Universität Rostock
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Martin Redmann
Franziska Schulz

Sommersemester 2025

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

Führen Sie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x$$

eine Monte-Carlo-Simulation mit Hilfe von MATLAB durch. Nutzen Sie dabei $n = 10^i$ Samples für $i \in \{1, \dots, 6\}$. Stellen Sie anschließend den absoluten Fehler der numerisch bestimmten Werte von dem korrekten Integralwert in Abhängigkeit von der Anzahl der Samples in einem Doppelt-Logarithmischen Diagramm dar.

Aufgabe 4.2

Gegeben sei eine Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ von der mit Parameter $p \in (0,1)$ Bernoulli-verteilten Zufallsgröße X. Wir wollen nun p^2 mit Hilfe der zufälligen Stichprobenfunktion

$$\varphi_1(X_1, \dots, X_n) = X_1 \cdot X_2$$

schätzen.

(i) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\varphi_1(X_1, \dots, X_n)$. Geben Sie zudem die kleinste Konstante c an, sodass für alle $p \in (0,1)$ die Bedingung

$$D^2(\varphi_1(X_1, \dots, X_n)) \leq c$$

erfüllt ist.

(ii) Wir definieren eine zweite zufällige Stichprobenfunktion durch

$$\varphi_2(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}[\varphi_1(X_1, \dots, X_n)|S],$$

wobei $S = \sum_{j=1}^n X_j$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\varphi_2(X_1, \dots, X_n)$.

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe der Jensenungleichung, dass $D^2[\varphi_1(X_1, \dots, X_n)] \geq D^2[\varphi_2(X_1, \dots, X_n)]$.

Aufgabe 4.3

a) Die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien absolutstetig mit der stückweise stetigen Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ die zugehörigen Ordnungsstatistiken. Zeigen Sie, dass die gemeinsame Dichte $f_{X_{(i)},X_{(j)}} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ für $1 \leq i < j \leq n$ durch

$$f_{X_{(i)},X_{(j)}}(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{n! f(x_i) f(x_j) (F(x_i))^{i-1} (F(x_j) - F(x_i))^{j-1-i} (1 - F(x_j))^{n-j}}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!}, & \text{falls } -\infty < x_i < x_j < \infty \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

b) Die Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien gleichverteilt im Intervall $(0, b)$ für ein $b > 0$. Bestimmen Sie die Dichte der Spannweite $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Aufgabe 4.4

Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe für X, dessen k-tes Moment existiert. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n})^k$$

für $n \to \infty$ fast sicher gegen $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ konvergiert.

Abgabe: Mittwoch, 07.05.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.