

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (Fortsetzung Aufgabe 7.4)

Zeigen Sie, dass $\hat{\gamma}_{\text{ML}}$ eine vollständige Statistik für γ ist und bestimmen Sie einen besten erwartungstreuen Schätzer für γ .

Aufgabe 8.2

Wir betrachten die Verteilungsfamilie $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei die Varianz $\sigma^2 > 0$ bekannt sei. Zeigen Sie, dass \bar{X}_n ein vollständiger Schätzer für μ ist.

Aufgabe 8.3

Im parametrischen Modell $\{\text{Poi}(\lambda), \lambda > 0\}$ sei $\gamma(\lambda) = \exp(-\lambda)$ zu schätzen. Wir schlagen folgenden Schätzer vor:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{0\}}(X_j)$$

- i) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\hat{\gamma}]$ und zeigen Sie, dass der Schätzer quadratisch integrierbar ist.
- ii) Ermitteln Sie einen besten erwartungstreuen Schätzer für γ .

Aufgabe 8.4

Überprüfen Sie die folgenden Schätzer auf starke und schwache Konsistenz:

- i) $\hat{\gamma}_n(X_1, \dots, X_n) = \max_{j=1, \dots, n} X_j$ für den Parameter $\gamma > 0$ der stetigen Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[0, \gamma]}$

ii)

$$\hat{\gamma}_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \log\left(\frac{X_j}{c}\right)}$$

für den Parameter $\gamma > 1$ der Pareto-Verteilung mit bekanntem $c > 0$.

Aufgabe 8.5 (Fortsetzung von Aufgabe 7.4)

- i) Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Parameter γ zum Niveau $1 - \alpha$ an.
- ii) Wie groß muss n mindestens sein, damit

$$\mathbb{P}_{\gamma} \left(\gamma \leq 1.1 \cdot \max_{j=1, \dots, n} X_j \right) \geq 0.99 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

gilt?

Aufgabe 8.6

Im parametrischen Modell $\{\text{Ber}(p), p \in (0, 1)\}$ wollen wir den unbekannten Parameter p schätzen. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes ein asymptotisches, symmetrisches Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für p .

Abgabe: Mittwoch, 18.06.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.