Numerische Mathematik und Numerische Lineare Algebra in den Datenwissenschaften

Prof. Dr. rer. nat. Jens Starke
Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

Diese Mitschrift basiert auf der gleichnamigen Vorlesung *Numerische Mathematik und Numerische Lineare Algebra in den Datenwissenschaften*, gehalten im Sommersemester 2025 an der Universität Rostock.

Literaturempfehlungen:

1. Martin Hanku-Bourgeois, Grundlagen der Numerik und des wissenschaftlichen Rechnens, Mathematische Leitfäden, Vieweg + Teubner Verlag Wiesbaden, 2009, DOI: 10.1007/978-3-8348-9309-3
2. Eberhard Zeidler, Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendung, Springer Spektrum Wiesbaden, 2012, DOI: 10.1007/978-3-658-00289-3_3

1 Die schnelle Fourier-Transformation

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns mit der schnellen Fourier-Transformation („FFT - fast Fourier transform) als zentrales Werkzeug der Signalverarbeitung und Bildkompression. Um die Idee hinter dem FFT-Algorithmus zu verstehen beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung zu Fourier-Reihen.

1.1 Fourier-Reihen

Wir betrachten f eine 2π-periodische Funktion (d.h. $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) mit dem Ziel eine Annäherung durch Linearkombinationen 2π-periodischen Funktionen $\{\cos(kx)\}_{k=0}^{n}$ und $\{\sin(kx)\}_{k=1}^{n}$ zu finden:

$$g_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big)$$

Wir suchen eine Approximation im Sinne der L_2 Norm, d.h. wir minimieren den Ausdruck

$$\|g_n(x) - f(x)\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} (g_n(x) - f(x))^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

Satz 1.1 (Fourier-Koeffizienten). Für trigonometrisches Polynom, d.h. eine Funktion der Form

$$g_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big)$$

gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \ldots, n \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Beweis. Durch Verwendung der Orthogonalitätsbedingungen der trigonometrischen Funktionen ergibt sich für $l = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\underbrace{\cos(lx)}_{1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)\right)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}a_0 \cdot \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{1}{\pi}b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,\mathrm{d}x}_{0}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}a_0 \cdot 2\pi = a_0 \end{aligned}$$

und für $1 \leq l \leq n$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\cos(lx)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(lx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x}_{\pi \text{ wenn } l=k,\text{ sonst } 0} + \frac{1}{\pi}b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(kx)\cos(lx)\,\mathrm{d}x}_{0}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\pi}a_l \cdot \pi = a_l
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_n(x)\sin(lx)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}a_0 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(lx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}a_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{1}{\pi}b_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,\mathrm{d}x}_{\pi \text{ wenn } l=k,\text{ sonst } 0}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\pi}b_l \cdot \pi = b_l
\end{aligned}
$$

□

In Unserem Fall, wo wir f durch g_n annähern wollen verwenden wir daher $f(x)$ bei der Bestimmung unserer Koeffizienten.

Im Allgemeinen ergeben sich für die Fourier-Koeffizienten $\{a_k\}_{k=0}^n$ und $\{b_k\}_{k=1}^n$ keine geschlossenen Formeln, d.h. wir sind auf numerische Integration angewiesen um diese zu bestimmen.

Verenden wir die Trapezregel als Quadraturformel um diese numerische Integration durchzuführen:

Definition 1.2 (Trapezregel). Ein Verfahren zur numerischen Integration einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird durch die Trapezregel beschrieben. Sie beruht auf der Idee das Intervall $[a,b]$ in kleinere Intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ für $j = 0,\dots,N-1$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ aufzuteilen und die Funktion auf jedem dieser Intervalle als linear anzunehmen, dies ermöglicht folgende Annäherung

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx (x_{j+1} - x_j) \cdot \frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{2}$$

Insbesondere für den Fall von äquidistant gewählten Stützstellen mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$ ergibt sich

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} f(a + h \cdot j) + f(b)\right)$$

Verwenden wir diese Trapezregel mit $x_j = \frac{2\pi}{N} \cdot j$ um unsere Fourier-Koeffizienten anzunähern ergibt sich die diskrete Fourier-Transformation (DFT):

$$
\begin{aligned}
a_k &\approx \frac{1}{N}\left(f(x_0)\cdot\cos(kx_0) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)\cdot\cos(kx_j) + f(x_N)\cdot\cos(kx_N)\right) \\
b_k &\approx \frac{1}{N}\left(f(x_0)\cdot\sin(kx_0) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(x_j)\cdot\sin(kx_j) + f(x_N)\cdot\sin(kx_N)\right)
\end{aligned}
$$

Mit Berücksichtigung der 2π-Periodizität von f ergeben sich für a_k und b_k die Näherungswerte

$$a_k^* := \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\cdot\cos(kx_j), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k^* := \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\cdot\cos(kx_j), \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Intuition Bilder

Lemma 1.3. Für die diskreten Stützstellen $x_j = \frac{2\pi}{N}\cdot j$ mit $1 \leq N$ gilt

$$\sum_{j=1}^{N}\cos(kx_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{k}{N}\notin\mathbb{Z} \\ N, & \text{falls } \frac{k}{N}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\sum_{j=1}^{N}\sin(kx_j) = 0 \text{ für alle } k\in\mathbb{Z}$$

Beweis.
Wir betrachten die komplexe Kombination beider Ausdrücke und erhalten

$$S_N := \sum_{j=1}^{N}\cos(kx_j) + i\sin(kx_j) = \sum_{j=1}^{N} e^{ikx_j} = \sum_{j=1}^{N} e^{ik\cdot jh}$$

Dies ist eine endliche geometrische Reihe mit komplexem $q := e^{ikh} = e^{2\pi ik/N}$

Ist $\frac{k}{N}\notin\mathbb{Z}$, dann ist $q\neq 1$, und die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe liefert

$$S_N = e^{ikh}\frac{e^{ikhN}-1}{e^{ikh}-1} = e^{ikh}\cdot\frac{e^{2\pi ki}-1}{e^{ikh}-1} = 0, \text{wenn } \frac{k}{N}\notin\mathbb{Z}$$

Für $\frac{k}{N}\in\mathbb{Z}$ folgt wegen $q = 1$, dass $S = N$ ist.

Die Unabhängigkeit von Real- und Imaginärteil schließt den Beweis. □

Satz 1.4. Die trigonometrischen Funktionen erfüllen für die äquidistanten Stützstellen x_j die diskreten Orthogonalitätsrelationen:

$$\sum_{j=1}^{N}\cos(kx_j)\cos(lx_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{k+l}{N}\notin\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\notin\mathbb{Z} \\ N & \text{falls } \frac{k+l}{N}\in\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\in\mathbb{Z} \\ \frac{N}{2} & \text{falls } \frac{k+l}{N}\in\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\notin\mathbb{Z} \\ \frac{N}{2} & \text{falls } \frac{k+l}{N}\notin\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

und

$$\sum_{j=1}^{N}\sin(kx_j)\sin(lx_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{k+l}{N}\notin\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\notin\mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } \frac{k+l}{N}\in\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\in\mathbb{Z} \\ -\frac{N}{2} & \text{falls } \frac{k+l}{N}\in\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\notin\mathbb{Z} \\ \frac{N}{2} & \text{falls } \frac{k+l}{N}\notin\mathbb{Z} \text{ und } \frac{k-l}{N}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

und

$$\sum_{j=1}^{N}\cos(kx_j)\sin(lx_j) = 0 \quad \text{für all } k, l\in\mathbb{N}$$

Beweis.
Zur Überprüfung der Orthogonalitätsrelationen werden die trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned}\cos(kx_j)\cos(lx_j) &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos\big((k+l)x_j\big)+\cos\big((k-l)x_j\big)\Big)\\ \sin(kx_j)\sin(lx_j) &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos\big((k-l)x_j\big)-\cos\big((k+l)x_j\big)\Big)\\ \cos(kx_j)\sin(lx_j) &= \tfrac{1}{2}\Big(\sin\big((k+l)x_j\big)-\sin\big((k-l)x_j\big)\Big)\end{aligned}$$

verwendet und das Lemma 1.3 angewandt. □

Satz 1.5. Sei $N = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Das Fourier-Polynom

$$g_m^*(x) := \tfrac{1}{2}a_0^* + \sum_{k=1}^{m}\Big(a_k^*\cos(kx) + b_k^*\sin(kx)\Big)$$

von Grad $m < n$ mit Koeffizienten a_k^* und b_k^* approximiert die Funktion $f(x)$ im diskreten quadratischen Mittel der N Stützstellen x_j derart, dass die Summe der quadratischen Abweichungen

$$F := \sum_{j=1}^{N}\Big(g_m^*(x_j) - f(x_k)\Big)^2$$

minimal ist.

ohne Beweis.

Beispiel 1.6. Sei $f(x) = x^2$:
x^2 Plot

1.2 Effiziente Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Die näherungsweise Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_k^* und b_k^* ist für eine große Anzahl N der Stützstellen sehr aufwendig.

Dies ist vor allem bei der diskreten Fourier-Transformation relevant, die in Ingenieur- und Naturwissenschaften häufig eingesetzt wird, um z.B. die Frequenzen von Vibrationen zu bestimmen.

Zur Berechnung der Summen

$$\begin{aligned}a_k' &:= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\cos(kx_j), \quad k = 0,1,\ldots,\tfrac{N}{2}\\ b_k' &:= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\sin(kx_j), \quad k = 1,2,\ldots,\tfrac{N}{2}-1\end{aligned} \tag{1}$$

werden normalerweise $\propto N^2$ trigonometrische Funktionsauswertungen verlangt. Für den Fall, dass N eine Potenz von 2 ist, kann ein sehr effizienter Algorithmus ($\propto n\log(n)$ Auswertungen) entwickelt werden, indem wir zu einer komplexen Fourier-Transformation übergehen.

Definition 1.7 (Diskrete komplexe Fourier-Transformation). Für eine Folge von komplexen Zahlen $f = (f_0, \dots, f_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ ergibt sich die diskrete komplexe Fourier-Transformation $\hat{f}$ durch

$$\hat{f}_k := \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{jk}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot \omega_n^{jk}$$

Dabei sind ω_n die n-ten Einheitswurzeln:

$$\omega_n := e^{-2\pi i \, / \, n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

In Matrix Schreibweise entspricht dies

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

In unserem Fall haben wir eine reellwertige Funktion f und damit auch reellwertige Punkte $f(x_j)$, wir können dennoch eine diskrete komplexe Fourier-Transformation durchführen und uns aus dem Resultat dann unsere reelle diskrete Fourier-Transformation berechnen:

Satz 1.8 (Zusammenhang zwischen reeller und komplexer DFT). Sei $\hat{y} = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{n-1})^T$ die komplexe DFT von $y = (y_0, \dots, y_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$, wobei y folgende Darstellung hat

$$y_j := f(x_{2j}) + i \cdot f(x_{2j+1}), \quad j = 0, \dots, n-1$$

Die trigonometrischen Summen a'_k und b'_k (1) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a'_k - i \cdot b'_k &= \tfrac{1}{2}(\hat{y}_k + \overline{\hat{y}_{n-k}}) + \tfrac{1}{2i}(\hat{y}_k - \overline{\hat{y}_{n-k}}) e^{-i\pi \cdot \frac{k}{n}} \\ a'_{n-k} - i \cdot b'_{n-k} &= \tfrac{1}{2}(\overline{\hat{y}_k} + \hat{y}_{n-k}) + \tfrac{1}{2i}(\overline{\hat{y}_k} - \hat{y}_{n-k}) e^{i\pi \cdot \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

für $k = 0, \dots n$, wobei $b'_0 = b'_n = 0$ und $\hat{y}_n = \hat{y}_0$

Beweis. Durch

$$\overline{\omega_n^{j(n-k)}} = \underbrace{\overline{\omega_n^{jn}}}_{1} \cdot \overline{\omega_n^{-jk}} = \overline{e^{-2\pi i \, / \, n \cdot (-jk)}} = e^{-2\pi i \, / \, n \cdot jk} = \overline{\omega_n^{jk}}$$

erhalten wir für die Summanden der oberen Formel

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\hat{y}_k + \overline{\hat{y}_{n-k}}) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(y_j \cdot \omega_n^{jk} + \overline{y}_j \cdot \overline{\omega_n^{j(n-k)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(y_j + \overline{y}_j \right) \cdot \omega_n^{jk} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(y_j + \overline{y}_j \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{jk}{n}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2i}(\hat{y}_k - \overline{\hat{y}_{n-k}})e^{-i\pi\cdot\frac{k}{n}} &= \frac{1}{2i}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\Big(y_j\cdot\omega_n^{jk} - \overline{y}_j\cdot\overline{\omega_n^{j(n-k)}}\Big)e^{-i\pi\cdot\frac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\big(y_j - \overline{y}_j\big)\cdot\omega_n^{jk}\cdot e^{-i\pi\cdot\frac{k}{n}} \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\big(y_j - \overline{y}_j\big)\cdot e^{-i\pi(2j+1)\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

Mit Definition von y_j ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_j + \overline{y}_j &= 2\cdot\mathrm{Re}(y_j) = 2\cdot f(x_{2j}) \\
y_j - \overline{y}_j &= 2i\cdot\mathrm{Im}(y_j) = 2\cdot f(x_{2j+1})
\end{aligned}$$

und für die Summe

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\hat{y}_k + \overline{\hat{y}_{n-k}}) + \tfrac{1}{2i}(\hat{y}_k - \overline{\hat{y}_{n-k}})e^{-i\pi\cdot\frac{k}{n}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\Big(f(x_{2j})e^{-ijk\frac{2\pi}{n}} + f(x_{2j+1})e^{-i(2j+1)k\frac{\pi}{n}}\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\Big(f(x_{2j})\left[\cos(kx_{2j}) - i\sin(kx_{2j})\right] + f(x_{2j+1})\left[\cos(kx_{2j+1}) - i\sin(kx_{2j+1})\right]\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\Big(f(x_{2j})\cos(kx_{2j}) + f(x_{2j+1})\cos(kx_{2j+1})\Big) \\
&\quad - i\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\Big(f(x_{2j})\sin(kx_{2j}) + f(x_{2j+1})\sin(kx_{2j+1})\Big) \\
&= a'_k - ib'_k
\end{aligned}$$

Die zweite Formel des Satzes ergibt sich durch Substitution von k durch $n-k$. □

Der Vorteil der komplexen DFT ist, dass eine Reduktion gerader Ordnung auf zwei komplexe DFT je der halben Ordnung möglich ist, führen wir diese Reduktion iterativ durch (was bei einer Potenz von 2 möglich ist) erhalten wir einen Divide & Conquer Algorithmus mit linear-logarithmischer Laufzeit.

Satz 1.9. Sei $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Für die komplexen Fourier-Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{2l} &= \sum_{j=0}^{m-1}(f_j + f_{m+j})\omega_n^{2lj} \\
\hat{f}_{2l+1} &= \sum_{j=0}^{m-1}(f_f - f_{m+j})\omega_n^{j}\cdot\omega_n^{2lj}
\end{aligned}$$

Beweis.
Für die Einheitswurzeln gilt

$$\omega_n^{2l(m+j)} = \omega_n^{2lj}\cdot\omega_n^{2lm} = \omega^{2lj}\cdot\big(\omega_n^{2m}\big)^l = \omega^{2lj}\cdot\big(\underbrace{\omega_n^n}_{1}\big)^l = \omega_n^{2lj} = \omega_m^{lj}$$

Diese Identität liefert die gewünschte Umformung der Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{2l} &= \sum_{j=0}^{2m-1} f_j \omega_n^{2lj} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} f_j \omega_n^{2lj} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{m+j} \underbrace{\omega_n^{2l(m+j)}}_{\omega_n^{2lj}} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (f_j + f_{m+j}) \omega_m^{lj}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{2l+1} &= \sum_{j=0}^{2m-1} f_j \omega_n^{(2l+1)j} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} f_j \omega_n^{(2l+1)j} + \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+m} \omega_n^{(2l+1)(m+j)} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} f_j \omega_n^{2lj} \omega_n^j + \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+m} \underbrace{\omega_n^{2l(m+j)}}_{\omega_n^{2lj}} \underbrace{\omega_n^m}_{-1} \omega_n^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (f_j - f_{m+j}) \omega_n^j \cdot \omega_m^{lj}
\end{aligned}$$

□

Dieser Satz ermöglicht es uns nun die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ als Kombination von zwei neuen Fourier-Transformationen zu schreiben, denn für die Hilfswerte

$$g_j := f_j + f_{m+j} \quad \text{und} \quad h_j := (f_j) - (f_{m+j})\omega_n^j$$

gilt

$$\hat{g} = (\hat{f}_0, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_{2m-1})^T \quad \text{und} \quad \hat{h} = (\hat{f}_1, \hat{f}_3, \ldots, \hat{f}_{2m})^T$$

Wir haben damit die Berechnung einer DFT von $f \in \mathbb{C}^{2m}$ (einmal Ordnung $2m$) auf die Berechnung zweier DFTs von $g \in \mathbb{C}^m$ und $h \in \mathbb{C}^m$ (zweimal Ordnung m).

Beispiel 1.10. Wollen wir eine DFT Ordnung 32 durchführen, so brechen wir dies erst auf die Berechnung von zwei DFTs mit Ordnung 16 herunter. Jede dieser DFTs wird dann wiederum in zwei DFTs mit Ordnung 8 vereinfacht. Wiederholt man dies iterativ so ergibt sich:
$FT_{32} \to 2\ FT_{16} \to 4\ FT_8 \to 8\ FT_4 \to 16\ FT_2 \to 32\ FT_1$

Bemerkung 1.11. Der Rechenaufwand für die Berechnung einer diskreten komplexen Fourier-Transformation nach der Methode des Aufteilens entspricht $\mathcal{O}(n \log(n))$.

1.3 Symmetrische Transformationen

In der Anwendung ist es oftmals hilfreich die symmetrischen Fortsetzungen von reellen Funktionen zu betrachten. Dies ermöglicht die Fourier-Darstellung nur auf Sinus- oder nur auf Kosinusreihen zu reduzieren.

Auch hier geben wir eine kurze Wiederholung zur Fourier-Reihe:

Definition 1.12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, über $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion, dann heißt

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Fourier-Reihe von f, wobei sich die Fourier-Koeffizienten c_k durch

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Eine alternative Darstellung ergibt sich durch

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Satz 1.13. Beide Darstellungen in Definition 1.12 sind äquivalent und für die Umrechnung der Darstellungen gilt

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a_k = \begin{cases} c_k + c_{-k}, & k > 0 \\ 2c_0 \end{cases}, \quad b_k = i(c_{-k} - c_k)$$

Beweis. Ergibt sich direkt durch die Verwendung der eulerschen Formel und der Euler-Darstellung von sin und cos.

Bemerkung 1.14.

1. Wenn f punktsymmetrisch bzgl. $x = \pi$ ist, d.h. $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$, so gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{2\pi}^{0} f(2\pi - z) \cos(k(2\pi - z))(-\mathrm{d}z) \qquad (z = 2\pi - x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -f(z) \cos(kz) \, \mathrm{d}z \\ &= -a_n \\ \Rightarrow \quad a_k &= 0 \end{aligned}$$

   Also ist die Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

2. Wenn f spiegelsymmetrisch bzgl. $x = \pi$ ist, d.h. $f(\pi + x) = f(\pi - x)$, so gilt analog (wegen $\sin(k(2\pi - z)) = -\sin(kz)$), dass die Fourier-Reihe von f gegeben ist durch

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Sinustransformation:
Sei f eine Funktion, welche auf den Intervallgrenzen von $I = [0, \pi]$ verschwindet, d.h. $f(0) = f(\pi) = 0$, so kann diese punktsymmetrisch bzgl. $x = \pi$ über $[0, 2\pi]$ fortgesetzt werden durch

$$f_u(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(2\pi - x), & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

und es ergibt sich eine Sinustransformation

$$\hat{f}_u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{mit} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \,\mathrm{d}x$$

Kosinustransformation:
Sei f eine beliebige Funktion auf $I = [0, \pi]$, so kann diese spiegelsymmetrisch bzgl. $x = \pi$ über $[0, 2\pi]$ fortgesetzt werden durch

$$f_g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ -f(2\pi - x), & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

und es ergibt sich eine Sinustransformation

$$\hat{f}_g = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \,\mathrm{d}x$$

1.4 diskrete Kosinustransformation

In der Anwendung auf eine diskrete Zeitreihe $x_0, \ldots, x_{N-1}$, zum Beispiel Pixelreihen eines Bildes, ergeben sich verschiedene Möglichkeiten der spiegelsymmetrischen Fortsetzung und somit ergeben sich auch verschiedene Versionen der diskreten Kosinustransformation (DCT):

DCT-I:
Im ersten Fall setzten wir unsere Punkte auf einen Rändern spiegelsymmetrisch bzgl. des Randes fort, d.h. zum Beispiel durch

$$y_0 = x_0, \ldots, y_{N-2} = x_{N-2}, y_{N-1} = x_{N-1}, y_N = x_{N-2}, y_{N+1} = x_{N-3}, \ldots, y_{2N-3} = x_1$$

oder in allgemeiner Schreibweise:

$$y_n = \begin{cases} x_n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ x_{2N-2-n} & N \leq n \leq 2N-3 \end{cases}$$

Führen wir jetzt eine „normale“ diskrete Fourier-Transformation mit unsere neue Zeitreihe $y_0, \ldots, y_{2N-3}$ durch

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{2N-3} y_j \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{jk}{2N-2}}$$

Durch die Symmetry kommt jeder Punkt x_j für $j = 1, \dots, N-2$ doppelt vor und die Ränder x_0 und x_{N-1} einfach. Wir erhalten daher mit analogen Umformungen wie bei der stetigen Sinus- / Kosinustransformation:

$$\hat{y}_k = x_0 e^{-2\pi i \cdot \frac{0 \cdot k}{2N-2}} + x_{N-1} \underbrace{e^{-2\pi i \cdot \frac{(N-1)\cdot k}{2N-2}}}_{(e^{-\pi i})^k} + \sum_{j=1}^{N-2} x_j \cdot \left(e^{-2\pi i \cdot \frac{jk}{2N-2}} + e^{-2\pi i \cdot \frac{(2N-2-n)k}{2N-2}} \right)$$
$$= x_0 + (-1)^k x_{N-1} + 2 \sum_{j=1}^{N-2} x_j \cos\left(\frac{\pi}{N-1} nk \right)$$

Nach einer Normierung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ erhalten wir:

$$\hat{x}_k^{(I)} = \frac{1}{2}\left(x_0 + (-1)^k x_{N-1}\right) + \sum_{j=1}^{N-2} x_j \cos\left(\frac{\pi}{N-1} nk \right), \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{I}$$

DCT-II: Statt der exakten Fortsetzung auf x_{N-1} setzen wir nun unsere Zeitreihe etwas versetzt fort, also so gesehen an der Stelle $x_{N-1/2}$. Dies hat den Vorteil, dass für unsere neuen Punkte $y_N = x_{N-1}$ und $y_{2N-1} = x_0$ gilt. Damit verschwindet der unschöne $x_0 + (-1)^k x_{N-1}$ aus (I) und wir erhalten:

$$\hat{x}_k^{(II)} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k \right), \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{II}$$

DCT-III: DCT-III basiert auf einer Punktspiegelung, dafür erweitern wir zunächst mit einem neuen Punkt $y_N = 0$ um dann nicht spiegelsymmetrisch fortzusetzen, sondern mit $y_{N+n} = x_{N-n}$ für $n < N-1$. In der Herleitung haben wir daher x_0 einfach und den Rest doppelt. Es ergibt sich

$$\hat{x}_k^{(III)} = \frac{1}{2} x_0 + \sum_{j=1}^{N-1} x_j \cos\left(\frac{\pi}{N} n\left(k + \frac{1}{2}\right) \right), \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{III}$$

DCT-IV: Als letztes verbinden wir die Idee von DCT-II und DCT-III indem wir spiegelsymmetrisch bei $x_{N-1/2}$ fortsetzten und bekommen

$$\hat{x}_k^{(III)} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right) \right), \quad k = 0, \dots, N-1 \tag{III}$$

Satz 1.15. Die DCT-III und DCT-II Verfahren sind (bis auf Skalierung) invers zu einander. DCT-I und DCT-IV sind hingegen selbst-invers.

ohne Beweis.

Insert images.

1.5 Mehrdimensionale DCT

In der Anwendung dient DCT-II für die digitale Bildverarbeitung, wir müssen dafür jedoch eine Möglichkeit der mehrdimensionalen DCT finden. Wir nutzen hierfür die Spalten- bzw. Zeilenweise Anwendung von DCT-II und erhalten dann für $x \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ folgende Transformation

$$\hat{x}_{k_1,k_2} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_{n_1,n_2} \cos\left(\frac{\pi}{N_1}(n_1 + \tfrac{1}{2})k_1 \right) \cos\left(\frac{\pi}{N_2}(n_2 + \tfrac{1}{2})k_2 \right)$$

Detaillierte Erklärung zu JPEG und 8x8 Bildern

1.6 Wavelets