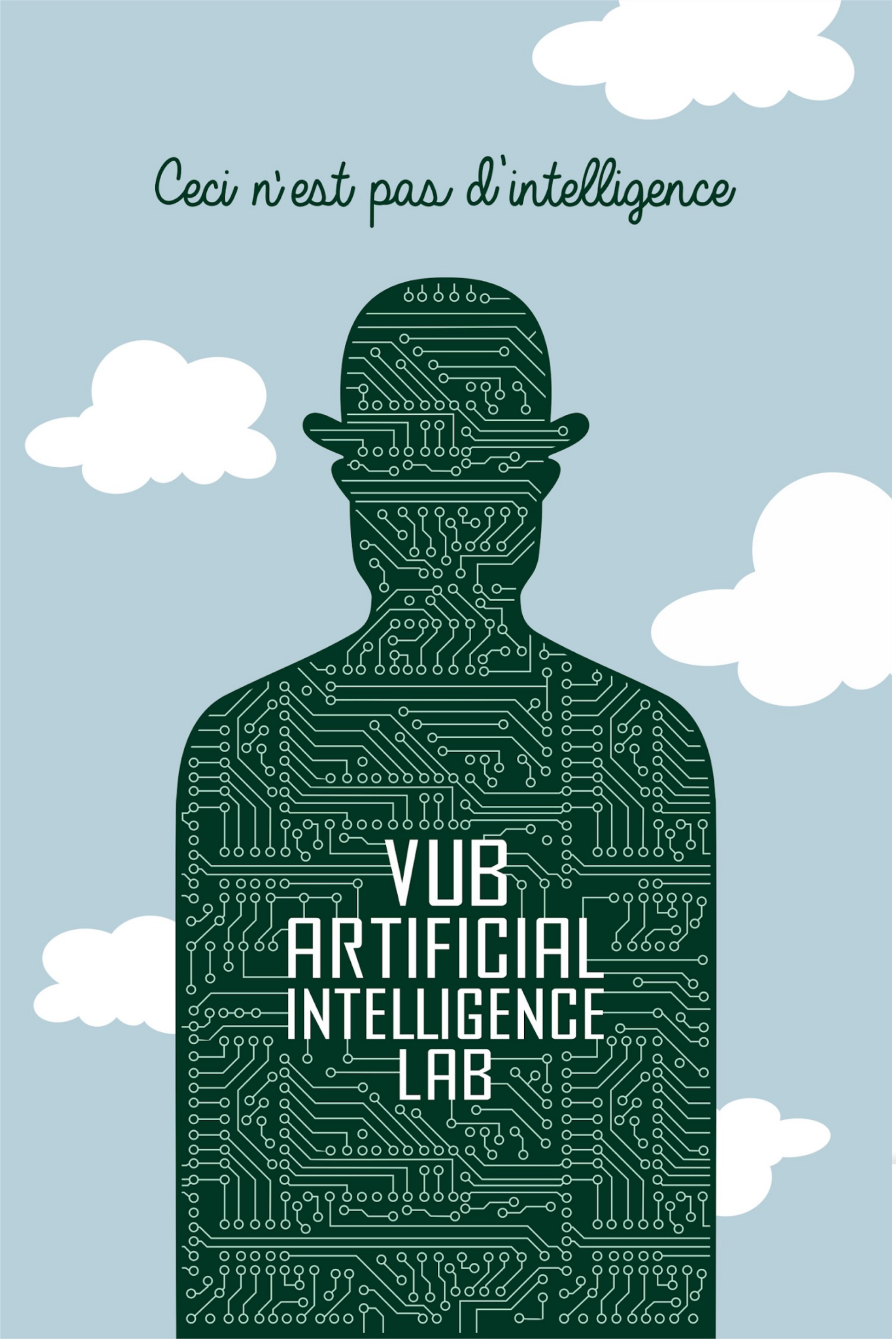

Logica en formele systemen

Lambda Calculus

Fixpunten en recursie

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud lambda calculus

- Inleiding
- Basisbegrippen
- Rekenen met lambda expressies
- Fixpunten en recursie

Fixpunten: definitie

Voor een functie $f: D \to D$ heet $x \in D$ een fixpunt van f desda

$$f(x) = x$$

$X \in \Lambda$ is een fixpunt van $F \in \Lambda$ desda

$$(F)X =_\beta X$$

Definitie

Fixpunten: stelling

Voor elke $F \in \Lambda$ bestaat er een $X \in \Lambda$ zodat

$$(F)X =_\beta X.$$

Voor

$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x$$

geldt voor alle $F \in \Lambda$

$$(F)(Y)F =_\beta (Y)F.$$

Y wordt de Y-combinator genoemd.

Stelling

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Fixpunten: bewijs (1/2)

Definieer $W \equiv \lambda x.(F)(x)x$ en $X \equiv (W)W$. Dan

$$
\begin{aligned}
X &\equiv (W)W \\
&\equiv (\lambda x.(F)(x)x)W \\
&=_\beta (F)(W)W \\
&\equiv (F)X
\end{aligned}
$$

Dus X is een fixpunt van F.

Bewijs

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Fixpunten: bewijs (2/2)

$$
\begin{aligned}
(Y)F &\equiv (\lambda f.(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x\,)F \\
&=_\beta (\lambda x.(F)(x)x)\lambda x.(F)(x)x \\
&\equiv (W)W
\end{aligned}
$$

Er volgt dat $(Y)F$ een fixpunt is van F want $(W)W$ is een fixpunt:

$$(F)(Y)F =_\beta (F)(W)W =_\beta (W)W =_\beta (Y)F$$

Bewijs

Recursie: inleiding (1/2)

Recursieve functie faculteit:

$$fac(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot fac(n-1), & n \geq 0 \end{cases}$$

Letterlijke vertaling:

$(((if)\ cond)\ A)\ B$

$$fac \equiv \lambda n. \left(\left((if)(iszero)n\right)c_1\right)\left((times)n\right)(fac)(pred)n$$

circulaire definitie! -> soort oneindig lang word, mag niet

oplossing: we vervangen $\equiv$ door $=_\beta$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Recursie: inleiding (2/2)

$$fac =_\beta \lambda n.\left(\left(\left((if)(iszero)n\right)c_1\right)\left((times)n\right)(fac)(pred)n\right.$$
$$=_\beta (\lambda f.\lambda n.\left(\left(\left((if)(iszero)n\right)c_1\right)\left((times)n\right)(f)(pred)n\right) fac$$

We definiëren nu

$$FAC \equiv \lambda f.\lambda n.\left(\left((if)(iszero)n\right)c_1\right)\left((times)n\right)(f)(pred)n$$

dan is FAC niet circulair en $fac =_\beta (FAC)fac$

Dus we definiëren $fac \equiv (Y)FAC$ (zie fixpunt stelling)

Recursie: faculteit samenvatting

$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x$$
$$FAC \equiv \lambda f.\lambda n.\Big(((if)(iszero)n)c_1\Big)((times)n)(f)(pred)n$$
$$fac \equiv (Y)FAC$$
$$W_{FAC} \equiv \lambda x.(FAC)(x)x$$

Toon als oefening: $(fac)c_0 =_\beta c_1$, $(fac)c_1 =_\beta c_1$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Recursie: oefening

$$
\begin{aligned}
(fac)c_0 \equiv\ & ((Y)FAC)c_0 \\
\equiv\ & \big((\lambda f.(\lambda x.(f)(x)x)\lambda x.(f)(x)x)\mathrm{FAC}\big)c_0 \\
=_\beta\ & ((\lambda x.(FAC)(x)x)\lambda x.(FAC)(x)x)c_0 \\
\equiv\ & ((\lambda x.(FAC)(x)x)W_{FAC})c_0 \\
=_\beta\ & \big((FAC)(W_{FAC})W_{FAC}\big)c_0 \\
\equiv\ & \Big(\Big(\lambda f.\lambda n.\Big(((if)(iszero)n)c_1\Big)((times)n)(f)(pred)n\Big)(W_{FAC})W_{FAC}\Big)\,c_0 \\
=_\beta\ & \Big(\lambda n.\Big(((if)(iszero)n)c_1\Big)((times)n)\big((W_{FAC})W_{FAC}\big)(pred)n\Big)\,c_0 \\
=_\beta\ & \Big(((if)(iszero)c_0)c_1\Big)((times)c_0)\big((W_{FAC})W_{FAC}\big)(pred)c_0 \\
=_\beta\ & \Big(((if)true)c_1\Big)((times)c_0)\big((W_{FAC})W_{FAC}\big)(pred)c_0 \\
=_\beta\ & ((true)c_1)((\mathrm{times})c_0)((W_{FAC})W_{FAC})(pred)c_0 \\
=_\beta\ & (\lambda f.c_1)((\mathrm{times})c_0)((W_{FAC})W_{FAC})(pred)c_0 \\
=_\beta\ & c_1
\end{aligned}
$$

Gevolg

Beschouw een $F \in \Lambda$ van de vorm

$$\lambda f.M$$

en fixpunt

$$X_F \equiv (Y)F.$$

Dan geldt

$$X_F =_\beta [X_F/f]M$$

Gevolg

Gevolg: bewijs

X_F is een fixpunt van F, dus per definitie: $(F)X_F =_\beta X_F$.

Uit het β axioma volgt:

$$(F)X_F \equiv (\lambda f.M)X_F =_\beta [X_F/f]\mathrm{M}.$$

Samengevat:

$$X_F =_\beta [X_F/f]\mathrm{M}$$

Bewijs

Gevolg: voorbeeld (1/2)

$FAC \equiv \lambda f.M$ met $M \equiv \lambda n.\Big(\big((if)(iszero)n\big)c_1\Big)\big((times)n\big)(f)(pred)n$

Uit het gevolg verkrijgen we

$$(fac)c_1 =_\beta ([fac/f]\mathrm{M})c_1 =_\beta (\lambda n.\Big(\big((if)(iszero)n\big)c_1\Big)\big((times)n\big)(fac)(pred)n)c_1$$

We werken verder uit

$$\begin{aligned}
(fac)c_1 &=_\beta (\big((if)(iszero)c_1\big)c_1)((times)c_1)(fac)(pred)c_1 \\
&=_\beta (\big((if)false\big)c_1)((times)c_1)(fac)(pred)c_1 \\
&=_\beta ((false)c_1)((times)c_1)(fac)(pred)c_1 \\
&\equiv \big((\lambda t.\lambda f.f)c_1\big)\big((times)c_1\big)(fac)(pred)c_1 \\
&=_\beta (\lambda f.f)((times)c_1)(fac)(pred)c_1 \\
&=_\beta ((times)c_1)(fac)(pred)c_1 \\
&=_\beta ((times)c_1)(fac)c_0
\end{aligned}$$

We verkrijgen een uitdrukking met fac

Gevolg: voorbeeld (2/2)

$FAC \equiv \lambda f.M$ met $M \equiv \lambda n.\Big(\big((if)(iszero)n\big)c_1\Big)\big((times)n\big)(f)(pred)n$

Uit het gevolg verkrijgen we $(fac)c_0 =_\beta ([fac/f]\mathrm{M})c_0 =_\beta (\lambda n.\Big(\big((if)(iszero)n\big)c_1\Big)\big((times)n\big)(fac)(pred)n)c_0$

$$
\begin{aligned}
(fac)c_1 &=_\beta ((times)c_1)(fac)c_0 \\
&=_\beta ((times)c_1)\ (\lambda n.\Big(\big((if)(iszero)n\big)c_1\Big)\big((times)n\big)(fac)(pred)n)c_0 \\
&=_\beta \big((times)c_1\big)\Big(\big((\mathrm{if})(\mathrm{iszero})c_0\big)c_1\Big)\big((times)c_0\big)(fac)(pred)c_0 \\
&=_\beta ((times)c_1)\big(\big((\mathrm{if})true\big)c_1\big)((times)c_0)(fac)(pred)c_0 \\
&=_\beta ((times)c_1)((true)c_1)((times)c_0)(fac)(pred)c_0 \\
&=_\beta ((times)c_1)(\lambda f.c_1)((times)c_0)(fac)(pred)c_0 \\
&=_\beta \big((times)c_1\big)c_1 \\
&=_\beta c_1
\end{aligned}
$$