РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
Факультет физико-математических и естественных наук

И. С. Зарядов, Д. В. Козырев,
Т. А. Милованова, Р. В. Разумчик

«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике»

Российский университета дружбы народов

2013

УДК 519.2, 51.75

Утверждено
РИСО Учёного совета
Российского университета
дружбы народов

Зарядов И. С., Козырев Д. В., Милованова Т. А., Разумчик Р. В.
«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике»: Учеб. пособие. — М.: РУДН, 2013. — 116 с.: ил.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Математика», «Физика», «Радиофизика».

Оглавление

Глава 1. Классическое вероятностное пространство

1.1. Пространство элементарных исходов и операции над событиями

Определение. Элементарным исходом называется любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов называется **пространством элементарных исходов**.

Пространство элементарных исходов будем обозначать буквой Ω, а элементарный исход буквой ω, снабженной индексами, а тот факт, что множество Ω состоит из элементов $\omega_1, ..., \omega_n$ будем записывать в виде $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$.

Определение. Любой набор элементарных исходов, или, иными словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов, называется **событием**.

События будем обозначать прописными латинскими буквами, снабжая, если нужно, индексами: $A, B, C_1 ....$

Определение. Событие, состоящее из всех элементарных исходов (событие, которое обязательно происходит в данном опыте), называется **достоверным** и совпадает с пространством элементарных исходов Ω. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода (событие, которое никогда не происходит в данном опыте), называется **невозможным** и обозначается $\emptyset$.

Рассмотрим теперь основные операции над событиями:

1. **Пересечением (произведением)** двух событий A и B называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B, т.е. событие, состоящее из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A, и событию B. Пересечение событий A и B записывают следующим образом $C = A \cap B = AB$.

Определение. События A и B называются **несовместными (непересекающимися)**, если их пересечение является невозможным событием.

2. **Объединением (суммой)** событий A и B называется событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B, т.е. событие C, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A или B. Объединение событий A и B записывается в виде $C = A \cup B$.

Если события A и B несовместны, то вместо знака «$\cup$» используют знак «$+$».

3. **Разностью** событий A и B называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B, т.е. событие C, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат A и не принадлежат B. Разность событий A и B записывают в виде $C = A \setminus B$.

4. **Дополнением** события A называют событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Обозначают дополнение события A следующим образом $\bar{A}$.

Событие $\bar{A}$ называют также событием, **противоположным** событию A.

5. Событие A **включено** в событие B, если появление события A влечет за собой наступление события B, т.е. каждый элементарный исход события A является элементарным исходом события B. Тот факт, что событие A включено в событие B, записывают следующим образом $A \subset B$.

6. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу событий**, если для любых $i \neq j$ выполняется $A_i A_j = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Пример 1. Бросаются 4 монеты, результат — количество выпавших гербов и цифр. Нужно записать пространство элементарных исходов Ω и следующие события: $A = \{$число выпавших гербов равно числу цифр$\}$, $B = \{$число гербов — кратно двум$\}$, $C = \{$число цифр — нечётное$\}$, $D = \{$число гербов не менее числа цифр$\}$, $E = \{$число гербов не более 2-х$\}$, $F = \{$число цифр не менее одной$\}$.

Определить результаты следующих операций над событиями: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $(C \cup E) \setminus A$ и $\overline{F \setminus AB}$.

Решение. Пространство элементарных исходов Ω состоит из $n = 2^4 = 16$ элементарных исходов (на каждой монете может выпасть либо герб, либо цифра, всего монет — 4). Будем выпавший герб обозначать буквой **Г**, а цифру — буквой **Ц**.

Тогда пространство элементарных исходов Ω имеет вид: $\Omega = \{$ГГГГ, ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ, ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ, ЦЦЦГ, ГЦЦЦ, ЦГЦЦ, ЦЦГЦ, ЦЦЦЦ$\}$.

Событие A имеет вид $A = \{$ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ$\}$.

Событие $B = \{$число гербов — кратно двум$\}$ включает в себя как исходы события A, так и элементарный исход $\{$ГГГГ$\}$ (либо два герба, либо четыре), т.е. $B = \{$ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ, ГГГГ$\}$.

Событие $C = \{$число цифр — нечётное$\}$ состоит из тех исходов, в которые входит либо ровно одна цифра, либо ровно три цифры, т.е. $C = \{$ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ, ЦЦЦГ, ГЦЦЦ, ЦГЦЦ, ЦЦГЦ$\}$.

Событие $D = \{$число гербов не менее числа цифр$\}$ означает, что на 4-х подброшенных монетах число выпавших гербов либо больше, либо равно числу цифр, т.е. $D = \{$ГГГГ, ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ, ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ$\}$.

Событие $E = \{$число гербов не более 2-х$\}$ означает, что на 4-х монетах либо выпали все цифры, либо ровно один герб (и три цифры), либо два герба (и две цифры), таким образом событие имеет вид $E = \{$ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ, ЦЦЦГ, ГЦЦЦ, ЦГЦЦ, ЦЦГЦ, ЦЦЦЦ$\}$.

Наконец, последнее событие $F = \{$число цифр не менее одной$\}$ включает в себя все элементарные исходы из Ω за исключением одного исхода — ГГГГ.

Результатом объединения событий A и B является событие, состоящее из элементарных исходов события A или B, но так как все исходы события A являются исходами события B, то получаем $A \cup B = B$.

Результатом пересечения событий A и B является событие, состоящее из элементарных исходов, лежащих в событии A и B одновременно. Но так как все исходы события A лежат в событии B, то получаем $A \cap B = A$.

Разностью событий B и A является событие $B \setminus A$, состоящее только из тех исходов события B, которые не принадлежат A, т.е. $B \setminus A = \{$ГГГГ$\}$.

Определим число исходов для события $(C \cup E) \setminus A$. Событие $C \cup E = \{$ ЦЦЦЦ, ЦЦЦГ, ЦЦГЦ, ЦГЦЦ, ГЦЦЦ, ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ, ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ$\}$, а событие $(C \cup E) \setminus A$ означает, что нужно исключить те исходы, которые принадлежат событию A, т.е. $(C \cup E) \setminus A = \{$ ЦЦЦЦ, ЦЦЦГ, ЦЦГЦ, ЦГЦЦ, ГЦЦЦ, ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ$\}$.

Наконец, последнее событие $\overline{F \setminus AB}$ есть дополнение к разности событий F и AB. В нашем случае $\overline{F \setminus AB} = \overline{F \setminus A}$. Тем самым, сначала из исходов события F удаляем исходы события A, получаем событие $F \setminus A = \{$ГГГГ, ЦГГГ, ГЦГГ, ГГЦГ, ГГГЦ, ЦЦЦГ, ГЦЦЦ, ЦГЦЦ, ЦЦГЦ, ЦЦЦЦ$\}$. Для нахождения дополнения из всех элементарных исходов Ω удалим исходы события $F \setminus A$, получим $\overline{F \setminus AB} = \{$ЦЦГГ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ГЦГЦ, ГГЦЦ$\}$.

Задача 1. Пусть A, B и C - произвольные события. Если $AC = BC$, то верно, что события A и B совпадают? Ответ обосновать.

Задача 2. Пусть A, B и C - произвольные события. Если $A \cup C = B \cup C$, то верно, что события A и B совпадают? Ответ обосновать.

Задача 3. Заданы события A, $\bar{A}B$, $\overline{A \cup B}$ и $\emptyset$. Образуют ли они полную группу событий. Ответ обосновать.

Задача 4. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. $A_i = \{i\text{-ый студент решил задачу}\}$, $i = \overline{1;3}$. Выразите через события A_i следующие события:
1. $A = \{$все студенты решили задачу$\}$;
2. $B = \{$только первый студент решил задачу$\}$;
3. $C = \{$задачу решил хотя бы один студент$\}$;
4. $D = \{$задачу решил только один студент$\}$;
5. $E = \{$никто не решил задачу$\}$;
6. $F = \{$не более двух студентов решили задачу$\}$;
7. $G = \{$ровно два студента решили задачу$\}$;
8. $H = \{$из трёх студентов задачу не решил хотя бы один$\}$.

Задача 5. Из корзины, содержащей красные, жёлтые и белые розы, выбирается один цветок. Рассматриваются следующие события:
1. $A = \{$выбрана красная роза$\}$;
2. $B = \{$выбрана жёлтая роза$\}$;
3. $C = \{$выбрана белая роза$\}$.

Что означают события:
1. $\overline{A \cup B}$;
2. $\bar{A} \cup \bar{B}$;
3. $AB \cup C$

Задача 6. Рассматриваются события $A = \{$экзамен сдан$\}$, $B = \{$экзамен сдан на отлично$\}$. Что означают события:
1. $A \setminus B$;
2. $\overline{A \setminus B}$;
3. $A \setminus \bar{B}$.

Задача 7. На отрезке $[a; b]$ отмечаются две точки. Пусть x и y — координаты этих точек. Рассматриваются события:
1. $A = \{$вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая к правому$\}$;
2. $B = \{$расстояние между точками меньше половины длины отрезка$\}$.

Изобразить на плоскости xOy области, соответствующие событиям: Ω, A, B, AB, $A \setminus B$ и $A \cup B$.

Задача 8. Опыт: по плоской мишени прямоугольной формы $-2 < x < 2$, $-1 < y < 1$ производят выстрел. Рассматриваются события:
1. $A = \{$абсцисса точки попадания меньше ординаты $\}$;
2. $B = \{$произведение координат точки попадания неотрицательно $\}$;
3. $C = \{$сумма абсолютных величин координат точки попадания превышает 1$\}$.

Опишите пространство элементарных исходов. Опишите события. Изобразите все элементарные исходы и все исходы событий. Назовите пары несовместных событий.

Задача 9. Опыт: точка A случайным образом отмечается на отрезке OB длины 1. Рассматриваются события:
1. $C = \{$точка A ближе к точке O $\}$;
2. $D = \{$длина отрезка OA больше 0,7 $\}$.

Опишите пространство элементарных исходов. Опишите события. Изобразите все элементарные исходы и все исходы событий. Являются ли события совместными?

Задача 10. Опыт: три занумерованных шара раскладывают по трём ящикам (в каждом ящике может оказаться любое число шаров). Рассматриваются события:
1. $A = \{$первый ящик пустой $\}$;
2. $B = \{$в первом ящике шар 1 $\}$;
3. $C = \{$в каждом ящике по одному шару $\}$;
4. $D = \{$все шары в одном ящике $\}$.

Опишите пространство элементарных исходов. Опишите события. Назовите пары совместных событий.

Задача 11. Опыт: подбрасывание монеты 3 раза. Рассматриваются события:
1. $A = \{$выпало больше гербов, чем цифр $\}$;
2. $B = \{$выпала хотя бы одна цифра $\}$;
3. $C = \{$герб не появился ни разу $\}$;
4. $D = \{$герб выпал не менее, чем 2 раза подряд $\}$.

Опишите пространство элементарных исходов. Опишите события. Назовите пары совместных событий.

1.2. Классическое определение вероятности. Вычисление вероятности с помощью формул комбинаторики. Гипергеометрическая схема

Элементарные исходы в некотором опыте называют **равновозможными**, если в силу условий проведения опыта можно считать, что ни один из них не является объективно более возможным, чем другие. Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, называют **классической схемой**.

Определение (классическое определение вероятности). Вероятностью события A называют отношение числа n_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу n равновозможных элементарных исходов, т.е. $P(A) = \frac{n_A}{n}$.

Выпишем аксиомы (1–3) и основные свойства (4–8) вероятности:

1. Аксиома неотрицательности $P(A) \geq 0$.
2. Аксиома нормированности $P(\Omega) = 1$.
3. Аксиома сложения $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\emptyset) = 0$.
6. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.
7. $0 \le P(A) \le 1$.
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

При решении задач на классическую вероятность часто применяют формулы комбинаторики:

1. **Основная формула комбинаторики**. Пусть даны m групп элементов, причём i-я группа состоит из n_i элементов. Из каждой группы выбирают по одному элементу. Общее число N способов, с помощью которых можно осуществить указанный выбор определяется равенством $N = n_1 n_2 ... n_m$.

Теперь предположим, что имеется группа из n различных элементов и из этой группы нужно выбрать m элементов (без повторения).

2. Выборку, в которой не учитывается порядок выбора элементов, называют **сочетанием** (без повторения). Число сочетаний из n по m определяется формулой $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

3. Выборку, в которой учитывается порядок выбора элементов, называют **размещением** (без повторения). Число размещений из n по m определяется формулой $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

4. Размещение (без повторения) из n элементов по n называется **перестановкой**. Число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P(n) = n!$.

5. **Гипергеометрическая схема.** Пусть имеется $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ различных элементов, причем из них n_1 первого типа, n_2—второго типа,..., n_k—k-го типа. Случайным образом из этих элементов выбирают m элементов. Рассмотрим событие A, состоящее в том, что среди выбранных элементов окажется ровно m_1 элементов первого типа, m_2—второго типа,..., m_k—k-го типа. Рассмотренный способ выбора элементов называется **гипергеометрической схемой**, а вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}.$$

6. **Распределение по группам**. Пусть имеется n предметов и k групп. Число способов, которыми можно разложить все предметы по группам определяется формулой

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_k}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Пример 2. В условиях примера 1 найти вероятности событий A, B, C, D, E, F, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $(C \cup E) \setminus A$ и $\overline{F \setminus AB}$.

Решение. Пространство элементарных исходов Ω состоит из $n = 2^4 = 16$ элементарных исходов.

Событие A состоит из шести элементарных исходов, тогда $n_A = 6$, а вероятность события $P(A) = 6/16 = 0.375$.

Аналогично находим вероятности остальных событий (предлагается читателю найти самостоятельно и сверить свои результаты с ответом).

Ответ: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 7/16$, $P(C) = 1/2$, $P(D) = 11/16$, $P(E) = 11/16$, $P(F) = 15/16$, $P(A \cup B) = 7/16$, $P(A \cap B) = 3/8$, $P(B \setminus A) = 1/16$, $P((C \cup E) \setminus A) = 9/16$, $P(\overline{F \setminus AB}) = 3/8$.

Пример 3. Из коробки, в которой 6 синих, 4 чёрных и 5 красных ручек, случайно берут три. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$извлечены ручки одного цвета$\}$, $B = \{$извлечены ручки разных цветов$\}$, $C = \{$синих ручек больше$\}$.

Решение. Общее число элементарных исходов n_Ω определяется как число сочетаний $C^3_{6+4+5} = 455$.

Событие A означает, что достали либо 3 синих, либо 3 чёрных, либо 3 красных ручки. Это можно сделать следующим числом способов: $n_A = C_6^3 C_4^0 C_5^0 + C_6^0 C_4^3 C_5^0 + C_6^0 C_4^0 C_5^3 = 34$. Тогда вероятность $P(A)$ события A равна $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_6^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_1 5^3} = 34/455$.

Число исходов, входящее в событие B, определяется формулой $n_B = C_6^1 C_4^1 C_5^1 = 120$. Вероятность $P(B) = \frac{n_B}{n_\Omega} = 120/455$.

Последнее событие C, включает в себя случаи, когда достали либо 2, либо 3 синих ручки. Это можно сделать следующим числом способов: $n_C = C_6^2(C_4^1 C_5^0 + C_4^0 C_5^1) + C_6^3 C_4^0 C_5^0 = 155$. Тогда $P(C) = \frac{n_C}{n_\Omega} = 155/455$.

Пример 4. В кафе 5 столов, за которыми случайным образом по-трое рассаживаются 5 мужчин и 10 женщин. Какова вероятность, что за каждым столом будет сидеть мужчина?

Решение. Эта задача решается с помощью формулы распределения по группам. Определим число способов n_Ω, которым можно рассадить всех посетителей за 5 столов. За первый стол посетителей можно посадить C_{15}^3 способами, за второй — C_{12}^3 способами, за третий — C_9^3, за четвёртый — C_6^3, за пятый стол — C_3^3. В итоге $n_\Omega = C_{15}^3 C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 C_3^3 = \frac{15!}{(3!)^5}$.

Число n_A исходов, входящих в искомое событие, определяется следующим образом. За первый стол выбираются 2 женщины и один мужчина, что можно сделать $C_5^1 C_{10}^2$ способами, за второй стол также сажаются 2 женщины и 1 мужчина — $C_4^1 C_8^2$, за третий стол — $C_3^1 C_6^2$, за четвёртый стол — $C_2^1 C_4^2$, и за последний стол — $C_1^1 C_2^2$. Получаем $n_A =$

$C_5^1 C_{10}^2 C_4^1 C_8^2 C_3^1 C_6^2 C_2^1 C_4^2 C_1^1 C_2^2 = \frac{5!10!}{2^5}$. Вероятность $P(A) = \frac{5!10!}{15!}\left(\frac{3!}{2}\right)^5 = 81/1001$.

Пример 5. Шесть человек заходят в лифт на первом этаже шестиэтажного дома. Считая, что любой из них может выйти на любом этаже с равной вероятностью, найти вероятности следующих событий: $A = \{$пассажиры выходят, начиная с 5-го этажа$\}$, $B = \{$три пассажира выйдут на 6-м этаже$\}$, $C = \{$пассажиры выйдут на всех этажах$\}$.

Решение. Так как на каждом из пяти (первый этаж не учитываем) этажей может выйти любой из 6 пассажиров, то общее число элементарных исходов n_Ω определяется как 5^6.

Событие A означает, что пассажиры лифта будут выходить на 5-м и 6-м этажах, этому соответствует $n_A = 2^6$, тогда $P(A) = 2^6/5^6 = (2/5)^6$.

Событие $B = \{$трое пассажиров выйдут на 6-м этаже$\}$ означает, что какие-то три пассажира выйдут на 6-м этаже (выбор пассажиров возможен C_6^3 способами), а на каждом из оставшихся четырёх этажей может выйти любой из трёх оставшихся пассажиров (что возможно 4^3 способами), таким образом, событие B включает в себя $n_B = C_6^3 4^3$ исходов. Вероятность $P(B) = \frac{C_6^3 4^3}{5^6} = 256/3125$.

Событие $C = \{$пассажиры выйдут на всех этажах$\}$ означает, что нужно распределить 6 пассажиров по 5 этажам. Сначала распределим 5 пассажиров по пяти этажам (то есть, сделаем так, чтобы на каждом этаже вышел свой пассажир), а это можно осуществить $C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1 = 5!$ способами. Тогда для последнего, шестого пассажира существует возможность выбора любого этажа. Тогда $n_C = 5 \cdot 5!$. Вероятность $P(C) = \frac{5 \cdot 5!}{5^6} = \frac{24}{625}$.

Задача 12. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются три. Найти вероятность того, что это будут:
1. тройка, семёрка и туз;
2. карты одной масти;
3. карты разных мастей;
4. не более двух карт одной масти;
5. три туза.

Задача 13. Два друга стоят в очереди из 9 человек. Найти вероятность того, что между ними стоят:
1. два человека;
2. три человека.

Задача 14. На листке записано трёхзначное число, нужно отгадать его. Какова вероятность угадывания числа:
1. с первой попытки;

2. со второй попытки.

Задача 15. Брошены две игральных кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях:

1. чётная;
2. чётная, причём на грани хотя бы одной из костей появится шестёрка;
3. чётная, причём на грани только одной из костей появится шестёрка;
4. чётная, причём на грани только одной кости выпадет чётное число очков;
5. чётная, причём на двух костях выпадет чётное число очков;
6. чётная, причём на всех костях выпадет одинаковое число очков;
7. чётная, причём на всех костях выпадет разное число очков;
8. чётная, причём только на двух костях выпадет одинаковое число очков;
9. нечётная, причём на всех костях выпадет одинаковое число очков;
10. нечётная, причём на всех костях выпадет разное число очков;
11. нечётная, причём выпадет хотя бы одна шестёрка;
12. нечётная, причём выпадут хотя бы две единицы;
13. нечётная, причём на каждой кости выпадет своё нечётное число очков;
14. нечётная, причём на двух костях выпадет одинаковое число очков;
15. нечётная, причём на двух костях выпадет одинаковое нечётное число очков;
16. нечётная, причём не более чем на одной кости выпадет нечётное число очков;
17. нечётная, причём не менее чем на одной кости выпадет чётное число очков.

Задача 16. Шесть человек заходят в лифт на первом этаже шестиэтажного дома. Считая, что любой из них может выйти на любом этаже с равной вероятностью, найти вероятности следующих событий:

1. на чётных этажах выйдет по два человека;
2. на нечётных этажах выйдет одинаковое количество пассажиров;
3. на последних трёх этажах никто не выйдет;
4. все пассажиры выйдут на одном этаже.

Задача 17. Четыре человека заходят в лифт на первом этаже шестиэтажного дома. Считая, что любой из них может выйти на любом этаже с равной вероятностью, найти вероятности следующих событий:

1. все пассажиры выйдут на двух этажах;
2. на втором и четвёртом этаже выйдет одинаковое количество пассажиров, на остальных этажах никто не выйдет;
3. на втором и четвёртом этаже выйдет одинаковое количество пассажиров;
4. пассажиры выходят, начиная с 5-го этажа;
5. три пассажира выйдут на 6-м этаже;

6. пассажиры выйдут на всех этажах;
7. все пассажиры выйдут на разных этажах;
8. на последних трёх этажах никто не выйдет;
9. все пассажиры выйдут на одном этаже.

Задача 18. Из последовательности чисел 1, 2, 3, ..., 300 наугад (без возвращения) выбираются два числа. Какова вероятность того, что:
1. одно из них меньше 126, а другое больше 126;
2. их сумма является чётной;
3. их произведение является нечётным;
4. первое число будет больше второго;
5. произведение чисел делится на 5;
6. произведение чисел делится на 10.

Задача 19. Из последовательности чисел 1, 2, 3, ..., 300 наугад (с возвращением) выбираются два числа. Какова вероятность того, что:
1. оба числа совпадают;
2. одно из них меньше 126, а другое больше 126;
3. их сумма является чётной;
4. их произведение является нечётным;
5. первое число будет больше второго;
6. произведение чисел делится на 5;
7. произведение чисел делится на 10.

Задача 20. Из чисел 1, 2, ..., 20 случайным образом выбирают (без возвращения) два числа. Найти вероятности событий:
1. выбрано хотя бы одно простое число;
2. выбрано хотя бы одно чётное число;
3. выбрано хотя бы одно нечётное простое число.

Задача 21. Железнодорожный состав из 9 вагонов и вагона-ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность того, что:
1. вагон-ресторан расположен рядом с седьмым вагоном;
2. между выбранным пассажирским вагоном и вагоном-рестораном находятся ещё два вагона.

Задача 22. В группе 24 студента. Им на выбор предлагается по 1 дисциплине от каждой из трёх выпускающих кафедр. Студенту нужно выбрать только одну научную дисциплину для изучения. Найти вероятности следующих событий:
1. одинаковое число студентов запишется на каждую из трёх дисциплин;
2. одна дисциплина не будет выбрана ни одним студентом, при этом на две другие дисциплины студенты распределятся поровну;
3. все студенты выберут одну и ту же дисциплину.

Задача 23. Брошены три монеты. Найдите вероятности следующих событий:
1. $A =$ {первая монета выпала Гербом вверх};
2. $B =$ {выпало ровно два Герба};
3. $C =$ {выпало не более двух Гербов}.

Задача 24. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешиваются. Найти вероятность того, что наугад извлечённый кубик имеет
1. одну;
2. две;
3. три

окрашенные грани.

Задача 25. Наугад выбирается пятизначное число. Найдите вероятности следующих событий:
1. $A =$ {число одинаково читается как слева направо, так и справа налево};
2. $B =$ {число кратно 5};
3. $C =$ {число состоит из нечётных цифр}.

Задача 26. Определите вероятность того, что выбранное наугад целое число при
1. возведении в квадрат;
2. при возведении в четвертую степень;
3. умножении на произвольное целое число

даст число, оканчивающееся 1.

Задача 27. Из урны, содержащей 5 белых и 6 чёрных шаров, наугад извлекаются 4 шара. Найдите вероятности следующих событий:
1. $A =$ {все шары белые};
2. $B =$ {ровно 3 белых};
3. $C =$ {хотя бы один белый};
4. $D =$ {не менее 2 белых}.

Задача 28. Числа $\{1, 2, \ldots, 9\}$ записывают в случайном порядке. Найдите вероятности следующих событий:
1. $A =$ {числа будут записаны в порядке возрастания};
2. $B =$ {числа 1, 2 будут записаны рядом и в порядке возрастания};
3. $C =$ {числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом};
4. $D =$ {на чётных местах чётные числа};
5. $E =$ {сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10}.

Задача 29. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места за круглым столом. Какова вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом.

Задача 30. В записи телефонного номера три последовательные цифры стёрлись. Найдите вероятности событий:
1. $A = \{$стёрлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5$\}$;
2. $B = \{$стёрлись одинаковые цифры$\}$;
3. $C = \{$две из стёршихся цифр совпадают$\}$.

Задача 31. Из 30 чисел $(1, 2, \ldots, 30)$ выбирают 10 чисел случайным образом. Найдите вероятности событий:
1. $A = \{$все нечётные$\}$;
2. $B = \{$ровно 5 чисел делятся на 3$\}$;
3. $C = \{$5 чисел чётных и 5 нечётных, причём ровно одно из чисел делится на 10$\}$.

Задача 32. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказанный набор пирожных равновероятен, вычислите вероятность того, что покупатель заказал:
1. пирожные одного вида;
2. пирожные разных видов;
3. по два пирожных разных видов.

Задача 33. Телефонная книга раскрывается наугад и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонный номер состоит из 7 цифр и не может начинаться с 0, найдите вероятности событий:
1. $A = \{$четыре последние цифры телефонного номера одинаковы$\}$;
2. $B = \{$все цифры различны$\}$;
3. $C = \{$номер начинается с 5$\}$;
4. $D = \{$номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2$\}$.

Задача 34. На тренировке детской спортивной школы по футболу роли игроков распределяются случайным образом среди 11 участников. Нужно отобрать 1 вратаря, 4 защитников, 3 полузащитников и 3 нападающих. Какова вероятность того, что два друга Коля и Миша:
1. будут играть в нападении;
2. получат разные роли, причём один из друзей будет играть в нападении, а другой — в защите?

Задача 35. К четырёхстороннему перекрёстку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырёх маневров на перекрёстке: развернуться, поехать прямо, повернуть налево, повернуть направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекрёсток. Найдите вероятности следующих событий:

1. $A = \{$все автомобили поедут по одной и той же улице$\}$;
2. $B = \{$по определённой улице поедут ровно три автомобиля$\}$;
3. $C = \{$по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль$\}$;
4. $D = \{$автомобили разъедутся по улицам попарно$\}$;
5. $E = \{$по определённой улице поедут ровно два автомобиля$\}$.

Задача 36. Число троек натуральных чисел, дающих в сумме 9, такое же, как число троек, дающих в сумме 10. Но при трехкратном подбрасывании кубика, сумма очков на верхних гранях чаще бывает равной 10, чем 9. Почему?

Задача 37. Известно, что предварительно зарезервированный билет на автобус дальнего следования выкупается с вероятностью 0,9. В обычном автобусе 18 мест, в микроавтобусе 9 мест. Компания А, перевозящая людей в микроавтобусах, допускает резервирование 10 билетов на один микроавтобус. Компания В, перевозящая людей в обычных автобусах допускает резервирование 20 мест на один автобус. У какой компании больше вероятность оказаться в ситуации нехватки мест?

1.3. Геометрическая вероятность

Рассмотрим теперь непрерывную вероятностную схему, т.е. пространство элементарных исходов представляет собой некоторую ограниченную область (отрезок, многоугольник, круг, параллелепипед, шар и т.д.) k-мерного пространства (прямой, плоскости, трехмерного простанства и т.д.) Пусть Ω имеет меру $\mu(\Omega)$ (длину, площадь, объем и т.д.), причем $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Рассмотрим некоторые задачи на геометрическую вероятность.

Пример 6. Преподаватель назначил студентам консультацию в 12.00. Время консультации — один час. Если преподаватель приходит первым, то он ждёт студентов 15 минут и уходит в случае неявки студентов. Если студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя 20 минут и уходят.

Найти вероятности следующих событий: $A = \{$консультация была$\}$, $B = \{$консультация была после 12.30$\}$.

Решение. Возьмём 12 часов за начало координат — точку 0, 13 часов обозначим как 1. Тем самым мы перешли на отрезок $[0; 1]$. Пусть

x — время прихода преподавателя, y — время прихода студентов. Очевидно, что $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Пространство элементарных исходов Ω представимо в виде квадрата с вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ и $(1;0)$ — рисунок 1.1. Площадь пространства Ω $\mu(\Omega)$ равна 1.

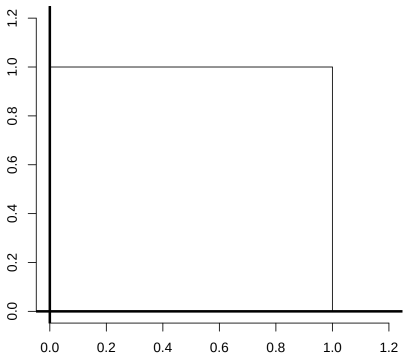

Рис. 1.1. Пространство Ω

Далее, 15 минут соответствуют 1/4 часа, а 20 минут — 1/3 часа.

Условие «если преподаватель приходит первым, то он ждёт студентов 15 минут и уходит в случае неявки студентов» означает, что для того, чтобы консультация состоялась, необходимо выполнение неравенства $y - x \leq 1/4$.

Условие же «если студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя 20 минут и уходят» для того, чтобы консультация состоялась, записывается в виде неравенства $x - y \leq 1/3$.

Событие A записывается в виде системы:

$$\begin{cases} y - x \leq \dfrac{1}{4}, \\ x - y \leq \dfrac{1}{3} \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \dfrac{1}{4} + x, \\ y \geq x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

На рисунке 1.2 событие A представлено заштрихованной областью.

Вычислим площадь события A:

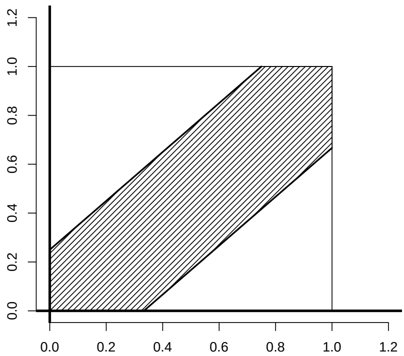

Рис. 1.2. $A = \{$консультация была$\}$

$$\mu(A) = \int\limits_0^{1/3} \left(x + \frac{1}{4}\right) dx + \int\limits_{1/3}^{3/4} \left(x + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{3}\right)\right) dx + \\ + \int\limits_{3/4}^{1} \left(1 - \left(x - \frac{1}{3}\right)\right) dx = \frac{61}{144}.$$

Вероятность события A:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{61/144}{1} = \frac{61}{144}.$$

Перейдём к событию $B = \{$консультация была после 12.30$\}$. Помимо того, что консультация состоялась (событие A), нужно еще учеть время, когда консультация была — после 12.30. Это означает, что либо студенты, либо преподаватель (либо и студенты и преподаватель) пришли после 12.30. Чтобы построить данное событие, проведём прямые через точки $x = 0,5$ и $y = 0,5$ и заштрихуем ту часть собыя A, которая лежит либо выше прямой $y = 0,5$ (студенты пришли после 12.30, а преподаватель — до), либо правее прямой $x = 0,5$ (преподаватель пришёл после 12.30, а студенты — до) (рисунок 1.3).

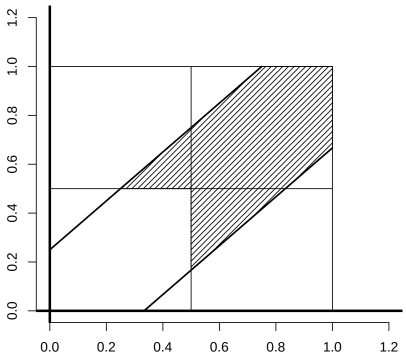

Рис. 1.3. $B = \{$консультация была после 12.30$\}$

Площадь события B вычисляется следующим образом:

$$\mu(B) = \int\limits_{1/4}^{1/2} \left(x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) dx + \int\limits_{1/2}^{3/4} \left(x + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{3}\right)\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{3/4}^{1} \left(1 - \left(x - \frac{1}{3}\right)\right) dx = \frac{7}{32}.$$

Вероятность события B:

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{7/32}{1} = \frac{7}{32}.$$

Пример 7. На отрезке $[-2; 2]$ случайным образом выбираются точки x и y. Нужно найти вероятность того, что $y \leq 2 - x^2$.

Решение. Построим сначала пространство элементарных исходов Ω. Так как координаты x и y не зависят друг от друга, то мы получим квадрат с вершинами в точках $(-2; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; 2)$ и $(2; -2)$. представленный на рисунке 1.4.

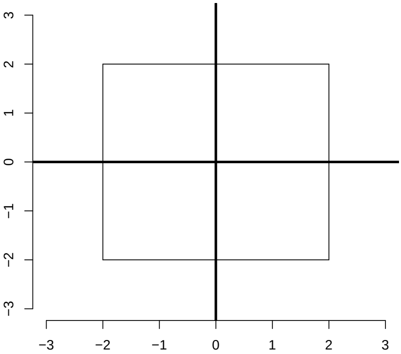

Рис. 1.4. Пространство элементарных исходов

Далее, строим параболу $y = 2 - x^2$ и, так как по условию $y \leq 2 - x^2$, то заштриховываем область, лежащую внутри квадрата и под параболой — рисунок 1.5.

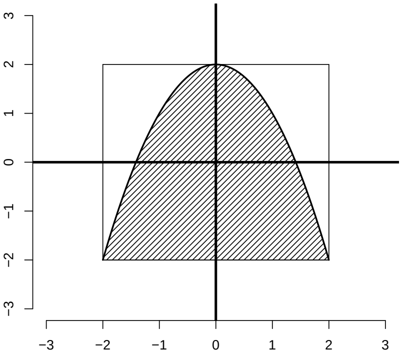

Рис. 1.5. Событие $y \leq 2 - x^2$

Площадь пространства элементарных исходов $S(\Omega) = 4 \cdot 4 = 16$, площадь события A вычисляется как

$$S(A) = \int\limits_{-2}^{2} (2 - x^2 + 2)dx = \frac{32}{3}.$$

Тогда вероятность того, что $y \leq 2 - x^2$ равна:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{32/3}{16} = \frac{2}{3}.$$

Задача 38. Какова вероятность того, что произведение двух наугад взятых правильных положительных дробей будет:
1. не больше 0,25;
2. не меньше 0,75.

Задача 39. Преподаватель назначил студентам консультацию с 12.00 до 13.00. Если преподаватель приходит первым, то он ждёт студентов 15 минут и уходит в случае неявки студентов. Если студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя 20 минут и уходят. Найти вероятности следующих событий:
1. консультация была;
2. консультация была после 12.30;
3. консультация была после 12.30 и студенты пришли раньше преподавателя;
4. консультация была после 12.30, преподаватель пришёл до 12.30;
5. консультация была после 12.30, студенты пришли после 12.30;
6. студенты пришли раньше преподавателя и консультация состоялась;
7. преподаватель ждал студентов больше 10 минут;
8. студенты ждали преподавателя не больше 10 минут, консультация была;
9. студенты пришли раньше преподавателя и консультация началась до 12.30.

Задача 40. На отрезке длиной 9 наугад выбраны две точки, какова вероятность того, что расстояние между ними меньше 4?

Задача 41. В шар вписан куб. Найти вероятность того, что:
1. выбранная наугад внутри шара точка окажется внутри куба;
2. выбранная наугад внутри шара точка окажется над кубом.

Задача 42. На отрезке [0;3] наугад выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что:
1. эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leq 3y \leq 3x$;
2. сумма чисел меньше 7, а произведение — больше 4;

3. разность чисел лежит в пределах от 0,5 до 2.

Задача 43. Внутри квадрата с вершинами $(2;2)$, $(-2;-2)$, $(-2;2)$ и $(2;-2)$ наугад выбирается точка $M(x,y)$, Найти вероятности следующих событий:
1. $A = \{(x;y) : |x-y| \leq 2\}$;
2. $B = \{(x;y) : |x+y| \geq 2\}$;
3. $C = \{(x;y) : 0 \leq 2y \leq (x-2)^2\}$.

Задача 44. Коэффициенты a и c уравнения $x^2+ax+c=0$ выбираются наугад из отрезка [0;1]. Какова вероятность того, что:
1. корни уравнения будут действительными;
2. корни уравнения - положительные;
3. одиу корень уравнения - положительное число, а второй - отрицательное;
4. произведение корней уравнения - неотрицательное число;
5. сумма корней - отрицательна.

1.4. Условная вероятность. Независимость событий. Формула сложения вероятностей. Формула умножения вероятностей

Формула условной вероятности. Условная вероятность $P(A/B)$ события A при условии события B определяется как $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

События A и B **независимы** тогда и только тогда, когда $P(AB) = P(A)P(B)$ (события A и B **независимы**, если $P(A/B) = P(A)$).

Формула умножения. Вероятность пересечения n событий определяется следующим образом: $P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_{n-1}\dots A_1)$.

Формула сложения. $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = 1 - P(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i)$.

Пример 8. Подбрасываются три игральных кости. Даны события $A = \{$выпадут разные числа$\}$, $B = \{$хотя бы на одной кости будет шестёрка$\}$. Найти вероятности $P(A/B)$ и $P(B/A)$.

Решение. По формуле условной вероятности $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ и $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Найдём вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$. Вероятность события B легче искать через вероятность дополнительного события $\bar{B}$ — ни на одной игральной кости 6 очков не выпадет. Тогда $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (5/6)^3 = 91/216$. Вероятность события A вычисляется как $P(A) = \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = 20/36$, где 6^3 — общее число элементарных исходов, а $6 \cdot 5 \cdot 4$ — число благоприятных исходов. Событие AB означает, что выпадут три различных числа и одно из них обязательно 6. Вероятность пересечения $P(AB) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = 10/36$

По формуле условной вероятности получаем: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{10/36}{91/216} = 60/91$, $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{10/36}{20/36} = 1/2$.

Пример 9. Три студента делают расчёты. Пусть $p_1 = 0.1$ — вероятность ошибки первого студента, $p_2 = 0.15$ — вероятность ошибки второго студента, а $p_3 = 0.2$ — вероятность ошибки третьего студента. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$все студенты сделали расчёт верно$\}$, $B = \{$только два студента сделали расчёт верно$\}$, $C = \{$хотя бы один студент сделал расчёт верно$\}$.

Решение. Предполагается, что студенты делают расчёты независимо друг от друга, и ошибка одного из них никак не влияет на расчёты других. Поэтому вероятность события $A = \{$все студенты сделали расчёт верно$\}$ определяется как $P(A) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0.612$.

Вероятность события $B = \{$только два студента сделали расчёт верно$\}$ вычисляется по формуле $P(B) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)(1 - p_3)$, где каждое слагаемое соответствует случаю, когда два студента сделали расчёт верно и только один из трёх ошибся. В итоге получаем, $P(B) = 0.329$.

Чтобы найти вероятность события $C = \{$хотя бы один студент сделал расчёт верно$\}$ лучше перейти к дополнительному к C событию $\bar{C} = \{$Все студенты ошиблись$\}$. Тогда $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - p_1 p_2 p_3 = 0.997$.

Пример 10. Сколько надо взять игральных костей, чтобы с вероятностью не меньше 0.7 можно было ожидать, что шесть очков выпадет хотя бы на одной кости.

Решение. В данной задаче надо найти неизвестное число n игральных костей. Результат подбрасывания одной кости не влияет на результаты подбрасывания остальных. Перейдём от события $A = \{$шесть очков выпадет хотя бы на одной кости$\}$ к дополнительному событию $\bar{A} = \{$шесть очков не выпадет ни на одной кости$\}$. Вероятность того, что на одной игральной кости не выпадет 6 очков есть 5/6. Вероятность того, что на n игральных костях ни разу не выпадет 6 очков (в силу независимости) есть $(5/6)^n$.

По условию дано, что $P(A) \geq 0.7$, но $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (5/6)^n$. Получаем следующее неравенство: $1 - (5/6)^n \geq 0.7$, то есть $(5/6)^n \leq 0.3$. Логарифмируя, получим $n \ln(5/6) \leq \ln 0.3$. Отсюда следует, что $n \geq \frac{\ln 0.3}{\ln 5 - \ln 6} = 6.6$. Таким образом, получаем, что минимальное число костей должно быть $n = 7$ (если возьмём $n = 6$, то не будет выполнено условие задачи).

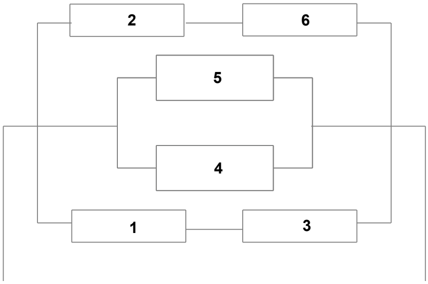

Рис. 1.6. Схема с приборами

Пример 11. Рассмотрим представленную на рисунке 1.6 схему устройства, которое состоит из шести блоков. Обозначим через A_i — выход из строя i-го блока устройства ($i = \overline{1,6}$), события A_i — независимы, A — выход из строя всего устройства, $p_i = P(A_i)$ — вероятность выхода из строя (отказа в работе) i-го блока устройства ($i = \overline{1,6}$).

Надо записать события A и $\bar{A}$ (работа устройства) через A_i и $\bar{A}_i$ ($i = \overline{1,6}$) и найти вероятности этих событий.

Решение. Разделим всё устройство, представленное на схеме, на отдельные узлы, состоящие из блоков, соединённых либо только последовательно, либо только параллельно. Запишем события, соответствующие отказам этих узлов, как $A_{2,6}$, $A_{4,5}$ и $A_{1,3}$.

Блоки 2 и 6 соединены последовательно, поэтому узел 2-6 перестанет работать тогда, когда перестанет работать хотя бы один из блоков, то есть $A_{2,6} = A_2 \cup A_6$. Узел 4-5 состоит из параллельно соединённых блоков 4 и 5, данный узел перестанет работать только тогда, когда сразу сломаются блоки 4 и 5, то есть $A_{4,5} = A_4 A_5$. Узел 1-3, состоит из последовательно соединённых блоков 1 и 3, соответственно для поломки данного узла достаточно выхода из строя хотя бы одного блока, $A_{1,3} = A_1 \cup A_3$.

Узлы 1-3, 2-6 и 4-5 параллельно соединены друг с другом, поэтому выход из строя всего устройства можно представить как

$$A = A_{2,6} A_{4,5} A_{1,3} = (A_2 \cup A_6)\, A_4 A_5\, (A_1 \cup A_3)$$

Вероятность события A вычисляется как:

$$P(A) = P(A_{2,6}A_{4,5}A_{1,3}) = P(A_{2,6})P(A_{4,5})P(A_{1,3}) = \\ = P(A_{2,6})P(A_4)P(A_5)P(A_{1,3}) = \\ = \left(1-(1-p_2)(1-p_6)\right)p_4p_5\left(1-(1-p_1)(1-p_6)\right).$$

Событие $\bar{A}$, соответствующее работе всего устройства, записывается следующим образом:

$$\bar{A} = \overline{(A_2 \cup A_6)\,A_4A_5\,(A_1 \cup A_3)} = \bar{A}_2\bar{A}_6 \cup \bar{A}_4 \cup \bar{A}_5 \cup \bar{A}_1\bar{A}_3.$$

Вероятность работы устройства $P(\bar{A})$:

$$P(\bar{A}) = P(\overline{(A_2 \cup A_6)\,A_4A_5\,(A_1 \cup A_3)}) = \\ = 1-\left(1-(1-p_2)(1-p_6)\right)p_4p_5\left(1-(1-p_1)(1-p_6)\right).$$

Задача 45. Для каждой из представленных на рисунке 1.7 схем записать события A (отказ устройства) и $\bar{A}$ (работа устройства) через A_i (отказ i-го блока) и $\bar{A}_i$ (работа i-го блока) ($i = \overline{1,6}$) и найти вероятности этих событий.

Задача 46. Брошено две игральных кости. Найти условную вероятность того, что:
1. выпала хотя бы одна «1» при условии, что сумма очков равна 4;
2. сумма очков нечётная при условии, что выпала хотя бы одна «6»;
3. сумма очков больше 7 при условии, что на каждой кости выпало чётное число очков;
4. сумма очков больше 7 при условии, что на каждой кости выпало нечётное число очков;
5. разность очков больше 2 при условии, что на только одной кости выпало шесть очков;
6. разность очков не больше 3 при условии, что на одной кости выпало пять или шесть очков.

Задача 47. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени

Задача 48. Имеются две урны с шарами трёх цветов. В первой находятся 3 голубых, 3 красных и 4 зелёных, а во второй — 4 голубых, 2 красных и 3 зелёных. Из каждой урны извлекают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что:

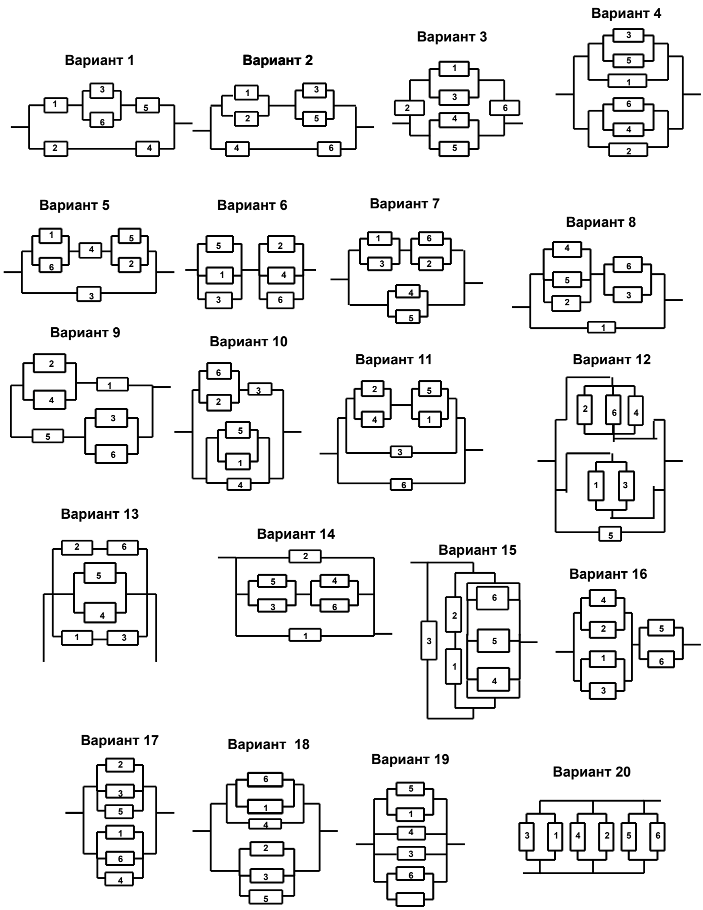

Рис. 1.7. Схема с приборами

1. цвета вынутых шаров одинаковы;
2. достали два голубых шара;
3. достали красный и зелёный шары;
4. достали голубой и красный шары.

Задача 49. Брошены три игральные кости. X_i — число очков, выпавших на i-ой кости, $i = \overline{1,3}$. Рассматриваются события: $A = \{X_1 = X_2\}$; $B = \{X_2 = X_3\}$ и $C = \{X_1 = X_3\}$. Будут ли события A, B и C попарно независимы? Независимы в совокупности?

Задача 50. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле:
1. только первый стрелок попадёт по мишени;
2. только второй стрелок попадёт по мишени;
3. все три стрелка промахнутся;
4. хотя бы один из них попадёт в мишень;
5. ровно два стрелка попадут в мишень.

Задача 51. В урне находится 40 шаров. Вероятность того, что два извлечённых шара окажутся белыми, равна 4/60. Сколько в урне белых шаров?

Задача 52. Во время сессии студенту надо сдать 5 экзаменов. Вероятность того, что он сдаст первый экзамен равна $p_1 = 0,9$, второй — $p_2 = 0,7$, третий — $p_3 = 0,5$, четвёртый — $p_4 = 0,3$, пятый — $p_5 = 0,8$. Вычислить вероятности следующих событий:
1. студент успешно сдал все экзамены;
2. студент не сдал ни одного экзамена;
3. студент не сдал только третий и четвёртый экзамены;
4. студент не сдал два экзамена;
5. студент не сдал не больше одного экзамена.

Задача 53. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5% неисправных деталей?

Задача 54. Игральная кость подбрасывается 3 раза. В результате сумма очков на выпавших гранях равна 12. Найти вероятность того, что[1]
1. в результате первого броска выпало 4;
2. каждый раз выпала 4.

[1] Формулировка взята из [1].

1.5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности. Вероятность события A по формуле полной вероятности определяется следующим образом

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i),$$

где H_i — гипотезы, образующие полную группу событий (т.е. гипотезы являются несовместными событиями и их объединение есть пространство элементарных исходов) $(i = \overline{1,n})$, $P(A/H_i)$ — условные вероятности наступления события A при условии события H_i.

Формула Байеса. Позволяет переоценить вероятность i-ой гипотезы при условии события A:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

.

Пример 12. В группе 3 студента учатся на отлично, 5 студентов — хорошо, 12 студентов - слабо учатся. Отличник с равной вероятностью может получить 5 или 4, хорошо учащийся студент может с равной вероятностью получить либо 5. либо 4, либо 3. Слабо успевающий студент с равной вероятностью получает 3 или 2.

Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получил 4? Какова вероятность того, что получивший 4 студент хорошо учился в семестре?

Решение. Эта задача на формулу полной вероятности и формулу Байеса. Искомое событие A заключается в том, что наудачу выбранный студент получит 4. До выбора мы не знаем, как этот студент учился. Поэтому введём следующие гипотезы: H_1 — выбран отличник, H_2 — выбран студент, хорошо учащийся, H_3 — выбран слабо учащийся студент. Эти гипотезу образуют полную группу событий (они включают в себя все возможные варианты выбора студентов). Вероятность выбора отличника $P(H_1) = 3/20$, вероятность выбора хорошо учащегося студента равна $P(H_2) = 5/20$, вероятность выбора слабо учащегося студента есть $P(H_3) = 12/20$.

Условная вероятность того,что отличник получит 4 по условию задачи есть $P(A/H_1) = 1/2$. Условная вероятность того, что хорошо учащийся студент получит 4 есть $P(A/H_2) = 1/3$. Условная вероятность того, что слабо учащийся студент получит 4 по условию равна $P(A/H_3) = 0$.

Тогда по формуле полной вероятности $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)$ получаем $P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{20}+0\cdot\frac{12}{20} = \frac{1}{5}$.

Второе событие B, вероятность которого надо найти, есть $B = \{$получивший 4 студент хорошо учился$\}$, то есть надо найти вероятность события H_2 при условии события A — $P(H_2/A)$. Для этого используется формула Байеса

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}.$$

Пример 13. Три стрелка выстрелили одновременно по мишени. В результате стрельбы в мишени оказались две пули. Найти вероятность того, что третий стрелок попал в мишень, если вероятности попадания стрелками в мишень соответственно равны 0.6, 0.5 и 0.4.

Решение. Нам известно, что первый стрелок попадает в мишень с вероятностью $p_1 = 0.6$, второй стрелок — $p_2 = 0.5$, третий стрелок — $p_3 = 0.4$. В результате стрельбы в мишени оказалось две пули — это событие A. Событие B состоит в том, что третий стрелок попал в мишень, при условии наличия двух пуль в мишени.

Неопределённость состоит в том, что нам неизвестны результаты стрельбы каждого стрелка. Построим следующие гипотезы:

H_1 — все три стрелка промахнулись. Вероятность этого события $P(H_1) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0.4\cdot 0.5\cdot 0.6 = 0.12$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_1) = 0$, так как нельзя получить два попадания в мишень, если все промахнулись.

H_2 — только первый стрелок попал, остальные — промахнулись. Вероятность этого события $P(H_2) = p_1(1-p_2)(1-p_3) = 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 = 0.18$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_2) = 0$, так как нельзя получить два попадания в мишень, если два стрелка из трёх промахнулись.

H_3 — только второй стрелок попал, остальные — промахнулись. Вероятность этого события $P(H_3) = p_2(1-p_1)(1-p_3) = 0.5\cdot 0.4\cdot 0.6 = 0.12$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_3) = 0$, так как нельзя получить два попадания в мишень, если два стрелка из трёх промахнулись.

H_4 — только третий стрелок попал, остальные — промахнулись. Вероятность этого события $P(H_4) = p_3(1-p_1)(1-p_2) = 0.4\cdot 0.4\cdot 0.5 = 0.08$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_4) = 0$, так как нельзя получить два попадания в мишень, если два стрелка из трёх промахнулись.

H_5 — первый и второй стрелки попали, третий стрелок промахнулся. Вероятность этого события $P(H_5) = p_1p_2(1-p_3) = 0.6\cdot 0.5\cdot 0.6 = 0.18$.

Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_5) = 1$, так как будет ровно два попадания в мишени.

H_6 — первый и третий стрелки попали, второй стрелок промахнулся. Вероятность этого события $P(H_6) = p_1p_3(1-p_2) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.12$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_6) = 1$, так как будет ровно два попадания в мишени.

H_7 — второй и третий стрелки попали, первый стрелок промахнулся. Вероятность этого события $P(H_7) = p_2p_3(1-p_1) = 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.08$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_7) = 1$, так как будет ровно два попадания в мишени.

Наконец, последняя гипотеза H_8 — все стрелки попали. Вероятность этого события $P(H_8) = p_1p_2p_3 = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.12$. Условная вероятность события A при данной гипотезе есть $P(A/H_7) = 1$, так как три трёх попадания две пули точно будут в мишени (в условии задачи не сказано **ровно две пули**).

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{8} P(H_i)P(A/H_i) = 0.18 + 0.12 + 0.08 + 0.12 = 0.5.$$

Событие B есть объединение событий H_6/A, H_7/A, H_8/A. Вероятность события B равна сумме вероятностей $P(H_6/A)$, $P(H_7/A)$ и $P(H_8/A)$, которые вычисляются по формуле Байеса.

$$P(B) = \frac{P(H_6)P(A/H_6)}{P(A)} + \frac{P(H_7)P(A/H_7)}{P(A)} + \frac{P(H_8)P(A/H_8)}{P(A)} = \frac{16}{25}.$$

Задача 55. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 чёрных шара; в 4 и 5 урнах-по 1 белому и 1 чёрному. Случайно выбирается урна и из неё вынимается шар. Он оказался белый. Какова вероятность того, что:
1. выбрана 4-я или 5-я урна;
2. выбрана 2-я урна;
3. выбрана 2-я или 5-я урна.

Задача 56. Имеется пять урн. В двух из них лежит по одному белому и трём чёрным шарам, а в трёх других — по два белых и два чёрных шара. Наугад выбирается некоторая урна и из неё вынимается шар. Найти вероятность того, что:
1. шар — белый;
2. шар — чёрный.

Задача 57. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надёжность первого узла равна 0,9, второго —- 0,8. За время ис-

пытания прибора зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятности событий:
1. отказал только первый узел;
2. оказали оба узла.

Задача 58. В ящике лежит 20 теннисных мячей, из которых 12 новых и 8 старых (игранных). Из ящика наугад извлекают два мяча. После игры мячи возвращают обратно (новый мяч становится старым, использованным). После этого из ящика вынимают ещё два мяча. Оба мяча оказались новыми. Найти вероятность того, что:
1. в первый раз тоже играли новыми мячами;
2. в первый раз играли старыми мячами.

Задача 59. После осмотра больного врач считает, что либо у пациента заболевание B с вероятностью 2/5, либо заболевание C с вероятностью 3/5. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого даёт положительную реакцию при заболевании B в 50 процентах случаев, а при заболевании C — в 30 процентах случаев. Анализ дал положительную реакцию. Какое заболевание становится более вероятным?

Задача 60. На фабрике изготовляются изделия определённого вида на трёх поточных линиях. На первой линии производится 45% изделий, на второй — 35%, на третьей — остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%, 96%, 94%. Определите вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным

Задача 61. В урну, содержащую 5 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

Задача 62. В коробке имеются две игральные кости. Одна правильная (с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр), а другая неправильная. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестёрка выпадает с вероятностью 1/3, единица — с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлечённая из коробки игральная кость была подброшена, и в результате:
1. выпало 6 очков, найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость;
2. выпало 1 очко, найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

Задача 63. Из урны, содержащей 6 белых и 3 чёрных шаров, утерян 1 шар. Сравнить вероятности извлечения белого шара до утери и после утери.

Задача 64. В урне находятся шары с надписанными на них цифрами $6, 7, 8, 9$. Количество раз, когда появляется тот или иной шар, равно надписанному на шаре числу. Из урны с возвращением достают по 1 шару за раз. Найти вероятность того, что[1]
1. шар с цифрой 6 появится раньше шара с цифрой 9;
2. сумма первых трех цифр равна 20.

1.6. Биномиальная схема. Приближенные формулы: формула Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Полиномиальная схема

Формула Бернулли. Пусть проводится n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых может произойти два несовместных события: либо **успех** с вероятностью p, либо **неудача** с вероятностью $q = 1 - p$ (испытания Бернулли). Тогда вероятность получить ровно m успехов в n испытаниях Бернулли определяется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}.$$

Наивероятнейшее число успехов k_0 (то есть то число успехов, вероятность которого максимальна) вычисляется по формуле:

$$(n+1)p - 1 \leq k_0 \leq (n+1)p.$$

Если число испытаний n велико (а m — нет), а величина $\lambda = np$ ($\lambda' = nq$) достаточно малы, то применяется приближённая **формула Пуассона**:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Если же велико и число успехов m (а также величины $\lambda = np$ и $\lambda' = nq$), то используется **локальная** приближенная **формула Муавра-Лапласа**:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2},$$

где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Для функций $\varphi(x)$ существуют специальные таблицы.

Интегральная формула Муавра-Лапласа. Если требуется оценить вероятность того, что число успехов m лежит в некотором интер-

[1] Формулировка взята из [1]. Ответ: 0.4 и 97/1500.

вале $(m_1; m_2)$, то используется следующая формула:

$$P\{m_1 < m < m_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$. Функция $\Phi_0(x)$ называется функцией Лапласа, для неё существуют таблицы, эта функция является нечётной.

Полиномиальная схема. Пусть в результате опыта может произойти любое из следующих несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Тогда вероятность того, что в n независимых одинаковых испытаниях событие A_1 наступит ровно n_1 раз, событие A_2 — n_2 раз, ..., событие A_k — n_k раз $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k},$$

где p_i — вероятность наступления события A_i $(i = \overline{1, k})$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.

Пример 14. Вероятность выигрыша лотерейного билета равна 0.1. Было куплено 5 билетов. Найти вероятность следующих событий: $A = \{$ровно два билета выиграют$\}$, $B = \{$большая часть билетов выиграет$\}$, $C = \{$хотя бы два билета выиграют$\}$.

Решение. Так как выигрыш одного билета не влияет на возможность выигрыша других билетов, вероятность выигрыша одинаковая, то мы имеем дело со схемой Бернулли. Число испытаний n — это число купленных билетов. **Успех** — это выигрыш купленного билета.

Вероятность события $A = \{$ровно два билета выиграют$\}$ вычисляется по формуле Бернулли $P(A) = C_5^2 \cdot 0.1^2 \cdot (1 - 0.1)^3 = 0.0729$.

Событие $B = \{$большая часть билетов выиграет$\}$ означает, что из 5 билетов выиграли 3 или 4, или все 5 билетов. Тогда вероятность события B вычисляется как сумма $P(B) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Используя формулу Бернулли, получим

$$P(B) = C_5^3 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^2 + C_5^4 \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^1 + C_5^5 \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^0 = 0.00856.$$

Событие $C = \{$хотя бы два билета выиграют$\}$ заключается в выигрыше либо двух, либо трёх, либо четырёх, либо всех пяти купленных билетов. Вероятность события C есть сумма следующих вероятностей $P(C) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$ или, переходя к дополнительному событию $\bar{C} = \{$выиграет меньше двух билетов$\}$, $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P_5(0) - P_5(1)$. Вычисляя, получаем $P(C) = 1 - C_5^0 \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^5 - C_5^1 \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^4 = 0.08146$.

Кроме того, заметим, что событие C есть сумма событий A и B. Тогда $P(C) = P(A) + P(B) = 0.0729 + 0.00856 = 0.08146$.

Пример 15. Группа из 15 студентов сдаёт экзамен. Вероятность того, что каждый студент успешно сдаст экзамен, равна 0.9. Найти наивероятнейшее число студентов, сдавших экзамен успешно, и вероятность этого события.

Решение. Наивероятнейшее число студентов, успешно сдавших экзамен, вычисляется по формуле

$$(n+1)p - 1 \le k_0 \le (n+1)p.$$

Подставляя данные из задачи ($n = 15$, $p = 0.9$), получаем

$$(15+1)\cdot 0.9 - 1 \le k_0 \le (15+1)\cdot 0.9 \Leftrightarrow 13.4 \le k_0 \le 14.4.$$

Таким образом, $k_0 = 14$, а вероятность $P_{15}(14) = C_{15}^{14}\cdot 0.9^{14}\cdot 0.1 = 0.343$.

Пример 16. Сколько игральных костей надо бросить, чтобы наивероятнейшее число выпадений очков, кратных 3, равнялось 5?

Решение. Наивероятнейшее число выпадений очков, кратных 3, есть $k_0 = 5$. Вероятность выпадения числа очков, делящихся нацело на 3, определяется как $P(A) = 2/6$ (всего шесть возможных исходов и только два из них: 3 и 6, подходят).

Формула для наивероятнейшего числа: $(n+1)\cdot p - 1 \le k_0 \le (n+1)\cdot p$. Подставляя исходные данные, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (n+1)\cdot\dfrac{1}{3} - 1 \le 5, \\ (n+1)\cdot\dfrac{1}{3} \ge 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n+1) \le \dfrac{6}{\frac{1}{3}}, \\ (n+1) \ge \dfrac{5}{\frac{1}{3}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le 17, \\ n \ge 14. \end{cases}$$

Таким образом, необходимое число игральных костей должно быть не меньше 14 и не более 17.

Пример 17. В корзине находится 6 шаров: 2 белых, 1 чёрный и 3 синих шара. Из корзины 5 раз с возвращением достают шар. Нужно найти вероятности следующих событий: $A = \{$чёрный и белый шары извлечены ровно по два раза$\}$, $B = \{$чёрный и белый шары извлечены не менее чем по два раза$\}$.

Решение. Эксперимент заключается в извлечении из корзины одного шара с последующим возвращением. Шар достаётся 5 раз. Для шара возможны три варианта цветов. Вероятность извлечь шар определённого цвета одинакова для всех экспериментов. Следовательно, эта задача на полиномиальную схему.

Вероятность достать из корзины белый шар равна $p_1 = 2/6$, вероятность достать чёрный шар — $p_2 = 1/6$, для синего шара вероятность равна $p_3 = 3/6$.

Вероятность события A определяется по следующей формуле:

$$P(A) = P_5(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{3}{6} = \frac{5}{108}.$$

Событие $B = \{$чёрный и белый шары извлечены не менее чем по два раза$\}$ означает, что чёрный и белый шары извлечены либо два, либо три раза.

$$\begin{aligned} P(B) &= P_5(2,2,1) + P_5(3,2,0) + P_5(2,3,0) = \\ &= \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{3}{6} + \frac{5!}{3!2!0!}\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^0 + \\ &\quad + \frac{5!}{2!3!0!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{3}{6}\right)^0 = \frac{55}{972}. \end{aligned}$$

Пример 18. Вероятность набора телефонного номера с ошибкой равна 0.001. Найдите вероятность следующих событий: $A = \{$среди 500 номеров только два были набраны неправильно$\}$, $B = \{$среди 500 номеров не более двух набрано неверно$\}$.

Решение. Так как $n = 500$ велико, то следует применять приближённую формулу. Определим с помощью параметра $\lambda = np$ какую из приближённых формул (Пуассона или Муавра-Лапласа) следует использовать. Подставляя исходные данные, получим $\lambda = np = 500 \cdot 0.001 = 0.5$. Так как значение параметра λ мало, то будем использовать приближённую формулу Пуассона.

Вероятность события $A = \{$среди 500 номеров только два были набраны неправильно$\}$ определяется следующим образом:

$$P(A) = P_{500}(2) = C_{500}^2 \cdot 0.001^2 \cdot 0.999^{498} \approx \frac{0.5^2}{2!}e^{-0.5} = 0.0758.$$

Событие $B = \{$среди 500 номеров не более двух набрано неверно$\}$ означает, что неверно набрано или 0, или 1, или 2 номера. Тогда вероятность события B определяется по формуле:

$$P(B) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) \approx$$
$$\approx \frac{0.5^0}{0!}e^{-0.5} + \frac{0.5^1}{1!}e^{-0.5} + \frac{0.5^2}{2!}e^{-0.5} = 0.9856.$$

Пример 19. В среднем 20 студентов из 100 не сдают экзамены в сессию. Найдите вероятность следующих событий: $A = \{$10 студентов из 30 не сдадут экзамен во время сессии$\}$, $B = \{$не более половины студентов сдадут экзамены во время сессии$\}$, $C = \{$не менее 75% студентов сдадут экзамен в сессию$\}$.

Решение. Вероятность того, что студент не сдаст экзамен определяется как $p = 20/100 = 0.2$. Всего $n = 30$ студентов.Определим значение параметра λ. В условиях данной задачи $\lambda = 30 \cdot 0.2 = 6$. Так как значение параметра λ велико, то следует использовать приближённую формулу Муавра-Лапласа. Тогда

$$P(A) = P_{30}(10) = C_{30}^{10} \cdot 0.2^{10} \cdot 0.8^{20} \approx$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt{30 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\varphi\left(\frac{10 - 30 \cdot 0.2}{\sqrt{30 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) = \frac{\varphi(1.826)}{\sqrt{4.8}} = 0.034.$$

Событие $B = \{$не более половины студентов сдадут экзамены во время сессии$\}$ означает, что число студентов, сдавших экзамен лежит в пределах от 0 до 15. Таким образом, надо найти вероятность $P(0 \le m \le 15)$, где m — число сдавших экзамен студентов. Для вычисления этой вероятности применяется интегральная формула Муавра-Лапласа:

$$P(B) = P(0 \le m \le 15) \approx \Phi_0\left(\frac{15 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$= \Phi_0\left(\frac{9}{\sqrt{4.8}}\right) + \Phi_0\left(\frac{6}{\sqrt{4.8}}\right) = 0.9968.$$

Аналогично вычисляется вероятность события B:

$$P(B) = P(22.5 \le m \le 30) \approx$$
$$\approx \Phi_0\left(\frac{30 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{22.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$= \Phi_0\left(\frac{24}{\sqrt{4.8}}\right) - \Phi_0\left(\frac{16}{\sqrt{4.8}}\right) \approx 0.$$

Пример 20. Вероятность того, что студент не сдаст экзамен с первой попытки, равна $p = 0.2$. Сколько студентов должно прийти на экзамен, чтобы с вероятностью не менее 0.99 можно было ожидать, что доля студентов, не сдавших экзамен с первой попытки. отклонится от вероятности p по модулю не более чем на 0.04

Решение. Пусть n — минимальное число пришедших на экзамен студентов, необходимое для выполнения условия задачи. Пусть k — число студентов, не сдавших экзамен с первой попытки. Тогда величина k/n — это доля студентов. не сдавших экзамен с первой попытки.

Нам требуется найти такое n, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0.04\right) \ge 0.99.$$

Пусть $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0.04\right) = 0.99$. Перепишем данную вероятность.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0.04\right) = P\left(p - 0.04 \le \frac{k}{n} \le p + 0.04\right) = \\ = P\left(n(p - 0.04) \le k \le n(p + 0.04)\right).$$

Применим интегральную формулу Муавра-Лапласа.

$$P\left(n(p - 0.04) \le k \le n(p + 0.04)\right) = \\ = \Phi\left(\frac{(0.04 + p)n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{(p - 0.04)n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ = \Phi_0\left(\frac{0.04n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-0.04n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0.04\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \ge 0.99.$$

Сокращая на 2, получим, что

$$\Phi_0\left(\frac{0.04\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \ge 0.495.$$

По специальной таблице для функции $\Phi_0\left(\frac{0.04\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$ определяем значение аргумента, и, учитывая, что $p = 0.2$, $q = 0.8$, $\sqrt{pq} = 0.4$, получим:

$$\Phi_0\left(0.1\sqrt{n}\right) \ge 0.495 \Leftrightarrow 0.1\sqrt{n} \ge 2.573 \Rightarrow n \ge 662.033$$

Задача 65. Найти вероятность того, что в серии из 9 подбрасываний игральной кости 5 очков выпадет:
1. менее трёх раз;
2. не более трёх раз;
3. от двух до четырёх раз;
4. нечётное число раз;
5. больше половины раз.

Задача 66. Произведено три независимых выстрела по мишени. Вероятность при одном выстреле попасть в «десятку» равна 0,1, вероятность попасть в «девятку» — 0,2, вероятность попасть в «восьмёрку» — 0,3, вероятность в остальную часть мишени равна 0,4. Найти вероятность того, что будет набрано:
1. не менее 29 очков;
2. не более 28 очков;
3. ровно 29 очков.

Задача 67. Вероятность рождения мальчика равна $0,515$. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет:
1. четверо детей;
2. трое детей;
3. пятеро детей.

Задача 68. В группе 24 студента. Вероятность того, что каждый студент сдаст все экзамены во время сессии одна и та же и равна $0,6$. Найти наивероятнейшее число студентов, сдавших все экзамены во время сессии.

Задача 69. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:
1. ровно 75 раз;
2. не менее 35 раз;
3. не более 90 раз;
4. от 45 до 85 раз.

Задача 70. По каналу связи передаются 7 сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью $0,15$. Найти вероятность того, что будет правильно принято:
1. не менее двух сообщений;
2. не более 5 сообщений;
3. ровно 4 сообщения;
4. все сообщения.

Задача 71. Проведено 8 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что:

1. не менее двух раз выпадут 2 герба;
2. в трёх испытаниях из восьми не менее двух раз выпадут 2 герба;
3. в четырёх испытаниях из восьми не более двух раз выпадут 2 герба;
4. не более двух раз выпадут 2 герба.

Задача 72. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна $0,004$. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трёх не выдержат испытание.

Задача 73. Определить вероятность того, что при 900 бросках игральной кости «шестёрка» выпадет:
1. не более 500 раз;
2. не менее 200 раз;
3. не более 300 раз;
4. от 130 до 300 раз.

Задача 74. Вероятность того, что человек в возрасте 50 лет проживет еще 1 год равна $0,98428$. Найти вероятность того, что из 5 человек, по крайней мере 3 умрут в течение года[1].

[1] Формулировка взята из [1]. Ответ: $0,0000385$.

Глава 2. Одномерные случайные величины

Понятие случайной величины является одни из основных понятий теории вероятностей. Например, число пользователей посетивших страницу социальной сети в течение определенного промежутка времени подвержено значительным колебаниям в зависимости от многих случайных обстоятельств. Время, проведенное пользователем на странице Интернет ресурса, также является случайной величиной и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств. Размер уклонения точки приземления марсохода на поверхность планеты Марс от запланированной цели определяется большим количеством разнообразных причин, носящих случайный характер. Число автомобильных аварий, произошедших в городе в течение года с участием автомобиля определенной марки, носит случайных характер и может существенным образом влиять на размер страховой премии, устанавливаемой страховой компании для владельцев данной марки автомобиля.

Несмотря на всю разнородность конкретного содержания приведенных примеров, в каждом из них мы имеем дело с величиной, характеризующей исследуемое явление. Каждая из этих величин под воздействием случайных обстоятельств способна принимать различные значения и заранее указать, какое значение примет эта величина, нельзя, так как оно меняется случайным образом от испытания к испытанию. Разнообразие случайных величин весьма велико. Число принимаемых ими значений может быть конечным, счетным или несчетным. Целью данной главы является ознакомление студента с основными понятиями и техниками исследования экспериментов, результат которых описывается одной случайной величиной, дискретной или непрерывной.

2.1. Одномерные дискретные случайные величины

Дискретной случайной величиной (далее — д.с.в.) называется случайная величина, которая каждому элементарному исходу эксперимента ставит в соответствие одно из конечного (или счетного) набора чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$. Дискретная с.в. характеризуется рядом распределения и функцией распределения (далее — ФР).

Пример 21. У Вас в кармане лежат три десятирублевые и две пятирублевые монеты. Вы наугад достаете из кармана две монеты. Пусть с.в. ξ равна общей сумме (в рублях), которую Вы достали из кармана. Найти ряд распределения и ФР с.в. ξ; вероятность события $A=\{$на вынутую из кармана сумму можно купить одну поездку в московском метрополитене}; распределение с.в. $\eta = |\xi - 15|$.

Решение. Из условий эксперимента следует, что с.в. ξ является дискретной с.в., ее множество значений является конечным и имеет вид $\Gamma = \{10, 15, 20\}$. Читатель, освоивший темы предыдущих глав, без труда убедится, что ряд распределения д.с.в. ξ имеет вид, представленный в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Ряд распределения с.в. ξ

ξ	10	15	20
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

Перейдем к нахождению ФР с.в. ξ. Напомним, что ФР любой случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$. В случае д.с.в. ФР удобнее определить, используя ряд распределения (таблица 2.1). При $x \leq 10$ событие $\{\xi < x\}$ является невозможным и поэтому в соответствии с определением $F_\xi(x) = 0$. Если $10 < x \leq 15$, то событие $\{\xi < x\}$ состоит только из одного элементарного исхода $\{\xi = 10\}$ и, следовательно, $F_\xi(x) = \frac{1}{10}$. Аналогично, при $15 < x \leq 20$ событие $\{\xi < x\}$ представляет собой объединение двух непересекающихся событий $\{\xi = 10\}$ и $\{\xi = 15\}$ и, значит, $F_\xi(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$. Наконец, при $20 < x$ событие $\{\xi < x\}$ является достоверным и $F_\xi(x) = 1$. В итоге, ФР имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10, \\ 1/10, & 10 < x \leq 15, \\ 7/10, & 15 < x \leq 20, \\ 1, & 20 < x. \end{cases}$$

В настоящее время стоимость одной поездки в московском метрополитене равна 28 рублям. Поэтому вероятность вероятность события A совпадает с вероятностью события $\{\xi = 28\}$, которая равна нулю, поскольку число 28 не входит во множество значений с.в. ξ.

Для нахождения распределения с.в. $\eta = |\xi - 15|$ заметим, что функция η от д.с.в. также является д.с.в., поскольку она не может принимать больше значений, чем д.с.в. ξ. Очевидно, что, если д.с.в. ξ имеет ряд распределения, представленный в таблице 2.1, то ряд распределения с.в. $\eta = |\xi - 15|$ определяется таблицей 2.2.

Таблица 2.2. Ряд распределения с.в. η

ξ	0	5
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{10}$

Пример 22. Каждые две недели в четверг после занятий три одногруппника ходят в кинотеатр. Каждый раз только один из троих покупает на всех билеты в кино. Для того, чтобы решить кто из них платит,

трое одновременно начинают подбрасывать по правильной монете до тех пор, пока у одного из товарищей не выпадет сторона монеты, отличная от тех, что выпали у двух других. В этом случае, этот товарищ считает проигравшим и платит за входные билеты. Пусть с.в. ξ равна числу попыток, необходимых для выявления проигравшего. Найти ряд распределения с.в. ξ; вероятность события $A = \{10 < \xi < 15\}$ и $B = \{\xi > 3\}$.

Решение. Описываемый в примере эксперимент состоит в последовательном проведении независимых испытаний, каждое из которых заключается в том, что подбрасываются три правильные монеты. Успех заключается в том, что одна монета выпала на одну сторону, а две другие — на противоположную. Пусть p — вероятность успеха в одном испытании. Читателю не составит труда определить, что $p = \frac{3}{4}$.

Случайная величина ξ является дискретной, а множество ее значений счетно и имеет вид $\Gamma = \{1, 2, \dots\}$. Событие $\{\xi = i\}$ означает, что проигравший был выявлен лишь при i-м испытании и, значит, в каждом из предыдущих $(i-1)$ испытаниях произошла неудача. Поэтому $\mathbf{P}\{\xi = i\} = p(1-p)^{i-1},\ i \geq 1$. Ряд распределения с.в. ξ представлен в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Ряд распределения с.в. ξ

ξ	1	2	3	...	i	...
$\mathbf{P}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{3}{4^3}$	...	$\frac{3}{4^i}$	...

Обозначим через $F_\xi(x)$ ФР с.в. ξ. Вероятность событий типа $A = \{10 < \xi < 15\}$ и $B = \{\xi > 3\}$ удобнее всего определить, используя свойство ФР, которое говорит о том, что $\mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{10 < \xi < 15\} = \mathbf{P}\{10 \leq \xi < 15\} - \mathbf{P}\{\xi = 10\} = \\ = F_\xi(15) - F_\xi(10) - \mathbf{P}\{\xi = 10\},$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{\xi > 3\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi \leq 3\} = 1 - F_\xi(3) - \mathbf{P}\{\xi = 3\}.$$

Но в данном ФР $F_\xi(x)$ нам не известна, поэтому вероятности событий A и B будем искать по-другому. Заметим, что событие $A = \{10 < \xi < 15\}$ представляет собой объединение непересекающихся событий $\{\xi = 11\}$, $\{\xi = 12\}$, $\{\xi = 13\}$, $\{\xi = 14\}$ и, поэтому,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{\xi = 11\} + \mathbf{P}\{\xi = 12\} + \mathbf{P}\{\xi = 13\} + \mathbf{P}\{\xi = 14\} = \frac{255}{4^{14}}.$$

Аналогичным образом находится вероятность события B, что и предлагается сделать интересующемуся читателю самостоятельно[1].

[1] Данная вероятность должна быть равна $\frac{1}{64}$.

Задача 75. Подброшены две игральные кости. Рассматривается случайная величина ξ – разность выпавших на верхних гранях очков.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \xi^3 + 1$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = |\xi|$.

Задача 76. В урне лежат 2 белых шара, 2 черных и 1 синий шар. Поочередно с возвращением достают 2 шара. Случайная величина ξ – число вынутых белых шаров.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \cos(\pi[\xi^3 - 1])$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = 2|\xi - 1|$.

Задача 77. Пять студентов пришло на пересдачу экзамена. Вероятность успешной пересдачи для первого, третьего и пятого студента равна 0.6; вероятность успешной пересдачи для второго и четвертого студента равна 0.4.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \xi^3 - 8$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = \frac{|\xi-3|}{2}$.

Задача 78. На пути у машины 5 перекрестков со светофорами. Вероятность того, что на i-м перекрестке машина остановится равна p_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Известно, что $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $p_5 = 0.5$. Случайная величина ξ – число остановок машины на перекрестках.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = (\xi - 3)^2$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = \cos(\pi\xi)$.

Задача 79. В двух урнах содержится по пять пронумерованных шаров. В первой урне два шара имеют номер 1, два шара - номер 2 и один - номер 3. Во второй урне три шара имеют номер 1, а два шара - номер 2. Из урн берут по одному шару и находят произведение их номеров. Получившееся число - значение с.в. ξ.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \sin(\frac{\pi(\xi-3)}{2})$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = \cos(\pi\xi)$.

Задача 80. Мишень разделена на две непересекающихся части. Попадание в одну часть приносит 10 очков, в другую - 5 очков. Вероятности попаданий равны соответственно 0.4 и 0.6 соответственно. Промахнуться стрелок не может. Случайная величина ξ - суммарное число набранных очков за три выстрела.
1. Построить ряд распределения с.в.ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \sin(\frac{\pi(\xi-1)}{2})$, если ξ - четное число. В противном случае, найти распределение с.в. $\eta = \cos(\frac{\pi(\xi+1)}{2})$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = (\xi+5)^2$.

Задача 81. Мишень разделена на три непересекающихся части. Попадание в первую часть приносит 10 очков, во вторую - 5 очков, а в третью - 1 очко. Вероятности попаданий равны 0.2, 0.3 и 0.5 соответственно. Промахнуться стрелок не может. Случайная величина ξ - суммарное число набранных очков за два выстрела.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \frac{\xi+2}{2}$, если ξ - четное число. В противном случае, найти распределение с.в. $\eta = \frac{\xi-1}{2}$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = \cos(\pi[\xi - 10])$.

Задача 82. В партии, содержащей 20 изделий, имеется 4 изделия с браком. Наугад отобрали три изделия для проверки их качества. Рассматривается случайная величина ξ – число дефектных изделий среди выбранных.
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \frac{2\xi}{\pi}$.
4. Найти распределение с.в.$\mu = 3|\sin(2\pi\xi)| - 1$.

Задача 83. У дежурного имеется 7 разных ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь одной из комнат. Рассматривается случайная величина ξ – число попыток открыть дверь (проверенный ключ второй раз не используется).
1. Построить ряд распределения с.в. ξ.
2. Найти функцию распределения с. в. ξ и построить ее график.
3. Найти распределение с.в. $\eta = \sin(\frac{\pi\xi}{2}) + 1$.
4. Найти распределение с.в. $\mu = |\xi - 1|$.

Задача 84. Пусть ξ д.с.в., имеющая распределение $\mathbf{P}\{\xi = i\} = \frac{a}{30^i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.
1. Найти константу a.
2. Найти вероятность того, что с.в. ξ примет четное значение.

2.2. Одномерные непрерывные случайные величины

Непрерывной случайной величиной (далее — н.с.в.) называется случайная величина ξ, ФР которой $F_\xi(x)$ можно представить в виде

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(u)du.$$

Функция $p_\xi(x)$ называется плотностью распределения (или плотностью вероятностей) случайной величины ξ. Отметим, что все реально встречающиеся плотности распределения являются непрерывными (за исключением, быть может, конечного числа точек) функциями и, следовательно, для них плотность распределения $p_\xi(x)$ представляет собой производную ФР $F_\xi(x)$, т.е. $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$.

Пример 23. Спортсмен, принимающий участие в Олимпийских играх, метает копье на расстояние большее x метров с вероятностью $\alpha(x)$, которая равна[1]

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le A, \\ 1 - \frac{(x-50)^2}{1200}, & A < x \le 80, \\ \frac{(90-x)^2}{400}, & 80 < x \le 90, \\ 0, & 90 < x. \end{cases}$$

Пусть с.в. ξ равна расстоянию на которое спортсмен метнул копье в своей заключительной попытке. Найти ФР с.в. ξ; константу A; вероятность того, что спортсмен метнул копье больше, чем на 110 метров.

Решение. Ясно, что с.в. ξ есть непрерывная с.в., множество значений которой есть $[0, c)$, где c — неизвестное, но достаточно большое число. Обозначим ФР н.с.в. ξ через $F_\xi(x)$. Напомним, что $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ и заметим, что условию задачи вероятность $\alpha(x)$ есть ничто иное, как вероятность события $\{\xi > x\}$. Вспоминая, что вероятность попадания в любую (заданную до эксперимента) точку для н.с.в. равна нулю, получаем, что

$$F_\xi(x) = 1 - \mathbf{P}\{\xi \ge x\} = 1 - \alpha(x) - \mathbf{P}\{\xi = x\} =$$

[1] Формулировка эксперимента взята из [2].

$$
= 1 - \alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le A, \\ \frac{(x-50)^2}{1200}, & A < x \le 80, \\ 1 - \frac{(90-x)^2}{400}, & 80 < x \le 90, \\ 1, & 90 < x. \end{cases}
$$

Для нахождения константы A заметим, что ФР $F_\xi(x)$ является непрерывной. Поэтому $F_\xi(A) = 0 = \frac{(A-50)^2}{1200}$, откуда следует, что $A = 50$. Наконец, вероятность того, что спортсмен метнул копье больше, чем на 110 метров есть вероятность события $\{\xi > 110\}$, которая равна $\alpha(110) = 0$.

Пример 24. Плотность распределения н.с.в. ξ равна[1] $p_\xi(x) = \frac{c}{(1+x)^2}$, если $0 < x < 1$ и $p_\xi(x) = 0$ в противном случае. Найти константу A и ФР с.в. ξ; вероятность события $\{\frac{1}{4} < \xi < 2\}$.

Решение. Для нахождения константы c воспользуемся одним из свойств плотности распределения, а именно условием нормировки, согласно которому

$$
\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) dx = 1.
$$

Поскольку плотность $p_\xi(x)$ отлична от нуля только в области $\{0 < x < 1\}$, то подставляя соответствующие пределы интегрирования получаем

$$
\int_0^1 p_\xi(x) dx = c \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1.
$$

Отсюда находим, что $c = 2$.

Перейдем к нахождению ФР н.с.в. ξ, которую обозначим через $F_\xi(x)$. Напомним, что ФР $F_\xi(x)$ есть интеграл по области $\mathbf{G} = \{-\infty < u < x\}$ от плотности $p_\xi(u)$.

Поскольку при $x \le 0$ в области $\mathbf{G}$ плотность $p_\xi(x)$ равна нулю, то $F_\xi(x) = 0$. Если же $0 < x \le 1$, область $\mathbf{G}$ представима в виде объединения двух непересекающихся областей: $\mathbf{G}_1 = \{0 < u < x\}$, где

[1] Интересующемуся читателю предлагается решить следующую задачу [2]. На отрезке единичной длины наугад выбирается точка, которая делит отрезок на две части. Чему равна вероятность того, что отношение длины короткой части к длине длинной части меньше или равно $\frac{1}{2}$.

плотность не равна нулю и $\mathbf{G}_2 = \{-\infty < u < 0\}$, где плотность равна нулю. Отсюда получаем, что при $0 < x \leq 1$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\; du + \int_{0}^{x} \frac{2}{(1+u)^2}\; du = \frac{2x}{1+x}.$$

Наконец, при $1 < x$, область $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \bigsqcup \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_1 = \{0 < u < 1\}$, где плотность не равна нулю и $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G} \backslash \mathbf{G}_1$, где плотность равна нулю. Поэтому при $1 < x$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\; du + \int_{0}^{1} \frac{2}{(1+u)^2}\; du + \int_{1}^{x} 0\; du = 1.$$

Зная ФР с.в. ξ вероятность события $\{\frac{1}{4} < \xi < 2\}$ удобно найти по свойству ФР, а именно[1]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{4} < \xi < 2\right\} = F_\xi(2) - F_\xi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5}.$$

Пример 25. На интервале $(0, 1)$ случайным образом выбирается точка. Пусть с.в. ξ равна координате этой точки. Найти плотности распределения с.в. $\eta = \frac{\xi}{1-\xi}$ и с.в. $\gamma = \xi(1-\xi)$.

Решение. По условию задачи с.в. ξ является непрерывной с множеством значений $(0, 1)$, а ее плотность равна $p_\xi(x) = 1$, если $0 < x < 1$ и $p_\xi(x) = 0$ в противном случае. Другими словами с.в. ξ имеет равномерное распределение на $(0, 1)$. Далее нам понадобится ФР с.в. ξ, которая, как нетрудно убедиться, равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Покажем как найти плотность с.в. $\eta = \frac{\xi}{1-\xi}$ и предоставим заинтересованному читателю самостоятельно найти плотность с.в. γ. Функция

[1]Читатель должен был заметить, что здесь было использовано еще одно свойство, которое говорит о том, что вероятность попадания в любую (заданную до эксперимента) точку для н.с.в. равна нулю.

η от н.с.в. ξ также является н.с.в.[1] Найдем сначала ФР с.в. η, которую обозначим через $F_\eta(z)$. По определению, $F_\eta(z)$ представляет собой вероятность события $\{\eta < z\} = \{\frac{\xi}{1-\xi} < z\}$. Учитывая, что н.с.в. ξ принимает значения только $(0,1)$, то при $z \le 0$ событие $\{\frac{\xi}{1-\xi} < z\}$ является невозможным и, значит, $F_\eta(z) = 0$. Далее, при $z > 0$ имеем

$$F_\eta(z) = \mathbf{P}\{\eta < z\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\xi}{1-\xi} < z\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi < \frac{z}{1+z}\right\} = \\ = F_\xi\left(\frac{z}{1+z}\right) = \frac{z}{1+z}.$$

Для нахождения плотности с.в. η остается лишь продифференцировать ФР $F_\eta(z)$.

Ниже предлагается несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 85. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найти константу .
2. Найти функцию распределения н.с.в. ξ.
3. Пусть с.в. η - площадь круга радиуса ξ. Найти плотность с.в. η.

Задача 86. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}, & x \in (-\infty, \infty), \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найти вероятность события $\{\xi < 0\}$.
2. Найти плотность с.в. $\eta = e^{-\xi^2}$.

Задача 87. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} Ax^2, & x \in [-2; 2], \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найти константу A.

[1] В общем случае, функция от н.с.в. может быть как непрерывной, так и дискретной.

2. Найти вероятность события $\{\xi > 0\}$.
3. Найти плотность с.в. $\eta = \begin{cases} \xi - 1, & \xi \in [1;2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$.

Задача 88. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} Ax^{-2}, & x \geq 20, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу A.
2. Найти плотность с.в. $\eta = \frac{1}{\xi - 1}$.

Задача 89. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу a.
2. Найти квантиль уровня 0.95.

Задача 90. Пусть с.в. ξ_1, с.в. ξ_2 и с.в. ξ_3 независимы, и каждая имеет плотность

$$p_\xi(x) = \begin{cases} Ax^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу A.
2. Найти плотность распределения с.в. $\eta = \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.
3. Найти вероятность события $\{\eta > \frac{1}{2}\}$.

Задача 91. Пусть с.в. ξ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ независимы и каждая имеет плотность

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & a \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу a.
2. Найти плотность распределения с.в. $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$.
3. Найти вероятность события $\{\eta > \frac{1}{2}\}$.

Задача 92. Пусть с.в. ξ имеет плотность

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу a.
2. Найти вероятность события $\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\}$.

Задача 93. Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале $[0, 10]$. Найти вероятность события $\{\xi + \frac{10}{\xi} > 7\}$.

Задача 94. Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием равным 1 и дисперсией равной 4. Найти вероятность события $\{\xi^2 - 2\xi \leq 8\}$.

Глава 3. Двумерные случайные величины

При проведении испытаний часто бывает интересно исследовать не одну случайную величину, а несколько случайных величин и связь между ними. Например, если эксперимент заключается в том, что тестируется новое лекарственное средство, то исследователя может одновременно интересовать уровень холестерина, кровяное давление и уровень глюкозы в крови испытуемого. Аналогичным образом, социолог при исследовании поведения голосующих может быть заинтересован в доходе и образовании каждого голосующего. Цель данной главы — ознакомить студента с основными понятиями и техниками исследования экспериментов, результат которых описывается двумя случайными величинами. Далее речь пойдет только о парах случайных величин. Читатель, желающий попрактиковаться в решении более сложных и интересных задач по теме настоящего параграфа, может обратиться, например, к [3]— [4].

3.1. Двумерные дискретные случайные величины

Рассмотрение двумерных случайных величин удобнее начать со случая дискретных случайных величин. Итак, случайная величина (ξ, η) является двумерной д.с.в., если каждая из с.в. ξ и η является д.с.в. и они определены на одном вероятностном пространстве. Двумерная д.с.в. (ξ, η), как и любая д.с.в., характеризуется своим рядом распределения и функцией распределения.

Пример 26. Подбрасываются две правильные игральные кости. Пусть с.в. ξ равна наименьшему из чисел, выпавших на верхних гранях игральных костей, а с.в. η — сумме чисел на верхних гранях[1]. Найти ряд распределения и ФР двумерной с.в. (ξ, η); распределение каждой из ее компонент ξ и η [2]; проверить являются ли с.в. ξ и η независимыми.

Решение. Ясно, что с.в. ξ является дискретной и может принимать значения $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и с.в. η тоже является дискретной, принимающей значения $\{2, 3, \ldots, 12\}$. Двумерная д.с.в. (ξ, η) может принимать только пары значений (i, j) $(i = 1, 2, \ldots, 6,\ j = 2, 3, \ldots, 12)$. Читатель, освоивший темы предыдущих глав, без труда убедится, что ряд распределения двумерной д.с.в. (ξ, η) имеет вид, представленный в таблице 3.1.

[1] Формулировка эксперимента взята из [2].

[2] Так называемое «маргинальное распределение».

Таблица 3.1. Ряд распределения с.в. (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

В верхней строке таблицы 3.1 перечислены все возможные значения случайной величины η, а в левом столбце — все возможные значения случайной величины ξ. На пересечении столбца со строкой приведена вероятность того, что двумерная д.с.в. (ξ, η) приняла соответствующую пару значений. Например, на пересечении 3-й строки и 2-го столбца приведена вероятность $p_{22} = \mathbf{P}\{\xi = 2, \eta = 2\}$ совместного осуществления событий $\{\xi = 2\}$ и $\{\eta = 2\}$. Поскольку событие $\{\xi = 2, \eta = 2\}$ является невозможным, то его вероятность равна нулю.

Для получения маргинального распределения с.в. ξ необходимо просуммировать таблицу 3.1 по столбцам, а для получения маргинального распределения с.в. η — по строкам. Таким образом, ряды распределения с.в. ξ и с.в. η имеют вид, представленный в таблице 3.2 и таблице 3.3 соответственно.

Таблица 3.2. Ряд распределения с.в. ξ

ξ	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Таблица 3.3. Ряд распределения с.в. η

η	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для контроля правильности составления рядя распределения рекомендуется просуммировать все значения входящих в него вероятностей. Если сумма не равна единице, то это означает, что при составлении ряда распределения была допущена ошибка.

Прежде, чем приступить к нахождению ФР напомним, что ФР любой двумерной с.в. (ξ, η) называется функция $F_{\xi,\eta}(x, y)$, значение которой в точке (x, y) есть вероятность события $\{\xi < x, \eta < y\}$. В случае д.с.в. ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$ легко определить, используя совместный ряд распределения (таблица 3.1). Для этого необходимо просуммировать вероятности p_{ij} по всем тем значениям i и j для которых $i < x$, $j < y$. Поскольку при $x \leq 1$ или $y \leq 2$ событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ невозможно, то $F_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ при $x \leq 1$ или $y \leq 2$. Далее, если $1 < x \leq 2$ и $2 < y \leq 3$, то событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ эквивалентно событию $\{\xi = 1, \eta = 2\}$, которое, как видно из таблицы 3.1, происходит с вероятностью $1/36$, поэтому $F_{\xi,\eta}(x, y) = 1/36$. Если же $1 < x \leq 2$ и $3 < y \leq 4$, то событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{\xi = 1, \eta = 2\}$ и $\{\xi = 1, \eta = 3\}$ и поэтому

$F_{\xi,\eta}(x, y) = 1/36 + 2/36 = 3/36$. Далее, если $1 < x \leq 2$ и $4 < y \leq 5$, то событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ есть опять же объединение непересекающихся событий $\{\xi = 1, \eta = 2\}$, $\{\xi = 1, \eta = 3\}$ и $\{\xi = 1, \eta = 4\}$. Поэтому $F_{\xi,\eta}(x, y) = 1/36 + 2/36 + 2/36 = 5/36$ при $1 < x \leq 2$ и $4 < y \leq 5$. Легко видеть, что при $1 < x \leq 2$ и $5 < y \leq 6$ $F_{\xi,\eta}(x, y) = 7/36$, а при $1 < x \leq 2$ и $6 < y \leq 7$ $F_{\xi,\eta}(x, y) = 9/36$. Наконец, при $1 < x \leq 2$ и $7 < y$ значение $F_{\xi,\eta}(x, y)$ равно $11/36$.

Пойдем далее и рассмотрим случай, когда $2 < x \leq 3$ и $2 < y \leq 3$. В этом случае событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ есть объединение двух непересекающихся событий $\{\xi = 1, \eta = 2\}$ и $\{\xi = 2, \eta = 2\}$, поэтому $F_{\xi,\eta}(x, y) = 1/36 + 0 = 1/36$. Теперь, если $2 < x \leq 3$ и $3 < y \leq 4$, то событие $\{\xi < x, \eta < y\}$ есть объединение четырех непересекающихся событий $\{\xi = 1, \eta = 2\}$, $\{\xi = 2, \eta = 2\}$, $\{\xi = 1, \eta = 3\}$ и $\{\xi = 2, \eta = 3\}$, поэтому $F_{\xi,\eta}(x, y) = 1/36 + 0 + 2/36 + 0 = 3/36$. Продолжая подобным образом находятся значения ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$ для оставшихся значений x и y. Мы не будем этого делать и предоставляем интересующемуся читателю самостоятельно доделать построение. Для контроля построения в Приложении 1 приводится окончательный вид ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$.

Проверим теперь, являются ли компоненты двумерной д.с.в. (ξ, η) независимыми. Интуитивно кажется, что они не являются независимыми уже даже в силу того, что сумма очков на двух гранях зависит от того, что выпало на одной из граней. Однако в теории вероятностей иногда правильные ответы на поверку являются контринтуитивными[1]. Поэтому, подходя к данному вопросу формально, необходимо проверить, что для всех возможных значений $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с.в. ξ и всех возможных значений $j \in \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ с.в. η выполняется равенство $\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\} = \mathbf{P}\{\xi = i\}\mathbf{P}\{\eta = j\}$ или показать, что $F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ функции распределения с.в. ξ и η соответственно. Имеем,

$$\mathbf{P}\{\xi = 1, \eta = 2\} = \frac{1}{36} \neq \mathbf{P}\{\xi = 1\}\mathbf{P}\{\eta = 2\},$$

следовательно, как и ожидалось, с.в. ξ и η не являются независимыми.

Пример 27. При производстве пластика осуществляется проверка каждой детали на соответствие требованиям к цвету и длине. Пусть

[1]Приведем пример из [5]. Рассмотрим эксперимент, который заключается в том, что правильную монету подбрасывают (независимо) три раза подряд. Пусть событие $A = \{$выпал максимум один “орел“$\}$, а событие $B = \{$выпали либо только “орлы“, либо только “решки“$\}$. Интуитивно кажется, что события являются зависимыми. Однако, нетрудно показать, что $P(AB) = P(A)P(B)$, т. е. в действительности они независимы. Интересный вопрос: сохранится ли независимость, если в эксперименте будет использована неправильная монета?

с.в. $\xi = 1$, если деталь соответствует требованиям к цвету, и $\xi = 0$ иначе. Также пусть с.в. $\eta = 1$, если деталь соответствует требованиям к длине, и $\eta = 0$ иначе. Пусть для двумерной д.с.в. (ξ, η) имеется ряд распределения, представленный в таблице 3.4. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот; ряд распределения с.в. $\vartheta = \xi^2 + \eta^2$; ряд распределения двумерной с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = 25(\xi - 1)$, $\phi = 50(\eta - 1)$.

Таблица 3.4. Ряд распределения с.в. (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	$0,0002$	$0,0098$
1	$0,0198$	$0,9702$

Решение. Обозначим условную вероятность того, что с.в. ξ примет значение $i \in \{0, 1\}$ при условии, что с.в. η приняла значение $j \in \{0, 1\}$ через π_{ij}. Данную вероятность удобно рассматривать как условную вероятность события $\{\xi = i\}$ при условии события $\{\eta = j\}$, т.е. $\pi_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = i|\eta = j\}$. Тогда, по определению условной вероятности имеем

$$\pi_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = i|\eta = j\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}}{\mathbf{P}\{\eta = j\}}.$$

Аналогичным образом определим и условную вероятность q_{ij} того, что с.в. η примет значение $i \in \{0, 1\}$ при условии, что с.в. ξ приняла значение $j \in \{0, 1\}$, т.е.

$$q_{ij} = \mathbf{P}\{\eta = i|\xi = j\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}}{\mathbf{P}\{\xi = j\}}.$$

Как видно из определения условных вероятностей π_{ij} и q_{ij}, для их нахождения необходимо знать не только совместное, но и маргинальные распределения компонент двумерной д.с.в. (ξ, η). Они находится, как и в предыдущем примере, с помощью совместного рядя распределения. Результат представлен в таблице 3.5 и таблице 3.6 соответственно.

Таблица 3.5. Ряд распределения с.в. ξ

ξ	0	1
P	0,01	0,99

Таблица 3.6. Ряд распределения с.в. η

η	0	1
P	0,02	0,98

В случае д.с.в. условное распределение удобно записывать в виде таблицы. В таблице 3.7 представлено условное распределение с.в. ξ при условии η, а в таблице 3.8 — условное распределение с.в. η при условии ξ. В верхней строке таблицы 3.7 перечислены все возможные значения случайной величины η, а в левом столбце — все возможные значения случайной величины ξ. На пересечении строки со столбцом приведена соответствующая условная вероятность π_{ij}. Аналогично в верхней строке таблицы 3.8 перечислены все возможные значения случайной величины ξ, а в левом столбце — все возможные значения случайной величины η. На пересечении строки со столбцом приведена соответствующая условная вероятность q_{ij}.

Таблица 3.7. Условное распределение с.в. ξ при условии η

$\xi\backslash\eta$	0	1
0	$\pi_{00} = \frac{0{,}0002}{0{,}02}$	$\pi_{01} = \frac{0{,}0098}{0{,}98}$
1	$\pi_{10} = \frac{0{,}0198}{0{,}02}$	$\pi_{11} = \frac{0{,}9702}{0{,}98}$

Таблица 3.8. Условное распределение с.в. η при условии ξ

$\eta\backslash\xi$	0	1
0	$q_{00} = \frac{0{,}0002}{0{,}01}$	$q_{01} = \frac{0{,}0098}{0{,}99}$
1	$q_{10} = \frac{0{,}0198}{0{,}01}$	$q_{11} = \frac{0{,}9702}{0{,}99}$

Перейдем к нахождению распределения с.в. $\vartheta = \xi^2 + \eta^2$. Данная с.в. является функцией от двумерной д.с.в. (ξ, η) и поэтому также является д.с.в., принимающей значения $i^2 + j^2$ с вероятностью $p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}$, где i — значение с.в. ξ, а j — с.в. η. Для построения ряда распределения с.в. ϑ необходимо, во-первых, исключить все те значения $i^2 + j^2$, вероятность которых равна нулю, а, во-вторых, объединить в один столбец все одинаковые значения $i^2 + j^2$, приписав этому столбцу суммарную вероятность. Итак, с.в. ϑ может принять значение 0, 1 и 2 с ненулевыми вероятностями, причем значение 1 она может принять с суммарной вероятностью $0,0098 + 0,0198 = 0,0296$. Ряд распределения с.в. ϑ представлен в таблице 3.9.

Таблица 3.9. Ряд распределения с.в. ϑ

ϑ	0	1	2
P	0,0002	0,0296	0,9702

Совместный ряд распределения двумерной с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = 25(\xi - 1)$, $\phi = 50(\eta - 1)$ находится аналогичным образом. Каждая компонента двумерной с.в. (ψ, ϕ) является функцией от д.с.в., и поэтому (ψ, ϕ) является дискретной с.в. Она принимает пары значений $(25(i-1), 50(j-1))$ с вероятностями $p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}$, где i — значение с.в. ξ, а j — с.в. η. Ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ) представлен в таблице 3.10.

Таблица 3.10. Ряд распределения с.в. (ψ, ϕ)

$\psi\backslash\phi$	-50	0
-25	$0,0002$	$0,0098$
0	$0,0198$	$0,9702$

Ниже предлагается несколько задач для самостоятельного решения. Задачи 95-114 рекомендуется начать с

– построения рядов распределения с.в. ξ и с.в. η;

– нахождения функции распределения двумерной д. с. в. (ξ, η);
– проверке являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
– нахождении условного распределения с.в. ξ при условии η и наоборот.

Задача 95. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	2	3	4
3	0,03	0,11	p
7	0,11	0,31	0,15

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi - 2$, $\phi = \eta^2$.
6. Построить ряд распределения случайной величины $\mu = \eta - 4\xi + 3$.

Задача 96. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	0,12	0,14	p
2	0,25	0,15	0,13

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^3$, $\phi = 2\eta + 2$.
6. Найти с.в. $\mu = |\eta|\xi$.

Задача 97. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	2	5	8
4	p	0,31	0,35
8	0,05	0,11	0,03

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.

5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{\xi}$, $\phi = \eta - \sqrt{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = \eta^2 + 10\xi$.

Задача 98. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	8	10	12
4	0,11	0,12	0,25
5	p	0,31	0,05

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi + \xi^2$, $\phi = -\sqrt{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = (\eta - 10)^2 + \xi$.

Задача 99. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	$-\pi$	0	π
$-\pi$	0,17	0,13	0,25
π	0,1	p	0,05

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi + \pi$, $\phi = -\eta$.
6. Найти с.в. $\mu = \cos(\eta + \xi)$.

Задача 100. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	2	3	4
-2	0,05	0,36	0,01
4	p	0,31	0,18

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.

5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^{\xi}$, $\phi = \eta - 4$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{4\eta}{\xi} + 1$.

Задача 101. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	2	4	6
-4	p	$0,12$	$0,26$
4	$0,12$	$0,16$	p

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^{\xi+4}$, $\phi = \frac{1}{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{\max(\xi,\eta)}{2}$ и с.в. $\gamma = \frac{\min(\xi,\eta)}{2}$.
7. Найти вероятность событий $\{\mu < 5\}$ и $\{\gamma < 5\}$.

Задача 102. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	0	2	4
-2	p	$0,11$	$0,09$
4	$0,09$	$0,56$	p

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \frac{1}{\xi+1}$, $\phi = \frac{1}{\eta+1}$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{\eta}{\log_2 |\xi|} - 1$.
7. Найти вероятность события $\{\mu < 0\}$.

Задача 103. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	-1	7	15
-1	$0,21$	p	$0,31$
1	$0,14$	$0,06$	$0,14$

1. Найти неизвестную вероятность p.

2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{\xi}$, $\phi = \sqrt{\eta + 1}$.
6. Найти с.в. $\mu = \sqrt{2|\eta - 7| + \xi^2}$.
7. Найти вероятность события $\{0 < \mu < 4\}$.

Задача 104. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	2	3	4
-2	$0,25$	$0,11$	$0,09$
4	p	$0,31$	$0,1$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{2^{\xi}}$, $\phi = \eta^{\eta - 1}$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{2\eta}{\xi} - 1$.
7. Найти вероятность события $\{-2 < \mu < 4\}$.

Задача 105. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	2	5	8
0.4	$0,15$	$0,3$	$0,35$
0.8	p	$0,12$	$0,03$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = 10\xi$, $\phi = 2^{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = \eta^2 - 10\xi$.
7. Найти вероятность события $\{\mu < 60\}$.

Задача 106. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	20	30	40
2	$0,3$	$0,12$	$0,08$
4	$0,09$	p	$0,11$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^{\frac{1}{\xi}}$, $\phi = \frac{\eta}{10}$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{\eta-10}{\xi}$.
7. Найти вероятность события $\{\mu < 8\}$.

Задача 107. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	-2	-1	0
-2	$0,1$	$0,2$	$0,3$
-1	$0,2$	p	$0,1$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{\xi+1}$, $\phi = \eta + 2$.
6. Найти с.в. $\mu = \frac{2|\eta|}{\xi}$.
7. Найти вероятность события $\{\mu > 0\}$.

Задача 108. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	20	31	40
-1	p	$0,16$	p
1	$0,09$	$0,3$	$0,32$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = -\xi$, $\phi = \frac{40-\eta}{2}$.

6. Найти с.в. $\mu = \lg|\frac{\eta-30}{\xi}|$.
7. Найти вероятность события $\{\mu > 1\}$.

Задача 109. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	10	14	18
1	0,25	0,15	0,32
9	p	0,05	p

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = 9 - \xi$, $\phi = \eta - \frac{1}{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = \eta - 2\sqrt{\xi} + 1$.
7. Найти вероятность события $\{\mu < 12\}$.

Задача 110. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	2	3	4
4	0,04	0,11	0,09
9	p	0,31	0,35

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{\xi}$, $\phi = 2^{\eta}$.
6. Найти с.в. $\mu = \eta - \sqrt{\xi}$.
7. Найти вероятность события $\{\mu > 12\}$.

Задача 111. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi \backslash \eta$	-1	1	2
0	p	0,01	0,26
1	p	p	0,37

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.

4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^{\xi+1}$, $\phi = \eta + 1$.
6. Найти с.в. $\mu = \xi - \eta^2 + 2$.

Задача 112. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	3	8	15
0	$3p$	$0,3$	$0,35$
0.8	p	$0,12$	$0,03$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = 10\xi$, $\phi = \frac{8-\eta}{2}$.
6. Найти с.в. $\mu = \sqrt{\eta + 1} - 10\xi$.

Задача 113. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	-2	-1	1
-3	$0,04$	$0,11$	$0,09$
3	$0,35$	$0,31$	p

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.
3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \sqrt{3\xi}$, $\phi = \eta^2$.
6. Найти с.в. η и с.в. $\mu = |\xi\eta|$.

Задача 114. Двумерная д.с.в. (ξ, η) задана рядом распределения

$\xi\backslash\eta$	-2	0	2
-1	$0,05$	$0,05$	$0,1$
0	$0,1$	p	$0,1$
1	$0,12$	$0,33$	$2p$

1. Найти неизвестную вероятность p.
2. Построить одномерные распределения дискретных случайных величин ξ и η.

3. Построить условное распределение с.в. ξ относительно с.в. η и наоборот — условное распределение с.в. η относительно с.в. ξ.
4. Проверить на независимость случайные величины ξ и η.
5. Построить ряд распределения двумерной д.с.в. (ψ, ϕ), где $\psi = \xi^2$, $\phi = \frac{\eta}{2}$.
6. Найти с.в. $\mu = \sqrt{2|\xi\eta|}$.

3.2. Двумерные непрерывные случайные величины

Перейдем к рассмотрению двумерных непрерывных случайных величин. Итак, случайная величина (ξ, η) является двумерной н.с.в., если каждая из с.в. ξ и η является н.с.в. и они определены на одном вероятностном пространстве. Двумерная н.с.в. (ξ, η), как и любая н.с.в., характеризуется функцией распределения и плотностью распределения.

Пример 28. Плотность двумерной н.с.в. (ξ, η) имеет вид [1]

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{cx}{r^2}, & 0 < x < r < \infty,\ 0 < y < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти константу c; совместную ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$; значение совместной ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$ в точке $(0, \pi)$; вероятность попадания двумерной н.с.в. (ξ, η) в прямоугольник с координатами $(\frac{r}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(r, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{r}{2}, \pi)$, (r, π); плотности распределения с.в. ξ и с.в. η; ФР с.в. ξ и с.в. η; условные плотности распределения с.в. ξ при условии η и наоборот; проверить с.в. ξ и с.в. η на независимость; плотность распределения н.с.в. $\mu = \xi^2 + \eta^2$ и значение ФР с.в. μ в точке $z = r$; вероятность события $\{\xi > \eta\}$.

Решение. Для нахождения константы c воспользуемся одним из свойств плотности распределения, а именно условием нормировки, согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x, y) dy dx = 1.$$

[1] Интересующемуся читателю предлагается решить следующую задачу [2]. Внутри круга радиуса b с центром в начале координат случайным образом ставится точка. Пусть с.в. X есть расстояние от этой точки до начала координат, а с.в. Y — угол в радианах между линией, соединяющей наугад выбранную точку с началом координат и осью Ox. Найти совместную ФР двумерной н.с.в. (X, Y).

Поскольку плотность $p_{\xi,\eta}(x,y)$ отлична от нуля только в области $\{0 < x < r,\ 0 < y < 2\pi\}$, то подставляя соответствующие пределы интегрирования получаем

$$\int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx = c\int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{r^2}dydx = 1.$$

Отсюда находим, что $c = \frac{1}{\pi}$.

Перейдем к нахождению совместной ФР $F_{\xi,\eta}(x,y)$. Напомним, что

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \mathbf{P}\{\xi < x, \eta < y\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_{\xi,\eta}(u,v)dvdu,$$

т.е. ФР $F_{\xi,\eta}(x,y)$ есть двукратный интеграл по области $\mathbf{G} = \{-\infty < u < x, -\infty < v < y\}$ от плотности $p_{\xi,\eta}(u,v)$.

Поскольку при $x \le 0$ или $y \le 0$ в области $\mathbf{G}$ плотность равна нулю, то $F_{\xi,\eta}(x,y) = 0$. Если $0 < x \le r$ и $0 < y \le 2\pi$, то область $\mathbf{G}$ представима в виде объединения двух непересекающихся областей: $\mathbf{G}_1 = \{0 < u < x, 0 < v < y\}$, где плотность не равна нулю и $\mathbf{G}_2 = \{-\infty < u < 0, -\infty < v < 0\}$, где плотность равна нулю. Отсюда получаем, что при $0 < x \le r$ и $0 < y \le 2\pi$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dvdu + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{u}{\pi r^2}dvdu = \frac{x^2 y}{2\pi r^2}.$$

Далее, при $0 < x \le r$ и $2\pi < y$, область $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \bigsqcup \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_1 = \{0 < u < x, 0 < v < 2\pi\}$, где плотность не равна нулю и $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G} \backslash \mathbf{G}_1$, где плотность равна нулю. Поэтому при $0 < x \le r$ и $2\pi < y$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^{2\pi} \frac{u}{\pi r^2}\ dvdu = \frac{x^2}{r^2}.$$

Аналогичным образом получаем, что при $r < x$ и $0 < y \le 2\pi$ $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \bigsqcup \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_1 = \{0 < u < r, 0 < v < y\}$, где плотность не равна нулю и $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G} \backslash \mathbf{G}_1$, где плотность равна нулю. Отсюда получаем, что при $r < x$ и $0 < y \le 2\pi$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_0^r \int_0^y \frac{u}{\pi r^2}\ dvdu = \frac{y}{2\pi}.$$

Наконец, при $r < x$ и $2\pi < y$, имеем

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{u}{\pi r^2}\ dvdu = 1.$$

Теперь, зная вид совместной ФР $F_{\xi,\eta}(x,y)$ можно найти ее значение в точке $(0,\pi)$. Оно равно нулю. Вероятность попадания двумерной н.с.в. (ξ,η) в прямоугольник с координатами $(\frac{r}{2},\frac{\pi}{2})$, $(r,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{r}{2},\pi)$, (r,π) проще всего находится по свойству двумерной ФР, когда ее вид известен[1]:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{r}{2} < \xi < r, \frac{\pi}{2} < \eta < \pi\right\} =$$
$$= F_{\xi,\eta}(r,\pi) - F_{\xi,\eta}\left(\frac{r}{2},\pi\right) - F_{\xi,\eta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right) + F_{\xi,\eta}\left(\frac{r}{2},\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

Для нахождения плотностей распределения с.в. ξ и с.в. η воспользуемся свойством плотности двумерной с.в. Пусть $p_\xi(x)$ — плотность распределения с.в. ξ, а $p_\eta(y)$ — плотность распределения с.в. η. Тогда,

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dy.$$

Если $x \notin (0,r)$, то согласно условию задачи совместная плотность $p_{\xi,\eta}(x,y)$ равна нулю и поэтому $p_\xi(x) = 0$. Если же $x \in (0,r)$, то

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dy + \int_0^{2\pi} \frac{x}{\pi r^2}\ dy + \int_{2\pi}^{\infty} 0\ dy = \frac{2x}{r^2}.$$

[1] Или по свойству плотности распределения, а именно $\mathbf{P}\{a < \xi < b, c < \eta < d\} = \int_a^b \int_c^d p_{\xi,\eta}(x,y)\ dydx$.

Предоставляем интересующемуся читателю самостоятельно убедиться, что плотность $p_\eta(y)$ равна

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < y < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим ФР с.в. ξ через $F_\xi(x)$, а ФР с.в. η через $F_\eta(y)$. Читатель, освоивший тему одномерных непрерывных с.в., без труда убедится, что ФР $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ имеют вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 < x \le r, \\ 1, & x > r, \end{cases} \quad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{y}{2\pi}, & 0 < y \le 2\pi, \\ 1, & y > 2\pi. \end{cases}$$

Вид одномерных ФР $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ можно также получить из совместной ФР $F_{\xi,\eta}(x, y)$. Для этого необходимо воспользоваться свойством совместной ФР, которое говорит о том, что

$$F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x, \infty), \quad F_\eta(y) = F_{\xi,\eta}(\infty, y).$$

Перейдем к нахождению условных плотностей. Обозначим через $p_\xi(x|\eta = y)$ условную плотность распределения с.в. ξ при условии, что с.в. η приняла значение y, а через $p_\eta(y|\eta = x)$ условную плотность распределения с.в. η при условии, что с.в. ξ приняла значение x. По определению имеем

$$p_\xi(x|\eta = y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}, \quad p_\eta(y|\xi = x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\xi(x)}.$$

Покажем как находится $p_\xi(x|\eta = y)$ и предлагаем интересующемуся читателю проделать аналогичные шаги для нахождения $p_\eta(y|\xi = x)$. Итак, если $y \notin (0, 2\pi)$, то плотность $p_\eta(y)$ равна нулю и, значит, $p_\xi(x|\eta = y)$ не существует. Если же $y \in (0, 2\pi)$, то $p_\eta(y)$ не равна нулю и поэтому условная плотность $p_\xi(x|\eta = y)$ существует. При $x \notin (0, r)$ $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ и, поэтому, $p_\xi(x|\eta = y) = 0$, а при $x \in (0, r)$

$$p_\xi(x|\eta = y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} = \frac{\frac{x}{\pi r^2}}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{2x}{r^2}.$$

Проверим, являются ли н.с.в. ξ и η независимыми. По определению они являются независимыми, если для всех x и y $p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$. В том, что это равенство выполняется без труда можно убедиться, сравнивая выражения для $p_{\xi,\eta}(x,y)$ с произведением $p_\xi(x)p_\eta(y)$. К выводу о том, что с.в. ξ и η являются независимыми можно было прийти еще и исходя из того, что условная плотность $p_\xi(x|\eta=y)$ не зависит от y и совпадает с безусловной плотностью $p_\xi(x)$[1].

Далее для удобства расчетов будем считать, что $r<2\pi$. Нахождения плотности распределения н.с.в. $\mu=\xi^2+\eta^2$ удобнее начинать с нахождения ее ФР, которую мы обозначим через $F_\mu(z)$. По определению $F_\mu(z)=\mathbf{P}\{\mu<z\}=\mathbf{P}\{\xi^2+\eta^2<z\}$. Если $z\le 0$, то событие $\{\xi^2+\eta^2<z\}$ является невозможным и, поэтому, $F_\mu(z)=0$. Заметим, что максимальное значение, которое может принять с.в. ξ равно r, а максимальное значение с.в. η равно 2π. Поэтому сумма квадратов с.в. ξ и η не может превышать $r^2+4\pi^2$. В связи с этим, если $z>r^2+4\pi^2$, то событие $\{\xi^2+\eta^2<z\}$ является достоверным и, значит, $F_\mu(z)=1$. Теперь, если $0<z\le r^2+4\pi^2$ значение ФР $F_\mu(z)$ зависит от взаимного расположения области определения совместной плотности $p_{\xi,\eta}(x,y)$ и области $\{\xi^2+\eta^2<z\}$. Уравнение $x^2+y^2=z$ определяет окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt{z}$. Если радиус этой окружности не превосходит r, то значение ФР $F_\mu(z)$ есть интеграл по области, обозначенной серым цветом на Рис.1а[2], от совместной плотности $p_{\xi,\eta}(x,y)$, т.е.

$$F_\mu(z)=\int\limits_0^{\sqrt{z}}\int\limits_0^{\sqrt{z-x^2}} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\int\limits_0^{\sqrt{z}}\int\limits_0^{\sqrt{z-x^2}}\frac{x}{\pi r^2}dydx=\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3\pi r^2},\ 0<z\le r^2.$$

Если же радиус окружности $x^2+y^2=z$ превосходит r, но не превосходит 2π, то значение ФР $F_\mu(z)$ есть интеграл по области, обозначенной серым цветом на Рис.1б, от совместной плотности $p_{\xi,\eta}(x,y)$, а именно

$$F_\mu(z)=\int\limits_0^{r}\int\limits_0^{\sqrt{z-x^2}} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx=\frac{z^{\frac{3}{2}}-(z-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi r^2},\ r^2<z\le 4\pi^2.$$

Наконец, если радиус окружности $x^2+y^2=z$ превосходит 2π, то значение ФР $F_\mu(z)$ есть следующий интеграл по области, обозначенной серым цветом на Рис.1в, от совместной плотности $p_{\xi,\eta}(x,y)$:

---

[1] Соответственно условная плотность $p_\eta(y|\xi=x)$ также не будет зависеть от x и будет совпадать с безусловной плотностью $p_\eta(y)$.

[2] По оси Ox обозначаются значения с.в. ξ, по оси Oy — с.в. η.

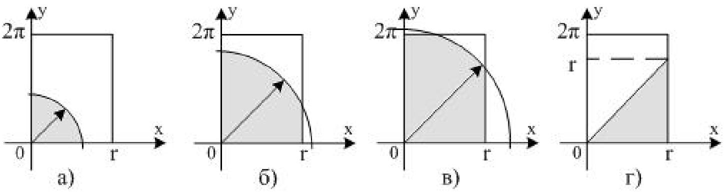

Рис. 3.1. Области интегрирования.

$$F_\mu(z) = 1 - \int\limits_{\sqrt{z-4\pi^2}}^{r} \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{2\pi} p_{\xi,\eta}(x,y)dydx = \frac{3z\pi - 4\pi^3 - (z-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi r^2},$$

$$4\pi^2 < z \le r^2 + 4\pi^2.$$

Зная вид ФР $F_\mu(z)$ нетрудно вычислить ее значение в точке $z = r$, которое равно $\frac{\sqrt{r}}{3\pi r}$. Вспоминая, что плотность распределения н.с.в. представляет собой производную ее функции распределения, задача нахождения плотности н.с.в. μ сводится к нахождению производной ФР $F_\mu(z)$, что и предлагается сделать читателю.

Последнее, что требуется найти — это вероятность события $\{\xi > \eta\}$. Учитывая предположение о том, что $r < 2\pi$, область, удовлетворяющая данному событию, обозначена серым цветом на Рис.1г и, значит, вероятность события $\{\xi > \eta\}$ есть интеграл по данной области от совместной плотности $p_{\xi,\eta}(x,y)$, т.е.

$$\mathbf{P}\{\xi > \eta\} = \int\limits_0^r \int\limits_0^r p_{\xi,\eta}(x,y)\; dydx = \int\limits_0^r \int\limits_0^r \frac{x}{\pi r^2}\; dydx = \frac{r}{2\pi}.$$

Ниже предлагается несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 115. Двумерная н.с.в. (ξ,η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ax, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D является треугольником с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,3)$, $(-3,0)$.

1. Найти константу A;

2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi + \eta$.
7. Найти плотность с.в. $\gamma = \min(\xi, \eta)$.

Задача 116. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Ax^2, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где область D является треугольником с вершинами в точках $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi + \eta - 2$.
7. Найти с.в. $\mu = \eta + |\xi - 2|$.

Задача 117. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Ay, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где область D ограничена графиком функции $y = \sqrt{-x}$, прямой $x = -4$ и осью абсцисс.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi - 1$.
7. Найти с.в. $\mu = |\xi - \eta|$.

Задача 118. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} A(x + y), & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где область D является треугольником с вершинами в точках $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, 5)$.

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta - \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \min((\xi - 2, \eta))$.

Задача 119. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D является треугольником с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$.

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta$.
7. Найти с.в. $\mu = |\xi + \eta|$.

Задача 120. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D ограничена графиками функций $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = 2\eta + \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \eta + |\xi - 0.5|$.

Задача 121. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ay, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D состоит из точек (x,y) удовлетворяющих неравенствам $y > 0$, $y < x$, $y + 2x < 6$.

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta + 2\xi$.
7. Найти с.в. $\mu = |\xi - 1| + \eta$.

Задача 122. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A(x^2 + y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta^2 + \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \xi - |\eta - 1|$.

Задача 123. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A(1 - xy^3), & -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta + \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \xi + |\eta|$.

Задача 124. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ax, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D - прямоугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(1,3)$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ,η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta^2 + \xi^2$.
7. Найтис.в. $\mu = \min(\eta - 1, \xi)$.

Задача 125. Двумерная н.с.в. (ξ,η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ax^2, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область $D = \{|x| + |y| \le 1\}$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ,η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta - 3\xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \max(\xi - 1, \eta)$.

Задача 126. Двумерная н.с.в. (ξ,η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ax, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D - прямоугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ,η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = (\eta + 1)\xi$.
7. Найти с.в. $\mu = |\eta - 1| + \xi$.

Задача 127. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D состоит из точек (x, y) удовлетворяющих неравенствам $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $2y - x \leq 2$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta$.
7. Найти с.в. $\mu = \max(\eta, -\xi)$.

Задача 128. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ay, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D ограничена графиками функций $y = x^2 - 4$, $x > 0$ и осью абсцисс.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta - \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = \max(2\xi - 4, \eta)$.

Задача 129. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ay, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D ограничена графиками функций $y = -x^2$, $y = -9$, $x > 0$ и осью ординат.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;

5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi - 2\eta$.
7. Найти с.в. $\mu = |\eta + 1| + \xi$.

Задача 130. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi$.
7. Найти с.в. $\mu = |\eta - \xi^2|$.

Задача 131. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ay, & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где область D ограничена графиками функций $y = x$, $x = 4$ и осью абсцисс.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi + \eta$.
7. Найти с.в. $\mu = \max(\xi, 2\eta)$.

Задача 132. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A(x^2 - y), & (x,y) \in D, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где область D - прямоугольник с вершинами в точках $(-2, -1)$, $(-2, 3)$, $(5, -1)$, $(5, 3)$.
1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);

4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \eta$.
7. Найти с.в. $\mu = \max(\xi, \eta)$.

Задача 133. Двумерная н.с.в. (ξ, η) задана плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где область D ограничена графиками функций $y = x^2$, $x = 2$ и осью абсцисс.

1. Найти константу A;
2. Найти одномерные плотности распределения с.в. ξ и с.в. η;
3. Найти функцию распределения двумерной н. с. в. (ξ, η);
4. Проверить, являются ли с.в. ξ и с.в. η независимыми;
5. Найти условное распределение с.в. ξ при условии η и наоборот.
6. Найти плотность н.с.в. $\psi = \xi\eta - 1$.
7. Найти с.в. $\mu = \eta + |\xi - 1|$.

3.3. Приложение 1

При $x \le 1$ или $y \le 2$, $F_{\xi,\eta}(x, y) = 0$.

$$\text{При } 1 < x \le 2,\ F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \le 3, \\ 3/36, & 3 < y \le 4, \\ 5/36, & 4 < y \le 5, \\ 7/36, & 5 < y \le 6, \\ 9/36, & 6 < y \le 7, \\ 11/36, & 7 < y. \end{cases}$$

$$\text{При } 2 < x \le 3,\ F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \le 3, \\ 3/36, & 3 < y \le 4, \\ 6/36, & 4 < y \le 5, \\ 10/36, & 5 < y \le 6, \\ 14/36, & 6 < y \le 7, \\ 18/36, & 7 < y \le 8, \\ 20/36, & 8 < y. \end{cases}$$

$$\text{При } 3 < x \leq 4,\ F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \leq 3, \\ 3/36, & 3 < y \leq 4, \\ 6/36, & 4 < y \leq 5, \\ 10/36, & 5 < y \leq 6, \\ 15/36, & 6 < y \leq 7, \\ 21/36, & 7 < y \leq 8, \\ 25/36, & 8 < y \leq 9, \\ 27/36, & 9 < y. \end{cases}$$

$$\text{При } 4 < x \leq 5,\ F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \leq 3, \\ 3/36, & 3 < y \leq 4, \\ 6/36, & 4 < y \leq 5, \\ 10/36, & 5 < y \leq 6, \\ 15/36, & 6 < y \leq 7, \\ 21/36, & 7 < y \leq 8, \\ 26/36, & 8 < y \leq 9, \\ 30/36, & 9 < y \leq 10, \\ 32/36, & 10 < y. \end{cases}$$

$$\text{При } 5 < x \leq 6,\ F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \leq 3, \\ 3/36, & 3 < y \leq 4, \\ 6/36, & 4 < y \leq 5, \\ 10/36, & 5 < y \leq 6, \\ 15/36, & 6 < y \leq 7, \\ 21/36, & 7 < y \leq 8, \\ 26/36, & 8 < y \leq 9, \\ 30/36, & 9 < y \leq 10, \\ 33/36, & 10 < y \leq 11, \\ 35/36, & 11 < y. \end{cases}$$

$$\text{При } 6 < x,\ F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1/36, & 2 < y \le 3, \\ 3/36, & 3 < y \le 4, \\ 6/36, & 4 < y \le 5, \\ 10/36, & 5 < y \le 6, \\ 15/36, & 6 < y \le 7, \\ 21/36, & 7 < y \le 8, \\ 26/36, & 8 < y \le 9, \\ 30/36, & 9 < y \le 10, \\ 33/36, & 10 < y \le 11, \\ 35/36, & 11 < y \le 12, \\ 1, & 12 < y. \end{cases}$$

Глава 4. Числовые характеристики. Характеристическая функция. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

4.1. Числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции, другие числовые характеристики

К основным числовым характеристикам случайной величины относят начальные и центральные моменты (математическое ожидание и дисперсию), ковариацию и коэффициент корреляции, квантили (медиану), моду и прочее.

Начальным моментом k-го порядка и **центральным моментом k-го порядка** случайной величины ξ называются величины $M\xi^k$ и $M(\xi - M\xi)^k$, вычисляемые по формулам

$$M\xi^k = \begin{cases} \sum\limits_i X_i^k p_i, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx, \end{cases}, \quad M(\xi - M\xi)^k = \begin{cases} \sum\limits_i (X_i - M\xi)^k p_i, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k p_\xi(x)dx, \end{cases},$$

где $p_i = P\{\xi = i\}$ и $p_\xi(x)$ есть ряд распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Величина $M\xi$ называется **математическим ожиданием**, а $M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$ — **дисперсией** случайной величины ξ.

Основные свойства математического ожидания и дисперсии, используемые при расчётах:

1. если $\xi = \text{const} = c$, то $Mc = c$, а $Dc = 0$ (дисперсия — всегда неотрицательна);
2. если $\eta = a\xi + b$, то $M\eta = aM\xi + b$, $D\eta = a^2 D\xi$;
3. $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$, $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 + 2M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$;
4. дисперсию часто проще вычислять по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$;
5. если ξ_1 и ξ_2 — независимы, то $M(\xi_1\xi_2) = M\xi_1 M\xi_2$, а $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$;

6. если $\eta = f(\xi)$, то $M\eta$ вычисляется по формуле

$$M\eta = \begin{cases} \sum\limits_i f(X_i)p_i, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p_\xi(x)dx, \end{cases}$$

.

Величина $M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$ называется **ковариацией** случайных величин ξ_1 и ξ_2 и обозначается $Cov(\xi_1, \xi_2)$.

Свойства ковариации (используемые при вычислениях):
1. $Cov(\xi, \xi) = D\xi$;
2. $Cov(a\xi + b, c\eta + d) = acCov(\xi, \eta)$;
3. если случайные величины ξ и η независимы, то $Cov(\xi, \eta) = 0$;
4. формула расчёта $Cov(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$.

Отношение $\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$ называется **коэффициентом корреляции** и обозначается $\rho(\xi, \eta)$.

Квантилью Q_α уровня α называется такое значение случайной величин ξ, что $P(\xi < Q_\alpha) = \alpha$. Если $\alpha = 0.5$, то $Q_{0.5}$ называется **медианой**.

Модой непрерывной случайной величины называется точка локального максимума плотности распределения случайной величины. **Модой** дискретной случайной величины называется такое значение X_i, что $P\{\xi = X_i\} > P\{\xi = X_{i-1}\}$ и $P\{\xi = X_i\} > P\{\xi = X_{i+1}\}$.

Пример 29. Двумерная дискретная случайная величина (ξ, η) задана рядом распределения.

$\xi \setminus \eta$	-2	1	2	P_ξ
1	0.2	0	0.3	0.5
2	0.1	0.2	0.2	0.5
P_η	0.3	0.2	0,5	1

Требуется найти: **1.** $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$; **2.** $Cov(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$; **3.** $M(\xi - 3\eta)$, $D(\xi - 3\eta)$; **4.** $M\mu$ и $D\mu$, если $\mu = \eta \sin \frac{\pi}{\xi}$, а также **5.** $Cov(\eta, \mu)$ и $\rho(\eta, \mu)$.

Решение. **1.** Математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ вычисляется следующим образом: значение случайной величины умножается на сумму вероятностей и так делается по всем значениям. То есть, $M\xi = 1 \cdot (0.2 + 0 + 0.3) + 2 \cdot (0.1 + 0.2 + 0.2) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5$. Математическое ожидание $M\eta$ случайной величины η вычисляется аналогичным способом — $M\eta = (-2)\cdot(0.2+0.1)+1\cdot(0+0.2)+2\cdot(0.3+0.2) = (-2)\cdot 0.3+1\cdot 0.2+2\cdot 0.5 = 0.9$.

Для вычисления дисперсий $D\xi$ и $D\eta$ воспользуемся формулой $D\xi = \sum\limits_i (X_i - M\xi)^2 p_i$, тогда $D\xi = (1-1.5)^2\cdot 0.5+(2-1.5)^2\cdot 0.5 = 0.25$, $D\eta = (2-0.6)^2\cdot 0.3+(1-0.6)^2\cdot 0.2+(2-0.6)^2\cdot 0.5 = 3/04$.

2. Ковариация случайных величин ξ и η вычисляется по формуле $Cov(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$. Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$ найдены в предыдущем пункте решения задачи. Для вычисления ковариации осталось найти математическое ожидание $M\xi\eta$ произведения случайных величин:

$$M\xi\eta = \sum_{i,j} X_i\cdot Y_j\cdot p_i j = 1\cdot(-2)\cdot 0.2+1\cdot 1\cdot 0+$$
$$+1\cdot 2\cdot 0.3+2\cdot(-2)\cdot 0.1+2\cdot 1\cdot 0.2+2\cdot 2\cdot 0.2 = 1$$

Тогда, $Cov(\xi,\eta) = 1-1.5\cdot 0.6 = 0.1$. Коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$ вычисляется по следующей формуле и равен

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{0.1}{\sqrt{0.25\cdot 3.04}} = 0.115$$

3. По свойствам математического ожидания легко можно вычислить математическое ожидание новой случайной величины $\mu = \xi - 3\eta$.

$$M(\xi-3\eta) = M\xi - 3\cdot M\eta = 1.5-3\cdot 0.9 = -1.2$$

,

Аналогичным способом, с помощью свойств дисперсии и подсчитанной ранее ковариации, вычисляется $D(\xi-3\eta)$:

$$D(\xi-3\eta) = D\xi+(-3)^2\cdot D\eta+2\cdot(-3)\cdot Cov(\xi,\eta) = 0.25+9\cdot 3.04-2\cdot 3\cdot 0.1 = 27.01$$

4. Задана новая случайная величина $\mu = \eta\cdot\sin\frac{\pi}{\eta}$. Найдём её математическое ожидание и дисперсию.

$$M\mu = M(\eta\cdot\sin\frac{\pi}{\eta}) = (-2)\cdot(\sin\frac{\pi}{1}\cdot 0.2+\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0.1)+$$
$$+1\cdot(\sin\frac{\pi}{1}\cdot 0+\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0.2)+$$
$$+2\cdot(\sin\frac{\pi}{1}\cdot 0.3+\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0.2) = 0.4$$

Для дисперсии нужно знать значение $M\mu^2$:

$$M\mu^2 = M(\eta \cdot \sin\frac{\pi}{\eta})^2 = (-2)^2 \cdot (\sin^2\frac{\pi}{1} \cdot 0.2 + \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot 0.1) +$$
$$+ 1^2 \cdot (\sin^2\frac{\pi}{1} \cdot 0 + \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot 0.2) +$$
$$+ 2^2 \cdot (\sin^2\frac{\pi}{1} \cdot 0.3 + \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot 0.2) = 1.4$$

Тогда дисперсия $D\mu = M\mu^2 - (M\mu)^2 = 1.4 - 0.4^2 = 1.24.$

5. Вычислим ковариацию $Cov(\eta, \mu)$. По свойствам $Cov(\eta, \mu) = M(\eta \cdot \mu) - M\eta \cdot M\mu$. Математические ожидания $M\eta$ и $M\mu$ уже найдены, осталось вычислить $M(\eta \cdot \mu)$:

$$M(\eta \cdot \mu) = M(\eta^2 \cdot \sin\frac{\pi}{\xi}) = (-2)^2 \cdot (\sin\frac{\pi}{1} \cdot 0.2 + \sin\frac{\pi}{2} \cdot 0.1) +$$
$$+ 1^2 \cdot (\sin\frac{\pi}{1} \cdot 0 + \sin\frac{\pi}{2} \cdot 0.2) + 2^2 \cdot (\sin\frac{\pi}{1} \cdot 0.3 + \sin\frac{\pi}{2} \cdot 0.2) = 1.4$$

Тогда, $Cov(\eta, \mu) = M(\eta \cdot \mu) - M\eta \cdot M\mu = 1.4 - 0.6 \cdot 0.4 = 1.16.$ Коэффициент корреляции $\rho(\eta, \mu)$ равен:

$$\rho(\eta, \mu) = \frac{Cov(\eta, \mu)}{\sqrt{D\eta \cdot D\mu}} = \frac{1.16}{\sqrt{3.04 \cdot 1.24}} = 0.6.$$

Пример 30. Двумерная случайная величина (ξ, η) задана своей плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin D, \\ 6x, & (x, y) \in D. \end{cases}$$

Область D — треугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; 1)$. Требуется найти: **1.** $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $Cov(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$; **2.** $M\mu$ и $D\mu$, если $\mu = \xi - \eta^2$.

Решение.

1. Найдём одномерные распределения случайных величин ξ и η:

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y)dy = \int\limits_0^{1-x} 6x dy = 6x(1 - x), \quad x \in (0; 1).$$

$$p_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dx = \int\limits_{0}^{1-y} 6xdx = 3(1-y)^2, \quad y \in (0;1).$$

Теперь вычислим математические ожидания:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{1} x\cdot 6x(1-x)dx = 0.5,$$

$$M\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_\eta(y)dy = \int\limits_{0}^{1} y\cdot 3(1-y)^2dy = 0.25.$$

Вычислим вторые начальные моменты:

$$M\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2p_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{1} x^2\cdot 6x(1-x)dx = 0.3,$$

$$M\eta^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2p_\eta(y)dy = \int\limits_{0}^{1} y^2\cdot 3(1-y)^2dy = 0.1.$$

Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$ вычисляются по формулам:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0.3 - 0.5^2 = 0.05,$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 0.1 - 0.25^2 = 0.0375.$$

Для вычисления ковариации $Cov(\xi,\eta)$ сначала необходимо вычислить математическое ожидание произведения случайных величин $M\xi\eta$:

$$M\xi\eta = \iint\limits_{D} xy\, p_{\xi\eta}(x,y)\, dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x} xy\, 6x\, dy\, dx = 0.1$$

Тогда

$$Cov(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = 0.1 - 0.5\cdot 0.25 = -0.025.$$

Коэффициент корреляции равен:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{-0.025}{\sqrt{0.05 \cdot 0.0375}} = -0.57735.$$

2. Вычислим теперь математическое ожидание и функцию от новой случайной величины $\mu = \xi - \eta^2$.

$$M\mu = M(\xi - \eta^2) = M\xi - M\eta^2 = 0.5 - 0.1 = 0.4.$$

$$D\mu = D(\xi - \eta^2) = D\xi + D\eta^2 - 2\,Cov(\xi,\eta^2).$$

Вычислим отдельно $D\eta^2$ и $Cov(\xi,\eta^2)$:

$$D\eta^2 = M\eta^4 - (M\eta^2)^2 = \int\limits_0^1 y^4 3(1-y)^2\,dy - (0.1)^2 = \frac{1}{35} - \frac{1}{100} = \frac{13}{700}.$$

$$Cov(\xi,\eta^2) = M\xi\eta^2 - M\xi \cdot M\eta^2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} xy^2\, 6x\,dy\,dx = \frac{1}{30} - \frac{1}{2}\frac{1}{10} = -\frac{1}{60}.$$

В итоге

$$D\mu = D(\xi - \eta^2) = D\xi + D\eta^2 - 2\,Cov(\xi,\eta^2) = \frac{1}{20} + \frac{13}{700} + \frac{2}{60} = \frac{214}{2100}.$$

Пример 31. Известно, что $\eta = 2\xi + \mu - 2$, $M\xi = 1$, $M\mu = -1$, $D\xi = 2$, случайные величины ξ и μ — независимы. Требуется найти $Cov(\xi,\eta)$.

Решение. По свойствам ковариации $Cov(\xi,\eta) = M(\xi\cdot\eta) - M\xi \cdot M\eta$. Вычислим $M\eta$ и $M(\xi\cdot\eta)$.

$$M\eta = M(2\xi + \mu - 2) = 2M\xi + M\mu - 2 = 2\cdot 1 - 1 - 2 = -1.$$

$$M\xi\eta = M\xi(2\xi + \mu - 2) = M(2\xi^2 + \xi\mu - 2\xi) = 2M\xi^2 + M\xi\mu - 2M\xi =$$
$$= 2(D\xi + (M\xi)^2) + (Cov(\xi\mu) + M\xi M\mu) - 2M\xi = 2(2+1) + (0 + 1\cdot(-1)) - 2 = 3.$$

В итоге

$$Cov(\xi,\eta) = 3 - 1\cdot(-1) = 4.$$

Пример 32. Найти моду, медиану и квантили порядка 0.25 и 0.75, если случайная величина ξ задана плотностью распределения:

$$\mathbf{1}.\, p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ 8xe^{-4x^2}, \ x > 0, \end{cases} \qquad \mathbf{2}.\, p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin (0;2) \\ \dfrac{3}{8}x^2, \ x \in (0;2), \end{cases}$$

$$\mathbf{3}.\, p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Решение.

1. Мода — это точка локального максимума, поэтому найдём производную от плотности и приравняем полученное выражение к нулю.

$$\left(8xe^{-4x^2}\right)'_x = 8e^{-4x^2} - 64x^2e^{-4x^2} = 8e^{-4x^2}(1-8x^2) = 0.$$

Учитывая, что в ноль обращается только второй множитель, получим:

$$1 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

так как плотность отлична от нуля только для положительных значений x. Следовательно, модой является точка $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Вычислим квантиль Q_α размера α:

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{Q_\alpha} p_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{Q_\alpha} 8xe^{-4x^2}dx = 1 - e^{-4x^2}.$$

В итоге получили уравнение:

$$\alpha = 1 - e^{-4x^2},$$

решение которого имеет вид

$$Q_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\ln\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Подставляя заданные в условии значения α, получаем:

$$Q_{0.5} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln 2} \approx 0.41, \quad Q_{0.25} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln\frac{4}{3}} \approx 0.268, \quad Q_{0.5} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln 4} \approx 0.589.$$

2. Пусть теперь плотность распределения случайной величины ξ

имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin (0;2) \\ \dfrac{3}{8}x^2, \ x \in (0;2). \end{cases}$$

Найдём моду данного распределения, для чего вычислим производную от плотности:

$$\left(\frac{3}{8}x^2\right)'_x = \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Таким образом, $x = 0$ — точка экстремума, но так как значение плотности $p_\xi(0) = 0$, то $x = 0$ — точка минимума. Плотность распределения случайной величины является возрастающей функцией, поэтому найдём значение плотности в граничной точке $x = 2$, которое равняется $p_\xi(2) = 3/2$. Таким образом, мода — $x = 2$.

Вычислим квантили:

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{Q_\alpha} p_\xi(x)\,dx = \int\limits_{0}^{Q_\alpha} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}Q_\alpha^3 \Rightarrow Q_\alpha = 2\sqrt[3]{\alpha}.$$

Тогда

$$Q_{0.5} = 2\sqrt[3]{0.5} \approx 1.587, \quad Q_{0.25} = 2\sqrt[3]{0.25} \approx 1.26, \quad Q_{0.75} = 2\sqrt[3]{0.75} \approx 1.817.$$

3. Пусть теперь задана случайная величина, имеющая распределение Коши. Её плотность:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Вычислим моду:

$$\left(\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)'_x = \frac{-2x}{\pi(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Точка $x = 0$ является модой распределения.

Квантили:

$$\alpha = \int\limits_{-\infty}^{Q_\alpha} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg} Q_\alpha + \frac{1}{2}.$$

Решая полученное тригонометрическое уравнение, получаем:

$$Q_\alpha = \mathrm{tg}\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Подставляя вместо α, заданные числовые значения, в итоге получим:

$$Q_{0.5} = \mathrm{tg}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{tg}(0) = 0, \quad Q_{0.5} = \mathrm{tg}\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$Q_{0.5} = \mathrm{tg}\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Задача 134. Подбрасывается 10 игральных костей. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

Задача 135. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, если она имеет:
1. биномиальное распределение;
2. распределение Пуассона;
3. геометрическое распределение;
4. равномерное на отрезке $[a; b]$ распределение;
5. экспоненциальное распределение;
6. нормальное распределение;
7. гамма-распределение.

Задача 136. Случайные величины ξ, η и μ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi + \xi\eta + \xi\eta\mu$.

Задача 137. Случайные величины ξ и η независимы, причём случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $m = 2$ и $\sigma = 0,5$, а η — равномерное на отрезке $[0; 4]$ распределение. Найдите математическое ожидание и дисперсию следующих новых случайных величин:
1. $4\xi + 2\eta$;
2. $2\eta - 4\xi$;
3. $\xi + \sin(\pi\eta)$.

Задача 138. Пусть ξ_1, ξ_2,...— независимые случайные величины, принимающие значение 0 с вероятностью $1-p$ и значение 1 с вероятностью p. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$, если:
1. $\eta_i = \xi_i\xi_{i+1}$;
2. $\eta_i = \begin{cases} 0, & \xi_i + \xi_{i+1} \neq 1, \\ 1, & \xi_i + \xi_{i+1} \neq 1. \end{cases}$

Задача 139. Дискретная двумерная случайная величина (ξ, η) задана рядом распределения:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0.10	0.15	0.15
2	0.15	0.25	0.2

Найдите:

1. математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η;
2. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η;
3. математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu_1 = |\eta|\xi$;
4. математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu_2 = \max(|\xi|, \eta)$;
5. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и μ_1;
6. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин η и μ_2;
7. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и μ_2;
8. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин η и μ_1;
9. ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин μ_1 и μ_1.

Задача 140. Случайная величина ξ принимает значения -2, -1, 0, 1, 2. Известно, что $M\xi = M\xi^3 = 0$, $M\xi^2 = 1$, $M\xi^4 = 2$. Найдите вероятности, с которыми случайная величина ξ принимает указанные выше значения.

Задача 141. Найдите моду, медиану и квантили порядка $0,25$ и $0,75$, если плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

1. $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 8x \cdot e^{-4x^2}, & x > 0 \end{cases}$;
2. $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 2), \\ \dfrac{3}{8}x^2, & x \in (0; 2) \end{cases}$;
3. $p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$;
4. $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Задача 142. Вычислите ковариацию и коэффициент корреляции между случайными величинами ξ и $\eta = e^{-\xi}$, если случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение.

Задача 143. Дано, что $M\xi = 1$, $M\eta = -2$, $D\xi = 2$, $D\eta = 1$, $Cov(\xi, \eta) = 1$. Новые случайные величины μ_1 и μ_2 заданы как $\mu_1 = 2\xi + eta - 1$, $\mu_2 = \xi - 3\eta + 2$. Вычислите математические ожидания и дисперсии случайных величин μ_1 и μ_2, а также их ковариацию и коэффициент корреляции.

Задача 144. Случайные величины ξ и η связаны соотношением $a\xi + b\eta = c$, где a, b и c — константы, причём $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Вычислите:
1. коэффициент корреляции случайных величин ξ и η;
2. отношение $\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$.

Задача 145. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} Ay, & (x; y) \in D, \\ 0, & (x; y) \notin D, \end{cases}$$

где D — область, ограниченная графиками функций $y = \sqrt{-x}$, $x = -4$ и осью абсцисс. Вычислите:
1. неизвестную константу A;
2. математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η;
3. ковариацию случайных величин ξ и η;
4. математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu_1 = |\xi + 2 - \eta|$;
5. математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu_2 = \max(\xi + 2, \eta)$;
6. математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\mu_1 = |\xi + 2| - \eta$.

4.2. Условное математическое ожидание

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии случайной величины η называется величина $M(\xi|\eta)$, вычисляемая по формуле:

$$M(\xi|\eta) = \begin{cases} \sum\limits_i X_i \dfrac{P_{ij}}{p_j}, & \text{если}\, \xi \,\text{и}\, \eta \text{ — дискретные с.в.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \dfrac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} dx, & \text{если}\, \xi \,\text{и}\, \eta \text{ — непрерывные с.в..} \end{cases}$$

Здесь $p_{ij} = P(\xi = X_i, \eta = Y_j)$ — вероятностное распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η), $p_j = P(\eta = Y_j)$ — вероятностное распределение случайной величины η.

Основные свойства условного математического ожидания:
1. $M(c|\eta) \equiv c$, $c = const$;
2. $M(a\xi + b|\eta) = aM(\xi|\eta) + b$;
3. $M(\xi_1 + \xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) + M(\xi_2|eta)$;

4. $M(\xi_1 \cdot \xi_2|\eta) = M(\xi_1|\eta) \cdot M(\xi_2|\eta)$, если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы при условии η;
5. $M(M(\xi|\eta)) = M\xi$;
6. $M(f(\xi) \cdot g(\eta)|\eta) = g(\eta) \cdot M(f(\xi)|\eta)$, где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — функции от случайных величин ξ и η;
7. если случайные величины ξ и η — независимы, то $M(\xi|\eta) \equiv M\xi$.

Пример 33. В условиях примера 29 найдём $M(\xi|\eta)$ и $M(\eta|\xi)$.

Решение. По формуле условного математического ожидания для дискретных случайных величин имеем:

$$M(\xi|\eta=-2) = \{\xi=1\}\cdot\frac{P(\xi=1,\eta=-2)}{P(\eta=-2)}+\{\xi=2\}\cdot\frac{P(\xi=2,\eta=-2)}{P(\eta=-2)} = \\ = 1\cdot\frac{0.2}{0.2+0.1}+2\cdot\frac{0.1}{0.2+0.1} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$M(\xi|\eta=1) = 1\cdot\frac{0}{0+0.2}+2\cdot\frac{0.2}{0+0.2} = 2.$$

$$M(\xi|\eta=22) = 1\cdot\frac{0.3}{0.3+0.2}+2\cdot\frac{0.2}{0.3+0.2} = \frac{3}{5}+\frac{4}{5} = \frac{7}{5}.$$

Вычислим $M\xi$, используя значения полученного условного математического ожидания:

$$M\xi = M(M(\xi|\eta)) = M(\xi|\eta=-2)\cdot P(\eta=-2)+M(\xi|\eta=1)\cdot P(\eta=1)+ \\ + M(\xi|\eta=2)\cdot P(\eta=2) = \frac{4}{3}\cdot 0.3+2\cdot 0.2+\frac{7}{5}\cdot 0.5 = 1.5$$

Вычислим теперь условное математическое ожидание $M(\eta|\xi)$.

$$M(\eta|\xi=1) = \{\eta=-2\}\cdot\frac{P(\eta=-2,\xi=1)}{P(\xi=1)}+\{\eta=0\}\cdot\frac{P(\eta=0,\xi=1)}{P(\xi=1)}+ \\ + \{\eta=2\}\cdot\frac{P(\eta=2,\xi=1)}{P(\xi=1)} = (-2)\cdot\frac{0.2}{0.2+0+0.3}+1\cdot\frac{0}{0.2+0+0.3}+ \\ + 2\cdot\frac{0.3}{0.2+0+0.3} = \frac{2}{5}.$$

$$M(\eta|\xi=2) = (-2)\cdot\frac{0.1}{0.1+0.2+0.2}+1\cdot\frac{0.2}{0.1+0.2+0.2}+2\cdot\frac{0.2}{0.1+0.2+0.2} = \frac{4}{5}.$$

Математическое ожидание случайной величины η вычисляется следующим образом:

$$M\eta = M(M(\eta|\xi)) = M(\eta|\xi = 1) \cdot P(\xi = 1) + M(\eta|\xi = 2) \cdot P(\xi = 2) = \\ = \frac{2}{5} \cdot 0.5 + \frac{4}{5} \cdot 0.5 = 0.6.$$

Пример 34. В условиях примера 30 найдём $M(\xi|\eta)$ и $M(\eta|\xi)$

Решение Двумерная случайная величина (ξ, η) задана своей плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin D, \\ 6x, & (x, y) \in D, \end{cases}$$

где область D — треугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$ и $(0; 1)$.

Частные плотности распределения случайных величин ξ и η имеют вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 6x(1 - x), & x \in (0; 1), \\ 0, & x \notin (0; 1), \end{cases} \qquad p_\eta(x) = \begin{cases} 3(1 - y)^2, & y \in (0; 1), \\ 0, & y \notin (0; 1). \end{cases}$$

Условные плотности:

$$p(x|\eta = y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1 - y)^2}, & x \in (0; 1 - y), \\ 0, & x \notin (0; 1 - y), \end{cases}$$

$$p(y|\xi = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - x)}, & y \in (0; 1), \\ 0, & y \notin (0; 1 - x). \end{cases}$$

Вычислим условные математические ожидания по условным распределениям случайных величин:

$$M(\xi|\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x|\eta = y)dx = \int\limits_{0}^{1-y} x \cdot \frac{2x}{(1 - y)^2} dx = \frac{2}{3}(1 - y), \quad y \in (0; 1),$$

$$M(\eta|\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(y|\xi = x)dy = \int\limits_{0}^{1-x} y \cdot \frac{1}{1 - x} dy = \frac{1 - x}{2}, \quad x \in (0; 1).$$

Вычислим математические ожидания случайных величин ξ и η:

$$M\xi = M(M(\xi|\eta)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\xi|\eta)p(x|\eta = y)dy = \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{3}(1-y)3(1-y)^2 dy = 0.5,$$

$$M\eta = M(M(\eta|\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\eta|\xi)p(y|\xi = x)dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{1-x}{2} 6x(1-x)dx = 0.25.$$

4.3. Характеристическая функция

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $f_\xi(t)$, равная

$$f_\xi(t) = Me^{\mathrm{i}t\xi} = \begin{cases} \sum\limits_j e^{\mathrm{i}tX_j} p_j = \sum\limits_j p_j \cos(tX_j) + \mathrm{i} \sum\limits_j p_j \sin(tX_j), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\text{ß}tx} p_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\cos(tx)dx + \mathrm{i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\sin(tx)dx. \end{cases}$$

Здесь i — мнимая единица.

Основные свойства характеристической функции, используемые при решении задач:

1. $f_\xi(0) = 1$, $|f_\xi(t)| \le 1$, $f_\xi(t)$ — непрерывная по t функция;
2. если $\eta = a\xi + b$, то $F_\eta(t) = e^{\mathrm{i}bt} f_\xi(at)$;
3. если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $\eta = \xi_1 + \xi_2$, то $f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t)$;
4. $f_\xi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k m_k$, где $m_k = M\xi^k$.

Пример 35. Случайная величина ξ задана своей плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;2), \\ \frac{3}{8}x^2, & x \in (0;2). \end{cases}$$

Нужно найти характеристическую функцию заданной случайной величины.

Решение. По определению

$$f_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} p_\xi(x) dx = \int\limits_{0}^{2} e^{\mathrm{i}tx} \frac{3}{8} x^2 dx =$$

$$= \frac{3}{8} \left(\frac{4}{\mathrm{i}t} e^{2\text{ß}t} + \frac{4}{t^2} e^{2\mathrm{i}t} - \frac{2}{\text{ß}t^3} e^{2\mathrm{i}t} + \frac{2}{\mathrm{i}t^3} \right).$$

Пример 36. Известно, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 2]$, а случайная величина $\eta \sim N(0; 1)$, ξ и η — независимы. Следует найти характеристические функции случайных величин $\mu = \xi + \eta$ и $\nu = 2 - \mu$.

Решение. По свойствам характеристической функции:

$$f_\mu(t) = f_\xi(t) \cdot f_\eta(t) = \frac{e^{2\mathrm{i}t} - e^{\mathrm{i}t0}}{\mathrm{i}t(2-0)} \cdot e^{-t^2/2} = e^{-t^2/2} \cdot \frac{e^{2\mathrm{i}t} - 1}{2\mathrm{i}t}.$$

Здесь $\frac{e^{2\mathrm{i}t} - e^{\mathrm{i}t0}}{\mathrm{i}t(2-0)}$ — производящая функция случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0; 2]$, а $e^{-t^2/2}$ — производящая функция случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

Далее, по свойствам характеристической функции:

$$f_\nu(t) = e^{2\mathrm{i}t} \cdot f_\mu(-t) = e^{2\mathrm{i}t} \cdot e^{-t^2/2} \cdot \frac{e^{2\mathrm{i}t} + 1}{2\mathrm{i}t}.$$

Пример 37. Задана характеристическая функция случайной величины ξ $f_\xi(t) = \frac{\sin t}{t}$. Нужно найти $M\xi$ и $D\xi$.

Решение. По свойствам характеристической функции $M\xi = \text{ß}^{-1} f'_\xi(0)$:

$$M\xi = \frac{1}{\mathrm{i}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)'_{t=0} = \frac{1}{\mathrm{i}} \left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \right)_{t=0} \to \frac{0}{0}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t\sin t + \cos t - \cos t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{2} = 0.$$

Таким образом, $M\xi = 0$. Для вычисления дисперсии найдём сначала $M\xi^2 = \text{ß}^{-2} f''_\xi(0)$.

$$M\xi^2 = \frac{1}{\mathrm{i}^2} f''_\xi(0) = -\left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right)'_{t=0} =$$
$$+ - \left(\frac{2\sin t - 2t\cos t - t^2 \sin t}{t^3}\right)_{t=0}.$$

Снова получаем неопределённость вида 0/0. Применяя правило Лопиталя, окончательно получим:

$$M\xi^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{3}.$$

Задача 146. Найдите характеристическую функцию случайной величины, заданной плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ x > 2, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

По характеристической функции вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Задача 147. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, характеристическая функция которой имеет вид

$$f_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Задача 148. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\eta = 5 - 2\xi$, если ряд распределения случайной величины ξ представлен в таблице.

ξ	-2	-1	0	1	2
P_ξ	0.1	0.2	0,3	0.3	0.1

При помощи характеристической функции найдите математическое ожидание случайной величины η.

Задача 149. Характеристическая функция некоторой случайной величины имеет вид $f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}+it}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины..

Задача 150. 1Найдите математическое ожидание случайной величины, характеристическая функция которой имеет вид $f_\xi(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$.

Задача 151. Найдите математическое ожидание случайной величины, характеристическая функция которой имеет вид $f_\xi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.

Задача 152. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, характеристическая функция которой имеет вид $f_\xi(t) = 0,4\cos^2 t + 0,4\cos t + 0,2$.

Задача 153. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $p_\xi(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$.

По характеристической функции вычислите математическое ожидание случайной величины ξ.

Задача 154. Характеристическая функция некоторой случайной величины имеет вид $f_\xi(t) = \frac{\cos t(2\cos t+1)}{3}$.

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Задача 155. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, характеристическая функция которой имеет вид $f_\xi(t) = \left(\frac{1}{1-it}\right)^2$.

4.4. Неравенство Чебышёва, центральная предельная теорема

Пусть задана случайная величина ξ, для которой существуют математическое ожидание $M\xi$ и дисперсия $D\xi$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно следующее неравенство (**неравенство Чебышёва**):

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Центральная предельная теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, такие что $M\xi_n = m$, $D\xi_n = \sigma^2$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, тогда

$$P\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Пример 38. Проводится 800 независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха равна 0.25. С помощью неравенства Чебышёва нужно оценить вероятность того, что число успехов будет лежать в пределах от 150 до 250.

Решение. Пусть ξ — число успехов в серии из 800 испытаний, тогда случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 800$ и $p = 0.25$. Следовательно, нужно оценить вероятность того, что $150 < \xi < 250$.

Для того, чтобы воспользоваться неравенством Чебышёва нужно вычислить сначала $M\xi$ и $D\xi$.

$$M\xi = n\cdot p = 800\cdot 0.25 = 200, \quad D\xi = n\cdot p\cdot (1-p) = 800\cdot 0.25\cdot 0.75 = 150.$$

Далее:

$$P\{150 < \xi < 250\} = P\{150 - M\xi < \xi - M\xi < 250 - M\xi\} =$$
$$= P\{150 - 200 < \xi - M\xi < 250 - 200\} = P\{-50 < \xi - M\xi < 50\} =$$
$$= P\{|\xi - M\xi| < 50\}.$$

Чтобы воспользоваться неравенством Чебышёва, перейдём к дополнительному событию:

$$P\{|\xi - M\xi| < 50\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq 50\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя значения — $D\xi = 150$ и $\varepsilon = 50$, окончательно получим:

$$P\{150 < \xi < 250\} = P\{|\xi - M\xi| < 50\} \geq 1 - \frac{150}{50^2} = 0.94.$$

Пример 39. Вероятность того, что студент сдаст все экзамены во время сессии составляет 0.75. Сколько студентов должно сдавать сессию, чтобы доля сдавших вовремя сессию студентов лежала в пределах от 0.73 до 0.77 с вероятностью не менее 0.93.

Решение. Пусть ξ — число сдавших вовремя сессию студентов, а n — общее число сдававших сессию студентов. Тогда η — доля сдавших вовремя сессию студентов определяется следующим образом — $\eta = \xi/n$.

По условию дано:

$$P\left\{0.73 < \frac{\xi}{n} < 0.77\right\} \geq 0.93 \Leftrightarrow P\{0.73n < \xi < 0.77n\} \geq 0.93.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ вычисляются следующим образом:

$$M\xi = 0.75n, \quad D\xi = (1 - 0.75)\cdot 0.75n.$$

Далее:

$$P\{0.73n < \xi < 0.77n\} = P\{0.73n - 0.75n < \xi - M\xi < 0.77n - 0.75n\} = \\ = P\{-0.02n < \xi - M\xi < 0.02n\} = P\{|\xi - M\xi| < 0.02n\}.$$

Перейдём к дополнительному событию

$$P\{|\xi - M\xi| < 0.02n\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq 0.02n\} \geq 0.93.$$

Используя неравенство Чебышёва, получаем:

$$0.93 = 1 - \frac{D\xi}{(0.02n)^2} \Rightarrow n = \frac{0.25 \cdot 0.75}{0.07 \cdot (0.02)^2} \approx 6696.$$

Пример 40. Найдите вероятность того, что при 720 бросках игральной кости шесть очков выпадет от 100 до 120 раз.

Решение. Пусть ξ — число выпадений шести очков при 720 бросках игральной кости. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 720$ и $p = 1/6$. Таким образом, нужно вычислить вероятность $P\{100 < \xi < 120\}$.

Чтобы вычислить эту требуемую вероятность, воспользуемся центральной предельной теоремой. Для этого сначала определим $M\xi$ и $D\xi$:

$$M\xi = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120, \quad D\xi = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 100.$$

Тогда

$$P\{100 < \xi < 120\} = P\left\{\frac{100 - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < \frac{120 - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right\} = \\ = P\left\{\frac{100 - 120}{\sqrt{100}} < \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < \frac{120 - 120}{\sqrt{100}}\right\} = P\left\{-2 < \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < 0\right\} \approx \\ \approx \Phi(0) - \Phi(-2) = (0.5 + \Phi_0(0)) - (0.5 + \Phi_0(-2)) = 0.5 - 0.5 + \Phi_0(2) = 0.47725.$$

Пример 41. Размер выплаты страховой компании случаен. Средняя выплата одному клиенту составляет 50 тысяч рублей, среднеквадратичное отклонение равно 20 тысячам. Выплаты клиентам независимы.

1. Сколько денег должно быть в офисе, чтобы с вероятностью 0.95 их хватило на выплаты 60 клиентам.

2. Известно, что в начале дня в офисе страховой компании было 3500000 рублей. Какой будет гарантированный с вероятностью 0.99 остаток наличных денег в офисе после выплат 60 клиентам.

Решение.

1. Пусть X — денежная сумма, зарезервированная в офисе для выплат клиентам, а ξ — размер выплаты одному клиенту (случайная величина). Известно, что $M\xi = 50000$, $D\xi = \sigma_\xi^2 = 20000^2$, $n = 60$. Тогда, также дано, что $P\{X - n\xi \geq 0\} = 0.95$.

Используем центральную предельную теорему, для вычисления X.

$$P\{X - n \geq 0\} = P\{X \geq 60\xi\} = P\left\{\frac{60\xi - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}} \leq \frac{X - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}}\right\} =$$
$$= P\left\{\frac{60\xi - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}} \leq \frac{X - 60\cdot 50000}{\sqrt{60}\cdot 20000}\right\} \approx \Phi\left(\frac{X - 60\cdot 50000}{\sqrt{60}\cdot 20000}\right) = 0.95.$$

Переходя к функции Лапласа $\Phi_0(x)$, получаем

$$\Phi_0\left(\frac{X - 60\cdot 50000}{\sqrt{60}\cdot 20000}\right) = 0.95 - 0.5 = 0.45.$$

Используя таблицы для функции Лапласа, вычисляем аргумент функции $\Phi_0(x)$, соответствующий значению 0.45:

$$\frac{X - 60\cdot 50000}{\sqrt{60}\cdot 20000} = 1.65 \Rightarrow X = 1.65\cdot\sqrt{60}\cdot 20000 + 60\cdot 50000 = 3255616.9.$$

Таким образом, необходимый для выплат резерв составляет 3255616.9.

2. Найдём гарантированный с вероятностью 0.99 остаток денежных средств в офисе после выплат 60 клиентам, если в начале дня в офисе было три с половиной миллиона рублей.

Пусть $S = 3500000$ — изначальная сумма, X — остаток после всех выплат. Как и в предыдущем пункте ξ — размер выплаты одному клиенту — является случайной величиной. Дано, что $P\{S - 60\xi \geq X\} = 0.99$.

$$P\{3500000 - 60\xi \geq X\} = P\{60\xi \leq 3500000 - X\} =$$
$$= P\left\{\frac{60\xi - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}} \leq \frac{3500000 - X - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}}\right\} \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{3500000 - X - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}}\right) = 0.99.$$

Переходя к Функции Лапласа, получаем

$$\Phi_0\left(\frac{3500000 - X - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}}\right) = 0,49 \Rightarrow \frac{3500000 - X - 60M\xi}{\sqrt{60D\xi}} = 2.33.$$

Окончательно получаем:

$$X = 3500000 - 60 \cdot 50000 - 2.33 \cdot 20000 \cdot \sqrt{60} = 139037.95.$$

Задача 156. Вероятность появления события A в одном опыте равна $0,6$. Можно ли с вероятностью, большей $0,97$ утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых испытаниях будет в пределах от 500 до 700 (использовать неравенство Чебышёва)?

Задача 157. Вероятность изготовления детали с дефектами равна 0,1. Почему нельзя применить неравенство Чебышёва для оценки вероятности того, что число нестандартных деталей среди 10000 изготовленных будет заключено в границах от 959 до 1030 включительно? Какой должна быть левая граница, чтобы применение неравенства Чебышёва стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

Задача 158. Вероятность производства стандартной детали равна 0,95. Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что число бракованных среди 2000 деталей находится в границах от 75 до 125.

Задача 159. На склад магазина поступают изделия, 80% которых первого сорта. Сколько изделий надо взять, чтобы с вероятностью 0,997 можно было бы утверждать, что частота изделий первого сорта будет в пределах от 0,75 и до 0,85? Использовать неравенство Чебышёва.

Задача 160. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оцените при помощи неравенства Чебышёва вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

Задача 161. Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что среди 800 новорождённых детей будет от 280 до 360 мальчиков. Считать вероятность рождения мальчика 0,4.

Задача 162. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно зало-жить яиц, чтобы с вероятность, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от их математического ожидания не превышало по абсолютной величине 50? Решить задачу, используя неравенство Чебышёва.

Задача 163. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оцените с помощью неравенства Чебышёва необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случает отклонится от 0,2 по абсолютной величине не более, чем на 0,01.

Задача 164. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия 0,1. Сколько надо взять деталей, чтобы среднее арифметическое их длин будет не менее 49,5 и не более 50,5 см с вероятностью большей 0,95? использовать неравенство Чебышёва.

Задача 165. Пусть вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,95. Оценить вероятность того, что при 2500 опусканиях монет частота случаев правильной работы автомата отклонится (по абсолютной величине) от вероятности 0,95 не более, чем на 0,02. Использовать неравенство Чебышёва.

Задача 166. Средняя температура в квартире, подключенной к теплоцентрали, в период отопительного сезона составляет 20 С, а среднее квадратическое отклонение равно 2С. Оцените вероятность того, что температура в квартире будет в пределах от 15С до 25С. Использовать неравенство Чебышёва.

Задача 167. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равно 0,8. Проверяется 800 изделий. Рассматривается случайная величина ξ — число изделий высшего качества. Укажите промежуток, в котором значения этой случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5. Использовать неравенство Чебышёва.

Задача 168. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время T окажется не меньше трёх.

Задача 169. 500 раз подбрасывается игральная кость. Оцените, используя центральную предельную теорему, вероятность того, что частота выпадения шестёрки окажется в интервале $\left(\frac{1}{6} - 0,05; \frac{1}{6} + 0,05\right)$.

Задача 170. Имеется 1000 квадратов, сторона которых может принимать значения 0,5 или 1 с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. С какой вероятностью суммарная площадь всех квадратов будет в пределах от 580 до 805? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 171. Монета брошена 1000 раз. При каком k число выпадений герба лежит между 490 и k с вероятностью 0,5. Использовать центральную предельную теорему.

Задача 172. На курсе обучается 600 студентов. Вероятность родиться каждому студенту в определённый день года равна 1/365. Оцените с помощью центральной предельной теоремы вероятность того, что число студентов, рождённых 1 января, заключено в пределах от 5 до 10.

Задача 173. На отрезке $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ случайным образом выбраны 162 числа (т.е. рассматриваются 162 независимые равномерно распределённые случайные величины). С помощью центральной предельной теоремы оцените вероятность того, что их сумма будет заключена между 22 и 26.

Задача 174. Сколько деревьев необходимо посадить, чтобы число прижившихся деревьев было больше 100 с вероятностью 0,9, если известно, что каждое дерево приживается с вероятностью 0,8? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 175. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, что-бы с вероятностью 0,997 отклонение частоты изделий первого сорта от 0,85 по абсолютной величине не превосходило 0,01? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 176. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью центральной предельной теоремы оцените вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

Задача 177. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста вероятность смерти на 21-ом году равна 0,006. Застрахована группа в 10000 человек 20-летнего возраста, причём каждый застрахованный внёс 1200 руб-лей. Какую максимальную выплату наследникам следует установить, чтобы вероятность того, что к концу года страховая компания окажется в убытке была бы не больше 0,0228? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 178. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,5, в девятку с вероятностью 0,3, в восьмёрку с вероятностью 0,1, в семёрку с вероятностью 0,05 и в шестёрку с вероятностью 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 950 очков? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 179. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2, 4 с вероятностью 0,4, 3 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,1. За всё время обучения студент сдаёт 40 экзаменов. Найдите вероятность того, что его суммарный балл будет больше 160. Использовать центральную предельную теорему.

Задача 180. 3. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока суммарное число очков не превысит 700. Оцените вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний. Использовать центральную предельную теорему.

Задача 181. Найдите такое число k, что с вероятностью приближённо равной 0,9 можно было бы утверждать, что число мальчиков среди 900 новорождённых больше k. Использовать центральную предельную теорему.

Задача 182. В посёлке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит в город на поезде, который ходит раз в сутки. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще, чем 1 раз в 100 дней? Использовать центральную предельную теорему.

Задача 183. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в гардеробе у второго входа, чтобы в среднем в 95 случаях из 100 все зрители могли в нем раздеться? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает первый вход с вероятностью 0,7? Использовать центральную предельную теорему.

Глава 5. Математическая статистика

Пример 42. Приведена выборка X (биномиальное распределение $k = 10$, $p = 0.5$) размера 50.

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
 [1,]    7    3    6    4    5
 [2,]    4    4    7    5    6
 [3,]    4    4    4    5    6
 [4,]    5    6    6    5    6
 [5,]    7    5    3    4    5
 [6,]    4    6    4    6    5
 [7,]    7    5    5    6    6
 [8,]    7    6    2    6    2
 [9,]    6    9    5    3    5
[10,]    6    5    7    6    6
```

Найдём:

– минимальный и максимальный элементы выборки, размах выборки;
– вариационный и стастический ряды, гистограмму;
– медиану, первый и третий квартили выборки;
– выборочные характеристики;
– оценки неизвестных параметров.

Решение.

Найдём минимальный и максимальный элементы выборки, а также размах выборки —разность между максимальным и минимальным элементами.

$$X_{\min} = 2, \quad X_{\max} = 9, \quad r = X_{\max} - X_{\min} = 7.$$

Построим вариационный ряд — упорядочим элементы выборки по возрастанию.

```
[1] 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
[39] 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 9
```

Теперь построим статистический ряд — выделим все различные элементы и выясним сколько раз они встречаются:

```
 2  3  4  5  6  7  9
 2  3  9 13 16  6  1
```

Построим полигон частот — воспользуемся статистическим рядом. Для полигона относительных частот найдём $\nu_i = n_i/n$, где ν_i — относительная частота появления i-го элемента, n_i — частота появления i-го элемента, n — размер выборки.

```
 2    3    4    5    6    7    9
0.04 0.06 0.18 0.26 0.32 0.12 0.02
```

Гистограмма. Построим гистограмму, в качестве Δn — длина интервала разбиения, возьмём 1. Границы разбиения $(a_0; a_1](a_1; a_2]\dots(a_{k-1}; a_k]$, $a_0 = \min X - 0.5$, $a_l = a_0 + l * 1$, $a_k = \max X + 0.5$.

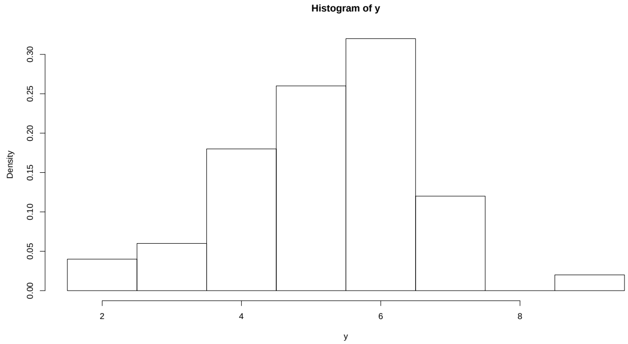

Рис. 5.1. Гистограмма

Найдём теперь медиану, первый и третий квартили выборки. Медиана Q_2 — элемент (или среднее арифметическое элементов) выборки, справа и слева от которого лежит одинаковое количество элементов выборки. Первый квартиль Q_1 — выборочный 25%-квантиль выборки, слева от Q_1 находится 25% элементов выборки; третий квартиль Q_3 — выборочный 75%-квантиль, слева от него находится 75% элементов выборки.

$$Q_2 = 5.00, \quad Q_1 = 4.00, \quad Q_3 = 6.00.$$

Теперь найдём выборочные среднее $\overline{m}$ и дисперсии $\overline{\sigma}^2$ и s^2.

$$\overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 5.22$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m})^2 = 1.347059 \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m})^2 = 1.37455^2$$

Оценки неизвестных параметров

Оценка неизвестной вероятности p и числа испытаний Бернулли (метод моментов)

$$\begin{cases} \overline{m}_1 = m_1, \\ s^2 = \sigma^2, \end{cases}$$

где $\overline{m}_1$ — выборочное среднее, s^2 — выборочная дисперсия, а m_1 и σ^2 — теоретические мат.ожидание и дисперсия. Подставим численные значения вместо выборочных среднего и дисперсии.

$$\begin{cases} 5.22 = kp, \\ 1.889388 = kp(1-p). \end{cases}$$

Решая, получим

$$p* = 1 - \frac{s^2}{\overline{m}_1}, \quad k* = \frac{\overline{m}_1}{p*}$$

В наших числах это будет $p* = 0.6380483$, $k* = 8.181199$. Как видно, в случае двух неизвестных параметров метод моментов даёт не особо точную оценку. Если увеличим размер выборки в 10 раз ($n = 500$), то получим следующие результаты $p* = 0.5418012$, $k* = 9.280157$. $n = 10000$ — $p* = 0.4878786$, $k* = 10.25501$.

Пусть теперь неизвестен только один параметр — p, а $k = 10$. По методу моментов получим $p* = \frac{\overline{m}_1}{k} = \frac{\sum\limits_{i=1} nX_i}{nk} = 0.522$. Как видно, результат стал гораздо лучше.

Полученные выше оценки неизвестных параметров называются точечными, так как они оценивают неизвестный параметр одним числом или точкой. Однако точечная оценка не совпадает с оцениваемым параметром и потому более разумно указывать разумные границы, в которых неизвестный параметр θ (или параметры) может находиться с некоторой вероятностью α при наблюдённой выборке $X_1, \ldots, X_n$. Такие границы задают доверительный интервал.

Доверительные интервалы

Пусть задана вероятность α. Построим симметричный доверительный интервал для неизвестного параметра θ — вероятности успеха p в одном испытании Бернулли для выборки $X_1, \ldots, X_n$, имеющей биномиальное распределение $B(k = 10, p)$.

Напомним, что для того, чтобы построить симметричный α-доверительный интервал для неизвестного параметра θ, нужно решить следующую систему

$$\begin{cases} F_{\theta*}(x1, \theta) = \dfrac{1+\alpha}{2}, \\ F_{\theta*}(x2, \theta) = \dfrac{1-\alpha}{2}, \end{cases}$$

где $\theta*$ — оценка неизвестного параметра, а $F_{\theta*}(x, \theta)$ — ФР оценки. Решая систему и подставляя вместо неизвестного параметра его оценку, получим значения $[\theta', \theta'']$ определяющие искомый доверительный интервал.

Для неизвестной вероятности успеха $\theta = p$ биномиального распределения возьмём оценку по методу моментов $\theta* = p* = \frac{\overline{m}_1}{k}$. Предполагая, что наша выборка достаточно велика, и используя результаты ЦПТ (в форме интегральной теоремы Муавра-Лапласа), получим, что оценка $p*$ приближённо имеет нормальное распределение со средним значением $Mp* = \frac{\theta}{k}$ и дисперсией $Dp* = \frac{\theta(1-\theta)}{kn}$

$$F_{p*}(x,\theta) = P\{p* < x\} \approx \Phi\left(\frac{x - Mp*}{\sqrt{Dp*}}\right) = \Phi\left(\frac{x-\theta/k}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{kn}}}\right)$$

Приравнивая к $\frac{1+\alpha}{2}$ и $\frac{1-\alpha}{2}$, получим систему

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{x-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{kn}}}\right) = \dfrac{1+\alpha}{2}, \\ \Phi\left(\dfrac{x-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{kn}}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2}, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\theta) = \theta + \sqrt{\dfrac{\theta(1-\theta)}{kn}}\varphi_{\frac{1+\alpha}{2}}, \\ x_2 = x_2(\theta) = \theta + \sqrt{\dfrac{\theta(1-\theta)}{kn}}\varphi_{\frac{1-\alpha}{2}},, \end{cases}$$

где $\varphi_{\frac{1+\alpha}{2}}$ и $\varphi_{\frac{1-\alpha}{2}}$ — $\frac{1+\alpha}{2}$- и $\frac{1-\alpha}{2}$-квантили стандартного нормального закона.

Учитывая, что $\varphi_{\frac{1+\alpha}{2}} = -\varphi_{\frac{1-\alpha}{2}}$, получим

$$(x-\theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{kn}\varphi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Подставим вместо x значение оценки $\theta*$, в итоге получим уравнение относительно неизвестного параметра θ

$$(\theta * -\theta k)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{kn}\varphi^2_{\frac{1+\alpha}{2}},$$

решая которое, получим, что границы доверительного интервала имеют вид

$$\theta^{\prime,\prime\prime} = \frac{\theta + \frac{1}{2kn}\varphi^2_{\frac{1+\alpha}{2}} \pm \varphi_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\theta*}{kn}\left(1-\theta*\right) + \frac{1}{4k^2n^2}\varphi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}}}{1+\frac{1}{kn}\varphi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}}.$$

Пусть $\alpha = 0.9$, тогда $\theta' = 0.5585272$, $\quad\theta'' = 0.485236$. Для $\alpha = 0.95$ получим $\theta' = 0.565449$, $\quad\theta'' = 0.4782155$

Пример 43. Приведена выборка X (Нормальное распределение $m = 0, \sigma = 1$) размера 50.

```
        [,1]   [,2]   [,3]   [,4]   [,5]
 [1,]  1.263  0.764 -0.224 -0.236  1.758
 [2,] -0.326 -0.799  0.377 -0.543  0.561
 [3,]  1.330 -1.148  0.133 -0.433 -0.453
 [4,]  1.272 -0.289  0.804 -0.649 -0.832
 [5,]  0.415 -0.299 -0.057  0.727 -1.167
 [6,] -1.540 -0.412  0.504  1.152 -1.066
 [7,] -0.929  0.252  1.086  0.992 -1.564
 [8,] -0.295 -0.892 -0.691 -0.430  1.157
 [9,] -0.006  0.436 -1.285  1.238  0.832
[10,]  2.405 -1.238  0.047 -0.279 -0.227
```

Найдём:
– минимальный и максимальный элементы выборки, размах выборки;
– вариационный и стастический ряды, гистограмму;
– медиану, первый и третий квартили выборки;
– выборочные характеристики.

Решение.

Найдём минимальный и максимальный элементы выборки, а также размах выборки —разность между максимальным и минимальным элементами.

$X_{\min} = -1.56400$, $X_{\max} = 2.40500$, $r = X_{\max} - X_{\min} = 3.969$.

Построим вариационный ряд — упорядочим элементы выборки по возрастанию.

```
[1] -1.564 -1.540 -1.285 -1.238 -1.167 -1.148 -1.066 -0.929 -0.892 -0.832 -0.799
[12] -0.691 -0.649 -0.543 -0.453 -0.433 -0.430 -0.412 -0.326 -0.299 -0.295 -0.289
[23] -0.279 -0.236 -0.227 -0.224 -0.057 -0.006  0.047  0.133  0.252  0.377  0.415
[34]  0.436  0.504  0.561  0.727  0.764  0.804  0.832  0.992  1.086  1.152  1.157
[45]  1.238  1.263  1.272  1.330  1.758  2.405
```

Теперь построим статистический ряд — выделим все различные элементы и выясним сколько раз они встречаются. Для этого разобьём область значений на интервалы длины 1. Причем нижняя граница — максимальное целое число, меньше $X_{\min} = -1.56400$, т.е. -2, а верхняя граница — минимальное целое число, больше $X_{\max} = 2.40500$, т.е. 3. Это делается для того, чтобы не потерять элементы выборки.

```
(-2,-1]  (-1,0]   (0,1]   (1,2]   (2,3]
      7       21      13       8       1
```

Построим полигон частот — воспользуемся статистическим рядом. Для полигона относительных частот найдём $\nu_i = n_i/n$, где ν_i — относительная частота появления i-го элемента, n_i — частота появления i-го элемента, n — размер выборки.

```
(-2,-1]  (-1,0]   (0,1]   (1,2]   (2,3]
0.14        0.42    0.26    0.16    0.02
```

Гистограмма. Построим гистограмму, в качестве Δn — длина интервала разбиения, возьмём 1. Границы разбиения $(a_0; a_1](a_1; a_2] \dots (a_{k-1}; a_k]$, a_0 — максимальное целое число, меньше $X_{\min} = -1.56400$, $a_l = a_0 + l * 1$, a_k — минимальное целое число, больше $X_{\max} = 2.40500$.

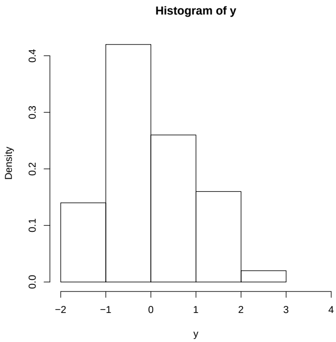

Рис. 5.2. Гистограмма

Найдём теперь медиану, первый и третий квартили выборки. Медиана Q_2 — элемент (или среднее арифметическое элементов) выборки, справа и слева от которого лежит одинаковое количество элементов выборки. Первый квартиль Q_1 — выборочный 25%-квантиль выборки, слева от Q_1 находится 25% элементов выборки; третий квартиль Q_3 — выборочный 75%-квантиль, слева от него находится 75% элементов выборки.

$$Q_2 = -0.22550, \quad Q_1 = -0.62250, \quad Q_3 = 0.75470.$$

Теперь найдём выборочные среднее $\overline{m}$ и дисперсии $\overline{\sigma}^2$ и s^2.

$$\overline{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0.8980758$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m})^2 = 0.8020424 \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{m})^2 = 0.916404$$

Задача 184.

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	7	3	6	4	5
[2,]	4	4	7	5	6
[3,]	4	4	4	5	6
[4,]	5	6	6	5	6
[5,]	7	5	3	4	5
[6,]	4	6	4	6	5
[7,]	7	5	5	6	6
[8,]	7	6	2	6	2
[9,]	6	9	5	3	5
[10,]	6	5	7	6	6

Приведённая выше выборка $X_1, \ldots, X_n$ принадлежит биномиальному распределению $B(k, p)$. Построить статистический ряд, полигон относительных частот и гистограмму. По методу моментов найти оценку неизвестных параметров.

Вычислить выборочное среднее и несмещённую выборочную дисперсию. По методу максимального правдоподобия найти оценку параметра p при известном параметре k и проверить оценку на эффективность.

Задача 185.

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	7	1	5	3	3
[2,]	3	2	7	4	6
[3,]	3	2	2	4	5
[4,]	4	5	5	4	5
[5,]	7	3	2	2	4
[6,]	2	5	3	6	4
[7,]	7	4	3	5	6
[8,]	7	5	0	6	1
[9,]	5	10	3	2	4
[10,]	5	3	6	5	5

Приведённая выше выборка $X_1, \ldots, X_n$ принадлежит пуассоновскому распределению $Pois(p)$. Построить статистический ряд, полигон относительных частот и гистограмму. Найти выборочную дисперсию.

С помощью метода максимального правдоподобия найти оценку неизвестного параметра p и проверить его на эффективность.

Задача 186.

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0	4	2	3	1
[2,]	2	10	4	2	0
[3,]	1	2	2	3	3
[4,]	8	0	0	3	2
[5,]	1	0	0	0	4
[6,]	5	3	3	7	1
[7,]	5	0	1	0	3
[8,]	0	7	0	4	2
[9,]	2	0	4	2	1
[10,]	11	7	7	3	1

Приведённая выше выборка $X_1, \ldots, X_n$ принадлежит геометрическому распределению $Geom(p)$. Построить статистический ряд, полигон относительных частот и гистограмму.

С помощью метода максимального правдоподобия найти оценку неизвестного параметра $1/p$ и проверить на эффективность. Вычислить выборочную дисперсию.

Задача 187. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

(0; 1.3]	(1.3; 2.6]	(2.6; 3.9]	(3.9; 5.2]	(5.2; 6.5]
35	28	17	7	5
(6.5; 7.8]	(7.8; 9.1]	(9.1; 10.4]	(10.4; 11.7]	(11.7; 13]
4	1	1	1	1

Приведённая выше выборка $X_1, \ldots, X_n$ (первая строка — интервалы, вторая строка — количество элементов выборки на этом интервале) принадлежит экспоненциальному распределению $E(\lambda)$. Построить полигон относительных частот и гистограмму.

С помощью метода максимального правдоподобия найти оценку неизвестного параметра $1/\lambda$ и проверить на несмещенность.

Задача 188. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9 – 10
105	70	63	42	28	19	15	9	7	15

Предполагается, что распределение времени между поступлениями имеет плотность $f(x)$, определённую при $0 < p < 1$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

При помощи метода моментов найти оценку параметра p при заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 0.4$.

Задача 189. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

0 – 0.6	0.6 – 1.2	1.2 – 1.8	1.8 – 2.4	2.4 – 3
25	32	39	40	27
3 – 3.6	3.6 – 4.2	4.2 – 4.8	4.8 – 5.4	5.4 – 6
28	26	28	21	3

Предполагается, что распределение времени между поступлениями имеет плотность $f(x)$, определённую при $0 < p < 1$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{a} + \dfrac{1-p}{b}, & 0 < x < a, \\ \dfrac{1-p}{b}, & a < x < b, \\ 0, & x \le 0,\ x \ge b. \end{cases}$$

При помощи метода моментов найти оценку параметра p при заданных значениях параметров $a = 5,\ b = 6$.

Задача 190. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9 – 10
293	62	37	31	22	18	17	11	8	6

Предполагается, что распределение времени между поступлениями имеет плотность $f(x)$, определённую при $0 < p < 1$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

При помощи метода моментов найти оценку параметра p при заданных значениях параметров $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 0.5$.

Задача 191. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

0 – 0.8	0.8 – 1.6	1.6 – 2.4	2.4 – 3.2	3.2 – 4
142	136	150	149	150
4 – 4.8	4.8 – 5.6	5.6 – 6.4	6.4 – 7.2	7.2 – 8
14	12	10	8	7

Предполагается, что распределение времени между поступлениями имеет плотность $f(x)$, определённую при $0 < p < 1$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda x e^{-\lambda x} + \dfrac{1-p}{a}, & 0 < x < a, \\ p\lambda e^{-\lambda x}, & x > a, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

При помощи метода моментов найти оценку параметра p при заданных значениях параметров $\lambda = 0.3,\ a = 4$.

Задача 192. Произведены измерения интервалов времени между поступлениями запросов на сервер вычислительного комплекса и получена следующая таблица частот:

$0-1$	$1-2$	$2-3$	$3-4$	$4-5$
321	246	161	94	67
$5-6$	$6-7$	$7-8$	$8-9$	$9-10$
39	29	24	12	7

Предполагается, что распределение времени между поступлениями имеет плотность $f(x)$, определённую при $0 < p < 1$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} p\lambda_1^2 x e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

При помощи метода моментов найти оценку параметра p при заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0.6,\ \lambda_2 = 2$.

Задача 193. По выборочным данным с помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что распределение случайной величины является нормальным. Уровень значимости 5%. Первая строка содержит выборочные значения X_i, вторая строка – частоты ν_i. Объём выборки $n = 500$.

$(-\infty;-8]$	$(-8;-4]$	$(-4;0]$	$(0;4]$	$(4;8)$	$[8;12)$	$[12;\infty)$
5	75	178	164	67	10	1

Задача 194. По выборочным данным с помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что распределение случайной величины является экспоненциальным. Уровень значимости 5%. Первая строка содержит выборочные значения X_i, вторая строка – частоты ν_i. Объём выборки $n = 500$.

$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$	$20-25$	$25-30$	> 30
313	126	42	14	3	1	1

Задача 195. По выборочным данным с помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что распределение случайной величины является биномиальным. Уровень значимости 5%. Первая строка содержит выборочные значения X_i, вторая строка – частоты ν_i. Объём выборки $n = 500$. (Оценку неизвестного параметра найти с помощью метода

максимального правдоподобия)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	13	67	107	130	94	60	20	7

Задача 196. По выборочным данным с помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что распределение случайной величины является геометрическим. Уровень значимости 5%. Первая строка содержит выборочные значения X_i, вторая строка – частоты ν_i. Объём выборки $n = 500$. (Оценку неизвестного параметра найти с помощью метода максимального правдоподобия)

0	1	2	34	4	5	6	7	8
244	136	57	36	15	5	3	1	3

Задача 197. По выборочным данным с помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о том, что распределение случайной величины является пуассоновским. Уровень значимости 5%. Первая строка содержит выборочные значения X_i, вторая строка – частоты ν_i. Объём выборки $n = 500$. (Оценку неизвестного параметра найти с помощью метода максимального правдоподобия)

0	1	2	3	4	5	6	7
60	148	136	83	47	16	9	1

Программы

Программа курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

Цели и задачи дисциплины: Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» входит в базовую часть профессионального цикла в рамках направления 010400 «Прикладная математика и информатика»,010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии», 010200 «Математика и компьютерные науки». Курс носит теоретический и практический характер.

Целью курса является:

– Развитие профессиональной математической культуры студента.
– Подготовка студента к практическому применению методов теории вероятностей и математической статистики к математическому моделированию технических и экономических процессов.
– Подготовка студента к изучению предметов специализации «Статистика» направления «Прикладная математика и информатика».
– Подготовка студента к продолжению образования по выбранной специальности в магистратуре.

Задачей курса является формирование у студентов базовых знаний в области теории вероятностей и математической статистики. Задачей курса является также обучение студентов использованию методов вероятностного анализа данных и построения прикладных вероятностных моделей. Это позволит им при необходимости применять полученные знания и умения при решении прикладных задач в различных областях, связанных с анализом стохастических моделей. В результате обучения они получат умение и навыки правильно оценить сложность научно-исследовательских заданий на разработку прикладных моделей в различных областях, связанных с теорией вероятностей и математической статистикой, аргументировано выбирать метод решения поставленной задачи, а затем экономично и эффективно выполнять компьютерную обработку и анализ данных, а также все необходимые вычисления в рамках поставленной прикладной задачи.

В результате изучения дисциплины студент должен:

– **Знать**: базовые аспекты теории вероятностей и математической статистики.
– **Уметь**: демонстрировать общенаучные базовые знания математики; приобретать новые научные знания, используя современные образовательные и информационные технологии; применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат, решать прикладные задачи статистического анализа и обработки числовых данных, самостоятельно изучать

научную литературу в соответствие с профилем обучения, осуществлять целенаправленный поиск информации в сети Интернет, применять современные комплекты программ для решения прикладных задач в области математики и экономики, исследовать и разрабатывать математические модели по тематике проводимых научно-исследовательских проектов.
– **Владеть**: способностью решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц. Учебный курс читается в 3 и 4 семестрах для студентов 2 курса.

Разделы дисциплины и распределение аудиторной нагрузки:
– Вероятностное пространство — 2 часа лекций и 3 часа семинарских занятий.
– Классическая и геометрическая вероятности — 2 часа лекций и 6 часов семинарских занятий.
– Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности и Байеса — 3 часа лекций и 8 часов семинарских занятий.
– Схема Бернулли — 3 часа лекций и 5 часов семинарских занятий.
– Случайные величины и их распределения — 8 часов лекций и 14 часов семинарских занятий.
– Многомерные случайные величины и их свойства — 8 часов лекций и 16 часов семинарских занятий.
– Числовые характеристики случайных величин — 5 часов лекций и 4 часа семинарских занятий.
– Сходимость случайных величин — 5 часов лекций и 3 часа семинарских занятий.
– Центральная предельная теорема — 5 часов лекций и 3 часа семинарских занятий.
– Общие сведения математической статистики — 5 часов лекций и 2 часа семинарских занятий.
– Оценки неизвестных параметров — 5 часов лекций и 4 часа семинарских занятий.
– Проверка статистических гипотез — 5 часов лекций и 4 часа семинарских занятий.

Учебным планом на изучение дисциплины отводится два семестр. В каждом семестре проводятся две контрольные работы, два домашних задания и коллоквиум. По итогам первой контрольной работы и первого домашнего задания проводится промежуточная аттестация. Сумма баллов, набранная по итогам промежуточной аттестации, и баллов за вторую контрольную работу, второе домашнее задание и коллоквиум равняется общему количеству баллов, заработанных студентом в течение семестра. В конце каждого семестра производится итоговый контроль знаний - экзамен.

Используемая литература

1. Henry Alfred. Calculus and Probability for actuarial students. — London, 1922.
2. Tijms H. Understanding Probability. Chance Rules in Everyday Life. — Cambridge University Press.
3. Венцтель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. — М. : Наука, 1969.
4. Ogunnaike B.A. Random Phenomena. Fundamentals and Engineering Applications of Probability and Statistics. — CRC Press, 2009.
5. Stoyanov J.M. Counterexamples in Probability. — Wiley, 1997.
6. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по теории вероятности и математической статистике. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 1979.
7. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. — М. : Наука, 1986.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник - Изд. 6-е, перераб. и доп. — М. : Наука, 1988.
9. Montgomery D.C., Runger G.C. Applied statistics and probability for engineers. — John Wiley and Sons.

Учебное издание

«Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике»

Компьютерная вёрстка *И. С. Зарядов*, *Р. В. Разумчик*

Издание подготовлено в авторской редакции
Тематический план 2013 г.

Подписано в печать ___.___.2013 г. Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. ___. Тираж 100 экз. Заказ № ___.

Российский университет дружбы народов
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

Типография РУДН
115419, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41