

Devoir 1 - La récursivité

Cet exercice porte sur la programmation en général et la récursivité en particulier.

On considère un tableau de nombre de n lignes et p colonnes.

Les lignes sont numérotées de 0 à $n - 1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $p - 1$. La case en haut à gauche est repérée par $(0,0)$ et la case en bas à droite par $(n-1,p-1)$.

On appelle **chemin** une succession de cases allant de la case $(0,0)$ à la case $(n-1,p-1)$, en n'autorisant que des déplacements case par case : soit vers la droite, soit vers le bas.

On appelle **somme** d'un chemin la somme des entiers situés sur ce chemin.

Par exemple, pour le tableau **T** suivant :

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

- Un chemin est $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$ (en gras sur le tableau).
- La somme du chemin précédent est 14.
- $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$ n'est pas un chemin.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case $(0,0)$ à la case $(n-1,p-1)$

QUESTION 1

On considère tous les chemins allant de la case $(0,0)$ à la case $(2,3)$ du tableau **T** donné en exemple.

1. Un tel chemin comprend nécessairement 3 déplacement vers la droite. Combien de déplacements vers le bas comprend-il ?
2. La longueur d'un chemin est égal au nombres de cases de ce chemin. Justifier que tous les chemins allant de $(0,0)$ à $(2,3)$ ont une longueur égale à 6.

QUESTION 2

En listant tous les chemins possibles allant de $(0,0)$ à $(2,3)$ du tableau **T**, déterminer un chemin qui permet d'obtenir la somme maximale et la valeur de cette somme.

QUESTION 3

On veut créer le tableau **T'** où chaque élément $T'[i][j]$ est la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de $(0,0)$ à (i,j) .

1. Recomper et compléter sur votre copie le tableau **T'** donnée ci-dessous associé au tableau.

T :

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

T' :

4	5	6	?
6	?	8	10
9	10	?	16

2. Justifier que si j est différent de 0 , alors $T'[0][j] = T[0][j] + T'[0][j-1]$.

QUESTION 4

Justifier que si i et j sont différents de 0 , alors : $T'[i][j] = T[i][j] + \max(T'[i-1][j], T'[i][j-1])$.

QUESTION 5

On veut créer la fonction récursive `somme_max` ayant pour paramètres un tableau T , un entier i et un entier j . Cette fonction renvoie la somme maximale pour tous les chemin possibles allant de la case $(0,0)$ à la case (i,j) .

1. Quel est la cas de base, à savoir le cas qui est traité directement sans faire appel à la fonction `somme_max` ? Que renvoie-t-on dans ce cas ?
2. À l'aide de la question précédente, écrire en Python la fonction récursive `somme_max`.
3. Quel appel de fonction doit-on faire pour résoudre la problème initial ?