

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

## Übungsblatt 9

### Aufgabe 9.1

Ein Unternehmen verwendet  $n$  baugleiche Maschinen. Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sei die Lebensdauer der Maschine  $k$  durch eine Zufallsvariable  $X_k$  modelliert, die exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$  sei. Außerdem sei bekannt, dass sich die Maschinen in keiner Weise gegenseitig beeinflussen. Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha$  für  $\frac{1}{\lambda}$  an.

*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst die Verteilung von  $2n\lambda\bar{X}_n$ .

### Aufgabe 9.2

Silvesterraketen eines bestimmten Typs sollen aus Sicherheitsgründen eine mittlere Flughöhe von mindestens 20 m aufweisen. Es ist bekannt, dass für die Flughöhe  $X \sim \mathcal{N}(\mu, 36)$  gilt. Ein Kontrollabschuss von  $n = 30$  Raketen lieferte einen empirischen Mittelwert  $\bar{x} = 17.9$  m. Sei  $\alpha = 0.05$ .

- (a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall  $(\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n), \bar{\theta}(x_1, \dots, x_n))$  für  $\mu$ .
- (b) Testen Sie zum Irrtumsniveau  $\alpha$ , ob die mittlere Flughöhe vom vorgegebenen Wert  $\mu_0 = 20$  m abweicht.
- (c) Wie groß hätte der Stichprobenumfang sein müssen, damit die Nullhypothese abgelehnt wird?
- (d) Zeigen Sie, dass für  $\mu = \mu_0$  der folgende Zusammenhang zwischen dem Konfidenzintervall  $(\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n))$  und dem Test  $\varphi$  aus (b) gilt:

$$\mathbb{P}_\mu(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 0) = \mathbb{P}_\mu(\mu \in (\underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n))) = 1 - \alpha.$$

- (e) Prüfen Sie, ob die Stichprobe der Hypothese, dass die *Mindestflughöhe* 20 m beträgt, widerspricht.

### Aufgabe 9.3

Betrachtet wird eine Ziehung aus roten und schwarzen Kugeln. Dabei sei bekannt, dass  $n_1 \leq n$  der  $n$  Kugeln rot sind. Um zu testen, ob die Reihenfolge der roten und schwarzen Kugeln zufällig ist, betrachtet man die Statistik  $T$ , die der Anzahl der Kugeln entspricht, die eine andere Farbe haben als der Vorgänger, plus eins. Bestimmen Sie die Verteilung von  $T$  unter der Annahme der Nullhypothese, welche die rein zufällige Anordnung annimmt.

### Aufgabe 9.4

Sei  $\alpha \in (0, 1)$  eine beliebige Zahl und  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  ein Parametertest zum Niveau  $\alpha$ . Falls außerdem noch

$$\mathbb{P}_\gamma(\varphi(X_1, \dots, X_n) = 1) \geq \alpha, \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

gilt, heißt  $\varphi$  ein *unverfälschter Test* zum Niveau  $\alpha$ .

Überprüfen Sie, ob es sich bei den aus der Vorlesung bekannten Parametertests des Erwartungswertes  $\mu$  bei bekannter Varianz  $\sigma^2$  und der Varianz  $\sigma^2$  bei bekanntem Erwartungswert  $\mu$  im Falle  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Stichprobenvariablen um unverfälschte Tests handelt.

**Abgabe:** Mittwoch, 25.06.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.