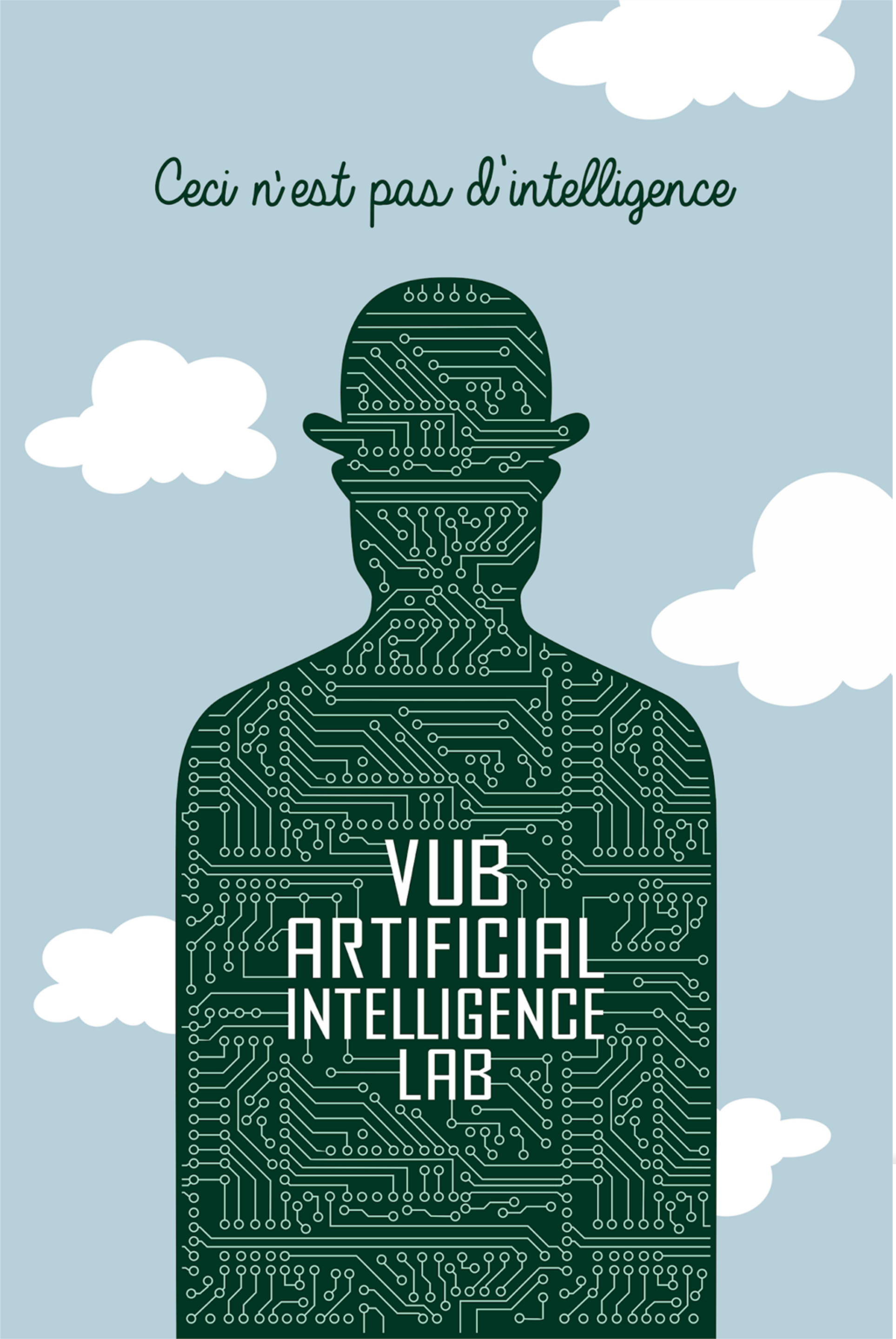


Logica en formele systemen

Propositielogica

Syntaxis

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB
ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud propositielogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Proposities

Proposities (uitspraken of beweringen) zijn atomair

- We gaan ze niet verder analyseren (de bouwstenen)
- We stellen ze voor door symbolen, nl letters

Voorbeelden:

- Ik ben ziek: z
- Ik lust koffie: k
- 7 < 4: a
- X==2: b

Beweringen zijn waar of vals

Logische connectieven

Hoe gaan we proposities verbinden?

- niet: $\neg$
- en: $\wedge$
- of: $\vee$
- als … dan: $\rightarrow$
- dan en slechts dan: $\leftrightarrow$

Voorbeelden

- Aanname: De afstandsbediening is stuk of de TV werkt niet goed.
- Aanname: De TV werkt wel goed.
- Conclusie: De afstandsbediening is stuk.

- Aanname: $(s \lor \neg t)$
- Aanname: t
- Conclusie: s

Voorbeelden

- Aanname: Als je ziek bent, dan lust je geen koffie.
- Aanname: Je lust koffie.
- Conclusie: Je bent niet ziek.

- Aanname: $(z \rightarrow \neg k)$
- Aanname: k
- Conclusie: $\neg z$

Alfabet: definitie

Het alfabet van de propositielogica bestaat uit

1. een verzameling propositieletters
2. de logische symbolen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$
3. ee hulpsymbolen:) en (

Definitie

Syntaxis: formule

De formules van de propositielogica worden als volgt gedefinieerd:

1. elke propositieletter is een formule
2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. niets anders is een formule

Uitdrukkingen in de propositielogica noemen we formules. Hiervoor worden Griekse letters gebruikt.

Definitie

Inductieve definitie

Een inductieve definitie heeft 3 kenmerkende onderdelen:

1. Een basisstap

   elke propositieletter is een formule

2. 1 of meer opbouwstappen

   als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules

3. Een afsluitende stap

   niets anders is een formule

Terminologie

Propositieletters zijn atomaire formules en worden ook atomen genoemd. Deze zijn niet meer te ontleden in kleinere formules.

vorm	uitspraak	naam
$\neg\varphi$	niet phi	negatie
$(\varphi \wedge \psi)$	phi en psi	conjunctie
$(\varphi \vee \psi)$	phi of psi	disjunctie
$(\varphi \rightarrow \psi)$	als phi dan psi	implicatie
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	phi dan en slechts dan als psi	equivalentie

desda

Opgelet: verschillen met natuurlijke taal

De ‘en’ uit natuurlijke taal en de logische ∧ zijn niet 100% equivalent.

- Ze kwam binnen en deed het licht uit.
- Ze deed het licht uit en kwam binnen.

Natuurlijke taal: volgorde belangrijk
Propositielogica: gelijkwaardig
(zie semantiek)

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Opgelet: verschillen met natuurlijke taal

De ‘of’ uit natuurlijke taal en de logische v zijn niet 100% equivalent.

- Voor je verjaardag krijg je een racefiets of een computer

Natuurlijke taal: een van de twee
Propositielogica: kunnen beide zijn
(zie semantiek)

Oefening: welke zijn geldige formules?

1. p
2. $\neg\neg p$
3. $(\neg p)$
4. $\neg(p \rightarrow \neg q)$
5. $q\neg$
6. $(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\neg p \wedge q))$
7. $(p \wedge q) \wedge r)$
8. $(p \vee q \vee r)$

Formuleschema en instantie

$(\varphi \wedge \psi)$ is een abstracte vorm, geen concrete formule, we noemen dit een formuleschema

instantie van het formuleschema onstaat als we “echte” formules invullen, bv

- $(p \wedge q)$
- $(p \wedge p)$
- $((p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow s) \rightarrow q))$

Oefening

Zijn volgende formules instanties van $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi)$?

1. $((p \wedge q) \rightarrow r)$
2. $(((\neg r \vee r) \wedge (\neg p \wedge q)) \rightarrow (\neg p \wedge q))$
3. $((r \wedge r) \rightarrow r)$

Substitutie: inleidend voorbeeld

formules

- φ: $((p \wedge q) \rightarrow p)$
- ψ: $(r \vee s)$

door elk voorkomen van p in φ te vervangen door de formule ψ krijgen we een nieuwe formule

$$(((r \vee s) \wedge q) \rightarrow (r \vee s))$$

Notatie: $[\psi/p]\ \varphi$

Uitspraak: substitueren van ψ voor p in φ

Substitutie: definitie

1. $[\psi/p]\,\varphi \;=\; \psi$ als $\varphi \;=\; p$

   $[\psi/p]\,\varphi \;=\; \varphi$ als φ een propositieletter is en $\varphi \neq p$

2. $[\psi/p]\,\neg\varphi \;=\; \neg[\psi/p]\,\varphi$

   $[\psi/p](\varphi \land \chi) = ([\psi/p]\varphi \land [\psi/p]\chi)$

   $[\psi/p](\varphi \lor \chi) = ([\psi/p]\varphi \lor [\psi/p]\chi)$

   $[\psi/p](\varphi \rightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \rightarrow [\psi/p]\chi)$

   $[\psi/p](\varphi \leftrightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \leftrightarrow [\psi/p]\chi)$

Definitie

Substitutie: voorbeeld

ψ: $(r \wedge s)$

1. $[\psi/p]p = (r \wedge s)$
2. $[\psi/p]q = q$
3. $[\psi/p]\neg p = \neg[\psi/p]p = \neg(r \wedge s)$
4. $[\psi/p](p \wedge q) = ([\psi/p]p \wedge [\psi/p]q) = ((r \wedge s) \wedge q)$
5. $[\psi/p](p \rightarrow q) = ([\psi/p]p \rightarrow [\psi/p]q) = ((r \wedge s) \rightarrow q)$

Substitutie: oefening

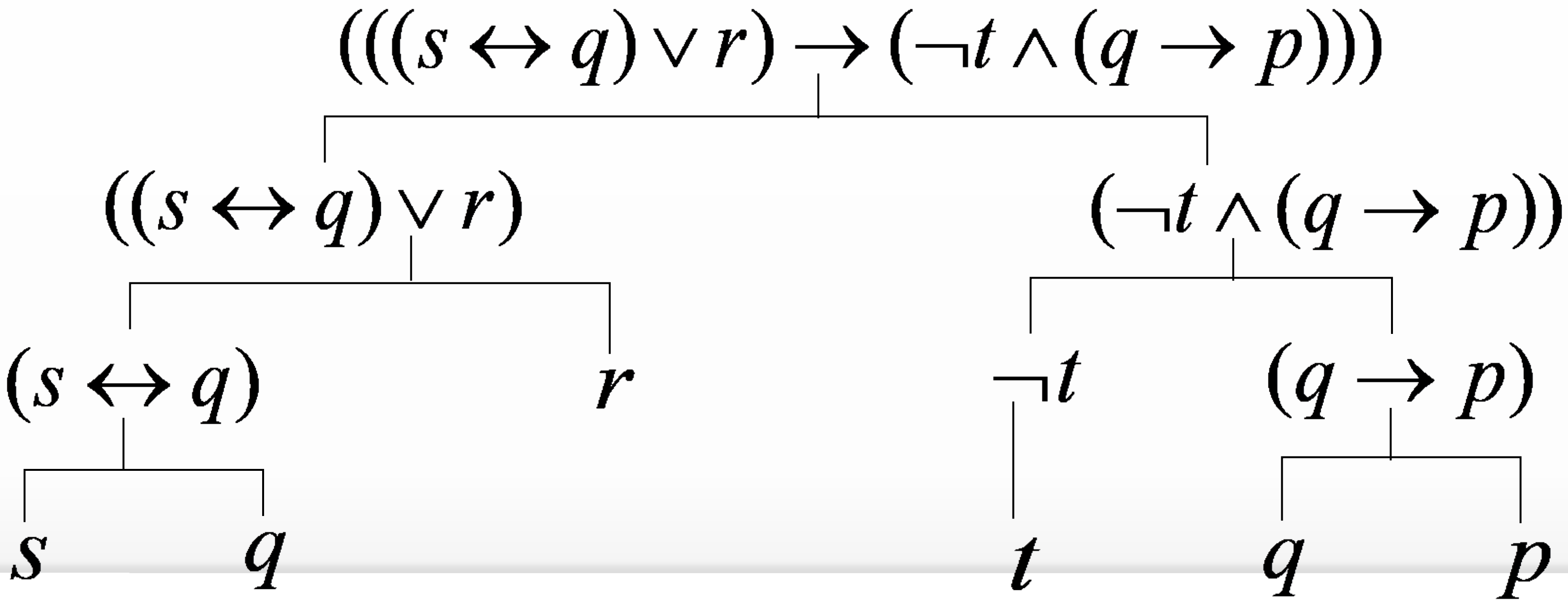
1. $[(p \to q)/r](r \vee s)$
2. $[(p \to q)/r](r \vee \neg r)$
3. $[r/r](r \vee \neg r)$
4. $[(r \vee \neg r)/r]r$
5. $[(p \vee \neg p)/q](q \to (s \to q))$

`

Constructieboom

De opbouw van een formule kan gegeven worden door een constructieboom.

Voorbeeld: $(((s \leftrightarrow q) \vee r) \rightarrow (\neg t \wedge (q \rightarrow p)))$



Constructieboom: opmerkingen

- Men kan bewijzen dat elke formule exact 1 constructieboom heeft.
- Haakjes zijn heel belangrijk.
  - Ze geven het bereik aan van connectieven.
  - Ze leggen de constructie eenduidig vast.
- Zinnen in natuurlijke taal zijn niet eenduidig vast te leggen (zie oefening volgende slide).

Constructieboom: oefening

Hoeveel constructiebomen bestaan er voor

“Als de baby niet huilt en trappelt, dan is ze gelukkig.”?

Gebruik volgende propositieletters

- h: “de baby huilt”
- t: “de baby trappelt”
- g: “de baby is gelukkig”