Universität Rostock
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Martin Redmann
Franziska Schulz

Sommersemester 2025

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

i) Es seien X und Y unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X+Y|X]$.

ii) Es seien X und Y unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsgrößen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[(X+Y)^2|X]$.

iii) Es seien X und Y unabhängige, identisch verteilte und integrierbare Zufallsgrößen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|X+Y]$.

Aufgabe 7.2

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe für die Pareto-Verteilung für $\gamma > 1, c > 0$, d.h. X_1 besitze die Dichtefunktion

$$f(x) = \gamma c^\gamma x^{-(\gamma+1)} \mathbb{1}_{[c,\infty)}(x).$$

i) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ von γ bei bekanntem c.

ii) Ist $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ ein erwartungstreuer Schätzer für γ? Wenn nicht, wie können wir mit Hilfe von $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ einen alternativen Schätzer $\hat{\gamma}_2$ für γ konstruieren, der erwartungstreu ist?

iii) Erfüllt die Varianz von $\hat{\gamma}_2$ die Cramér-Rao-Ungleichung?

Aufgabe 7.3

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 3.34, dass

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^n X_j}$$

ein suffizienter Schätzer für λ ist.

Aufgabe 7.4

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe der stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \gamma]$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ und zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}_{\mathrm{ML}}$ ein suffizienter Schätzer für γ ist.

Abgabe: Mittwoch, 28.05.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.