Remarque sur les divisions par zéro dans les limites : Soit L un nombre strictement positif : $L > 0$.

Alors on a : $\frac{L}{0^+} = +\infty$ et $\frac{L}{0^-} = -\infty$.

De plus : $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ et $\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$.

On peut facilement déduire ce qu'il se passe quand les signes sont différents.

Les Asymptotes :

1) Asymptote Verticale :

Intuitivement : Une fonction a une asymptote verticale en un point si elle tend vers l'infini quand on s'approche de ce point.

Définition : La fonction f a une asymptote verticale en a si :

$$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty .$$

Notation : On dit alors que la droite $x = a$ est une asymptote verticale de la fonction f.

Remarques :

i) On ne peut avoir des A.V que aux trous du domaine de définition.

↳ Donc, par exemple, pour les fractions, il faut regarder où le dénominateur vaut zéro.

ii) Il est important de calculer séparément lim. à droite et lim. à gauche pour savoir si la fonction va vers plus ou moins infini.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Le domaine a un trou en 0 donc on cherche s'il y a une A.V. en 0.

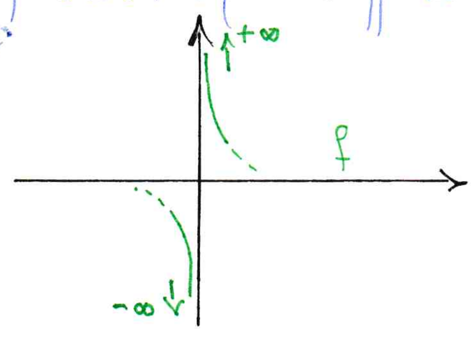
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

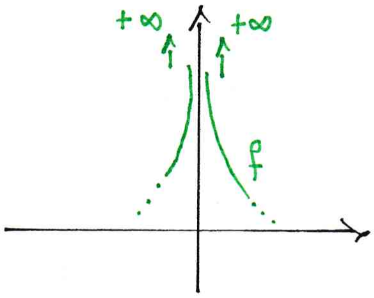
Donc la fonction part à $-\infty$ quand on s'approche de 0 par la gauche.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Donc la fonction part vers $+\infty$ quand on s'approche de 0 par la droite.

Donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale de la fonction f.



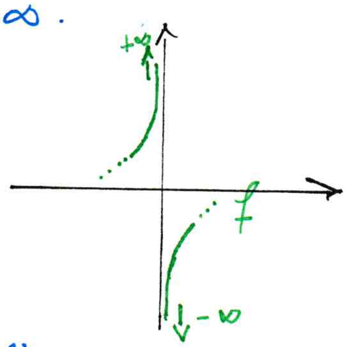


Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$. De nouveau le domaine a un trou en zéro.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$ Donc la droite $x = 0$ est une A.V. de la fonction f.

Exemple : Soit $f(x) = -\frac{x^2-1}{x(x-1)}$. Le domaine a un trou en 0 et en 1.



En 0 : $$\lim_{x \to 0^-} -\frac{x^2-1}{x(x-1)} = -\frac{0^- - 1}{0^-(0^- - 1)} = -\frac{-1}{0^- \cdot (-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2-1}{x(x-1)} = -\frac{0^+ - 1}{0^+(0^+ - 1)} = -\frac{-1}{0^+(-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty .$$

Donc A.V. : $x = 0$.

En 1 : $$\lim_{x \to 1} -\frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{0}{0}$$ indéterminé. On doit donc transformer l'expression.

$$\lim_{x \to 1} -\frac{x^2-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} -\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} -\frac{x+1}{x} = -2 .$$

Donc pas d'A.V. en $x = 1$.

2) Asymptote Horizontale :

Intuitivement : Une fonction a une asymptote horizontale vers $+\infty$ si elle devient plate lorsqu'on va vers $+\infty$.

Définition : La fonction f a un asymptote horizontale en $+\infty$ si :

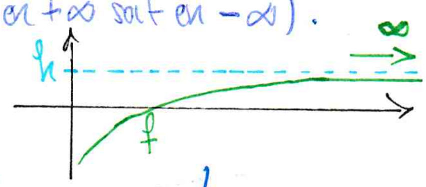
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = h .$$

On dit alors que la droite $y = h$ est une asymptote horizontale de la fonction f vers $+\infty$.

Remarques : i) On définit de façon similaire une A.H. vers $-\infty$.

ii) Pour savoir si on va vers l'asymptote par en-dessus ou par en-dessous :

On regarde le signe de la dérivée où on a l'A.H. (donc soit en $+\infty$ soit en $-\infty$).



Exemple : Si on a une A.H. : $y = h$ en $+\infty$ et que la dérivée est positive vers $+\infty$: On sait que dérivée positive veut dire que la fonction est croissante. donc on arrive par en-dessous.

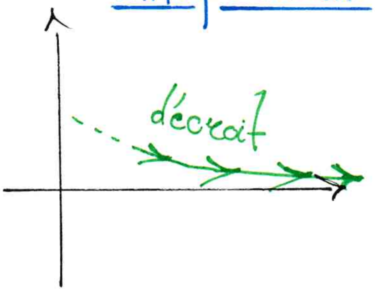
Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, on va chercher les asymptotes horizontales.

En $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$ Donc A.H. : $y = 0$ en $+\infty$.

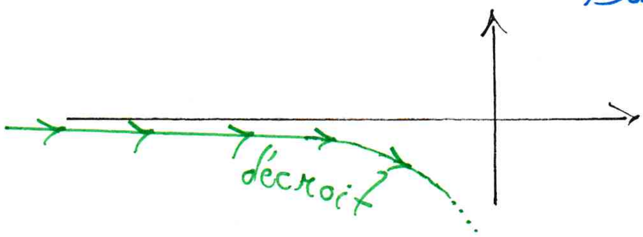
En $-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$. Donc A.H. : $y = 0$ en $-\infty$.

Dessus ou Dessous : On calcule la dérivée : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Elle est toujours négative donc la fonction est toujours décroissante.

Interprétation : En $+\infty$: Quand on va vers $+\infty$, on doit tendre vers 0 tout en décroissant. Donc on arrive par en-dessus.

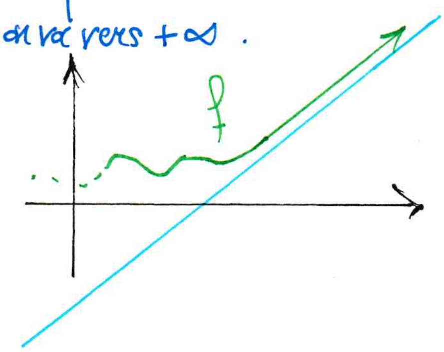


En $-\infty$: Au lieu de faire comme si on allait vers $-\infty$, on considère la situation dans l'autre sens : on fait comme si on revenait de $-\infty$. Donc : On était en $-\infty$. Là bas, la fonction tendait vers 0. Maintenant on en revient, tout en décroissant. Donc, depuis le zéro on se dirige vers le bas $\Rightarrow$ En dessous.



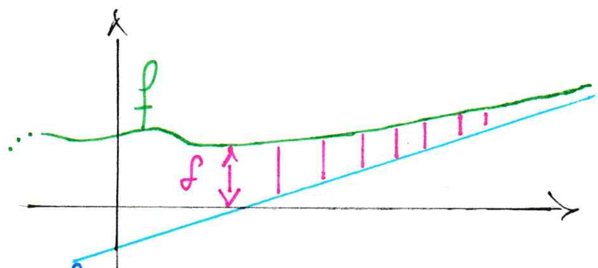
3) Asymptote Oblique :

Intuitivement : Une fonction a une asymptote oblique vers $+\infty$ si elle devient une droite lorsque on va vers $+\infty$.



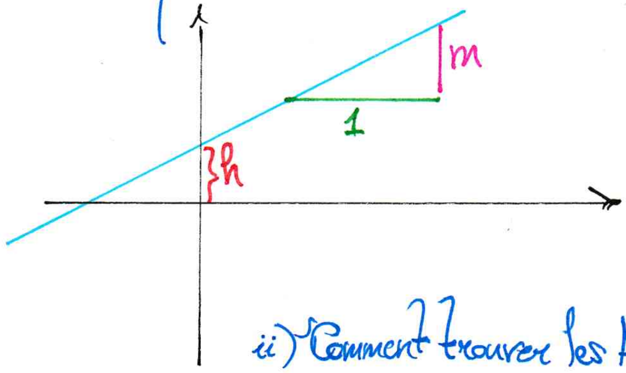
Définition :

> La droite d'équation $y = mx + h$ est une asymptote oblique de la fonction f vers $+\infty$ si on peut écrire : $f(x) = mx + h + \delta(x)$
>
> avec $\lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$.



Interprétation : En gros la définition veut dire ceci :
Vers $+\infty$, la fonction f est presque égale à la droite $y = mx + h$, à part pour un terme $\delta(x)$ qui emmerde, mais qui devient de plus en plus petit quand on va vers l'infini. Donc $\delta(x)$ nous donne la distance entre f et la droite, et comme il rétrécit, f devient de plus en plus confondue avec la droite.

Remarques: i) Comment dessiner la droite : h donne la hauteur de la droite au-dessus du point O (en-dessous si h négatif).



m donne la pente de la droite, c'est à dire : de combien on monte si on avance de 1 (de combien on descend si m négatif).

ii) Comment trouver les A.O. : On commence par chercher les A.H., et après on cherche les A.O. seulement pour les côtés où il n'y a pas d'A.H..

On trouve m et h en utilisant : $\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ et } h = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx).}$

Il y a une A.O. : $y = mx + h$ seulement si ces deux limites existent.

Exemple: Soit $f(x) = \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$. On cherche si il y a des A.O..

On commence par regarder si il y a des A.H. : $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} \overset{\text{terme de plus haut degré}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty.$

Donc pas d'A.H. en $+\infty$, et de la même manière, pas d'A.H. en $-\infty$.

On cherche les A.O. :

En $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x - 3}{x(x^2 + 2x + 1)} \underset{\text{plus haut degré}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$ Donc pente $m = 1$.

On cherche h : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x - 3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 - 3x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2.$ Donc hauteur $h = 2$.

On a donc un A.O. : $y = x - 2$ en $+\infty$.

Remarques: i) On a aussi la même A.O. en $-\infty$.

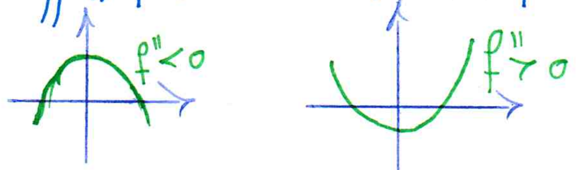
ii) Dans un cas comme celui-ci où on a une division et que le dénominateur a un degré plus bas que celui du numérateur, on peut faire la division euclidienne.

Ça va nous simplifier le calcul des dérivées plus tard et ça permet en général de directement voir les asymptotes obliques.

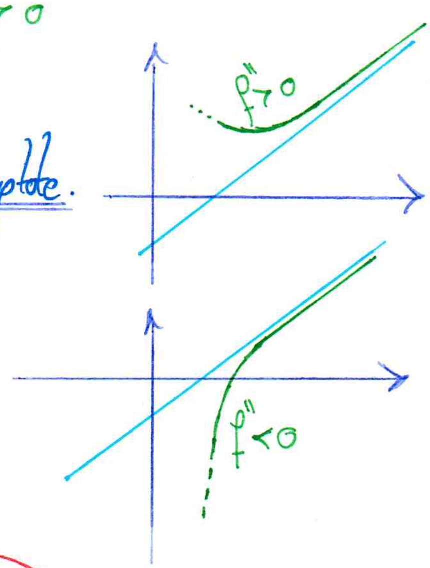
<u>En-dessous ou en-dessous de l'asymptote oblique :</u> Pour déterminer cela, on a deux méthodes :

i) Si on a calculé l'A.O. en utilisant la méthode avec $\delta(x)$, alors un δ positif veut dire qu'on est au dessus.

ii) <u>Avec la dérivée seconde</u> : Pour rappel, f'' donne le "sourire" de la fonction :



Quand on a une asymptote oblique, on peut trouver comment la fonction s'en approche en regardant le signe de f'' <u>du côté de l'asymptote</u>.



<u>Exemple :</u> (suite) On reprend notre fonction d'avant :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -2x & -3 & x^2+2x+1 \\ \hline
x^3 & +2x^2 & +x & & x-2 \\ \hline
 & -2x^2 & -3x & -3 & \\
 & -2x^2 & -4x & -2 & \\ \hline
 & & x & -1 &
\end{array}$$

Moralité : $f(x) = x - 2 + \frac{x-1}{x^2+2x+1} \leftarrow \delta(x)$

Ici on voit la structure de l'asymptote oblique : la droite $x-2$ et la fraction qui donne le $\delta(x)$ qui tend vers 0.

On peut maintenant trouver si on est au-dessus ou au-dessous de l'A.O..
On va faire les deux méthodes :

i) On a $\delta(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$. Cette fraction est positive vers $+\infty$ et négative vers $-\infty$.
$\Longrightarrow$ Au-dessus vers $+\infty$ et en-dessous vers $-\infty$.

ii) On fait avec la dérivée seconde : $f'(x) = 1 + \frac{x^2+2x+1-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = 1 + \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+2x+1)^2}$

$$= 1 + \frac{(3-x)(x+1)}{(x+1)^4} = 1 + \frac{3-x}{(x+1)^3}.$$

$$f''(x) = \frac{-(x+1)^3 - (3-x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2(-x-1-9+3x)}{(x+1)^6} = \frac{2x-10}{(x+1)^4}.$$