

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie einen besten linearen erwartungstreuen Schätzer $\hat{a} = c_1 Y_1 + \dots + c_n Y_n$ für die Regressionskonstante a im einfachen linearen Regressionsmodell mit deterministischen Ausgangsvariablen x_1, \dots, x_n . Dabei seien die Störgrößen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unkorrelierte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ und $D^2\varepsilon_i = \sigma^2$.

Aufgabe 10.2

Wir betrachten das einfache lineare Regressionsmodell aus Aufgabe 10.1 mit unabhängigen und $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -verteilten Störgrößen ε_i . Bestimmen sie die Verteilung von \hat{a} .

Aufgabe 10.3

Ein Unternehmen verkauft Kopierer auf Franchisebasis und führt an diesen präventive Wartungs- und Reparaturarbeiten durch. Kürzlich wurden bei diesen routinemäßigen Arbeiten bei 45 verschiedenen Kunden Daten erhoben. Es wird der Zusammenhang der Anzahl der gewarteten Drucker und der Gesamtdauer der Reparatur durch einen Servicetechniker untersucht. Nutzen Sie im Folgenden das einfache lineare Regressionsmodell. Die Daten können Sie dem Dokument `copier.txt` auf Stud.IP entnehmen.

- i) Erstellen Sie ein Streudiagramm der Daten.
- ii) Bestimmen Sie die Regressionsfunktion und vergleichen Sie diese mit den Daten.
- iii) Bestimmen Sie einen Schätzwert für die mittlere Reparaturzeit für 5 Kopierer.

Aufgabe 10.4

Es seien $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ Realisierungen des Zufallsvektors (X, Y) . Bestimmen Sie die Konstanten \hat{a} und \hat{b} derart, dass der mittlere quadratische Fehler

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2$$

für $(a, b) = (\hat{a}, \hat{b})$ minimal wird. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Schätzern \hat{a} und \hat{b} für die Minimierung von $\mathbb{E}[|Y - (a + bX)|^2]$. Ist es relevant, ob Sie zunächst das stochastische Minimierungsproblem lösen und im Anschluss die Zufallsgrößen durch empirische Werte ersetzen?

Abgabe: Mittwoch, 02.07.2025 bis 9.00 Uhr, online bei Stud.IP unter Aufgaben, im PDF Format.