

# La puissance statistique

Mettre votre nom

31-10-2021

Qu'est-ce que la puissance statistique ?

Calcul analytique de puissance

Calcul de puissance par simulation

Puissance statistique avec ajustement de covariable

Puissance statistique pour la randomisation par grappe

Statique comparative

Qu'est-ce que la puissance statistique ?

# Qu'est-ce que la puissance statistique ?

- ▶ Nous voulons séparer le signal du bruit.
- ▶ Puissance statistique = probabilité de rejeter l'hypothèse nulle, compte tenu d'un effet réel  $\neq 0$ .
- ▶ En d'autres termes, c'est la capacité à détecter un effet étant donné qu'il existe.
- ▶ Formellement :  $(1 - \text{Type II})$  taux d'erreur.
- ▶ Ainsi, la puissance statistique  $\in (0, 1)$ .
- ▶ Seuils standard : 0,8 ou 0,9.

# Point de départ pour l'analyse de puissance

- ▶ L'analyse de puissance est quelque chose que nous faisons *avant* de mener une étude pour aider à :
  - ▶ déterminer l'échantillon dont vous avez besoin pour détecter une taille d'effet donnée.
  - ▶ déterminer une différence détectable minimale compte tenu d'une taille d'échantillon définie.
  - ▶ décider si vous souhaitez mener une étude.
- ▶ Il est difficile d'apprendre d'un résultat nul sous-alimenté.
  - ▶ Y a-t-il eu un effet, mais nous n'avons pas pu le détecter ? N'y a-t-il eu aucun effet ? Impossible à dire.

# La puissance statistique

- ▶ Disons qu'il y a vraiment un effet de traitement et que vous exécutez votre expérience plusieurs fois. À quelle fréquence obtiendrez-vous un résultat statistiquement significatif ?
- ▶ Quelques conjectures pour répondre à cette question.
  - ▶ Quelle est l'ampleur de l'effet de votre traitement ?
  - ▶ Combien d'unités sont traitées, mesurées ?
  - ▶ Quelle quantité de bruit y a-t-il dans la mesure de votre résultat ?

# Approches pour calculer la puissance statistique

- ▶ Calcul analytique
- ▶ Simulation

# Outils de calcul de puissance statistique

- ▶ Interactifs
  - ▶ Le calculateur de puissance de EGAP
  - ▶ rpsychologist
- ▶ Packages R
  - ▶ pwr
  - ▶ DeclareDesign, voir aussi <https://declaredesign.org/>



## Calcul analytique de puissance

# Calcul analytique de puissance

- ▶ Formule:

$$\text{Puissance} = \Phi \left( \frac{|\tau| \sqrt{N}}{2\sigma} - \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

- ▶ Composants:

- ▶  $\phi$  : la fonction de répartition de la loi normale (strictement croissante)
- ▶  $\tau$  : la taille de l'effet
- ▶  $N$  : la taille de l'échantillon
- ▶  $\sigma$  : l'écart type du résultat
- ▶  $\alpha$  : le niveau de signification (typiquement 0,05)

# Exemple : calcul analytique de puissance

```
# Puissance statistique pour une étude avec 80 observations  
# et un effet de taille de 0,25  
library(pwr)  
pwr.t.test(  
  n = 40, d = 0.25, sig.level = 0.05,  
  power = NULL, type = c(  
    "two.sample",  
    "one.sample", "paired"  
  )  
)
```

Two-sample t test power calculation

```
      n = 40  
      d = 0.25  
sig.level = 0.05  
  power = 0.1972  
alternative = two.sided
```

NOTE: n is number in *each* group

# Limites du calcul analytique de puissance

- ▶ Dérivé uniquement pour certaines statistiques de test (différence des moyennes)
- ▶ Fait des hypothèses spécifiques sur le processus de génération de données
- ▶ Incompatible avec des designs plus complexes

## Calcul de puissance par simulation

# Calcul de puissance par simulation

- ▶ Créer un ensemble de données et simuler le design de recherche.
- ▶ Des hypothèses sont nécessaires pour les études de simulation, mais vous faites les vôtres.
- ▶ Pour l'approche DeclareDesign, voir <https://declaredesign.org/>

# Étapes

- ▶ Définir l'échantillon et la fonction des résultats potentiels.
- ▶ Définir la procédure d'assignation du traitement.
- ▶ Créer des données.
- ▶ Assigner un traitement, puis estimer l'effet.
- ▶ Répéter de nombreuses fois.

# Exemples

- ▶ Randomisation complète
- ▶ Avec covariables
- ▶ Pour une randomisation par grappe



## Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```
# install.packages("randomizr")
library(randomizr)
library(estimatr)

## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0 <- function(N) {
  rnorm(n = N)
}
repeat_experiment_and_test <- function(N, Y0, tau) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z <- complete_ra(N = N)
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z)
  pval <- estimator$p.value[2]
  return(pval)
}
```

## Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```
power_sim <- function(N, tau, sims) {  
  Y0 <- make_Y0(N)  
  pvals <- replicate(  
    n = sims,  
    repeat_experiment_and_test(N = N, Y0 = Y0, tau = tau)  
  )  
  pow <- sum(pvals < .05) / sims  
  return(pow)  
}
```

```
set.seed(12345)  
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

```
[1] 0.15
```

```
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

```
[1] 0.21
```

# Exemple : Avec DeclareDesign I

```
library(DeclareDesign)
library(tidyverse)
P0 <- declare_population(N, u0 = rnorm(N))
# déclarer Y(Z=1) et Y(Z=0)
O0 <- declare_potential_outcomes(Y_Z_0 = 5 + u0, Y_Z_1 = Y_Z_0 + tau)
# assigner m unités au traitement
A0 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, m = round(N / 2)))
# l'estimande est la différence moyenne entre Y(Z=1) et Y(Z=0)
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))
R0 <- declare_reveal(Y, Z)
design0_base <- P0 + A0 + O0 + R0

## Par exemple:
design0_N100_tau25 <- redesign(design0_base, N = 100, tau = .25)
dat0_N100_tau25 <- draw_data(design0_N100_tau25)
head(dat0_N100_tau25)
```

## Exemple : Avec DeclareDesign II

	ID	u0	Z	Y_Z_0	Y_Z_1	Y
1	001	-0.2060	0	4.794	5.044	4.794
2	002	-0.5875	0	4.413	4.663	4.413
3	003	-0.2908	1	4.709	4.959	4.959
4	004	-2.5649	0	2.435	2.685	2.435
5	005	-1.8967	0	3.103	3.353	3.103
6	006	-1.6401	1	3.360	3.610	3.610

```
with(dat0_N100_tau25, mean(Y_Z_1 - Y_Z_0)) # effet moyen réel du traitement
```

```
[1] 0.25
```

```
with(dat0_N100_tau25, mean(Y[Z == 1]) - mean(Y[Z == 0])) # estimation
```

```
[1] 0.5569
```

```
lm_robust(Y ~ Z, data = dat0_N100_tau25)$coef # estimation
```

(Intercept)	Z
4.8458	0.5569

## Exemple : Avec DeclareDesign III

```
E0 <- declare_estimator(Y ~ Z,  
  model = lm_robust, label = "test-t 1",  
  inquiry = "ATE"  
)  
t_test <- function(data) {  
  test <- with(data, t.test(x = Y[Z == 1], y = Y[Z == 0]))  
  data.frame(statistic = test$statistic, p.value = test$p.value)  
}  
T0 <- declare_test(handler = label_test(t_test), label = "test-t 2")  
design0_plus_tests <- design0_base + E0 + T0  
  
design0_N100_tau25_plus <- redesign(design0_plus_tests, N = 100, tau = .25)  
  
## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de Y0.  
## Ignorer le warning  
names(design0_N100_tau25_plus)
```

```
[1] "P0"      "A0"      "00"      "R0"      "test-t 1" "test-t 2"
```

## Exemple : Avec DeclareDesign IV

```
design0_N100_tau25_sims <- simulate_design(design0_N100_tau25_plus,  
  sims = c(1, 100, 1, 1, 1, 1)  
) # Répète seulement l'assignation aléatoire
```

Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the

```
# design0_N100_tau25_sims a 200 lignes  
# = 2 tests * 100 assignations aleatoires  
# regardons les 6 premières lignes  
head(design0_N100_tau25_sims)
```

	design	N	tau	sim_ID	estimator	term	estimate	std.error	sta
1	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	1	test-t 1	Z	0.1108	0.2150	
2	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	1	test-t 2	<NA>	NA	NA	
3	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	2	test-t 1	Z	0.2458	0.2154	
4	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	2	test-t 2	<NA>	NA	NA	
5	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	3	test-t 1	Z	0.5463	0.2133	
6	design0_N100_tau25_plus	100	0.25	3	test-t 2	<NA>	NA	NA	
	step_1_draw	step_2_draw							
1	1	1							

## Exemple : Avec DeclareDesign V

2	1	1
3	1	2
4	1	2
5	1	3
6	1	3

```
# pour chaque estimateur,  
# puissance = proportion de simulations avec une p-valeur < 0,05  
design0_N100_tau25_sims %>%  
  group_by(estimator) %>%  
  summarize(pow = mean(p.value < .05), .groups = "drop")
```

```
# A tibble: 2 x 2  
  estimator    pow  
  <chr>      <dbl>  
1 test-t 1    0.2  
2 test-t 2    0.2
```

## Puissance statistique avec ajustement de covariable



# Ajustement de covariable et puissance statistique

- ▶ L'ajustement de covariable peut améliorer la puissance statistique car il atténue la variation du résultat.
  - ▶ S'il est pronostique, l'ajustement de covariables peut réduire considérablement la variance. Une variance plus faible signifie une puissance plus élevée.
  - ▶ S'il est non pronostique, les gains de puissance sont minimes.
- ▶ Toutes les covariables doivent être pré-traitement.  
N'abandonnez pas d'observations pour cause de données manquantes.
  - ▶ Voir le module sur les menaces à la validité interne et les 10 choses à savoir sur l'ajustement de covariables.
- ▶ Observez le biais de Freedman tandis que le nombre d'observations  $n$  diminue et que le nombre de covariables  $K$  augmente.

# Découpage par bloc

- ▶ Découper par bloc : assignez de manière aléatoire un traitement au sein des blocs
  - ▶ Ajustement de covariables “ex-ante”
  - ▶ Une précision/efficacité plus élevée implique plus de puissance statistique
  - ▶ Réduire le “biais conditionnel” : association entre l’assignation du traitement et les résultats potentiels
  - ▶ L’avantage des blocs sur l’ajustement de covariables est plus clair dans les petites expériences

## Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable I

```
## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.  
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:  
make_Y0_cov <- function(N) {  
  u0 <- rnorm(n = N)  
  x <- rpois(n = N, lambda = 2)  
  Y0 <- .5 * sd(u0) * x + u0  
  return(data.frame(Y0 = Y0, x = x))  
}  
  
## X prédit modérément Y0.  
test_dat <- make_Y0_cov(100)  
test_lm <- lm_robust(Y0 ~ x, data = test_dat)  
summary(test_lm)
```

## Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable II

Call:

```
lm_robust(formula = Y0 ~ x, data = test_dat)
```

Standard error type: HC2

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	CI Lower	CI Upper	DF
(Intercept)	0.11	0.1880	0.585	0.559753653	-0.263	0.483	98
x	0.44	0.0814	5.413	0.000000441	0.279	0.602	98

Multiple R-squared: 0.231 , Adjusted R-squared: 0.223

F-statistic: 29.3 on 1 and 98 DF, p-value: 0.000000441

## Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable III

```
## maintenant mettre en place la simulation
repeat_experiment_and_test_cov <- function(N, tau, Y0, x) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z <- complete_ra(N = N)
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z + x, data = data.frame(Y0, Z, x))
  pval <- estimator$p.value[2]
  return(pval)
}

## créer les données une fois
## assigner de manière aléatoire le traitement sims fois
## rapporte quelle proportion renvoie une valeur  $p < 0,05$ 
power_sim_cov <- function(N, tau, sims) {
  dat <- make_Y0_cov(N)
  pvals <- replicate(n = sims, repeat_experiment_and_test_cov(
    N = N,
    tau = tau, Y0 = dat$Y0, x = dat$x
  ))
  pow <- sum(pvals < .05) / sims
  return(pow)
}
```

# Puissance statistique pour la randomisation par grappe

# Puissance statistique et design par grappe

- ▶ Voir le module sur la randomisation.
- ▶ Etant donné un  $N$  fixe, un design par grappe est légèrement moins puissant qu'un design sans grappe.
  - ▶ La différence est souvent substantielle.
- ▶ Il faut estimer correctement la variance :
  - ▶ Erreur standard robuste pour grappe (robust clustered standard error, RCSE)
  - ▶ Inférence de randomisation
- ▶ Pour augmenter la puissance :
  - ▶ Mieux vaut augmenter le nombre de grappes que le nombre d'unités par grappe.
  - ▶ Dans quelle mesure les grappes réduisent la puissance statistique dépend de manière critique de la corrélation intra-grappe (intra-cluster correlation, ICC) (i.e. le rapport de la variance au sein des grappes à la variance totale).

# Le design par grappe dans la recherche observationnelle

- ▶ Souvent négligé, conduisant à (peut-être) une incertitude extrêmement sous-estimée.
  - ▶ Inférence fréquentiste basée sur le ratio  $\hat{\beta}/\hat{se}$
  - ▶ Si nous sous-estimons  $\hat{se}$ , nous sommes beaucoup plus susceptibles de rejeter  $H_0$ . (Le taux d'erreur de type I est trop élevé.)
- ▶ De nombreux designs d'observation sont beaucoup moins puissants qu'on ne le pense.



## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe I

```
## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.  
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:  
make_Y0_clus <- function(n_indivs, n_clus) {  
  # n_indivs est le nombre de personnes par grappe  
  # n_clus est le nombre de grappes  
  clus_id <- gl(n_clus, n_indivs)  
  N <- n_clus * n_indivs  
  u0 <- fabricatr::draw_normal_icc(N = N, clusters = clus_id, ICC = .1)  
  Y0 <- u0  
  return(data.frame(Y0 = Y0, clus_id = clus_id))  
}  
  
test_dat <- make_Y0_clus(n_indivs = 10, n_clus = 100)  
# confirmez que cela produit des données avec 10 dans chacune des 100 grappes  
table(test_dat$clus_id)
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
100																			
10																			

```
# confirme l'ICC  
ICC::ICCbare(y = Y0, x = clus_id, data = test_dat)
```

```
[1] 0.09655
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe III

```
repeat_experiment_and_test_clus <- function(N, tau, Y0, clus_id) {  
  Y1 <- Y0 + tau  
  # ici, nous randomisons Z au niveau de la grappe  
  Z <- cluster_ra(clusters = clus_id)  
  Yobs <- Z * Y1 + (1 - Z) * Y0  
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z,  
    clusters = clus_id,  
    data = data.frame(Y0, Z, clus_id), se_type = "CR2"  
  )  
  pval <- estimator$p.value[2]  
  return(pval)  
}  
  
power_sim_clus <- function(n_indivs, n_clus, tau, sims) {  
  dat <- make_Y0_clus(n_indivs, n_clus)  
  N <- n_indivs * n_clus  
  # randomise le traitement sims fois  
  pvals <- replicate(  
    n = sims,  
    repeat_experiment_and_test_clus(  
      N = N, tau = tau,  
      Y0 = dat$Y0, clus_id = dat$clus_id  
    )  
  )  
  <- sum(pvals < .05) / sims
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) I

```
P1 <- declare_population(  
  N = n_clus * n_indivs,  
  clusters = gl(n_clus, n_indivs),  
  u0 = draw_normal_icc(N = N, clusters = clusters, ICC = .2)  
)  
O1 <- declare_potential_outcomes(Y_Z_0 = 5 + u0, Y_Z_1 = Y_Z_0 + tau)  
A1 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, clusters = clusters))  
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))  
R1 <- declare_reveal(Y, Z)  
design1_base <- P1 + A1 + O1 + R1 + estimand_ate  
  
## Par exemple:  
design1_test <- redesign(design1_base, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau = .25)  
test_d1 <- draw_data(design1_test)  
# confirmer que tous les individus d'un groupe  
# ont la même assignation de traitement  
with(test_d1, table(Z, clusters))
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) II

	clusters									
Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	0	100	100	100	0	0	100	0	0
1	0	100	0	0	0	100	100	0	100	100

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) III

```
# les trois estimateurs diffèrent par se_type:
```

```
E1a <- declare_estimator(Y ~ Z,  
  model = lm_robust, clusters = clusters,  
  se_type = "CR2", label = "test-t CR2 (robuste pour grappe)",  
  inquiry = "ATE"
```

```
)
```

```
E1b <- declare_estimator(Y ~ Z,  
  model = lm_robust, clusters = clusters,  
  se_type = "CRO", label = "test-t CRO (robuste pour grappe)",  
  inquiry = "ATE"
```

```
)
```

```
E1c <- declare_estimator(Y ~ Z,  
  model = lm_robust, clusters = clusters,  
  se_type = "stata", label = "test-t RCSE en stata",  
  inquiry = "ATE"
```

```
)
```

```
design1_plus <- design1_base + E1a + E1b + E1c
```

```
design1_plus_tosim <- redesign(design1_plus, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau =
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) IV

```
## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de Y0.  
## Ignorer le warning  
## Nous voudrions plus de simulations en pratique.  
set.seed(12355)  
design1_sims <- simulate_design(design1_plus_tosim,  
  sims = c(1, 1000, rep(1, length(design1_plus_tosim) - 2))  
)
```

Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the

```
design1_sims %>%  
  group_by(estimator) %>%  
  summarize(  
    puissance = mean(p.value < .05),  
    couverture = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),  
    .groups = "drop"  
  )
```

## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) V

```
# A tibble: 3 x 3
  estimator      puissance couverture
  <chr>          <dbl>      <dbl>
1 test-t CR0 (robuste pour grappe) 0.155      0.911
2 test-t CR2 (robuste pour grappe) 0.105      0.936
3 test-t RCSE en stata              0.131      0.918
```

```
library(DesignLibrary)
## Cela peut être plus simple que ce qui précède :
d1 <- block_cluster_two_arm_designer(
  N_blocks = 1,
  N_clusters_in_block = 10,
  N_i_in_cluster = 100,
  sd_block = 0,
  sd_cluster = .3,
  ate = .25
)
d1_plus <- d1 + E1b + E1c
d1_sims <- simulate_design(d1_plus, sims = c(1, 1, 1000, 1, 1, 1, 1, 1))
```



## Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation par grappe (DeclareDesign) VI

```
d1_sims %>%  
  group_by(estimator) %>%  
  summarize(  
    puissance = mean(p.value < .05),  
    couverture = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),  
    .groups = "drop"  
  )
```

```
# A tibble: 3 x 3  
  estimator      puissance couverture  
  <chr>          <dbl>      <dbl>  
1 CRO cluster t test 0.209      0.914  
2 estimator          0.143      0.941  
3 stata RCSE t test  0.194      0.925
```

## Statique comparative

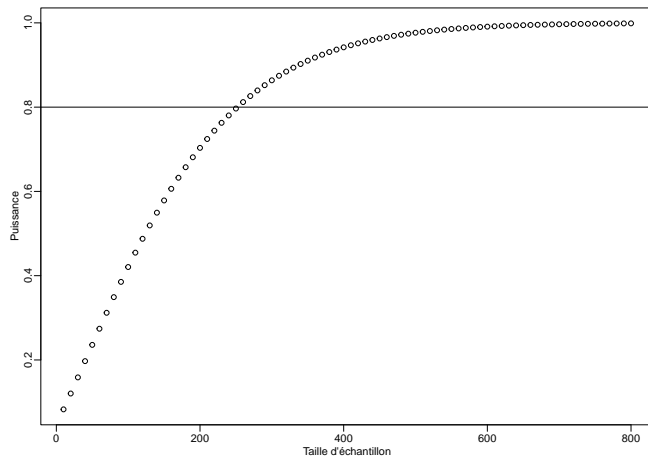
# Statique comparative

- ▶ La puissance
  - ▶ augmente avec  $N$
  - ▶ augmente avec  $|\tau|$
  - ▶ diminue avec  $\sigma$

# Puissance par taille d'échantillon I

```
some_ns <- seq(10, 800, by = 10)
pow_by_n <- sapply(some_ns, function(then) {
  pwr.t.test(n = then, d = 0.25, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_ns, pow_by_n,
     xlab = "Taille d'échantillon",
     ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)
```

# Puissance par taille d'échantillon II



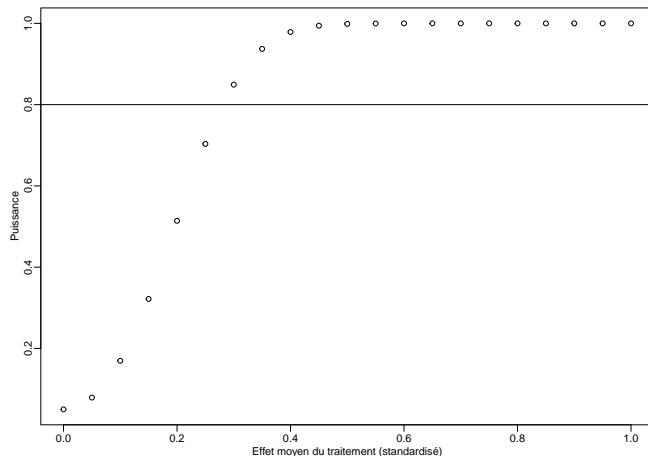
# Puissance par taille d'échantillon III

```
## Voir https://cran.r-project.org/web/packages/pwr/vignettes/pwr-vignette.html  
## pour des courbes plus jolies  
## ptest <- pwr.t.test(n = NULL, d = 0.25, sig.level = 0.05, power = .8)  
## plot(ptest)
```

# Puissance par taille d'effet de traitement I

```
some_taus <- seq(0, 1, by = .05)
pow_by_tau <- sapply(some_taus, function(theta) {
  pwr.t.test(n = 200, d = theta, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_taus, pow_by_tau,
     xlab = "Effet moyen du traitement (standardisé)",
     ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)
```

# Puissance par taille d'effet de traitement II





# La calculateur de puissance EGAP

- ▶ À essayer sur <https://egap.shinyapps.io/power-app/>
- ▶ Pour les designs de randomisation par grappe, essayez d'ajuster:
  - ▶ Nombre de grappes
  - ▶ Nombre d'unités par grappe
  - ▶ Corrélation intra-grappe
  - ▶ Effet de traitement

# Commentaires

- ▶ Connaissez votre variable de résultat.
- ▶ Quels effets pouvez-vous réellement attendre de votre traitement ?
- ▶ Quelle est la plage de variation plausible de la variable de résultat ?
  - ▶ Un design avec un mouvement possible limité pour la variable de résultat peut ne pas être puissant.

# Conclusion : comment améliorer votre puissance

1. Augmenter  $N$ 
  - ▶ En cas de grappe, augmenter le nombre de grappes si possible
2. Renforcer le traitement
3. Améliorer la précision
  - ▶ Ajustement de covariable
  - ▶ Design par bloc
4. Meilleure mesure du résultat