La puissance statistique

Mettre votre nom

19-10-2021



Qu'est-ce que la puissance statistique ?

Calcul analytique de puissance

Calcul de puissance par simulation

Puissance statistique avec ajustement de covariable

Puissance statistique pour la randomisation par grappe

Statique comparative



Qu'est-ce que la puissance statistique ?



Qu'est-ce que la puissance statistique ?

- Nous voulons séparer le signal du bruit.
- Puissance statistique = probabilité de rejeter l'hypothèse nulle, compte tenu de l'effet réel ≠ 0.
- En d'autres termes, c'est la capacité à détecter un effet étant donné qu'il existe.
- Formellement : (1 Type II) taux d'erreur.
- ▶ Ainsi, la puissance statistique \in (0, 1).
- ► Seuils standard : 0.8 ou 0.9.



Point de départ pour l'analyse de puissance

- L'analyse de puissance est quelque chose que nous faisons avant de mener une étude pour aider à :
 - déterminer l'échantillon dont vous avez besoin pour détecter une taille d'effet donnée.
 - déterminer une différence détectable minimale compte tenu d'une taille d'échantillon définie.
 - décider si vous souhaitez mener une étude.
- Il est difficile d'apprendre d'un résultat nul sous-alimenté.
 - Y a-t-il eu un effet, mais nous n'avons pas pu le détecter ? N'y a-t-il eu aucun effet ? Impossible à dire.



La puissance statistique

- ▶ Disons qu'il y a vraiment un effet de traitement et que vous exécutez votre expérience plusieurs fois. À quelle fréquence obtiendrez-vous un résultat statistiquement significatif ?
- Quelques conjectures pour répondre à cette question.
 - Quelle est l'ampleur de l'effet de votre traitement ?
 - Combien d'unités sont traitées, mesurées ?
 - Quelle quantité de bruit y a-t-il dans la mesure de votre résultat ?



Approches pour calculer la puissance statistique

- ► Calcul analytique
- Simulation



Outils de calcul de puissance statistique

- Interactifs
 - ► Le calculateur de puissance de EGAP
 - rpsychologist
- Packages R
 - pwr
 - DeclareDesign, voir aussi https://declaredesign.org/



Calcul analytique de puissance



Calcul analytique de puissance

► Formule:

Power =
$$\Phi\left(\frac{|\tau|\sqrt{N}}{2\sigma} - \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\right)$$

- Composants:
 - $lackbox \phi$: TODO standard normal CDF is monotonically increasing
 - ightharpoonup au : la taille de l'effet
 - N : la taille de l'échantillon
 - $ightharpoonup \sigma$: l'écart type du résultat
 - $ightharpoonup \alpha$: le niveau de signification (typiquement 0.05)

Exemple : calcul analytique de puissance

```
# Puissance statistique pour une étude avec 80 observations
# et un effet de taille de 0.25
library(pwr)
pwr.t.test(
  n = 40, d = 0.25, sig.level = 0.05,
  power = NULL, type = c(
    "two.sample",
    "one.sample", "paired"
)
)
```

```
{\tt Two-sample}\ {\tt t}\ {\tt test}\ {\tt power}\ {\tt calculation}
```

```
n = 40
d = 0.25
sig.level = 0.05
power = 0.1972
alternative = two.sided
```

NOTE: n is number in *each* group



Limites du calcul de puissance analytique

- Dérivé uniquement pour certaines statistiques de test (différence des moyennes)
- ► Fait des hypothèses spécifiques sur le processus de génération de données
- Incompatible avec des designs plus complexes



Calcul de puissance par simulation



Calcul de puissance par simulation

- Créer un ensemble de données et simuler le design de recherche.
- Des hypothèses sont nécessaires pour les études de simulation, mais vous faites les vôtres.
- Pour l'approche DeclareDesign, voir https://declaredesign.org/



Étapes

- ▶ Définir l'échantillon et la fonction des résultats potentiels.
- Définir la procédure d'assignation du traitement.
- Créer des données.
- Assigner un traitement, puis estimer l'effet.
- Répéter.



Exemples

- ► Randomisation complète
- Avec covariables
- ► Pour une randomisation par grappe



Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```
# install.packages("randomizr")
library(randomizr)
library(estimatr)
## YO est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make Y0 <- function(N) {</pre>
  rnorm(n = N)
repeat experiment and test <- function(N, YO, tau) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z \leftarrow complete_ra(N = N)
  Yobs \leftarrow Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z)</pre>
  pval <- estimator$p.value[2]</pre>
  return(pval)
```



Exemple : Calcul de puissance par simulation pour une randomisation complète

```
power_sim <- function(N, tau, sims) {</pre>
  YO \leftarrow make YO(N)
  pvals <- replicate(</pre>
    n = sims.
    repeat_experiment_and_test(N = N, YO = YO, tau = tau)
  pow <- sum(pvals < .05) / sims
  return(pow)
set.seed(12345)
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
[1] 0.15
power_sim(N = 80, tau = .25, sims = 100)
```

[1] 0.21



Exemple: Avec DeclareDesign I

```
library(DeclareDesign)
library(tidyverse)
PO <- declare_population(N, u0 = rnorm(N))
# declarer Y(Z=1) et Y(Z=0)
00 <- declare_potential_outcomes(Y_Z_0 = 5 + u0, Y_Z_1 = Y_Z_0 + tau)
# assigner m unités au traitement
A0 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, m = round(N / 2)))
# l'estimande est la différence des moyennes entre Y(Z=1) et Y(Z=0)
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))</pre>
R0 <- declare_reveal(Y, Z)</pre>
design0 base <- P0 + A0 + O0 + R0
## Par exemple:
design0_N100_tau25 <- redesign(design0_base, N = 100, tau = .25)</pre>
dat0_N100_tau25 <- draw_data(design0_N100_tau25)</pre>
head(dat0 N100 tau25)
```



Exemple: Avec DeclareDesign II

```
u0 Z Y Z 0 Y Z 1
1 001 -0.2060 0 4.794 5.044 4.794
2 002 -0.5875 0 4.413 4.663 4.413
3 003 -0.2908 1 4.709 4.959 4.959
4 004 -2.5649 0 2.435 2.685 2.435
5 005 -1.8967 0 3.103 3.353 3.103
6 006 -1.6401 1 3.360 3.610 3.610
with(dat0_N100_tau25, mean(Y_Z_1 - Y_Z_0)) # effet moyen réel du traitement
[1] 0.25
with(dat0 N100 tau25, mean(Y[Z == 1]) - mean(Y[Z == 0])) # estimatation
[1] 0.5569
lm_robust(Y ~ Z, data = dat0_N100_tau25)$coef # estimatation
(Intercept)
    4.8458 0.5569
```



Exemple: Avec DeclareDesign III

```
EO <- declare estimator(Y ~ Z,
  model = lm robust, label = "t test 1".
  inquiry = "ATE"
t_test <- function(data) {</pre>
  test \leftarrow with(data, t.test(x = Y[Z == 1], y = Y[Z == 0]))
  data.frame(statistic = test$statistic, p.value = test$p.value)
TO <- declare test(handler = label test(t test), label = "t test 2")
design0_plus_tests <- design0_base + E0 + T0</pre>
design0 N100 tau25 plus <- redesign(design0 plus tests, N = 100, tau = .25)
## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de YO.
## Ignorer le warning
names(design0_N100_tau25_plus)
```

[1] "PO" "AO" "OO" "RO" "t test 1" "t test 2"



Exemple: Avec DeclareDesign IV

```
design0_N100_tau25_sims <- simulate_design(design0_N100_tau25_plus,
    sims = c(1, 100, 1, 1, 1, 1)
) # Répète seulement l'assignation aléatoire</pre>
```

Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the

```
# design0_N100_tau25_sims a 200 lignes
# = 2 tests * 100 assignements aleatoires
# regardons les 6 premières lignes
head(design0_N100_tau25_sims)
```

```
design N tau sim_ID estimator term estimate std.error sta
1 design0 N100 tau25 plus 100 0.25
                                   1 t test 1 Z
                                                    0.1108
                                                             0.2150
2 design0_N100_tau25_plus 100 0.25
                                                                 NΑ
                                   1 t test 2 <NA>
                                                        NΑ
3 design0_N100_tau25_plus 100 0.25
                                   2 t test 1 Z 0.2458
                                                             0.2154
4 design0_N100_tau25_plus 100 0.25
                                   2 t test 2 <NA>
                                                        NA
                                                                 NA
5 design0_N100_tau25_plus 100 0.25
                                   3 t test 1 Z
                                                    0.5463
                                                             0.2133
6 design0_N100_tau25_plus 100 0.25
                                   3 t test 2 <NA>
                                                        NA
                                                                 NA
 step_1_draw step_2_draw
```



Exemple: Avec DeclareDesign V

```
2 1 1 1 3 1 2 4 1 2 5 1 3 6 1 3
```

```
# pour chaque estimateur,
# puissance = proportion de simulations avec p.value < 0.5
design0_N100_tau25_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(pow = mean(p.value < .05), .groups = "drop")</pre>
```



Puissance statistique avec ajustement de covariable



Ajustement des covariables et puissance statistique

- L'ajustement de covariable peut améliorer la puissance statistique car il atténue la variation du résultat.
 - S'il est pronostique, l'ajustement de covariables peut réduire considérablement la variance. Une variance plus faible signifie une puissance plus élevée.
 - ► S'il est non pronostique, les gains de puissance sont minimes.
- Toutes analyses avec covariables doivent être faites pré-traitement. N'abandonnez pas d'observations pour cause de données manquantes.
 - ➤ Voir le module sur les menaces à la validité interne et les 10 choses à savoir sur l'ajustement de covariables.
- Observez le biais de Freedman tandis que nombre d'observations n diminue et que le nombre de covariables K augmente.



Découpage par bloc

- Découper par bloc : assignez de manière aléatoire un traitement au sein des blocs
 - ► Ajustement de covariables "ex-ante"
 - Une précision/efficacité plus élevée implique plus de puissance statistique
 - ▶ Réduire le "biais conditionnel" : association entre l'assignation du traitement et les résultats potentiels
 - L'avantage des blocs sur l'ajustement de covariables est plus clair dans les petites expériences



Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable I

```
## Y0 est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0_cov <- function(N) {
  u0 <- rnorm(n = N)
  x <- rpois(n = N, lambda = 2)
  Y0 <- .5 * sd(u0) * x + u0
  return(data.frame(Y0 = Y0, x = x))
}
## X prédit modérément Y0.
test_dat <- make_Y0_cov(100)
test_lm <- lm_robust(Y0 ~ x, data = test_dat)
summary(test_lm)</pre>
```



Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable II



Exemple : Calcul de puissance par simulation avec une covariable III

```
## maintenant mettre en place la simulation
repeat_experiment_and_test_cov <- function(N, tau, YO, x) {
  Y1 <- Y0 + tau
  Z \leftarrow complete_ra(N = N)
  Yobs \leftarrow Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z + x, data = data.frame(Y0, Z, x))</pre>
  pval <- estimator$p.value[2]</pre>
  return(pval)
## créer les données une fois
## assigner de manière aléatoire le traitement sims fois
## rapporte quelle proportion renvoie une valeur p < 0,05
power_sim_cov <- function(N, tau, sims) {</pre>
  dat <- make Y0 cov(N)
  pvals <- replicate(n = sims, repeat_experiment_and_test_cov(</pre>
    N = N
   tau = tau, YO = dat $YO, x = dat $x
  ))
  pow <- sum(pvals < .05) / sims
  return(pow)
```

29/51

Puissance statistique pour la randomisation par grappe



Puissance statistique et design par cluster

- Voir le module sur la randomisation.
- ► Etant donné un *N* fixe, un design par cluster est légèrement moins puissant qu'un design sans cluster.
 - La différence est souvent substantielle.
- ▶ Il faut estimer correctement la variance :
 - ► Erreur standard de clustering
 - Inférence de randomisation
- Pour augmenter la puissance :
 - Mieux vaut augmenter le nombre de clusters que le nombre d'unités par cluster.
 - ▶ Dans quelle mesure les clusters réduisent la puissance statistique dépend de manière critique de la corrélation intra-cluster (i.e. le rapport de la variance au sein des clusters à la variance totale).



Le design par grappe dans la recherche observationelle

- Souvent négligé, conduisant à (peut-être) une incertitude extrêmement sous-estimée.
 - ▶ Inférence fréquentiste basée sur le ratio $\hat{\beta}/\hat{se}$
 - Si nous sous-estimons sê, nous sommes beaucoup plus susceptibles de rejeter H₀. (Le taux d'erreur de type I est trop élevé.)
- De nombreux designs d'observation sont beaucoup moins puissants qu'on ne le pense.



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters I

```
## YO est fixe dans la plupart des expériences sur le terrain.
## Nous ne le générons donc qu'une seule fois:
make_Y0_clus <- function(n_indivs, n_clus) {</pre>
  # n indivs est le nombre de personnes par grappe
  # n clus est le nombre de grappes
  clus id <- gl(n clus, n indivs)
  N <- n_clus * n_indivs
  u0 <- fabricatr::draw_normal_icc(N = N, clusters = clus_id, ICC = .1)</pre>
  YO <- 110
  return(data.frame(Y0 = Y0, clus_id = clus_id))
test dat <- make YO clus(n indivs = 10, n clus = 100)
# confirmez que cela produit des données avec 10 dans chacun des 100 clusters
table(test dat$clus id)
```



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters II

```
10
                                              11
                                                   12
                                                        13
                                                                 15
                                                                                        20
                                                            14
                                                                     16
 10
          10
              10
                  10
                       10
                            10
                                 10
                                    10
                                          10
                                              10
                                                   10
                                                        10
                                                            10
                                                                 10
                                                                     10
                                                                          10
                                                                               10
                                                                                   10
                                                                                        10
 34
     35
          36
              37
                   38
                       39
                            40
                                41
                                     42
                                          43
                                              44
                                                   45
                                                       46
                                                            47
                                                                 48
                                                                     49
                                                                          50
                                                                              51
                                                                                   52
                                                                                        53
 10
     10
          10
              10
                  10
                       10
                            10
                                 10
                                    10
                                          10
                                              10
                                                   10
                                                       10
                                                            10
                                                                 10
                                                                     10
                                                                          10
                                                                               10
                                                                                   10
                                                                                        10
 67
     68
              70
                   71
                       72
                            73
                                74
                                     75
                                          76
                                              77
                                                   78
                                                       79
                                                            80
                                                                 81
                                                                     82
                                                                          83
                                                                              84
                                                                                   85
                                                                                        86
          69
 10
     10
          10
              10
                   10
                       10
                            10
                                 10
                                     10
                                          10
                                              10
                                                   10
                                                        10
                                                            10
                                                                 10
                                                                     10
                                                                          10
                                                                               10
                                                                                   10
                                                                                        10
100
 10
```

```
# confirme l'ICC
ICC::ICCbare(y = Y0, x = clus_id, data = test_dat)
```

[1] 0.09655



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters III

```
repeat_experiment_and_test_clus <- function(N, tau, YO, clus_id) {
  Y1 <- Y0 + tau
  # ici, nous randomisons Z au niveau du cluster
  Z <- cluster ra(clusters = clus id)</pre>
  Yobs \leftarrow Z * Y1 + (1 - Z) * Y0
  estimator <- lm_robust(Yobs ~ Z,
    clusters = clus id.
    data = data.frame(Y0, Z, clus id), se type = "CR2"
  pval <- estimator$p.value[2]</pre>
  return(pval)
power_sim_clus <- function(n_indivs, n_clus, tau, sims) {</pre>
  dat <- make_Y0_clus(n_indivs, n_clus)</pre>
  N <- n indivs * n clus
  # randomise le traitement sims fois
  pvals <- replicate(</pre>
    n = sims,
    repeat experiment and test clus(
      N = N, tau = tau,
      YO = dat$YO, clus id = dat$clus id
```

Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) I

```
P1 <- declare_population(
 N = n_{clus} * n_{indivs}
  clusters = gl(n_clus, n_indivs),
  u0 = draw_normal_icc(N = N, clusters = clusters, ICC = .2)
01 <- declare potential outcomes(Y Z 0 = 5 + u0, Y Z 1 = Y Z 0 + tau)
A1 <- declare_assignment(Z = conduct_ra(N = N, clusters = clusters))
estimand_ate <- declare_inquiry(ATE = mean(Y_Z_1 - Y_Z_0))</pre>
R1 <- declare reveal(Y, Z)
design1_base <- P1 + A1 + O1 + R1 + estimand_ate</pre>
## Par exemple:
design1_test <- redesign(design1_base, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau = .25)
test d1 <- draw data(design1 test)
# confirmer que tous les individus d'un groupe
# ont la même assignation de traitement
with(test_d1, table(Z, clusters))
```



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) II



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) III

```
# les trois estimateurs diffèrent par se type:
E1a <- declare estimator(Y ~ Z.
 model = lm robust, clusters = clusters,
 se_type = "CR2", label = "CR2 cluster t test",
 inquiry = "ATE"
E1b <- declare_estimator(Y ~ Z,
 model = lm robust, clusters = clusters,
 se_type = "CRO", label = "CRO cluster t test",
 inquiry = "ATE"
E1c <- declare estimator(Y ~ Z.
 model = lm robust, clusters = clusters,
 se_type = "stata", label = "stata RCSE t test",
 inquiry = "ATE"
design1_plus <- design1_base + E1a + E1b + E1c
design1_plus_tosim <- redesign(design1_plus, n_clus = 10, n_indivs = 100, tau =
```



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) IV

```
## Répète seulement l'assignation aléatoire, pas la création de YO.
## Ignorer le warning
## Nous voudrions plus de simulations en pratique.
set.seed(12355)
design1_sims <- simulate_design(design1_plus_tosim,
    sims = c(1, 1000, rep(1, length(design1_plus_tosim) - 2))
)</pre>
```

Warning: We recommend you choose a higher number of simulations than 1 for the

```
design1_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(
   pow = mean(p.value < .05),
   coverage = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),
   .groups = "drop"
)
```



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) V

```
# A tibble: 3 x 3
  estimator
                     pow coverage
                     <dbl>
                              <dbl>
  <chr>
1 CRO cluster t test 0.155 0.911
2 CR2 cluster t test 0.105 0.936
3 stata RCSE t test 0.131 0.918
library(DesignLibrary)
## Cela peut être plus simple que ce qui précède :
d1 <- block_cluster_two_arm_designer(</pre>
 N blocks = 1.
 N clusters in block = 10,
 N i in cluster = 100.
 sd block = 0,
  sd cluster = .3,
  ate = .25
d1_plus <- d1 + E1b + E1c
d1_{sims} \leftarrow simulate_{design}(d1_{plus}, sims = c(1, 1, 1000, 1, 1, 1, 1, 1))
```



Exemple : Puissance statistique basée sur la simulation pour la randomisation des clusters (DeclareDesign) VI

```
d1_sims %>%
  group_by(estimator) %>%
  summarize(
   pow = mean(p.value < .05),
   coverage = mean(estimand <= conf.high & estimand >= conf.low),
   .groups = "drop"
)
```



Statique comparative



Statique comparative

- ► La puissance
 - ► augmente avec *N*
 - $\qquad \qquad \textbf{augmente avec} \ |\tau|$
 - ightharpoonup diminue avec σ

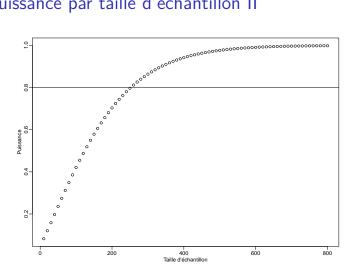


Puissance par taille d'échantillon I

```
some_ns <- seq(10, 800, by = 10)
pow_by_n <- sapply(some_ns, function(then) {
   pwr.t.test(n = then, d = 0.25, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_ns, pow_by_n,
   xlab = "Taille d'échantillon",
   ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)</pre>
```



Puissance par taille d'échantillon II





Puissance par taille d'échantillon III

```
## Voir https://cran.r-project.org/web/packages/pwr/vignettes/pwr-vignette.html
## pour des courbes plus jolies
## ptest <- pwr.t.test(n = NULL, d = 0.25, sig.level = 0.05, power = .8)
## plot(ptest)</pre>
```

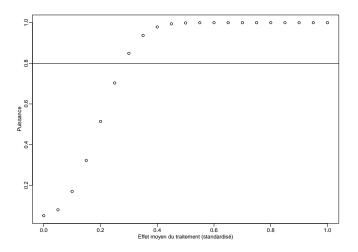


Puissance par taille d'effet de traitement I

```
some_taus <- seq(0, 1, by = .05)
pow_by_tau <- sapply(some_taus, function(thetau) {
   pwr.t.test(n = 200, d = thetau, sig.level = 0.05)$power
})
plot(some_taus, pow_by_tau,
   xlab = "Effet moyen du traitement (standardisé)",
   ylab = "Puissance"
)
abline(h = .8)</pre>
```



Puissance par taille d'effet de traitement II





La calculateur de puissance EGAP

- ▶ À essayer sur https://egap.shinyapps.io/power-app/
- Pour les designs de randomisation par grappe, essayez d'ajuster:
 - Nombre de clusters
 - Nombre d'unités par cluster
 - Corrélation intra-cluster
 - Effet de traitement



Commentaires

- Connaissez votre variable de résultat.
- Quels effets pouvez-vous réellement attendre de votre traitement ?
- Quelle est la plage de variation plausible de la variable de résultat ?
 - Un design avec un mouvement possible limité dans la variable de résultat peut ne pas être puissant.



Conclusion : comment améliorer votre puissance

- 1. Augmenter N
 - ► En cas de cluster, augmenter le nombre de clusters si possible
- 2. Renforcer le traitement
- 3. Améliorer la précision
 - ► Ajustement de covariable
 - Design par bloc
- 4. Meilleure mesure du résultat

