

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Zusatzblatt - Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1

In einer Stadt mit N Einwohnern möchte das Bürgermeisteramt die Zustimmungsquote zu einem kommunalen Beschluss schätzen. Die unbekannte Anzahl an Befürwortern sei $M \in \{0, \dots, N\}$. Bei einer Befragung von n (zufällig ausgewählten) Personen befürworteten K den Beschluss. Geben Sie die passende parameterische Verteilungsfamilie an, bestimmen Sie einen ganzzahligen Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter M und einen Schätzer für die Zustimmungsquote.

Aufgabe 11.2

In einem Fragebogen gibt es m Fragen und zu jeder Frage ist genau eine von k Antwortmöglichkeiten korrekt (Single Choice) anzukreuzen. Jeder der n Teilnehmer kreuzt zunächst alle Fragen, die er weiß richtig an und rät die verbleibenden Antworten. Es bezeichne X_j die Anzahl der von Teilnehmer j gewussten Antworten sowie Y_j die Anzahl derer, die er korrekt beantwortet hat. Wir modellieren vereinfachend X_1, \dots, X_n als unabhängig und identisch verteilt. Interesse besteht nun an der Verteilung \mathbb{P}_X der X_j .

- i) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen den Verteilungen \mathbb{P}_X und \mathbb{P}_Y dar. *Hinweis:* Betrachten Sie $\mathbb{P}(Y_j = y | X_j = x) \forall x, y \in \{0, \dots, m\}$.
- ii) Konstruieren Sie einen erwartungstreuen und stark konsistenten Schätzer für

$$p = (\mathbb{P}(X_j = 0), \dots, \mathbb{P}(X_j = m))^T.$$

Aufgabe 11.3

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter $\lambda > 0$ der verschobenen Exponentialverteilung mit Dichte

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda(x - \gamma)) \mathbb{1}_{\{x \geq \gamma\}}$$

bei festem $\gamma > 0$. Geben Sie weiterhin den besten erwartungstreuen Schätzer für λ an.

Aufgabe 11.4

Ein Getränkehersteller wirbt damit, dass mindestens 80% seiner Flaschen korrekt befüllt sind. Ein Verbraucherschutzverein möchte das überprüfen. Er entnimmt eine Stichprobe von 150 Flaschen und stellt fest, dass nur 110 korrekt befüllt sind. Erstellen Sie einen einseitigen, asymptotischen Test und führen ihn zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.

Abgabe: Mittwoch, 09.07.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.