

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Übungsblatt 5

Aufgabe 4.1

Für zwei Verteilungsfunktionen F und G ist der Kolmogorov-Abstand durch

$$d_K(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$$

definiert. Zeigen Sie:

- (i) Der Kolmogorov-Abstand ist eine Metrik auf dem Raum der Verteilungsfunktionen.
- (ii) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X eine weitere Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Zeigen Sie, dass aus $d_K(F_n, F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ die Konvergenz in Verteilung von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X folgt. Zeigen Sie weiterhin, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Aufgabe 4.2

Sei X_1, \dots, X_n eine Stichprobe mit zugehöriger Verteilungsfunktion F . Als Schätzer für F verwenden wir die empirische Verteilungsfunktion W_n . Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} |W_n(t) - F(t)|^2 \frac{1}{1+t^2} dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Fubini.

Aufgabe 4.3

Sie führen eine Studie durch, welche den Zusammenhang zwischen Studiendauer und Einstiegsgehalt von Universitätsabsolventen der Wirtschaftswissenschaften untersucht. Das Ergebnis der Ihnen vorliegenden Umfrage ist in der folgenden Tabelle angegeben:

Absolvent i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Studiendauer x_i (in Semestern)	7	10	8	10	6	11	7	8	7	11	12
Einkommen y_i (in 1.000 €)	34	58	29	61	40	51	39	64	39	56	59

- (i) Berechnen Sie das konkrete Stichprobenmittel und die konkrete Stichprobenvarianz der Stichprobe für die Merkmale Studiendauer X sowie Einkommen Y .
- (ii) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Merkmalen. Welchen Zusammenhang zwischen den Merkmalen würden Sie dem Korrelationskoeffizienten zufolge schlussfolgern?
- (ii) Plotten Sie ein Streudiagramm zwischen X und Y . Bewerten Sie Ihre Schlussfolgerung aus dem letzten Aufgabenteil vor dem Hintergrund des Streudiagramms.

Hinweis: Bei einem Streudiagramm zwischen den Merkmalen X und Y werden die einzelnen Datenpunkte $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, geplottet. In MATLAB kann dafür der Befehl *scatter* genutzt werden.

- (iv) Bei der obigen Stichprobe wurden Bachelor- sowie Master-Absolventen zusammengefasst. Die Absolventen 1, 3, 5, 7, 9 haben einen Bachelor-Abschluss, wohingegen die Absolventen 2, 4, 6, 8, 10, 11 einen Master-Abschluss vorweisen können. Markieren Sie die jeweilige Gruppe in dem Streudiagramm.
- (v) Wie ändert sich die Interpretation des Zusammenhangs zwischen Studiendauer und Einstiegsgehalt?

Aufgabe 5.4

Sei (X_1, \dots, X_n) eine Stichprobe mit $X_1 \sim \text{Exp}(1/\theta)$, $\theta > 0$. Gegeben seien die beiden Schätzer

$$T_1 = n \cdot \min \{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- (i) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der beiden Schätzer. Welchen der beiden Schätzer würden Sie bevorzugen und warum?
- (ii) Entscheiden Sie, ob T_1 in Wahrscheinlichkeit gegen θ konvergiert und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Abgabe: Mittwoch, 14.05.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.