Les Intégrales :

Rappel : La dérivée intérieure : Quand on dérive une fonction composée, on a la dérivée de la fonction qui est à l'intérieur qui va sortir. C'est ça qu'on appele la dérivée interne.

En effet : Dérivée d'une fonction composée :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Dérivée interne.}}$$

Noté aussi : $$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Dérivée interne.}}$$

Dit plus simplement : On commence par chercher la dérivée de f. Ça nous donne f'. D'une fois qu'on a f', on lui donne g à manger, ça va nous donner $f'(g(x))$. Finalement on multiplie par la dérivée de g.

De la Parole aux Actes : i) Trouver la dérivée de $\sin(2x)$.

On commence par mettre sous la forme $f \circ g$. Pour ça, on peut se dire que la fonction $\sin(2x)$ c'est en fait la fonction sinus, à qui on a donné la fonction $2x$ à manger.

Mathématiquement : On définit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = 2x$. Ainsi $\sin(2x) = f(g(x))$.

Donc : $\sin(2x)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot 2$

$= \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$.

ii) Trouver la dérivée de e^{x^2}. On définit : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$. Alors $e^{x^2} = f(g(x))$.

Donc $(e^{x^2})^2 = e^{x^2} \cdot 2x$.

Car la dérivée de e^x c'est e^x, et si on lui donne x^2 à manger ça donne e^{x^2}.

iii) Trouver la dérivée de $(x^3+3x)^4$. On définit $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^3+3x$. Alors $(x^3+3x)^4 = f(g(x))$.

Donc : $[(x^3+3x)^4]' = 4 \cdot (x^3+3x)^3 \cdot \underbrace{(3x^2+3)}_{\text{dérivée interne.}}$.

Dans la pratique, on ne pose pas f et g à chaque fois ; on fait tout ça "de tête".

Exercice : Dériver : i) $\sqrt{x^4+x+1}$ ii) $\tan(6x)$ iii) $\ln(x^2+1)$ iv) $(\sin(x))^2$.

1) Résumé / Rappel sur les primitives :

Déf : Soit une fonction f et une autre fonction F.
On dit que F est une primitive de f si :
$$F'(x) = f(x).$$

"En gros c'est l'inverse de la dérivée".

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\text{dériver}"] & f \arrow[l, bend left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd}$$

Exemple : Si on considère la fonction $F(x) = x^2$:
en la dérivant on obtient :
$$F'(x) = (x^2)' = 2x.$$
Donc : - La dérivée de x^2 est $2x$.
- La primitive de $2x$ est x^2.

En fait, au lieu de là, on devrait dire une car :

Primitives et Constantes : Soit un nombre c (une constante).
On sait que la dérivée d'un nombre vaut zéro : $c' = 0$.

Donc, si on a F qui est une primitive de f, c'est à dire $F'(x) = f(x)$
et que l'on crée une nouvelle fonction $F(x) + c$, sa dérivée vaudra :
$$(F(x) + c)' = F(x)' + c' = f(x) + 0 = f(x).$$
propriété des dérivées

Donc la dérivée de $F(x) + c$ est aussi $f(x)$.
↳ Donc $F(x) + c$ est aussi une primitive de f.

Moralité : Si on a une primitive, et qu'on lui rajoute un nombre, on obtient de nouveau une primitive.

⇒ "Quand on fait une primitive, on doit toujours rajouter un $+c$ à la fin."

Exemple : Trouver toutes les primitives de $\cos(x)$.

Résolution : On sait que la dérivée de sin c'est cos : $\sin'(x) = \cos(x)$.
Donc, vu que la primitive c'est le contraire de la dérivée, on sait que $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$. Pour toute les trouver, on a plus qu'à rajouter un $+c$.

Donc la réponse est : $\boxed{\sin(x) + C.}$

<u>Notation</u> : On note $\int f(x)dx$ pour désigner l'ensemble des primitives de f.

↳ Si on reprend notre exemple d'avant on a :

$$\boxed{\int \cos(x)dx = \sin(x) + C..}$$

---

2) Comment calculer les Primitives :

<u>Petit Rappel</u> : Chercher un primitive c'est l'opération inverse de calculer une dérivée.
Et c'est là que les emmerdes commencent, car :

- Pour la dérivée, on a une série de règles qui nous disent comment dériver une fonction. Au final, on a juste à suivre ces règles pas à pas.
  En gros, dériver une fonction c'est un peu comme suivre une recette de cuisine.
- Pour trouver une primitive, il n'y a pas de règles, donc on est obligé d'y aller au feeling, c'est pour ça que c'est plus dur.

Du fait de l'absence de règle générale pour trouver les primitives, on procède souvent comme suit :

i) On essaye de deviner une primitive. Ça nous donne une fonction qui est candidate au poste de primitive. Elle n'est pas obligée d'être parfaite à 100%, il faut juste que la forme générale soit correcte.

ii) On prend cette candidate et on la dérive. Si c'est la vraie primitive, quand on la dérive ça doit donner la fonction d'origine.

iii) Si ça donne pas la fonction d'origine : On essaye de voir comment on pourrait modifier la candidate (par exemple en la multipliant par un nombre) pour obtenir la "vraie" primitive.

<u>Exemple</u> : Trouver la primitive de x^n, sachant que la dérivée est : $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ ← On enlève 1 à la puissance.
↑ La puissance tombe devant.

Donc on sait dériver x^n. Maintenant on veut faire le chemin inverse : Trouver une fonction qui, quand on la dérive, donne x^n.

Avant de s'attaquer au cas général, on va s'échauffer avec un cas simple : Essayer de trouver la primitive de x^2.

Bon, on sait que si on dérive ça enlève 1 à la puissance, donc, à la place, on peut essayer de rajouter 1 à la puissance, et regarder si ça marche.

↳ On prend x^3 et on essaye de dériver :

$$(x^3)' = 3x^2.$$

On a presque x^2, le seul problème c'est le 3 devant.
Vu qu'on a un 3 en trop, on peut essayer de diviser par 3 pour compenser :

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 = x^2.$$

↳ Donc la primitive de x^2 est $\frac{1}{3}x^3$.
Noté mathématiquement :

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

On peut s'inspirer de ça pour trouver la primitive de x^n : On va rajouter 1 à la puissance, et diviser pour compenser.
Schématiquement :

$$x^n \xrightarrow{\text{rajouter } 1} x^{n+1} \xrightarrow{\text{diviser pour compenser}} \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

Si on essaye de dériver pour voir : $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = x^n.$

Donc : $\boxed{\text{La primitive de } x^n \text{ est } \frac{1}{n+1}x^{n+1}.}$

<u>Exercice 1</u> : Calculer 1) $\int x\,dx$ 2) $\int x^{12}dx$ 3) $\int 6x^5 dx$ 4) $\int 3x^8 dx$.

Propriétés des Primitives :

i) Si on a un nombre k, alors :

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx.$$

"Si on a un nombre, alors on peut le sortir."

ii) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

"Quand on a une addition, on peut casser en deux et chercher les primitives séparément."

iii) $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

Exemples :

1) $\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{3}{2}x^2 + C$.

2) $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Exercice 2 : Calculer : 1) $\int 17x^2\,dx$ 2) $\int (3x^2 + x^7)$ 3) $\int (9x + \sin(x) + 2)\,dx$.

Racines et Fraction : On sait qu'on peut noter les racines sous forme de puissance :

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{x} &= x^{1/2} \\ \sqrt[3]{x} &= x^{1/3} \\ \sqrt[n]{x} &= x^{1/n}. \end{aligned}}$$

Donc pour trouver les primitives des racines, on peut réutiliser la méthode pour les puissances.

Exemple : $\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{1/5}\,dx = \frac{1}{1/5 + 1} x^{1/5+1} + C = \frac{5}{6} x^{6/5} + C$.

De même pour les fractions : On peut utiliser le fait que $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Exemple : $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

⚠ La primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$.

(On a besoin de la valeur absolue car le ln n'accepte que des nombres positifs.)

Exercice 3 : 1) $\int \frac{1}{x^6}\,dx$ 2) $\int 2\sqrt[3]{x}\,dx$ 3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^3\right)dx$.

Primitives et Dérivée intérieure : On sait que quand on dérive une fonction composée, on a une dérivée intérieure qui apparaît.

Exemples :

- $\left((\sin(x))^2\right)' = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

dérivée interne.

- $(\sqrt{3x})' = \left((3x)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$

- $\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)' = \left((x^2+1)^{-2}\right)' = -2(x^2+1)^{-3}\cdot 2x = -2\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^3}$.

Si on parcourt le dernier exemple dans l'autre sens, on voit que :

$$\int \frac{-4x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int -2\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int -2\cdot(x^2+1)^{-3}\cdot 2x\,dx = (x^2+1)^{-2} + C.$$

Moralité : Quand on doit trouver la primitive d'une fonction compliquée, on peut parfois s'en sortir en repérant une dérivée intérieure.

Exemple : Trouver les primitives de $3x^2\cdot(1+x^3)^5$.

Résolution : On doit trouver une fonction qui, quand on la dérive, donne $3x^2\cdot(1+x^3)^5$.

Vu qu'on ne sait pas comment trouver cette fonction du premier coup, on va faire plusieurs essais :

- On voit qu'on a un terme à la puissance 5, donc on peut essayer de prendre le même terme, mais à la puissance 6 comme primitive.

·) On dérive ça et on regarde ce que ça donne :

$$\left((1+x^3)^6\right)' = 6\cdot(1+x^3)^5\cdot 3x^2 .$$

dérivée intérieure.

Donc on y est presque : - On cherchait une fonction qui donne $3x^2\cdot(1+x^3)^5$ quand on la dérive.

- On a vu que la fonction $(1+x^3)^6$ donne $6\cdot 3x^2\cdot(1+x^3)^5$ quand on la dérive.
- On a donc presque le bon résultat, il y a juste un 6 en trop.
- Ainsi on a juste à diviser par 6 pour trouver la bonne réponse.

Donc : $\boxed{\int 3x^2\cdot(1+x^3)^5\,dx = \frac{1}{6}\cdot(1+x^3)^6 + C.}$

Pour vérifier qu'on a bien la bonne réponse, on peut dériver :

$$\left(\frac{1}{6}\cdot(1+x^3)^6\right)' = \cancel{\frac{1}{6}}\cdot\cancel{6}\cdot(1+x^3)^5\cdot 3x^2 = 3x^2\cdot(1+x^3)^5 .$$ ✓ OK

<u>Exemple 2</u> : Calculer $\int \frac{x^3}{(x^4+2)^3}\,dx$.

<u>Résolution</u> : $\int \frac{x^3}{(x^4+2)^3}\,dx = \int x^3\cdot\frac{1}{(x^4+2)^3}\,dx = \int x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx$.

Bon, on a de nouveau un terme à une puissance. On va essayer de faire apparaître la dérivée intérieure. Ici, la dérivée intérieure provient du x^4.
On sait que $(x^4)' = 4x^3$, donc on essaye de faire apparaître ce terme :

$$\int x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 4}_{=1}\cdot x^3\cdot(x^4+2)^{-3}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3\cdot(x^4+2)^{-3}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{-2}\,(x^4+2)^{-2} .$$

D'où viennent les différents termes : On a une puissance -2, comme ça quand on dérive ça donne du -3.
Mais quand on va dériver cette puissance, on a un -2 qui va tomber.
On a donc mis un $\frac{1}{-2}$ pour compenser.

Exemple 3 : $\int \cos(2x)\,dx$. On sait que la primitive de cos c'est sin. On peut donc essayer $\sin(2x)$ comme primitive.

Vérifions : $(\sin(2x))' = 2\cdot\cos(2x)$.
dérivée intérieure

Donc au final : $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$.

Primitives et fractions :

Différents Cas : i) Parfois il suffit d'écrire avec une puissance négative :

$$\boxed{\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int (x+1)^{-2}\,dx = -(x+1)^{-1} + C.}$$

ii) Des fois il faut en plus faire gaffe à la dérivée interne :

$$\boxed{\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int 2x\cdot(x^2+1)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-2} + C.}$$

iii) Toujours se méfier des puissances -1 qui vont donner du ln :

$$\boxed{\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4+2)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^4+2| + C.}$$

iv) Parfois on peut casser en deux :

$$\boxed{\int \frac{x^3+2}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3}{x^2} + \frac{2}{x^2}\,dx = \int x^2 + \frac{2}{x^2}\,dx = \int x^2 + 2x^{-2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^{-1} + C.}$$

v) Dans les cas les plus corsés, si le degré du dénominateur est $\leq$ au degré du numérateur, on peut faire la division euclidienne : $\int \frac{12x^3+42x^2+24x+12}{2x+3}\,dx$

Division :

$$\begin{array}{l|l}
12x^3+42x^2+24x+12 & 2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{12x^3+18x^2} & 6x^2+12x-6 \\
\quad 24x^2+24x+12 & \\
\quad \underline{24x^2+36x} & \\
\qquad -12x+12 & \\
\qquad \underline{-12x-18} & \\
\qquad\qquad 30 &
\end{array}$$

Donc la fraction vaut : $6x^2+12x-6+\frac{30}{2x+3}$.

Et la primitive est : $6\cdot\frac{1}{3}x^3 + 12\cdot\frac{1}{2}x^2 - 6x + 30\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.

Les Primitives : Exercices :

1) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\,dx$

Astuce : Dérivée intérieure.

Les Intégrales : Manuel Pratique : (Pour la théorie, voir les autres feuilles.)

Comment les Calculer :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{où } F \text{ est } \underline{\text{une}} \text{ primitive de } f.}$$

← F doit être une primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$. (voir page suivante)

Remarques :

i) F peut être n'importe quelle primitive de f.

ii) Pour alléger la notation, on utilise des crochets pour noter la soustraction :

$$[F(x)]_a^b \overset{\text{définition}}{:=} F(b) - F(a)$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b}$

iii) Dans l'intégrale, le dx nous dit par rapport à quelle variable on doit chercher une primitive. Donc si on a une intégrale avec dx, toutes les autres lettres que x doivent être traitées comme des constantes (c'est à dire comme des nombres).

Exemples :

i) $\displaystyle\int_0^1 t\cdot x^2\,dx = t\int_0^1 x^2\,dx = t\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = t\cdot\left(\frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3\right) = t\cdot\frac{1}{3}.$

ii) $\displaystyle\int_0^1 t\cdot x^2\,dt = x^2\cdot\int_0^1 t\,dt = x^2\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = x^2\cdot\left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2\right) = x^2\cdot\frac{1}{2}.$

iii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(a\cdot x)\,dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(a\cdot x)\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{a}\cos(a\cdot\pi) - \left(-\frac{1}{a}\right)\cos\left(a\frac{\pi}{2}\right).$

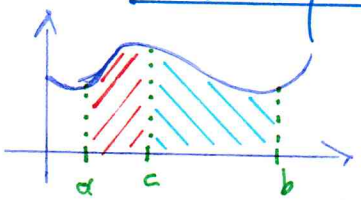
Remarque : Les propriétés qu'on avait pour les primitives (du genre $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$) sont aussi valables pour les intégrales.

Exercices : 1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^3 (1-x^3)\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos(\omega t)\,dt$.

Propriété : Quand on fait une intégrale de a jusqu'à b, on peut casser le chemin de a à b en deux parties. C'est à dire que si on a un c dans l'intervalle, alors on peut d'abord aller de a jusqu'à c puis de c jusqu'à b.

Mathématiquement : Pour n'importe quel $c \in [a,b]$ on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .}$$



⚠ : On doit utiliser cette propriété quand on intègre une fonction qui n'as pas une primitve définie sur tout l'intervalle d'intégration.

Exemple typique : La Valeur Absolue : Pour x positif on a : $|x| = x$, mais pour x négatif : $|x| = -x$.

Donc :

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 1.$$

Exercice : $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,dx$.

Intégration par Parties :

Soit f et g continûment dérivables sur $[a,b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx}$$

Si on compare la droite et la gauche du égal :

i) On a g' à gauche et g à droite. Donc pour passer de gauche à droite, on va devoir trouver une primitive de g' (pour enlever le prime).

ii) On a f à gauche et f' à droite. Donc pour passer de gauche à droite on va devoir dériver f.

Donc au final cette technique est utile quand on doit intégrer un produit de deux fonctions et que :

i) Une des deux fonctions a une primitive facile à trouver.
On appellera cette fonction g'.

ii) L'autre fonction a une dérivée "sympa" (genre 1).
On appellera cette fonction f.

<u>Exemple</u> : $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(x)\,dx$. Ici, x a une dérivée très sympa, et la primitive de $\sin(x)$ est simple à trouver. Donc on va prendre $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$.

Ainsi : $$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\,dx = \Big[\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\,dx$$

$$= \Big[x \cdot (-\cos(x))\Big]_0^{\pi/2} + \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 0 \cdot (-\cos(0))$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

<u>Remarque</u> : i) Il faut parfois faire plusieurs fois de suite par parties :

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{g'}\,dx = \Big[\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g}\,dx.$$

Il nous reste à faire $\int_0^{\pi/2} 2x \cdot \cos(x)\,dx$. On va de nouveau faire par parties. Donc de nouveau choisir un f et un g'.

$$\hookrightarrow \int_0^{\pi/2} \underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx = \Big[\underbrace{2x}_{f} \cdot \underbrace{(+\sin(x))}_{g}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{(+\sin(x))}_{g}\,dx.$$

Donc au final : $$\int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \sin(x)\,dx = \Big[x^2 \cdot \cos(x)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[2x \cdot (+\sin(x))\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\sin(x)\,dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos(\pi/2) - 0^2 \cdot \cos(0) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + 2 \cdot 0 \cdot (+\sin(0)) - \Big[2\cos(x)\Big]_0^{\pi/2}$$
$$= -\pi + 2.$$

ii) Des fois il faut un peu ré-arranger l'expression pour faire apparaître un produit de fonctions qui nous arrangent :

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx = \int x^2 \cdot x\, e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{(-2x)\,e^{-x^2}}_{g'}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{g}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2\cdot e^{-x^2} + \int(-2x)\cdot e^{-x^2}dx\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2\cdot e^{-x^2} + e^{-x^2}\right) + C.$$

Ici on a profité du fait que l'intégration par parties peut aussi être utilisée pour trouver des primitives. Dans ce cas on l'utilise comme avec les intégrales, mais on ignore tout ce qui a à voir avec les bornes.

Exercices : 1) $\int_0^1 x\cdot e^x dx$ 2) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$ 3) $\int \frac{2x^3+9x^2+16x+10}{x^2+3x+2}$.

↑ Astuce : Division Euclidienne.

Quand l'intégration par Parties nous fait tourner en Rond : Par exemple : $\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cdot\cos(x)dx$.

On voit que si on fait par parties, on va retomber sur la même intégrale.
Dans ce cas, il faut donner un petit nom à l'intégrale, par exemple I. Au final on va tomber sur une équation avec des I. Il suffira de la résoudre.

↳ Concrètement : i) On baptise : Soit $I := \int_0^{\pi/2}\sin(x)\cdot\cos(x)dx$.

ii) On intègre par parties : $I = \int_0^{\pi/2}\underbrace{\sin(x)}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}dx = \left[\underbrace{\sin(x)}_{f}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g}\right]_0^{\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos(x)}_{f'}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{g}dx}_{=I}$.

Donc au final : $I = \left[\sin(x)^2\right]_0^{\pi/2} - I$

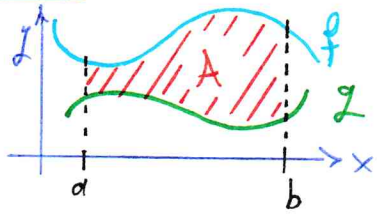
iii) On résoud pour trouver I : Ici : $2I = \left[\sin(x)^2\right]_0^{\pi/2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(0) = 1$.

Donc $I = \frac{1}{2}$.

Et donc : $\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{2}$.

Exercice : En utilisant la même méthode, trouver une primitive de $e^{2x}\cdot\cos(x)$.

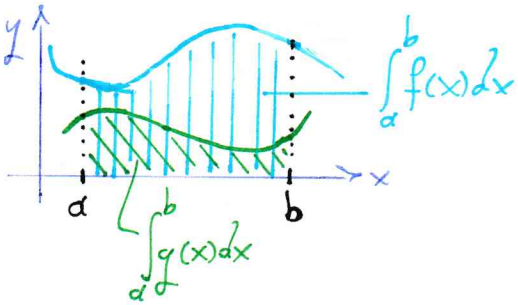
Applications des Intégrales :



On veut calculer l'aire A sur le dessin :

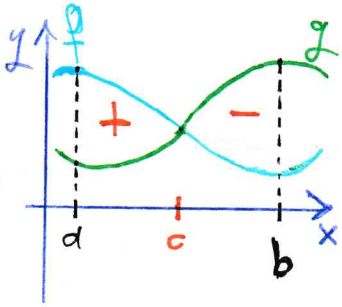
On sait que l'intégrale donne l'aire sous la courbe.

Donc ici : $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.



Si la fonction f est en dessous de g, on aura juste un signe différent. Donc au final on a juste à mettre une valeur absolue pour être sûr d'avoir un nombre positif à la fin (une aire doit toujours être positive).

$$\text{Donc } A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|.$$



⚠ Le piège subtil : Si f est un moment au-dessus, un moment au-dessous de g : Alors on ne peut pas juste se contenter de prendre la valeur absolue de $\int_a^b (f(x) - g(x))$.

Car : Dans la partie + f est au-dessus de g donc l'intégrale est positive.
Dans la partie − f est en-dessous de g donc l'intégrale est négative.

Donc si on prend la valeur absolue après avoir fait toute l'intégrale, les + et − peuvent se compenser et on obtiendra pas l'aire juste.

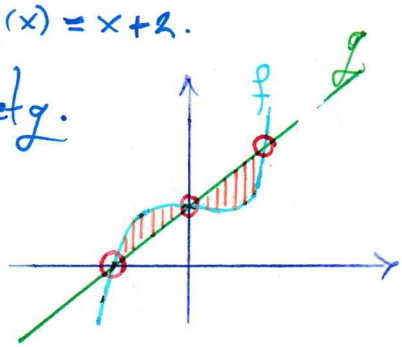
Dans un tel cas, il faut séparer l'intégrale, selon que f est au-dessus ou au-dessous, et prendre la valeur absolue à chaque fois. Mathématiquement :

$$A = \left| \int_a^c (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_c^b (f(x) - g(x))dx \right|.$$

Exemple : (Important ! car typique examen.) (Maturi 2013)

Soit $f(x) = (x+2)(x^2 - x + 1)$ et $g(x) = x + 2$.

Calculer l'aire totale formée par la surface comprise entre f et g.



On doit donc trouver l'aire qui est piégée entre les graphes de f et de g.

Dans un exercice comme celui-là, si on ne donne pas de bornes, ça veut dire que les deux fonctions se chargent elles-mêmes de fermer le domaine, en se coupant. ↳ Voir les points o sur le schéma.

Donc, pour savoir de où à où intégrer, on doit trouver les intersections :

$$f(x) = g(x) \iff (x+2)(x^2-x+1) = x+2$$

On voit que $x=-2$ donne zéro des deux côtés, donc c'est une solution. Si $x \neq -2$ on peut diviser des deux côtés.

$$x^2-x+1 = 1$$
$$x^2-x = 0$$
$$x^2 = x \implies \text{donc } x=0 \text{ ou } x=1.$$

Au final on a des intersections en -2, en 0 et en 1.

$$\text{Donc } A = \left|\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(f(x)-g(x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} x^3+x^2-2x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x^3+x^2-2x\,dx\right|$$

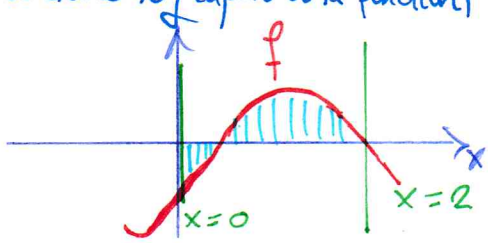
$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|-4+\frac{8}{3}+4\right| + \left|\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right| = \underbrace{\left|\frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right|}_{} = \frac{37}{12}.$$

On voit l'importance d'avoir séparé en deux. Sinon les deux nombres se seraient combinés et on aurait eu $\frac{27}{12}$ à la place.

Exercice 1 : Soit $f = (x-1)(-x^2+4)$. Déterminer l'aire comprise entre le graphe de la fonction, l'axe des x et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$.

Astuce : On doit calculer l'aire en bleu. Donc on doit faire gaffe au signe de f.



Exercice 2 : Soit $f(x) = -x^2-x+6$ et $g(x) = (x-1)(x^2-x-6)$.
Calculer l'aire comprise entre f, g et les droites $x=-2$ et $x=2$.

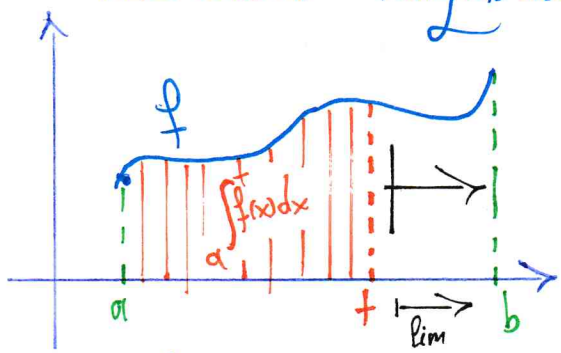
Remarque : Gardez son calme même si on tombe sur $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ pendant le calcul.

Exercice : (Matu 2017) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}}\,dx.$

Exercice : $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot \ln^3(x)}\,dx.$ Astuce : dérivée intérieure.

Intégrales Impropres :

Idée : Si la fonction à intégrer n'est pas définie, ou pas continue à une des bornes, on peut quand même calculer l'intégrale en utilisant la :



Recette :
i) Remplacer la borne problématique par t.
ii) Faire l'intégrale comme si de rien n'était.
iii) Tout à la fin, prendre la limite quand t tend vers la valeur désirée.

Exemple : $\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$. La fonction n'est pas définie en 0. On va donc remplacer cette borne par t et prendre une limite.

$$\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^4 2\cdot x^{-1/2}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[2\cdot 2\cdot x^{1/2}\right]_t^4$$

On vient par en-haut.

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(4\cdot 4^{1/2} - 4\cdot t^{1/2}\right) = 4\cdot\sqrt{4} - 4\cdot\sqrt{0^+} = 8.$$

On peut utiliser la même technique si une des bornes est infinie :

$$\int_3^{+\infty}\frac{5+y}{y^3}\,dy = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{5+y}{y^3}\,dy = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{5}{y^3}+\frac{1}{y^2}\,dy = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{5}{-2}y^{-2} - y^{-1}\right]_3^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{5}{2}t^{-2} - t^{-1}}_{\text{tend vers } 0} - \frac{-5}{2}3^{-2} + 3^{-1}\Big) = \frac{5}{2}\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}.$$

Si la réponse donne ∞, on dit que l'intégrale <u>diverge</u>.

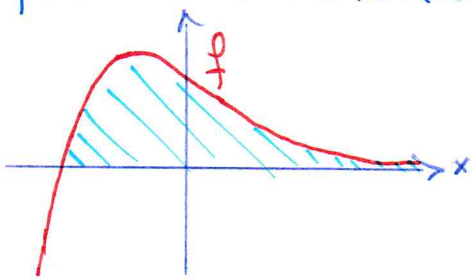
Si on a deux bornes qui posent problème, on doit faire deux limites :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{z^2+1}\,dz = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ u\to-\infty}}\int_u^t \frac{3}{z^2+1}\,dz = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ u\to-\infty}}\left[3\arctan(z)\right]_u^t = \lim_{\substack{t\to\infty\\ u\to-\infty}}\left(3\arctan(t) - 3\arctan(u)\right)$$

$$= 3\arctan(\infty) - 3\arctan(-\infty) = 3\frac{\pi}{2} - 3\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi.$$

Exercice : (Maths 2017) Soit $f(x) = e^{-2x}(x+1)$. Montrer que f a un A.H. : $y=0$ en $+\infty$.

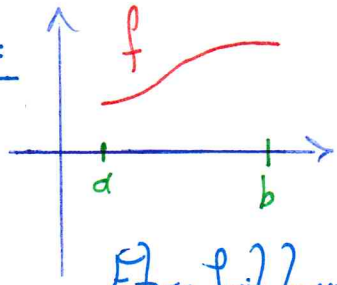
Calculer l'aire hachurée :

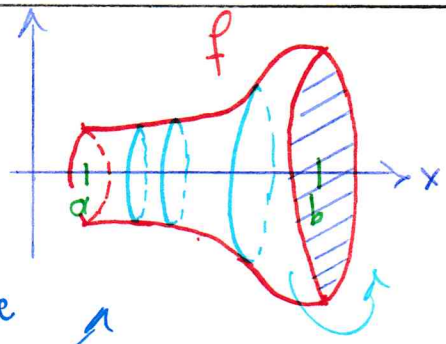


Astuce : On peut trouver une des bornes en cherchant l'intersection avec les axes. L'autre sera $+\infty$.
On a donc une intégrale impropre.

Volumes :

On prend une fonction f entre a et b :

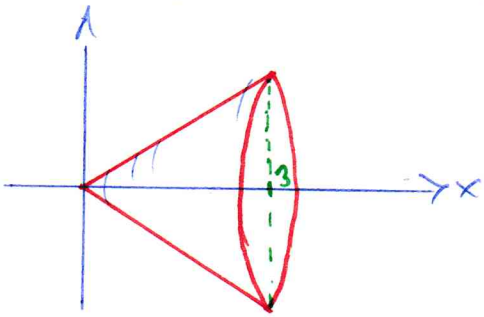




Et on fait tourner son graphe autour de l'axe x.

Le volume du solide ainsi engendré est donné par :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Exemple : Calculer le volume du cône engendré en faisant tourner $f(x) = 2x$ autour de Ox entre 0 et 3.

$$V = \pi \int_0^3 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^3 (2x)^2\,dx = \pi \int_0^3 4x^2\,dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^3 = \pi\left(\frac{4}{3}\cdot 27 - 0\right) = 36.$$