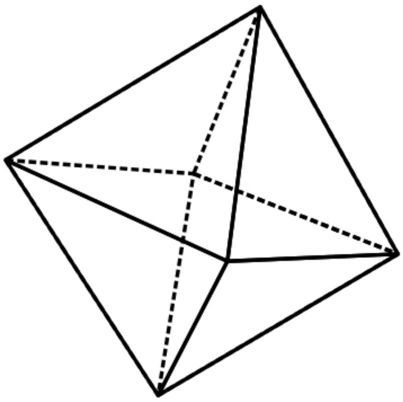


THPT VIỆT ĐỨC

BÀI 1: ĐẠI SỐ CƠ BẢN VÀ LOGIC TOÁN HỌC

K69(2024 - 2027) - D4

K69 D4 2024 - 2027

CEDAR

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này được tạo ra nhằm tổng hợp và hỗ trợ những kiến thức của bài 1 môn Toán (Theo khóa học trên web lớp) dành cho các bạn lớp D4 niên khóa 2024 - 2027 (K69 của trường THPT Việt Đức). Đây là 5 điều chúng mình được các thầy cô dạy trong suốt quá trình học tập:
★: Luôn tự giác
★★: Luôn nỗ lực
★★★: Dám thử thách
★★★★: Kiên trì
★★★★★: Vượt qua giới hạn
Tài liệu trong lúc biên soạn có thể có sai sót, mong các bạn thông cảm nhé!

D4 không hổ đốn!!!

Trinh Tài Anh

Mục lục

Chương 1

LÝ THUYẾT

1.1 Mệnh đề

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc sai. Một câu khẳng định đúng được gọi là *mệnh đề đúng*, ngược lại một câu khẳng định sai được gọi là *mệnh đề sai*. Và lưu ý là một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 1: Tất cả các câu dưới đây đều là mệnh đề

a) Sài Gòn là tên gọi cũ của Thành phố Hồ Chí Minh.

b) Karlovy Vary (hay còn được biết với tên gọi là thành phố điện ảnh) là một thành phố của đất nước Bỉ.

c) 22 là số nguyên tố

d) $84 + 16 = 100$

Các mệnh đề a) và d) là mệnh đề đúng, còn các mệnh đề b) và c) là các mệnh đề sai. □

Ví dụ 2: Tất cả các câu dưới đây đều không phải là mệnh đề

a) Vịnh Hạ Long thật hùng vĩ làm sao! b) Bây giờ là mấy giờ rồi ạ?

c) $6x + 9y = 13z$ d) Hãy chú ý tới bảng chỉ dẫn

Các câu a), b) và d) không phải mệnh đề vì chúng không nêu lên một khẳng định. Còn câu c) cũng không phải là mệnh đề vì nó chẳng đúng mà cũng chẳng sai, hay nói một cách khác thì tính đúng - sai của nó phụ thuộc vào giá trị cụ thể mà ta gán cho các biến x, y, z. □

Những mệnh đề liên quan đến toán học thì được gọi là **mệnh đề toán học**. Còn mệnh đề nào phụ thuộc vào biến thì được gọi là **mệnh đề chứa biến**.

À học bài này thì hãy nhớ chân lí luôn được vận hành trong lớp D4 chúng ta là gì: Giáo viên chủ nhiệm luôn luôn đúng nhé các bạn ☺

1.1.2 Các phép toán về mệnh đề

Hiểu đơn giản thì các phép toán về mệnh đề là các phương pháp tạo ra các mệnh đề mới (Còn được gọi là *mệnh đề thành phần*) từ mệnh đề đã có (Hay *mệnh đề phức hợp*). Thực ra trong Toán học người ta có bảng được sử dụng để thể hiện mối liên hệ giữa giá trị chân lí của mệnh đề phức hợp với giá trị chân lí của các mệnh đề thành phần gọi là *bảng chân trị*. Nhưng ở đây để theo chương trình phổ thông hiện tại tác giả xin phép không đề cập tới nó, còn dưới đây là các phép toán về mệnh đề cơ bản:

+) **Phép phủ định và mệnh đề phủ định:** Cho mệnh đề P, người ta gọi mệnh đề "Không phải P là mệnh đề phủ định của P và được kí hiệu là $\overline{P}$.

Phép phủ định khi tác động lên P thì kết quả là $\overline{P}$ - Hay ta nói "Phủ định của mệnh đề P là mệnh đề $\overline{P}$.

Ví dụ: Mệnh đề phủ định của A : *2025 là một số chính phương* là $\overline{A}$: *2025 không phải là một số chính phương*.

+) **Phép hội và mệnh đề hội:** Cho 2 mệnh đề A và B. Mệnh đề hội của A và B được kí hiệu là: $A \wedge B$. Nguyên lí hoạt động của nó là mệnh đề $A \wedge B$ sẽ đúng khi cả 2 mệnh đề A và B đều đúng; và chỉ cần 1 trong 2 mệnh đề A hoặc B sai thì mệnh đề $A \wedge B$ sẽ sai.

Phép hội (Phép toán $\wedge$) khi tác động lên A, B thì kết quả là $A \wedge B$.

Ví dụ: Mệnh đề hội của A, B với A : *48 chia hết cho 16* và B : *48 chia hết cho 12* là $A \wedge B$: *48 chia hết cho 16 và chia hết cho 12*. Và mệnh đề trên là đúng.

+) **Phép tuyển và mệnh đề tuyển:** Cho 2 mệnh đề A và B. Mệnh đề tuyển của A và B được kí hiệu là: $A \vee B$. Nguyên lí hoạt động của nó là mệnh đề $A \vee B$ sẽ sai khi cả 2 mệnh đề A và B đều sai; và chỉ cần 1 trong 2 mệnh đề A hoặc B đúng thì mệnh đề $A \vee B$ sẽ đúng.

Phép tuyển (Phép toán $\vee$) khi tác động lên A, B thì kết quả là $A \vee B$.

Ví dụ: Mệnh đề hội của A, B với A : *Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi* và B : *Tứ giác $MNPQ$ là hình vuông* là $A \wedge B$: *Tứ giác $MNPQ$ là hình thoi hoặc hình vuông.*

+) **Phép kéo theo và mệnh đề kéo theo:** Cho 2 mệnh đề A và B. Mệnh đề kéo theo của A và B được kí hiệu là: $A \Rightarrow B$. Nguyên lí hoạt động của nó là mệnh đề $A \Rightarrow B$ sẽ sai khi A đúng và B sai; khi A sai (B tùy ý) hoặc B đúng (A tùy ý) thì mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng.

Phép kéo theo (Phép toán $\Rightarrow$) tạo ra mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$ từ mệnh đề A và B.

Có nhiều cách phát biểu mệnh đề này như: *"Nếu A thì B"*; *"Vì A nên B"*; *A kéo theo B*; *"A là điều kiện đủ của B"*.

Ví dụ: Mệnh đề kéo theo của A, B với A : *Ngày mai là ngày nghỉ* và B : *Lớp chúng tôi sẽ đi xem phim* là $A \wedge B$: *Nếu ngày mai là ngày nghỉ thì lớp chúng tôi sẽ đi xem phim.*

****Lưu ý:*** Ở đây mệnh đề kéo theo có ý nghĩa rộng, không nhất thiết bao hàm quan hệ nhân quả, trong đó A và B có thể độc lập với nhau.

+) **Mệnh đề đảo, mệnh đề phản và mệnh đề phản đảo:** Dựa vào phần trên, giả sử ta có mệnh đề kéo theo:

$$A \Rightarrow B$$

Khi đó: $B \Rightarrow A$; $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$; $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ lần lượt là *mệnh đề đảo*, *mệnh đề phản* và *mệnh đề phản đảo* của mệnh đề $A \Rightarrow B$.

Ví dụ: Cho mệnh đề H: *Nếu cả lớp đạt được danh hiệu học sinh xuất sắc thì cô Hương thưởng cho lớp một chuyến đi chơi 2 ngày 1 đêm.* Có thể thấy H là mệnh đề kéo theo dạng $A \Rightarrow B$ với mệnh đề A : *Cả lớp đạt được danh hiệu học sinh xuất sắc* và B : *Cô Hương thưởng cho lớp một chuyến đi chơi 2 ngày 1 đêm.* Vậy từ đó ta suy ra được:

-) $B \Rightarrow A$: *Nếu cô Hương thưởng cho lớp một chuyến đi chơi 2 ngày 1 đêm thì cả lớp đạt được danh hiệu học sinh xuất sắc.*

-) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$: *Nếu cả lớp không đạt được danh hiệu học sinh xuất sắc thì cô Hương không thưởng cho lớp một chuyến đi chơi 2 ngày 1 đêm.*

-) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$: *Nếu cô Hương không thưởng cho lớp một chuyến đi chơi 2 ngày 1 đêm thì cả lớp không đạt được danh hiệu học sinh xuất sắc.*

+) **Mệnh đề tương đương:** Cho 2 mệnh đề A và B. Mệnh đề *A nếu và chỉ nếu B* được gọi là *mệnh đề tương đương.*

Kí hiệu: $A \Leftrightarrow B$. Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ đúng khi và chỉ khi A và B đều đúng.

Ví dụ: Mệnh đề tương đương của A, B với A : *Tam giác PQR đều* và B : *Tam giác PQR có 2 góc bằng* $60°$ là $A \Leftrightarrow B$: *Tam giác PQR đều khi và chỉ khi tam giác PQR có 2 góc bằng* $60°$.

1.2 Tập hợp

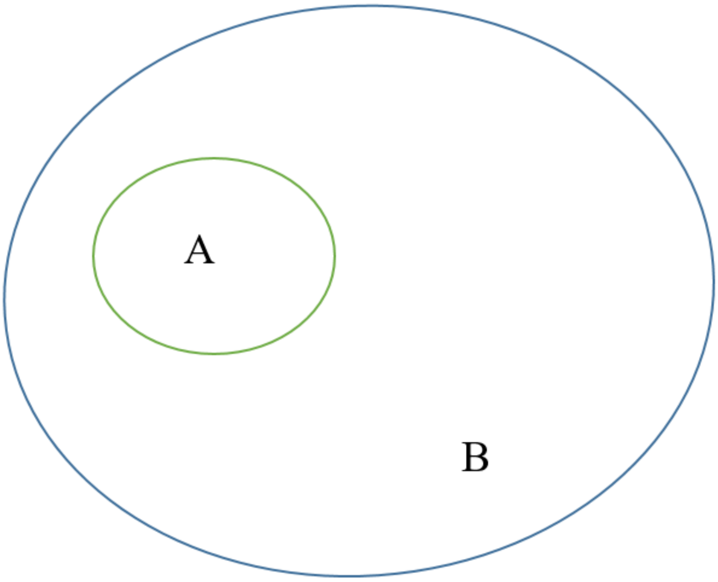
1.2.1 Các khái niệm cơ bản

Trong toán học, một tập hợp là một bộ các phần tử. Dưới đây là các cách cho một tập:

+) $x \in A$: x là một phần tử của tập hợp A

+) $x \notin A$: x không là phần tử của tập hợp A

+) Nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc B, ta nói A là 1 tập con của B và viết: $A \subset B$ hoặc $B \supset A$



Hình 1.1: *Tập A: Học sinh của lớp D4. Tập B: Tất cả học sinh khối 10 của trường THPT Việt Đức*

+) Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng chứa cùng các phần tử. Kí hiệu: $A = B$

Chú ý: Ta có: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ hoặc $B \subset A$

Một tập hợp thường được xác định:

+) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

+) Tính chất đặc trưng của các phần tử trong tập hợp

Ví dụ Gọi D là tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 - 4 = 0$. Khi đó: $S = \{-2, 2\}$ hoặc $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$

+) Tập rỗng (Kí hiệu: $\emptyset$) là tập con của mọi tập hợp (bao gồm cả chính nó).

+) Biểu đồ Ven: Được nhà toán học người Anh John Venn đưa ra vào năm 1981. Trong biểu đồ Ven, người ta dùng những hình giới hạn bởi một đường khép kín để biểu diễn tập hợp.

+) Ta có mối quan hệ giữa các tập hợp con của $\mathbb{R}$ như sau: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Trong đó tập hợp $\mathbb{R}$ có thể được viết dưới dạng như sau: $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

D4 là tập hợp các trai xinh, gái đẹp của trường THPT Việt Đức ❤

Khoảng

$(a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a\,;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$(-\infty\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Đoạn

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

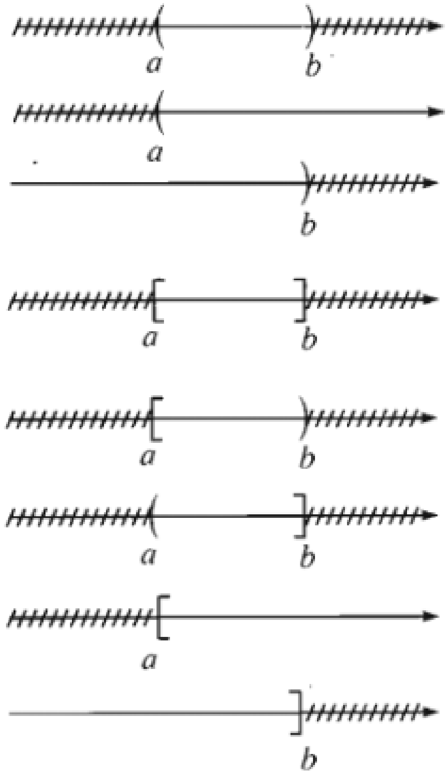
Nửa khoảng

$[a\,;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a\,;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.



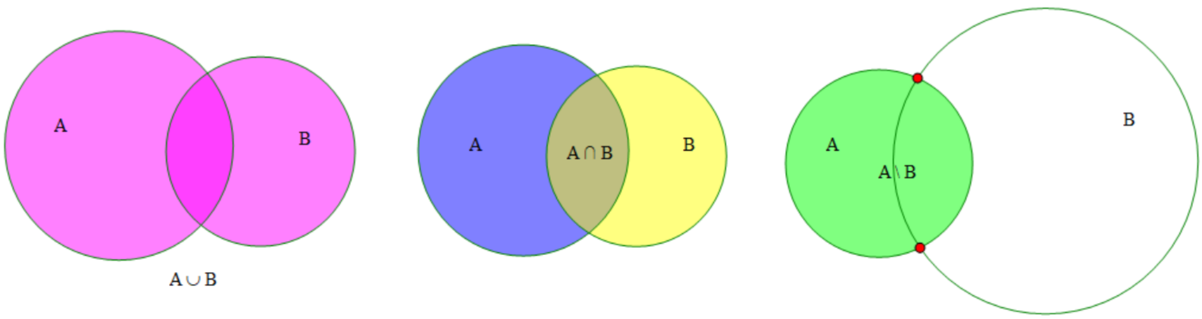
Hình 1.2: *Một số tập con thường dùng của tập số thực* $\mathbb{R}$

1.2.2 Các phép toán trên tập hợp

Cho hai tập hợp A và B:

+) Hợp của A và B là tập hợp: $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

+) Giao của A và B là tập hợp: $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$ +) Hiệu của A và B là tập hợp: $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

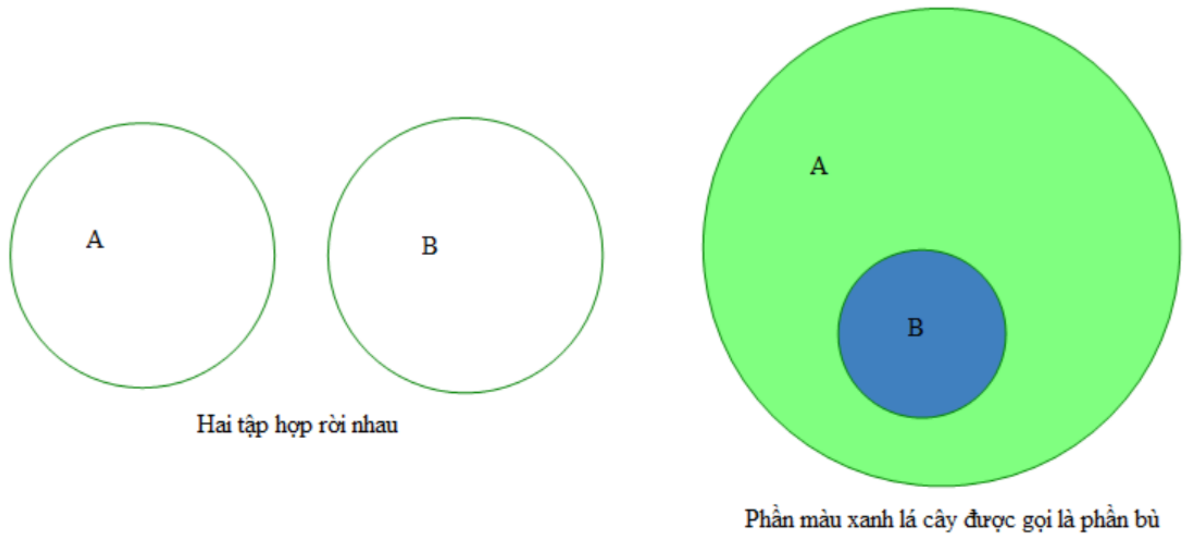


Hình 1.3: *Biểu đồ Ven cho các phép toán trên tập hợp*

***Chú ý**: Kí hiệu := được định nghĩa là "Định nghĩa là, xác định bởi". Nói cho dễ hiểu thì khi có kí hiệu này ta hiểu rằng thứ đằng sau nó chính là định nghĩa cho thứ đằng trước.

+) A và B được gọi là 2 tập hợp **rời nhau** nếu: $A \cap B = \emptyset$

+) Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là phần bù của A trong B, kí hiệu là: $C_B A$ (Hoặc $\overline{B}$)



Hình 1.4: *Biểu đồ Ven minh họa cho các tập rời nhau và phần bù*

+) Số tập con của tập hợp có n phần tử là: 2^n (Sẽ chứng minh ở phần định lí nhị thức)

+) **Nguyên lí bù - trừ:** Bài này chủ yếu chỉ sử dụng hai cái dưới này thôi nha:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

Kí hiệu $||$ thay cho $n()$ để biểu thị số phần tử của tập hợp trong ngoặc nhé. Nguyên lí bù - trừ sẽ được nhắc lại và mở rộng ở phần *Tổ hợp* nhé, ở đây chỉ cung cấp một chút để giúp mọi người thuận lợi trong việc tính toán các bài cơ bản thôi.

1.2.3 Mở rộng

- Với các tập hợp A, B và C; ta có:

+) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

+) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- **Quy tắc De Morgan:** Với các tập hợp A, B và C, khi đó ta có:

+) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ +) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Phần chứng minh của các kết quả trên ở trong mục bài tập nha, kèm đáp án ở phần cuối

- Cho $\{A_i\}_{i \in I}$ là 1 họ các tập hợp. Giao của họ các tập hợp này là tập hợp:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

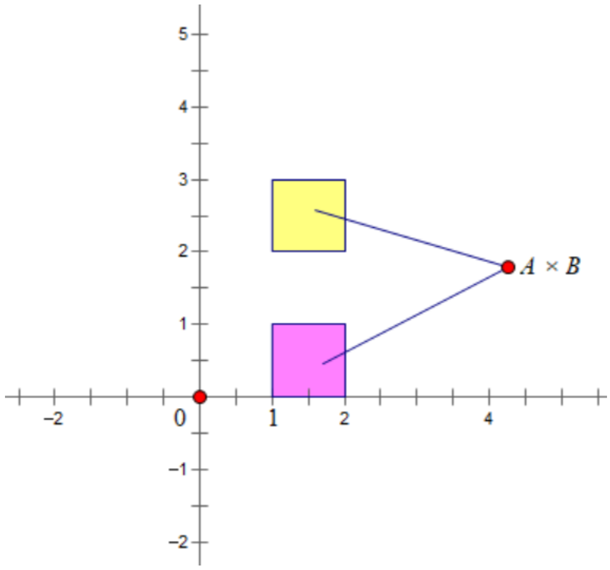
hợp của họ các tập hợp này là tập hợp:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

- **Tích Cartesian** (Hay còn gọi là **tích Descartes**): Cho 2 tập hợp khác rỗng A và B. Tích Cartesian của A và B là tập hợp:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A; b \in B\}$$

Hiểu đơn giản thì tập hợp $A \times B$ bao gồm các phần tử có dạng cặp số (a, b) trong dãy với $a \in A$ và $b \in B$.
Ví dụ nếu $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ và $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ hoặc } 2 \leq y \leq 3\}$ thì $A \times B$ được mô tả bằng hình học trong mặt phẳng tọa độ như sau:



Mặc dù tích Cartesian là kiến thức mở rộng nhưng nó rất quan trọng cho các phần sau nha

1.3 Các kĩ thuật xử lí phương trình, hệ phương trình

Dù có là phương trình, hệ phương trình hay cả bất phương trình thì đừng quên viết điều kiện xác định và kết luận. Và trong bất kì tình huống nào, hãy đoán nghiệm trước và quan sát kĩ các biểu thức để định hướng được hướng đi.

1.3.1 Phương trình

Kĩ thuật mà tất cả các học sinh đều có, không cần suy nghĩ nhiều, đó là sức mạnh cơ bắp. Cứ gặp đâu phá đấy, hoặc gặp căn mà bí thì cứ bỏ căn bằng cách lũy thừa lên. ☺. Trước hết, việc sử dụng các **hằng đẳng thức** sẽ hỗ trợ chúng ta trong công cuộc xài sức mạnh trâu bò (Mà thực ra thì cái này ứng dụng trong nhiều thứ vì nó là công cụ tốt hỗ trợ chúng ta trong quá trình biến đổi tương đương, trong bài thì quan sát kĩ các biểu thức để nhận biết được điều đó):

- Những hằng đẳng thức đáng nhớ:

+) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
+) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
+) $(a \pm b)^2 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^2$
+) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- Một số các hằng đẳng thức khác:

+) $(a+b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \pm 2bc \pm 2ca$
+) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$
+) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
+) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$
+) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$
+) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
+) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
+) Với n lẻ: $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
+) Định lý nhị thức: Với n là một số nguyên dương, ta có:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k}$$

- Đặt ẩn phụ: Ta đặt biến mới thay cho biến gốc. Mục đích chính là giúp cho phương trình dễ xử lí hơn (Có thể cho gọn hoặc dễ nhìn hơn), còn làm nó phức tạp hơn thì không nên ứng dụng phương pháp này nhé.

- Sử dụng hàm đặc trưng: Đưa về dạng $f(a) = f(b)$ với f là hàm đồng biến hoặc nghịch biến.

- Nhân liên hợp: (Chú ý điều kiện của a, b để áp dụng nhé)

+) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$
+) $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \frac{a \pm b}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$
+) $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}$

Lưu ý: Những bàicó nhiều nghiệm nên nhân liên hợp với đại lượng $mx + n$ và chọn m, n thích hợp để tách được các nhân tử ứng với các nghiệm.

- Đánh giá bất đẳng thức: Kĩ thuật này được áp dụng trong 1 số tình huống. Thường hay dùng các bất đẳng thức như AM - GM, Cauchy - Schwarz để đánh giá.

1.3.2 Hệ phương trình

Giống với Phương trình, hệ phương trình cũng sử dụng các kĩ thuật như: Thế, đặt ẩn phụ, hàm đặc trưng, đánh giá bất đẳng thức, phân tích thành tích, nhân liên hợp, xài hằng đẳng thức. Bên cạnh đó người ta còn phân ra các loại hệ phương trình khác nhau:
- Hệ đối xứng loại I: Có dạng như sau:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

trong đó f, g là các biểu thức đối xứng với x, y (Một biểu thức được gọi là đối xứng nếu khi ta đổi chỗ 2 biến bất kỳ cho nhau, biểu thức vẫn giữ nguyên).
Cách giải: Sử dụng phương pháp đặt ẩn: $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ $(S^2 \geq 4P)$ chuyển hệ phương trình về theo S, P. Giải tìm S, P (Thường hay dùng kĩ thuật thế).
- Hệ đối xứng loại II: Có dạng như sau:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f(g,x)=0 \end{cases}$$

Cách giải: Trừ tương ứng 2 phương trình theo vế để tách nhân tử $x-y$. Một số trường hợp cần kết hợp thêm phép cộng 2 phương trình.
- Hệ đối xứng 3 ẩn: Có dạng như sau:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

trong đó f, g, h là các biểu thức đối xứng với x, y, z.
Cách giải: Sử dụng phép đặt ẩn phụ: $\begin{cases} A=x+y+z \\ B=xy+yz+zx \\ C=xyz \end{cases}$ chuyển hệ phương trình về theo A, B, C. Sau đó ta tìm x, y, z bằng cách xét đa thức phụ $P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$.
- Hệ đẳng cấp: Phương trình đẳng cấp là phương trình mà tất cả các số hạng có bậc bằng nhau. Nghiệm của phương trình đẳng cấp luôn có dạng tỉ lệ: $x=ky$.
Cách giải:

+) $y=0$: Dùng phương pháp thế
+) $y \neq 0$: Đưa phương trình về theo ẩn $t=\frac{x}{y}$

Hệ phương trình đẳng cấp là hệ có thể đưa về phương trình đẳng cấp. Nó thường sẽ có dạng kiểu hệ phương trình có chứa sẵn 1 phương trình đẳng cấp hoặc mỗi phương trình thành phần có chứa 2 loại bậc.

1.4 Quy nạp toán học

1.4.1 Mở đầu

Ta xét đa thức $f(x) = x^2 + x + 17$. Quan sát giá trị $f(n)$ khi n là số nguyên dương ta thấy:

$$f(0) = 17; f(1) = 19; f(2) = 23; f(3) = 29; f(4) = 37$$

đều là các số nguyên tố. Vậy ta có thể đưa ra dự đoán $f(n)$ là số nguyên tố với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Dự đoán này có thể đúng hoặc sai.
Quá trình suy luận trên được gọi là quy nạp. Khác với suy diễn là đi từ tổng quát tới cụ thể thì ở đây, bằng cách quan sát 1 hiện tượng trong 1 vài trường hợp riêng ta rút ra kết luận trong trường hợp tổng quát. Kết luận có thể đúng hoặc sai.
Trong trường hợp đang xét, kết luận là sai, chẳng hạn $f(16)$ không phải là số nguyên tố. Nhưng nếu kết luận là đúng thì chứng minh nó như thế nào? Có 1 phương pháp rất hiệu quả để làm được điều này, là phương pháp **quy nạp toán học**.
Cơ sở của nó là tính chất sau của tập hợp số tự nhiên:

Mọi tập hợp rỗng các số tự nhiên đều có phần tử nhỏ nhất

Tính chất trên người ta gọi là **nguyên lí sắp xếp tốt**.

1.4.2 Nguyên lí và một số ví dụ quy nạp toán học

Định lý 1: Cho S là 1 tập con của $\mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau:
1. $0 \in S$
2. Với mỗi số tự nhiên k, nếu $k \in S$ thì $k + 1 \in S$.
Khi đó $S = \mathbb{N}$.
**Chứng minh:*
Giả sử khẳng định là sai. Khi đó $N \setminus S$ là 1 tập con khác rỗng của tập các số tự nhiên. Suy ra theo nguyên lý sắp xếp tốt, $N \setminus S$ có phần tử nhỏ nhất, ta ký hiệu k là phần tử này.
Vì k là số tự nhiên không thuộc S nên theo tính chất đầu tiên của S ta có $k \geq 1$. Theo cách chọn k, ta có $k - 1$ là 1 số tự nhiên không thuộc $N \setminus S$. Suy ra $k - 1 \in S$.
Từ tính chất thứ hai của S ta có $k \in S$, vô lý. Vậy điều giả sử là sai, khẳng định của đề bài đúng. □
Lưu ý quan trọng: Trong thực hành, khi muốn sử dụng nguyên lý quy nạp toán học để chứng minh 1 mệnh đề $P(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$; ta phải thực hiện 2 bước sau:
Bước 1. Chứng minh $P(0)$ đúng.
Bước 2. Giả sử $P(k)$ đúng, với số tự nhiên k nào đó, rồi từ đó chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng.
Ở sơ đồ trên, bước 1 được gọi là **bước cơ sở** và bước 2 được gọi là **bước quy nạp**. Trong bước 2, sự kiện $P(k)$ đúng được gọi là **giả thiết quy nạp**.
Ví dụ: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n ta có:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Chứng minh:*
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.

+) Khi $n = 1$, ta có vế trái và vế phải đều bằng 1 nên khẳng định đúng với $n = 1$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là số nguyên dương, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, có nghĩa là:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vì khẳng định đúng với $n = k$ nên vế tría của đẳng thức trên bằng:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Suy ra khẳng định đúng với $nk + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng dịnh đúng với mọi số nguyên dương n. □

Chú ý: Khi sử dụng quy nạp toán học, đừng quên thực hiên bước cơ sở. Chẳng hạn, nếu không thực hiện bước này mà chỉ thực hiện bước quy nạp bạn sẽ có kết quả: Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $5n + 1 \mid 5$. Và trong bước quy nạp, ta chỉ giả sử khẳng định đúng với số tự nhiên k nào đó, chứ không phải đúng $\forall k \in \mathbb{N}$.
Có hạn chế của định lý 1, là khi chứng minh $P(n+1)$ đúng trong tay ta chỉ có giả thiết $P(k)$ đúng. Vậy nên kết quả sau sẽ giúp ta khắc phục được hạn chế này:
Định lý 2: Cho S là 1 tập con của $\mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau:
1. $0 \in S$
2. Với mỗi số tự nhiên k, nếu $0; 1; \ldots; k \in S$ thì $k + 1 \in S$.
Khi đó $S = \mathbb{N}$.
Người ta còn gọi định lý 2 là **quy nạp mạnh**. Sẽ có người thắc mắc vì sao ta lại phải cần định lý 1? Bởi vì định lý 2 không thể áp dụng cho toàn bộ các bài, do nó bắt buộc phải đi từ 0; trong trường hợp có bài bước cơ sở như $k = 4$ thì toang. Nhưng phải công nhận 1 điều định lý 2 rất hữu dụng. Ta xét **ví dụ** sau:
Cho số thực $k \neq 0$ sao cho số $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, số $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$.
**Chứng minh:*
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.
+) Từ giả thiết và đẳng thức:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \in \mathbb{Q}$$

ta thấy khẳng định đúng với $n = 1, n = 2$.
+) Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương $n < k + 1$, với số nguyên $k > 1$; ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Vì k và $k - 1$ đều là các số nguyên dương nhỏ hơn $k + 1$ nên theo giả thiết quy nạp, 2 số $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ và $x^k + \frac{1}{x^k}$ đều là số hữu tỉ. Suy ra $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ là số hữu tỉ, vì:

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \in \mathbb{Q}$$

Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học; khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.
Thêm: Trong nhiều bài toán thì bài toán tổng quát lại dễ giải hơn bài toán ban đầu,hoặc 1 kết quả mạnh hơn lại dễ chứng minh hơn kết quả ban đầu.

Chương 2

BÀI TẬP

2.1 Mệnh đề

Bài 1. Hãy cho biết các câu sau có phải là mệnh đề không? Nếu đúng thì xét tính đúng, sai của mệnh đề đó?
a) Không có số nào cộng với chính nó bằng 0.
b) Mẹ ơi, cho con đi chơi với bạn tối nay được không?
c) Cà Mau là thủ đô của Việt Nam.
d) $x - 4 = 7$
e) $\pi < \frac{13}{4}$
Bài 2. Cho mệnh đề $P : \exists n \in \mathbb{N} \mid 4n^2 - 3n + 1 \leq 0$.
a) Xác định mệnh đề phủ định của P.
b) Vậy mệnh đề phủ định của P đúng hay sai? Vì sao?
Bài 3. Phát biểu mệnh đề đảo, phản và phản đảo của các mệnh đề sau?
a) Nếu ngày mai Tùng đi học thì tôi tặng bạn 1 thanh socola.
b) Nếu ngày mai kiểm tra thì tôi trốn.
Bài 4. Cho các mệnh đề chứa biến $P(n) : n^2 > 9$ và $Q(n) : n > 3$ với $n \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:
a) Mệnh đề $P(6)$ là một mệnh đề đúng.
b) Có 7 số tự nhiên n không vượt quá 10 để mệnh đề $P(n)$ trở thành mệnh đề đúng.
c) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là một mệnh đề đúng.
d) Mệnh đề P và Q là hai mệnh đề tương đương.
Bài 5. Cho các mệnh đề sau:
+) P : Bạn Nhím lớp D4 biết lập trình.
+) Q : Bạn Nhím lớp D4 học siêu giỏi Toán.
+) R : Nhím thích học môn Vật lí.
Xét mệnh đề sau:

$$(P \vee Q) \wedge R$$

Hỏi mệnh đề này có ý nghĩa gì và khi nào mệnh đề này đúng?

2.2 Tập hợp

Bài 1. Cho hai tập hợp $A = \{3; 7\}, B = \{3; 6; 7\}$.
a) Chứng minh rằng A là tập con của B.
b) Hãy xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.
Bài 2. Cho các tập hợp $A = \{1; 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập P thỏa mãn $A \subset P \subset B$? Hãy liệt kê các tập có thể của P.
Bài 3. Xét tính đúng sai của các khẳng định dưới đây?
a) Với A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 14, B là tập hợp các số chính phương nhỏ hơn 10. Khi đó $A \cup B$ có tất cả là 10 phần tử.
b) Tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 7 = 0\}$ là tập rỗng.
c) Với $P = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x \leq -1\}$ và $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 3\}$, ta suy ra: $P \cup Q = [-9; 3)$
d) Cho tập hợp $T = \{2; 9; 13; 95; 7\}$. Khi đó số tập con của tập T là 36.
Bài 4. Cho tập hợp $X = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ và $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \nmid 4, x^2 \leq 100\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?
a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x \leq 25\}$
b) Tập hợp Y có 11 phần tử.
c) X là tập con của Y.
d) Số tập con của tập hợp X có ít nhất 1 phần tử là 53.
Bài 5. Cho tập hợp $A = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của bất phương trình $(x + m)(x - m + 1) \geq 2$ với $m \geq 1$. Chứng minh rằng $A \subset S$.
Bài 6. Lớp 10D4 của trường THPT Việt Đức có tất cả 48 học sinh và 11 thầy cô bộ môn (Bao gồm cả giáo viên chủ nhiệm). Theo thống kê của lớp phó phong trào thì tất cả thầy cô và các bạn trong lớp đều thích uống trà sữa hoặc sữa tươi. Biết rằng có 42 người thích uống trà sữa, 27 người thích uống sữa tươi. Hãy xử lí các truy vấn dưới đây:
a) Tìm số người thích cả trà sữa và sữa tươi.
b) Chứng minh rằng trong số tất cả các thầy cô thì sẽ có người chỉ thích 1 loại đồ uống?
Bài 7. Trong một lần tổ chức đi tình nguyện, số lượng học sinh của lớp D4 được giao 3 nhiệm vụ: góp tiền trợ cấp những gia đình có hoàn cảnh khó khăn, đưa họ đi chơi và tự tạo sản phẩm làm quà tặng để động viên tinh thần. Kết quả biểu quyết dựa trên tinh thần tự nguyện. Được biết ai cũng sẽ có nhiệm vụ (Có thể có 2 nhiệm vụ); số lượng bạn đăng ký trợ cấp lẫn đưa đi chơi bằng số bạn đăng kí làm quà tặng; có 31 bạn đăng ký trợ cấp và 17 bạn chịu trách nhiệm đưa đi chơi. Lưu ý rằng việc làm quà tặng là độc lập (Tức là nếu đăng ký thì chỉ có duy nhất nhiệm vụ đó) và số người đăng ký lẫn 2 nhiệm vụ ban đầu có thể bao gồm cả những người đăng ký cả 2 lẫn 1. Vậy hỏi lớp D4 có bao nhiêu học sinh?
Bài 8. Thông qua khảo sát, ta có được kết quả như sau về lớp 10D4 trường THPT Việt Đức: Có tất cả 48 học sinh, trong đó có 15 bạn đạt loại xuất sắc môn Văn, 14 bạn đạt loại xuất sắc môn Toán, 22 bạn đạt loại xuất sắc môn Ngoại ngữ. Có 5 bạn đạt xuất sắc cả hai môn Văn và Toán, 7 bạn giỏi 2 môn Anh và Văn, 8 bạn giỏi hai môn Tiếng Anh và Toán. Trong số đó có 4 bạn đạt loại xuất sắc cả ba môn. Biết rằng chỉ cần có được 1 môn trong 3 môn Toán, Văn, Ngoại ngữ đạt loại xuất sắc thì học sinh đó sẽ có được danh hiệu học sinh xuất sắc. Giáo viên bộ môn hứa rằng nếu cả lớp đạt hết danh hiệu học sinh xuất sắc, cô sẽ thưởng cho lớp đi chơi 2 ngày 1 đêm, nhưng chỉ cần 1 người không đạt thì sẽ không được thưởng đi chơi. Hỏi liệu lớp D4 có được thưởng đi chơi không? Vì sao?
Bài 9. Với các tập hợp A, B và C; chứng minh rằng:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Bài 10. Với các tập hợp A, B và C; chứng minh rằng:
a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
Bài 11. Chứng minh rằng nếu A và B là các tập hợp con của một tập hợp X, thì:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Bài 12. Cho hai tập hợp $M = \{1; 3\}, N = \{2; 3; 5\}$. Xác định các cặp có thứ tự của $M \times N$.

2.3 Các kĩ thuật xử lí phương trình, hệ phương trình

Bài 1. Giải phương trình:
a) $3x^2 - 13x + 44 = 8\sqrt{5x+1}$
b) $x^2 + 5x + 7 = 5\sqrt{x^3+1}$
c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 2 = \sqrt[3]{x+8}$
d) $(3x+2)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 4x + 3$

Bài 2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 = 3y - 2 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$

Bài 3. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x(x+y+z) = 3yz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \le 5(y+z)^3$$

2.4 Quy nạp toán học

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có các đẳng thức sau:
a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ **b)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ **d)** $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \ (a, b \geq 0)$
Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $8^n - 1$ chia hết cho 7.
Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại 100 điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau?
Bài 4. Với m, n là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$2^n + n = m!$$

a) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên k, ta có: $2^k \geq k + 1$.
b) Chứng minh rằng n có thể viết dưới dạng: $n = 2^k.t$ với k, t là các số nguyên dương và t lẻ? Từ đó suy ra: $m!$ chia hết cho 2^k nhưng không chia hết cho 2^{k+1}.
Bài 5.
a) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho với mỗi số nguyên $n \geq m$, ta có:

$$2^n \geq n^2 + n + 1$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho với mỗi số nguyên $n \geq m$, ta có:

$$n! \geq n^3 + n + 1$$

Bài 6. Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$$

Chương 3

LỜI GIẢI

3.1 Mệnh đề

Bài 1. Hãy cho biết các câu sau có phải là mệnh đề không? Nếu đúng thì xét tính đúng, sai của mệnh đề đó?
a) Không có số nào cộng với chính nó bằng 0
b) Mẹ ơi, cho con đi chơi với bạn tối nay được không?
c) Cà Mau là thủ đô của Việt Nam.
d) $x - 4 = 7$
e) $\pi < \frac{13}{4}$

Lời giải. **a)** Đây là một mệnh đề. Phản ví dụ: $0 + 0 = 0$. Mệnh đề trên là sai.
b) Đây là một câu hỏi, không phải một khẳng định nên nó không phải mệnh đề.
c) Đây là một mệnh đề. Hà Nội mới là thủ đô của Việt Nam, vậy nên mệnh đề trên là sai.
d) Đây là một câu có tính chất vừa đúng hoặc vừa sai, vậy nên nó không phải mệnh đề.
e) Đây là một mệnh đề. Ta có: $\pi \approx 3.14$ và $\frac{13}{4} = 3.25$ nên $\pi < \frac{13}{4}$ là mệnh đề đúng. □

Bài 2. Cho mệnh đề $P : \exists n \in \mathbb{N} \mid 4n^2 - 3n + 1 \leq 0$.
a) Xác định mệnh đề phủ định của P.
b) Vậy mệnh đề phủ định của P đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải. **a)** Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P} : \forall n \in \mathbb{N} \mid 4n^2 - 3n + 1 > 0$.
b) Ta có:

$$4n^2 - 3n + 1 = \left[(2n)^2 - 2.2n.\frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right] + \frac{7}{16} = \left(2n - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy mệnh đề $\overline{P}$ là đúng. □

Bài 3. Phát biểu mệnh đề đảo, phản và phản đảo của các mệnh đề sau?
a) Nếu ngày mai Tùng đi học thì tôi tặng bạn 1 thanh socola.
b) Nếu ngày mai kiểm tra thì tôi trốn.

Lời giải. **a)** Dễ thấy mệnh đề gốc là mệnh đề kéo theo nên ta có thể tách thành 2 mệnh đề: A : Ngày mai Tùng đi học và B : Tôi tặng bạn 1 thanh socola.
+) $B \Rightarrow A$: *Nếu tôi tặng bạn 1 thanh socola thì ngày mai Tùng đi học.*
+) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$: *Nếu ngày mai Tùng không đi học thì tôi không tặng bạn 1 thanh socola.*
+) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$: *Nếu tôi không tặng bạn 1 thanh socola thì ngày mai Tùng không đi học.*
b) Tương tự với ý a. □

Bài 4. Cho các mệnh đề chứa biến $P(n) : n^2 > 9$ và $Q(n) : n > 3$ với $n \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:
a) Mệnh đề $P(6)$ là một mệnh đề đúng.
b) Có 7 số tự nhiên n không vượt quá 10 để mệnh đề $P(n)$ trở thành mệnh đề đúng.
c) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là một mệnh đề đúng.
d) Mệnh đề P và Q là hai mệnh đề tương đương.

Lời giải. **a)** Ta có: $P(6) : 6^2 > 9$ là một mệnh đề đúng vậy nên khẳng định trên đúng.
b) Những số tự nhiên không vượt quá 10 mà bình phương của chúng lớn hơn 9 là: $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Vậy khẳng định trên là đúng.
c) Ta có: $Q \Rightarrow P$: Nếu $n > 3$ thì $n^2 > 9$. Điều này đúng theo bất đẳng thức: $n.n > 3.3 \Leftrightarrow n^2 > 9$. Vậy khẳng định trên là đúng.
d) Ở ý c ta có: $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đúng, bây giờ ta xét $P \Rightarrow Q$: Nếu $n^2 > 9$ thì $n > 3$, điều này sai vì khi $n^2 > 9$ thì $n \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Vậy khẳng định trên là sai. □

Bài 5. Cho các mệnh đề sau:
+) P : Bạn Nhím lớp D4 biết lập trình.
+) Q : Bạn Nhím lớp D4 học siêu giỏi Toán.
+) R : Nhím thích học môn Vật lí.
Xét mệnh đề sau:

$$(P \vee Q) \wedge R$$

Hỏi mệnh đề này có ý nghĩa gì và khi nào mệnh đề này đúng?

Lời giải. Áp dụng mệnh đề hội, mệnh đề tuyển và theo thứ tự trong ngoặc tới ngoài ngoặc, ta được: $(P \vee Q) \wedge R$ tương đương với *Bạn Nhím lớp D4 biết lập trình hoặc học siêu giỏi Toán, và Nhím thích học môn vật lí.*
Mệnh đề này đúng khi: mệnh đề R đúng và ít nhất 1 trong 2 mệnh đề P hoặc Q đúng. □

3.2 Tập hợp

Bài 1. Cho hai tập hợp $A = \{3; 7\}, B = \{3; 6; 7\}$.
a) Chứng minh rằng A là tập con của B.
b) Hãy xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

Lời giải. **a)** Dễ thấy các phần tử của tập A là 3, 7 đều thuộc tập B. Vậy nên $A \subset B$.
b) $A \cap B = \{3; 7\}, A \cup B = \{3; 6; 7\}, A \setminus B = \emptyset$ □

Bài 2. Cho các tập hợp $A = \{1; 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập P thỏa mãn $A \subset P \subset B$? Hãy liệt kê các tập có thể của P.

Lời giải. Ta triển khai tập B dưới dạng liệt kê các phần tử, khi đó ta được: $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Dễ thấy nếu $A \subset P$ có nghĩa là tất cả các phần tử của A phải thuộc P; tương tự với $P \subset B$ thì B cũng phải bao hàm tất cả các phần tử của P; và cũng đừng quên một điều kiện nữa phải kiểm tra, đó là A có phải tập con của B hay không (Cái này để cẩn thận thôi, còn theo như đề bài là đúng rồi). Để cá điều trên xảy ra đồng thời ta cần những phần tử của tập hợp P phải bao gồm các phần tử của A và B. Theo phương pháp liệt kê ta có:

$$P = \{1; 4\}, \{1; 4; 0\}, \{1; 4; 2\}, \{1; 4; 3\}; \{1; 4; 5\}$$

$$\{1; 4; 0; 2\}, \{1; 4; 0; 3\}, \{1; 4; 0; 5\}, \{1; 4; 2; 3\}, \{1; 4; 2; 5\}, \{1; 4; 3; 5\}$$

$$\{1; 4; 0; 2; 3\}, \{1; 4; 0; 2; 5\}, \{1; 4; 0; 3; 5\}; \{1; 4; 2; 3; 5\}$$

$$\{1; 4; 0; 2; 3; 5\}$$

Như vậy có tất cả 16 tập hợp P thỏa mãn yêu cầu của đề bài. □

Bài 3. Xét tính đúng sai của các khẳng định dưới đây?
a) Với A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 14, B là tập hợp các số chính phương nhỏ hơn 10. Khi đó $A \cup B$ có tất cả là 10 phần tử.
b) Tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 7 = 0\}$ là tập rỗng.
c) Với $P = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x \leq -1\}$ và $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\}$, ta suy ra: $P \cup Q = [-9; 3)$
d) Cho tập hợp $T = \{2; 9; 13; 95; 7\}$. Khi đó số tập con của tập T là 36.

Lời giải. **a)** Ta có: $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$ và $B = \{0; 1; 4; 9\}$. Suy ra:

$$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 13\}$$

Khi đó $A \cup B$ có 10 phần tử. Vậy khẳng định trên là đúng.
b) Dễ thấy nghiệm của phương trình $x^2 - 7 = 0$ là $\sqrt{7} \notin \mathbb{Z}$ và $-\sqrt{7} \notin \mathbb{Z}$ nên khẳng định trên là sai.
c) Từ giả thiết suy ra:

$$P \cup Q = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x < 3\} = [-9; 3)$$

Vậy khẳng định trên là sai.
d) Tập hợp T có 5 phần tử nên số tập con của T là: $2^5 = 32$ (tập). Vậy khẳng định trên là sai. □

Bài 4. Cho tập hợp $X = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$ và $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \nmid 4, x^2 \leq 100\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau?
a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x \leq 25\}$
b) Tập hợp Y có 11 phần tử.
c) X là tập con của Y.
d) Số tập con của tập hợp X có ít nhất 1 phần tử là 53.

Lời giải. **a)** Dễ thấy tập hợp X đưa ra ở khẳng định trên chỉ bao gồm các phần tử là số tự nhiên, trong khi tập hợp X ban đầu có cả phần tử âm, vậy nên khẳng định này sai.
b) Từ giả thiết ta có: $Y = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7; \pm 9\}$ (Kí hiệu $\nmid$ là không chia hết nhé). Suy ra tập hợp Y có 10 phần tử, vậy khẳng định trên là sai.
c) Đối chiếu phần tử của cả 2 tập hợp: $X = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5\}$ và $Y = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7; \pm 9\}$ nên $X \subset Y$. Vậy khẳng định này là đúng.
d) Do tập X có 6 phần tử nên số tập con của tập X là: $2^6 = 64$. Số tập con này bao gồm cả tập rỗng, dễ thấy tập con có ít nhất 1 phần tử của X ở đây tức là chỉ cần tập con đó khác rỗng thì sẽ được tính. Vậy ta có tất cả: $64 - 1 = 63$ tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy khẳng định trên là sai. □

Bài 5. Cho tập hợp $A = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm của bất phương trình $(x + m)(x - m + 1) \geq 2$ với mọi $m \geq 1$. Chứng minh rằng $A \subset S$.

Lời giải. Ta biến đổi bất phương trình đã cho:

$$x^2 - m^2 + x + m \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) \geq m(m - 1)$$

Do $m \geq 1$ nên: $m(m - 1) \geq 0$, suy ra: $(x - 1)(x + 2) \geq 0$. Vậy nghiệm của bất phương trình trên là:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$$

Mà $A = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ nên: $A \subset S$. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 6. Lớp 10D4 của trường THPT Việt Đức có tất cả 48 học sinh và 11 thầy cô bộ môn (Bao gồm cả giáo viên chủ nhiệm). Theo thống kê của lớp phó phong trào thì tất cả thầy cô và các bạn trong lớp đều thích uống trà sữa hoặc sữa tươi. Biết rằng có 42 người thích uống trà sữa, 27 người thích uống sữa tươi. Hãy xử lí các truy vấn dưới đây:
a) Tìm số người thích cả trà sữa và sữa tươi.
b) Chứng minh rằng trong số tất cả các thầy cô thì sẽ có người chỉ thích 1 loại đồ uống?

Lời giải. **a)** Gọi A là tập hợp tất cả những người thích uống trả sữa, B là tập hợp tất cả những người thích uống sữa tươi.
Tổng số người là: $48 + 11 = 59$ (người). Hay $|A \cup B| = 59$.
Do trong lớp ai cũng thích ít nhất 1 loại đồ uống nên ap dụng nguyên lý bù - trừ, ta được số người thích cả trà sữa và sữa tươi là:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 42 + 27 - 59 = 10$$

Vậy có tất cả 10 người thích cả trùa sữa và sữa tươi trong lớp D4.
b) Có tất cả 11 thầy cô, mà theo câu a ta tính được chỉ có 10 người trong lớp thích cả 2 loại đồ uống nên chắc chắn có ít nhất 1 thầy cô chỉ thích 1 loại đồ uống. □

Bài 7. Trong một lần tổ chức đi tình nguyện, số lượng học sinh của lớp D4 được giao 3 nhiệm vụ: trợ cấp những gia đình có hoàn cảnh khó khăn, đưa họ đi chơi và tự tạo sản phẩm làm quà tặng để động viên tinh thần. Kết quả biểu quyết dựa trên tinh thần tự nguyện. Được biết ai cũng sẽ có nhiệm vụ (Có thể có 2 nhiệm vụ); số lượng bạn đăng ký trợ cấp lẫn đưa đi chơi bằng số bạn đăng kí làm quà tặng; có 31 bạn đăng ký trợ cấp và 17 bạn chịu trách nhiệm đưa đi chơi. Lưu ý rằng việc làm quà tặng là độc lập (Tức là nếu đăng ký thì chỉ có duy nhất nhiệm vụ đó) và số người đăng ký lẫn 2 nhiệm vụ ban đầu có thể bao gồm cả những người đăng ký cả 2 lần 1. Vậy hỏi lớp D4 có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Gọi A và B lần lượt là tập hợp các học sinh làm nhiệm vụ trợ cấp và đưa đi chơi. Thực tế ta thấy nhiệm vụ thứ 3 chính là $A \cap B$ do số lượng làm nhiệm vụ này bằng số bạn đăng ký trợ cấp lẫn đưa đi chơi, đi cùng với điều kiện là nhiệm vụ 3 chỉ có thể được làm độc lập. Do ai trong lớp cũng có nhiệm vụ nên số lượng học sinh trong lớp là:

$$|A \cup B| + |A \cap B|$$

Theo nguyên lý bù - trừ, ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

mà $|A| = 31$ và $|B| = 17$ nên ta suy ra:

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B| = 31 + 17 = 48$$

Vậy lớp D4 có tất cả 48 học sinh. □

Bài 8. Thông qua khảo sát, ta có được kết quả như sau về lớp 10D4 trường THPT Việt Đức: Có tất cả 48 học sinh, trong đó có 20 bạn đạt loại xuất sắc môn Văn, 15 bạn đạt loại xuất sắc môn Toán, 29 bạn đạt loại xuất sắc môn Ngoại ngữ. Có 5 bạn đạt xuất sắc cả hai môn Văn và Toán, 7 bạn giỏi 2 môn Anh và Văn, 8 bạn giỏi hai môn Tiếng Anh và Toán. Trong số đó có 4 bạn đạt loại xuất sắc cả ba môn. Biết rằng chỉ cần có được 1 môn trong 3 môn Toán, Văn, Ngoại ngữ đạt loại xuất sắc thì học sinh đó sẽ có được danh hiệu học sinh xuất sắc. Giáo viên bộ môn hứa rằng nếu cả lớp đạt hết danh hiệu học sinh xuất sắc, cô sẽ thưởng cho lớp đi chơi 2 ngày 1 đêm, nhưng chỉ cần 1 người không đạt thì sẽ không được thưởng đi chơi. Hỏi liệu lớp D4 có được thưởng đi chơi không? Vì sao?

Lời giải. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh đạt loại xuất sắc môn Văn, Toán, Ngoại ngữ.
Từ giả thiết ta có: $|A| = 20; |B| = 15; |C| = 29; |A \cap B| = 5; |B \cap C| = 7; |C \cap A| = 8; |A \cap B \cap C| = 4$. Áp dụng nguyên lý bù - trừ ta có thể suy ra số học sinh không đạt loại xuất sắc trong 3 môn Toán, Văn, Anh của lớp D4 là:

$$48 - |A \cup B \cup C| = 48 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 48 - (20 + 14 + 29 - 5 - 7 - 8 + 4) = 0$$

Vậy tức là tất cả các học sinh đều đạt loại xuất sắc của ít nhất 1 trong 3 môn là Toán, Văn, Anh. Suy ra lớp D4 sẽ được thưởng đi chơi 2 ngày 1 đêm. ☺. □

Bài 9. Với các tập hợp A, B và C; chứng minh rằng:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Lời giải. a) Để chứng minh a, ta chứng minh tập hợp bên trái là tập hợp con của tập hợp bên phải, và ngược lại.
Đầu tiên, giả sử x là 1 phần tử của $A \cap (B \cup C)$. Khi đó $x \in A$ và $x \in B \cup C$. Nói riêng, $x \in B$ hoặc $x \in C$. Nếu $x \in B$ thì kết hợp với $x \in A$, ta có: $x \in A \cap B$, suy ra: $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Nếu $x \in C$ thì lập luận tương tự ta cũng có $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Như vậy ta luộn có:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Bây giờ giả sử x là 1 phần tử của $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Khi đó $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$. Do vai trò của B và C trong khẳng định là như nhau, ta có thể cho là: $x \in A \cap B$. Từ đây ta có $x \in A$ và $x \in B$, suy ra $x \in A$ và $x \in B \cup C$. Do đó:

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.
b) Chứng minh tương tự ý a. □

Bài 10. Với các tập hợp A, B và C; chứng minh rằng:
a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Lời giải. **a)** Giả sử x là 1 phần tử bất kỳ của tập hợp $A \setminus (B \cup C)$. Khi đó $x \in A$ và $x \notin B \cup C$. Suy ra $x \in A$ và x không thuộc B cũng như C. Do đó $x \in A$ và $x \notin B$, đồng thời $x \in A$ và $x \notin C$. Từ đây ta có:

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Ngược lại, giả sử x là 1 phần tử bất kì của tập hợp $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Khi đó $x \in A \setminus B$ và $x \in A \setminus C$. Suy ra $x \in A$ và x không thuộc B cũng như C. Do đó $x \in A$ và $x \notin B \cup C$, suy ra x là 1 phần tử của tập hợp $A \setminus (B \cup C)$.
b) Chứng minh tương tự ý a. □

Bài 11. Chứng minh rằng nếu A và B là các tập hợp con của một tập hợp X, thì:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$

Lời giải. Giả sử x là 1 phần tử bất kỳ của tập hợp $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Khi đó $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap \overline{B}$. Nếu $xx \in A \cap B$ thì $x \in A$; hoặc nếu $x \in A \cap \overline{B}$ thì $x \in A$. Do đó $x \in A$ trong mọi trường hợp và $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subset A$.
Ngược lại, giả sử x là 1 phần tử của A. Khi đó xảy ra 2 trường hợp:
+) **TH1:** $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
+) **TH2:** $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
Suy ra: $A \subset x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 12. Cho hai tập hợp $M = \{1; 3\}, N = \{2; 3; 5\}$. Xác định các cặp có thứ tự của $M \times N$.

Lời giải. Áp dụng định nghĩa của tích Cartesian, ta có $M \times N$ gồm các cặp thứ trong dãy như sau:

$$(1, 2); (1, 3); (1, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 5)$$

. □

3.3 Các kĩ thuật xử lí phương trình, hệ phương trình

Bài 1. Giải phương trình:
a) $3x^2 - 13x + 44 = 8\sqrt{5x+1}$
b) $x^2 + 5x + 7 = 5\sqrt{x^3+1}$
c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 2 = \sqrt[3]{x+8}$
d) $(3x+2)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 4x + 3$

Lời giải. **a)** Điều kiện xác định: $x \geq \frac{-1}{5}$
Ta có: $3x^2 - 13x + 44 = 8\sqrt{5x+1}$

$$\Leftrightarrow \left(5x + 1 - 8\sqrt{5x+1} + 16\right) + 3\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x+1} - 4\right)^2 + 3\left(x-3\right)^2 = 0$$

mà $\left(\sqrt{5x+1} - 4\right)^2 \geq 0; 3\left(x-3\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \geq \frac{-1}{5}$ nên để dấu bằng xảy ra thì:

$$\begin{cases} \sqrt{5x+1} - 4 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $x = 3$ là nghiệm của phương trình.
b) Điều kiện xác định: $x \geq -1$
Ta có: $x^2 + 5x + 7 = 5\sqrt{x^3+1}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 7 = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 6(x+1) + (x^2 - x + 1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{x^2-x+1} \quad (a \geq 0, b > 0)$.
Khi đó ta được: $6a^2 - 5ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(3a-b) = 0$. Tới đây xét 2 trường hợp rồi giải ra x.
c) Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$
Ta có: $x^3 + 6x^2 + 12x + 2 = \sqrt[3]{x+8}$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 = 6 + \sqrt[3]{x+8}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 + (x+2) = (x+8) + \sqrt[3]{x+8}$$

Đặt $a = x+2, b = \sqrt[3]{x+8} \quad (a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$$

mà $a^2 + ab + b^2 + 1 > 0$ nên: $a = b$. Từ đây các bạn giải ra x nhé.
d) Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$
Ta có: $(3x+2)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 4x + 3$

$$\Leftrightarrow (3x+2)(\sqrt{x^2+3} - 2) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x+2)(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}+2} = (x-1)(3x+1)$$

Tới đây có 2 trường hợp:
1. $x = 1$: Dễ
2. $(3x+2)(x+1) = (3x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right) \Leftrightarrow 3x^2 - x = (3x+1)\sqrt{x^2+3}$. Kết hợp với giả thiết, ta được: $5x+3 = \sqrt{x^2+3}$. Tới đây bình phương lên là xong. □

Bài 2. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x+y+2xy=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2=3y-2 \\ y^2=3x-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=49 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=4 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases}$

Lời giải. a) Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $S = x+y, P = xy \quad (S^2 \geq 4P)$. Khi đó hệ phương trình là: $\begin{cases} S+2P=2 & (1) \\ S(S^2-3P)=8 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $S = 2-2P$, thay vào phương trình (2) ta được:

$$(2-2P)\left[(2-2P)^2-3P\right] = 8$$

$$\Leftrightarrow (2-2P)(4P^2-11P+4) = 8$$

$$\Leftrightarrow -8P^3+30P^2-30P = 0$$

$$\Leftrightarrow 4P^3-15P^2+15P = 0$$

$$\Leftrightarrow P(4P^2-15P+15) = 0$$

mà $4P^2-15P+15 > 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}$ nên suy ra: $P = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $y = 0$. Có P ta suy ra: $x+y=2$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (2; 0), (0, 2)$

b) Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có: $\begin{cases} x^2=3y-2 & (1) \\ y^2=3x-2 & (2) \end{cases}$

Ta trừ vế với vế của (1) và (2), khi đó: $x^2-y^2 = 3y-3x \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+3) = 0$. Tới đây ta thấy chỉ cần xét 2 trường hợp và thế để giải x, y.

c) Điều kiện xác định: $xyz \neq 0$.

Đặt $A = x+y+z, B = xy+yz+zx, C = xyz$. Từ hệ phương trình ban đầu ta có:
$\begin{cases} A=11 \\ B=C \\ A^2-2B=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=11 \\ B=36 \\ C=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=11 \\ xy+yz+zx=36 \\ xyz=36 \end{cases}$

Xét đa thức $P(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$. Ta có $P(t)$ nhận x, y, z làm nghiệm, lại có:

$$P(t) = t^3 - t^2(x+y+z) + t(xy+yz+zx) - xyz = t^3 - 11t^2 + 36t - 36$$

Có $P(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 36t^2 + 36t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3)(t-6) = 0 \Leftrightarrow t \in \{2; 3; 6\}$. Vậy (x, y, z) là hoán vị của $(2, 3, 6)$.
d) Điều kiện xác định: $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta nhận chéo 2 vế phương trình, suy ra: $x^2+xy+y^2 = 4(x^2-xy+y^2) \Leftrightarrow 3x^2-5xy+2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-2y) = 0$. Tới đây ta xét 2 trường hợp rồi thế sẽ giải được x, y. □

Bài 3. Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x(x+y+z) = 3yz$. Chứng minh rằng:

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leq 5(y+z)^3$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có:

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 3.\frac{y}{x}.\frac{z}{x}$$

Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{x}$ $(a, b > 0)$. Khi đó: $1 + a + b = 3ab$. Ta cần chứng minh:

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^3 + \left(1+\frac{z}{x}\right)^3 + 3\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right) \leq 5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow (1+a)^3 + (1+b)^3 + 3(1+a)(1+b)(a+b) \leq 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow (2+a+b)^3 - 3(1+a)(1+b)(2+a+b) + 3(1+a)(1+b)(1+c) \leq 5(a+b)^3$$

$$\Leftrightarrow (2+a+b)^3 - 6(1+a)(1+b) \leq 5(a+b)^3$$

mà $6(1+a)(1+b) = 6(1+a+b+ab) = 6(1+a+b) + 6ab = 8(1+a+b)$ nên bất đẳng thức trên:

$$\Leftrightarrow (2+a+b)^3 - 8(1+a+b) \leq 5(a+b)^3$$

Đặt $m = a + b$. Ta cần chứng minh:

$$(2+m)^3 - 8(1+m) \leq 5m^3$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 4m \leq 5m^3$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 6m^2 - 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(m-2)(2m+1) \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab} \Rightarrow 3ab \geq 3\sqrt[3]{ab} \Rightarrow ab \geq 1 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$$

Suy ra: $m \geq 2$, vậy ta có điều phải chứng minh. □

3.4 Quy nạp toán học

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có các đẳng thức sau:
a) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ **b)** $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ **d)** $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ $(a, b \geq 0)$

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n=1$ ta có vế trái và vế phải đều bằng 1 nên khẳng định đúng với $n=1$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, trong đó k là số nguyên dương, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, nghĩa là:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

Vì khẳng định đúng với $n=k$ nên vế trái của đẳng thức trên bằng:

$$k^2+[2(k+1)-1]=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Suy ra khẳng định đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
b) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n=1$ ta có vế trái và vế phải đều bằng 1 nên khẳng định đúng với $n=1$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, trong đó k là số nguyên dương, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, nghĩa là:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Do khẳng định đúng với $n=k$ nên ta được:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ta cần phải chứng minh:

$$(k+1)^2+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$
$$\Leftrightarrow 6(k+1)^2=(k+1)[(k+2)(2k+3)-k(2k+1)]$$
$$\Leftrightarrow 6(k+1)^2=(k+1)(2k^2+7k+6-2k^2-k)$$
$$\Leftrightarrow 6(k+1)^2=(k+1)(6k+6)$$
$$\Leftrightarrow 6(k+1)^2=6(k+1)^2$$

Suy ra khẳng định đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.
c) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n=1$ ta có vế trái và vế phải đều bằng $\frac{1}{3}$ nên khẳng định đúng với $n=1$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, trong đó k là số nguyên dương, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, nghĩa là:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Do khẳng định đúng với $n = k$ nên vế trái của đẳng thức trên bằng:

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

Suy ra khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

d) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n.

+) Khi $n = 1$ ta có mệnh đề đúng.

+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là số nguyên dương, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$, nghĩa là:

$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

Do khẳng định đúng với $n = k$ nên ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{a^k + b^k}{2}\right) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \Leftrightarrow \left(\frac{a^k + b^k}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + a^k b + ab^k}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Từ giả thiết ta có $a, b > 0$ nên:

$$(a^k - b^k)(a-b) > 0 \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k \Leftrightarrow \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + a^k b + ab^k}{4} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

Suy ra khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $8^n - 1$ chia hết cho 7.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n.

+) Khi $n = 1$ thì: $8 - 1$ chia hết cho 7 nên khẳng định đúng với $n = 1$.

+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là một số tự nhiên. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$, nghĩa là:

$$8^{k+1} - 1 \mid 7$$

Theo giả thiết quy nạp ta có: $8^k - 1 \mid 7$. Từ đó ta có:

$$8^{k+1} - 1 = (8^{k+1} - 8) + 7 = 8(8^k - 1) + 7 \mid 7$$

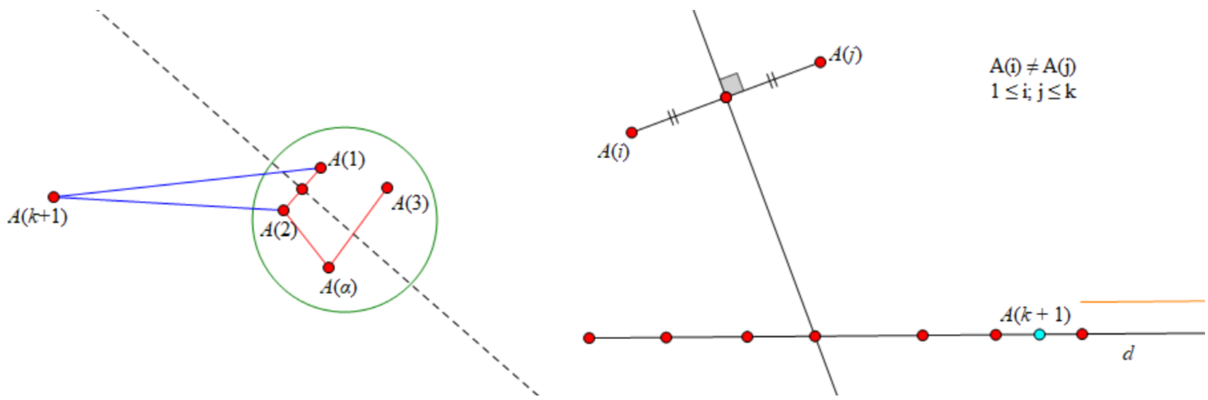
Suy ra khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n. $\square$

Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại 100 điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau?

Lời giải. Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh kết quả sau:

"Với mỗi số nguyên $n > 2$, tồn tại n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau. Bài toán ban đầu là 1 trường hợp riêng của kết quả này"

+) Với $n = 3$, chọn 3 điểm là ba đỉnh của 1 tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 3 và 4. Khi đó 3 đỉnh của tam giác này thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Vậy khẳng định đúng với $n = 3$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, với số nguyên $k > 2$, ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại k điểm $A_1; A_2; \dots; A_k$ trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau. Giả sử d là 1 đường thẳng



Hình 3.1: *Hình minh họa (nháp)*

không đi qua điểm nào trong k điểm này. Vì chỉ có hữu hạn các đường thẳng không đi qua điểm nào trong k điểm này. Vì chỉ có hữu hạn các đường thẳng là đường trung trực của 1 đoạn thẳng có 2 đầu thuộc dãy A_i, nên trên d có điểm A_{k+1} không thuộc các đường trung trực này và cách các điểm còn lại 1 khoảng đủ lớn.
Nhận thấy $k+1$ điểm $A_1; A_2; \dots; A_k; A_{k+1}$ có tính chất trong đề bài. Suy ra khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 2$.
Áp dụng cho bài toán gốc, ta có điều phải chứng minh. □

Bài 4. Với m, n là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$2^n + n = m!$$

a) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên k, ta có: $2^k \geq k + 1$.
b) Chứng minh rằng n có thể viết dưới dạng: $n = 2^k.t$ với k, t là các số nguyên dương và t lẻ? Từ đó suy ra: $m!$ chia hết cho 2^k nhưng không chia hết cho 2^{k+1}.

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n = 0$ ta có vế trái và vế phải bằng 1 nên khẳng định đúng với $n = 0$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là 1 số tự nhiên, ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, nghĩa là:

$$2^{k+1} \geq k + 2$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2(k+1) = (k+2) + k \geq k+2$$

Suy ra khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) +) Từ giả thiết: $m! \geq 2+1 = 3$ nên $m \geq 3$, do đó $m!$ chẵn. Mà 2^n chẵn nên n chẵn. Khi đó $n = 2^k.t$ với k, t là các số nguyên dương và t lẻ (Giải thích qua 1 chút, n là 1 số chẵn nên chắc chắn sẽ có dạng lũy thừa 2 nhân với một thừa số, ở đây lấy 2^k là lấy tích tất cả các thừa số của n mà chia hết cho 2, phần còn lại là số lẻ).
+) Ta có:

$$m! = 2^{2^k t} + 2^k t = 2^k(2^{2^k t - k} + t)$$

Do $2^k t - k \geq 2^k - k \geq 1$ (Theo ý a), nên $2^{2^k t-k}$ chẵn, hay $2^{2^k t-k} + t$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 5.
a) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho với mỗi số nguyên $n \geq m$, ta có:

$$2^n \geq n^2 + n + 1$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho với mỗi số nguyên $n \geq m$, ta có:

$$n! \geq n^3 + n + 1$$

Lời giải. a) Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n = 4$, ta có $2^n = 16$ và $n^2 + n + 1 = 21$ nên với $n \leq 4$ ta thấy bất đẳng thức không thỏa mãn. Khi $n = 5$, ta có: $2^n = 32$ và $n^2 + n + 1 = 31$ nên ta thấy khẳng định đúng với $n = 5$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là một số tự nhiên. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$, nghĩa là:

$$2^{k+1} \geq (k+1)^2 + (k+1) + 1$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$2.2^k \geq 2(k^2 + k + 1) = (k^2 + 2k + 1) + k^2 + 1 = (k+1)^2 + k^2 + 1$$

Tương đương với: $2^{k+1} \geq (k+1)^2 + k^2 + 1$. Để chứng minh ra được kết quả, ta cần:

$$k^2 + 1 > (k+1) + 1 \Leftrightarrow k^2 - k - 1 \geq 0$$

mà do $k \geq 5$ nên: $k - 1 \geq 4 \Rightarrow k(k-1) - 1 > 0$. Suy ra khẳng định đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số nguyên $n \geq 5$. Hay ta cần: $m \geq 5$.
b) Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n.
+) Khi $n = 5$, ta có: $n! = 120$ và $n^3 + n + 1 = 131$ nên với $n \geq 5$ ta thấy bất đẳng thức

không thỏa mãn. Khi $n = 6$, ta có: $n! = 720$ và $n^3 + n + 1 = 223$ nên ta thấy khẳng định đúng với $n = 6$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, trong đó k là 1 số tự nhiên. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$, nghĩa là:

$$(k+1)! \geq (k+1)^3 + (k+1) + 1$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$k! \geq k^3 + k + 1$$

Suy ra: $(k+1)! \geq (k+1)(k^3+k+1) = k^4 + k^3 + k^2 + k + 1$. Để chứng minh ra được kết quả, ta cần:

$$k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 \geq (k+1)^3 + (k+1) + 1$$
$$\Leftrightarrow k^4 - 2k^2 - 3k - 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (k^2-1)^2 - 3(k+1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (k+1)[(k+1)(k-1)^2 - 3] \geq 0$$

mà do $k \geq 6$ nên $k + 1 > 3, (k-1)^2 > 3$. Khi đó vế trái của bất đẳng thức trên luôn là 1 số không âm. Suy ra khẳng định đúng với $n = k + 1$.
Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$. Hay ta cần: $m \geq 6$. □

<u>Bài 6.</u> Cho $n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$$

Lời giải. Bằng quy nạp theo n, ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn kết quả trong đề bài.
+) Với mỗi số nguyên $n > 1$, ta có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{n}$$

Với $n = 2$, cả hai vế của bất đẳng thức đều bằng $\frac{5}{4}$, do đó khẳng định đúng với $n = 2$.
+) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, với số nguyên $k > 1$, ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Mà:

$$\frac{7}{4} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{7}{4} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{7}{4} - \frac{1}{k+1}$$

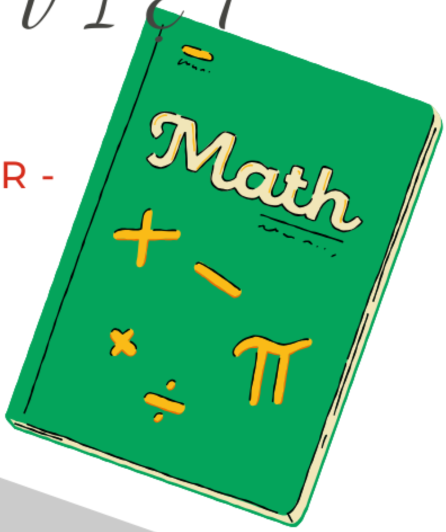
Suy ra:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{k+1}$$

hay khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định với mọi số nguyên $n > 1$. □

"CHÚC MỌI NGƯỜI HỌC TẬP VUI VẺ, YÊU VIỆT ĐỨC VÀ D4"

-CEDAR-



VIET DUC HIGH SCHOOL

-CLASS D4 (2024 - 2027)-