La puissance statistique

Mettre votre nom

21-10-2021

Qu'est-ce que la puissance statistique ?

Qu'est-ce que la puissance statistique ?

- Nous voulons séparer le signal du bruit.
- Puissance statistique = probabilité de rejeter l'hypothèse nulle, compte tenu de l'effet réel $\neq 0$.
- En d'autres termes, c'est la capacité à détecter un effet étant donné qu'il existe.
- Formellement : (1 - Type II) taux d'erreur.
- Ainsi, la puissance statistique $\in (0, 1)$.
- Seuils standard : 0.8 ou 0.9.

Point de départ pour l'analyse de puissance

- L'analyse de puissance est quelque chose que nous faisons *avant* de mener une étude pour aider à :
  - déterminer l'échantillon dont vous avez besoin pour détecter une taille d'effet donnée.
  - déterminer une différence détectable minimale compte tenu d'une taille d'échantillon définie.
  - décider si vous souhaitez mener une étude.
- Il est difficile d'apprendre d'un résultat nul sous-alimenté.
  - Y a-t-il eu un effet, mais nous n'avons pas pu le détecter ? N'y a-t-il eu aucun effet ? Impossible à dire.

La puissance statistique

- Disons qu'il y a vraiment un effet de traitement et que vous exécutez votre expérience plusieurs fois. À quelle fréquence obtiendrez-vous un résultat statistiquement significatif ?
- Quelques conjectures pour répondre à cette question.
  - Quelle est l'ampleur de l'effet de votre traitement ?
  - Combien d'unités sont traitées, mesurées ?
  - Quelle quantité de bruit y a-t-il dans la mesure de votre résultat ?

Approches pour calculer la puissance statistique

- Calcul analytique
- Simulation

Outils de calcul de puissance statistique

- Interactifs
  - Le calculateur de puissance de EGAP
  - rpsychologist
- Packages R
  - pwr
  - DeclareDesign, voir aussi https://declaredesign.org/

Calcul analytique de puissance

Calcul analytique de puissance

- Formule:

$$\text{Power} = \Phi\left(\frac{|\tau|\sqrt{N}}{2\sigma} - \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right)$$

- Composants:
  - ϕ : TODO standard normal CDF is monotonically increasing
  - τ : la taille de l'effet
  - N : la taille de l'échantillon
  - σ : l'écart type du résultat
  - α : le niveau de signification (typiquement 0.05)

Exemple : calcul analytique de puissance

```r
# Puissance statistique pour une étude avec 80 observations
# et un effet de taille de 0.25
library(pwr)
pwr.t.test(
  n = 40, d = 0.25, sig.level = 0.05,
  power = NULL, type = c(
    "two.sample",
    "one.sample", "paired"
  )
)
```

```
     Two-sample t test power calculation

              n = 40
              d = 0.25
      sig.level = 0.05
          power = 0.1972
    alternative = two.sided

NOTE: n is number in *each* group
```

Limites du calcul de puissance analytique

- Dérivé uniquement pour certaines statistiques de test (différence des moyennes)
- Fait des hypothèses spécifiques sur le processus de génération de données
- Incompatible avec des designs plus complexes

Calcul de puissance par simulation

Calcul de puissance par simulation

- Créer un ensemble de données et simuler le design de recherche.
- Des hypothèses sont nécessaires pour les études de simulation, mais vous faites les vôtres.
- Pour l'approche DeclareDesign, voir https://declaredesign.org/

Étapes

- Définir l'échantillon et la fonction des résultats potentiels.
- Définir la procédure d'assignation du traitement.
- Créer des données.
- Assigner un traitement, puis estimer l'effet.
- Répéter.

Exemples

- Randomisation complète
- Avec covariables
- Pour une randomisation par grappe

Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```
# install.packages("randomizr")
library(randomizr)
library(estimatr)

## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0 <- function(N) {
  rnorm(n = N)
}
repeat_experiment_and_test <- function(N, Y0, tau) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z <- complete_ra(N = N)
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z)
  pval <- estimator$p.value[2]
  return(pval)
}
```

Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```r
power_sim <- function(N, tau, sims) {
  Y0 <- make_Y0(N)
  pvals <- replicate(
    n = sims,
    repeat_experiment_and_test(N = N, Y0 = Y0, tau = tau)
  )
  pow <- sum(pvals < .05) / sims
  return(pow)
}

set.seed(12345)
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

```
[1] 0.15
```

```r
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

```
[1] 0.21
```

Exemple : Avec DeclareDesign I

```r
library(DeclareDesign)
library(tidyverse)
P0 <- declare_population(N, u0 = rnorm(N))
# declarer Y(Z=1) et Y(Z=0)
O0 <- declare_potential_outcomes(Y_Z_0 = 5 + u0, Y_Z_1 = Y_Z_0 + tau)
# assigner m unités au traitement
A0 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, m = round(N / 2)))
# l'estimande est la différence des moyennes entre Y(Z=1) et Y(Z=0)
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))
R0 <- declare_reveal(Y, Z)
design0_base <- P0 + A0 + O0 + R0

## Par exemple:
design0_N100_tau25 <- redesign(design0_base, N = 100, tau = .25)
dat0_N100_tau25 <- draw_data(design0_N100_tau25)
head(dat0_N100_tau25)
```

Exemple : Avec DeclareDesign II

```
   ID      u0 Z Y_Z_0 Y_Z_1     Y
1 001 -0.2060 0 4.794 5.044 4.794
2 002 -0.5875 0 4.413 4.663 4.413
3 003 -0.2908 1 4.709 4.959 4.959
4 004 -2.5649 0 2.435 2.685 2.435
5 005 -1.8967 0 3.103 3.353 3.103
6 006 -1.6401 1 3.360 3.610 3.610
```

```r
with(dat0_N100_tau25, mean(Y_Z_1 - Y_Z_0)) # effet moyen réel du traitement
```

```
[1] 0.25
```

```r
with(dat0_N100_tau25, mean(Y[Z == 1]) - mean(Y[Z == 0])) # estimatation
```

```
[1] 0.5569
```

```r
lm_robust(Y ~ Z, data = dat0_N100_tau25)$coef # estimatation
```

```
(Intercept)           Z
     4.8458      0.5569
```

Exemple : Avec DeclareDesign III

```r
E0 <- declare_estimator(Y ~ Z,
  model = lm_robust, label = "t test 1",
  inquiry = "ATE"
)
t_test <- function(data) {
  test <- with(data, t.test(x = Y[Z == 1], y = Y[Z == 0]))
  data.frame(statistic = test$statistic, p.value = test$p.value)
}
T0 <- declare_test(handler = label_test(t_test), label = "t test 2")
design0_plus_tests <- design0_base + E0 + T0

design0_N100_tau25_plus <- redesign(design0_plus_tests, N = 100, tau = .25)

## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de Y0.
## Ignorer le warning
names(design0_N100_tau25_plus)
```

```
[1] "P0"        "A0"        "O0"        "R0"        "t test 1" "t test 2"
```

Exemple : Avec DeclareDesign IV

```r
design0_N100_tau25_sims <- simulate_design(design0_N100_tau25_plus,
  sims = c(1, 100, 1, 1, 1, 1)
) # Répète seulement l'assignation aléatoire
```

```
Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the
```

```r
# design0_N100_tau25_sims a 200 lignes
# = 2 tests * 100 assignements aleatoires
# regardons les 6 premières lignes
head(design0_N100_tau25_sims)
```

```
                   design   N  tau sim_ID estimator term estimate std.error sta
1 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      1  t test 1    Z   0.1108    0.2150
2 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      1  t test 2 <NA>       NA        NA
3 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      2  t test 1    Z   0.2458    0.2154
4 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      2  t test 2 <NA>       NA        NA
5 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      3  t test 1    Z   0.5463    0.2133
6 design0_N100_tau25_plus 100 0.25      3  t test 2 <NA>       NA        NA
  step_1_draw step_2_draw
1           1           1
```

Exemple : Avec DeclareDesign V

```
2           1           1
3           1           2
4           1           2
5           1           3
6           1           3
```

```
# pour chaque estimateur,
# puissance = proportion de simulations avec p.value < 0.5
design0_N100_tau25_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(pow = mean(p.value < .05), .groups = "drop")
```

```
# A tibble: 2 x 2
  estimator    pow
  <chr>      <dbl>
1 t test 1     0.2
2 t test 2     0.2
```

Puissance statistique avec ajustement de covariable

Ajustement des covariables et puissance statistique

- L'ajustement de covariable peut améliorer la puissance statistique car il atténue la variation du résultat.
  - S'il est pronostique, l'ajustement de covariables peut réduire considérablement la variance. Une variance plus faible signifie une puissance plus élevée.
  - S'il est non pronostique, les gains de puissance sont minimes.
- Toutes analyses avec covariables doivent être faites pré-traitement. N'abandonnez pas d'observations pour cause de données manquantes.
  - Voir le module sur les menaces à la validité interne et les 10 choses à savoir sur l'ajustement de covariables.
- Observez le biais de Freedman tandis que nombre d'observations n diminue et que le nombre de covariables K augmente.

Découpage par bloc

- Découper par bloc : assignez de manière aléatoire un traitement au sein des blocs
  - Ajustement de covariables “ex-ante”
  - Une précision/efficacité plus élevée implique plus de puissance statistique
  - Réduire le “biais conditionnel” : association entre l’assignation du traitement et les résultats potentiels
  - L’avantage des blocs sur l’ajustement de covariables est plus clair dans les petites expériences

Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable I

```
## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0_cov <- function(N) {
  u0 <- rnorm(n = N)
  x <- rpois(n = N, lambda = 2)
  Y0 <- .5 * sd(u0) * x + u0
  return(data.frame(Y0 = Y0, x = x))
}
##  X prédit modérément Y0.
test_dat <- make_Y0_cov(100)
test_lm <- lm_robust(Y0 ~ x, data = test_dat)
summary(test_lm)
```

Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable II

```
Call:
lm_robust(formula = Y0 ~ x, data = test_dat)

Standard error type:  HC2

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value    Pr(>|t|) CI Lower CI Upper DF
(Intercept)     0.11     0.1880   0.585 0.559753653   -0.263    0.483 98
x               0.44     0.0814   5.413 0.000000441    0.279    0.602 98

Multiple R-squared:  0.231 ,    Adjusted R-squared:  0.223
F-statistic: 29.3 on 1 and 98 DF,  p-value: 0.000000441
```

Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable III

```
## maintenant mettre en place la simulation
repeat_experiment_and_test_cov <- function(N, tau, Y0, x) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z <- complete_ra(N = N)
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z + x, data = data.frame(Y0, Z, x))
  pval <- estimator$p.value[2]
  return(pval)
}
## créer les données une fois
## assigner de manière aléatoire le traitement sims fois
## rapporte quelle proportion renvoie une valeur p < 0,05
power_sim_cov <- function(N, tau, sims) {
  dat <- make_Y0_cov(N)
  pvals <- replicate(n = sims, repeat_experiment_and_test_cov(
    N = N,
    tau = tau, Y0 = dat$Y0, x = dat$x
  ))
  pow <- sum(pvals < .05) / sims
  return(pow)
}
```

```
ed(12345)
sim_cov(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

Puissance statistique pour la randomisation par grappe

Puissance statistique et design par grappe

- Voir le module sur la randomisation.
- Etant donné un N fixe, un design par grappe est légèrement moins puissant qu'un design sans grappe.
  - La différence est souvent substantielle.
- Il faut estimer correctement la variance :
  - Erreur standard de clustering
  - Inférence de randomisation
- Pour augmenter la puissance :
  - Mieux vaut augmenter le nombre de grappes que le nombre d'unités par grappe.
  - Dans quelle mesure les grappes réduisent la puissance statistique dépend de manière critique de la corrélation intra-grappe (intra-cluster correlation, ICC) (i.e. le rapport de la variance au sein des grappes à la variance totale).

Le design par grappe dans la recherche observationelle

- Souvent négligé, conduisant à (peut-être) une incertitude extrêmement sous-estimée.
  - Inférence fréquentiste basée sur le ratio $\hat{\beta}/\hat{se}$
  - Si nous sous-estimons $\hat{se}$, nous sommes beaucoup plus susceptibles de rejeter H_0. (Le taux d'erreur de type I est trop élevé.)
- De nombreux designs d'observation sont beaucoup moins puissants qu'on ne le pense.

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe I

```r
## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0_clus <- function(n_indivs, n_clus) {
  # n_indivs est le nombre de personnes par grappe
  # n_clus est le nombre de grappes
  clus_id <- gl(n_clus, n_indivs)
  N <- n_clus * n_indivs
  u0 <- fabricatr::draw_normal_icc(N = N, clusters = clus_id, ICC = .1)
  Y0 <- u0
  return(data.frame(Y0 = Y0, clus_id = clus_id))
}

test_dat <- make_Y0_clus(n_indivs = 10, n_clus = 100)
# confirmez que cela produit des données avec 10 dans chacun des 100 grappes
table(test_dat$clus_id)
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe II

```
  1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16  17  18  19  20
 10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10
 34  35  36  37  38  39  40  41  42  43  44  45  46  47  48  49  50  51  52  53
 10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10
 67  68  69  70  71  72  73  74  75  76  77  78  79  80  81  82  83  84  85  86
 10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10  10
100
 10
```

```
# confirme l'ICC
ICC::ICCbare(y = Y0, x = clus_id, data = test_dat)
```

```
[1] 0.09655
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe III

```
repeat_experiment_and_test_clus <- function(N, tau, Y0, clus_id) {
  Y1 <- Y0 + tau
  # ici, nous randomisons Z au niveau de la grappe
  Z <- cluster_ra(clusters = clus_id)
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z,
    clusters = clus_id,
    data = data.frame(Y0, Z, clus_id), se_type = "CR2"
  )
  pval <- estimator$p.value[2]
  return(pval)
}
power_sim_clus <- function(n_indivs, n_clus, tau, sims) {
  dat <- make_Y0_clus(n_indivs, n_clus)
  N <- n_indivs * n_clus
  # randomise le traitement sims fois
  pvals <- replicate(
    n = sims,
    repeat_experiment_and_test_clus(
      N = N, tau = tau,
      Y0 = dat$Y0, clus_id = dat$clus_id
    )
  )
        <- sum(pvals < .05) / sims
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) I

```r
P1 <- declare_population(
  N = n_clus * n_indivs,
  clusters = gl(n_clus, n_indivs),
  u0 = draw_normal_icc(N = N, clusters = clusters, ICC = .2)
)
O1 <- declare_potential_outcomes(Y_Z_0 = 5 + u0, Y_Z_1 = Y_Z_0 + tau)
A1 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, clusters = clusters))
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))
R1 <- declare_reveal(Y, Z)
design1_base <- P1 + A1 + O1 + R1 + estimand_ate

## Par exemple:
design1_test <- redesign(design1_base, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau = .25)
test_d1 <- draw_data(design1_test)
# confirmer que tous les individus d'un groupe
# ont la même assignation de traitement
with(test_d1, table(Z, clusters))
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) II

```
   clusters
Z     1   2   3   4   5   6   7   8   9  10
  0 100   0 100 100 100   0   0 100   0   0
  1   0 100   0   0   0 100 100   0 100 100
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) III

```
# les trois estimateurs diffèrent par se_type:
E1a <- declare_estimator(Y ~ Z,
  model = lm_robust, clusters = clusters,
  se_type = "CR2", label = "CR2 cluster t test",
  inquiry = "ATE"
)
E1b <- declare_estimator(Y ~ Z,
  model = lm_robust, clusters = clusters,
  se_type = "CR0", label = "CR0 cluster t test",
  inquiry = "ATE"
)
E1c <- declare_estimator(Y ~ Z,
  model = lm_robust, clusters = clusters,
  se_type = "stata", label = "stata RCSE t test",
  inquiry = "ATE"
)

design1_plus <- design1_base + E1a + E1b + E1c

design1_plus_tosim <- redesign(design1_plus, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau =
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) IV

```
## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de Y0.
## Ignorer le warning
## Nous voudrions plus de simulations en pratique.
set.seed(12355)
design1_sims <- simulate_design(design1_plus_tosim,
  sims = c(1, 1000, rep(1, length(design1_plus_tosim) - 2))
)
```

```
Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the
```

```
design1_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(
    pow = mean(p.value < .05),
    coverage = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),
    .groups = "drop"
  )
```

EVIDENCE IN GOVERNANCE AND POLITICS

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) V

```
# A tibble: 3 x 3
  estimator              pow coverage
  <chr>                <dbl>    <dbl>
1 CR0 cluster t test 0.155    0.911
2 CR2 cluster t test 0.105    0.936
3 stata RCSE t test  0.131    0.918
```

```
library(DesignLibrary)
## Cela peut être plus simple que ce qui précède :
d1 <- block_cluster_two_arm_designer(
  N_blocks = 1,
  N_clusters_in_block = 10,
  N_i_in_cluster = 100,
  sd_block = 0,
  sd_cluster = .3,
  ate = .25
)
d1_plus <- d1 + E1b + E1c
d1_sims <- simulate_design(d1_plus, sims = c(1, 1, 1000, 1, 1, 1, 1, 1))
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) VI

```
d1_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(
    pow = mean(p.value < .05),
    coverage = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),
    .groups = "drop"
  )
```

```
# A tibble: 3 x 3
  estimator              pow coverage
  <chr>                <dbl>    <dbl>
1 CR0 cluster t test 0.209    0.914
2 estimator          0.143    0.941
3 stata RCSE t test  0.194    0.925
```

Statique comparative

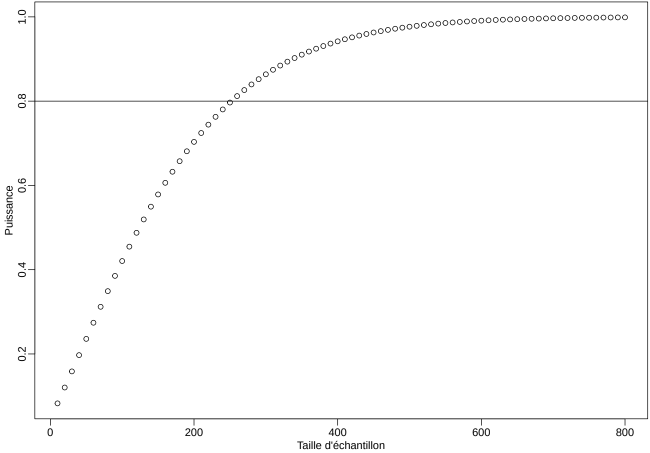
Statique comparative

- La puissance
  - augmente avec N
  - augmente avec $|\tau|$
  - diminue avec σ

Puissance par taille d'échantillon I

```r
some_ns <- seq(10, 800, by = 10)
pow_by_n <- sapply(some_ns, function(then) {
  pwr.t.test(n = then, d = 0.25, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_ns, pow_by_n,
  xlab = "Taille d'échantillon",
  ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)
```

Puissance par taille d'échantillon II



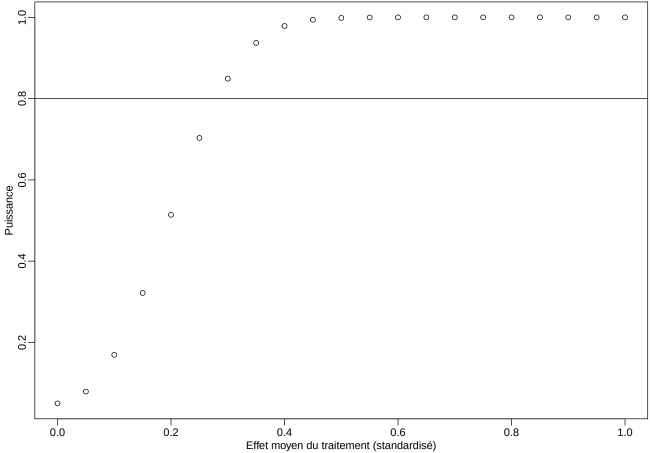
Puissance par taille d'échantillon III

```r
## Voir https://cran.r-project.org/web/packages/pwr/vignettes/pwr-vignette.html
## pour des courbes plus jolies
## ptest <-  pwr.t.test(n = NULL, d = 0.25, sig.level = 0.05, power = .8)
## plot(ptest)
```

Puissance par taille d'effet de traitement I

```r
some_taus <- seq(0, 1, by = .05)
pow_by_tau <- sapply(some_taus, function(thetau) {
  pwr.t.test(n = 200, d = thetau, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_taus, pow_by_tau,
  xlab = "Effet moyen du traitement (standardisé)",
  ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)
```

Puissance par taille d'effet de traitement II



La calculateur de puissance EGAP

- À essayer sur https://egap.shinyapps.io/power-app/
- Pour les designs de randomisation par grappe, essayez d'ajuster:
  - Nombre de grappes
  - Nombre d'unités par grappe
  - Corrélation intra-grappe
  - Effet de traitement

Commentaires

- Connaissez votre variable de résultat.
- Quels effets pouvez-vous réellement attendre de votre traitement ?
- Quelle est la plage de variation plausible de la variable de résultat ?
    - Un design avec un mouvement possible limité dans la variable de résultat peut ne pas être puissant.

Conclusion : comment améliorer votre puissance

1. Augmenter N
   - En cas de grappe, augmenter le nombre de grappes si possible
2. Renforcer le traitement
3. Améliorer la précision
   - Ajustement de covariable
   - Design par bloc
4. Meilleure mesure du résultat