Révision : Les Limites :

Définition : Le nombre L est limite de f en α si $f(x)$ est $\underbrace{\text{arbitrairement proche}}$ de L dès que x est suffisament proche de α, avec $x \neq \alpha$.

sous-entendu : Aussi proche que l'on veut.

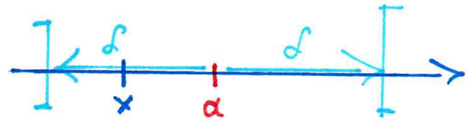
On note $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$.

Mathématiquement : L est limite de f en α si :

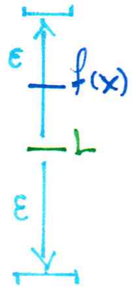
> Pour tout $\varepsilon > 0$: Il existe $\delta > 0$ tel que :
> $0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Étudions séparément les éléments de cette définition :

i) $0 < |x - \alpha| < \delta$ veut dire que la distance entre x et α est plus petite que δ.



ii) $|f(x) - L| < \varepsilon$ veut dire que la distance entre $f(x)$ et L est plus petite que ε.



Donc, en résumé, dans la définition, δ va donner la distance maximale entre x et α et ε va donner la distance maximale entre $f(x)$ et L.

Propriétés des Limites :

i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

"On peut casser les additions en deux."

ii) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$.

iii) Soit λ un nombre : $\lim_{x \to a} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x)$.

"On peut sortir les nombres."

iv) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$.

"On peut casser les multiplications en deux."

v) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

"On peut casser les divisions en deux, tant qu'on a pas du 0 en-dessous."

Remarque : Parfois, en transformant l'expression pour $f(x)$, on peut calculer sa limite en un point hors du domaine.

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}$. Calculer la limite de f en $x = 1$.

On commence par transformer f :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1.$$

Donc $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$.

Exemple : Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$.

On a : $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{x} - \dfrac{2x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} (x-2) = -2$.

Limites avec Racines : En général, quand on a des racines, il faut multiplier par le conjugué pour s'en sortir.

Exemple :

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 1 : Calculer :

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Limites à droite / Limite à gauche :

"Définition" : Le nombre L est limite à droite de f en a si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisament proche de a, avec $x > a$.

" On s'approche par la droite. "

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}}$ ou $\lim\limits_{x \to a^+}$.

Remarque : De la même manière, on peut définir la limite à gauche, en prenant $x < a$.

Exemple : Calculer les limites à droite et à gauche de $\dfrac{|x|}{x}$ en 0.

i) On commence par la gauche : On aura donc $x < 0$ et on va se diriger vers 0 en arrivant par les nombres négatifs.

Dans les nombres négatifs, on a $|x| = -x$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{-x}{x} = -1.$

ii) Par la droite : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x} = 1.$

Exercice 2 : Calculer les limites à droite et à gauche de : $\cdot)\ f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{|x|}$ en 0

$\cdot)\ f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$ en 2.

Quelques limites à savoir par cœur :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$. On voit que cette limite ressemble à une autre limite qu'on connait déjà : $\dfrac{\sin(x)}{x}$. On va donc essayer de faire apparaître ce terme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2}\cdot\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0} 2\cdot\frac{\sin(y)}{y} = 2\cdot 1 = 2.$$

On pose $y := 2x$.
Si x tend vers 0, alors y aussi.

Exercice 3 : Calculer :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Calcul avec les Infinis : Soit L un nombre fini. Alors on a :

$\infty + \infty = \infty$, $\infty + L = \infty$, $\infty \cdot L = \infty$ (ou $-\infty$ si L négatif)

$\dfrac{L}{\infty} = 0$ (selon les signes on a 0^+ ou 0^-) , $\dfrac{\infty}{L} = \infty$ (ou $-\infty$ si L négatif).

Indéterminations : Quand on a un combat entre deux quantités qui vont dans des sens différents, on a une indétermination.

Les expressions suivantes sont indéterminées : $\boxed{\dfrac{0}{0} \ , \ \dfrac{\infty}{\infty} \ , \ 0\cdot\infty \ , \ \infty - \infty .}$

Pour calculer la limite quand on a une indétermination on peut soit :

i) Transformer l'expression

ii) Dans certains cas particuliers, on peut utiliser l'Hospital.

L'Hospital :

Quand on a une limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ qui donne une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$,
alors on peut continuer en dérivant en haut et en bas :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

par autant que cette dernière limite existe. ⚠

Remarques :

i) On peut aussi l'utiliser pour x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

ii) Pour utiliser l'Hospital, il faut que les fonctions f et g soient continûment dérivables autour du point où on cherche la limite.
Par exemple, $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)}$. Cette limite donne une indétermination $\frac{0}{0}$, on utilise donc l'Hospital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}$$

$$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}} = 3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}} = 3 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6.$$

Exemple : On va montrer pourquoi la remarque à côté du panneau ⚠ est importante.

Pour rappel, dans l'Hospital, il est nécessaire que $\lim \frac{f'}{g'}$ existe.

Pour voir ça on peut essayer de calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$.

On voit qu'on a une indétermination de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Si on essaye d'utiliser l'Hospital : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\cos(x)}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} (1+\cos(x))$.

Cette limite n'existe pas car le cosinus oscille continuellement entre -1 et $+1$.

En revanche, la limite qu'on voulait calculer à la base existe bel et bien :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) = 1.$$

Vu que sinus est toujours compris entre -1 et 1, quand on envoie $x \to \infty$, $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 0.

Limites à l'Infini pour les polynômes :

Le comportement d'un polynome à l'infini ne dépend que du terme de plus haut degré.

Ainsi on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n) \\[2ex] \text{et} \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}. \end{array}}$$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^5 + x^3 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^5}{x^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x} = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^7 + x^3 + 1}{5x^7 + 8x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^7}{5x^7} = \dfrac{3}{5}$.

Exercices :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 2x + 3}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{3 + 7x^3 - 5x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 7}{2x^2 - 3x + 2}$

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ 7) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} (1 + \sin(x)) \cdot \tan^2(x)$