

# **Numerische Mathematik und Numerische Lineare Algebra in den Datenwissenschaften**

Prof. Dr. rer. nat. Jens Starke  
Sommersemester 2025

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Iteratives Vorgehen zur Lösung linearer Gleichungssysteme</b>	<b>6</b>
2.1	Splittingverfahren . . . . .	6
2.2	Zwei einfache Iterationsverfahren . . . . .	8
2.3	Gradientenverfahren . . . . .	10
2.3.1	Gradientenverfahren für Optimierung . . . . .	10
2.3.2	Das Verfahren der konjugierten Gradienten . . . . .	11
2.3.3	Eigenschaften des CG-Verfahrens . . . . .	12
2.3.4	Praktische Aspekte der Implementierung . . . . .	16
2.4	Präkonditionierung des CG-Verfahren . . . . .	17
2.4.1	Präkonditionierung mittels Cholesky . . . . .	17
2.4.2	Algorithmus: PCG-Verfahren . . . . .	18
2.5	Anwendung und Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren . . . . .	19
2.5.1	Lösen von Randwertproblemen mittels CG-Verfahren . . . . .	19
2.5.2	Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>24</b>
3.1	Einleitung . . . . .	24
3.2	Einschließungssätze und Stabilität . . . . .	24
3.2.1	Gerschgorin-Kreise . . . . .	25
3.2.2	Stabilität von Eigenwerten . . . . .	26
3.3	Iterative Verfahren . . . . .	27
3.3.1	Potenz-Methode . . . . .	27
3.3.2	Inverse Iteration . . . . .	28
3.4	Page-Rank-Algorithmus . . . . .	29
3.4.1	Stochastische Vektoren/Matrizen . . . . .	29
3.4.2	Vorgehensweise für weitere Eigenwerte/Eigenvektoren . . . . .	31

Diese Mitschrift basiert auf der gleichnamigen Vorlesung *Numerische Mathematik und Numerische Lineare Algebra in den Datenwissenschaften*, gehalten im Sommersemester 2025 an der Universität Rostock.

Alle Rechte an Inhalt und Struktur der Lehrveranstaltung liegen bei dem Modulverantwortlichen, Prof. Dr. rer. nat. Jens Starke, sowie der Universität Rostock.

Diese Mitschrift dient ausschließlich zu Lern- und Dokumentationszwecken. Eine kommerzielle Nutzung oder Weiterverbreitung ohne Zustimmung ist nicht gestattet.

### Literaturempfehlungen:

1. Martin Hantu-Bourgeois, Grundlagen der Numerik und des wissenschaftlichen Rechnens, Mathematische Leitfäden, Vieweg + Teubner Verlag Wiesbaden, 2009, DOI: [10.1007/978-3-8348-9309-3](https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9309-3)
2. Eberhard Zeidler, Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendung, Springer Spektrum Wiesbaden, 2012, DOI: [10.1007/978-3-658-00289-3\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-658-00289-3_3)

# 1 Wiederholung

Wir starten mit einer kurzen Wiederholung zur Fixpunktiteration zum Lösen von Gleichungen der Form  $Tx = x$  durch die Iterationsvorschrift  $x^{(n+1)} = Tx^{(n)}$ .

**Satz 1.1 (Banach 1922).** Sei  $M$  eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge in einem vollständig metrischem Raum  $(X, d)$  und  $T : M \rightarrow M$  eine Selbstabbildung (d.h.  $T(M) \subset M$ ) und  $k$ -kontraktiv (d.h.  $d(Tx, Ty) \leq k \cdot d(x, y) \forall x, y \in M$  mit  $0 \leq k < 1$ ). Dann folgt:

1. Existenz und Eindeutigkeit: die Gleichung  $Tx = x$  hat genau eine Lösung, d.h.  $T$  hat genau einen Fixpunkt in der Menge  $M$ .
2. Konvergenz der Iteration  $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}$ . Die Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen den Fixpunkt  $\hat{x}$  für einen beliebigen Startpunkt  $x^{(0)} \in M$ .
3. Fehlerabschätzung: Für alle  $n = 0, 1, \dots$  gilt
  - a-priori:  $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x^{(0)}, x^{(1)})$
  - a-posteriori:  $d(x^{(n+1)}, \hat{x}) \leq k(1 - k)^{-1}d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$
4. Konvergenzrate: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $d(x^{(n+1)}, \hat{x}) \leq k \cdot d(x^{(n)}, \hat{x})$

*Beweis.*

2. Wir zeigen, dass  $(x^{(n)})$  eine Cauchy-Folge ist: Für den Abstand zweier benachbarter Folgeglieder  $x^{(n)}$  und  $x^{(n+1)}$  gilt

$$d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) = d(Tx^{(n-1)}, Tx^{(n)}) \leq k \cdot d(x^{(n-1)}, x^{(n)}) \leq \dots \leq k^n \cdot d(x^{(0)}, x^{(1)})$$

Mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung liefert daher für  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} d(x^{(n)}, x^{(n+m)}) &\leq d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) + \dots + d(x^{(n+m-1)}, x^{(n+m)}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m}) \cdot d(x^{(0)}, x^{(1)}) \\ &\leq k^n(1 + k + k^2 + \dots) \cdot d(x^{(0)}, x^{(1)}) \\ &= k^n \cdot (1 - k)^{-1}d(x^{(0)}, x^{(1)}) \end{aligned}$$

Demnach folgt  $d(x^{(n)}, x^{(n+m)}) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und da  $X$  vollständig ist konvergiert  $(x^{(n)})$  gegen ein  $\hat{x} \in X$ .

1. Da  $T$  stetig ist (aufgrund der  $k$ -Kontraktivität) folgt für die konvergente Folge  $(x^{(n)})$ , dass

$$\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx^{(n)} = T\hat{x}$$

Da  $M$  abgeschlossen ist existiert also ein Fixpunkt in  $M$ .

Dieser ist eindeutig, denn für  $x, y$  mit  $Tx = x$  und  $Ty = y$  gilt  $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ , also  $d(x, y) = 0$  und damit  $x = y$  (Definitheit der Metrik).

3. Aus dem Beweis zu 2. haben wir  $d(x^{(n)}, x^{(n+m)}) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x^{(0)}, x^{(1)})$ , wegen der Stetigkeit der Metrik folgt die a-priori-Fehlerabschätzung aus  $m \rightarrow \infty$ .

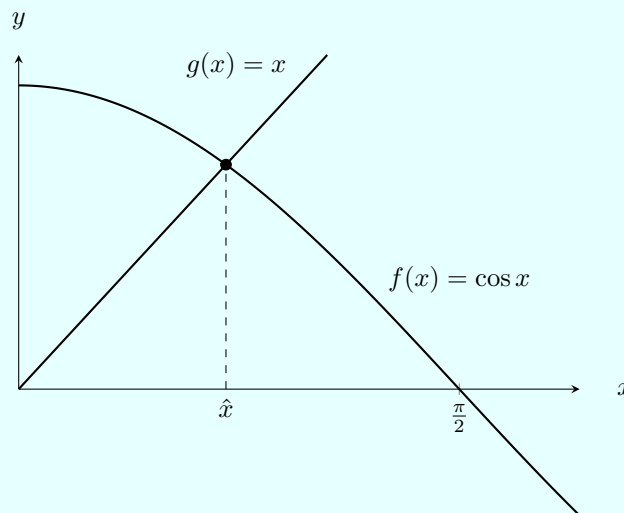
Die a-posteriori-Fehlerabschätzung folgt analog aus dem Ansatz

$$\begin{aligned}
 d(x^{(n+1)}, x^{(n+1+m)}) &\leq d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) + \dots + d(x^{(n+m)}, x^{(n+1+m)}) \\
 &\leq (k + \dots + k^m) \cdot d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \\
 &\leq k(1 + k + k^2 + \dots) \cdot d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \\
 &= Ck \cdot (1 - k)^{-1} d(x^{(n)}, x^{(n+1)})
 \end{aligned}$$

4. Folgt direkt durch  $d(x^{(n+1)}, \hat{x}) = d(Tx^{(n)}, T\hat{x}) \leq k \cdot d(x^{(n)}, \hat{x})$

□

**Beispiel 1.2.** Wir betrachten das Nullstellenproblem  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos x - x = 0$ . Umformung ergibt  $\underbrace{\cos x}_{Tx} = x$  und somit die Fixpunktiteration  $x^{(k+1)} = Tx^k = \cos(x^{(k)})$



Prüfung der Voraussetzungen des Banach'schen FP-Satzes:

Wir wählen als Einschränkung  $M = [0, 1]$ , dies liefert uns eine Selbstabbildung auf einer abgeschlossenen Teilmenge  $M$  des vollständig metrischen Raum  $\mathbb{R}$  mit der Abstandsfunktion  $d(x, y) = |x - y|$ .

Weiter ist die Abbildung  $k$ -kontraktiv, denn nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$|\cos x - \cos y| = \underbrace{|\sin \xi|}_{\leq \sin(1)} \cdot |x - y| \leq \underbrace{0,85}_{=:k} \cdot |x - y|, \quad \text{für } \xi \in [0, 1]$$

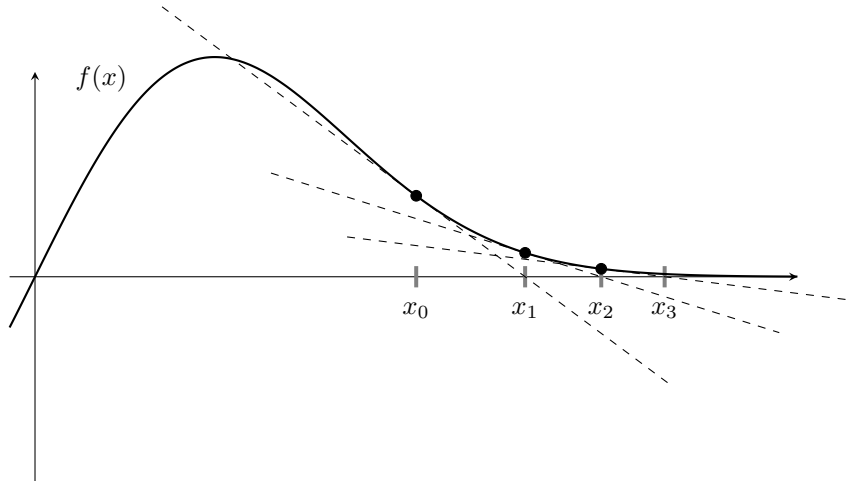
Wir können also nach Banach die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkt  $\hat{x}$  folgern, diesen Fixpunkt finden wir durch die konvergente Folge  $x^{(k+1)} = \cos x^k$ .

Wir betrachten im folgenden die Idee der Umwandlung eines Nullstellenproblems in Fixpunkt-Gleichung noch etwas allgemeiner. Für eine Gleichung  $f(x) = 0$  mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir verschiedene Möglichkeiten zur Umformung:

- Betrachte  $Tx := x - f(x)$  gefolgt aus  $f(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow x - f(x) = x$ .
- Betrachte  $Tx := x - \omega \cdot f(x)$  mit  $\omega \neq 0$  (lineare Relaxation)

# 1 Wiederholung

- c) Betrachte  $Tx := x - \omega \cdot g(f(x))$  mit  $\omega \neq 0$  und geeigneter Funktion  $g$  (nichtlineare Relaxation).  
Wenn  $g(0) \neq 0$  dann betrachte  $Tx := x - \omega \cdot (g(f(x)) + g(0))$
- d) Betrachte  $Tx := x - (f'(x))^{-1}f(x)$  (Newtonverfahren). Newton hat teils Probleme, bei falschen Startwerten:



- e) Betrachte  $Tx := h^{-1}(f(x) - g(x))$ , wobei  $f(x) = h(x) + g(x)$  (Splitting-Verfahren)

## 2 Iteratives Vorgehen zur Lösung linearer Gleichungssysteme

### 2.1 Splittingverfahren

Gegeben sei das LGS  $Ax = b$  für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}, b \in \mathbb{K}^n, x \in \mathbb{K}^n$ , wobei  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Wir wollen dieses LGS nun in ein FP-Problem umformen, sei hierfür  $A$  nicht singulär (sonst nicht lösbar).

Wir schreiben  $A = M - N$ , wobei  $M$  invertierbar und häufig sogar eine Diagonalmatrix ist (damit  $M$  leicht zu invertieren ist). Dies liefert:

$$Ax = b \iff (M - N)x = b \iff Mx = Nx + b = \underbrace{M^{-1} \cdot (Nx + b)}_{\tilde{T}x}$$

$\tilde{T}$  ist affin-linear, wir erhalten also unser FP-Problem  $x = \tilde{T}x = Tx + c$  mit  $T = M^{-1}N$  und  $c = M^{-1}b$

#### Algorithmus 1: Splittingverfahren

**Initialisierung:** :  $A = M - N$  mit  $N \in GL(n, \mathbb{K})$

- 1 Wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  beliebig
- 2 **for**  $k = 0, 1, \dots$
- 3   | löse  $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$
- 4 **until stop**

Die Konvergenz dieses Algorithmus folgt aus Banachschen Fixpunktsatz.

**Bemerkung 2.1.** Nach gleicher Überlegung lässt sich auch unser obiges Splittingverfahren für Nullstellenbestimmung herleiten:

$$f(x) = 0 \iff h(x) + g(x) := f(x) = 0 \iff h(x) = f(x) - g(x) \iff x = h^{-1}(f(x) - g(x))$$

*Wiederholung:* Eine Matrixnorm ist eine Norm auf dem Vektorraum der Matrizen, d.h.  $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , bereits bekannte Matrixnormen sind:

- Frobeniusnorm:  $\|A\|_F := \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$
- Spaltensummennorm  $\|A\|_1 := \max_j \sum_i |a_{ij}|$
- Zeilensummennorm  $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j |a_{ij}|$
- Spektralnorm  $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$ ,  $(A^H := \overline{A}^T)$

Im allgemeinen induziert eine Vektornorm auch immer eine Matrixnorm, diese nennen wir Operator-norm:

$$\|A\|_{\text{op}} := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

## 2.1 Splittingverfahren

Die oben aufgelisteten Normen  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  und  $\|\cdot\|_\infty$  sind die Operatornormen zu den jeweiligen  $p$ -Normen.

Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  heißt submultiplikativ, falls  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  und sie heißt verträglich mit einer Vektornorm  $\|\cdot\|_V$ , falls  $\|Ax\|_V \leq \|A\| \cdot \|x\|_V$ .

Operatornormen sind immer submultiplikativ und verträglich zu der Vektornorm, aus welcher sie induziert wurden.

**Satz 2.2.** Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$ , die mit einer Vektornorm  $\|\cdot\|$  verträglich ist, und ist  $\|M^{-1}N\| < 1$ , dann konvergiert der Algorithmus 1 für jedes  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  gegen  $A^{-1}b$ , d.h. gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .

*Beweis.* Sei  $\tilde{T}(x) := Tx + c$  mit  $T = M^{-1}N$  und  $c = M^{-1}b$ .

Offensichtlich gilt  $\tilde{T} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , sowie

$$\|\tilde{T}(x) - \tilde{T}(y)\| = \|Tx - Ty\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|$$

Da  $\|T\| = \|M^{-1}N\| < 1$ , ist  $\tilde{T}$  eine  $k$ -kontraktive Selbstabbildung und somit konvergiert die Folge  $(x^k)$  aus dem Algorithmus gegen den eindeutigen Fixpunkt  $\hat{x}$  mit  $\tilde{T}(\hat{x}) = \hat{x}$ .

Einsetzen der Definition von  $\tilde{T}$  liefert:

$$\hat{x} = T\hat{x} + c = M^{-1}(N\hat{x} + b) \implies M\hat{x} = N\hat{x} + b \implies A\hat{x} = (M - N)\hat{x} = b$$

□

**Korollar 2.3.** Sei  $A$  invertierbar, so konvergiert der obige Algorithmus genau dann für alle Startwerte  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  gegen  $\hat{x} = A^{-1}b$ , wenn für den Spektralradius  $\rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$  die Ungleichung  $\rho(T) < 1$  erfüllt ist.

*Beweis.*

$\Leftarrow$ : Falls  $\rho(T) < 1$  dann existiert eine Norm  $\|\cdot\|_\varepsilon$  auf  $\mathbb{K}^n$  und eine dadurch induzierte Operatornorm  $\|\cdot\|_\varepsilon$  auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$  mit  $\|T\|_\varepsilon \leq \rho(T) + \varepsilon < 1$  für  $\varepsilon$  klein genug (vgl. Aufgabe 2.3).

Satz 2.2 liefert dann die Konvergenz des Algorithmus.

$\Rightarrow$ : Angenommen  $\rho(T) \geq 1$ , d.h. es existiert ein Eigenwert  $\lambda$  von  $T$  mit  $|\lambda| \geq 1$  und zugehörigem Eigenvektor  $z$ . Für  $x^{(0)} = \hat{x} + z$  und festem  $k$  ergibt sich der Iterationsfehler

$$x^{(k)} - \hat{x} = Tx^{(k-1)} + c - \hat{x} = Tx^{(k-1)} - T\hat{x} = T(x^{(k-1)} - \hat{x})$$

Induktiv folgt

$$x^{(k)} - \hat{x} = T^k(x^{(0)} - \hat{x}) = T^k z = \lambda^k z$$

und es gilt  $\|x^{(k)} - \hat{x}\| = |\lambda^k| \cdot \|z\|$ .

Für größer werdendes  $k$  kann  $x^{(k)}$  also nicht gegen  $\hat{x}$  konvergieren.

□

**Satz 2.4.** Unter gleichen Voraussetzungen des vorangegangenen Korollars gilt

$$\max_{x^{(0)} \in \mathbb{K}^n} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \hat{x}\|^{1/k} = \rho(T)$$



## 2.2 Zwei einfache Iterationsverfahren

*Beweis.* Aus dem Beweis von Korollar 2.3 geht hervor, dass

$$\max_{x^{(0)} \in \mathbb{K}^n} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \hat{x} - x^{(k)} \right\|^{1/k} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|T^k z\|^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |\lambda| \cdot \|z\|^{1/k} = |\lambda| = \rho(T)$$

Mit der Norm  $\|\cdot\|_\varepsilon$  gilt nun Für jeden Startwert  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ :

$$\left\| x^{(k)} - \hat{x} \right\|_\varepsilon = \left\| T^k (x^{(0)} - \hat{x}) \right\|_\varepsilon \leq \|T\|_\varepsilon^k \cdot \left\| x^{(0)} - \hat{x} \right\|_\varepsilon$$

Da im  $\mathbb{K}^n$  alle Normen äquivalent sind, also insbesondere auch  $\|\cdot\|_\varepsilon$  und  $\|\cdot\|$ , existiert eine Konstante  $c_\varepsilon > 0$  mit

$$\left\| x^{(k)} - \hat{x} \right\|^{1/k} \leq \left( c_\varepsilon \cdot \left\| x^{(k)} - \hat{x} \right\|_\varepsilon \right)^{1/k} \leq \|T\|_\varepsilon \cdot \left( c_\varepsilon \cdot \left\| x^{(0)} - \hat{x} \right\|_\varepsilon \right)^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|T\|_\varepsilon$$

Folglich ist

$$\varrho(T) \leq \max_{x^{(0)}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| x^{(k)} - \hat{x} \right\|^{1/k} \leq \|T\|_\varepsilon$$

□

Dieser Satz liefert den Konvergenzfaktor und die Konvergenzrate des Splittingverfahren, zur Erinnerung für eine Folge  $(x^{(k)})$  mit Grenzwert  $\hat{x}$  ist:

- Konvergenzfaktor  $q$ :  $|x^{(k)} - \hat{x}| \approx C \cdot q^k$  für  $k$  groß
- Konvergenzrate  $r$ :  $r = -\log_{10}(q)$

**Korollar 2.5.** Die Zahl  $\varrho(T)$  ist der (asymptotischer) Konvergenzfaktor von der Iteration  $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ .  
Die (asymptotische) Konvergenzrate lässt sich daher ausdrücken durch  $r = -\log_{10} \varrho(T)$

## 2.2 Zwei einfache Iterationsverfahren

Mittels der Zerlegung  $A = D - L - R$ , wobei  $D$  die Diagonale,  $-L$  die untere (linke) Hälfte und  $-R$  die obere (rechte) Hälfte der Matrix  $A$  sind, erhalten wir einen Spezialfall des Splittingverfahren.

Durch die Wahl  $M = D$  und  $N = L + R$  ergibt sich

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b + (L + R)x^{(k)})$$

bzw. in algorithmischer Form:

### Algorithmus 2: Jacobi / Gesamtschritt Verfahren

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $a_{ii} \neq 0$ .

**Initialisierung:** Wähle beliebigen Startvektor  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$

```

1 for  $k = 0, 1, \dots$ 
2   for  $i = 1, \dots, n$ 
3      $x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$ 
4   end
5 until stop
```

Die zugehörige Iterationsmatrix ist hierbei  $\mathcal{J} = M^{-1}N = D^{-1}(L + R)$  und nennt sich (beim Jacobi

## 2.2 Zwei einfache Iterationsverfahren

Verfahren) Gesamtschrittoperator.

Einen weitere Version des Splitting-Verfahren ergibt sich durch die Wahl  $M = D - L$  und  $N = R$ . Hierbei bildet  $D - L$  eine obere Dreiecksmatrix und die Inversion ergibt sich mittels Vorwärtssubstitution:

### Algorithmus 3: Gauss-Seidel / Einzelschritt Verfahren

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit  $a_{ii} \neq 0$ .

**Initialisierung:** : Wähle beliebigen Startvektor  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$

```

1 for  $k = 0, 1, \dots$ 
2   for  $i = 1, \dots, n$ 
3      $x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$ 
4   end
5 until stop
```

Auch hier ergibt sich eine Matrixschreibweise: Durch umstellen erhalten wir:

$$a_{ii}x^{(k+1)} + \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(k)}$$

und damit (da  $L$  und  $R$  jeweils die negativen Parts von  $A$  sind)

$$(D - L)x^{(k+1)} = b + Rx^{(k)}$$

Die hier erhaltene Iterationsmatrix nennen wir Einzelschrittoperator  $\mathcal{L} = (D - L)^{-1}R$

Mittels der Zeilensummennorm erhalten wir nun ein leicht prüfbares Konvergenzkriterium:

**Satz 2.6.** Ist  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  strikt diagonaldominant, d.h.  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , dann konvergieren Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren für alle Startwerte  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  gegen die eindeutige Lösung von  $Ax = b$ .

*Beweis.*

Da  $A$  strikt diagonaldominant ist, muss  $a_{ii} \neq 0$  und damit sind beide Verfahren wohldefiniert.

Für die Konvergenz wird Satz 2.2 mit der Zeilensummennorm  $\|\cdot\|_\infty$  verwendet:

a) Gesamtschrittverfahren: Für die Iterationsmatrix gilt

$$\|\mathcal{J}\|_\infty = \|D^{-1}(L + R)\|_\infty = \max_{i \in [n]} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| =: q < 1$$

Nach Satz 2.2 folgt damit die Konvergenz des Gesamtschrittverfahren.

b) Einzelschrittverfahren: Um  $\|\mathcal{L}\|_\infty < 1$  zu zeigen, nutzen wir, dass die Zeilensummennorm eine durch die Maximumsnorm induzierte Operatornorm induziert ist, d.h.

$$\|\mathcal{L}\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|\mathcal{L}x\|_\infty$$

Sei  $y = \mathcal{L}x$  für ein  $x \in \mathbb{K}^n$  mit  $\|x\|_\infty = 1$ .

Induktiv folgt nun  $y_i \leq q < 1$ , wobei der Induktionsanfang aus dem Beweisteil a) folgt.

## 2.3 Gradientenverfahren

Unter der Induktionsvoraussetzung gilt für  $j < i$ , dass  $|y_j| \leq q < 1$  und damit ergibt sich aus Zeile 3 von Algorithmus 3 mit  $b = 0$ ,  $x^{(k)} = x$  und  $x^{(k+1)} = y$ :

$$\begin{aligned} \|y_i\| &= \left\| \frac{1}{a_{ii}} \left( 0 - \sum_{j<i} a_{ij} y_j - \sum_{j>i} a_{ij} x_j \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{j<i} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|y_j|}_{\leq q < 1} + \sum_{j>i} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty = 1} \right) \\ &< \frac{1}{|a_{ii}|} \left( \sum_{j<i} |a_{ij}| + \sum_{j>i} |a_{ij}| \right) \\ &= \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\ &= q \end{aligned}$$

Da dies für alle Einträge von  $y$  gilt, folgt  $\|y\|_\infty = \|\mathcal{L}x\|_\infty \leq q$  für alle  $x$  mit  $\|x\|_\infty = 1$  und damit  $\|\mathcal{L}\|_\infty \leq q < 1$   $\square$

**Beispiel 2.7.** Gegeben sei das LGS  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung  $\hat{x} = (1, -1, -1)^T$ .

Durch die Wahl  $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$  erhalten wir beim Gesamtschritt- bzw. Einzelschrittverfahren:

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{J}}^{(1)} &= D^{-1}(b - (L + R)x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_{\mathcal{L}}^{(1)} &= (D - L)^{-1}(b + Rx^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.3 Gradientenverfahren

### 2.3.1 Gradientenverfahren für Optimierung

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  soll minimiert werden. Von einem Startpunkt  $x^{(0)}$  ausgehen bewegen wir uns Stück für Stück in Richtung des steilsten Abstiegs, intuitiv sollten wir so ein Minimum finden.

Als Iterationsvorschrift ergibt sich daher

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot d^{(k)}, \quad \text{für } k = 0, 1, \dots$$

dabei ist  $\alpha^{(k)} > 0$  die Schrittweite und  $d^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  die Abstiegsrichtung. Eine typische Wahl der Abstiegsrichtung ist  $d^{(k)} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x^{(k)}) = -\nabla f(x^{(k)})$ , eine Verfeinerung würde man noch mit  $d^{(k)} = -D^{(k)} \cdot \nabla f(x^{(k)})$  erhalten, wobei  $D^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ .

Das Ziel des Verfahrens ist es, dass sich der Wert von  $f$  in jedem Schritt verbessert, d.h.  $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$ .

## 2.3 Gradientenverfahren

Es ergibt sich somit ein eindimensionales Optimierungsproblem um die optimale Schrittweite  $\alpha^{(k)}$  zu erhalten:

$$\alpha^{(k+1)} = \min_{\alpha \neq 0} \{f(x^{(k)} + \alpha \cdot d^{(k)})\}$$

Ein Nachteil des Verfahrens ist die mögliche Entstehung oszillierender Pfade („Zick-Zack-Verhalten“) aufgrund unvorteilhafter Richtungen (**Richtungen noch nicht orthogonal zu Niveaulinien, überarbeiten!**):



### 2.3.2 Das Verfahren der konjugierten Gradienten

Die obige Idee kann zur effizienten Lösung linearer Gleichungssysteme genutzt werden. Gegeben sei das LGS  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hermitisch ( $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ). Das impliziert insbesondere, dass die Hauptdiagonale reell ist, und dass  $x^H Ay = y^H Ax$  für  $x, y \in \mathbb{K}^n$  gilt.

Zur Lösung wird dieses Mal die Minimierung folgendes quadratischen Funktionals betrachtet

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^H Ax - x^H b \quad (1)$$

Denn sollte eine Lösung  $\hat{x} = A^{-1}b$  des LGS  $Ax = b$  existieren, so gilt für alle  $x \in \mathbb{K}^{n \times n}$ :

$$\begin{aligned} & \phi(x) - \phi(\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2}x^H Ax - x^H b - \left( \frac{1}{2}\hat{x}^H A\hat{x} - \hat{x}^H b \right) \\ &= \frac{1}{2}x^H Ax - x^H b - \left( \frac{1}{2}\hat{x}^H A\hat{x} - \hat{x}^H b \right) + \overbrace{\frac{1}{2}(x - \hat{x})^H A(x - \hat{x}) - \frac{1}{2}x^H Ax + \frac{1}{2}x^H A\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{x}^H Ax - \frac{1}{2}\hat{x}^H A\hat{x}}^{=0} \\ &= -x^H b + \hat{x}^H b + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^H A(x - \hat{x}) - \hat{x}^H A\hat{x} + x^H A\hat{x} \\ &= -x^H b + \hat{x}^H b + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^H A(x - \hat{x}) - \hat{x}^H b + x^H b \\ &= \frac{1}{2}(x - \hat{x})^H A(x - \hat{x}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat demnach ein eindeutiges Minimum bei  $\hat{x}$ .

**Definition 2.8.** Ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hermitisch und pos. definit, dann wird durch  $\|x\|_A = \sqrt{x^H Ax}$ ,  $x \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Norm in  $\mathbb{K}^n$  definiert, die sogenannte Energienorm. Zur Energienorm gehört ein inneres Produkt  $\langle x, y \rangle_A = x^H Ay$ ,  $x, y \in \mathbb{K}^n$ . Es ergibt sich die Abweichung des Funktionals von seinem Minimum als:

$$\phi(x) - \phi(\hat{x}) = \frac{1}{2}\|x - \hat{x}\|_A^2 \quad (2)$$

**geometrische Interpretation:** Der Graph von  $\phi$  bezüglich der Energienorm ist ein kreisförmiger Paraboloid, welcher über dem Mittelpunkt  $\hat{x}$  liegt.

**Idee:** Konstruktion eines Verfahrens, welches die Lösung  $\hat{x}$  von  $Ax = b$  iterativ approximiert, indem das Funktional  $\phi$  sukzessiv minimiert wird:

### 2.3 Gradientenverfahren

Zur aktuellen Iteration  $x^{(k)}$  wird die Suchrichtung  $d^{(k)} \neq 0$  bestimmt, und die neue Iterierte  $x^{(k+1)}$  über den Ansatz

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha \cdot d^{(k)} \quad (3)$$

bestimmt (gleiche Ansatz wie zuvor). Es gilt dann

$$\phi(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = \phi(x^{(k)}) + \alpha d^{(k)H} A x^{(k)} + \frac{1}{2} \alpha^2 d^{(k)H} A d^{(k)} - \alpha d^{(k)H} \cdot b \quad (4)$$

Durch Differentiation nach  $\alpha$  und Null setzen der Ableitung ergibt sich unsere Schrittweite  $\alpha^{(k)}$ :

$$\alpha^{(k)} = \frac{r^{(k)H} d^{(k)}}{d^{(k)H} A d^{(k)}}, \quad \text{mit } r^{(k)} = b - A x^{(k)} \quad (5)$$

zusätzlich erhalten wir die Suchrichtung  $d^{(k)}$  indem wir die Richtungsableitung von  $\phi$  betrachten, dabei gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d^{(k)}} \phi(x^{(k)}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) - \phi(x^{(k)})}{\alpha} \\ &\stackrel{(4)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha d^{(k)H} A x^{(k)} + \frac{1}{2} \alpha^2 d^{(k)H} A d^{(k)} - \alpha d^{(k)H} \cdot b}{\alpha} \\ &= d^{(k)H} (A x^{(k)} - b) + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \alpha d^{(k)H} A d^{(k)} \\ &= -d^{(k)H} r^{(k)} \end{aligned}$$

Ziel ist es nun die Idee des Verfahren des steilsten Abstiegs zu verbessern, indem wir nicht nur in Richtung  $r^{(k)}$  wandern (was zwar der größtmögliche Abstieg wäre, aber unvorteilhaftes „Zick-Zack-Verhalten“ mit sich bringt), sondern stattdessen

$$d^{(k)} = r^{(k)} + \beta^{(k-1)} d^{(k-1)} \quad (6)$$

Dabei sollte  $\beta^{(k-1)}$  gerade so gewählt sein, dass  $d^{(k)}$  und  $d^{(k-1)}$  konjugiert bezüglich  $A$  sind, d.h.  $\langle d^{(k-1)}, d^{(k)} \rangle = 0$ . Aus dieser Bedingung ergibt sich dann

$$\beta^{(k-1)} = -\frac{r^{(k)H} A d^{(k-1)}}{d^{(k-1)H} A d^{(k-1)}} \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) und (7) sind wohldefiniert, wenn  $d^{(k)*} A d^{(k)} \neq 0$ , aufgrund der positiv Definitheit von  $A$  ist dies genau dann der Fall wenn  $d^{(k)} \neq 0$ .

Nach (6) ist  $d^{(k)} = 0$  jedoch nur dann möglich, wenn  $r^{(k)}$  und  $d^{(k-1)}$  linear abhängig sind, doch nach Konstruktion verläuft die Suchrichtung  $d^{(k-1)}$  tangential zur Niveauläche von  $\phi$ , also orthogonal zum Gradienten  $r^{(k)}$ .

Somit folgt  $d^{(k)} = 0$  nur wenn  $r^{(k)} = 0$ , was  $x^{(k)} = \hat{x}$  implizieren würde.

#### 2.3.3 Eigenschaften des CG-Verfahrens

Wegen der Orthogonalitätsbedingung  $\langle d^{(k+1)}, d^{(k)} \rangle_A = 0$  nennt man die Suchrichtungen zueinander  $A$ -konjugiert und das Verfahren, Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren). Zusätzlich zur Konjugiertheit von sukzessiven Suchrichtungen ergeben sich folgende weitere Eigenschaften:

**Lemma 2.9.** Sei  $x^{(0)}$  ein beliebiger Startvektor und  $d^{(0)} = r^{(0)} = b - A x^{(0)}$ . Wenn  $x^{(k)} \neq \hat{x}$  für  $k = 0, 1, \dots, m$ , mit  $A \hat{x} = b$ , so gilt:

- a)  $r^{(m)H} d^{(j)} = 0$  für  $0 \leq j < m$
- b)  $r^{(m)H} r^{(j)} = 0$  für  $0 \leq j < m$
- b)  $\langle d^{(m)}, d^{(j)} \rangle_A = 0$  für  $0 \leq j < m$  (10)

### 2.3 Gradientenverfahren

*Beweis.*

Für  $k \geq 0$  gilt mit (3), dass  $Ax^{(k+1)} = Ax^{(k)} + \alpha^{(k)}Ad^{(k)}$  und somit

$$\begin{aligned} r^{(k+1)} &= b - Ax^{(k+1)} \\ &= b - Ax^{(k)} - \alpha^{(k)}Ad^{(k)} \\ &= r^{(k)} - \alpha^{(k)}Ad^{(k)} \end{aligned} \tag{8}$$

die nach (5) definierte optimale Wahl für  $\alpha$  bewirkt dann, dass

$$\begin{aligned} r^{(k+1)H}d^{(k)} &= (r^{(k)} - \alpha^{(k)}Ad^{(k)})^H d^{(k)} \\ &= r^{(k)H}d^{(k)} - \alpha^{(k)}d^{(k)H}Ad^{(k)} \\ &= r^{(k)H}d^{(k)} - \frac{r^{(k)H}d^{(k)}}{d^{(k)H}Ad^{(k)}}d^{(k)H}Ad^{(k)} \\ &\stackrel{(5)}{=} 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Weiter gilt nach Induktion über  $m$ :

Induktionsanfang:  $m = 1$ .

Durch die Wahl  $k = 0$  in (9) erhalten wir die Behauptung (a) und nach Setzung  $d^{(0)} = r^{(0)}$  auch die Behauptung (b). (c) folgt im Fall  $m = 1$  direkt aus der Orthogonalitätsbedingung.

Induktionsschritt:  $m \rightarrow m + 1$ .

Wir nehmen an, dass die Aussagen (a), (b) und (c) für  $m \leq \bar{m}$  richtig sind und zeigen damit die Gültigkeit für  $m = \bar{m} + 1$ .

Zunächst folgt aus (9) mit  $k = \bar{m}$ , dass  $r^{(\bar{m}+1)H}d^{(\bar{m})} = 0$ , sowie aus der Darstellungen  $r^{(m+1)}$  von (8) mit der Induktionsannahme (a und c):

$$r^{(\bar{m}+1)H}d^{(j)} = r^{(\bar{m})H}d^{(j)} - \alpha^{(\bar{m})}\langle d^{(\bar{m})}, d^{(j)} \rangle_A = 0 \text{ für } 0 \leq j < \bar{m}$$

Damit gilt (a) auch für  $m = \bar{m} + 1$ .

Weiter ergibt (6) umgestellt  $r^{(j)} = d^{(j)} - \beta^{(j-1)}d^{(j-1)}$  und mit  $r^{(0)} = d^{(0)}$  folgt daher (b) rekursiv aus (a):

$$r^{(\bar{m}+1)H}r^{(j)} = r^{(\bar{m}+1)H}d^{(j)} - \beta^{(j-1)} \cdot r^{(\bar{m}+1)H}d^{(j-1)} = 0 - \beta^{(j-1)} \cdot 0 = 0$$

Damit (c) gilt muss noch  $\alpha^{(j)} \neq 0$  für  $j < \bar{m}$  sein (der Fall  $j = \bar{m}$  ergibt sich direkt aus der Orthogonalitätsbedingung), denn dann ergibt (8):

$$Ad^{(j)} = \frac{1}{\alpha^{(j)}} \left( r^{(j+1)} - r^{(j)} \right)$$

und somit folgt durch (6):

$$\begin{aligned} \langle d^{(\bar{m}+1)}, d^{(j)} \rangle_A &= \langle r^{(\bar{m}+1)}, d^{(j)} \rangle_A + \beta^{(\bar{m})} \underbrace{\langle d^{(\bar{m})}, d^{(j)} \rangle_A}_{=0} \\ &= r^{(\bar{m}+1)H}Ad^{(j)} \\ &= r^{(\bar{m}+1)H} \cdot \frac{1}{\alpha^{(j)}} \left( r^{(j+1)} - r^{(j)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^{(j)}} \left( \underbrace{r^{(\bar{m}+1)H}r^{(j+1)}}_{=0} - \underbrace{r^{(\bar{m}+1)H}r^{(j)}}_{=0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Angenommen  $\alpha^{(j)} = 0$ , dann folgt aus der Definition von  $\alpha^{(j)}$  (5), dass auch  $r^{(j)*}d^{(j)} = 0$  und mit (6)

$$0 = r^{(j)H}d^{(j)} = r^{(j)H} \left( r^{(j)} + \beta^{j-1}d^{(j-1)} \right) = r^{(j)H}r^{(j)} + \beta^{(j-1)} \underbrace{r^{(j)H}d^{(j-1)}}_{=0} = \|r^{(j)}\|_2^2$$

## 2.3 Gradientenverfahren

Das impliziert  $r^{(j)} = 0$ , doch dann wäre aber  $x^{(j)} = \hat{x}$  (Widerspruch).  $\square$

Das Lemma sagt insbesondere aus, dass alle Suchrichtungen paarweise  $A$ -konjugiert. Außerdem bilden die Residuen ein Orthogonalsystem und sind damit linear unabhängig. Es muss sich daher nach spätestens  $n$  Schritten  $r^{(n)} = 0$ , also  $x^{(n)} = \hat{x}$  ergeben.

**Korollar 2.10.** Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hermitisch und positiv definit findet das CG-Verfahren nach höchstens  $n$  Schritten die exakte Lösung  $x^{(n)} = \hat{x}$ .

In der Praxis ist dieses Korollar nicht relevant, da häufig wesentlich weniger Schritte benötigt werden oder die Orthogonalitätsbedingung aufgrund von Rundungsfehlern verloren gehen.

Eine alternative Interpretation als iteratives Verfahren (neben der geometrischen Idee) bietet die Theorie über Krylov-Räume:

**Definition 2.11.** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $y \in \mathbb{K}^n$ . Dann heißt der Unterraum

$$\mathcal{K}_k(A, y) := \text{span}\{y, Ay, \dots, A^{k-1}y\} \leq \mathbb{K}^n$$

Krylov-Raum der Dimension  $k$  von  $A$  bezüglich  $y$ .

**Satz 2.12.** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hermitisch und positiv definit,  $d^{(0)} = r^{(0)}$ , und  $x^{(k)} \neq \hat{x}$  die  $k$ -te Iterierte des CG-Verfahrens. Dann gilt

$$x^{(k)} \in x^{(0)} + \mathcal{K}_k(A, r^{(0)})$$

und  $x^{(k)}$  ist in diesem affinen Raum die eindeutige Minimalstelle der Zielfunktion  $\phi$ . (Optimalitätseigenschaft)

*Beweis.*

a) Wir beginnen damit induktiv zu zeigen, dass

$$d^{(j)} \in \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(j)}\} \quad \text{für } j = 0, \dots, k+1 \quad (11)$$

Induktionsanfang:  $j = 0$ .

Wegen  $d^{(0)} = r^{(0)}$  offensichtlich erfüllt.

Induktionsschritt:  $j \rightarrow j+1$ . Folgt direkt aus der Rekursionsvorschrift für  $d$  (6):

$$d^{(j+1)} = r^{(j+1)} + \beta^{(j)} \cdot d^{(j)} = r^{(j+1)} + \beta^{(j)} \sum_{i=0}^j \delta_i r^{(i)} \in \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(j+1)}\}$$

Es folgt damit  $\text{span}\{d^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} \subset \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\}$ . Zusammen mit dem Lemma 2.9 folgt dass beide Systeme jeweils linear unabhängig sind, also jeweils Dimension  $k-1$  haben, wodurch Gleichheit gilt.

$$\text{span}\{d^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} = \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\}$$

Aus der Rekursionsformel von  $x$  (3) ergibt sich der explizit Ausdruck:

$$x^{(k)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} \in x^{(0)} + \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\}, \quad \text{für } j = 0, \dots, k-1$$

Im nächsten Schritt wird induktiv gezeigt, dass  $r^{(j)} \in \mathcal{K}_j(A, r^{(0)})$ :

## 2.3 Gradientenverfahren

Induktionsanfang:  $j = 0$ .

Offensichtlich gilt  $r^{(0)} \in \text{span}\{r^{(0)}\}$ . Induktionsschritt:  $j - 1 \rightarrow j$ .

Aus Teil (a) und der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned} d^{(j-1)} &\in \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(j-1)}\} \subset \text{span}\{r^{(0)}, \dots, A^{j-1}r^{(0)}\} \\ \xRightarrow{(8)} r^{(j)} &= r^{(j-1)} - \alpha^{(j-1)} A d^{(j-1)} \in \text{span}\{r^{(0)}, \dots, A^j r^{(0)}\} \end{aligned}$$

Damit folgt  $\text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} \subset \mathcal{K}_j(A, r^{(0)})$ . Die Menge  $\{r^{(j)}\}_{j=0}^{k-1}$  ist linear unabhängig und daher hat der linke Unterraum die Dimension  $k$ , es folgt Gleichheit

$$\text{span}\{d^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} = \text{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} = \mathcal{K}_j(A, r^{(0)})$$

und damit auch  $x^{(k)} \in x^{(0)} + \mathcal{K}_k(A, r^{(0)})$ .

c) Aus Korollar 2.10 folgt die Existenz eines Iterationsindex  $m \leq n$  mit

$$\hat{x} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)}$$

Für ein  $0 \leq k \leq m$  gilt dann:

$$\hat{x} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} + \sum_{j=k}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} = x^{(k)} + \sum_{j=k}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)}$$

Und für ein beliebiges  $x \in x^{(0)} + \mathcal{K}_k(A, r^{(0)}) = x^{(0)} + \text{span}\{d^{(0)}, \dots, d^{(k-1)}\}$  demnach

$$\begin{aligned} \hat{x} - x &= \hat{x} - x^{(k)} + x^{(k)} - x \\ &= x^{(0)} + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} - x^{(0)} - \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \cdot d^{(j)} \\ &= \sum_{j=k}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \\ &= \hat{x} - x^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \end{aligned}$$

für  $\delta_j \in \mathbb{K}$ . Da die Suchrichtungen nach Lemma 2.9  $A$ -konjugiert sind folgt:

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(\hat{x}) &= \frac{1}{2} \|\hat{x} - x\|_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=k}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \right\|_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=k}^{m-1} \alpha^{(j)} \cdot d^{(j)} \right\|_A^2 + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \right\|_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{x} - x^{(k)}\|_A^2 + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \right\|_A^2 \\ &= \phi(\hat{x}) - \phi(x^{(k)}) + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (-\alpha^{(j)} - \delta_j) \cdot d^{(j)} \right\|_A^2 \\ &\geq \phi(\hat{x}) - \phi(x^{(k)}) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt Gleichheit bei  $x = x^{(k)}$ . □



## 2.3.4 Praktische Aspekte der Implementierung

**Bemerkung 2.13.** Für eine Implementierung des CG-Verfahren sollte man nicht die Gleichungen (5) und (7) für  $\alpha^{(k)}$  und  $\beta^{(k)}$  verwenden, sondern lieber folgende Darstellungen, welche numerisch stabiler sind:

$$\alpha^{(k)} = \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{d^{(k)H} A d^{(k)}} \quad (5')$$

$$\beta^{(k)} = \frac{\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\|r^{(k)}\|_2^2} \quad (7')$$

Die Gleichung (5') folgt aus (3) und Lemma 2.9 (a), nach welchen

$$r^{(k)H} d^{(k)} = r^{(k)H} r^{(k)} + \beta^{(k)} \cdot \underbrace{r^{(k)H} d^{(k-1)}} = 0 = \|r^{(k)}\|_2^2$$

Die Gleichung (7') folgt dann aus (8), (5') und dem Lemma 2.9 (b):

$$r^{(k+1)H} A d^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)}} \left( r^{(k+1)H} r^{(k)} - r^{(k+1)H} r^{(k+1)} \right) = \frac{-\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\alpha^{(k)}} = -\frac{\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\|r^{(k)}\|_2^2} d^{(k)H} A d^{(k)}$$

Es ergibt sich damit folgender Algorithmus:

**Algorithmus 4: CG-Verfahren**

**Initialisierung:** :  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  sei hermitisch und positiv definit.

**Ergebnis:** :  $x^{(k)}$  als Approximation für  $A^{-1}b$ ,

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  als zugehöriges Residuum.

- 1 Wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  beliebig
- 2  $r^{(0)} \leftarrow b - Ax^{(0)}$
- 3  $d^{(0)} \leftarrow r^{(0)}$
- 4 **for**  $k = 0, 1, \dots$ ,
  - 5  $\alpha^{(k)} \leftarrow \frac{\|r^{(k)}\|_2^2}{d^{(k)*H} A d^{(k)}}$
  - 6  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$
  - 7  $r^{(k+1)} \leftarrow r^{(k)} - \alpha^{(k)} A d^{(k)}$
  - 8  $\beta^{(k)} \leftarrow \frac{\|r^{(k+1)}\|_2^2}{\|r^{(k)}\|_2^2}$
  - 9  $d^{(k+1)} \leftarrow r^{(k+1)} + \beta^{(k)} d^{(k)}$
- 10 **until stop**

Der Aufwand des CG-Verfahrens ergibt sich aus einer Matrix-Vektor Multiplikation in jedem Iterationsschritt und ist damit vergleichbar mit dem Gesamt- und Einzelschritt.

**Bemerkung 2.14.** Das CG-Verfahren ist typischerweise wesentlich schneller als das Gesamt- bzw. Einzelschrittverfahren, **aber** verlangt, dass die vorausgesetzte Matrix hermitisch ist. Ein schnelles und einfaches Verfahren für allgemeine Matrizen ist derzeit nicht bekannt, ein komplizierteres Verfahren mit ähnlicher Konvergenzgeschwindigkeit ist das GMRES-Verfahren (Vgl. Hanku-Bourgeois, Kapitel 3, Abschnitt 16).

## 2.4 Präkonditionierung des CG-Verfahren

**Definition 2.15.**  $\kappa_M(A) = \text{cond}_M(A) = \|A^{-1}\|_M \cdot \|A\|_M$  wird als Kondition der Matrix  $A$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_M$  bezeichnet. Sie beschreibt die schlimmstmögliche Fortpflanzung des Eingangsfehlers beim Lösen eines LGS.

Gegeben sei  $Az = b$  mit der Lösung  $z = A^{-1}b$ . Der Einfluss vom Eingangsfehlers sei  $\Delta b$ :

$$z + \Delta z = A^{-1}(b + \Delta b) = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b$$

Die berechnete Lösung erhält dabei den Fortpflanzungsfehler  $\Delta z = A^{-1}\Delta b$ .

Sei  $\|\cdot\|$  die zu  $\|\cdot\|_M$  verträgliche Matrixnorm (d.h.  $\|Ax\| \leq \|A\|_M \cdot \|x\|$ ), so ergibt sich als relativer Fehler:

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta z\|}{\|z\|} &= \frac{\|\Delta z\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|z\|} \\ &= \frac{\|A^{-1}\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|Az\|}{\|z\|} \\ &\leq \|A^{-1}\|_M \cdot \|A\|_M \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|z\|}{\|z\|} \\ &= \text{cond}_M A \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \end{aligned}$$

Typischerweise ist die Konvergenz eines numerischen Verfahrens umso langsamer, je schlechter die Matrix  $A$  konditioniert ist, d.h. je größer die Konditionszahl  $A$  ist.

### 2.4.1 Präkonditionierung mittels Cholesky

**Idee:** Gleichungssystem  $Ax = b$  in ein äquivalentes LGS umwandeln, sodass die Kondition sich verbessert:

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (\Delta)$$

wobei  $M$  hermitisch und positiv definit ist.

**Problem:** Die Matrix  $M^{-1}A$  muss nicht notwendig hermitisch sein, daher nutzen wir die Cholesky-Zerlegung  $M = LL^H$  und erhalten<sup>1</sup>:

$$L^{-H}L^{-1}Ax = L^{-H}L^{-1}b \implies L^{-1}AL^{-*}z = L^{-1}b \quad \text{mit } x = L^{-*}z$$

Hierbei ist die Koeffizientenmatrix  $L^{-1}AL^{-H}$  sicher hermitisch und positiv definit, denn  $(L^{-1}AL^{-H})^H = (L^{-H})^H A^H (L^{-1})^H = L^{-1}AL^{-H}$  und für beliebiges  $z \in \mathbb{K}^n$  und  $x = L^{-H}z$  gilt:

$$z^H L^{-1}AL^{-H}z = x^H L^{-H}z = x^H Ax \geq 0$$

Wir können also CG-Verfahren zum Lösen von  $L^{-1}AL^{-*}z = L^{-1}b$  nutzen und aus dieser Lösung dann  $x$  bestimmen. In der Praxis werden wir stattdessen durch geschickte Modifikation des klassischen CG-Verfahren direkt  $x$  berechnen.

**Ziel:** Die Konditionszahl von  $L^{-1}AL^{-*}$  soll kleiner werden als die Konditionszahl von  $A$ , dies liefert schnellere Konvergenz der Iterierten  $z^{(k)}$  und der Lösung  $x^{(k)} = L^{-*}z$

---

<sup>1</sup> $L^{-H} = (L^H)^{-1} = (L^{-1})^H$

**Bemerkung 2.16.** Die Faktorisierung  $M = LL^*$  muss nicht explizit berechnet werden, da die Variable  $z$  wieder durch  $x$  substituiert werden kann.

Für die Berechnung der Koeffizienten  $\beta^{(k)}$  und die dafür benötigte Norm  $\|L^{-1}b - L^{-1}AL^{-H}z^{(k)}\|_2^2$  wird neben  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  noch ein Hilfsvektor

$$s^{(k)} = M^{-1}r^{(k)} = M^{-1}b - M^{-1}Ax^{(k)}$$

benötigt ( $s^{(k)}$  beschreibt das Residuum von  $(\Delta)$ ).

Für die Norm gilt

$$\|L^{-1}b - L^{-1}AL^{-H}z^{(k)}\|_2^2 = \left\| L^{-1} \underbrace{(b - Ax^{(k)})}_{=r^{(k)}} \right\|_2^2 = (r^{(k)H} \underbrace{L^{-H}(L^{-1}r^{(k)})}_{=s^{(k)}}) = r^{(k)H}s^{(k)}$$

### 2.4.2 Algorithmus: PCG-Verfahren

#### Algorithmus 5: Präkonditioniertes CG-Verfahren (PCGV)

**Initialisierung:** :  $A, M \in \mathbb{K}^{n \times n}$  seien hermitisch und positiv definit.

**Ergebnis:** :  $x^{(k)}$  als Approximation für  $A^{-1}b$ ,  
 $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  Residuum im Schritt  $k$ ,  
 $s^{(k)}$  das Residuum von  $(\Delta)$ .

- 1 Wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  beliebig
- 2  $r^{(0)} \leftarrow b - Ax^{(0)}$
- 3 Löse  $Ms^{(0)} = r^{(0)}$
- 4  $d^{(0)} \leftarrow s^{(0)}$
- 5 **for**  $k = 0, 1, \dots$ ,
  - 6  $\alpha^{(k)} \leftarrow \frac{r^{(k)H}s^{(k)}}{d^{(k)H}Ad^{(k)}}$
  - 7  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}$
  - 8  $r^{(k+1)} \leftarrow r^{(k)} - \alpha^{(k)}Ad^{(k)}$
  - 9 Löse  $Ms^{(k+1)} = r^{(k+1)}$
  - 10  $\beta^{(k)} \leftarrow \frac{r^{(k+1)H}s^{(k+1)}}{r^{(k)H}s^{(k)}}$
  - 11  $d^{(k+1)} \leftarrow s^{(k+1)} + \beta^{(k)}d^{(k)}$
- 12 **until stop**

Der Aufwand im Vergleich zum CGV erhöht sich beim PCGV um das Lösen eines LGS  $Ms = r$ . Die erhoffte schnellere Konvergenz des Iterationsverfahren macht sich also nur bezahlt, wenn das LGS  $Ms = r$  entsprechend billig gelöst werden kann.

Da  $A$  bei Anwendung des CGV typischerweise dünn besetzt ist, dominieren die Kosten für die Lösung des LGS  $Ms = r$  bei dem Gesamtkosten des PCGV.

**Satz 2.17.** Die  $k$ -te Iterierte  $x^{(k)}$  vom Algorithmus des PCGV liegt in dem affin verschobene Krylov-Raum  $x^{(0)} + \mathcal{K}_k(M^{-1}A, M^{-1}r^{(0)})$  und ist in dieser Menge die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktional  $\phi(x) = \frac{1}{2}x^H Ax - x^H b$ .

*Beweis.*

Nach Satz 2.12 liegt die entsprechende Iterierte  $z^{(k)} = L^H x^{(k)}$  in dem affin verschobenen Krylov-

## 2.5 Anwendung und Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren

Raum  $z^{(0)} + \mathcal{K}_k(L^{-1}AL^{-H}, L^{-1}b - L^{-1}AL^{-1}z^{(0)})$  mit  $z^{(0)} = L^H x^{(0)}$  und minimiert in dieser Menge das Fehlerfunktional  $\psi(z) = \frac{1}{2}L^{-1}AL^{-H}z - z^H L^{-1}b$ .

Durch die Transformation  $x = L^{-H}z$  werden die Iterierten und die genannten Krylov-Räume aufeinander abgebildet und es gilt  $\psi(z) = \phi(x)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.18.** Die Konstruktion geeigneter Prädiktionsmatrizen  $M$  ist eine schwierige Sache.

## 2.5 Anwendung und Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren

### 2.5.1 Lösen von Randwertproblemen mittels CG-Verfahren

Bevor wir zu einer Anwendung derartiger iterierten Verfahren starten, wiederholen wir kurz einen wichtigen Satz der Analysis:

**Satz 2.19 (Satz von Taylor).** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $x, x_0 \in [a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x, x_0)}$$

*Beweis.* Analysis II.

**Beispiel 2.20.** Wir betrachten das Randwertproblem des Laplace Operators<sup>a</sup>:

$$-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in Q$$

gemeinsam mit der Dirichlet-Randbedingung  $u(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \partial Q$  auf dem Einheitsquadrat  $Q = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ .

Die Lösung  $u = u(x, y)$  beschreibt z.B. die Auslenkung einer (idealisierten) Membran, die über dem Gebiet  $Q$  horizontal gespannt ist und mit einer Kraftdichte  $f$  vertikal belastet wird.

Eine Lösung ist im Allgemeinen nicht analytisch angebar, sodass man auf numerische Näherungslösungen zurückgreifen muss.

Betrachte  $Q$  als Quadratgitter:



mit  $m$  Knoten und Gitterabstand  $h = \frac{1}{m-1}$ . Die gesamte Knotenzahl ist  $n = m^2$ .

Für die Nachbarpunkte um einen Punkte  $(x, y) \in Q$  gilt nach Taylorformel:

$$u(x+h, y) \approx u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \mathcal{O}(h^4) \quad (1)$$

$$u(x-h, y) \approx u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \mathcal{O}(h^4) \quad (2)$$

$$u(x, y+h) \approx u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \mathcal{O}(h^4) \quad (3)$$

$$u(x, y-h) \approx u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \mathcal{O}(h^4) \quad (4)$$

Das Summieren von (1) und (2), sowie (3) und (4) liefert

$$\begin{aligned} u(x+h, y) + u(x-h, y) &= 2u(x, y) + h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^4) \\ \implies \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= h^{-2} \cdot (u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)) + \mathcal{O}(h^2) \\ u(x, y+h) + u(x, y-h) &= 2u(x, y) + h^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mathcal{O}(h^4) \\ \implies \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= h^{-2} \cdot (u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die sogenannte „5-Punktregel“:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ &= -h^{-2} \cdot (u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)) \end{aligned}$$

Durch Berücksichtigung der Randbedingung  $u(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \partial Q$  ist dies äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem  $Ax = b$  für den Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  der unbekannten Knotenwerte  $x_i = u(P_i)$

Die Matrix  $A$  hat die Gestalt

$$A = \left( \begin{array}{cccc} B & -I & 0 & \dots \\ -I & B & -I & \\ 0 & -I & B & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{array} \right) \Bigg\}^n \quad \text{mit } B = \left( \begin{array}{cccc} 4 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -1 & \\ 0 & -1 & 4 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{array} \right) \Bigg\}^m$$

und der Einheitsmatrix  $I$ , d.h.  $B, I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Die rechte Seite ist  $b = h^2(f(P_1), \dots, f(P_n))^T$ .

Wir erhalten ein sehr großes LGS mit dünn besetzter Bandmatrix mit Bandbreite  $2m+1$ , symmetrisch, schwach diagonaldominant, positiv definit. Es bietet sich also an unsere iterativen Verfahren zum Lösen anzuwenden.

<sup>a</sup>Sei  $f$  eine Funktion in kartesischen Koordinaten  $(x, y)$ , so ist der Laplace Operator definiert durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

## 2.5.2 Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren

**Satz 2.21 (CG-Konvergenz).** Sei  $x$  die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ . Für das CG-Verfahren gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq 2 \left( \frac{1 - 1/\sqrt{\kappa}}{1 + 1/\sqrt{\kappa}} \right)^k \cdot \|x^{(0)} - x\|$$

wobei  $\kappa := \kappa(A) = \text{cond}(A)$  die Konditionszahl von  $A$  ist.

Zur Reduktion des Anfangsfehlers um den Faktor  $\varepsilon$  sind circa

$$k(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\kappa(A)} \cdot \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

Iterationsschritte erforderlich.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch einen Hilfssatz:

**Hilfssatz 2.22 (polynomiale Normschranke).** Sei  $p$  ein reelles Polynom  $k$ -ten Grades (d.h.  $p \in P_k := \mathbb{R}_k[X]$ ) mit  $p(0) = 1$ . Wenn  $p$  auf einer Menge, die alle Eigenwerte von  $A$  enthält beschränkt ist, d.h.  $\sup_{\mu \in S} |p(\mu)| \leq M$ , dann gilt

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq M \cdot \|x^{(0)} - x\|_A$$

*Beweis des Hilfssatz.*

Durch  $\mathcal{K}_k(A, r^{(0)}) = \{p(A)r^{(0)} : p \in P_{k-1}\}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\|_A &= \min\{\|y - x\|_A : y \in x^{(0)} + \mathcal{K}_k(A, r^{(0)})\} \\ &= \min_{p \in P_{k-1}} \|x^{(0)} - x + p(A)r^{(0)}\|_A \end{aligned}$$

Wegen  $r^{(0)} = Ax^{(0)} - b = A \cdot (x^{(0)} - x)$  folgt dann

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\|_A &= \min_{p \in P_{k-1}} \|x^{(0)} - x + p(A) \cdot A \cdot (x^{(0)} - x)\| \\ &\leq \min_{p \in P_{k-1}} \|I + A \cdot p(A)\|_A \cdot \|x^{(0)} - x\|_A \end{aligned}$$

Da  $(1 + x \cdot P(x))$  selbst wieder ein Polynom von Grad  $k$  mit  $p(0) = 1$  ist, lässt sich dies weiter abschätzen zu

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \min_{p \in P_k, p(0)=1} \|p(A)\|_A \cdot \|x^{(0)} - x\|_A$$

mit der von  $A$ -Norm (Energienorm)  $\|\cdot\|_A$  erzeugten natürlichen Matrixnorm  $\|\cdot\|_A$ .

Für beliebiges  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt mit einer Orthonormalbasis  $\{w_1, \dots, w_n\}$  aus Eigenvektoren von  $A$  (d.h.  $Aw_j = \lambda_j w_j$ ) die Darstellung:

$$y = \sum_{j=1}^n \gamma_j w_j, \quad \gamma_j = \langle y, w_j \rangle$$

und folglich für ein  $p(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ :

$$\begin{aligned} p(A)y &= p(A) \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j w_j \right) = \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j p(A) w_j \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j \sum_{i=0}^k c_i A^i w_j \right) = \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j \sum_{i=0}^k c_i \lambda_j^i w_j \right) = \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j p(\lambda_j) w_j \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|p(A)y\|_A^2 &= \left\| \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j p(\lambda_j) w_j \right) \right\|_A^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n \gamma_j p(\lambda_j) w_j, A \sum_{l=1}^n \gamma_l p(\lambda_l) w_l \right\rangle_2 \\ &= \sum_{j,l=1}^n \gamma_j \gamma_l p(\lambda_j) p(\lambda_l) \cdot \langle w_j, A w_l \rangle_2 = \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 p(\lambda_j)^2 \lambda_j \leq M^2 \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \lambda_j = M^2 \|y\|_A^2\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|p(A)\|_A = \sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|p(A)y\|_A}{\|y\|_A} \leq M$$

und damit die Behauptung.  $\square$

*Beweis zur CG-Konvergenz (Satz 2.21)*

Durch Verwendung des Hilfssatz mit  $S := [\lambda, \Lambda]$ , wobei  $\lambda$  den kleinsten und  $\Lambda$  den größten Eigenwert von  $A$  beschreibt, folgt:

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \min_{p \in P_k, p(0)=1} \left( \sup_{\lambda \leq \mu \leq \Lambda} |p(\mu)| \right) \cdot \|x^{(0)} - x\|_A$$

Dies ergibt die Behauptung wenn wir noch zeigen können, dass

$$\min_{p \in P_k, p(0)=1} \sup_{\lambda \leq \mu \leq \Lambda} |p(\mu)| \leq 2 \cdot \frac{(1 - \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}})^k}{(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}})^k}$$

Hierbei handelt es sich um ein Problem der Bestapproximation von Polynomen bzgl. der Maximumnorm (Chebyshev-Approximation).

Die beste Lösung  $\bar{p}$  ist gegeben durch

$$\bar{p}(\mu) = \frac{T_k\left(\frac{\Lambda + \lambda - 2\mu}{\Lambda - \lambda}\right)}{T_k\left(\frac{\Lambda + \lambda}{\Lambda - \lambda}\right)}$$

wobei  $T_k$  das  $k$ -te Chebyshev-Polynom auf  $[-1, 1]$  ist, für dieses gilt

$$\sup_{\lambda \leq \mu \leq \Lambda} |\bar{p}(\mu)| = T_k\left(\frac{\Lambda + \lambda}{\Lambda - \lambda}\right)^{-1}$$

Aus der Darstellungen für die Chebyshev-Polynome

$$T_k(\mu) = \frac{1}{2} \left( (\mu + \sqrt{\mu^2 - 1})^k + (\mu - \sqrt{\mu^2 - 1})^k \right), \quad \text{für } \mu \in [-1, 1]$$

folgt mittels der Identität

$$\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)^2 - 1} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \frac{2\sqrt{\kappa}}{\kappa - 1} = \frac{(\sqrt{\kappa} + 1)^2}{\kappa - 1} = \frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}$$

die folgende Abschätzung nach unten:

$$T_k\left(\frac{\Lambda + \lambda}{\Lambda - \lambda}\right) = T_k\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right) = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k \right) \geq \left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}\right)^k$$

Also ist  $\bar{p}(\mu)$  auf  $[\lambda, \Lambda]$  durch  $2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}\right)^k$  beschränkt, was die erste Ungleichung des Satzes zeigt.

## 2.5 Anwendung und Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahren

Für den zweiten Teil betrachten wir die Anzahl der Schritte, so dass

$$2 \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{k(\varepsilon)} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad k(\varepsilon) > \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \cdot \left( \ln \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right) \right)^{-1}$$

Durch die Reihendarstellung  $\ln \frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{x^5} + \dots\right)$  ist die zweite Ungleichung erfüllt wenn

$$k(\varepsilon) > \frac{1}{2} \sqrt{\kappa} \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

□



## 3 Eigenwertprobleme

### 3.1 Einleitung

Aus der linearen Algebra ist bereits das klassische Eigenwertproblem bekannt:

Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und gesucht sind  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in \mathbb{K}^n$ ,  $v \neq 0$  sodass

$$Av = \lambda v$$

Das Umstellen des Eigenwertproblems ergibt das System

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (*)$$

Hierbei muss  $A - \lambda I$  singulär sein, sonst ist die eindeutige Lösung des Systems gegeben durch  $v = 0$ .

Per Hand würden wir hier nun das charakteristische Polynom  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  aufstellen und dessen Nullstellen bestimmen, da dies genau die Werte für  $\lambda$  sind, für welche das System (\*) nicht-triviale Lösungen hat.

Für die numerische Berechnung der Eigenwerte ist dies nicht ratsam, da Nullstellenbestimmung bei Polynomen hochgradig schlecht konditioniert ist.

Wir stellen folgende Zusammenhänge der Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren fest:

- a) Eigenwert bekannt  $\implies$  Eigenvektor als Lösung eines LGS (\*).
- b) Eigenvektor bekannt  $\implies$  Eigenwert über Rayleigh-Quotient  $\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|_2^2}$

### 3.2 Einschließungssätze und Stabilität

**Hilfssatz 3.1.** Seien  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  beliebige Matrizen und  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  eine durch  $\|\cdot\|$  induzierte Operatornorm. Dann gilt für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ , welcher nicht zugleich auch Eigenwert von  $B$  ist, die Beziehung

$$\|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)\|_{\text{op}} \geq 1$$

*Beweis.*

Ist  $w$  ein Eigenvektor vom Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ , so folgt aus der Identität  $(A - B)w = (\lambda I - B)w$ , wenn  $\lambda$  kein Eigenwert von  $B$  ist, d.h.  $\lambda I - B$  invertierbar, dass:

$$(\lambda I - B)^{-1}(A - B)w = w$$

Demnach ist also

$$1 \leq \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)x\|}{\|x\|} = \|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)\|_{\text{op}}$$

## 3.2.1 Gerschgorin-Kreise

**Satz 3.2 (Satz von Gerschgorin).** Alle Eigenwerte einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  liegen in der Vereinigung der sogenannten Gerschgorin-Kreise

$$K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right\}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Für eine Teilmenge  $I \subset \{1, \dots, n\}$  gilt, sind die Mengen  $U = \bigcup_{j \in I} K_j$  und  $V = \bigcup_{j \notin I} K_j$  disjunkt, so liegen in  $U$  genau  $m := |I|$  und in  $V$  genau  $n - m$  Eigenwerte von  $A$  (mehrfache Eigenwerte werden entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt).

*Beweis.*

Zur ersten Behauptung:

Wir setzen  $B = D := \text{diag}(a_{jj})$  in dem Hilfssatz 3.1 und nehmen  $\|\cdot\|_\infty$  als natürliche Matrixnorm.

Für  $\lambda \neq a_{jj}$  folgt dann

$$\|(\lambda I - D)^{-1}(A - D)\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \frac{1}{|\lambda - a_{jj}|} \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq 1,$$

d.h.  $\lambda$  liegt in einem der Gerschgorin-Kreise.

Für den zweiten Teil setzen wir  $A_t = D + t(A - D)$ , dann hat  $A_0 = D$  als Eigenwerte  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  die Mittelpunkte von  $K_1, \dots, K_n$  und damit liegen genau  $m$  dieser Eigenwerte in  $U$  und die restlichen  $n - m$  in  $V$ .

Die Abbildung  $t \mapsto D + t(A - D)$  ist stetig in  $t$  und da Eigenwerte einer Matrix selbst stetig sind (d.h. ändert sich die Matrix leicht ab, dann ändern sich auch die Eigenwerte nur leicht ab), folgt, dass beim Wandern von  $t = 0$  zu  $t = 1$  und damit von  $A_0 = D$  zu  $A_1 = A$  sich die Eigenwerte stetig durch den Raum  $\mathbb{K}$  bewegen. Da die Mengen  $U$  und  $V$  abgeschlossen und disjunkt sind haben sie einen positiven Abstand, welcher durch die stetige Bewegung der Eigenwerte nicht überschritten werden kann.  $\square$

Ein Alternativer Beweis zur ersten Behauptung liefert eine Betrachtung des Eigenwertproblems  $Ax = \lambda x$  mit Eigenvektor  $x \neq 0$ . Offensichtlich existiert ein  $x_i$  mit  $|x_j| \leq |x_i|$  für alle  $j \neq i$ .

Die  $i$ -te Komponente von  $Ax$  ist dann gegeben durch

$$\lambda x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$$

Somit folgt

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Demnach liegt  $\lambda \in K_i$ .  $\square$

**Korollar 3.3.** Aus Satz 3.2 folgt insbesondere für  $m = 1$ , dass wenn ein Gerschgorin-Kreis keinen anderen schneidet, dass dieser genau einen Eigenwert enthält. Und wenn alle Gerschgorin-Kreise disjunkt sind, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

Weiter ist eine Matrix genau dann invertierbar, wenn keiner der Gerschgorin-Kreise die 0 enthält.

**Beispiel 3.4.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 2 & 0.4 \\ -0.2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich die folgenden Gerschgorin-Kreise:

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 0.3\}$$

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 0.4\}$$

$$K_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 0.2\}$$



### 3.2.2 Stabilität von Eigenwerten

**Satz 3.5 (Stabilitätssatz).** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine diagonalisierbare Matrix, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $W = (W^{(1)} | \dots | W^{(n)})$  aus Eigenvektoren mit  $A = W\Lambda W^{-1}$  und  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i(A))$ .

Für eine zweite Matrix  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt es zu jedem Eigenwert  $\lambda(B)$  von  $B$  einen Eigenwert  $\lambda(A)$  von  $A$ , sodass

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq \text{cond}_2(W) \cdot \|A - B\|_2$$

*Beweis.*

Sei  $\lambda = \lambda(B)$  kein Eigenwert von  $A$ , so gilt

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_2 &= \|(\lambda I - W\Lambda W^{-1})^{-1}\|_2 \\ &= \|W(\lambda I - \Lambda)^{-1}W^{-1}\|_2 \\ &\leq \|W\|_2 \cdot \|W^{-1}\|_2 \cdot \|(\lambda I - \Lambda)^{-1}\|_2 \\ &= \text{cond}_2(W) \cdot \max_{i=1, \dots, n} |\lambda - \lambda_i(A)|^{-1} \end{aligned}$$

Mit dem Hilfssatz 3.1 folgt dann die Behauptung.  $\square$

Für hermitesche Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  existiert bekannterweise eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{K}^{n \times n}$  aus Eigenvektoren, sodass die Matrix  $W$  als unitär angenommen werden kann, d.h.  $W^{-1} = W^H$ . In diesem

### 3.3 Iterative Verfahren

Fall gilt  $\|W\| = \sqrt{\lambda_{\max}(W^H W)} = \sqrt{\lambda_{\max}(I)} = 1$  und analog  $\|W^H\| = 1$ , also

$$\text{cond}_2(W) = \|W^{-1}\|_2 \cdot \|W\|_2 = 1$$

**Regel:** Allgemein kann man sagen, dass das Eigenwertproblem für hermitesche Matrizen gut konditioniert ist, während das allgemeine Eigenwertproblem je nach Größe von  $\text{cond}_2(W)$  beliebig schlecht konditioniert sein kann.

### 3.3 Iterative Verfahren

Im folgenden wollen wir ein iteratives Verfahren zu Lösung des partiellen Eigenwertproblems einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  betrachten.

#### 3.3.1 Potenz-Methode

**Definition 3.6.** Die Potenzmethode (Von-Mises-Iteration) erzeugt ausgehend von einem Startvektor  $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$  mit  $\|z^{(0)}\| = 1$  eine Folge von Iterationen  $z^{(t)} \in \mathbb{C}^n, t = 1, 2, \dots$  durch

$$\tilde{z}^{(t)} = Az^{(t-1)} \quad \text{und} \quad z^{(t)} = \frac{\tilde{z}^{(t)}}{\|\tilde{z}^{(t)}\|}$$

Für einen beliebigen Index  $k \in \{1, \dots, n\}$ , (z.B. maximale Komponente von  $z^{(k)}$ ) setzen wir:

$$\lambda^{(t)} = \frac{(Az^{(t)})_k}{(z^{(t)})_k}$$

Zur Normierung wird üblicherweise  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  oder  $\|\cdot\|_\infty$  verwendet.

Zur Analyse des Verfahrens nehmen wir an, dass die Matrix  $A$  diagonalisierbar ist. Dies ist äquivalent zu der Tatsache, dass  $A$  eine Basis von normierten Eigenvektoren  $\{w^{(1)}, \dots, w^{(n)}\}$  besitzt.

zusätzlich nehmen wir an, dass  $z^{(0)}$  eine nicht-triviale Komponente bezüglich  $w^{(n)}$  besitzt. (*Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da aufgrund des unvermeidbaren Rundungsfehlers dieser Fall der Iteration sicher einmal auftritt*)

**Satz 3.7 (Potenz-Methode).** Die Matrix  $A$  sei diagonalisierbar und ihr betragsgrößer Eigenwert sei separiert von den anderen Eigenwerten, also oBdA  $|\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_{n-2}| \geq \dots \geq |\lambda_1|$ .

Der Startvektor  $z^{(0)}$  habe eine nicht-triviale Komponente bezüglich des zugehörigen Eigenvektors  $w^{(n)}$ , dann gibt es Zahlen  $\delta_t \in \mathbb{C}, |\delta_t| = 1$ , sodass

$$\|z^{(t)} - \delta_t \cdot w^{(n)}\| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \lambda^{(t)} - \lambda_n = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^t\right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

*Beweis.*

Sei  $z^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot w^{(i)}$  die Basisdarstellung des Startvektors (mit  $\alpha_n \neq 0$ ). Für die Iterierten gilt:

$$z^{(t)} = \frac{\tilde{z}^{(t)}}{\|\tilde{z}^{(t)}\|} = \frac{Az^{(t-1)}}{\|Az^{(t-1)}\|} = \dots = \frac{A^t z^{(0)}}{\|A^t z^{(0)}\|} \quad (1)$$

Dabei gilt:

$$A^t z^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^t w^{(i)} = \lambda_n^t \alpha_n \cdot \left( w^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right)^t w^{(i)} \right) \quad (2)$$

### 3.3 Iterative Verfahren

Wegen  $|\frac{\lambda_i}{\lambda_n}| \leq \rho := |\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}| < 1$  für  $i = 1, \dots, n-1$  folgt

$$A^t z^{(0)} = \lambda_n^t \alpha_n (w^{(n)} + \mathcal{O}(\rho^t)) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Dies ergibt nach (1):

$$z^{(t)} = \frac{A^t z^{(0)}}{\|A^t z^{(0)}\|} = \frac{\lambda_n^t \alpha_n (w^{(n)} + \mathcal{O}(\rho^t))}{|\lambda_n^t \alpha_n| \cdot \|w^{(n)} + \mathcal{O}(\rho)\|} = \underbrace{\frac{\lambda_n^t \alpha_n}{|\lambda_n^t \alpha_n|}}_{=: \delta_k} \cdot w^{(n)} + \mathcal{O}(\rho)$$

Dabei ist  $\delta_t \in \mathbb{C}$  und  $|\delta_t| = 1$ , daher folgt die erste Aussage.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lambda^{(t)} &= \frac{(Az^{(t)})_k}{(z^{(t)})_k} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{(A^{t+1}z^{(0)})_k}{\|(A^{t+1}z^{(0)})_k\|} \cdot \frac{\|(A^{t+1}z^{(0)})_k\|}{(A^t z^{(0)})_k} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{\lambda_n^{t+1} \left( \alpha_n w_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right)^{t+1} w_{i,k} \right)}{\lambda_n^t \left( \alpha_n w_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_n} \right)^t w_{i,k} \right)} \\ &= \lambda_n + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^t \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Die Konvergenz der Potenzmethode ist umso besser, je mehr der betragsgrößte Eigenwert  $\lambda_n$  von den übrigen separiert ist. Der Beweis ist verallgemeinerbar für betragsgrößte Eigenwerte, welche mehrfach auftreten, sofern die Matrix diagonalisierbar ist.

#### 3.3.2 Inverse Iteration

Als nächstes wollen wir uns die „Inverse Iteration“ nach Wielandt anschauen.

Wir nehmen an, wir haben bereits eine Näherung  $\tilde{\lambda}$  für einen Eigenwert  $\lambda_k$  der regulären Matrix  $A$  (z.B. durch Einschließungssätze). Die Näherung sei gut in dem Sinne, dass  $|\lambda_k - \tilde{\lambda}| \ll |\lambda_i - \tilde{\lambda}|$  für  $i \neq k$ .

Wir betrachten das Eigenwertproblem, welches sich für die Matrix  $A - \tilde{\lambda}I$  ergibt:

$$(A - \tilde{\lambda}I)v = \xi v \iff (A - \tilde{\lambda}I - \xi I)v = 0 \iff (A - (\tilde{\lambda} + \xi)I)v = 0$$

Wegen  $(A - \lambda_k I)v = 0$ , ist  $\xi = \lambda_k - \tilde{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A - \tilde{\lambda}I$  und damit  $\mu = \frac{1}{\xi} = (\lambda_k - \tilde{\lambda})^{-1}$  ein Eigenwert von  $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$ .<sup>2</sup>

Allgemeiner hat im Falle  $\tilde{\lambda} \neq \lambda_k$  die Matrix  $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$  die Eigenwerte  $\mu_i = (\lambda_i - \tilde{\lambda})^{-1}$  für  $i = 1, \dots, n$  und es gilt

$$\left| \frac{1}{\lambda_k - \tilde{\lambda}} \right| \gg \left| \frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}} \right| \quad \text{für } i \neq k$$

---

<sup>2</sup>  $Av = \lambda v \implies v = A^{-1}\lambda v \implies \lambda^{-1}v = A^{-1}v$

**Definition 3.8.** Die inverse Iteration beruht auf der Anwendung der Potenzmethode auf die Matrix  $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$  mit einer a priori Schätzung  $\tilde{\lambda}$  zum gesuchten Eigenwert  $\lambda_k$ .

Ausgehend von einem Startwert  $z^{(0)}$  werden Iterierte  $z^{(t)}$  als Lösung der Gleichungssysteme

$$(A - \tilde{\lambda}I)\tilde{z}^{(t)} = \tilde{z}^{(t-1)}, \quad z^{(t)} = \frac{\tilde{z}^{(t)}}{\|\tilde{z}^{(t)}\|}$$

bestimmt.

Die zugehörige Eigenwertnäherung wird bestimmt durch

$$\mu^{(t)} = \frac{(z^{(t)})_k}{((A - \tilde{\lambda}I)z^{(t)})_k}$$

mit Nenner  $\neq 0$  (oder im symmetrischen Fall einfach mit Hilfe der Rayleigh-Quotienten).

Aufgrund der Aussagen über Potenzmethoden liefert die inverse Iteration also für eine diagonalisierbare Matrix jeden Eigenwert, zu dem bereits eine hinreichend gute Näherung bekannt ist.

### 3.4 Page-Rank-Algorithmus

Das Ziel des Page-Rank-Algorithmus ist die Bestimmung der Ausgabereihenfolge bei Suchergebnissen. Dabei berufen wir uns auf folgende Regeln:

- (1) Eine Website erhält eine umso höhere Bewertung, je mehr Links auf sie zeigen.
- (2) Links von höher bewerteten Websites soll relevanter sein, als solche von unbedeutenden Websites
- (3) Ein Link von einer Website, die wenig Links nach außen hat, soll höher gewichtet werden als der von einer Website mit vielen Links nach außen.

Wir beschreiben unser Model als ein Netz mit  $n$  Websites, wobei ein Index  $k$  immer für eine Website steht und suchen die Bewertung  $x_k \in \mathbb{R}$  der Website  $k$ .

Weiter sei  $L_k$  die Menge der Websites, welche auf  $k$  verlinken, Links auf Websites von sich selbst werden dabei nicht berücksichtigt und  $n_k$  sei die Anzahl Websites, auf welche  $k$  verlinkt.

Wir modellieren mittels folgendem LGS

$$x_k = \sum_{j \in L_k} \frac{1}{n_j} \cdot x_j$$

Die Gleichung  $x = Ax$  mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n_j}, & \text{falls die Seite } j \text{ auf die Seite } i \text{ verlinkt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

entspricht hierbei der Eigenwertgleichung für den Eigenwert  $\lambda = 1$ .

Der historische Ansatz von Google ist die Potenzmethode:

#### 3.4.1 Stochastische Vektoren/Matrizen

**Definition 3.9.** Ein Vektor  $p \in \mathbb{R}^n$  heißt stochastischer Vektor, wenn alle Elemente  $p_i$  nicht-negativ sind und die Summe der Elemente des Vektors gleich 1 ist, d.h.  $\sum_i p_i = 1$ .

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt stochastische Matrix, wenn alle Spalten der Matrix stochastische Vektoren sind, d.h.

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j$$

**Lemma 3.10.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine stochastische Matrix und  $p \in \mathbb{R}^n$  ein stochastischer Vektor, dann ist das Produkt  $Ap \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wieder ein stochastischer Vektor.

*Beweis.*

Offensichtlich  $(Ap)_{ij} \geq 0$ , weiter es sei  $a_i$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $A$ , d.h.  $a_i$  ist ein stochastischer Vektor

$$\begin{aligned} A \cdot p &= A \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = p_1 \cdot a_1 + \cdots + p_n \cdot a_n \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i a_{i1} + \cdots + p_i a_{in}) \\ &= p_1 \sum_{i=1}^n a_{i1} + \cdots + p_n \sum_{i=1}^n a_{in} \\ &= p_1 \cdot 1 + \cdots + p_n \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.11.** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  stoch. Matrizen, dann ist das Produkt  $A \cdot B$  wieder eine stoch. Matrix.

*Beweis.* Folgt direkt aus Lemma 3.9.

**Satz 3.12.** Eine stochastische Matrix  $A$  hat immer den Eigenwert 1. Der Betrag aller anderen Eigenwerte ist kleiner oder gleich 1.

*Beweis.*

Für den ersten Teil nutzen wir aus, dass  $A$  und  $A^T$  die gleichen Eigenwerte, da  $A$  und  $A^T$  die gleiche Determinante besitzen und damit die charakteristischen Polynome  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I) = \chi_{A^T}(\lambda)$  übereinstimmen.

Weiter ist nach Definition einer stochastischen Matrix die Summe jedes Zeilenvektors von  $A^T$  ist gleich 1, also ist  $e = (1, \dots, 1)^T$  ein Eigenvektor von  $A^T$  mit Eigenwert 1, also besitzt auch die Matrix  $A$  den Eigenwert  $\lambda = 1$ .

Für den zweiten Teil nehmen wir an es existiert ein Eigenvektor  $v$  zum Eigenwert  $\lambda$  mit  $|\lambda| > 1$ , denn dann gilt

$$A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1} \lambda v = \lambda A^{n-1} v = \cdots = \lambda^n v$$

Für die Länge dieses Vektors gilt  $\|\lambda^n v\| = |\lambda|^n \cdot \|v\|$  ein exponentielles Wachstum in  $n$ , da  $|\lambda| > 1$ .

Daraus folgt, dass für große  $n$  ein Element  $(A^n)_{ij}$  existiert, welches größer als 1 ist.

Da nach Korollar 3.11 die Matrix  $A^n$  stochastisch ist bildet dies einen Widerspruch.

□

**Lemma 3.13.** Die Bewertungsmatrix  $A$  des Page-Rank-Algorithmus ist eine stochastische Matrix.

*Beweis.* Offensichtlich gilt  $a_{ij} \geq 0$ , weiter gilt

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = n_j \cdot \frac{1}{n_j} + (n - n_j) \cdot 0 = 1$$

□

**Beispiel 3.14.** Wir betrachten folgendes einfaches Netz mit 4 Knoten:



Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems liefert:

$$x \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.24 \\ 0.54 \\ 0.36 \end{pmatrix} \right\}$$

Demnach hat die erste Website die höchste Bewertung.

### 3.4.2 Vorgehensweise für weitere Eigenwerte/Eigenvektoren

Wir betrachten die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 2$  zu den Eigenvektoren

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir führen folgende Transformation durch:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=(1,0)^T(3,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



### 3.4 Page-Rank-Algorithmus

**Idee:** Umwandlung der betrachteten Matrix in eine andere Matrix, wobei der betragsgrößte Eigenwert entfernt wird, d.h. durch 0 ersetzt wird. Eine Iterative Anwendung liefert dann alle Eigenwerte.

**Herleitung:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben mit betragsmäßig absteigenden Eigenwerten, d.h.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > 0$$

Der Eigenvektor zu  $\lambda_1$  sei gegeben durch  $u^{(1)}$ .

Wir wählen eine von Null verschiedene Komponente  $u_p^{(1)}$  von  $u^{(1)}$  und schreiben  $A_p$  für die  $p$ -te Zeile von  $A$ , d.h.  $A_p = (A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pn})^T$ . Betrachte nun die Matrix

$$B = A - \frac{1}{w_p^{(1)}} w^{(1)} \cdot A_p^T \quad \text{mit} \quad B_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{w_p^{(1)}} w_i^{(1)} \underbrace{A_{pj}}_{A_{pj}}$$

Aus dem Eigenwertproblem  $Aw^{(k)} = \lambda_k w^{(k)}$  ergibt sich

$$\lambda^{(k)} w_p^{(k)} = (Aw^{(k)})_p = \langle A_p, w^{(k)} \rangle$$

Für  $k = 1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} Bw^{(1)} &= Aw^{(1)} - \frac{1}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \cdot \langle A_p, w^{(1)} \rangle \\ &= Aw^{(1)} - \frac{1}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \cdot \lambda_1 w_p^{(1)} \\ &= \lambda_1 w^{(1)} - \lambda_1 w^{(1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d.h. 0 ist ein Eigenwert von  $B$  (statt vorher  $\lambda^{(1)}$  von  $A$ ).

Analoge Überlegung für  $k = 2, \dots, n$  liefert:

$$\begin{aligned} Bw^{(k)} &= \lambda_k w^{(k)} - \frac{1}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \cdot \lambda_k w_p^{(k)} \\ &= \lambda_k \cdot \left( w^{(k)} - \frac{w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Die Eigenwerte bleiben beim Wechsel von  $A$  zu  $B$  erhalten, da

$$\begin{aligned} Bw^{(k)} + 0 &= Bw^{(k)} + \underbrace{Bw^{(1)}}_{=0} \\ &= Bw^{(k)} + Bw^{(1)} \cdot \frac{-w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \\ &= B \cdot \left( w^{(k)} - \frac{w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Und damit

$$B \cdot \left( w^{(k)} - \frac{w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \right) \stackrel{(2)}{=} Bw^{(k)} \stackrel{(1)}{=} \lambda_k \cdot \left( w^{(k)} - \frac{w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \right)$$

Dies zeigt für  $k = 2, 3, \dots, n$ , dass  $\lambda_k$  auch ein Eigenwert zu  $B$  ist, wenn auch mit anderem Eigenvektor.

**Satz 3.15 (Deflation nach Wielandt).** Seien die Eigenwerte von  $A$ , betragsmäßig absteigend, d.h.  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , mit zugehörigen Eigenvektoren  $w^{(1)}, \dots, w^{(n)}$ . Dann besitzt die Matrix

$$B = A - \frac{1}{w_p^{(1)}} w^{(1)} \cdot A_p^T \quad \text{mit} \quad u_p^{(1)} \neq 0 \text{ und } A_p = (A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pn})^T$$

die Eigenwerte  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $w^{(1)}, \tilde{w}^{(2)}, \dots, \tilde{w}^{(n)}$ , wobei

$$\tilde{w}^{(k)} = w^{(k)} - \frac{w_p^{(k)}}{w_p^{(1)}} \cdot w^{(1)} \quad (*)$$

Den zum Eigenwert  $\lambda_2$  zugehörigen Eigenvektor  $\tilde{w}^{(2)}$  erhält man somit mit der Potenzmethode für die Matrix  $B$  nach ihrer Definition.

Der Eigenvektor  $w^{(2)}$  zum Eigenwert  $\lambda_2$  der Matrix  $A$  kann dann wie folgt rekonstruiert werden:

- Lösen des linearen Gleichungssystems  $(*)$  bezüglich  $w^{(2)}$
- Lösen des LGS der EW-Gleichung
- Inverse Iteration nach Wielandt anwenden, um Eigenvektor von  $A$  zum zugehörigen Eigenwert  $\lambda_2$  zu erhalten

**Beispiel 3.16.** Gesucht seien die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt verwenden wir die Potenzmethode um den betragsmäßig größten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor zu bestimmen, wir erhalten:

$$\lambda_1 = 6, w^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Deflation wählen wir nun  $p = 1$  mit  $u_p^{(1)} \neq 0$  und  $a^T = (-4, -5, -1)$ , die resultierende Matrix  $B$  ergibt sich dann durch:

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-4, 14, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -15/7 & 3 & 0 \\ -2 & 7/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Erneutes Anwenden der Potenzmethode auf die neue Matrix  $B$  liefert den zweigrößten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor von  $B$ :

$$\lambda_2 = 3, w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Deflation mit dem neu gewonnen Eigenvektor und  $p = 3$  ergibt

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -15/7 & 3 & 0 \\ -2 & 7/2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-2, 7/2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -11/7 & 2 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Page-Rank-Algorithmus

Hierbei ergibt sich der letzte Eigenwert und der zu  $C$  zugehörige Eigenvektor

$$\lambda_3 = 2 \quad , \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach beliebiger Methodik aus Satz 3.14 lassen sich nun aus  $w^{(2)}$  und  $v^{(3)}$  die Eigenvektoren  $u^{(2)}$  und  $u^{(3)}$  von  $A$  konstruieren.