningshastigheden v i punktet. [2]



Figur 2: Visualisering af Bernoullis lov

Betragt figur 2. Vi ser igen på situationen hvor der er strømningslinjer i et rør. På tiden dt strømmer væsken fra (a) til (b) og ligeledes fra (c) til (d). Størrelserne ved forskubningen fra (a) til (b) indekseres med 1 og forskubningen fra (c) til (d) indekseres med 2. Det samlede arbejde udført på væsken kan skrives ved: $dW = F_1 ds_1 - F_2 ds_2$, da $F = pA$ fås:

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2. \tag{2}$$

Hvis væsken er inkompressibel så gælder der, at $dV_1 = dV_2$.
Under forudsætningen at der kan ses bort fra viskositet (gnidning), der gælder

$$\text{Udført arbejde} = \text{tilvækst i energi}$$

$$dW = dE_{kin} + dE_{pot} \tag{3}$$

Eftersom strømningen er stationær er den kinetiske energi for væsken mellem (b) og (c) altid den samme. Tilvæksten i den kinetiske energi er af den grund forskellen mellem de kinetiske energier af væsken ved V_1 og V_2.

$$dE_{kin} = \frac{1}{2}(dm_2)v_2^2 - \frac{1}{2}(dm_1)v_1^2\ , \quad \text{hvor } dm_1 = dm_2 = \rho dV$$

[2]Young. H. D. side 406-407

Derfor kan vi skrive

$$dE_{kin} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 dV - \frac{1}{2}\rho v_1^2 dV \tag{4}$$

Den potentielle energi kan regnes ved $E_{pot} = mgy$, hvor y betegner afstanden over jorden. Tilvæksten i den potentielle energi kan derfor skrives ved

$$dE_{pot} = (dm_2)gy_2 - (dm_1)gy_1 = \rho g y_2 dV - \rho g y_1 dV \tag{5}$$

Ved indsættelse af ligning 2, 4 og 5 i ligning 3 fås:

$$p_1 dV - p_2 dV = \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_2^2 dV - \frac{1}{2}\rho v_1^2 dV}_{dE_{kin}} + \underbrace{\rho g y_2 dV - \rho g y_1 dV}_{dE_{pot}}$$

Vi kan nu forkorte dV væk og omrorkere leddene.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{6}$$

Vi har u udledt Bernoullis lov.

2.3 Kontinuitetsligningen

Massen af en fluid med en konstant strømning ændrer sig ikke. [3] Dette leder til et resultat kendt som Kontinuitetsligningen. Betragt to dele af en gennemstrømningsrør med strømning mellem to tværsnit, A_1 og A_2. Kald hastighederne af fluiderne ved tværsnitene for henholdsvis v_1 og v_2. Der flyder ikke fluid ud af siderne af strømningsrøret og heller ikke ind af det.

3 Fremgangsmåde

4 Forventninger for forsøget

Vi siger at højden h er afstanden fra vandspejlet til bunden af cylinderen. Væsken har massefylden ρ. Vi kan opskrive situationen med Bernoullis ligning, her udelades leddet med trykket under antagelse at trykket på vandspejlet og i bunden af cylinderen er det samme.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{7}$$

hvor der gælder at ved $h = 0$ er $v = 0$ og ved dybden h er hastigheden v. Her kan det ses at Bernoullis lov giver det samme som gælder for frit fald i tyngdefeltet.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(-h) = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} \tag{8}$$

Hastigheden v betegner den hastighed væsken løber ud af bunden med. Vi kalder funktionen $m(t)$ for massen af væsken som funktion af tiden. Vi siger at bundens åbning har tværsnitsarealet D. For denne sammenhæng må kontinuitetsligningen gælde hvor dm er ændringen af væskens masse i tidsrummet dt som vandet strømmer ud af cylinderen.

$$\frac{dm}{dt} = -\rho D v$$

[3] Young. H. D. side 404-405

Hvis vi kalder cylinderens tværsnit for A, så kan massen regnes ved $m = \rho Ah$, hvilket medfører

$$\frac{dm}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

Vi kan sætte de to udtryk lig med hinanden, vi får

$$pA\frac{dh}{dt} = -\rho Dv$$

hvis der derudover indsættes $v = \sqrt{2gh}$ fra før, fås følgende differentialligning

$$\rho A\frac{dh}{dt} = -\rho D\sqrt{2gh} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\sqrt{h} \tag{9}$$

Vi løser differentialligningen ved separation af variable og integration

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}dt \\
\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\sqrt{2g}\,\frac{D}{A}\int_0^t dt \\
2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} &= -\sqrt{2g}\frac{D}{2A}t \\
h &= \left(\sqrt{h_0} - \frac{D\sqrt{2g}}{2A}t\right)^2
\end{aligned}$$

Vi forventer altså at højden som funktion af tiden følger overstående udvikling ved tømning af en beholder.

5 Resultater

6 Databehandling