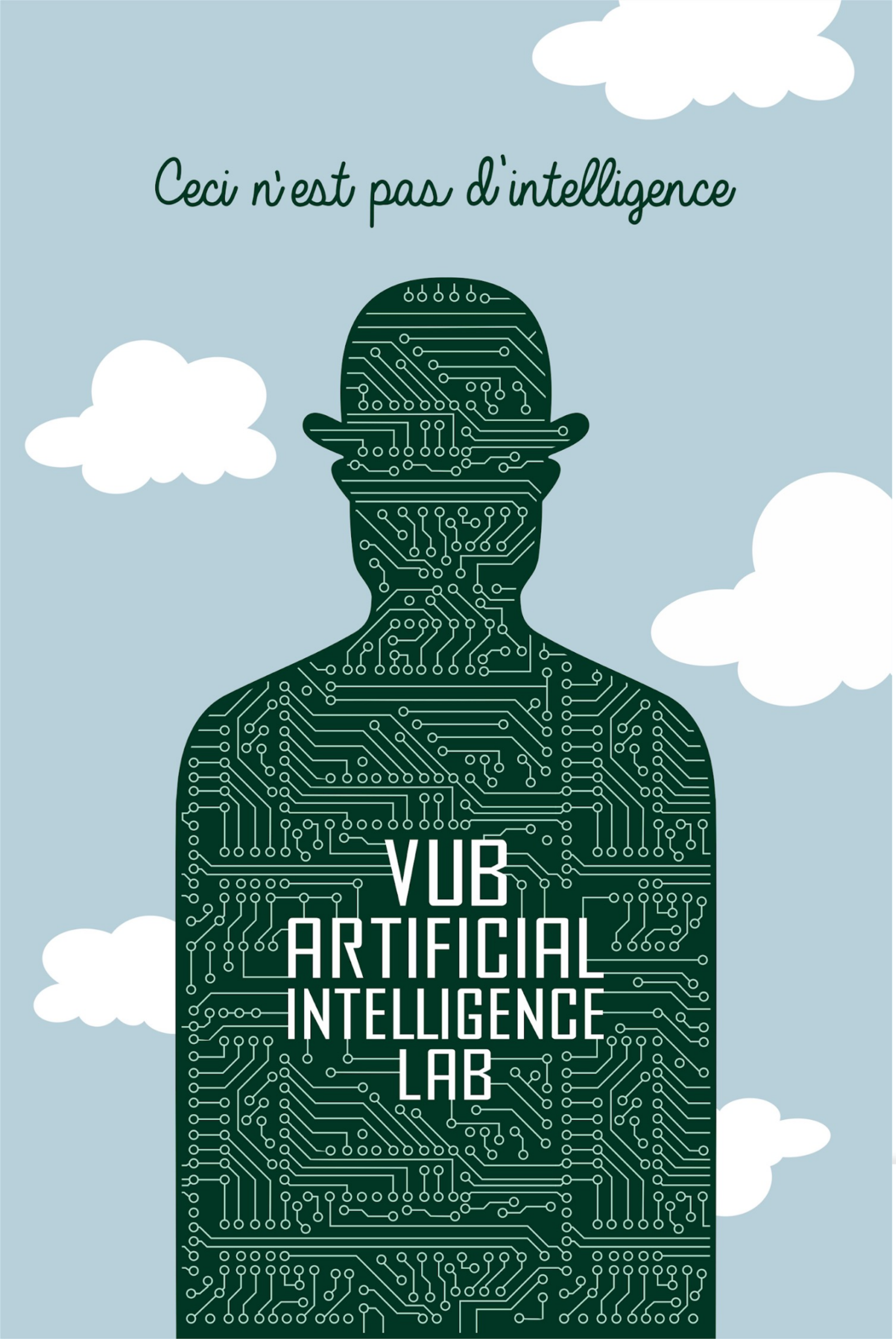

Logica en formele systemen

Predikaatlogica

Afleidingen

Prof. dr. Marjon Blondeel
Academiejaar 2024-2025

Inhoud predikaatlogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Uitbreiden natuurlijke deductie

- afleidingsregels propositielogica blijven geldig
- bijkomende afleidingsregels ∀ en ∃
  - we beperken ons tot formules zonder vrije variabelen (in het boek zijn vrije variabelen toegelaten!!)

Afleidingsregels propositielogica

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi}\;\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\;\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma & \Phi\\ \vdots & \vdots\\ \varphi & \psi\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi}\;\wedge\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma & \Phi\\ \vdots & \vdots\\ \varphi\rightarrow\psi & \varphi\end{matrix}}{\psi}\;\rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\rightarrow\psi}\;\rightarrow\mathrm{I}, [-\varphi]$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma & \Phi,\varphi & \Psi,\psi\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi\vee\psi & \alpha & \alpha\end{matrix}}{\alpha}\;\vee\mathrm{E}, [-\varphi, -\psi] \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\;\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\;\vee\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma & \Phi\\ \vdots & \vdots\\ \varphi & \neg\varphi\end{matrix}}{\psi}\;\neg\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\neg\psi & \Phi,\neg\psi\\ \vdots & \vdots\\ \varphi & \neg\varphi\end{matrix}}{\psi}\;\neg\mathrm{E}^*, [-\neg\psi] \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\psi & \Phi,\psi\\ \vdots & \vdots\\ \varphi & \neg\varphi\end{matrix}}{\neg\psi}\;\neg\mathrm{I}, [-\psi]$$

Afleidingsregels: ∀-Eliminatie

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \vdots \\ \forall x\, \varphi\end{array}}{[t/x]\varphi}\ \forall E$$

Met t een term zonder variabelen

∀-Eliminatieregel
(regel vd instantiatie)

Pas op: eenvoudigere regel dat in het boek, daar wordt er een rijkere taal gebruikt!

Afleidingsregels: ∀-Introductie

$$\frac{\begin{matrix}\Sigma \\ \vdots \\ [d\ /\ x]\varphi\end{matrix}}{\forall x\varphi}\ \forall I$$

mits d een constante die niet voorkomt in Σ of in $\forall x\ \varphi$

∀-Introductieregel
(regel vd generalisatie)

Pas op: eenvoudigere regel dat in het boek, daar wordt er een rijkere taal gebruikt!

∀-Introductie: foute toepassing

Volgende is niet toegestaan want d komt voor in $\forall x\ Rxd$

$$\frac{Rdd}{\forall x\ Rxd}\ \forall\mathrm{I}$$

Afleidingsregels ∀: voorbeeld

$$\forall x\,(Ax \to Bx) \vdash \forall x\, Ax \;\to\; \forall x\, Bx$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x\, Ax}}{Ad}\,\forall E \qquad \dfrac{\forall x\,(Ax \to Bx)}{Ad \to Bd}\,\forall E}{Bd}\,{\to}E}{\forall x\, Bx}\,\forall I}{\forall x\, Ax \to \forall x\, Bx}\,{\to}I[-1]$$

Afleidingsregels ∀: voorbeeld

$$\forall x\, Ax \lor \forall x\, Bx \vdash \forall x\,(Ax \lor Bx)$$

$$\dfrac{\forall x\, Ax \lor \forall x\, Bx \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall x\, Ax}}{Ad}\,\forall\mathrm{E}}{Ad \lor Bd}\,\lor\mathrm{I}}{\forall x\,(Ax \lor Bx)}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\forall x\, Bx}}{Bd}\,\forall\mathrm{E}}{Ad \lor Bd}\,\lor\mathrm{I}}{\forall x\,(Ax \lor Bx)}\,\forall\mathrm{I}}{\forall x\,(Ax \lor Bx)}\;\lor\mathrm{E}\ [-1,-2]$$

Afleidingsregels: ∃-Introductie

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \vdots \\ [t/x]\,\varphi\end{array}}{\exists x\,\varphi}\,\exists\mathrm{I} \qquad \text{mits } t \text{ vrij is voor } x \text{ in } \varphi$$

∃-Introductieregel

Herinnner: Een term t heet vrij voor x in φ als in $[t\ /\ x]\varphi$ geen variabele van t gebonden wordt.

∃-Introductie: foute toepassing

Volgende is niet toegestaan want y is niet vrij voor x in $\forall y\, Ryx$

$$\frac{\forall y\, Ryy}{\exists x\, \forall y\, Ryx}\ \exists\mathrm{I}$$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Afleidingsregels: ∃-Eliminatie

$$\begin{array}{cc} \Phi & \Sigma, [d / x]\varphi \\ \vdots & \vdots \\ \exists x\, \varphi & \psi \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\psi} \end{array} \ \exists \mathrm{E},\ [-[d/x]\varphi]$$

mits d een constante die niet voorkomt in Σ, ψ of in $\exists x\ \varphi$

∃-Eliminatieregel

Een conclusie uit een existentiële bewering moet los staan van een specifiek voorbeeld van die bewering.

Pas op: eenvoudigere regel dat in het boek, daar wordt er een rijkere taal gebruikt!

∃-Eliminatie: foute toepassing

Volgende is niet toegestaan want d komt voor in $\exists z\, Rdz$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, Rxx \qquad \dfrac{\overset{1}{Rdd}}{\exists z\, Rdz}\ \exists\mathrm{I}}{\exists z\, Rdz}\ \exists\mathrm{E}\ [-1]}{\forall x\, \exists z\, Rxz}\ \forall\mathrm{I}$$

∃-Eliminatie: voorbeeld

$$\exists x\,(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x\, Ax \;\wedge\; \exists x\, Bx$$

$$\dfrac{\exists x\,(Ax \wedge Bx) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{Ad \wedge Bd}}{Ad}\,\wedge\mathrm{E}}{\exists x\, Ax}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{Ad \wedge Bd}}{Bd}\,\wedge\mathrm{E}}{\exists x\, Bx}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx}\,\wedge\mathrm{I}}{\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx}\;\exists\mathrm{E}, [-1]$$

Afleidingsregels ∃: voorbeeld

$$\exists x\,\forall y\,Rxy \ \vdash\ \forall y\,\exists x\,Rxy$$

$$\dfrac{\exists x\,\forall y\,Rxy \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall y\,Rdy}}{Rde}\ \forall\mathrm{E}}{\exists x\,Rxe}\ \exists\mathrm{I}}{\forall y\,\exists x\,Rxy}\ \forall\mathrm{I}}{\forall y\,\exists x\,Rxy}\ \exists\mathrm{E}, [-1]$$

Alternatief bewijssysteem

- Herinner: propositielogica: axioma’s en modus ponens
- Voor predikaatlogica hebben we een gelijkaardig system dat ook equivalent is met natuurlijke deductie.
- In de wiskunde zijn er veel voorbeelden van axiomatische bewijssystemen, een voorbeeld is Peano-rekenkunde: een theorie voor het optellen en vermenigvuldigen van natuurlijke getallen

niet te kennen voor het examen

Peano-rekenkunde

- constante: 0
- functieletters: 2 plaatsig $+, \cdot$ 1 plaatsig S (opvolgfunctie)

voorbeelden termen: $0, S0, SS0, \dots, 0 + x, x \cdot y, S(x + Sy)$

niet te kennen voor het examen

Axioma's:

PA1: $\forall x\ \neg 0 = Sx$ *(0 is de opvolger van geen enkel getal)*

PA2: $\forall x \forall y\ (Sx = Sy \rightarrow x = y)$ *(opvolgfunctie is injectief, elk getal is opvolger van max 1 getal)*

PA3: $\forall x\ x + 0 = x$

$\forall x\ \forall y\ x + Sy = S(x + y)$ *(recursieve definitie +)*

PA4: $\forall x\ x \cdot 0 = x$

$\forall x\ \forall y\ x \cdot Sy = x \cdot y + x$ *(recursieve definitie ·)*

PA5: $([0/x]\varphi\ \wedge\ \forall x(\varphi \rightarrow [Sx\ /\ x]\varphi)) \rightarrow \forall x\varphi$ voor elke formule φ *(principe inductie op S)*