

SUPSI/DTI



PROF. ANDREA DANANI

Analisi dei Segnali

Da Fourier a Zeta passando da Laplace



13 febbraio 2025



SUPSI/DTI

BACHELOR
DATA SCIENCES AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Anno Accademico 2024-2025

Prof. Andrea Danani
IDSIA-Istituto Dalle Molle di studi sull'Intelligenza
Artificiale
email: andrea.danani@idsia.ch
homepage : <http://m3.dti.supsi.ch>

Indice

1	Spazi vettoriali	1
1.1	Definizione	1
1.2	Sottospazio e base	2
1.3	Sviluppo in una base	4
1.4	Norma and distanza	4
1.5	Prodotto scalare	4
1.6	Sviluppo nella base ortonormale	5
1.7	Spazi di Hilbert	6
1.8	Proiezione ortogonale	6
2	Serie di Fourier	9
2.1	Introduzione	9
2.2	Polinomi trigonometrici	9
2.3	Definizione della serie di Fourier	11
2.4	Periodo qualsiasi	12
2.5	Fenomeno di Gibbs	13
3	Trasformata di Fourier	15
3.1	T tende a ∞	15
3.2	Definizione	15
3.3	Fattori di normalizzazione	16
3.4	Periodicità e aperiodicità	16
3.5	Funzione caratteristica e troncamento	16
3.6	Relazione di Parseval	17
3.7	Proprietà	18
3.8	Convoluzione	19
4	Qualche nozione di musicologia	21
4.1	Il timbro degli strumenti	21
4.2	Assonanza e dissonanza	24
4.3	La scala diatonica o naturale	25
4.4	I modi	27
4.5	La scala temperata	28
4.6	Caratteristiche degli intervalli musicali	30

5	Interpolazione	33
5.1	L'interpolazione polinomiale	34
5.1.1	Le matrici di Vandermonde e di Gram	34
5.1.2	Polinomi interpolatori di Lagrange	35
5.1.3	Il metodo di Newton: differenze finite divise	39
5.2	Interpolazione mediante funzioni spline	42
5.2.1	Introduzione	42
5.2.2	Spline lineari e quadratiche	42
5.2.3	Le spline cubiche	44
5.3	Interpolazione trigonometrica	47
6	DFT e FFT	49
6.1	Introduzione	49
6.2	La rappresentazione complessa	50
6.3	Un esempio con $N = 4$	52
6.4	Ritorno al caso reale	54
6.5	Funzione simmetrica o antisimmetrica	55
6.6	Funzione interpolante in un intervallo T qualunque	56
6.7	Numero di punti di appoggio tendente all'infinito. Serie di Fourier. . .	57
6.8	Fast Fourier Transform	57
6.8.1	Il caso $n = 2m$	57
6.8.2	Il calcolo numerico	58
6.8.3	Approccio matriciale	59
6.8.4	Un applicazione	60
7	Trasformata di Laplace	63
7.1	Definizione	63
7.2	Proprietà	65
7.3	Derivate temporali e altre proprietà	66
7.4	Convoluzione	66
7.5	Funzioni periodiche	67
7.6	Riassunto delle principali trasformate di Laplace	67
7.7	Trasformata di Laplace inversa	68
7.8	Risoluzione di equazioni differenziali	69
7.9	Equazioni differenziali lineari	69
7.10	Esempio: vibrazioni forzate su una massa attaccata a una molla . . .	71
8	Trasformata Zeta	73
8.1	Definizione	73
8.2	Convergenza e ROC	74
8.3	Proprietà	78
8.4	La trasformata Zeta inversa	79
8.5	Equazioni alle differenze finite	80

8.5.1	Un semplice esempio di discretizzazione	83
8.5.2	Generalizzazione della risoluzione	85
Esercizi		87
	Spazi vettoriali	87
	Serie di Fourier	91
	Trasformata di Fourier	94
	DFT e FFT	96
	Trasformata di Laplace	99
	Trasformata Zeta	103

Spazi vettoriali

1.1 Definizione

Uno spazio vettoriale V è un insieme chiuso rispetto a un'addizione vettoriale e un prodotto esterno con scalari. Se gli scalari appartengono a un campo \mathbb{K} , V è detto spazio vettoriale su \mathbb{K} . V è uno spazio vettoriale se le seguenti regole sono rispettate ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$):

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (commutatività);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (associatività);
3. esiste un vettore nullo, $\mathbf{0} \in V$: $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$;
4. $\forall \mathbf{x} \in V, \exists -\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
5. $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$;
6. $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$;
7. $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$;
8. $\forall \mathbf{x} \in V, 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

La più semplice e primaria rappresentazione di vettore è il cosiddetto segmento orientato. In geometria, un segmento orientato \overrightarrow{PQ} è un segmento $PQ = QP$ dotato di un'orientazione (verso), che rende \overrightarrow{PQ} diverso da \overrightarrow{QP} . Nell'insieme di tutti i segmenti orientati si definisce una relazione di equivalenza, convenendo che due segmenti orientati sono equipollenti se differiscono solo per una traslazione. La classe di equivalenza definisce un vettore. La classe di equivalenza individuata da un vettore applicato (P, Q) è di solito denotata con il simbolo \overrightarrow{PQ} . In questo modo è possibile definire in maniera naturale la somma vettoriale $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. I vettori geometrici sul piano definiscono lo spazio vettoriale V_2 , quelli nello spazio definiscono V_3 . Entrambi sono generalmente definiti sul campo \mathbb{R} , e il numero reale nel prodotto esterno allunga ($a > 1$) o accorcia il vettore ($a < 1$).

Esempi

1. In generale, in dimensione n arbitraria (finita), l'insieme:

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in \mathbb{R}\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione n , i cui vettori sono ennuple di numeri reali, vale a dire: $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$

Numerosi esempi di spazi vettoriali possono essere costruiti sostituendo il campo \mathbb{R} dei numeri reali con un campo qualsiasi \mathbb{K} , ad esempio il campo \mathbb{C} dei numeri complessi. Una ennupla di numeri complessi è quindi un vettore dello spazio vettoriale \mathbb{C}^n . Ogni spazio vettoriale V (sopra il campo \mathbb{K}) di dimensione finita è in effetti identificabile con \mathbb{K}^n

2. L'insieme $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi quadratici è uno spazio vettoriale considerando le comuni operazioni di somma di polinomi

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

e di prodotto con uno scalare

$$r \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = (ra_0) + (ra_1)x + (ra_2)x^2$$

3. L'insieme delle matrici 3×3

$$\mathcal{M}_{3 \times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

è uno spazio vettoriale considerando le comuni somme di matrici e moltiplicazione con uno scalare.

1.2 Sottospazio e base

W è un *sottospazio* di V se $\{a, b \in \mathbb{K} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\} \Rightarrow a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in W$. I vettori $\{\mathbf{v}_i, i = 1 \dots n\} \in V$ sono *linearmente indipendenti* se

$$\sum_{i=1}^r c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \quad (1.1)$$

Altrimenti sono detti *linearmente dipendenti*.

Un insieme di vettori $B = \{\mathbf{v}_i \in V, i = 1 \dots n\}$ è chiamato una *base* di V se i vettori sono linearmente indipendenti e tutti i vettori $\mathbf{x} \in V$ possono essere espressi in modo univoco come combinazione lineare di vettori in B , vale a dire $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$. I coefficienti c_i sono detti *coordinate* del vettore \mathbf{x} relativamente alla base B .

Il numero minimo di vettori che generano lo spazio vettoriale V è detto *dimensione* di V .

Esempi

1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^2 , la linea $y = 2x$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio.

2. Il seguente sottoinsieme di $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ è un sottospazio.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Il seguente insieme non è uno sottospazio di \mathbb{R}^3 .

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 1 \right\}$$

È un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 ma non uno spazio vettoriale. Infatti non è chiuso rispetto alla somma di vettori, come si può vedere di seguito:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Un altro motivo per cui non è uno spazio vettoriale è che non possiede l'elemento nullo)

4. Lo spazio vettoriale dei polinomi quadratici $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ possiede il sottospazio dei polinomi lineari: $L = \{b_0 + b_1x \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\}$. Per verificarlo, prendiamo due scalari $r, s \in \mathbb{R}$ e consideriamo la loro combinazione lineare.

$$r(b_0 + b_1x) + s(c_0 + c_1x) = (rb_0 + sc_0) + (rb_1 + sc_1)x$$

Il risultato appartiene ancora a L , quindi L è chiuso rispetto alla combinazione lineare.

5. Un altro sottospazio di \mathcal{P}_2 è l'insieme dei polinomi con lo stesso coefficiente:

$$M = \{a + ax + ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(1 + x + x^2)a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Sviluppo in una base

Sia $\{\mathbf{v}_i, i = 1 \dots n\}$ una base di V . Allora $\mathbf{x} \in V$ è dato da

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Per ottenere le coordinate α_i di \mathbf{x} , si deve invertire il sistema lineare.

Esempio 1.1 Scrivere il vettore $\mathbf{v} = (4, -3, 2)$ rispetto alla base $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$

Soluzione: Scrivendo la combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ e uguagliandola a \mathbf{v} , si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= -3 \\ \alpha_3 &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 &= 7 \\ \alpha_2 &= -5 \\ \alpha_3 &= 2 \end{cases}$$

1.4 Norma and distanza

V è detto spazio normato quando a ogni vettore, corrisponde un numero reale non negativo chiamato norma del vettore che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (identità);
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ (omogeneità);
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (disuguaglianza triangolare).

La distanza ρ tra due vettori è definita da $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Si definisce in \mathbf{C}^n la p -norma di un vettore $\mathbf{x} = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$ con le formule

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |\xi_i|$$

Le stesse definizioni valgono per la distanza fra due vettori.

1.5 Prodotto scalare

Una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ è chiamata prodotto scalare su V , se le seguenti proprietà sono soddisfatte:

1. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ (definito positivo);
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ (hermitiano);

$$3. \langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \quad (\text{forma sesquilineare});$$

Un prodotto scalare induce una norma in V data da $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Queste norme sono chiamate *norme hilbertiane*. Abbiamo:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

che è detta *Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*.

Due vettori \mathbf{x} and \mathbf{y} sono detti *ortogonali* quando il prodotto scalare è nullo.

1.6 Sviluppo nella base ortonormale

Se la base $\{\mathbf{e}_i, i = 1 \dots n\}$ di uno spazio V è *ortonormale*, vale a dire:

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

il vettore $\mathbf{v} \in V$ si scrive come

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$$

e le coordinate di \mathbf{v} rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ sono date da:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$$

Esempio 1.2 *Mostra che la base data dai vettori*

$$\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

$$\mathbf{e}_2 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 e trova le coordinate del vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ nella base precedente.

Soluzione: Con il calcolo, si verifica che nel caso specifico: $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Le coordinate si ottengono con:

$$\alpha_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = 2/\sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = -1/\sqrt{6}$$

$$\alpha_3 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle = 1/\sqrt{2}$$

1.7 Spazi di Hilbert

Lo spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale che generalizza la nozione di spazio euclideo. Gli spazi di Hilbert sono stati introdotti dal celebre matematico David Hilbert all'inizio del XX secolo. L'interesse della nozione introdotta da Hilbert risiede nel fatto che evidenzia la conservazione di alcune proprietà degli spazi euclidei in spazi di funzioni infinito dimensionali. Come vedremo nel prossimo capitolo, grazie agli spazi di Hilbert, è possibile formalizzare la teoria delle serie di Fourier e generalizzarla a basi arbitrarie.

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare e tale che sia garantita la completezza, ossia che non vi siano comportamenti "patologici" nel processo di passaggio al limite. Come vedremo, nelle applicazioni, i vettori elementi di uno spazio di Hilbert sono spesso successioni di numeri complessi o funzioni.

Esempi

1. $V = \mathbf{C}^n \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$
2. $V = C([a, b]; \mathbf{C})$ (funzioni complesse continue su $[a, b]$)
3. $V = L^2[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$
(funzioni a quadrato integrabili)

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Gli spazi vettoriali 1) e 3) sono *spazi di Hilbert*. 2) non è uno spazio di Hilbert.

1.8 Proiezione ortogonale

Il *complemento ortogonale* è un insieme $W \subset V$ di un insieme W^\perp definito da

$$W^\perp := \{\mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in W\}$$

W^\perp è un sottospazio di V (anche se W non lo è)

Se $V_n \subset V$ è generato dall'insieme $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, allora abbiamo

$$\forall \mathbf{x} \in V \exists \mathbf{y} \in V_n : \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \text{ con } \mathbf{z} \in V_n^\perp$$

\mathbf{y} è la *proiezione ortogonale* di \mathbf{x} su V_n e vale

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|, \forall \mathbf{y}' \in V_n.$$

Se $\{\mathbf{x}_i, i = 1 \dots n\}$ è una famiglia ortogonale, allora \mathbf{y} è dato da

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2} \mathbf{x}_k \quad (1.2)$$

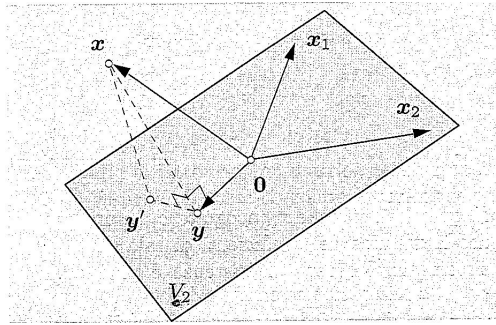


Figura 1.1: La proiezione ortogonale \mathbf{y} di \mathbf{x} su V_2 è anche il punto di V_2 con la distanza minima da \mathbf{x}

Serie di Fourier

2.1 Introduzione

All'origine della rappresentazione di segnali nel dominio delle frequenze, vi è il lavoro monumentale di Jean-Baptiste Fourier (1768-1830). Il suo lavoro rappresenta una delle conquiste della matematica e della scienza che più hanno avuto impatto profondo e duraturo sullo sviluppo sia del sapere scientifico che di innumerevoli settori applicativi ed ingegneristici. Fourier sviluppò la teoria matematica dello sviluppo in serie di funzioni affrontando un problema specifico di propagazione del calore. In questa elaborazione Fourier utilizzò funzioni trigonometriche (seni e coseni) ipotizzando, contro l'evidenza ed il sapere scientifico dei tempi, che questo sviluppo fosse possibile per un'ampia classe di funzioni. Il risultato dovuto a Fourier è che una larga classe di funzioni matematiche possono essere rappresentate mediante la loro serie di Fourier. L'idea, nuova a quel tempo (1807), incontrò vivace opposizione degli altri matematici dell'autorità scientifica, come ad esempio quella di Laplace.

La teoria di Fourier ha oggi applicazioni estremamente ampie in tutti i settori della matematica e delle scienze applicate. Un esempio molto comune è quello dell'acustica, in cui vi è una percezione intuitiva del concetto di altezza del suono, di consonanza, di melodia e di tanti aspetti psicoacustici legati anche allo sviluppo della musica, degli strumenti musicali, della teoria musicale, scale, accordi e così via. Le sinusoidi componenti che definiscono la serie di Fourier sono in realtà le più semplici oscillazioni periodiche percepite dall'orecchio umano: questo infatti è in grado di distinguere se non altezze assolute, la consonanza (unisono) ed i rapporti intervallari tra le altezze. Tutta o gran parte della musica è basata su questa percezione delle altezze. Un approfondimento su questa tematica verrà proposta nel Capitolo 4.

2.2 Polinomi trigonometrici

Le serie trigonometriche sono particolari serie di funzioni, costruite a partire dalle funzioni trigonometriche elementari $\{\sin nx, \cos nx\}$, che si rivelano particolarmente utili nell'analisi di fenomeni periodici.

Una proprietà notevole del sistema di funzioni

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\} . \quad (2.1)$$

è quella di rappresentare un insieme di vettori ortogonali in $L^2([-\pi, \pi])$. Infatti, valgono le seguenti relazioni:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \pi \delta_{kl} \quad (2.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \pi \delta_{kl} . \quad (2.3)$$

Le $2n+1$ funzioni in (2.1) generano il sottospazio \mathcal{F}_n in L^2 e gli elementi di \mathcal{F}_n sono detti polinomi trigonometrici di ordine $\leq n$.

Il polinomio di Fourier di grado n di una funzione $f \in L^2$ è dato dalla sua proiezione ortogonale $s_n^{[f]}(x)$ nel sottospazio \mathcal{F}_n . Esso viene denominato anche $s_n(x)$ e abbiamo che:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \quad (2.4)$$

Grazie alle proprietà di ortogonalità (2.2) e (2.3), si ricava immediatamente dalla (1.2) che i coefficienti a_k e b_k in $s_n(x)$ in (2.4) sono determinati dalle formule seguenti:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt , \quad k = 0, \dots, n \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt , \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Un'altra scrittura equivalente di un polinomio trigonometrico si ricava utilizzando esponenziali complesse. Grazie alle formule di Eulero, si ha infatti che per ogni $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo:

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx} . \quad (2.5)$$

Quindi, ponendo

$$c_0 = a_0 ; \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) ; \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

la (2.4) assume la forma

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{con} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt , \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

Per passare dalla (2.7) alla (2.4), basta porre $a_k = c_k + c_{-k}$; $b_k = i(c_k - c_{-k})$ per $k = 0, \dots, n$. Si osservi che il polinomio (2.4) è reale se e solo se, scritto nella forma (2.7), si ha che $c_{-k} = \bar{c}_k$ per $k = 0, \dots, n$.

Analogamente alla (2.1), le $2n + 1$ funzioni $\{e^{ikx}, k = 0, \pm 1, \dots, \pm n\}$ generano il sottospazio \mathcal{F}_n in L^2 e verificano le relazioni di ortogonalità in $L^2([-\pi, \pi])$:

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 2\pi \delta_{nm} . \quad (2.8)$$

Anche qui, il polinomio di Fourier di grado n di una funzione $f \in L^2$ è dato dalla sua proiezione ortogonale $s_n^{[f]}(x)$ nel sottospazio \mathcal{F}_n e questo significa che:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{\langle f(x), e^{ikx} \rangle}{\|e^{ikx}\|^2} e^{ikx} \quad (2.9)$$

da cui si ottengono direttamente le formule nell'equazione (2.7).

2.3 Definizione della serie di Fourier

La serie (2.4) (oppure la (2.7)), per $n \rightarrow \infty$, vale a dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{[f]}(x) \quad (2.10)$$

è chiamata la **serie di Fourier** della funzione f . Mostriamo un esempio di come viene calcolata.

Esempio 2.1 Dato $V = L^2([-\pi, \pi])$, trova la serie di Fourier di $f(x) := |x|$.

Soluzione: si tratta di una funzione pari, per cui conviene usare la base reale dato che

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin kt \, dt = 0, \quad \forall k .$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt = 2 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$$

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) \end{aligned}$$

Guardiamo il grafico dei primi termini della serie di Fourier di $y = |x|$:

$$s_1(x) = \frac{1}{2}\pi - 4 \frac{\cos(x)}{\pi}$$

$$s_3(x) = \frac{1}{2}\pi - 4 \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{4}{9} \frac{\cos(3x)}{\pi}$$

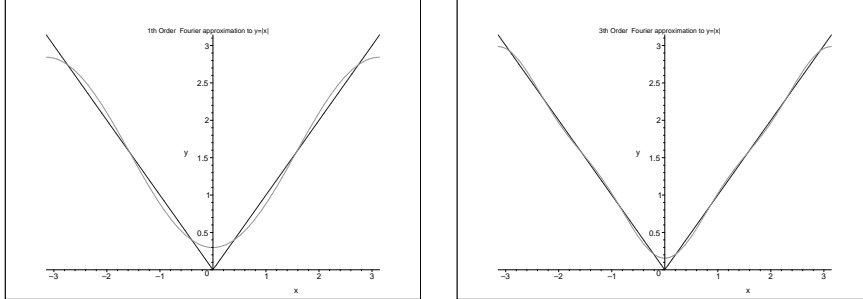


Figura 2.1: Approssimazione al primo e terzo ordine di $y = |x|$

2.4 Periodo qualsiasi

I risultati precedenti possono essere generalizzati a funzioni periodiche con periodo arbitrario $T > 0$. Lo spazio $L^2([0, T])$ o $L^2([-T/2, T/2])$ ammette come base ortogonale il seguente insieme di funzioni a valore complesso:

$$\{e^{in\omega t}, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{dove } \omega := 2\pi/T \quad \text{e} \quad \|e^{in\omega t}\|^2 = T \quad (2.11)$$

Questo fatto implica le seguenti serie di Fourier reale e complessa:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x} \quad \text{con} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \quad \text{con} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt \end{aligned}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Le formule precedenti sono valide per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ ponendo $b_0 = 0$.

Esempio 2.2 Dato $V = L^2([-1, 1])$, trova la serie di Fourier di $f(x) := x$.

Soluzione: si tratta di una funzione dispari, perciò usiamo nuovamente la base reale con $T = 2$. Con $\omega = \pi$, l'insieme di funzioni a valore reale

$$\{1, \cos \pi x, \sin \pi x, \dots, \cos n\pi x, \sin n\pi x\}$$

diventa ortonormale. Ne segue che:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^1 t \cos k\pi t \, dt = 0 \quad \forall k, \\ b_k &= \int_{-1}^1 t \sin k\pi t \, dt = -2 \frac{(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

Questo conduce alla seguente serie di Fourier :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^n -2 \frac{(-1)^k \sin(k\pi x)}{k\pi} \\ &= 2 \frac{\sin(\pi x)}{\pi} - \frac{\sin(2\pi x)}{\pi} + \frac{2 \sin(3\pi x)}{3\pi} - \frac{1 \sin(4\pi x)}{2\pi} + \dots \end{aligned}$$

Nella figura seguente, vediamo l'approssimazione al sesto ordine della funzione con la relativa funzione di errore.

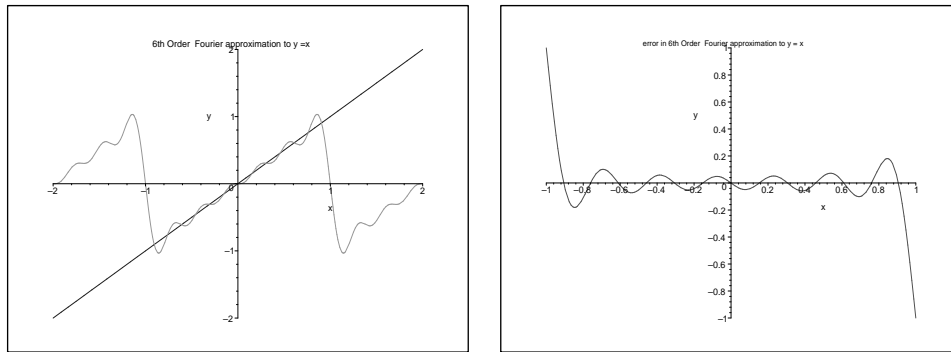


Figura 2.2: Approssimazione al sesto ordine di $y = x$ con il relativo errore

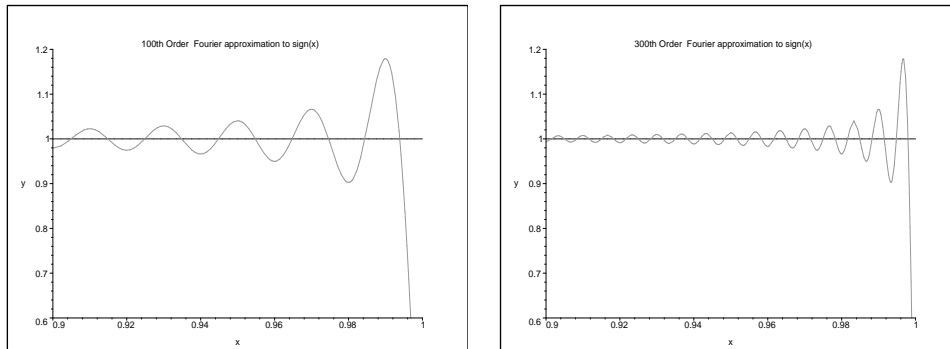
2.5 Fenomeno di Gibbs

Se calcoliamo la serie di Fourier della funzione a tratti $\text{sign}(x)$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

otteniamo il seguente risultato:

$$\text{sign}(x) = 4 \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\sin(3\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(5\pi x)}{5\pi} + \frac{\sin(7\pi x)}{7\pi} + \dots \right) \quad (2.13)$$



Le seguenti due figure mostrano l'approssimazione al 100esimo e 300esimo ordine vicino alla discontinuità:

L'approssimazione della serie di Fourier mostra un "overshoot" nelle discontinuità. Mentre la convergenza della serie verso la funzione migliora ovunque, l'altezza degli "overshoot" non tende a decrescere, aumentando il numero di termini.

Questo comportamento è chiamato *Fenomeno di Gibbs*. Mostra che la serie di Fourier non converge uniformemente verso una funzione discontinua in un intervallo piccolo a piacere attorno a un punto di discontinuità. Formalmente, il seguente teorema può essere formulato:

Sia f una funzione continua a tratti con periodo 2π . A ogni punto di discontinuità x_0 , la sua serie di Fourier supera o rimane sotto $f(x_0^+)$ di circa il 9% del salto di continuità. Inoltre, il fattore di "overshoot" dipende solo dal tipo di discontinuità e non dal valore della funzione.

Trasformata di Fourier

3.1 T tende a ∞

Consideriamo il caso in cui $T \rightarrow \infty$ e quindi $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt \right) e^{in\omega x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\omega t} dt \right) e^{in\omega x} \end{aligned}$$

Definendo $\hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$ e poiché $(n+1)\omega - n\omega = \omega$, otteniamo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega \hat{f}(n\omega) e^{in\omega x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.1)$$

3.2 Definizione

La Trasformata di Fourier (or F-transform) di f è definita come

$$\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (3.2)$$

In questo caso, la funzione originale è calcolata con la trasformata inversa di Fourier:

$$f(x) := \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (3.3)$$

Le formule (3.2) e (3.3) sono la base dell'analisi di Fourier delle funzioni definite in $[-\infty, \infty]$. La trasformata inversa (3.3) possiede anche l'interpretazione di rappresentare una funzione come superposizione di funzioni sinusoidali $\phi_{\omega}(x) = e^{i\omega x}$. Il parametro ω appartiene anch'esso all'intervallo $[-\infty, \infty]$ per permettere a tutte le funzioni di essere rappresentate in questo modo.

La Trasformata di Fourier costituisce quindi una estensione delle serie di Fourier e permette la rappresentazione in frequenza di funzioni che non essendo periodiche non ammettono una trasformazione in serie di Fourier. La $\hat{f}(\omega)$ si può quindi pensare come l'ampiezza delle infinite componenti in frequenza del nostro segnale, cui corrisponderà una precisa percezione fisica.

3.3 Fattori di normalizzazione

I fattori 1 e $1/(2\pi)$ prima degli integrali (3.2) e (3.3) assicurano che non vi siano cambi di ampiezza trasformando da un dominio all'altro. L'importante è che il prodotto dei fattori sia $1/(2\pi)$. Quando sono scelti uguali (quindi $1/\sqrt{2\pi}$), la trasformata viene detta *unitaria*. La convenzione utilizzata in (3.2) e (3.3) è la convenzione non-unitaria più comune.

Un'altra forma molto popolare è di trasformare sul dominio della frequenza ordinaria, vale a dire $f = \frac{\omega}{2\pi}$, invece della frequenza angolare ω . In questo caso, il fattore si riduce a 1, per cui si ha:

$$X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.4)$$

$$x(t) := \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (3.5)$$

3.4 Periodicità e aperiodicità

Come abbiamo potuto vedere, il dominio delle frequenze per funzioni *aperiodiche* è *continuo*. Il dominio delle frequenze per funzioni *periodiche* è invece *discreto*, come si è visto nel capitolo sulle serie di Fourier. Infatti, in maniera coerente, se proviamo a calcolare la trasformata aperiodica (3.2) di una funzione periodica, otteniamo un treno di impulsi:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\omega_0 t} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3.6)$$

dove $\omega_0 = 2\pi/T$ è chiamata la frequenza fondamentale.

Il risultato in (3.6) si ottiene grazie alla seguente proprietà della funzione esponenziale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega) \quad (3.7)$$

3.5 Funzione caratteristica e troncamento

In realtà, i segnali vengono misurati per un intervallo di tempo finito. Cosa succede con una trasformata di Fourier per funzioni troncate? Consideriamo a questo scopo la funzione caratteristica di un intervallo $[-a, a]$, cioè:

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow \hat{f}_a(\omega) = 2a \frac{\sin a\omega}{a\omega} =: 2a \operatorname{sinc}(a\omega) \quad (3.8)$$

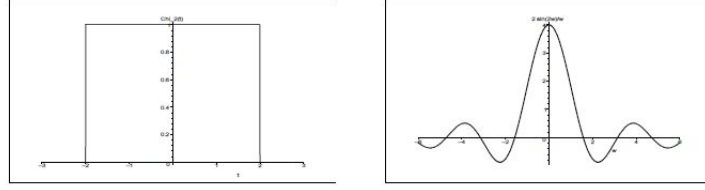


Figura 3.1: Grafici di $\chi_2(t)$ e la FT $\widehat{\chi_2}(\omega) = 2 \sin 2\omega/\omega$

Sia $f(t)$ periodica con periodo T e coefficienti di Fourier \widehat{f}_n . Definiamo la function *troncata* $f_T(t)$ come,

$$f_T(t) = f(t)\chi_{[0,T]}(t) \Rightarrow \widehat{f_T}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - n\omega_0}{2}\right) \quad (3.9)$$

Un confronto fra (3.9) e (3.6) rivela che il troncamento a un periodo provoca la continuità dello spettro, che è però approssimativamente discreto dove la funzione (3.9) ha larghezza non nulla e code ondulate. Per un troncamento dopo N periodi:

$$f_{NT}(t) = f(t)\chi_{[0,NT]}(t) \Rightarrow \widehat{f_{NT}}(\omega) = N\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - n\omega_0}{2N}\right) \quad (3.10)$$

Gli impulsi larghi (*sinc* functions) di larghezza $2\pi/N$ corrispondono alla risoluzione spettrale e diventano man mano più stretti quando N aumenta.

3.6 Relazione di Parseval

Se con f e g denotiamo due funzioni del tempo mentre con F e G , le loro rispettive trasformate di Fourier si può dimostrare che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\bar{G}(\omega)d\omega$$

Associando gli integrali che compaiono nella formula al prodotto scalare nello spazio vettoriale, avremo

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F, G \rangle$$

Riscrivendo la formula per $g = f$ e ricordando che $a \cdot \bar{a} = |a|^2$ avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Utilizzando la definizione di norma di una funzione, avremo quindi: $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|F\|$. Ricordando infine che la norma così definita misura l'energia del segnale si ottiene che l'energia del segnale si può calcolare sia nel dominio del tempo che della frequenza.

Esempio 3.1 Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = \cos(3t)$.

Soluzione: Usando la definizione, si ottiene:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{3it} + e^{-3it})}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(3-\omega)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i(3+\omega)t} dt \right) \\ &= \pi(\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3))\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si ottiene grazie alla formula (3.7). Come previsto, lo spettro ottenuto si riduce di fatto alla frequenza fondamentale del segnale originale, essendo la funzione $\cos(t)$ armonica.

Consideriamo la funzione troncata $\chi_{[-a,a]}(t) \cos(t)$. Si ottiene:

$$\widehat{f}(\omega) = a(\text{sinc}(a(\omega - \omega_0)) + a(\text{sinc}(a(\omega + \omega_0)))$$

Allargando la finestra di troncamento, la trasformata di Fourier tende per $a \rightarrow \infty$ alla trasformata di $\cos(t)$ pari a $\pi(\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3))$

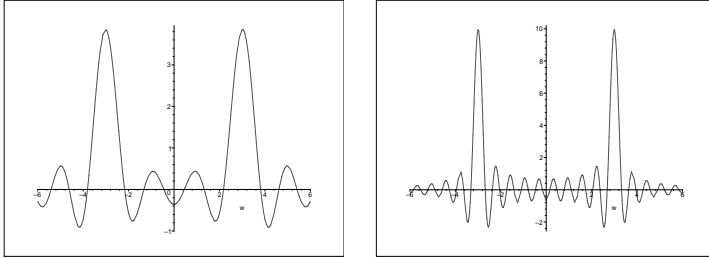


Figura 3.2: Grafici di $\chi_{[-a,a]}(t) \cos(3t)$ per $a = 4$ e $a = 10$

3.7 Proprietà

- **Linearità:** $\mathcal{F}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 \widehat{f}_1(\omega) + c_2 \widehat{f}_2(\omega)$
- **Dualità:** $\mathcal{F}[\widehat{f}(t)](\omega) = 2\pi f(-\omega)$
- **Scaling:** $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a \neq 0$
- **Time-shifting:** $\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-it_0\omega} \widehat{f}(\omega)$
- **Frequency-shifting:** $\mathcal{F}[e^{\pm i\omega_0 t} f(t)](\omega) = \widehat{f}(\omega \mp \omega_0)$

- **Derivazione:** $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$
- **Integrazione:** $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau](\omega) = \pi \widehat{f}(0)\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\widehat{f}(\omega)$
- **Formula di Parseval:** $\|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2$

3.8 Convoluzione

- **Convoluzione:** la **convoluzione** di due funzioni f_1 e f_2 è definita come

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau \quad (3.11)$$

La trasformata di Fourier della convoluzione è il prodotto delle singole trasformate nel dominio delle frequenze:

$$\mathcal{F}[(f_1 * f_2)(t)](\omega) = \widehat{f}_1(\omega)\widehat{f}_2(\omega) \quad (3.12)$$

Nota: la convoluzione è associativa, vale a dire

$$(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t))$$

- **Moltiplicazione** nel dominio temporale corrisponde a convoluzione nel dominio delle frequenze.

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)](\omega) = \widehat{f}_1(\omega) * \widehat{f}_2(\omega)$$

Il shift nelle frequenze è una conseguenza diretta di questa regola.

Qualche nozione di musicologia

4.1 Il timbro degli strumenti

Se due strumenti diversi suonano la stessa nota, il nostro orecchio percepisce due suoni diversi. In questo caso si dice che le due note hanno un timbro diverso. Da cosa dipende il timbro? Due strumenti, sebbene producano vibrazioni alla stessa frequenza fondamentale, producono anche delle armoniche, le cui intensità relative dipendono strettamente dallo strumento. Senza la produzione di armoniche, tutti gli strumenti avrebbero lo stesso timbro. Con l'analisi di Fourier di un segnale sonoro, è possibile mettere in relazione le frequenze presenti nel suono e la loro relativa densità di energia, ovvero quanto di quella componente di frequenza si trova effettivamente nel suono. La figura (4.1) mostra i grafici dell'onda di pressione in funzione del tempo per un diapason, un clarinetto e una cornetta che suonano tutti la stessa nota.

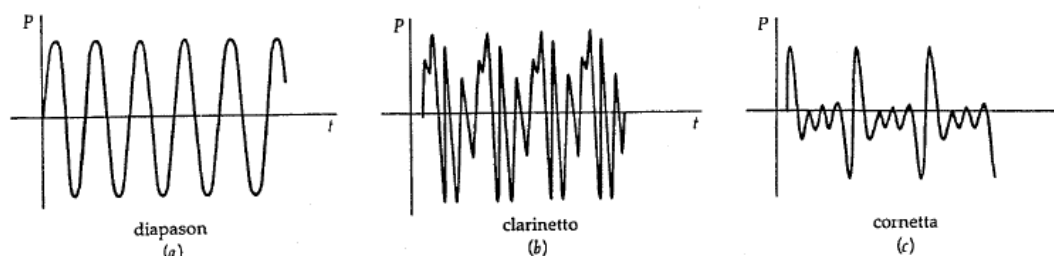


Figura 4.1: Forma d'onda (a) di un diapason, (b) di un clarinetto e (c) di una cornetta, con uguale intensità e frequenza

Si osserva che queste tre funzioni sono tutte periodiche, possiedono lo stesso periodo e quindi la stessa frequenza. La figura (4.2) mostra lo spettro, vale a dire l'analisi di Fourier nei tre casi precedenti. Come si può notare, il diapason contiene solo la frequenza fondamentale. Infatti, la sua forma d'onda è una sinusoide pura (si parla di suono puro). Il clarinetto contiene quasi nella stessa misura le prime quattro armoniche dispari. Per la cornetta invece, l'energia è concentrata principalmente nella terza armonica, che è più presente della fondamentale.

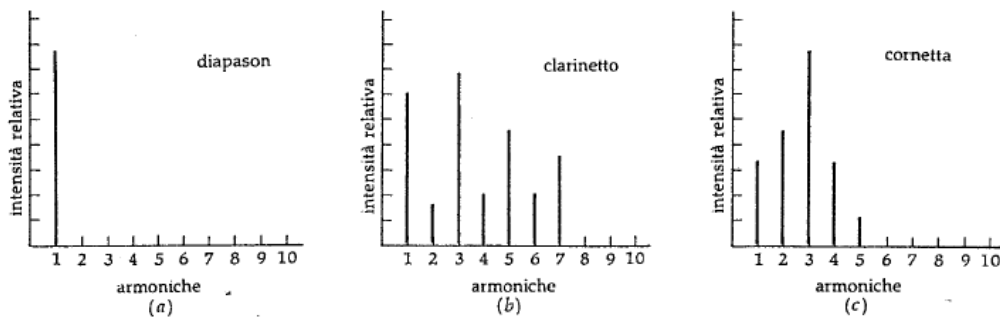


Figura 4.2: Spettro per (a) diapason, (b) clarinetto (c) cornetta

Le figure (4.3) e (4.4) rappresentano lo spettro della stessa nota (un La_5) suonata da un pianoforte e da un violino. Nel pianoforte la fondamentale domina mentre nel violino le prime quattro armoniche sono presenti quasi in egual misura della fondamentale. Questo fatto spiega come mai il suono del violino risulta più stridulo rispetto al pianoforte.

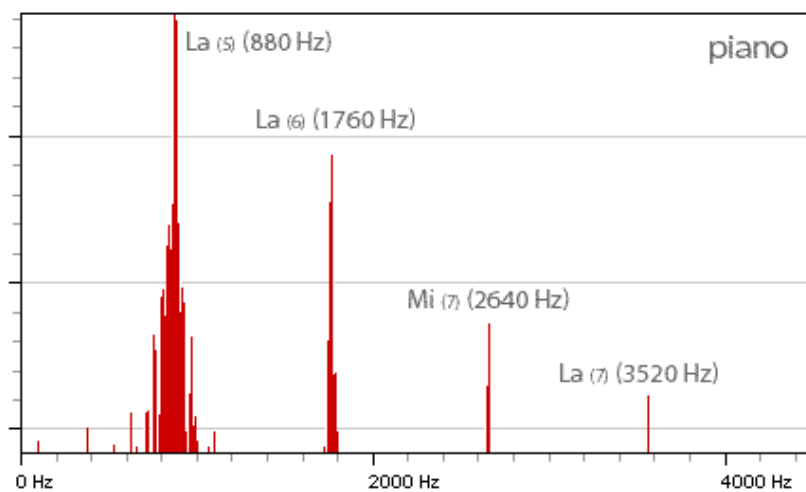


Figura 4.3: Spettro del La suonato da un pianoforte

Lo spettro del suono generato da piatti è illustrato nella figura (4.5). Salta subito all'occhio che non abbiamo più una distribuzione discreta (ovvero a intervalli regolari) di frequenze, ma queste si estendono su un'ampia fascia, con la fondamentale a circa 4000 Hz, fino ad arrivare a quasi 15000 Hz, con frequenze il cui valore e la cui densità sembrano essere quasi casuali. Questo è evidente all'orecchio: il suono emesso dal pianoforte e dal violino è infatti (quasi) periodico, mantiene fissa una nota (la nota fondamentale), il piatto invece ha un suono molto più irregolare. Riusciremmo a riconoscere una nota fondamentale, ma chiaro che c'è una serie di suoni accessori non collegati direttamente alla fondamentale. Inoltre bisogna aggiungere

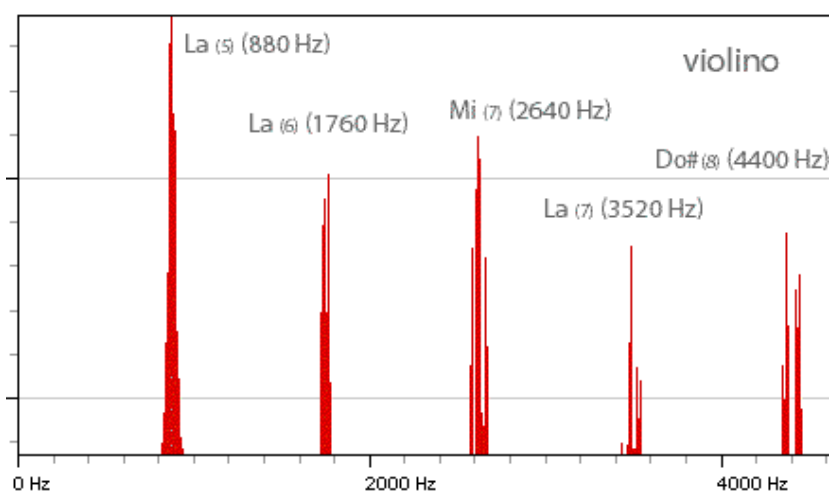


Figura 4.4: Spettro del La suonato da un violino

che lo spettro è tanto più esteso quanto più il suono è corto. In generale i suoni percussivi (e i rumori) hanno infatti uno spettro molto esteso.

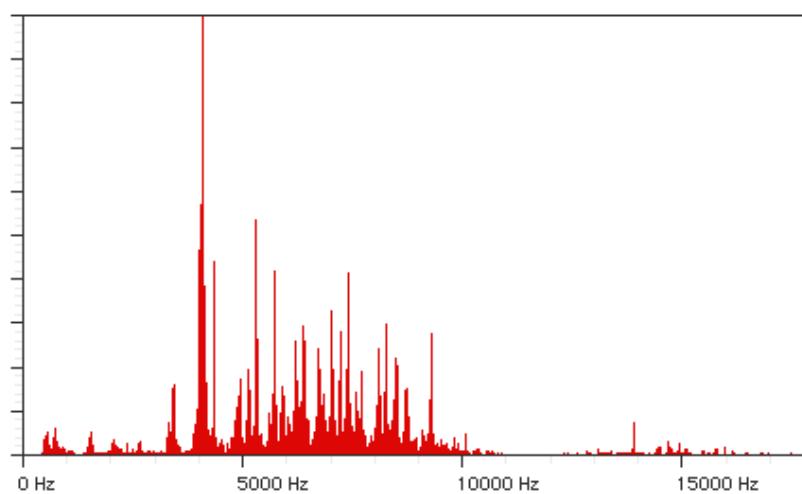


Figura 4.5: Spettro del suono di un "crash"

Il processo inverso dell'analisi armonica è la sintesi armonica, vale a dire la costruzione di una forma d'onda periodica arbitraria mediante le sue componenti armoniche. Questo è il principio dei sintetizzatori elettronici (detti anche moog dal loro inventore Robert Moog) che producono una serie di armoniche le cui ampiezze possono essere regolate arbitrariamente. Più armoniche vengono usate, migliore è l'approssimazione dell'onda e migliore è la qualità del sintetizzatore. I moog più sofisticati possono produrre suoni simili a qualsiasi strumento di un'orchestra.

4.2 Assonanza e dissonanza

Già nell'antichità, era noto che due corde uguali, suonate assieme, producono un suono gradevole quando le lunghezze vibranti stanno fra loro in rapporti interi semplici, come ad esempio 1:2, 2:3, 3:5, ecc. Negli altri casi si ottiene una sensazione sgradevole. Questa constatazione, di natura puramente empirica, sembra sottostare alla seguente regola.

Due suoni danno un accordo piacevole (assonanza) quando hanno molte armoniche in comune. In caso contrario, i suoni risultano dissonanti.

Infatti, guardiamo l'equazione che fornisce le frequenze di vibrazione di una corda in tensione. Si ha:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

dove L è la lunghezza della corda, μ la sua densità lineare, e T la tensione a cui è sottoposta. Dato che le frequenze sono inversamente proporzionali alla lunghezza, si può facilmente notare che per un rapporto fra le lunghezze delle corde pari a 1:2, tutte le armoniche del suono più alto sono già contenute nel suono più basso. In questo modo, si ottiene il cosiddetto intervallo di *ottava*, che risulta molto gradevole. Se invece si ha un rapporto fra le lunghezze pari a 2:3, il rapporto fra le frequenze fondamentali f_1 è di 3:2. Si realizza in questo modo l'intervallo di *quinta* dove metà delle armoniche del suono più alto sono già contenute nel suono più basso.

Se i rapporti fra le lunghezze diventa più complicato, diminuisce sempre più il numero di armoniche in comune, e il suono risulta sempre meno gradevole. In particolare, si constata che le combinazioni più gradevoli si ottengono quando il rapporto fra le frequenze è esprimibile con due numeri interi. Nell'ordine di gradevolezza, si hanno i rapporti 1:2, 3:2, 4:3, 5:4, 6:5, 8:5 e 5:3.

Queste combinazioni definiscono i cosiddetti intervalli che come vedremo prendono il loro nome dalla quantità di note fra le due note, compresi gli estremi. Nella tabella (4.1), vengono caratterizzati gli intervalli consonanti principali.

Nome	Note (in C maj) (in C maj)	Rapporto f f/f_0	No semitoni
Ottava	C - C	2	12
Quinta	C - G	3/2	7
Quarta	C - F	4/3	5
Terza maggiore	C - E	5/4	4
Terza minore	E - G	6/5	3
Sesta maggiore	C - A	5/3	9
Sesta minore	E - A	8/5	8

Tabella 4.1: Intervalli consonanti principali

Da una combinazione oculata di suoni, è possibile costruire una scala musicale, in cui gli intervalli di frequenza fra successivi suoni seguono in qualche modo le regole empiriche viste in precedenza. Senza entrare nei dettagli, vogliamo dare qui qualche informazione in merito alle due scale principali, quella diatonica (o naturale) e quella ben temperata.

4.3 La scala diatonica o naturale

La scala diatonica è una scala musicale che utilizza intervalli di frequenza rappresentati dai rapporti fra gli interi più piccoli della serie armonica. Pur essendoci un grande numero di combinazioni di intervalli possibili per costruire una scala diatonica, ci limiteremo alle due principali, dette *maggiore* e *minore*.

La scala **maggiore** si basa sulla cosiddetta triade maggiore costituita da una combinazione di suoni che hanno un rapporto 4:5:6 fra le loro frequenze fondamentali. Prendendo il Do come punto di base, si sale di $5/4$ (intervallo di terza maggiore) per ottenere il Mi, e poi di $6/5$ (intervallo di terza minore) ottenendo il Sol. Si ottiene così un intervallo fra Do e Sol di $3/2$ (intervallo di quinta).

Il Do, che è la prima nota della scala è detto la *tonica*, il Mi è detto la *caratteristica* e il Sol la *dominante*. Dalla dominante, qui il Sol, è possibile costruire una seconda triade maggiore, ottenendo con una terza maggiore la cosiddetta *sensibile*, il Si e con una terza minore la *sopratonica*, il Re. Scendendo dal Do di una quinta, si ottiene la cosiddetta *sottodominante*, il Fa, da cui con lo stesso schema si ottiene il La (*sopradominante*) e poi di nuovo il Do. In questo modo, si ottengono tutte le sette note della scala diatonica di Do, vale a dire

Do Re Mi Fa Sol La Si

che nella notazione anglossassone diventano

C D E F G A B

Queste note rappresentano di fatto i tasti bianchi nel pianoforte (vedi figura 4.6).

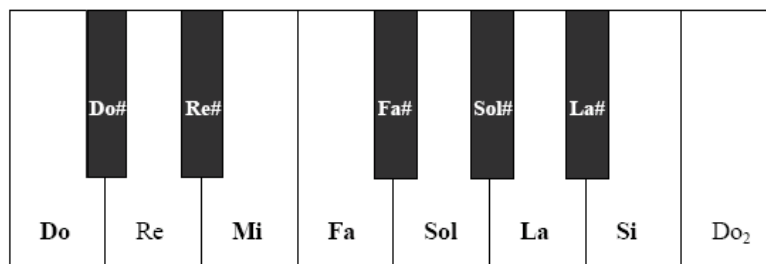


Figura 4.6: Tasti del pianoforte: un'ottava

Vediamo quindi che la scala maggiore si basa sulle tre triadi maggiori (4:5:6):

(C, E, G) o Do-Mi-Sol

(G, B, D) o Sol-Si-Re

(F, A, C) o Fa-La-Do

Nella seguente tabella (4.2) è esplicitato il risultato della costruzione:

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
C	D	E	F	G	A	B	C
	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Tabella 4.2: Rapporti fra le frequenze nelle note della scala diatonica maggiore rispetto alla tonica C (sopra) e per note adiacenti (sotto)

Come si può notare, risultano tre tipi di intervalli per note adiacenti:

- quello maggiore ($9/8$),
- quello minore ($10/9$),
- il semitono ($16/15$).

Questi intervalli sono alla base della scala diatonica maggiore. Ogni scala maggiore si basa su una nota che fungerà da tonica e dalla sequenza di intervalli indicati nella prima riga della tabella (4.2).

Se la frequenza della tonica è f , la successione di frequenze sarà determinata quindi da

$$f, \frac{9}{8}f, \frac{5}{4}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f, \frac{5}{3}f, \frac{15}{8}f, 2f \quad (4.2)$$

Di fatto, le frequenze della scala diatonica di C (Do) sono calcolate utilizzando come base A_4 (La_4) a 440 Hz, ciò che fornisce per il C_4 264 Hz. Quindi nell'ottava di una scala maggiore cinque degli intervalli sono toni (due semitoni), e due (il terzo e il settimo) sono semitoni: la successione degli intervalli che si incontrano eseguendo una scala dipende dalla nota con cui si comincia (la tonica) e i cinque tasti neri aggiuntivi (i diesis (\sharp) o bemolli (b)) permettono i salti di un semitono verso l'alto (\sharp) o verso il basso (b) nelle scale diverse da quella di C in modo da preservare la sequenza che definisce la scala.

Per le scale dette **minori**, si utilizzano le triadi che hanno un rapporto fra le frequenze dato da 10:12:15. Queste sono date da:

- (A, C, E) o La-Do-Mi
- (E, G, B) o Mi-Sol-Si
- (D, F, A) o Re-Fa-La

La costruzioni delle scale avviene come per le maggiori e le suddette triade danno luogo a una scala con i rapporti fra le frequenze dati dalla tabella (4.3).

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
A	B	C	D	E	F	G	A
	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Tabella 4.3: Rapporti fra le frequenze nelle note della scala diatonica minore rispetto alla tonica A (sopra) e per note adiacenti (sotto)

4.4 I modi

Nella musica dell’antica Grecia, la scala poteva cominciare da qualsiasi nota della scala diatonica e i semitoni capitavano in una posizione diversa a seconda della nota da cui si partiva; queste scale erano chiamate *modi*. E’ quindi possibile costruire sette modi senza inserire alcuna alterazione, semplicemente ordinando la sequenza da un'altra nota. Questi modi sono elencati nella tabella (4.4):

Nome	Nota iniziale	Scala
Ionio	C	c - d - e - f - g - a - b
Dorico	E	d - e - f - g - a - b - c
Frigio	E	e - f - g - a - b - c - d
Lidio	F	f - g - a - b - c - d - e
Missolidio	G	g - a - b - c - d - e - f
Eolio	A	a - b - c - d - e - f - g
Locrio	B	b - c - d - e - f - g - a

Tabella 4.4: Modi

Come visto in precedenza per le scale maggiori e minori, tutti questi modi hanno la caratteristica di possedere un gruppo di note fra cui vi sono due toni, come c - d - e, ed un altro con tre toni, quali f - g - a - b, separati ognuno da due semitoni, quali quelli fra e e f e quello fra b e c. Un ordinamento di questo tipo, tipico della scala diatonica, ha una certa importanza, perché ad esempio scale medioorientali con sette note non hanno questa caratteristica.

I modi greci scomparirono dalla musica durante i primi secoli dell'era cristiana e furono rimpiazzati dai modi ecclesiastici che ebbero il loro periodo di maggior fulgore dall' 800 al 1500. Questi modi erano alla base del canto Gregoriano. Essi vennero impiegati anche in composizioni polifoniche come quelle di Palestrina. Anche se caddero in disuso nel diciassettesimo secolo, qualcosa di questi modi sopravvive nella musica popolare di alcuni paesi e qualche compositore li usa ancora. Generalmente però nella musica occidentale sono sopravvissuti solo la scala maggiore e la scala minore che si adattano meglio alla nostra armonia.

4.5 La scala temperata

Le due tabelle (4.2) e (4.3) illustrano però le difficoltà pratiche che si incontrano utilizzando tali scale: ogni ottava richiede almeno una trentina di frequenze diverse. Ciò rende molto difficile l'accordatura di strumenti che abbiano le note fissate per suonare in una data tonalità. Per ovviare a questa difficoltà, è stata introdotta la scala detta *temperata*. Per ovviare ai problemi pratici posti dalla scala naturale, il cosiddetto sistema temperato rinuncia all'esattezza dei rapporti ideali e sostituisce ad essi una suddivisione dell'ottava in 12 intervalli in modo che il rapporto fra due note adiacenti sia uguale per tutti gli intervalli. Questi 12 intervalli vengono comunemente chiamati semitoni temperati. Dato che ogni semitono implica un fattore q e che vi sono 12 intervalli, si dovrà avere che $q^{12} = 2$. Questo implica che un semitono ha un valore di $\sqrt[12]{2} = 1.059463$. Questo sistema trae origine da una pratica empirica diffusa nel XVII secolo per l'accordatura degli strumenti a pizzico e che fu teorizzata dal musicista tedesco Andreas Werkmeister nel 1691. I due volumi del *Clavicembalo ben temperato* di J.S. Bach, contenenti ciascuno 24 preludi e fughe in tutte le tonalità della scala temperata, costituiscono una esemplificazione monumentale delle possibilità compositive di questo sistema. Per mettere in risalto la differenza con la scala naturale, la seguente tabella (4.5) riporta le frequenze delle sette note nei due casi, assumendo come base 440 Hz per il La₄.

Nel sistema temperato, diesis e bemolle vengono trattati in un modo più semplice. Per esempio, nell'intervallo di sesta minore (8 semitoni con rapporto di frequenza 8/5), La_b dovrebbe avere un rapporto di frequenza pari a 1.6 per essere una terza maggiore perfetta (5/4) dal Do superiore della scala. Per rendere l'intervallo Mi-Sol_♯ una terza maggiore naturale, il Sol_♯ dovrebbe avere un rapporto di frequenza pari a $(5/4)^2 = 25/16 = 1.5625$. Perciò Sol_♯ e La_b non coincidono. Nel sistema temperato sia il Sol_♯ che il La_b sono rappresentati dallo stesso tasto nero con un rapporto di

Scale musicali e frequenze				
Nota	Scala temperata		Scala naturale	
	$f(Hz)$	f/f_C	$f(Hz)$	f/f_C
C/Do	261.63	1.000	264	1.000
D/Re	293.66	1.122	297	1.125
E/Mi	329.63	1.260	330	1.250
F/Fa	349.23	1.335	352	1.333
G/Sol	392.00	1.498	396	1.500
A/La	440.00	1.682	440	1.667
B/Si	493.88	1.888	495	1.875

Tabella 4.5: Confronto fra scala naturale e quella ben temperata

frequenza uguale pari a $q^8 = 1.587401$. Come si vede, in questa scala, gli intervalli anche se leggermente sbagliati, sono gli stessi in tutte le tonalità e quindi sono tutti ugualmente intonati (o fuori tono).

Nella scala *maggiore* del sistema temperato, la successione dei toni (indicati con T) e dei semitoni (S) è (T,T,S,T,T,T,S), come risulta dalla tabella (4.2). Per fare un esempio, costruiamo la scala maggiore di G, vale a dire la dominante della scala di C. Partendo dal Sol (G) e riproducendo la sequenza precedente, otteniamo La (due semitoni Sol-Sol \sharp e Sol \sharp -La), Si, Do, Re, Mi, Fa \sharp , Sol. E' necessario introdurre il Fa \sharp in quanto l'intervallo Mi-Fa corrisponde solo a un semitono a cui va aggiunto il semitono Fa-Fa \sharp per ottenere la sequenza giusta. L'ultimo semitono deriva dall'intervallo Fa \sharp -Sol.

Nella scala *minore* la successione degli intervalli è (T,S,T,T,S,T,T), come si vede dalla tabella (4.3); ci sono tre varianti della scala minore nelle quali gli ultimi tre intervalli possono essere T,S,T oppure T,T,S (melodica discendente che è il modo eolio e melodica ascendente) o addirittura S,TS,S (armonica, dove TS indica 3 semitoni). Nella scala di La minore ad esempio queste tre varianti vengono ottenute introducendo il Fa \sharp , il Sol \sharp , o entrambi al posto del Fa e del Sol naturali.

Il sistema temperato soffre dell'approssimazione delle "vere" terze e quinte: ad esempio l'intervallo di terza (tra Do e Mi) che vale 1.25 nella scala naturale diventa 1.26 in quella temperata, un intervallo facilmente percepibile da un orecchio allenato. Ma questa deficienza è largamente compensata dalla facilità dell'uso delle stesse note in tutte le scale, il che permette facili modulazioni - vale a dire il passaggio da una scala ad un'altra - e trasposizioni - cioè quando un brano originariamente in una scala viene suonata in un'altra. Da ultimo si noti che, anche se questi concetti e metodi possono apparire difficili, in realtà non sono che la formalizzazione di conoscenze intuitive note a tutti, dato che ogni persona che canta sa trasporre naturalmente "un po più in alto" o "in basso". Si dice anche che la scala ben temperata è in qualche modo sgradevole ai musicisti dall'orecchio raffinato. Di fatto la maggior parte della gente, alcuni musicisti inclusi trovano difficile distinguere gli intervalli

perfetti della scala naturale dagli intervalli della scala temperata.

4.6 Caratteristiche degli intervalli musicali

Nella musica occidentale, soprattutto a partire dal '700, è stata sviluppata in modo molto marcato l'*armonia*, vale a dire l'arte di suonare molti suoni assieme. L'importanza dell'armonia ha però comportato la perdita di alcune caratteristiche musicali che sono state invece sviluppate da altre civiltà. Ad esempio la musica *indiana* ha mantenuto una larga varietà di modi mentre come abbiamo visto, la musica europea ha ridotto tutto a soli due modi, quello maggiore e quello minore. La musica *africana* ha sviluppato ritmi che variano durante lo svolgimento del brano e sovrapposizioni di ritmi (poliritmo), mentre in occidente si rimasti su ritmi con metri fissi a multipli di 2 e 3 (nei Balcani vengono usati anche metri a 5 e 7). Inoltre timbri ed effetti speciali sono quasi assenti per non disturbare l'effetto armonico.

Come già visto in precedenza, vi sono diversi intervalli possibili nella scala e il nome dell'intervallo indica la quantità di note fra le due note, compresi gli estremi. E' maggiore o minore a seconda di quanti semitoni ci sono nell'intervallo. Essere maggiore o minore, come vedremo, influisce molto sul "senso" dell'intervallo. La definizione che ne viene fornita normalmente non aiuta più di tanto a riconoscerli e distinguerli immediatamente, ad orecchio per così dire. Il fatto è che ogni intervallo ha una caratteristica "emotiva" o comunque peculiare, che lo rende unico e riconoscibile.

Ovviamente la dimostrazione sta nello stesso ascolto dell'intervallo per il quale verranno dati alcuni esempi di musiche famose che lo contengono, in modo da constatarne la personalità specifica, come se lo si estraniassero dalle due note che lo compongono e assumesse un proprio carattere. Ecco un breve elenco:

- **Intervallo di 6a:** Sesta maggiore e Sesta minore

è detto l'intervallo del cuore, del sentimento. Questo intervallo suscita una varia gamma di emozioni nel senso più letterario, classico della parola: come nostalgia, innamoramento, gioia di stare assieme in compagnia, e anche lutto (se la sesta è "minore"). Pensiamo alle note iniziali del tema del film *Love story*, sono un bell'intervallo di 6a minore e ci dicono subito che sarà un "amore sofferto". Oppure le prime due note del celebre "Libiamo...!" della *Traviata*, richiama alla gioia dell'amicizia, così come il famoso spot della Coca-cola "Vorrei cantare insieme a voi...". O il richiamo nostalgico non avvilente come in "Azzurro" di P. Conte, le cui prime due note formano, indovinate, una sesta maggiore.

- **Intervallo di 3a:** Terza maggiore e Terza minore

è l'intervallo-melodico-base, quello primordiale e forma la prima melodia che sentiamo. Non per niente le "ninna-nanna" sono formate da intervalli di terza;

così come le canzoni popolari. E' l'intervallo che più spesso fischiettiamo quando siamo sovrappensiero, quello più elementare! Pensiamo al famoso Giro-giro tondo o Fra Martino Campanaro: sono intervalli di terza. Il pop è pieno di famosi cantati con le terze ("Ticket to ride" e "Hey Jude" dei Beatles). La facilità d'intonazione gli permette di essere usato anche in situazioni più colte come un "passaggio armonico" che ci permette di spostarci senza perdere il senso della melodia (la "scena del ruscello" nella Pastorale di Beethoven, o il "galoppo" nella Cavalcata delle Valchirie di Wagner).

- **Intervallo di 8a :**

è l'intervallo che suggerisce la "potenza", che dà forza, un'esclamazione ineluttabile, di cui non si può dubitare come nell'inizio della Nona Sinfonia di Bruckner. Inizia con un intervallo di 8a anche "Singing in the rain", conferendo subito una grossa spinta alla composizione.

- **Intervallo di 2a:**

qui si tratta di un effetto derivante dalla struttura delle scale. E' un intervallo che funge da "breve spostamento" o per arrivare alla melodia dell'intervallo di 3a o per lasciare in sospeso la melodia prima che torni alla nota iniziale. E' comunque un "passo", che sospende in attesa che succeda qualcosa da definire (l'inizio della beatlesiana "Yesterday"). Può essere usato apposta per "bombardare" l'orecchio in attesa della soluzione, come in "Centro di gravità permanente" di Battiato. In particolare va rilevato che la seconda minore ha un uso ulteriore: quello di esprimere dolore, lamento o comunque "destabilizzazione"; soprattutto se si sposta l'intero accordo (avanti o indietro di un semitono)

- **Intervallo di 7a:**

è chiaramente un intervallo che suona "esagerato", fuori misura, teso. Si sente che la melodia creata dall'intervallo è sbilanciata e ha bisogno di un'immediata soluzione: in genere si torna indietro alla "tonica" (la nota base delle melodie, quella che dà il senso di "riposo"). Da ascoltare ad esempio "Give peace a chance" di Lennon, tra "is" e "give" nel ritornello "...all we are saying is give peace a chance...".

Discorso a parte e più complesso per gli intervalli di **Quinta** e di **Quarta**(es. Do-Sol, Do-Fa): sono gli intervalli "strutturali", su di loro poggiano le melodie per concludersi o per svilupparsi. A seconda del loro uso aprono o chiudono o semplicemente permettono la continuazione del suonare. Bisogna sempre usare il buon senso e capire che tali posizioni e significati possono cambiare e assumere sfumature più variegata a seconda del contesto della specifica composizione o del ritmo impresso alla melodia. Il senso generale qui esposto rimane, tuttavia, abbastanza valido e universale.

Interpolazione

Un problema che frequentemente si presenta in matematica applicata è quello di determinare una funzione, generalmente semplice, che permetta di approssimare una tabella di dati. Storicamente, l'interpolazione è nata durante gli albori dell'astronomia moderna, in particolare per lo studio del moto dei pianeti usando le osservazioni a disposizione. Alcuni fra i più famosi matematici del passato hanno contribuito in questo campo e a diverse procedure di interpolazione sono legati i nomi di Gauss, Newton, Stirling, Bessel.

Il problema dell'interpolazione (o approssimazione) si può riassumere, in modo generale, nei due casi seguenti:

- **Approssimazione di dati:** la funzione $f(x)$ non è nota analiticamente, ma si conoscono dei valori y_i di ordinate corrispondenti alle ascisse x_i . Si costruisce quindi un modello matematico del fenomeno che si sta analizzando tramite una funzione $g(x)$ che approssimi in modo attendibile i valori noti. Una volta determinata la forma della funzione, diventa quindi possibile stimare valori intermedi tra due dati noti con precisione e la tecnica usata a questo scopo viene anche denominata *interpolazione*.
- **Approssimazione di funzioni:** la funzione $f(x)$ è nota analiticamente, ma l'esecuzione di operazioni su di essa risulta complessa. Si cerca quindi di approssimare $f(x)$ con una $g(x)$ più semplice. In questo caso, fissati i valori y_i assunti dalla funzione $f(x)$ nei punti $x_i, i = 1, \dots, n$, si determina la funzione $g(x)$ in modo che $g(x_i) = y_i$ per $i = 1, \dots, n$.
I punti (x_i, y_i) sono anche detti *punti d'appoggio*.

La quantità di problemi in cui le tecniche numeriche di approssimazione trovano applicazione è enorme: l'analisi di dati sperimentali, la discretizzazione di equazioni differenziali per terminare con le più recenti come l'analisi di immagini o le *reti neurali*.

Il primo passo consiste nello scegliere la forma della funzione $g(x)$ in base alle caratteristiche del problema sotto esame. Vediamo alcuni esempi di classi \mathcal{F} di funzioni approssimanti:

- **Polinomi algebrici di grado n :**

$$\mathcal{P}_n = \{p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n\}.$$

Si utilizzano per funzioni continue su intervalli chiusi e limitati. Richiedono la determinazione degli $n + 1$ parametri a_0, \dots, a_n .

- **Funzioni razionali:**

$$\mathcal{R}_{n,d} = \left\{ \frac{p_n}{p_d} = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n} \right\}.$$

Si utilizzano per funzioni aperiodiche su intervalli limitati. Richiedono la determinazione di $n + d + 1$ parametri (uno dei parametri b_i, c_i può essere normalizzato a 1).

- **Polinomi trigonometrici:**

$$\mathcal{F}_n = \left\{ f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x} \right\}$$

Si utilizzano per funzioni periodiche e rappresentano la base delle serie di Fourier.

- **Somme esponenziali di ordine n:**

$$\mathcal{E}_n = \{ f_n(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x} \},$$

che richiedono la determinazione di $2n$ parametri a_i, λ_i e che risulta conveniente usare in particolare nell'ambito della modellizzazione di fenomeni biologici e biochimici.

5.1 L'interpolazione polinomiale

5.1.1 Le matrici di Vandermonde e di Gram

L'interpolazione di dati tramite un polinomio rappresenta una scelta semplice e tra le più utilizzate. Un polinomio appartenente allo spazio \mathcal{P}_n dei polinomi reali di grado minore o uguale a n avrà una rappresentazione che dipenderà strettamente dalla base di \mathcal{P}_n utilizzata. La cosiddetta forma "canonica" dove si utilizza la base usuale di monomi $\{x^k, k = 0, \dots, n\}$ è quindi la seguente:

$$p_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in R. \quad (5.1)$$

In questo caso, dati $(n+1)$ punti (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, n$ e imponendo il passaggio per i punti del polinomio (5.1), vale a dire $p_n(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, n$, il problema della ricerca del polinomio si traduce nella risoluzione del sistema lineare seguente:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \dots &\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned} \quad (5.2)$$

In forma matriciale il sistema assume la forma $V_n(x) \cdot a = y$ dove

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $(n+1) \times (n+1)$ dei coefficienti i cui elementi sono dati da $(V_n)_{ij} = x_{i-1}^{j-1}$ è nota come *matrice di Vandermonde*. Se i nodi x_i sono distinti, cioè $x_i \neq x_j$, la matrice di Vandermonde è non singolare ed esiste quindi un unico polinomio interpolante p_n . In generale, però, la matrice V_n tende ad essere malcondizionata (una piccola perturbazione nei dati crea grosse perturbazioni in percentuale sulla soluzione) e vengono quindi privilegiate altre tecniche numeriche.

Se invece di usare la base canonica dei monomi si utilizza una base generale dello spazio vettoriale \mathcal{P}_n , diciamo $\{\phi_i(x)\}$, $i = 0, \dots, n$, il problema dell'interpolazione consiste nel trovare come in precedenza $n+1$ numeri reali a_0, a_1, \dots, a_n tali che

$$p_n(x_k) = a_0\phi_0(x_k) + a_1\phi_1(x_k) + \dots + a_n\phi_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (5.3)$$

Il sistema lineare associato al problema è $\Phi \cdot a = y$ dove la matrice Φ è detta *matrice di Gram*. I suoi elementi sono dati in analogia al caso precedente di Vandermonde da $\Phi_{ij} = \phi_{j-1}(x_{i-1})$ e assume la forma matriciale esplicita:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Come si potrà vedere nel prossimo paragrafo, a dipendenza del problema, la scelta della base canonica non è sempre la più conveniente.

5.1.2 Polinomi interpolatori di Lagrange

Supponiamo di riuscire a trovare una base $L_j(x_i)$ dei polinomi appartenenti a \mathcal{P}_n che abbiano la seguente proprietà

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

In questo caso, la matrice Φ di Gram (5.4) si trasforma in questa base nella matrice identità di ordine $n+1$, e il sistema lineare per trovare i coefficienti a_i diventa triviale dato che $a_i = y_i$ per $i = 0, 1, \dots, n$. Quindi la soluzione cercata per il polinomio interpolatore sarà

$$p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x). \quad (5.6)$$

Per comprendere la costruzione di questi polinomi, si prenda il caso $n = 2$ in cui si hanno tre punti da interpolare. Cerchiamo quindi di costruire tre polinomi $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ tali che

$$L_0(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i = 2 \end{cases}, \quad L_1(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 1 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i = 2 \end{cases}, \quad L_2(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i = 1 \\ 1 & \text{se } i = 2 \end{cases}.$$

Il polinomio generico $L_0(x) \in \mathcal{P}_2$ che abbia radici in x_1, x_2 si scrive come

$$L_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$$

dove A è una costante reale diversa da zero. Dato che la condizione $L_0(x_0) = 1$ deve essere soddisfatta, si ottiene

$$L_0(x_0) = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

da cui si deduce che

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Analogamente, si ottiene per $L_1(x)$ e $L_2(x)$ che

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}.$$

Nel caso generale, con $n + 1$ punti, si deduce con calcoli analoghi che il i -esimo polinomio di Lagrange $L_i(x)$ ha la seguente espressione:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (5.7)$$

L'espressione del numeratore è legata alle n radici distinte diverse da x_i mentre l'espressione al denominatore è determinata dalla normalizzazione di $L_i(x)$ quando $x = x_i$. Grazie alla soluzione diretta del sistema $a_i = y_i$, il polinomio interpolatore sarà perciò

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (5.8)$$

La rappresentazione (5.8), nota come *rappresentazione di Lagrange*, pur essendo elegante e di grande utilità nelle considerazioni teoriche sui polinomi (fornisce una soluzione esplicita), non è efficace quando si tratta di valutare il valore di $P_n(x)$, a causa dell'elevato numero di operazioni necessarie. Inoltre aggiungere o togliere punti comporta l'aggiornamento di tutti i polinomi $L_i(x)$ e quindi una modifica globale del polinomio interpolatore.

Esiste un'altra formulazione della (5.8) detta *formula del baricentro*. Usando la forma esplicita (5.7) in (5.8), si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{x - x_i} \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] \prod_{k=0}^n (x - x_k) \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{x - x_i} \lambda_i \prod_{k=0}^n (x - x_k)
 \end{aligned}$$

Le espressioni

$$\lambda_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, n \quad (5.9)$$

sono dette *coefficienti di appoggio*.

Con l'ulteriore abbreviazione

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

possiamo quindi scrivere

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \mu_i \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad (5.10)$$

e tenendo conto della relazione ¹

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \mu_i(x)} \quad (5.11)$$

si ottiene infine dalla (5.10) la cosiddetta *formula del baricentro dell'interpolazione di Lagrange*:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \mu_i(x)}{\sum_{i=0}^n \mu_i(x)} \quad (5.12)$$

¹Dato che gli $\mu_i(x)$ dipendono solo dalle ascisse, possiamo porre $y_i = 1$ per tutte le x_i , a cui corrisponde il polinomio interpolatore $P_n(x) = 1$ che usando la (5.10), fornisce la relazione.

Essa permette di ottenere il valore di $P_n(x)$ per un dato x a partire dai coefficienti di appoggio (5.9).

Il calcolo dei λ_i che, secondo la (5.9) richiede n divisioni e $(n+1)n$ moltiplicazioni, può essere ulteriormente accelerato. Se $\lambda_i^{(n)}, (i = 0, 1, \dots, n)$ sono $n+1$ coefficienti di appoggio corrispondenti a $n+1$ valori x_i , mentre $\lambda_i^{(n+1)}, (i = 0, 1, \dots, n, n+1)$ sono $n+2$ coefficienti corrispondenti a $n+2$ x_i ottenuti aggiungendone uno a quelli precedenti, dalla (5.9) otteniamo la *formula ricorrente*

$$\lambda_i^{(n+1)} = \frac{\lambda_i^{(n)}}{x_i - x_{n+1}} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \quad .$$

Il coefficiente $\lambda_{n+1}^{(n+1)}$ mancante può essere calcolato utilizzando la condizione

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1) \quad .$$

che si può dimostrare partendo dalla (5.11) e scrivendo

$$1 = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{x - x_i} \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \prod_{k=0, k \neq i}^n (x - x_k) \quad . \quad (5.13)$$

Si può osservare che i coefficienti del polinomio particolare $P_n(x) = 1$ corrispondenti alle potenze di x sono tutti nulli e in particolare deve essere nullo il coefficiente

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i$$

che corrisponde alla potenza x^n .

Grazie alle proprietà dimostrate, i coefficienti di appoggio possono essere calcolati con l'algoritmo mostrato in figura (5.1) che richiede un numero di operazioni essenziali pari a

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad .$$

A queste se ne devono aggiungere

$$2(n+1) + 1$$

per ogni punto interpolato.

```

lambda[0] = 1.0;
for ( k=1 ; k<=n ; k++ ){
    s = 0.0 ;
    for ( i =0; i<k ; i++){
        lambda[i] = lambda[i] / ( x[i] - x[i] ) ;
        s = s - lambda[i];
    }
    lambda[k] = s ;
}

```

Figura 5.1: Calcolo dei coefficienti di appoggio

5.1.3 Il metodo di Newton: differenze finite divise

Si basa sulla rappresentazione del polinomio interpolatore

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (5.14)$$

Imponendo il passaggio del polinomio per gli $n+1$ punti d'appoggio (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) , i coefficienti c_k possono essere ottenuti risolvendo il seguente sistema triangolare:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= c_0 \\
 y_1 &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\
 y_2 &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 y_n &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \quad .
 \end{aligned}$$

Dal sistema si deduce che ogni coefficiente c_i ($i = 0, 1, \dots, k$) dipende solo dai punti $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$. Al contrario del polinomio di Lagrange, l'aggiunta di nuovi punti (x_i, y_i) con $i > n$ non influenzerà quindi i coefficienti c_0, c_1, \dots, c_n calcolati con i punti di appoggio precedenti.

Questo fatto permette di scrivere che

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad .$$

dove le funzioni f con parentesi quadre vengono chiamate *differenze finite divise*. Queste grandezze vengono definite iterativamente partendo dalle grandezze di ordine 0 dove $f[x_i] = f(x_i) = y_i$. La *prima differenza finita divisa* è definita da

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (5.15)$$

La *seconda differenza finita divisa* si esprime quindi come differenza fra due prime differenze finite divise, cioè

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \quad (5.16)$$

Generalizzando il procedimento, la *n-esima differenza finita divisa* è

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (5.17)$$

Il calcolo delle differenze finite $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$, corrispondenti ai coefficienti c_k del polinomio di Newton, non si esegue di regola risolvendo il sistema triangolare ma applicando il seguente *schema delle differenze divise*.

$$\begin{array}{c|cccc}
 x_0 & f[x_0] & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \\
 x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \dots \\
 x_2 & f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \\
 x_3 & f[x_3] & & & \\
 \vdots & & & & \\
 x_n & & & &
 \end{array} \quad (5.18)$$

dove

$$\begin{aligned}
 f[x_i] &= y_i, & i &= 0, 1, \dots, n \\
 f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, & i &= 0, 1, \dots, n-1 \\
 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, & i &= 0, 1, \dots, n-2 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

La formula risorsiva (5.17) si può dimostrare nel modo seguente. Indicando con $q_{1,k}$ il polinomio interpolatore nei nodi x_1, \dots, x_k e con $q_{0,k-1}$ il polinomio interpolatore nei nodi x_0, \dots, x_{k-1} , il polinomio interpolatore p_k in tutti i nodi x_0, \dots, x_k si può scrivere come

$$p_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} q_{1,k}(x) - \frac{x - x_k}{x_k - x_0} q_{0,k-1}(x) \quad (5.19)$$

Infatti, sostituendo x_i a x in (5.19) e tenendo presente che $q_{1,k}(x_i) = q_{0,k-1}(x_i) = y_i$ per $i = 1, \dots, k-1$, $q_{0,k-1}(x_0) = y_0$ e $q_{1,k}(x_k) = y_k$, si può facilmente verificare che

$p_k(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, k$. Quindi, si ha che

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= c_k \text{ in } p_k && \text{(per definizione)} \\ &= \frac{c_{k-1} \text{ in } q_{1,k}}{x_k - x_0} - \frac{c_{k-1} \text{ in } q_{0,k-1}}{x_k - x_0} && \text{(dalla formula (5.19))} \\ &= \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} && \text{(per definizione)} \end{aligned}$$

Da notare che la differenza divisa è un numero invariante alle permutazioni, vale a dire che dipende soltanto dai nodi e non dall'ordine in cui si trovano. Il metodo di interpolazione di Newton si fa preferire a quello di Lagrange per diversi motivi: richiede meno operazioni ed è quindi più stabile, si devono memorizzare meno dati per l'interpolazione, l'algoritmo per il calcolo dei coefficienti è semplice e come già accennato, l'aggiunta di un punto comporta solamente il calcolo di una nuova riga della tabella delle differenze divise.

L'algoritmo nella figura (5.2) applica la relazione ricorrente per calcolare i coefficienti c_k . Le colonne della tabella alle differenze divise, qui scritta come triangolare inferiore, vengono successivamente determinate e memorizzate nel vettore \mathbf{c} , che alla fine conterrà gli elementi diagonale della tabella vale a dire proprio i coefficienti c_k cercati.

```
for ( i=0 ; i<=n ; i++ ){
    c[i] = y[i] ;

for ( k=1 ; k<=n ; k++ ){
for ( i=n ; i>=k ; i-- )
    c[i] = (c[i] - c[i-1])/(x[i] - x[i-k]) ;
}
}
```

Figura 5.2: Calcolo dei coefficienti c_k

Per calcolare il valore del polinomio P_n mediante la (5.14) si può usare le istruzioni mostrate in figura (5.3).

```

p = c[n];
for ( k=n-1 ; k>=0 ; k-- )
    p = c[k] + (x - x[k]) * p ;

```

Figura 5.3: Calcolo del valore del polinomio P_n

5.2 Interpolazione mediante funzioni spline

5.2.1 Introduzione

In precedenza, abbiamo visto come usare polinomi di ordine n per interpolare $n + 1$ punti. Esistono però dei casi in cui queste funzioni danno risultati inadeguati; un approccio alternativo consiste nell'interpolare con diverse polinomiali di ordine inferiore alcuni sottoinsiemi dei punti dati. I polinomi ricavati vengono chiamati *funzioni spline*.

A differenza delle funzioni interpolanti di ordine elevato, che hanno la tendenza ad oscillare in modo ampio in prossimità di brusche variazioni, le funzioni spline essendo sempre di ordine basso (al massimo del terzo in pratica, come vedremo) riducono al minimo le oscillazioni fra i punti.

Da notare, come curiosità, che le funzioni spline prendono il loro nome da una sottile bacchetta flessibile (detta appunto spline in inglese) che serviva nelle vecchie tecniche di disegno a tracciare una linea priva di spigoli passante per una serie di punti.

5.2.2 Spline lineari e quadratiche

La funzione più semplice che permette di collegare due punti è ovviamente la retta. Nel caso di una serie di punti crescenti (x_0, x_1, \dots, x_n) , la funzione spline lineare sarà una funzione detta lineare a tratti. Esplicitamente, si ottiene:

$$f(x) = \begin{cases} f(x_0) + m_0(x - x_0) & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \\ f(x_1) + m_1(x - x_1) & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & \text{se } x_{n-1} \leq x < x_n \end{cases} \quad (5.20)$$

dove m_i è la pendenza della retta che collega i punti, cioè

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (5.21)$$

Per estrapolare il valore di $f(x)$ per x compreso in $[x_0, x_n]$, si individua l'intervallo a cui x appartiene e si usa la formula appropriata. La spline lineare è quindi equivalente all'interpolazione lineare. Nella spline lineare, pur essendo la funzione

interpolante continua, la sua derivata nei punti di connessione non lo è. Per risolvere questo problema, si può raccordare ogni coppia di punti adiacenti con un polinomio di secondo grado; l'espressione generale di queste funzioni sarà:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad , \quad (5.22)$$

e si otterrà perciò una funzione quadratica a tratti. La notazione viene illustrata nella figura(5.4).

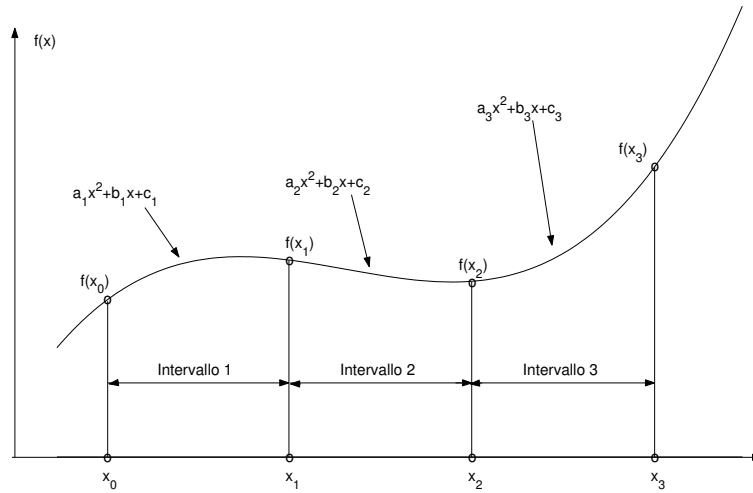


Figura 5.4: Spline quadratica con 4 punti

Nel caso di $n + 1$ punti noti (x_0, \dots, x_n) , si sono n intervalli e di conseguenza $3n$ incognite da calcolare. Le condizioni che permettono di impostare le equazioni necessarie sono le seguenti:

1. *I valori della funzione devono essere uguali nei punti interni e passare per i due punti esterni.* Si ottiene quindi

$$f_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \quad , \quad f_i(x_i) = y_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (5.23)$$

per un totale di $2(n - 1) + 2 = 2n$ condizioni.

2. *Le derivate prime di ciascuna coppia di spline adiacenti devono essere uguali nel punto in comune.* Dato che $f'_i(x) = 2a_i x + b_i$, si ottiene

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_i + b_{i+1} \quad , \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (5.24)$$

condizione che fornisce ulteriori $n - 1$ condizioni. In tutto abbiamo quindi $3n - 1$ condizioni per cui bisogna ancora aggiungere una condizione arbitraria che permetta la risoluzione del problema. Fra le molte scelte possibili segnaliamo:

3. a) *La derivata seconda nel primo punto è zero, cioè $a_1 = 0$,*
 per la quale i primi due punti sono collegati da una retta
 b) *La derivata prima nel primo punto è zero, cioè $2a_1x_0 + b_1 = 0$,*
 per la quale la pendenza della curva all'inizio è piatta.

5.2.3 Le spline cubiche

Le spline cubiche connettono i nodi che delimitano ogni intervallo con una funzione polinomiale di terzo grado. Perciò in analogia alla (5.22), si ottiene per ogni intervallo fra gli $n + 1$ nodi:

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.25)$$

e la funzione interpolante $s(x)$ sarà una funzione cubica a tratti. Le incognite a_i, b_i, c_i e d_i passano quindi rispetto al caso quadratico da $3n$ a $4n$. Alle condizioni (5.23) e (5.24), si deve aggiungere la continuità della derivata seconda nei punti interni per cui si ottengono le seguenti $n - 1$ equazioni supplementari:

$$6a_i x_i + 2b_i = 6a_{i+1} x_i + b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (5.26)$$

In tutto si ottengono $4n - 2$ equazioni di vincolo per $4n$ incognite, per cui bisogna aggiungere ulteriori due equazioni.

Come nel caso quadratico le possibilità sono molteplici. Nella cosiddetta *spline naturale*, si impone la condizione che le derivate seconde nei punti estremi siano uguali a zero. Imponendo un valore opportuno alla prima derivata nei punti estremi si ottengono invece le *spline di Akima*.

- a) Spline naturale : $s_1''(x_0) = s_n''(x_n) = 0$,
 b) Spline di Akima: $s_1'(x_0) = a$, $s_n'(x_n) = b$ con a e b dati ,

Per determinare i coefficienti dei polinomi $s_i(x)$, si potrebbe sfruttare direttamente le condizioni viste in precedenza, risolvendo un sistema lineare di dimensione $4n$. Vi sono però metodi di risoluzione che permettono di ridurre notevolmente le dimensioni del sistema.

La risoluzione di Cheney e Kincaid

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$y_i = s(x_i), \quad m_i = s''(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (5.27)$$

Le incognite m_i vengono dette *momenti* e corrispondono alle derivate seconde nei punti in esame. Dato che $s_i(x)$ per $x \in [x_{i-1}, x_i]$ è un polinomio di terzo grado, la sua derivata seconda $s_i''(x)$ sarà lineare e essendo la derivata seconda di $s(x)$

continua (su tutto l'intervallo), dovrà essere lineare a tratti. Quindi $s_i''(x)$ può essere rappresentata con la formula di Lagrange

$$s_i''(x) = m_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} - m_{i-1} \frac{x - x_i}{h_i}, \quad \text{per } x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (5.28)$$

dove $h_i = x_i - x_{i-1}$. Integrando due volte si ottiene per $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= m_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} - m_{i-1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + lpha_i, \\ s_i(x) &= m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} - m_{i-1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + lpha_i(x - x_{i-1}) + \beta_i. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Bisogna ora trovare il valore delle incognite $lpha_i$, β_i e m_i . Le costanti $lpha_i$ e β_i vengono determinate imponendo le condizioni (5.23) di passaggio per i punti di appoggio alla seconda equazione della (5.29), vale a dire

$$\begin{cases} m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + \beta_i = y_{i-1} \\ m_i \frac{h_i^2}{6} + lpha_i h_i + \beta_i = y_i \end{cases} \quad (5.30)$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \beta_i = y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \\ lpha_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \end{cases} \quad (5.31)$$

Restano quindi da calcolare i momenti m_i , $i = 0, \dots, n$ utilizzando l'equazione (5.24) relativa alla continuità della derivata, vale a dire $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$. Sostituendo $lpha_i$ e $lpha_{i+1}$ dalle relazioni precedenti e raggruppando i termini, si ottengono per le $n-1$ relazioni seguenti:

$$\frac{h_i}{6} m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} m_i + \frac{h_{i+1}}{6} m_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5.32)$$

E' possibile rendere ancora più elegante le equazioni utilizzando la notazione delle differenze divise (5.17), con le quali il secondo termine della (5.32) si può scrivere come

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}](h_i + h_{i+1}). \quad (5.33)$$

Definendo le grandezze

$$\gamma_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} > 0, \quad \delta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} > 0, \quad \text{dove } \gamma_i + \delta_i = 1, \quad (5.34)$$

si può riscrivere l'equazione (5.32) come

$$\gamma_i m_{i-1} + 2 m_i + \delta_i m_{i+1} = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.35)$$

Le ultime due relazioni che permettono di risolvere completamente il problema vengono implementate con le condizioni aggiuntive. Mostriamo esplicitamente il caso più semplice della spline naturale; gli altri casi si svolgono in modo analogo.

Dalla condizione della spline naturale, si ha che $m_0 = m_n = 0$. perciò il sistema (5.35) prende la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & \delta_1 & & & & \\ \gamma_2 & 2 & \delta_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \gamma_{n-2} & 2 & \delta_{n-2} \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \\ \cdot \\ \cdot \\ f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Essendo il sistema tridiagonale (questo vale anche per la spline di Akima), la soluzione può essere calcolata con il metodo di Gauss senza scambio di righe, con un basso costo computazionale dell'ordine di n . Se i punti sono equidistanti, vale a dire che

$$h_i = h = \frac{x_n - x_0}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.37)$$

la matrice del sistema risulta ancora più semplice. Infatti, $\gamma_i = \delta_i = 1/2$ e usando la definizione di *differenza finita*:

$$\Delta^k f(x_i) = k! h^k f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}], \quad i = 0, \dots, n-k; \quad k = 1, \dots, n \quad (5.38)$$

per cui

$$\Delta f(x_i) = h f[x_i, x_{i+1}], \quad \Delta^2 f(x_i) = 2h^2 f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], \quad (5.39)$$

il sistema (5.35) si semplifica e diventa, con $y_i = f(x_i)$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{6}{h^2} \Delta^2 y_{i-1} \quad (5.40)$$

In forma matriciale, si ottiene perciò

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} \Delta^2 y_0 \\ \Delta^2 y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta^2 y_{n-3} \\ \Delta^2 y_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Essendo la matrice dei coefficienti costante, sarà quindi necessaria una sola decomposizione che sarà poi applicata sistematicamente ai vettori noti dipendenti dalla differenze finite legate ai valori nei nodi, con un ulteriore risparmio computazionale.

Le spline cubiche sono molto usate nella grafica perché fra le funzioni con derivata seconda continua che interpolano una funzione $f(x)$ nei nodi x_i , sono quelle che hanno la minima curvatura, cioè che oscillano meno.

5.3 Interpolazione trigonometrica

Le funzioni trigonometriche $\sin kx$ e $\cos kx$, con k intero, grazie alle loro proprietà di periodicità, rappresentano una classe ideale per interpolare funzioni periodiche. Inoltre, hanno pure la proprietà importante nelle applicazioni che le loro derivate appartengono ancora alla stessa classe.

L'*interpolazione trigonometrica* è un'interpolazione a coefficienti lineari della forma

$$F(x; a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m) = \sum_{k=0}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad , \quad (5.42)$$

con la quale si intende interpolare un insieme di n punti di appoggio $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, n-1\}$. La funzione (5.42) è detta *polinomio trigonometrico* di grado m . Nel prossimo capitolo, analizzeremo più in dettaglio l'interpolazione trigonometrica in relazione alla Trasformata discreta di Fourier (DFT).

6

DFT e FFT

6.1 Introduzione

In questo capitolo, mostreremo come l'interpolazione trigonometrica sia equivalente alla discretizzazione della trasformata di Fourier.

A questo proposito, ci limitiamo inizialmente allo studio del caso in cui le ascisse degli N punti di appoggio necessari sono equidistanti e distribuite nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$ secondo la regola

$$x_j = \frac{2\pi}{N}j \quad , \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad . \quad (6.1)$$

In generale, si distinguono due casi: N pari ($N = 2m$) o N dispari ($N = 2m + 1$). Il polinomio trigonometrico di interpolazione assume la seguente forma:

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) & \text{se } N = 2m + 1 \\ \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)) + \frac{a_m}{2} \cos(mx) & \text{se } N = 2m \end{cases} \quad (6.2)$$

I coefficienti dell'interpolazione possono essere calcolati imponendo il passaggio della funzione (6.2) per i punti (x_j, y_j) e risolvendo quindi il sistema lineare corrispondente. La soluzione può essere espressa mediante le formule seguenti:

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos(jx_i) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, m \quad , \quad (6.3)$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin(jx_i) \quad , \quad j = 1, \dots, m-1 \quad . \quad (6.4)$$

In particolare, se $N = 2m$, si ottiene dalla (6.3) che

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i y_i \quad . \quad (6.5)$$

La dimostrazione verrà eseguita nel prossimo paragrafo, usando la notazione complessa.

6.2 La rappresentazione complessa

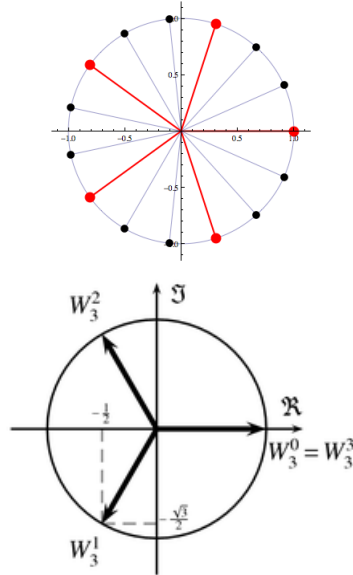
Il problema dell'interpolazione trigonometrica visto nel paragrafo precedente si può ricondurre a un problema di interpolazione polinomiale sul cerchio unitario del piano complesso. A questo scopo, si introducono le radici n -esime dell'unità.

Definizione. Sia n un intero. Si definisce *radice n -esima dell'unità* ogni numero complesso z tale che $z^n = 1$. Una radice n -esima ω è detta *primitiva* se l'insieme $\{\omega^j, j = 0, \dots, n-1\}$ è costituito da n elementi distinti. Perciò il numero complesso (con $i^2 = -1$, i unità immaginaria)

$$\omega_n = e^{i2\pi/n}$$

è una radice primitiva n -esima dell'unità e le successive potenze di ω_n , vale a dire $\omega_n^m = e^{i2\pi m/n}$, sono nell'ordine tutte le radici n -esime dell'unità.

Esse si dispongono nel piano complesso lungo la circonferenza unitaria, ai vertici di un poligono regolare con n lati che ha un vertice in $(1,0)$.



$$\begin{aligned} \{\sqrt[3]{1}\} &= \left\{ 1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\} \\ \{\sqrt[6]{1}\} &= \left\{ \pm 1; \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{\pm 1 - i\sqrt{3}}{2} \right\} \\ \{\sqrt[8]{1}\} &= \left\{ \pm 1; \pm i; \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}; \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

Definendo la seguente trasformazione ϕ :

$$\phi : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}, \quad x \longrightarrow z = \exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

i nodi x_j sono trasformati proprio nelle radici ennesime dell'unità dalla mappa ϕ :

$$\phi(x_j) = \exp(i \frac{2\pi j}{N}) = [\exp(\frac{2\pi i}{N})]^j = \omega_N^j . \quad (6.6)$$

Per le radici n-sime dell'unità, valgono le seguenti proprietà:

$$\omega_{nl}^{kl} = \omega_n^k \quad (l \in \mathbb{Z}, l \neq 0) , \quad (6.7)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \begin{cases} n , & \text{se } m \pmod{n} = 0 \\ 0 , & \text{altrimenti} \end{cases} , \quad (6.8)$$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione di queste proprietà.

Si consideri ora un problema di interpolazione polinomiale nel campo complesso che, come verrà mostrato in seguito, è equivalente all'interpolazione trigonometrica. Bisogna cioè determinare i coefficienti complessi c_k , $k = 0, \dots, N-1$ del polinomio:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k z^k \quad \text{con} \quad y_j = p(\omega_N^j), \quad j = 0, \dots, N-1 . \quad (6.9)$$

Per ottenere il risultato,

1. moltiplichiamo Eq(6.9) con ω_N^{-jl} ,
2. sommiamo su j da 0 a $N-1$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-jl} y_j = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-jl} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \omega_N^{kj} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(k-l)}}_{N\delta_{kl}} . \quad (6.10)$$

Otteniamo

$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_N^{-lk}, \quad l = 0, \dots, N-1 . \quad (6.11)$$

L'equazion (6.11) è detta **Trasformata discreta di Fourier** (o anche DFT) del vettore \mathbf{y} . Definendo la matrice \mathbf{F}_n , in notazione matriciale possiamo scrivere:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{y} , \quad \text{con} \quad (F_n)_{lk} := [\omega_n^{-lk}] , \quad 0 \leq k, l \leq n-1$$

L'applicazione che porta i coefficienti \mathbf{c} sul vettore \mathbf{y} è detta **Trasformata discreta inversa di Fourier** (o anche IDFT) ed è data da:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \omega_N^{jk}, \quad j = 0, \dots, N-1 . \quad (6.12)$$

In notazione matriciale:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{c} , \text{ con } (W_n)_{lk} := [\omega_n^{lk}] , 0 \leq k, l \leq n-1 \quad (6.13)$$

Per la matrice di Fourier, abbiamo le seguenti proprietà:

$$\mathbf{W}_n = \overline{\mathbf{F}}_n$$

$$\mathbf{F}_n^T = \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{F}_n^H \cdot \mathbf{F}_n = n\mathbf{I}_n \text{ (le colonne sono ortogonali con norma } \sqrt{n}\text{)}$$

Un calcolo classico di una trasformata di Fourier richiede $\mathcal{O}(m^2)$ moltiplicazioni complesse. Vedremo come è possibile ridurre drasticamente questo numero di operazioni.

6.3 Un esempio con $N = 4$

Per esemplificare la procedura esposta nei paragrafi precedenti, prendiamo un caso con quattro punti di appoggio $x_k = k \cdot (2\pi/4) = k \cdot (\pi/2)$ presi nell'intervallo $[0, 2\pi]$

$$P_0(0, -1) ; P_1(\frac{\pi}{2}, 2) ; P_2(\pi, 1) ; P_3(\frac{3\pi}{2}, -3) . \quad (6.14)$$

Usando la seconda equazione in (6.2), possiamo scrivere il polinomio trigonometrico interpolante corrispondente:

$$F_2(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) \quad (6.15)$$

Richiedendo il passaggio del polinomio per i quattro punti, si ottiene il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = -1 \\ a_0 + b_1 - a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 - b_1 - a_2 = -3 \end{cases} \quad (6.16)$$

In forma matriciale, definendo i vettori $y = (-1, 2, 1, -3)$ e $a = (a_0, a_1, b_1, a_2)$, si può scrivere il sistema come $V \cdot a = y$, dove la matrice di Vandermonde V è data da:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il vettore soluzione a si ottiene invertendo la matrice V e moltiplicandola con il vettore y . Quindi:

$$a = V^{-1}y = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio trigonometrico cercato è quindi dato da:

$$F_2(x) = -\frac{1}{4} - \cos x + \frac{5}{2} \sin x + \frac{1}{4} \cos(2x) . \quad (6.17)$$

Notare che se vogliamo tenere la notazione generale (6.2) nella scrittura dei coefficienti, avremmo a rigore che $a_0 = -1/2$ e $a_2 = 1/2$, poiché andrebbero ancora divisi per due alla fine per ottenere il risultato in (6.17).

Con l'approccio complesso, i punti d'appoggio vanno rimappati sul cerchio trigonometrico. Usando la mappa definita in (6.6), vale a dire $\phi(x_k) = e^{ix_k}$ per $k = 0, 1, 2, 3$, otteniamo i nuovi punti Q da interpolare:

$$Q_0(1, -1) ; Q_1(i, 2) ; Q_2(-1, 1) ; Q_3(-i, -3) . \quad (6.18)$$

Il polinomio complesso interpolante cercato è della forma: $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$. Procedendo in maniera del tutto analoga al precedente caso, e definendo qui il vettore $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$, per sostituzione si ottiene che $W_4 c = y$. La matrice W_4 è il caso con $n = 4$ nell'equazione (6.13), vale a dire:

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Il vettore soluzione c si ottiene di nuovo invertendo la matrice W_4 e moltiplicandola con il vettore y . Dalle proprietà delle matrici W_n elencate sotto l'equazione (6.13), la matrice inversa W_4^{-1} è però data direttamente dalla sua complessa coniugata. Perciò abbiamo che $W_4^{-1} = \overline{W_4} = F_4$ e si ottiene:

$$c = \overline{W_4} y = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 - 5i \\ 1 \\ -2 + 5i \end{pmatrix}$$

Per i coefficienti complessi, abbiamo quindi che:

$$c_0 = -\frac{1}{4} , \quad c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}i , \quad c_2 = \frac{1}{4} , \quad c_3 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i = \bar{c}_1 . \quad (6.19)$$

Nel prossimo paragrafo, vediamo come è possibile trasformare i coefficienti del polinomio complesso nei coefficienti reali del polinomio trigonometrico di partenza.

6.4 Ritorno al caso reale

Mostriamo come dedurre i coefficienti reali a_k e b_k dai coefficienti complessi c_k , e di conseguenza, le relazioni (6.3-6.5) dalla DFT e IDFT.

Innanzitutto, dato che $y_k \in \mathbb{R}$, usando Eq(6.11) e la relazione $\omega_N^{-Nk} = e^{i2\pi k} = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), otteniamo le seguenti proprietà:

$$c_0 \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \bar{c}_j = c_{N-j}, \quad \text{per } j = 1, \dots, N-1. \quad (6.20)$$

Poniamo $z_k = e^{ix_k} = e^{i2\pi k/N}$ e analizziamo dapprima il caso $n = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} c_j z_k^j &= c_0 + \sum_{j=1}^m c_j z_k^j + \sum_{j=m+1}^{2m} c_j z_k^j \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^m c_j z_k^j + \sum_{j=1}^m c_{N-j} z_k^{N-j} \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^m c_j z_k^j + \sum_{j=1}^m \bar{c}_j z_k^N z_k^{-j} \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^m (c_j z_k^j + \bar{c}_j z_k^{-j}) \end{aligned}$$

dato che nella seconda riga, $z_k^N = 1$, essendo z_k una radice N-esima dell'unità. Con:

$$y_k = p(z_k) = p(e^{ix_k}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ix_k j} \quad (6.21)$$

otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} y_k &= c_0 + \sum_{j=1}^m (c_j e^{ix_k j} + \bar{c}_j e^{-ix_k j}) \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} (c_j + \bar{c}_j) \underbrace{(e^{ix_k j} + e^{-ix_k j})}_{2 \cos(x_k j)} + \frac{1}{2} (c_j - \bar{c}_j) \underbrace{(e^{ix_k j} - e^{-ix_k j})}_{2i \sin(x_k j)} \end{aligned}$$

Sostituendo e semplificando, si ottiene:

$$y_k = c_0 + \sum_{j=1}^m \left[\underbrace{(c_j + \bar{c}_j)}_{a_j} \cos x_k j + \underbrace{\iota(c_j - \bar{c}_j)}_{b_j} \sin x_k j \right] \quad (6.22)$$

riproducendo di fatto la prima delle due equazioni in (6.2).

Perciò i coefficienti reali a_j e b_j si ottengono dalle c_j con:

$$a_j = c_j + \bar{c}_j = 2 \operatorname{Re} c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6.23)$$

$$b_j = \iota(c_j - \bar{c}_j) = -2 \operatorname{Im} c_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (6.24)$$

Esempio 6.1 *Dati i coefficienti complessi calcolati nell'esempio del paragrafo precedente, calcolare il polinomio trigonometrico reale*

Soluzione: *Applicando le relazioni (6.23) e (6.24) ai coefficienti*

$$c_0 = -\frac{1}{4}, \quad c_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}i, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i \quad (6.25)$$

si ottiene:

$$a_0 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = \frac{5}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}. \quad (6.26)$$

che corrispondono alla soluzione ottenuta in precedenza. Notare che per riprodurre il polinomio correttamente, si devono dividere per 2 sia a_0 che a_2 .

Utilizzando poi l'equazione (6.11),

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-jk}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (6.27)$$

assieme al fatto che $\omega_N^{\pm jk} = e^{\pm i x_k j} = \cos j x_k \pm i \sin j x_k$, l'espressione esplicita per i coefficienti a_j e b_j è data da:

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos(j x_k), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6.28)$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \sin(j x_k), \quad j = 1, \dots, m \quad (6.29)$$

Se $n = 2m$, otteniamo dall' Eq(6.3):

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k y_k. \quad (6.30)$$

Come previsto, queste espressioni sono uguali a quelle delle equazioni (6.3-6.5). L'interpolazione trigonometrica corrisponde quindi alla trasformata di Fourier discretizzata.

L'unicità del polinomio di interpolazione trigonometrico segue dall'unicità del polinomio (6.9) e dal fatto che la relazione che lega i coefficienti a_j e b_j con gli z_j è univoca.

6.5 Funzione simmetrica o antisimmetrica

Se nell'intervallo $[0, 2\pi)$, la funzione $y = f(x)$ che definisce i punti di appoggio y_k è simmetrica, oppure antisimmetrica rispetto al punto π , i coefficienti a_j e b_j del polinomio interpolatore si semplificano nel modo seguente:

a) se $f(x)$ è simmetrica, allora

$$a_j = \begin{cases} \frac{2}{N} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} y_k \cos(jx_k) \right] & \text{se } N = 2m - 1 \\ \frac{2}{N} \left[f(x_0) + (-1)^j y_m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} y_k \cos(jx_k) \right] & \text{se } N = 2m \end{cases}$$

$$b_j = 0 ,$$
(6.31)

b) se $f(x)$ è antisimmetrica (vale a dire $f(\pi) = 0$), allora:

$$a_0 = \frac{2}{N} y_0 , \quad b_j = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{m-1} y_k \sin(jx_k) .$$
(6.32)

La dimostrazione delle relazioni precedenti tiene conto del fatto che, se $f(x)$ è simmetrica, allora $y_k = f(x_k) = f(x_{N-k}) = y_{N-k}$ e se $f(x)$ è antisimmetrica, allora $y_k = f(x_k) = -f(x_{N-k}) = -y_{N-k}$, e che

$$\cos(jx_k) = \cos(jx_{N-k}) \quad \text{e} \quad \sin(jx_k) = -\sin(jx_{N-k}) .$$

6.6 Funzione interpolante in un intervallo T qualunque

Nel caso in cui si vuole costruire un'interpolazione trigonometrica nell'intervallo $[0, T)$, dove T è un valore qualunque, si può formulare il problema a partire dalla (5.42), scrivendo ad esempio per il caso di N dispari ($N = 2m - 1$):

$$f(t; a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{m-1}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos(k \frac{2\pi}{T} t) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{T} t)) ,$$

La relazione (6.1) deve essere sostituita con

$$t_k = k \cdot \Delta t \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad ,$$

dove

$$\Delta t = \frac{T}{N} .$$

6.7 Numero di punti di appoggio tendente all'infinito. Serie di Fourier.

Se si introduce nelle formule (6.3) e (6.4) la distanza

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{N}$$

si ottiene

$$a_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos(jx_i) \Delta x \quad , \quad j = 0, 1, \dots, m \quad ,$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} y_i \sin(jx_i) \Delta x \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad .$$

Nel caso in cui il numero dei punti d'appoggio tende all'infinito (vale a dire $n \rightarrow \infty$), si deducono immediatamente le formule

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \cos(jx) dx \quad , \quad j = 0, 1, \dots$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \sin(jx) dx \quad , \quad j = 1, 2, \dots$$

che definiscono i coefficienti della *serie di Fourier* della funzione $y(x)$.

6.8 Fast Fourier Transform

6.8.1 Il caso $n = 2m$

Il calcolo dei coefficienti c_k implica la somma DFT:

$$c_l = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-lk}, \quad l = 0, \dots, n-1 \quad . \quad (6.33)$$

Supponiamo dapprima che $n = 2m$. Separiamo i coefficienti pari da quelli dispari: (allora $l = 0, \dots, m-1$), e dividiamo ogni somma in due parti (k and $k+m$):

$$\begin{aligned} c_{2l} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} (y_k \omega_{2m}^{-2lk} + y_{k+m} \omega_{2m}^{-2l(k+m)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} (y_k + y_{k+m}) \omega_m^{-lk} \\ c_{2l+1} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} (y_k \omega_{2m}^{-(2l+1)k} + y_{k+m} \omega_{2m}^{-(2l+1)(k+m)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} [(y_k - y_{k+m}) \omega_n^{-k}] \omega_m^{-lk} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\omega_{2m}^{-2lk} = \omega_m^{-lk}$ and $\omega_{2m}^{-m} = -1$

La DFT con $n = 2m$ si riduce perciò in due DFT con $n = m$.

$$\begin{aligned} c_{2l} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} y_k^{(1)} \omega_m^{-lk}, \quad y_k^{(1)} := (y_k + y_{k+m}) \\ c_{2l+1} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} y_{k+m}^{(1)} \omega_m^{-lk}, \quad y_{k+m}^{(1)} := (y_k - y_{k+m}) \omega_n^{-k} \end{aligned}$$

Supponiamo che A_n è il numero di operazioni con n punti, allora per $n = 2m$ vale:

$$A_{2m} = 2 A_m + 3m \quad (6.34)$$

Se $n = 2^l$, abbiamo $A_{2^l} = 3l2^{l-1}$ dato che $A_{2^{l+1}} = 3(l+1)2^l = 2(3l2^{l-1}) + 3 \cdot 2^l$ e in questo caso, la DFT può essere compiuta con $\frac{3}{2}n \log_2 n$ operazioni complesse.

6.8.2 Il calcolo numerico

Il calcolo numerico dei coefficienti c_l può essere eseguito senza perdita di ulteriore spazio in memoria eccetto per le y_k . Definendo $\zeta_n = \bar{\omega}_n$, per il caso $n = 8$, abbiamo:

<i>Punto</i>	1° step	2° step	3° step	<i>Coeff</i>
y_0 000	$y_0 + y_4$	$y_0 + y_2$	$y_0 + y_1$	000 c_0
y_1 001	$y_1 + y_5$	$y_1 + y_3$	$(y_0 - y_1)\zeta^0$	100 c_4
y_2 010	$y_2 + y_6$	$(y_0 - y_2)\zeta^0$	$y_2 + y_3$	010 c_2
y_3 011	$y_3 + y_7$	$(y_1 - y_3)\zeta^2$	$(y_2 - y_3)\zeta^0$	110 c_6
y_4 100	$(y_0 - y_4)\zeta^0$	$y_4 + y_6$	$y_4 + y_5$	001 c_1
y_5 101	$(y_1 - y_5)\zeta^1$	$y_5 + y_7$	$(y_4 - y_5)\zeta^0$	101 c_5
y_6 110	$(y_2 - y_6)\zeta^2$	$(y_4 - y_6)\zeta^0$	$y_6 + y_7$	011 c_3
y_7 111	$(y_3 - y_7)\zeta^3$	$(y_5 - y_7)\zeta^2$	$(y_6 - y_7)\zeta^0$	111 c_7

Il coefficiente c_k con la rappresentazione binaria $k = i_{l-1} \dots i_1 i_0$ finisce nel punto y_j nella rappresentazione binaria rovesciata (or *bit reversal*) di k , cioè $j = i_0 i_1 \dots i_{l-1}$.

6.8.3 Approccio matriciale

Analizziamo il caso $n = 8, m = 3$, ponendo $\zeta_8 := \zeta$ nella matrice di Fourier F_8 .

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & \zeta^8 & \zeta^{10} & \zeta^{12} & \zeta^{14} \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta^9 & \zeta^{12} & \zeta^{15} & \zeta^{18} & \zeta^{21} \\ 1 & \zeta^4 & \zeta^8 & \zeta^{12} & \zeta^{16} & \zeta^{20} & \zeta^{24} & \zeta^{28} \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^{10} & \zeta^{15} & \zeta^{20} & \zeta^{25} & \zeta^{30} & \zeta^{35} \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^{12} & \zeta^{18} & \zeta^{24} & \zeta^{30} & \zeta^{36} & \zeta^{42} \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^{14} & \zeta^{21} & \zeta^{28} & \zeta^{35} & \zeta^{42} & \zeta^{49} \end{bmatrix}$$

Poiché $\zeta^8 = 1$ e $\zeta^j = \zeta^{j \bmod 8}$, otteniamo:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^7 & \zeta^2 & \zeta^5 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^2 & \zeta^7 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^6 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 & 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^6 & \zeta^5 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta^1 \end{bmatrix}}_{F_8} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}$$

Applichiamo la matrice di permutazione P che pone le righe con indice pari $(0, 2, 4, 6)$ prima delle righe con indice dispari $(1, 3, 5, 7)$:

$$P \cdot F_8 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 & 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \\ \hline 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & \zeta^5 & \zeta^6 & \zeta^7 \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^7 & \zeta^2 & \zeta^5 \\ 1 & \zeta^5 & \zeta^2 & \zeta^7 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^6 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^7 & \zeta^6 & \zeta^5 & \zeta^4 & \zeta^3 & \zeta^2 & \zeta^1 \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}$$

Analizziamo i 4 blocchi. Dato che $\zeta^2 = \zeta_4$:

$$\begin{aligned}
 B_{1,1} &= B_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta_4 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 \\ 1 & \zeta_4^2 & \zeta_4^4 & \zeta_4^6 \\ 1 & \zeta_4^3 & \zeta_4^6 & \zeta_4^9 \end{bmatrix} = F_4 \\
 B_{2,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^3 \end{bmatrix} = F_4 D_4 \\
 B_{2,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^6 & \zeta^4 & \zeta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^7 \end{bmatrix} = F_4 (\zeta^4 D_4) = -F_4 D_4
 \end{aligned}$$

Riportando tutto insieme, si ottiene:

$$PF_8 = \begin{bmatrix} F_4 & F_4 \\ F_4 D_4 & -F_4 D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ D_4 & -D_4 \end{bmatrix}$$

Generalizziamo la procedura nel seguente modo. Sia m pari e definiamo la matrice di permutazione P_{σ_m} con la permutazione σ_m data da

$$\sigma_m = [0, 2, \dots, m-2, 1, 3, \dots, m-1]$$

Ne consegue che:

$$P_{\sigma_m} F_m = \begin{bmatrix} F_{m/2} & F_{m/2} \\ F_{m/2} D_{m/2} & -F_{m/2} D_{m/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m/2} & 0 \\ 0 & F_{m/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m/2} & I_{m/2} \\ D_{m/2} & -D_{m/2} \end{bmatrix}$$

dove la matrice diagonale $D_{m/2}$ è definita come:

$$D_{m/2} = \text{diag} (\zeta_m^0, \zeta_m^1, \dots, \zeta_m^{m/2-1},) , \quad \zeta_m = \bar{\omega}_m = \exp(-2\pi i/m)$$

6.8.4 Un applicazione

- Poligono definito da m lati: $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$.
- Lati definiti da $2m$ numeri reali: $f_1 = x_1, f_2 = y_1, \dots, f_{2m-1} = x_m, f_{2m} = y_m$.
- Calcola la DFT dei $2m$ numeri f_k :

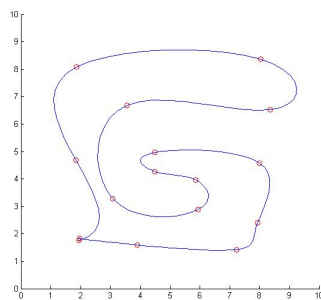
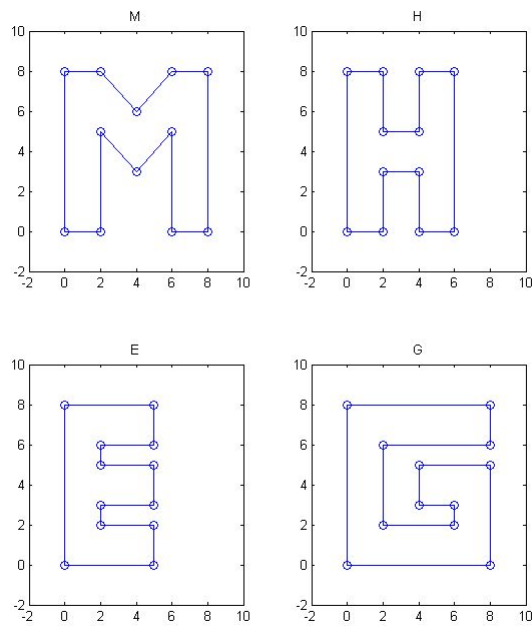
$$[c_1, c_2, \dots, c_{2m}]^T = \frac{1}{m} F_m [f_1, f_2, \dots, f_{2m}]^T \quad (6.35)$$

Il vettore c è chiamato **spettro discreto** del poligono. Riflette le proprietà geometriche del poligono e può essere usato per classificare delle forme geometriche.

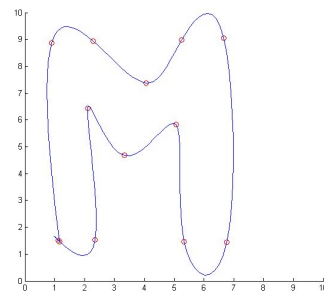
Per applicazioni, lo spettro normalizzato che è indipendente dalla posizione e dalla dimensione è usato:

$$a_k = c_k / |c| \quad (6.36)$$

Viene poi calcolata la differenza fra lo spettro in esame e quelli classificati. Quello minimale sarà definito come l'approssimazione migliore.



forma "G-like"



forma "M-like"

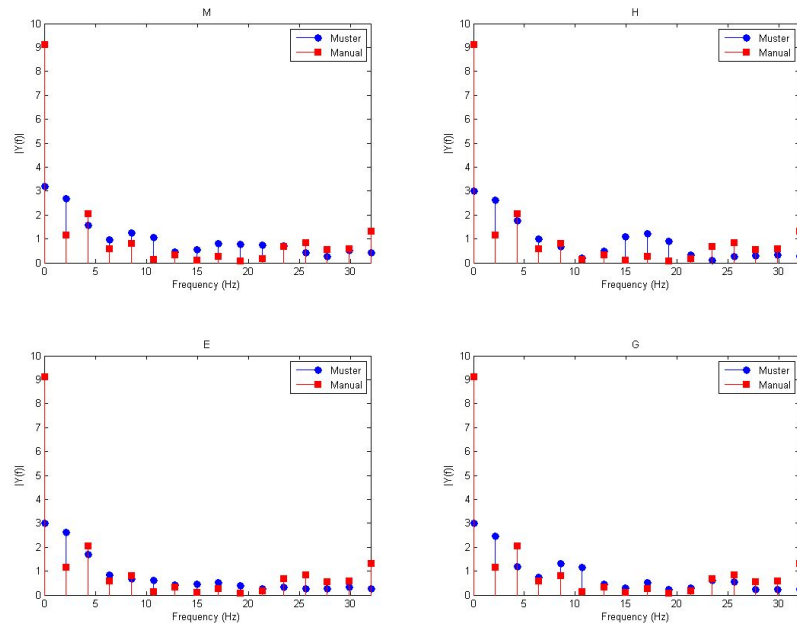


Figura 6.1: Lo spettro della forma "G-like" confrontata con 4 spettri di riferimento

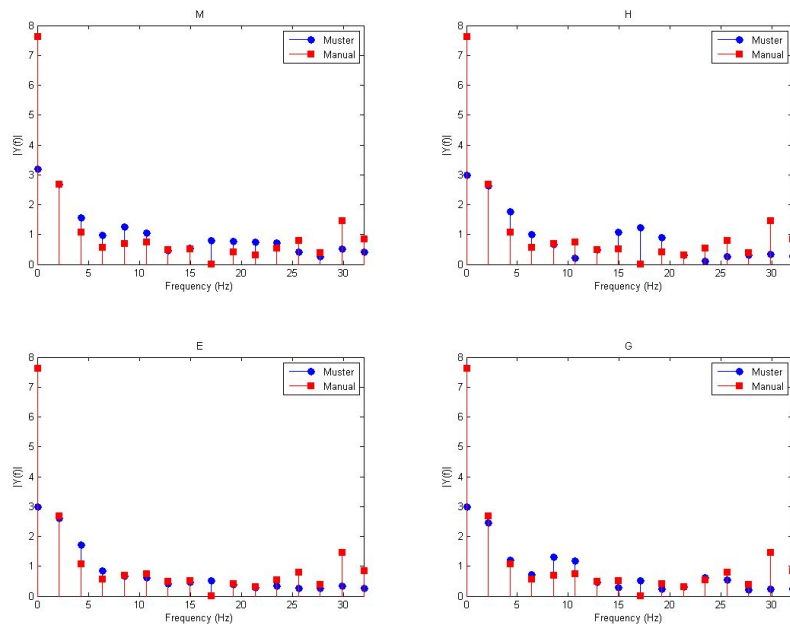


Figura 6.2: Lo spettro della forma "M-like" confrontata con 4 spettri di riferimento

Trasformata di Laplace

7.1 Definizione

La trasformata di Laplace è una generalizzazione della trasformata di Fourier. Data una funzione $f(t)$, la trasformata di Laplace è definita come:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (7.1)$$

dove $s \in \mathbb{C}$. $F(s)$ è perciò una funzione complessa.

Oltre alla trasformata di Laplace *unilatera* definita in (7.1), esiste anche la cosiddetta trasformata di Laplace *bilatera* definita da

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt . \quad (7.2)$$

La trasformata di Laplace tipicamente esiste per tutti i numeri reali $\text{Re}(s) > a$, dove a è una costante (chiamata ascissa di convergenza) che dipende dalla funzione originaria e che costituisce la regione di convergenza.

La trasformata di Laplace gode di numerose proprietà, che la rendono utile per l'analisi dei sistemi dinamici lineari. Il vantaggio più significativo è che l'integrale e la derivata di una funzione diventano rispettivamente una divisione e una moltiplicazione per la variabile complessa, analogamente al modo in cui i logaritmi cambiano la moltiplicazione di numeri nella loro addizione. Essa consente di trasformare le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere. Anche la risposta di un sistema dinamico lineare può essere calcolata come prodotto di convoluzione della sua risposta impulsiva unitaria con il segnale d'ingresso. Sviluppando questo calcolo nello spazio di Laplace la convoluzione diventa una moltiplicazione, che spesso rende il problema più semplice.

Esempio 7.1 *Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside (funzione gradino) $u(t)$ definita come*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} .$$

Soluzione: *Integrando si ottiene:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(t)) &= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Nella notazione ingegneristica, si scrive:

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (7.3)$$

Esempio 7.2 Trovare la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = t$.

Soluzione:

$$F(s) = \mathcal{L}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t \cdot e^{-st} dt \quad (7.4)$$

Calcoliamo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t \cdot e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{T}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2} \quad (7.5)$$

La trasformata di Laplace di $f(t) = t$ è perciò:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad (7.6)$$

ossia: $t \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^2) &= \frac{2}{s} \cdot \mathcal{L}(t) = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}(t^3) = \frac{3}{s} \cdot \mathcal{L}(t^2) = \frac{6}{s^4}, \dots \\ \Rightarrow \mathcal{L}(t^n) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Esempio 7.3 Generalizza il risultato precedente per $f(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{N}$:

Soluzione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t^n \cdot e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{t^n}{s} e^{-st} \right]_0^T \right) + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{n \cdot t^{n-1}}{s} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L}(t^{n-1})\end{aligned}$$

Sappiamo che $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$, per cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^2) &= \frac{2}{s} \cdot \mathcal{L}(t) = \frac{2}{s^3} \\
\mathcal{L}(t^3) &= \frac{3}{s} \cdot \mathcal{L}(t^2) = \frac{6}{s^4} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(t^n) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

7.2 Proprietà

Tenendo conto che $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$, valgono le seguenti proprietà:

1. Linearità

$$\mathcal{L}(a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)) = a_1 \cdot \mathcal{L}(f_1(t)) + a_2 \cdot \mathcal{L}(f_2(t)) \quad (7.7)$$

2. Frequency-shifting

$$\mathcal{L}(e^{-bt} \cdot f(t)) = F(s + b) \quad (7.8)$$

3. Frequency derivative

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t \cdot f(t)) &= -\frac{\partial}{\partial s} F(s) \\
\mathcal{L}(t^n \cdot f(t)) &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} F(s)
\end{aligned}$$

4. Time-shifting

$$\mathcal{L}(f(t - t_0)u(t - t_0)) = e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}(f(t)) \quad (7.9)$$

Come esempio, consideriamo $f(t) = e^{i \cdot t}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{i \cdot t}) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{i \cdot t} dt = \int_0^\infty e^{(i-s)t} dt \\
&= \left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-i} = \frac{s+i}{s^2+1} \\
&= \frac{s}{s^2+1} + i \cdot \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Applicando la linearità su $e^{i \cdot t} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ si ottiene:

$$\mathcal{L}(e^{i \cdot t}) = \mathcal{L}(\cos(t)) + i \cdot \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{s}{s^2+1} + i \cdot \frac{1}{s^2+1} \quad (7.10)$$

da cui

$$\cos(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+1} \quad , \quad \sin(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2+1} \quad (7.11)$$

7.3 Derivate temporali e altre proprietà

Consideriamo una funzione differenziabile $f(t)$ e la sua trasformata di Laplace $F(s)$. Abbiamo:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

In generale vale che

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Una diretta conseguenza è:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Un'altra proprietà molto utile è la seguente:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u) du$$

7.4 Convoluzione

Data la convoluzione delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$ definita come

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (7.12)$$

vale che

$$\mathcal{L}(f * g)(t) = F(s) G(s) \quad (7.13)$$

Esempio 7.4 Determina una funzione f con $(\mathcal{L}f)(s) = F(s) = 1/(s^2 + 1)^2$

Soluzione: La risoluzione avviene tramite i seguenti calcoli:

- $\mathcal{L}(\sin(t)) = 1/(s^2 + 1)$
- $f(t) = (\sin \tau * \sin \tau)(t)$
- $(\sin \tau * \sin \tau)(t) = (\sin t - t \cos t)/2$
- $f(t) = (\sin t - t \cos t)/2$

7.5 Funzioni periodiche

Se $f(t)$ è una funzione continua e periodica con periodo T e $\phi(t)$ la sua restrizione a un periodo T , si ottiene

$$F(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad \text{where} \quad \Phi(s) := \int_0^T f(t)e^{-st} dt. \quad (7.14)$$

Esempio 7.5 Consideriamo la funzione periodica $f(t)$ con periodo $T = 2$ definita da $f(t) = 1 - u(t - 1)$ per $0 \leq t < 2$. Calcolare $F(s)$.

Soluzione: La restrizione a un periodo fornisce:

$$\mathcal{L}(\phi(t)) = 1/s - e^{-s}/s$$

Ne segue immediatamente che:

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$

7.6 Riassunto delle principali trasformate di Laplace

$$\begin{aligned} \delta(t) &\Leftrightarrow 1 \\ \delta(t - t_0) &\Leftrightarrow e^{-s \cdot t_0} \\ t &\Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \\ t^n &\Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \\ t^n \cdot e^{\alpha t} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}} \\ \sin(\omega t) &\Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \cos(\omega t) &\Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ u(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{s} \\ u(t - t_0) &\Leftrightarrow \frac{e^{-st_0}}{s} \end{aligned}$$

7.7 Trasformata di Laplace inversa

La *Trasformata di Laplace inversa* (ILT) è definita dall'operatore \mathcal{L}^{-1} per il quale si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

Esiste una formula per il calcolo diretto della ILT di una generica funzione $F(s)$. Questa formula è definita dal seguente integrale complesso:

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ik}^{\sigma + ik} F(s) e^{st} ds \right) \quad t > 0 \quad (7.15)$$

Il calcolo di questo integrale può essere piuttosto complesso ed è poco utile a fini pratici. E' più facile ricondurre il problema a trasformate di Laplace già note.

Come la trasformata diretta, la *trasformata inversa* è lineare:

$$\mathcal{L}^{-1}(a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)) = a_1 \cdot \mathcal{L}^{-1}(f_1(t)) + a_2 \cdot \mathcal{L}^{-1}(f_2(t))$$

Vediamo alcuni esempi in cui questa proprietà viene sfruttata.

Esempio 7.6 *Si vuole calcolare:*

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a}{s^2 - a^2} \right)$$

Soluzione: Prendiamo l'espansione in frazioni di $F(s)$:

$$\frac{a}{s^2 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a} \right)$$

Grazie alla linearità di \mathcal{L}^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a}{s^2 - a^2} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s - a} \right) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + a} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{at} - e^{-at}) = \sinh(a \cdot t) \end{aligned}$$

Perciò:

$$\sinh(a \cdot t) \Leftrightarrow \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Esempio 7.7 *Calcola*

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s^2}{s^2 + 1} \right)$$

Soluzione: In questo caso la decomposizione è data da:

$$\frac{s^2}{s^2 + 1} = 1 - \frac{1}{s^2 + 1}$$

da cui:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}(1) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \delta(t) - \sin(t)$$

Esempio 7.8 Calcola:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s + 3)^3}\right)$$

Soluzione: Scomponendo in frazioni con potenze di $1/(s + 3)$, si ottiene:

$$e^{-3t} - 6te^{-3t} + \frac{9}{2}t^2e^{-3t}$$

7.8 Risoluzione di equazioni differenziali

L'applicazione di trasformate di Laplace permette di risolvere in modo astuto delle equazioni differenziali. Vediamone un semplice esempio illustrativo, risolvendo la seguente equazione differenziale:

$$x'(t) + 3x(t) = 0 \quad \text{con} \quad x(0) = 1 \quad (7.16)$$

Applichiamo \mathcal{L} all'equazione e indichiamo $\mathcal{L}(x(t))$ con $X(s)$:

$$\underbrace{\mathcal{L}(x'(t))}_{sX(s) - x(0)} + \underbrace{\mathcal{L}(3x(t))}_{3X(s)} = \underbrace{\mathcal{L}(0)}_0$$

Perciò, con $x(0) = 1$, ne consegue che

$$sX(s) - x(0) + 3X(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s + 3}$$

Applicando \mathcal{L}^{-1} a $X(s)$, si ottiene finalmente:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + 3}\right) = e^{-3t}$$

7.9 Equazioni differenziali lineari

L'esempio precedente è un classico esempio di equazioni differenziale lineare ordinaria (OLDE). Le OLDE hanno le derivate che compaiono sempre in modo lineare.

Definendo l'operatore D come l'operatore differenziale d/dt , la OLDE prende la seguente forma:

$$a_m D^m x(t) + \cdots + a_1 D x(t) + a_0 x(t) = b_n D^n f(t) + \cdots + b_1 D f(t) + b_0 f(t), \quad n \leq m \quad (7.17)$$

Qui, $f(t)$ è detta *input* e $x(t)$ è la funzione di *output* oppure *risposta*. Dopo aver eseguito la Trasformata di Laplace, l'equazione (7.17) si trasforma nell'equazione algebrica:

$$\underbrace{(a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0)}_{A(s)} X(s) = \underbrace{(b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0)}_{B(s)} F(s)$$

e possiamo quindi scrivere:

$$A(s)X(s) = B(s)F(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}F(s).$$

I due polinomi $A(s)$ e $B(s)$ derivano perciò dalla forma dell'equazione differenziale.

Definiamo ora la *funzione di transfer* come

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.18)$$

Una caratteristica fondamentale di ogni sistema OLDE è il fatto che fornendo in ingresso $f(t)$ una funzione (ossia una distribuzione) a delta di Dirac, si ha che la risposta $x(t)$ del sistema, detta in questo caso risposta all'impulso, ha come trasformata di Laplace proprio la funzione di trasferimento del sistema stesso $H(s)$. Questo si deduce facilmente dall'equazione 7.18, ponendo $F(s) = 1$, dato che la trasformata di Laplace della delta di Dirac è proprio 1 (vedi tabella in paragrafo (5.7)).

Poiché nel dominio della trasformata di Laplace abbiamo visto che un prodotto di due funzioni corrisponde alla loro convoluzione nel dominio temporale, segue che la risposta del sistema ad un input generico $f(t)$ è la convoluzione dell'ingresso $f(t)$ con la risposta del sistema alla delta di Dirac, descritto da $h(t)$.

Vediamo un altro esempio in cui si applica la convoluzione.

Esempio 7.9 *Risolviamo:*

$$x'(t) + 3x(t) = \cos(3t) \quad \text{with} \quad x(0) = 0 \quad (7.19)$$

Soluzione: Applichiamo $\mathcal{L}(\dots)$ e

$$sX(s) - \underbrace{x(0)}_{=0} + 3X(s) = \frac{1}{s^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2 + 9}$$

Sappiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right) = \cos(3t)$$

Dalla convoluzione, si ottiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2+9}\right) = e^{-3t} * \cos(3t) \\ &= \frac{1}{6}(\cos(3t) + \sin(3t)) - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t} \end{aligned}$$

In questo caso, la funzione di transfer è:

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

7.10 Esempio: vibrazioni forzate su una massa attaccata a una molla

Per illustrare i concetti visti sopra, consideriamo il caso di vibrazioni forzate di una massa m attaccata ad una molla di costante elastica k . L'equazione differenziale che regge il moto della massa m è:

$$mx''(t) + kx(t) = f(t) \quad (7.20)$$

Inoltre, se supponiamo la massa a riposo all'equilibrio per $t = 0$ si hanno le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$.

Se indichiamo con $X(s)$ e $F(s)$ le trasformate di $x(t)$ e $f(t)$ rispettivamente, la trasformata dell'equazione (7.20) diventa

$$ms^2X(s) + kX(s) = F(s) \quad (7.21)$$

Indicando con $\omega_0^2 = k/m$, la trasformata della soluzione del problema è data da:

$$X(s) = \frac{1}{m} \frac{F(s)}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (7.22)$$

Poiché $1/(s^2 + \omega_0^2)$ è la trasformata di $(\sin \omega_0 t)/\omega_0$, questo prodotto può essere considerato come la trasformata del prodotto di convoluzione delle funzioni $(\sin \omega_0 t)/\omega_0$ e $f(t)$. Si ha perciò:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t f(u) \sin \omega_0(t-u) du. \quad (7.23)$$

Tuttavia, in molte occasioni, invece di usare la formula generale (7.23), è più conveniente determinare la soluzione direttamente dall'equazione (7.22). Consideriamo il caso in cui viene applicata una forza esterna di tipo sinusoidale, vale a dire $f(t) = A \sin \omega t$. Sapendo che $F(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$, ne segue che

$$X(s) = \frac{A\omega}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)} . \quad (7.24)$$

Dopo aver espanso in termini di frazioni parziali, e antitrasformando, si ottiene

$$x(t) = \frac{A\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left(\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \quad (7.25)$$

ossia

$$x(t) = \frac{A}{m\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2)} (\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega t) \quad (7.26)$$

Se $\omega \neq \omega_0$, il moto è composto da due modi di vibrazione, una (il modo naturale) alla frequenza naturale ω_0 , mentre l'altro (il modo forzato) alla frequenza imposta dalla forza. Nel caso in cui il sistema venga eccitato alla sua frequenza naturale ($\omega = \omega_0$), il moto può essere determinato considerando la forma limite dell'equazione (7.26) per $\omega \rightarrow \omega_0$. Notando che in questo caso:

$$X(s) = \frac{A\omega_0}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)^2} . \quad (7.27)$$

si ottiene come soluzione:

$$x(t) = \frac{A}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad (7.28)$$

L'ultimo termine dell'equazione (7.28) mostra che, quando la frequenza di eccitazione è uguale alla frequenza naturale, l'ampiezza dell'oscillazione cresce indefinitamente col tempo. Questo caso è chiamato risonanza.

Trasformata Zeta

8.1 Definizione

Consideriamo una sequenza di valori di una funzione $f(t)$ negli istanti $t = n \cdot T$:

$$f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots \quad (8.1)$$

Definendo $f_n \equiv f(n \cdot T)$, otteniamo la sequenza

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \dots \quad (8.2)$$

La *Trasformata Zeta* di una sequenza $\{f_n\}$ è definita da

$$F(z) = \mathcal{Z}(\{f_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}, \quad z \in \mathbf{C} \quad (8.3)$$

per quei valori di z per i quali la serie converge. La Trasformata Zeta è perciò una serie di potenze in z che ha come coefficienti il campionamento di $f(t)$ dove l'esponente di z contiene l'informazione temporale del segnale.

Esempio 8.1 *Troviamo la trasformata \mathcal{Z} di una funzione campionata con i valori seguenti:*

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots\} = \{0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, \dots\} \quad (8.4)$$

Soluzione: Usando la definizione di \mathcal{Z} otteniamo

$$\begin{aligned} F(z) &= 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + \dots \\ &= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3} \\ &= \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3} \end{aligned}$$

8.2 Convergenza e ROC

La trasformata \mathcal{Z} è una serie di potenze che si può separare in due parti:

$$\text{La parte causale: } F_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

$$\text{La parte anti-causale: } F_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} \cdot z^n$$

La trasformata \mathcal{Z} converge se e solo se la parte causale e la parte anti-causale convergono entrambe.

Per studiare la convergenza, si può usare il cosiddetto **criterio di D'Alembert's**:

Sia $\{a_n\}$ una sequenza con $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L$ per qualche L , allora si ottiene:

- se $L < 1$, la serie con i termini a_n converge assolutamente;
- se $L > 1$, la serie con i termini a_n diverge;
- se $L = 1$, non si può concludere nulla in merito alla convergenza

Esempio 8.2 *Trovare il dominio di convergenza della serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n z^n = 2z + 16z^2 + \dots \quad (8.5)$$

Soluzione: Applicando il criterio di D'Alembert a $a_n = n^2 2^n z^n$, abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 |2z| = 2 |z| \quad (8.6)$$

e quindi la serie converge assolutamente per $|z| < 1/2$ e diverge $|z| > 1/2$. Se $|z| = 1/2$, allora $|a_n| = n^2$, e la serie diverge sul cerchio con raggio $1/2$.

La Trasformata \mathcal{Z} deve sempre essere data assieme alla sua *regione di convergenza* (definita come ROC), perché solamente con le due informazioni assieme è possibile associare in modo univoco $\{f_n\}$ e $F(z)$, come i due seguenti esempi mostreranno chiaramente.

Esempio 8.3 *Consideriamo il seguente segnale (causale):*

$$f_n = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

Soluzione: Applichiamo la definizione

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \quad (8.8)$$

Usando la famosa formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad , \text{ per } |q| < 1 \quad , \quad (8.9)$$

risulta che questa serie geometrica converge solo se $|z| > |a|$; la regione di convergenza è perciò quella **esterna** al cerchio di raggio $|a|$ e possiamo scrivere $F(z)$ come

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (8.10)$$

Ne deduciamo quindi l'importante formula che la trasformata Zeta della sequenza geometrica causale a^n è data da $z/(z - a)$.

Esempio 8.4 Consideriamo invece il seguente segnale anti-causale:

$$f_n = -a^{-n}u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -a^{-n} & n \leq -1 \end{cases} \quad (8.11)$$

Soluzione: Di nuovo applichiamo la definizione

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-az^{-1})^n = - \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m \quad (8.12)$$

Usando l'analogo della formula (8.9) per $k \geq 1$ e $|q| < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad (8.13)$$

possiamo scrivere:

$$F(z) = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \quad (8.14)$$

che rappresenta la stessa espressione di (8.10). Ma la regione di convergenza è ora quella **interna** al cerchio di raggio $|a|$.

Questi due esempi mostrano due importanti proprietà della trasformata \mathcal{Z} , che hanno validità generale:

- La forma chiusa della trasformata Zeta $F(z)$ di un segnale non specifica in modo univoco il segnale nel dominio temporale. E' necessario conoscere anche il ROC.
- Un segnale causale ha un ROC esterno a un cerchio di raggio R , mentre un segnale anti-causale possiede un ROC all'interno di una dato raggio R'

Un caso particolare dell'esempio precedente è il seguente.

Esempio 8.5 Troviamo la trasformata \mathcal{Z} della funzione di Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

Soluzione: Il campionamento fornisce la sequenza $u_n = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ e otteniamo la trasformata \mathcal{Z} seguente:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Se $|z| > 1$ la trasformata \mathcal{Z} di u_n è una serie geometrica con rapporto $1/z$ convergente per $|1/z| < 1$. Il ROC è perciò l'esterno del cerchio nel piano complesso con raggio $R = 1$. Abbiamo:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

8.3 Proprietà

Vediamo le principali proprietà della Trasformata Zeta.

1. Linearità

$$\mathcal{Z}(a \cdot \{f_k\} + b \cdot \{g_k\}) = a \cdot \mathcal{Z}(\{f_k\}) + b \cdot \mathcal{Z}(\{g_k\}) \quad (8.16)$$

dove per definizione

$$a \cdot \{f_k\} = \{a \cdot f_0, a \cdot f_1, a \cdot f_2, \dots\} \quad (8.17)$$

2. Traslazione temporale

Dalla sequenza $\{f_n\}$, definiamo una nuova sequenza:

$$\{f_{n-m}\} = \{\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{m \text{ times}}, f_0, f_1, f_2, \dots\}$$

Allora vale:

$$\mathcal{Z}(\{f_{n-m}\}) = z^{-m} \cdot \mathcal{Z}(\{f_n\}) \quad \text{per } m \geq 0$$

Se $\mathcal{Z}(\{f_n\}) = F(z)$, allora

3. Scaling nel dominio z

$$\mathcal{Z}(a^n \{f_n\}) = F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (8.18)$$

4. Derivata nel dominio z

$$\mathcal{Z}(n \{f_n\}) = -z \frac{d}{dz} F(z) \quad (8.19)$$

5. Convoluzione

La *convoluzione* di due sequenze $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ è definita da:

$$\{f_n * g_n\} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_{n-l}$$

La trasformata \mathcal{Z} di $\{f_n * g_n\}$ è

$$\mathcal{Z}(\{f_n * g_n\}) = \mathcal{Z}\left(\sum_{l=0}^{\infty} f_l \cdot g_{n-l}\right) = F(z) \cdot G(z)$$

dove $F(z)$ e $G(z)$ sono le trasformate \mathcal{Z} di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$.

8.4 La trasformata Zeta inversa

In generale, data la trasformata $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$ e il ROC corrispondente, il calcolo della sequenza $\{f_k\}$ che genera $F(z)$ diventa unica e si calcola mediante il seguente integrale complesso:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz \quad (8.20)$$

dove γ è un contour appartenente al ROC di $F(z)$.

Nella pratica, si incontrano spesso trasformate \mathcal{Z} che possono essere scritte come *funzioni razionali* di z . Ci limiteremo quindi a quei casi, vale a dire:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} = \frac{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0}{z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_0} \quad (8.21)$$

Abbiamo

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0 = (z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} \quad (8.22)$$

Comparando tutti i coefficienti dei termini z^{n-k} , si ottiene:

$$f_k + b_{n-1}f_{k-1} + \dots + b_0f_{k-n} = a_{n-k} \quad (8.23)$$

e perciò

$$f_k = a_{n-k} - b_{n-1}f_{k-1} - b_{n-2}f_{k-2} - \dots - b_0f_{k-n} \quad (8.24)$$

dove per definizione $f_i = 0$ and $a_i = 0$, $i < 0$. Ricorsivamente, siamo quindi in grado di ricostruire la sequenza $\{f_k\}$.

Esempio 8.6 Consideriamo la seguente trasformata \mathcal{Z}

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (8.25)$$

Vogliamo ricostruire il segnale, supponendo che sia causale.

Soluzione: Si ha

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots \quad (8.26)$$

and $\{f_k\} = \{1, 3/2, 7/4, 15/8, \dots\}$.

Cosa succede se supponiamo per (8.25) che il segnale è anti-causale? Dobbiamo sviluppare in serie di potenze con esponente positivo:

$$F(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1} = 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + \dots \quad (8.27)$$

e $\{f_k\} = \{\dots, 30, 14, 6, 2, 0, 0\}$.

L'esempio precedente mostra come risolvere ricorsivamente il problema. Il metodo più diretto è però quello di riportarsi a frazioni semplici come l'espressione (8.10) riconducibili facilmente a sequenze geometriche. Vediamo come procedere.

Fattorizzando (8.25), si ottiene:

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{z})(1 - \frac{1}{2z})}. \quad (8.28)$$

Scomponendo in somma di frazioni semplici, abbiamo:

$$F(z) = 2 \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{z})} - \frac{1}{(1 - \frac{1}{2z})}. \quad (8.29)$$

Utilizzando la formula (8.10) per la successione causale con $a = 1$ e $a = 1/2$, si può quindi scrivere che:

$$f_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \{1, 3/2, 7/4, 15/8, \dots\} \quad (8.30)$$

Per la successione anticausale, con $n < 0$, si ha:

$$f_n = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, \quad (8.31)$$

e sostituendo n con $-n$, si ottiene $2^n - 2$ ponendo $n \geq 1$. Da cui:

$$\{f_{-1}, f_{-2}, f_{-3}, \dots\} = \{0, 2, 6, 14, 30, \dots\} \quad (8.32)$$

esattamente come nell'esempio.

8.5 Equazioni alle differenze finite

Data una sequenza $\{f_n\}$, la *differenza finita prima* della sequenza è data da

$$\{f_n\} - \{f_{n-1}\} = \{f_0, f_1 - f_0, f_2 - f_1, \dots\} \quad (8.33)$$

dove $f_{-1} = 0$ per definizione.

La trasformata \mathcal{Z} della differenza prima è:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\{f_n\} - \{f_{n-1}\}) &= (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}(\{f_n\}) \\ &= \frac{z - 1}{z} \cdot \mathcal{Z}(\{f_n\}) \end{aligned}$$

La *differenza finita seconda* è data da

$$(\{f_{n+1}\} - \{f_n\}) - (\{f_n\} - \{f_{n-1}\}) = \{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}\} \quad (8.34)$$

e la trasformata \mathcal{Z} è data da

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}\}) &= (z - 2 + z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}(\{f_n\}) \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1}{z} \cdot \mathcal{Z}(\{f_n\})\end{aligned}$$

Un'equazione alle differenze finite di ordine n è un sistema che deve essere soddisfatto da una sequenza incognita $\{y_k\}$. L'equazione

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+(n-1)} + \dots + a_0y_k = b_nu_{k+n} + b_{n-1}u_{k+(n-1)} + \dots + b_0u_k \quad (8.35)$$

deve essere soddisfatta per ogni $k \in \mathbb{N}$. La sequenza $\{y_k\}$ è chiamata *output*, la sequenza $\{u_k\}$ è detta *input*.

In molti casi si hanno delle equazioni a differenze finite di primo o secondo ordine, che mettono in relazione y_n , y_{n+1} e y_{n+2} . Questa relazione è vincolata da condizioni iniziali di cui bisogna tener conto quando si procede con la trasformata zeta dell'intera equazione, poiché le tre sequenze vanno riportate alla sola funzione incognita $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$ e non basta soltanto traslarle con l'opportuna potenza di z . A questo proposito mostriamo come procedere calcolando la trasformata di y_{n+1} .

$$\mathcal{Z}(\{f_{n+1}\}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \cdot z^{-(n+1)}$$

Procedendo alla sostituzione $m = n + 1$ nella sommatoria ($n = m - 1$), si ottiene:

$$\mathcal{Z}(\{f_{n+1}\}) = z \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cdot z^{-m}. \quad (8.36)$$

La sommatoria nell'espressione (8.36) è $F(z)$ a cui manca il primo termine ($m = 0$). Perciò possiamo riscrivere l'equazione (8.36) come:

$$\mathcal{Z}(\{f_{n+1}\}) = z \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot z^{-m} - f_0 \right) = z(F(z) - f_0). \quad (8.37)$$

Si procede in modo analogo per la trasformata di y_{n+2} :

$$\mathcal{Z}(\{f_{n+2}\}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot z^{-n} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \cdot z^{-(n+2)},$$

da cui si ricava che:

$$\mathcal{Z}(\{f_{n+2}\}) = z^2 \left(\sum_{m=2}^{\infty} f_m \cdot z^{-m} \right) = z^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot z^{-m} - f_0 - z^{-1}f_1 \right) \quad (8.38)$$

$$= z(zF(z) - zf_0 - f_1). \quad (8.39)$$

$$(8.40)$$

Vediamo come risolvere un'equazione alle differenze finite di secondo ordine, che descrive una successione di numeri interi.

Esempio 8.7 Una sequenza x_n è definita dalla seguente equazione:

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \text{ dove } x_0 = -2, x_1 = 2.$$

Calcolare la corrispondente trasformata Zeta $X(z)$ della sequenza x_n . Trovare il termine n -esimo esplicito x_n .

Soluzione: Portiamo tutti i termini a sinistra e calcoliamo la trasformata Zeta dell'equazione:

$$\mathcal{Z}(x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n) = 0.$$

Utilizzando l'equazione (8.36) e (8.38), si ottiene:

$$z(zX(z) - zx_0 - x_1) - 4z(X(z) - x_0) + 3X(z) = 0.$$

e sostituendo i valori iniziali $x_0 = -2$ e $x_1 = 2$:

$$(z^2 - 4z + 3)X(z) = -2z^2 + 10z = -2z(z - 5).$$

Perciò:

$$X(z) = \frac{-2z(z - 5)}{(z - 3)(z - 1)}.$$

Dato che $z/(z - a)$ è la trasformata Zeta di a^n , risulta più semplice espandere in frazioni semplici l'espressione $X(z)/z$, per poi rimoltiplicare e ottenere direttamente la sequenza cercata. Quindi:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-2(z - 5)}{(z - 3)(z - 1)} = \frac{A}{z - 3} + \frac{B}{z - 1}.$$

Un semplice calcolo porta a $A = 2$ e $B = -4$ e la soluzione finale per la trasformata Zeta della sequenza è:

$$X(z) = 2\frac{z}{z - 3} - 4\frac{z}{z - 1}.$$

L'antitrasformata si esegue quindi direttamente ottenendo la sequenza: $x_n = 2 \cdot 3^n - 4$.

8.5.1 Un semplice esempio di discretizzazione

Risolviamo un semplice esempio come illustrazione del metodo. Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$\frac{df}{dt} = 1, \quad f(0) = 0$$

Vogliamo risolverla con differenze finite e trasformata \mathcal{Z} .

La soluzione esatta è ovviamente $f(t) = t$. Input di questa equazione $u(t) = 1$, scriviamo $f_k = f(k \cdot T)$ per $T > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Approssimiamo la derivata con la differenza prima:

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{T} = 1 .$$

Abbiamo $u_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Applicando la trasformata \mathcal{Z} , otteniamo:

$$\frac{(z-1)}{T} \cdot \mathcal{Z}(\{f_k\}) = \mathcal{Z}(\{1, 1, 1, \dots\}) = \mathcal{Z}(\{u_k\})$$

Sappiamo che:

$$\mathcal{Z}(\{u_k\}) = \frac{z}{z-1} \quad (8.41)$$

e l'equazione diventa:

$$\mathcal{Z}(\{f_k\}) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2} \quad (8.42)$$

Per trovare la trasformata inversa, si deve usare la proprietà di derivazione data dall'equazione (8.19). Infatti:

$$\mathcal{Z}(nu_k) = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (8.43)$$

e otteniamo direttamente che $f_n = n \cdot T$.

Utilizzando invece il metodo di confronto visto nella sezione (8.4), si procede come segue:

$$T \cdot z = (z^2 - 2z + 1)(f_0 + \frac{f_1}{z} + \dots)$$

In questo caso abbiamo $n = 2$ e quindi:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, & a_1 &= T, & a_0 &= 0, & a_i &= 0 \quad \forall i \geq 3 \\ b_2 &= 1, & b_1 &= -2, & b_0 &= 1, & b_i &= 0 \quad \forall i \geq 3 \end{aligned}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} f_0 &= a_2 = 0 \\ f_1 &= a_1 - b_1 \cdot 0 = T \\ f_2 &= a_0 - b_1 \cdot f_1 - b_0 \cdot f_0 = 2T \end{aligned}$$

In generale se $f_{n-1} = (n-1) \cdot T$ e $f_n = n \cdot T$ abbiamo

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= 0 + 2 \cdot f_n - 1 \cdot f_{n-1} \\ &= 2n \cdot T - n \cdot T + T \\ &= (n+1) \cdot T \end{aligned}$$

La soluzione di questa equazione alle differenze finite è proprio il campionamento della soluzione esatta! Questo non è ovviamente sempre il caso.

8.5.2 Generalizzazione della risoluzione

La generalizzazione della procedura vista negli esempi precedenti segue quella vista con le trasformate di Laplace per le equazioni differenziali: Trascrivendo l'equazione (8.35) traslata partendo dall'indice n , abbiamo

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j} \quad (8.44)$$

Ponendo $a = 1$ senza perdere di generalità, si può anche scrivere:

$$y_n = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j} - \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k} \quad (8.45)$$

Questa forma dell'equazione consente di visualizzare il fatto che l'uscita al tempo attuale y_n è funzione del valore dell'uscita y_{n-k} a N tempi precedenti, dell'ingresso attuale x_n e dei precedenti M valori x_{n-j} .

La risoluzione segue la seguente procedura. Dapprima si applica \mathcal{Z} a entrambi i lati dell'equazione (8.35) e usando le proprietà di linearità e traslazione temporale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k}\right) &= \mathcal{Z}\left(\sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}\right) \\ Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} &= X(z) \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} \end{aligned}$$

dato che $\mathcal{Z}(\{y_n\}) = Y(z)$ e $\mathcal{Z}(\{x_n\}) = X(z)$. La funzione di transfer $H(z)$ definita da

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}(\{y_n\})}{\mathcal{Z}(\{x_n\})} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8.46)$$

diventa:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M z^{-j} b_j}{\sum_{k=0}^N z^{-k} a_k} = \frac{b_0 + z^{-1}b_1 + z^{-2}b_2 + \dots + z^{-M}b_M}{a_0 + z^{-1}a_1 + z^{-2}a_2 + \dots + z^{-N}a_N} . \quad (8.47)$$

Finalmente, la sequenza $\{y_n\}$ può essere calcolata con:

$$\{y_n\} = \mathcal{Z}^{-1}(Y(z)) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z) \cdot X(z)) . \quad (8.48)$$

Esempio 8.8 Risolvere la seguente equazioni alle differenze finite:

$$y_n - \frac{5}{6}y_{n-1} + \frac{1}{6}y_{n-2} = 3x_n - 2x_{n-1}$$

dove $y_{-1} = y_{-2} = 0$ e la sequenza $x_n = (\frac{1}{4})^n u_n$

Soluzione: Usando la formula (8.47) con $M = 1$ e $N = 2$, abbiamo $a_0 = 1$, $a_1 = -5/6$, $a_2 = 1/6$, $b_0 = 3$ e $b_1 = -2$. Quindi possiamo scrivere:

$$H(z) = \frac{3 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} .$$

Dato che $X(z) = z/(z - 1/4)$, si ottiene:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z(3 - 2z^{-1})}{(z - \frac{1}{4})(1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2})} = \frac{z^2 (3z - 2)}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}$$

L'espansione in frazioni semplici porta a:

$$Y(z) = 24 \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - 6 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 15 \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

da cui si ottiene la soluzione:

$$y_n = 24 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 15 \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

Bisogna notare che anche per la trasformazione delle sequenze y_{n-1} oppure di y_{n-2} , per limitarci ai primi due casi, si deve tenere conto delle condizioni iniziali se queste sono diverse da zero. Il calcolo va svolto in modo analogo a quanto visto nelle equazioni (8.37) e 8.38. Lasciamo come esercizio la dimostrazione dei due risultati seguenti:

$$\mathcal{Z}(\{y_{n-1}\}) = y_{-1} + z^{-1}Y(z) \quad , \quad \mathcal{Z}(\{y_{n-2}\}) = y_{-2} + z^{-1}y_{-1} + z^{-2}Y(z) . \quad (8.49)$$

Esercizi

Negli esercizi che seguono, lo spazio di Hilbert $V = L^2[a, b]$ è definito come:

$$V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Il prodotto scalare complesso associato è il seguente:

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Spazi vettoriali

1. Mostra che i vettori $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 3, -1)$ e $e_3 = (5, 3, -2)$ non sono una base di \mathbb{R}^3 .

2. Sono dati i tre vettori $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ e $e_3 = (2, -1, -1)$.

a) Mostra che $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .

b) Scrivi il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, 5)$ come combinazione lineare dei vettori in B .

3. Per quale valore di k il vettore $\mathbf{v} = (1, -2, k)$ appartiene al sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori $\mathbf{x} = (3, 0, -2)$ e $\mathbf{y} = (2, -1, -5)$?

4. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = (1, -2, 5, -3), \quad v_2 = (2, 3, 1, -4), \quad v_3 = (3, 8, -3, -5)$$

a) Trova la dimensione di W ;

b) Scrivi una base ortogonale di W .

5. Trova le nuove coordinate del vettore $a = 5e_1 + e_2 + 14e_3$ rispetto alla base seguente:

$$v_1 = 3e_1 + e_2 + 5e_3, \quad v_2 = 2e_1 - e_2 + 4e_3, \quad v_3 = e_1$$

6. Consideriamo i seguenti tre polinomi di \mathcal{P}_2 definiti da

$$p_1(t) = t^2 - 3t + 2, \quad p_2(t) = -2t^2 + 3t - 1, \quad p_3(t) = t^2 - 2t + 1.$$

L'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ forma una base di \mathcal{P}_2 ?

7. Sia W lo spazio generato dai polinomi seguenti:

$$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$$

$$p_3 = t^3 + 6t - 5, \quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$$

Determina la dimensione di W e trova una base per questo spazio.

8. Si considerino i seguenti due vettori di R^3 :

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1)$$

- Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2 .
- Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 .
- Trovare una base ortonormale del sottospazio di R^3 generato dai vettori v_1 e v_2 .

9. Dati i polinomi $f(t) = t + 2$ e $g(t) = t^2 - 2t - 3$ in $L^2[0, 1]$, trova :

- $\|f\|$ e $\|g\|$
- $\langle f, g \rangle$

10. Consideriamo lo spazio vettoriale V delle funzioni lineari e un vettore in V dato dalla funzione

$$f_1(x) = 1 + x$$

La norma in V è data nel senso di $L^2[-1, 1]$

- a) Trova una funzione $f_2(x)$ ortogonale a $f_1(x)$.
 b) Trova la proiezione ortogonale della funzione $g(x) = \sin(\pi x/2)$ nel sottospazio V .

11. Lavorando nello spazio di Hilbert $L^2(0, \pi)$, determina l'elemento del sottospazio formato da $f(x), g(x)$ che ha la distanza minima dalla funzione $h(x)$ dove:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \sin(x), \quad h(x) = x$$

12. Consideriamo il sottospazio vettoriale V generato dalle seguenti due funzioni:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin(\pi x)$$

- a) Trova la norma delle due funzioni nel senso di $L^2 [0, 1]$.
 b) Trova la proiezione ortogonale della funzione $h(x) = \frac{1}{3}$ nel sottospazio V .

13. Consideriamo lo spazio vettoriale V generato dalle due funzioni seguenti:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x^2.$$

La norma in V è data nel senso di $L^2 [0, 2]$.

Trova la proiezione ortogonale della funzione $g(x) = e^x$ nel sottospazio V , scrivendola nella forma finale come combinazione lineare di f_1 e f_2 .

14. Verifica in modo esplicito con il calcolo che l'insieme:

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$$

è un insieme di vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $L^2([-\pi, \pi])$.

Soluzioni:

- 2) $\mathbf{v} = (-38/3)e_1 + 7e_2 + (10/3)e_3$
 3) $k = -8$
 4) (a) $\dim=2$; (b) $(1, -2, 5, -3)$ e $(5, 11, -2, -9)$

-
- 5) $(2, 1, -3)$
- 6) No, non formano una base.
- 7) $\dim=2$
- 8) (a) $\sqrt{6}, \sqrt{3}$; (b) $(4/3, 4/3, 4/3)$; (c) $\{1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}, \{-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\}$
- 9) (a) $\sqrt{19/3}$; $\sqrt{203/15}$; (b) $-37/4$
- 10) (a) $f_2(x) = 1 - 3x$ e tutti i suoi multipli; (b) $g_\perp(x) = 12x/\pi^2$
- 12) (a) $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{2}$; (b) $(3(\pi^2 - 8)x + 2\pi \sin \pi x)/6(\pi^2 - 6)$
- 13) $\frac{15}{64}(e^2 - 1)x^2 + \frac{3}{16}(e^2 - 1)$
-

Serie di Fourier

1. Calcola i coefficienti della serie di Fourier della funzione seguente:

$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

2. Scrivere la serie di Fourier della funzione periodica definita in $[-1, 1)$ da $f(x) = 1 - x$.
-

3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica $f(x) = x^2$ definita in $[0, 2\pi)$. Utilizzando la serie trovata, dimostrare che

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

4. E' data la seguente funzione periodica definita in $[-\pi, \pi]$:

$$f(t) = t^3 + 2$$

- a) Fai uno schizzo della funzione nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$
 - b) Calcola i coefficienti a_k e b_k della serie di Fourier di $f(t)$.
 - c) Esplicita i primi tre termini ($k = 0, 1, 2$) della serie stessa. Cosa noti?
-

5. La funzione $g(t)$ definita dalla formula seguente:

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ 2 & \text{if } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

- a) Calcola i coefficienti della serie di Fourier di $g(t)$ ed esplicita i primi tre termini ($k = 0, 1, 2$) della serie stessa
 - b) Commenta il risultato. Che cosa hanno di particolare i coefficienti ottenuti?
-

6. La funzione $f(t)$ è definita dalla formula seguente:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

- a) Calcola la serie di Fourier di $f(t)$ con i coefficienti reali a_k e b_k .
 b) Esplicita i primi quattro termini che contribuiscono alla serie stessa
-

7. La funzione $g(x)$ è definita dalla formula seguente:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{se } 0 < x < 5 \end{cases}$$

- a) Sapendo che la funzione è estesa per periodicità su tutto \mathbb{R} , calcola i coefficienti della serie di Fourier di $g(t)$ e scrivi la corrispondente serie di Fourier
 b) Come dovrebbe essere definita la funzione $g(x)$ in $x = \pm 5$ e $x = 0$ affinché la serie di Fourier converga a $g(x)$ sull'intervallo $-5 \leq x \leq 5$?
-

8. La funzione $f(x) = e^{|x|}$ è definita nell'intervallo $[-2, 2]$ e prolungata per periodicità.

- a) Traccia un grafico della funzione nell'intervallo $[-6, 6]$
 b) Calcola i coefficienti della serie di Fourier di $f(x)$
 c) Esplicita i primi tre termini ($k = 0, 1, 2$) della serie stessa
-

9. È data la seguente funzione periodica $f(x)$ di periodo $T = 2\pi$ definita nell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ e^x + 2 & \text{se } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

- a) Fare uno schizzo della funzione da $-\pi$ a 3π .
 b) Calcolare la forma reale dei coefficienti di Fourier a_k e b_k della funzione $f(x)$ semplificando il più possibile la loro espressione.
 c) Scrivere esplicitamente la corrispondente serie di Fourier fino all'ordine $k = 2$.
-

10. Il polinomio trigonometrico reale si può anche scrivere nella forma seguente (detta anche *forma polare*):

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(kx + \theta_k)$$

Trova le espressioni di A_k e θ_k in funzione di a_k e b_k .

Soluzioni:

- 1) $a_k = \delta_{k1} \cdot \sqrt{3}/2$; $b_k = \delta_{k1} \cdot 1/2$
 - 2) $f(x) \sim 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sin \pi k x}{\pi k} \right)$
 - 4) (a) $a_0 = 4$, $a_k = 0$ per $k \geq 1$; $b_k = 2(-1)^k (6 - k^2 \pi^2)/k^3$
 - 6) (a) $a_0 = 2/\pi$, $a_k = (1/\pi)(1 + (-1)^k)/(1 - k^2)$; $b_k = 1/2 \delta_{k1}$; (b) $S_4(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{3\pi} \cos 2x - \frac{2}{15\pi} \cos 4x$
 - 8) $a_0 = (e^2 - 1)/2$, $a_k = (e^2(-1)^k - 1)/(1 + (\pi k/s)^2)$.
 - 9) (b) $a_0 = 2$, $a_k = 0$ per $k \geq 1$; $b_k = \frac{2}{k\pi} \left\{ \frac{k^2}{k^2+1} (1 - e^\pi (-1)^k) + (1 - (-1)^k) \right\}$, $k \geq 1$ (c)
 $S_f(x) = 1 + \frac{e^\pi + 5}{\pi} \sin x + \frac{4(1 - e^\pi)}{5\pi} \sin 2x$.
-

Trasformata di Fourier

1. Usando le proprietà fondamentali viste in classe, trova le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

- a) $x(t) = \sin(4t)$
- b) $x(t) = 2 \cos(4t + \frac{\pi}{5})$
- c) $x(t) = \sin(\omega_0 t + \phi)$
- d) $x(t) = \sin^2(\omega_0 t)$
- e) $x(t) = (\sin t)/t$
- f) $x(t) = t \cdot e^{-at} u(t)$
- g) $x(t) = t^2 \cdot e^{-2t} u(t)$
- h) $x(t) = 1/(t^2 + 2t + 5)$
- i) $x(t) = t \cdot e^{-|t|}$
- j) $x(t) = e^{3it} \chi_{[-2,0]}$
- k) $x(t) = e^{it}(u(t) - u(t - 4))$

2. Considera le seguenti due funzioni

$$f(t) = 1 - t^2, \quad -1 < t < 1, \quad 0 \text{ altrimenti}$$

$$g(t) = e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \text{ altrimenti.}$$

Trova le trasformate di Fourier di $f(t)$ e $g(t)$.

3. Utilizzando la trasformata di Fourier, trova la funzione $y(t)$ che è soluzione della seguente equazione integrale:

$$y(t) = r(t) + \int_{-\infty}^{\infty} y(t') r(t - t') dt'$$

con $r(t) = e^{-3|t|}$

4. La relazione seguente è nota come formula di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) G(it) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(it) g(t) dt ,$$

dove F e G sono le trasformate di Fourier di f e g , vale a dire $G = \widehat{g}$ e $F = \widehat{f}$.

Consideriamo le funzioni:

$$f(t) = 1 - t^2, \quad -1 < t < 1, \quad \text{zero altrove}$$

$$g(t) = e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad \text{zero altrove.}$$

- a) Trova le trasformate di Fourier di $f(t)$ e $g(t)$.
b) Usando la formula di Parseval, calcola il seguente integrale:

$$\int_0^\infty \frac{4e^{-t}}{t^3} (t \cosh(t) - \sinh(t)) dt$$

-
5. Risolvi la seguente equazione integrale utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) f(t-s) ds = \frac{1}{t^2 + 1}$$

-
6. Usando la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-a|x|}$ e l'identità di Parseval, calcolare l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

DFT e FFT

1. Calcola la IDFT a 4 punti del segnale discreto c_k dato da:

$$c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$$

.

2. Sono dati i tre punti

$$P_0 (0 , 2) ; P_1 (\frac{2\pi}{3} ; -1) ; P_2 (\frac{4\pi}{3} , 3) .$$

Trova il polinomio trigonometrico interpolante passante per i tre punti, usando la sostituzione diretta e la DFT nel complesso.

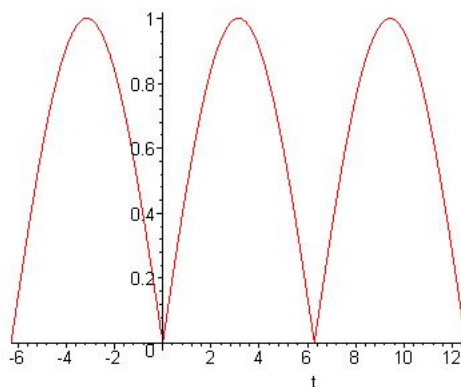
3. Considera il segnale dato dalla funzione

$$f(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3})$$

Campiona la funzione in 4 punti nel periodo da 0 a 2π e calcola la DFT di questi punti. Cosa noti?

4. Siano $y = \{15, 6, 9, -8\}$ dei valori campionati di un segnale agli istanti $t_k = \pi/2 \cdot k$ per $k = 0, 1, 2, 3$. Calcola la DFT del segnale campionato.

5. Consideriamo la funzione $f(t) = |\sin(t/2)|$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.



- a) Campiona la funzione con 4 punti equidistanti nell'intervallo dato e ricostruisci l'interpolazione del segnale usando coefficienti DFT.

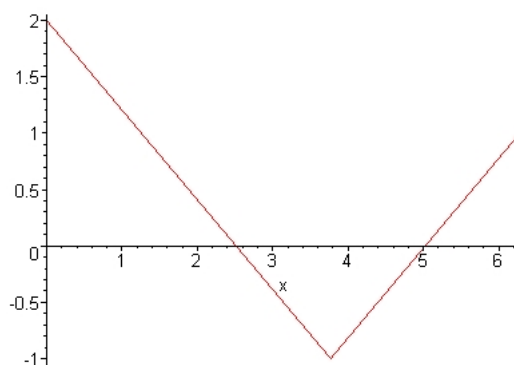
- b) Calcola i primi tre termini ($k = 0, 1, 2$) della serie di Fourier $f(t)$ e confronta i grafici nel periodo

Suggerimento: $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ vale a dire $\cos(t) = 2\cos^2(t/2) - 1$

6. Considera la funzione

$$f(t) = \frac{5}{2} \left| \frac{x}{\pi} - \frac{6}{5} \right| - 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.



- a) Campiona la funzione in 5 punti equidistanti nell'intervallo tra 0 e 2π .
- b) Determina l'insieme $\{(\omega_5)^k, k = 0, 1, \dots, 4\}$ delle radici-quinte dell'unit sul cerchio unitario complesso, dove le coordinate reali della campionatura vengono mappate.
- c) Ricostruisci l'interpolazione trigonometrica reale del segnale usando la DFT.
-
7. Siano $y = \{0, 1, -1, -2, 2, 3, 0, -2\}$ i valori campionati di un funzione. Il campionamento eseguito nei punti $t_k = \frac{2\pi}{n}k$ per $k = 0, \dots, n-1$, con $n = 8$.
- a) Calcola la DFT del segnale con l'algoritmo FFT visto in classe utilizzando esclusivamente le y_k date. Esplicita tutti i passaggi eseguiti per giungere ai valori delle c_k .
- b) Calcola i coefficienti a_k e b_k ($k = 0, \dots, 4$) e scrivi la corrispondente interpolazione trigonometrica reale del segnale.
-

8. Considera la funzione 2π -periodica data da

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Trova la FFT con $N = 8$

9. Siano $y = \{4, 0, 2, -2, 0, 2\}$ i valori campionati di un funzione. Il campionamento eseguito nell'intervallo $[0, 2\pi]$, precisamente nei punti $t_k = \frac{2\pi}{n}k$ per $k = 0, \dots, n-1$, con $n = 6$.
- a) Scrivi nella forma cartesiana $a + ib$ l'insieme $\{(\omega_6)^k, k = 0, 1, \dots, 5\}$ delle radici-seste dell'unit sul cerchio unitario complesso, dove le coordinate reali della campionatura vengono mappate.
 - b) Scrivi esplicitamente le prime quattro righe della matrice F_6 per la quale $c = \frac{1}{6}F_6y$, dove il vettore c rappresenta i coefficienti DFT delle coordinate y .
 - c) Calcola esplicitamente i coefficienti c_0, c_1, c_2 e c_3 usando gli elementi della matrice F_6 calcolati nel punto (b). Come puoi calcolare c_4 e c_5 ?
-

Trasformata di Laplace

1. Dimostra la proprietà di scaling della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

e calcola $\mathcal{L}(\sin(3t))$ e $\mathcal{L}(\cos(6t))$.

2. Trova le trasformate di Laplace delle seguenti funzioni:

a) $(t^2 + 1)^2$

b) $t^2 e^{-3t}$

c) $e^{-4t} \sin(3t)$

d) $\sin(t - 3) u(t - 3)$

e) $(t + 1)^2 e^t$

f) $(e^t + \sin t)^2$

g) $(\sin 2t)/t$

3. Trova $\mathcal{L}(f(t))$ dove $f(t)$ è definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. Trova la trasformata di Laplace inversa \mathcal{L}^{-1} delle seguenti funzioni:

a) $\frac{s}{(s^2 + 1)^2}$; b) $\frac{1}{s(s^2 + 4)}$;

c) $e^{-3s} \left(\frac{s+1}{s^3} \right)$; d) $\frac{s+1}{s^2 + 6s + 25}$;

e) $\left(\frac{s^2}{(s+3)^3} \right)$; f) $\frac{6}{s^3 + 8}$.

5. Calcola i seguenti integrali usando la trasformata di Laplace:

a) $\int_0^\infty t e^{-3t} \cos(2t) dt$.

6. b)

$$b) \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} \sin(t) dt .$$

7. Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvi le seguenti equazioni differenziali per $y(t)$:

$$\begin{aligned} a) \quad & y'' + 2y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ b) \quad & y'' - 3y' - 2y = 6 \quad , \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$$

8. Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvi i seguenti sistemi di equazioni differenziali per $x(t)$ e $y(t)$:

a)

$$\begin{cases} x'' - x + 5y' &= t \\ y'' - 4y - 2x' &= -2 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

b)

$$\begin{cases} x' + x + 4y &= 10 \\ x - y' - y &= 0 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 4$, $y(0) = 3$.

9. Risolvi la seguente equazione differenziale utilizzando la trasformata di Laplace:

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 18t$$

dove $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

10. Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvi la seguente equazione differenziale per $y(t)$:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3 \frac{d}{dt}(u(t) e^t) , \quad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 0 .$$

dove $u(t) = 1$ per $t \geq 0$ e 0 altrimenti (funzione step).

11. Risolvi la seguente equazione integro-differenziale utilizzando la trasformata di Laplace:

$$y'(t) + y(t) - \sin(t) = 1 + 2 \int_0^t (t-z)y(z)dz$$

dove $y(0) = 1$.

12. a) Calcola il seguente integrale usando la trasformata di Laplace:

$$\int_0^{\infty} t e^{-3t} \cos(2t) dt .$$

- b) E' data la seguente funzione:

$$F(s) = \frac{6}{s^3 + 8} .$$

Trova la trasformata di Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

13. Utilizzando la trasformata di Laplace, risolvi il seguente sistema integro-differenziale per le funzioni $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{cases} y'(t) + 3x(t) &= 0 \\ x(t) - \sin(t) &= \int_0^t \cos(t-z)y(z)dz \end{cases}$$

con $y(0) = 3$.

Sol: $x(t) = 3 \cos 2t$; $y(t) = 2 \sin 2t$.

14. Risolvi la seguente equazione differenziale utilizzando la trasformata di Laplace:

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = t e^{-t}$$

dove $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$.

Soluzioni:

1) $3/(s^2 + 9)$; $s/(s^2 + 36)$

2)

a) $(s^4 + 4s^2 + 24)/s^5$

b) $2/(s+3)^3$

c) $(s+4)/(s^2 + 8s + 25)$

d) $e^{-3s}/(s^2 + 1)$

e) $1/(s-1) + 2/(s-1)^2 + 2/(s-1)^3$

f) $1/(s-2) + 1/(s^2 - 2s + 2) + 1/2s - 1/2 \cdot s/(s^2 + 4)$

g) $\pi/2 - \arctan^{-1}(s/2)$

3) $f(x) \sim 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\sin \pi k x}{\pi k} \right).$

4) $a_0 = (e^2 - 1)/2$, $a_k = (e^2(-1)^k - 1)/(1 + (\pi k/s)^2).$

5) (b) $a_0 = 2$, $a_k = 0$ per $k \geq 1$; $b_k = \frac{2}{k\pi} \left\{ \frac{k^2}{k^2+1} (1 - e^\pi (-1)^k) + (1 - (-1)^k) \right\}$, $k \geq 1$; (c)
 $S_f(x) = 1 + \frac{e^\pi + 5}{\pi} \sin x + \frac{4(1 - e^\pi)}{5\pi} \sin 2x.$

Trasformata Zeta

1. Mostra che la trasformata Zeta inversa della funzione

$$F(z) = \frac{1}{z - a}$$

data dalla sequenza

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{quando } n = 0 ; \\ a^{n-1} & \text{quando } n > 0 \end{cases}$$

2. E' data la seguente trasformata Zeta:

$$\frac{2(4z^2 - z)}{8z^2 - 2z - 1}$$

Trova la antitrasformata e scrivi i primi tre termini per:

- a) la successione causale
 - b) la successione anticausale
-

3. Calcola la anti-trasformata Zeta delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{2z^2 - 3z}{z^2 - 3z - 4} \quad , \quad \text{b) } \frac{3z^2 + 5}{z^4} \\ \text{c) } & \frac{2z^2 - z}{2z^2 - 2z + 2} \quad , \quad \text{d) } \frac{2z^2 + z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

4. Due sequenze y_n possono essere espresse con le seguenti equazioni a differenze finite:

$$\begin{aligned} \text{a) } & y_{n+1} = 5 y_n + 5^{n+1}, & \text{dove } y_0 = 0 \\ \text{b) } & y_n = 7 y_{n-1} - 10 y_{n-2}, & \text{dove } y_{-1} = 16, y_{-2} = 5. \end{aligned}$$

Trova le corrispondenti trasformate $Y(z)$ e il relativo termine ennesimo esplicito y_n .

5. Considera la seguente equazione a differenze finite:

$$f_{n+1} + f_n = 2^{n+1} - 2^{n-1}u(n-1)$$

con le condizioni iniziali $f_0 = 1$, dove $u_{n-1} = \{0, 1, 1, 1, \dots\}$. Trova $\{f_n\}$ usando la trasformata \mathcal{Z} .

6. Calcola la trasformata Zeta inversa **anti**-causale della seguente funzione:

$$X(z) = \frac{z^3 - 20z^2 + 7z + 6}{z^2 - 5z + 6}$$

7. Risolvi la seguente equazione alle differenze finite utilizzando la trasformata \mathcal{Z}

$$y_{n+2} + 2y_n = 0$$

sapendo che $y_0 = 1$ e $y_1 = \sqrt{2}$.

8. Risolvi la seguente equazione alle differenze finite, utilizzando la trasformata \mathcal{Z}

$$10y_n - 7y_{n+1} + y_{n+2} = 16n$$

sapendo che $y_0 = 6$ e $y_1 = 2$.

9. Considera la seguente equazione alle differenze finite:

$$2f_{n+3} - 3f_{n+2} + f_n = 0$$

dove $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e $f_2 = -4$.

- Trova la corrispondente trasformata Zeta $F(z)$ associata alla successione
 - Trova l'espressione esplicita per f_n antitrasformando
 - Calcola il valore di f_5 e verificalo direttamente con la formula trovata per f_n
-

10. Trova l'espressione esplicita del termine f_n per la famosa successione di Fibonacci $\mathcal{F} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$, definita dai valori iniziali $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, dove il successivo è la somma dei due numeri precedenti.
-

11. Una sequenza espressa con la seguente equazioni alle differenze finite:

$$y_{k+2} - 3 y_{k+1} + 2 y_k = \delta_{k,0} + \delta_{k,1} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, 1 \\ 0 & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$$

con $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$.

- Calcola esplicitamente y_2, y_3 e y_4 , ponendo rispettivamente $k = 0, 1, 2$.
- Trova la corrispondente trasformata Zeta, vale a dire $Y(z)$.
- Trova l'espressione esplicita per y_k . Verifica il valore di y_4 e calcola direttamente y_{10} .

12. Risolvi la seguente equazione alle differenze finite, utilizzando la trasformata \mathcal{Z}

$$y_{n+1} + y_n = 2^{n+1} \quad , \quad y_0 = 1 \quad .$$

13. E' dato il seguente sistema di equazioni alle differenze finite per le sequenze x_n e y_n con le condizioni iniziali $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

$$\begin{cases} 2 x_{n+1} = \sqrt{2} (x_n - y_n) \\ 2 y_{n+1} = \sqrt{2} (x_n + y_n) \end{cases}$$

- Trova le trasformate $\mathcal{Z} X(z)$ e $Y(z)$ delle sequenze x_n e y_n .
- Con l'antitrasformata \mathcal{Z} , trova la forma esplicita delle sequenza in funzione di n .

14. E' data la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' - 2y = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Risolvi l'equazione utilizzando la Trasformata di Laplace.
- Approssima l'equazione differenziale con una equazione alle differenze finite e risolvi con la Trasformata Zeta, trovando l'espressione esplicita y_n . Poni come step di discretizzazione T , vale a dire $y_n = y(t_n)$, con $t_n = nT$.
- Calcola i primi 4 termini ($n = 0, 1, 2, 3$) della sequenza ottenuta nel punto b) ponendo lo step di discretizzazione a $T = 0.01$ e confrontali con la soluzione esatta del punto a) nei punti discretizzati ($t_n = n\dot{T}$).

15. Dimostra che valgono le seguenti relazioni per le trasformate Zeta delle sequenze traslate "in avanti" se le condizioni iniziali y_{-1} e y_{-2} sono diverse da zero:

$$\mathcal{Z}(\{y_{n-1}\}) = y_{-1} + z^{-1}Y(z) \quad , \quad \mathcal{Z}(\{y_{n-2}\}) = y_{-2} + z^{-1}y_{-1} + z^{-2}Y(z) \quad .$$

Soluzioni:

- 3) (a) $(-1)^n + 4^n$; (b) $3\delta_{n-2} + 5\delta_{n-4}$; (c) $\cos(n\pi/3)$; (d) $2 + 3n$
- 4) (a) $y_n = n \cdot 5^n$; (b) $y_n = 12 \cdot 2^n + 50 \cdot 5^n$.
- 5) $f_n = 2^n - 2^{n-1} u_{n-1}$.
- 6) $x_n = 2 \cdot 3^n u(-n-1) - 5 \cdot 2^n u(-n-1) + 2 \cdot \delta_n + 5 \cdot \delta_{n-1}$.
- 7) $y_n = (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}$.
- 8) $y_n = 2^{n+2} - 3 \cdot 5^n + 4n + 5$.