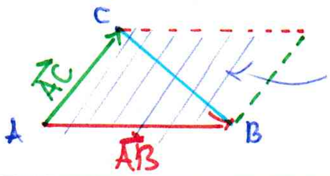
Exercice 1 : Calculer l'aire du triangle formé par les points : $A(1,2,1)$, $B(3,-2,-1)$ et $C(-1,4,-2)$.

Solution : On sait que la norme du produit vectoriel donne l'aire du parallélogramme :



$$\text{Aire} = \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$$

On aura donc juste à diviser le résultat par 2 pour trouver l'aire du triangle.

Reste à trouver les composantes des vecteurs, et à calculer leur Produit.

Rappel : Composantes : Si on a 2 points : $A(a_1,a_2,a_3)$ et $B(b_1,b_2,b_3)$, alors le vecteur entre les deux a comme composantes : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Donc ici : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 4-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot(-3) - (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot(-2) - 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 - (-4)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc au final : $\text{Aire du triangle} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 10^2 + (-4)^2} = \ldots$

Exercice 2 : Soit les points $A(1,-1,2)$, $B(3,3,8)$ et $C(-3,5,4)$. Donner les équations param. et cartésienne de la droite passant par C et parallèle à (AB).

Rappel : Les droites : Si on a un point $A(a_1,a_2,a_3)$ et un vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, alors la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$ a comme équations :

Vectorielle : $\boxed{(A,\vec{d}) = \{ M \in E_3 \,,\ \vec{AM} = k\cdot\vec{d} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \}}$.

Paramétrique : Si on note x, y, z les coordonnées de M, alors $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix}$ et on peut réécrire :

$$\begin{cases} x = a_1 + k\cdot d_1 \\ y = a_2 + k\cdot d_2 \\ z = a_3 + k\cdot d_3 \end{cases}$$
avec $k \in \mathbb{R}$.

Cartésienne : En éliminant k :

$$\boxed{\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}}$$

Rappel : Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Donc, pour l'exercice, on commence par chercher le vecteur directeur de (AB) : $AB = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-(-1) \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

La droite qu'on cherche doit être parallèle à (AB). On peut donc réutiliser $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur. Vu qu'elle passe par $C(-3,5,4)$, ses éq. param. sont :

$$\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 5 + 4k \\ z = 4 + 6k \end{cases}$$ et ses éq. cartésiennes : $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-4}{6}$.

Exercice 3 : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Sont-ils coplanaires ? Si oui, écrire l'un d'eux comme une combinaison linéaire des deux autres.

On sait qu'ils sont coplanaires seulement si le produit mixte vaut 0. On calcule :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(3-(-21)) - (-3)\cdot(-12-(-6)) + (-28-2)$$

$$= 48 - 18 - 30 = 0.$$ Donc coplanaires.

On cherche à écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaires des deux autres.

On veut donc écrire : $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

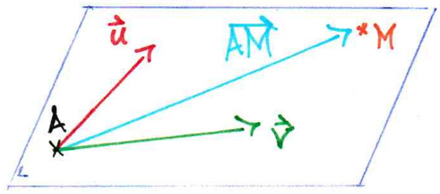
En composantes ça donne :

$$\begin{cases} (1) & 4\alpha - 2\beta = 2 \\ (2) & -\alpha - 7\beta = -3 \\ (3) & 3\alpha - 3\beta = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (1)+4\cdot(2) & -30\beta = -10 \\ (3) & 3\alpha - 3\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{3}}$$

En remplaçant dans l'équation du bas : $3\alpha - 3\cdot\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$

Donc au final : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$.

Rappel sur les plans : Un plan est défini par un point A et deux vecteurs non-alignés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



C'est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

C'est à dire : $\boxed{(A,u,v) = \{M \in E_3 \mid AM = k\cdot u + n\cdot\vec{v} \text{ , avec } k \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{R}\}}$.

Si le point M a les coordonnées $M(x,y,z)$, alors $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix}$ et on obtient l'équation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + k\cdot u_1 + n\cdot v_1 \\ y = a_2 + k\cdot u_2 + n\cdot v_2 \\ z = a_3 + k\cdot u_3 + n\cdot v_3 \end{cases}}$$

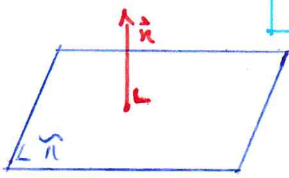
Pour obtenir la cartésienne : pour que les trois vecteurs AM, u et v soient coplanaires, il faut que leur produit mixte soit nul :

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & u_1 & v_1 \\ y-a_2 & u_2 & v_2 \\ z-a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

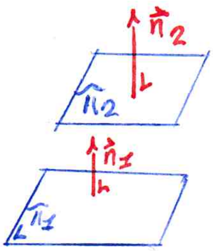
Si on calcule le déterminant, on obtient l'équation cartésienne :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}.$$

Vecteur Normal : Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.



Les vecteurs normaux pour connaître la position relative de deux plans :



Deux plans π_1 et π_2 sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont collinéaires.

Si en plus ils ont un point commun, alors ils sont confondus.

Exercice 4 : Soit les plans $\pi_1 : 6x - 2y + 3z - 28 = 0$ et $\pi_2 : x + y + 3z - 13 = 0$.

Se coupent-ils ? Si oui, trouver les équations paramétriques de la droite d'intersection.

Pour savoir si ils se coupent, on regarde les vecteurs directeurs : $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Il ne sont pas proportionels, donc pas collinéaires.

Donc les plans ne sont pas parallèles, donc ils se coupent.

Pour trouver la droite d'intersection : Il nous faut un point sur la droite, et son vecteur directeur.

Pour le vecteur directeur : Il doit être à la fois dans π_1 (donc perpendiculaire à $\vec{n}_1$) et dans π_2 (donc perp. à $\vec{n}_2$).

Donc le vecteur directeur $\vec{d}$ doit être perpendiculaire à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$ en même temps.

Ça tombe bien, on sait justement que le produit vectoriel de deux vecteurs est perpendiculaire à ces-derniers.

Donc on prend : $\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 3 - 3\cdot 1 \\ 3\cdot 1 - 6\cdot 3 \\ 6\cdot 1 - (-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Trouver un point sur la droite d'intersection des deux plans : Ce point doit satisfaire à la fois les éq. de π_1 et celles de π_2.

On a donc le système : $\begin{cases} 6x - 2y + 3z - 28 = 0 \\ x + y + 3z - 13 = 0 \end{cases}$.

On commence par éliminer une des variables. Ici on peut éliminer z en prenant la 1ère éq. moins la 2ème :

$$5x - 3y - 15 = 0.$$

On peut maintenant choisir une des deux variables. Ici on choisit $\boxed{x = 0}$. L'équation nous dit alors que $\boxed{y = -5}$.

On remplace tout dans la première équation pour trouver z :

$$6\cdot 0 - 2\cdot(-5) + 3z - 28 = 0$$
$$\hookrightarrow \quad 3z = 18 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 6.}$$

Donc au final, les équations de la droite sont : $\begin{cases} x = -9k \\ y = -5 - 15k \\ z = 6 + 8k \end{cases}$.

Exercice 5 : Soit le plan π : $4x + 2y - 2z + 7 = 0$ et la droite $d(A, \vec{d})$ avec $A(1,-1,2)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que d est strictement parallèle à π.

Solution : On doit montrer que la droite est parallèle, mais pas contenue dans le plan.

Pour montrer que parallèle, on peut montrer que le vecteur directeur et le vecteur normal du plan sont orthogonaux :

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\cdot 3 - 5\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0.$$

Il nous reste à montrer que d est pas contenue dans π.

Pour ça, on peut montrer que le point A n'est pas dans π, en montrant qu'il ne vérifie pas l'équation du plan :

$$4\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 2\cdot(2) + 7 = 9 \neq 0$$

$\hookrightarrow$ Donc d strictement parallèle à π.

Exercice 6 : Soit π et d comme avant. Trouver l'équation cartésienne du plan π_1, parallèle à π et contenant d.

Solution : Si les plans sont parallèles, alors leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Donc, comme vecteur normal de π_1, on peut récupérer celui de π, et écrire :

$$\pi_1 : 6x - 2y + 3z + d = 0.$$

Pour trouver d, on utilise le fait que le plan doit contenir la droite (nommée d elle aussi).
Donc le point A doit vérifier l'équation du plan, et on a :

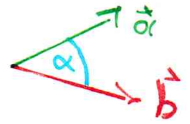
$$6 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + d = 0. \iff 14 + d = 0 \text{ donc } d = -14.$$

Donc le plan est : $\pi_1 : 6x - 2y + 3z + d = 0.$

Exercice 7 : Calculer l'angle aigu entre la droite $d_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$ et le plan $\pi : 4x + 2y - 2z + 7 = 0.$

Rappel : Angle entre deux vecteurs :

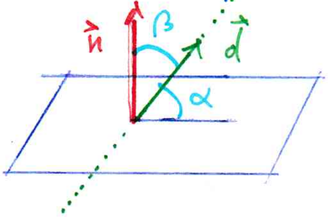
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$



Ici, on peut trouver le vecteur directeur de la droite :

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et le vecteur normal du plan : } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Schématiquement on a :



Ici $\vec{d}$ pourrait être dans l'autre sens. Or on est intéressé par l'angle aigu. Donc on va rajouter une valeur absolue dans la formule pour l'angle.

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2} \cdot \sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{24}} = \frac{8}{\sqrt{696}}.$$

À partir de ça on peut trouver β et on a $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$

Exercice : (Matu 2017) Trouver le centre C et le rayon r de la sphère :

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0 .$$

Rappel: L'équation de la sphère S de centre $C(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon r est:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 .$$

On voit que pour faire apparaître le centre et le rayon dans l'équation de la sphère, il faut compléter le carré. C'est à dire mettre tous les x, les y et les z dans des parenthèses au carré.

On commence avec les x : Comme termes en x on a : $x^2 - 6x$. Si on veut l'exprimer comme $(x + \ldots)^2$, le $-6x$ doit venir du double produit. Donc on essaye avec:

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 . \quad \text{Donc : } x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9 .$$

Avec z : $z^2 - 8z = (z-4)^2 - 16$.

Donc on peut réécrire l'éq. de la sphère comme :

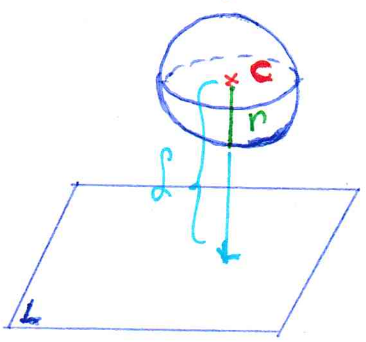
$$x^2 - 6x + y^2 + z^2 - 8z = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + y^2 + (z-4)^2 - 16 = 0$$
$$(x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25 .$$

Donc rayon $r = 5$ et Centre $C(3, 0, 4)$.

Exercice : (Matu 2017) Soit la sphère $S : (x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$ et le plan : $\pi : 3x - y + 4z - 12 = 0$.

Montrer que le cercle coupe la sphère et trouver le centre et le rayon.

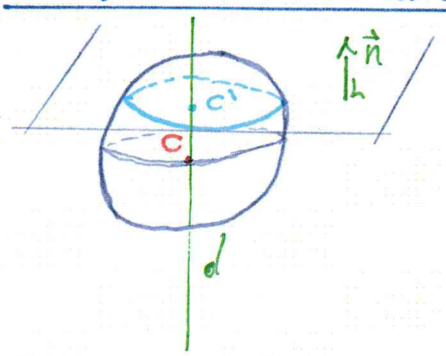
1) Montrer qu'ils se coupent : Pour qu'ils se coupent, il faut que la distance du centre au plan soit plus petite que le rayon.



$$\delta = \frac{|3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}} < 25 \text{ donc se coupent.}$$

Ici: $C(3, 0, 4)$.

Pour trouver l'intersection : On considère d : la droite perpendiculaire au plan π, qui passe par le centre C.



Pour qu'elle soit perpendiculaire à π, on peut prendre comme vecteur directeur le vecteur normal de π.

Donc :
$$d : \begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = -k \\ z = 4 + 4k \end{cases}.$$

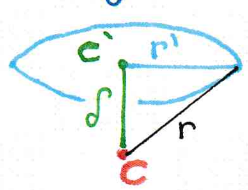
Le centre du cercle sera le point C' où la droite coupe le plan.

Pour trouver l'intersection, on prend les x, y, z donné par l'équation de la droite et on met dans l'équation du plan :
$$3(3+3k) - (-k) + 4(4+4k) = 0$$
$$26k + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -\frac{25}{26}}.$$

On trouve le point C' en mettant k dans l'équation de la droite :
$$\begin{cases} x = 3 + 3\cdot\left(-\frac{25}{26}\right) = \frac{3}{26} \\ y = -\left(-\frac{25}{26}\right) = \frac{25}{26} \\ z = 4 + 4\cdot\left(-\frac{25}{26}\right) = \frac{4}{26}. \end{cases}$$

Donc centre $C'\left(\frac{3}{26}, \frac{25}{26}, \frac{4}{26}\right)$.

Pour le rayon r', on utilise Pythagore :
$$r^2 = r'^2 + \delta^2$$



$$\Rightarrow r' = \sqrt{r^2 - \delta^2} = \sqrt{25 - \frac{169}{26}} = \sqrt{\frac{37}{2}}.$$