Les Intégrales :

Rappel : __La dérivée intérieure :__ Quand on dérive une fonction composée, on a la dérivée de la fonction qui est à l'intérieur qui va sortir. C'est ça qu'on appelle la dérivée interne.

En effet : __Dérivée d'une fonction composée :__

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Dérivée interne}}.}$$

Noté aussi :

$$\boxed{\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Dérivée interne}}}$$

Dit plus simplement : On commence par chercher la dérivée de f. Ça nous donne f'. D'une fois qu'on a f', on lui donne g à manger, ça va nous donner $f'(g(x))$. Finalement on multiplie par la dérivée de g.

De la Parole aux Actes : i) Trouver la dérivée de $\sin(2x)$.

On commence par mettre sous la forme $f \circ g$. Pour ça, on peut se dire que la fonction $\sin(2x)$ c'est en fait la fonction sinus, à qui on a donné la fonction $2x$ à manger.

Mathématiquement : On définit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = 2x$. Ainsi $\sin(2x) = f(g(x))$.

Donc : $\sin(2x)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot 2$

$= \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$.

ii) Trouver la dérivée de e^{x^2}. On définit : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$. Alors $e^{x^2} = f(g(x))$.

Donc $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$.

↳ Car la dérivée de e^x c'est e^x, et si on lui donne x^2 à manger ça donne e^{x^2}.

iii) Trouver la dérivée de $(x^3+3x)^4$. On définit $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^3+3x$. Alors $(x^3+3x)^4 = f(g(x))$.

Donc : $\left[(x^3+3x)^4\right]' = 4 \cdot (x^3+3x)^3 \cdot \underbrace{(3x^2+3)}_{\text{dérivée interne}}$.

Dans la pratique, on ne pose pas f et g à chaque fois ; on fait tout ça "de tête".

Exercice : __Dériver :__ i) $\sqrt{x^4+x+1}$ ii) $\tan(6x)$ iii) $\ln(x^2+1)$ iv) $(\sin(x))^2$.

1) Résumé / Rappel sur les primitives :

Def : Soit une fonction f et une autre fonction F. On dit que F est une primitive de f si :

$$F'(x) = f(x).$$

" En gros c'est l'inverse de la dérivée ".

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\text{dériver}"] & f \arrow[l, bend left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd}$$

Exemple : Si on considère la fonction $F(x) = x^2$: en la dérivant on obtient :

$$F'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Donc : - La dérivée de x^2 est $2x$.
- La primitive de $2x$ est x^2.

En fait, au lieu de "la", on devrait dire "une" car :

Primitives et Constantes : Soit un nombre c (une constante). On sait que la dérivée d'un nombre vaut zéro : $c' = 0$.

Donc, si on a F qui est une primitive de f, c'est à dire $F'(x) = f(x)$ et que l'on crée une nouvelle fonction $F(x) + c$, sa dérivée vaudra :

$$(F(x)+c)' \underset{\text{propriété des dérivées}}{=} F(x)' + c' = f(x) + 0 = f(x).$$

Donc la dérivée de $F(x) + c$ est aussi $f(x)$.

↳ Donc $F(x) + c$ est aussi une primitive de f.

Moralité : Si on a une primitive, et qu'on lui rajoute un nombre, on obtient de nouveau une primitive.

$\Rightarrow$ "Quand on fait une primitive, on doit toujours rajouter un $+c$ à la fin."

Exemple : Trouver toutes les primitives de $\cos(x)$.

Résolution : On sait que la dérivée de $\sin$ c'est $\cos$: $\sin'(x) = \cos(x)$.

Donc, vu que la primitive c'est le contraire de la dérivée, on sait que $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$. Pour toutes les trouver, on a plus qu'à rajouter un $+c$.

Donc la réponse est: $\boxed{\sin(x) + C.}$

Notation: On note $\int f(x)dx$ pour désigner l'ensemble des primitives de f.

↳ Si on reprend notre exemple d'avant on a:

$$\boxed{\int \cos(x)dx = \sin(x) + C..}$$

---

2) Comment calculer les Primitives:

Pour Rappel: Chercher un primitive c'est l'opération inverse de calculer une dérivée.
Et c'est là que les emmerdes commencent, car:

- Pour la dérivée, on a une série de règles qui nous disent comment dériver une fonction. Au final, on a juste à suivre ces règles pas à pas.
  En gros, dériver une fonction c'est un peu comme suivre une recette de cuisine.

- Pour trouver une primitive, il n'y a pas de règles, donc on est obligé d'y aller au feeling, c'est pour ça que c'est plus dur.

Du fait de l'absence de règle générale pour trouver les primitives, on procède souvent comme suit:

i) On essaye de deviner une primitive. Ça nous donne une fonction qui est candidate au poste de primitive. Elle n'est pas obligée d'être parfaite à 100%, il faut juste que la forme générale soit correcte.

ii) On prend cette candidate et on la dérive. Si c'est la vraie primitive, quand on la dérive ça doit donner la fonction d'origine.

iii) Si ça donne pas la fonction d'origine: On essaye de voir comment on pourrait modifier la candidate (par exemple en la multipliant par un nombre) pour obtenir la "vraie" primitive.

Exemple: Trouver la primitive de x^n, sachant que la dérivée est: $(x^n)' = n\, x^{n-1}$ ← On enlève 1 à la puissance.

La puissance tombe devant.

Donc on sait dériver x^n. Maintenant on veut faire le chemin inverse: Trouver une fonction qui, quand on la dérive, donne x^n.

Avant de s'attaquer au cas général, on va s'échauffer avec un cas simple : Essayer de trouver la primitive de x^2.

Bon, on sait que si on dérive ça enlève 1 à la puissance, donc, à la place, on peut essayer de rajouter 1 à la puissance, et regarder si ça marche.

↳ On prend x^3 et on essaye de dériver :

$$(x^3)' = 3x^2.$$

On a presque x^2, le seul problème c'est le 3 devant.
Vu qu'on a un 3 en trop, on peut essayer de diviser par 3 pour compenser :

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 = x^2.$$

↳ Donc la primitive de x^2 est $\frac{1}{3}x^3$.
Noté mathématiquement :

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

On peut s'inspirer de ça pour trouver la primitive de x^n : On va rajouter 1 à la puissance, et diviser pour compenser.
Schématiquement :

$$x^n \xrightarrow{\text{rajouter } 1} x^{n+1} \xrightarrow{\text{diviser pour compenser}} \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Si on essaye de dériver pour voir : $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = x^n.$

Donc : $\boxed{\text{La primitive de } x^n \text{ est } \frac{1}{n+1}x^{n+1}.}$

Exercice 1 : Calculer 1) $\int x\,dx$ 2) $\int x^{12}dx$ 3) $\int 6x^5 dx$ 4) $\int 3x^8 dx$.

Propriétés des Primitives :

i) Si on a un nombre k, alors :
$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx.$$
"Si on a un nombre, alors on peut le sortir."

ii) $$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$
"Quand on a une addition, on peut casser en deux et chercher les primitives séparément."

iii) $$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$$

Exemples : 1) $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3\cdot\frac{1}{2}x^2+C = \frac{3}{2}x^2+C.$

2) $\int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C.$

Exercice 2 : Calculer : 1) $\int 17x^2\,dx$ 2) $\int (3x^2+x^7)$ 3) $\int (9x+\sin(x)+2)\,dx.$

Racines et Fraction : On sait qu'on peut noter les racines sous forme de puissance :

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$
$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Donc pour trouver les primitives des racines, on peut réutiliser la méthode pour les puissances.

Exemple : $$\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{1/5}\,dx = \frac{1}{1/5+1}x^{1/5+1}+C = \frac{5}{6}x^{6/5}+C.$$

De même pour les fractions : On peut utiliser le fait que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Exemple : $$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1}+C = -\frac{1}{x}+C.$$

⚠ La primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$.
(On a besoin de la valeur absolue car le ln n'accepte que des nombres positifs.)

Exercice 3: 1) $\int \frac{1}{x^6}\,dx$ 2) $\int 2\sqrt[8]{x}\,dx$ 3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^3\right)dx$.

Primitives et Dérivée intérieure: On sait que quand on dérive une fonction composée, on a une dérivée intérieure qui apparaît.

Exemples: •) $\left((\sin(x))^2\right)' = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

$\uparrow$ dérivée interne.

•) $(\sqrt{3x})' = \left((3x)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

•) $\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)' = \left((x^2+1)^{-2}\right)' = -2(x^2+1)^{-3}\cdot 2x = -2\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^3}$.

Si on parcourt le dernier exemple dans l'autre sens, on voit que:

$$\int \frac{-4x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int -2\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int -2\cdot(x^2+1)^{-3}\cdot 2x\,dx = (x^2+1)^{-2} + C.$$

Moralité: Quand on doit trouver la primitive d'une fonction compliquée, on peut parfois s'en sortir en repérant une dérivée intérieure.

Exemple: Trouver les primitives de $3x^2\cdot(1+x^3)^5$.

Résolution: On doit trouver une fonction qui, quand on la dérive, donne $3x^2\cdot(1+x^3)^5$.

Vu qu'on ne sait pas comment trouver cette fonction du premier coup, on va faire plusieurs essais:

•) On voit qu'on a un terme à la puissance 5, donc on peut essayer de prendre le même terme, mais à la puissance 6 comme primitive.

•) On dérive ça et on regarde ce que ça donne :

$$\left((1+x^3)^6\right)' = 6\cdot(1+x^3)^5 \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée intérieure.}} .$$

Donc on y est presque : - On cherchait une fonction qui donne $3x^2\cdot(1+x^3)^5$ quand on la dérive.

- On a vu que la fonction $(1+x^3)^6$ donne $6\cdot 3x^2\cdot(1+x^3)^5$ quand on la dérive.
- On a donc presque le bon résultat, il y a juste un 6 en trop.
- Ainsi on a juste à diviser par 6 pour trouver la bonne réponse.

Donc : $\boxed{\int 3x^2\cdot(1+x^3)^5\,dx = \frac{1}{6}\cdot(1+x^3)^6 + C.}$

Pour vérifier qu'on a bien la bonne réponse, on peut dériver :

$$\left(\frac{1}{6}\cdot(1+x^3)^6\right)' = \cancel{\frac{1}{6}}\cdot\cancel{6}\cdot(1+x^3)^5\cdot 3x^2 = 3x^2\cdot(1+x^3)^5 .\ \checkmark\ \text{OK}$$

Exemple 2 : Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4+2)^3}\,dx$.

Résolution : $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4+2)^3}\,dx = \int x^3\cdot\frac{1}{(x^4+2)^3}\,dx = \int x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx$.

Bon, on a de nouveau un terme à une puissance. On va essayer de faire apparaître la dérivée intérieure. Ici, la dérivée intérieure provient du x^4.
On sait que $(x^4)' = 4x^3$, donc on essaye de faire apparaître ce terme :

$$\int x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 4}_{=1}\cdot x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3\cdot(x^4+2)^{-3}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{-2}\,(x^4+2)^{-2} .$$

D'où viennent les différents termes : On a une puissance -2, comme ça quand on dérive ça donne du -3.
Mais quand on va dériver cette puissance, on a un -2 qui va tomber.
On a donc mis un $\frac{1}{-2}$ pour compenser.

Exemple 3 : $\int \cos(2x)\,dx$. On sait que la primitive de cos c'est sin. On peut donc essayer $\sin(2x)$ comme primitive.

Vérifions : $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$.

dérivée intérieure

Donc au final : $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$.

Primitives et Fractions :

Différents Cas : i) Parfois il suffit d'écrire avec une puissance négative :

$$\boxed{\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int (x+1)^{-2}\,dx = -(x+1)^{-1} + C.}$$

ii) Des fois il faut en plus faire gaffe à la dérivée interne :

$$\boxed{\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int 2x\cdot(x^2+1)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-2} + C.}$$

iii) Toujours se méfier des puissances -1 qui vont donner du ln :

$$\boxed{\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4+2)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^4+2| + C.}$$

iv) Parfois on peut casser en deux :

$$\boxed{\int \frac{x^3+2}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3}{x^2} + \frac{2}{x^2}\,dx = \int x^2 + \frac{2}{x^2}\,dx = \int x^2 + 2x^{-2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^{-1} + C.}$$

v) Dans les cas les plus corsés, si le degré du dénominateur est $\leq$ au degré du numérateur, on peut faire la division euclidienne : $\int \frac{12x^3+42x^2+24x+12}{2x+3}\,dx$

Division :

$$\begin{array}{r|l} 12x^3 + 42x^2 + 24x + 12 & 2x+3 \\ \cline{2-2} 12x^3 + 18x^2 & 6x^2 + 12x - 6 \\ \cline{1-1} 24x^2 + 24x + 12 & \\ 24x^2 + 36x & \\ \cline{1-1} -12x + 12 & \\ -12x - 18 & \\ \cline{1-1} 30 & \end{array}$$

Donc la fraction vaut : $6x^2 + 12x - 6 + \frac{30}{2x+3}$.

Et la primitive est : $6\cdot\frac{1}{3}x^3 + 12\cdot\frac{1}{2}x^2 - 6x + 30\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$