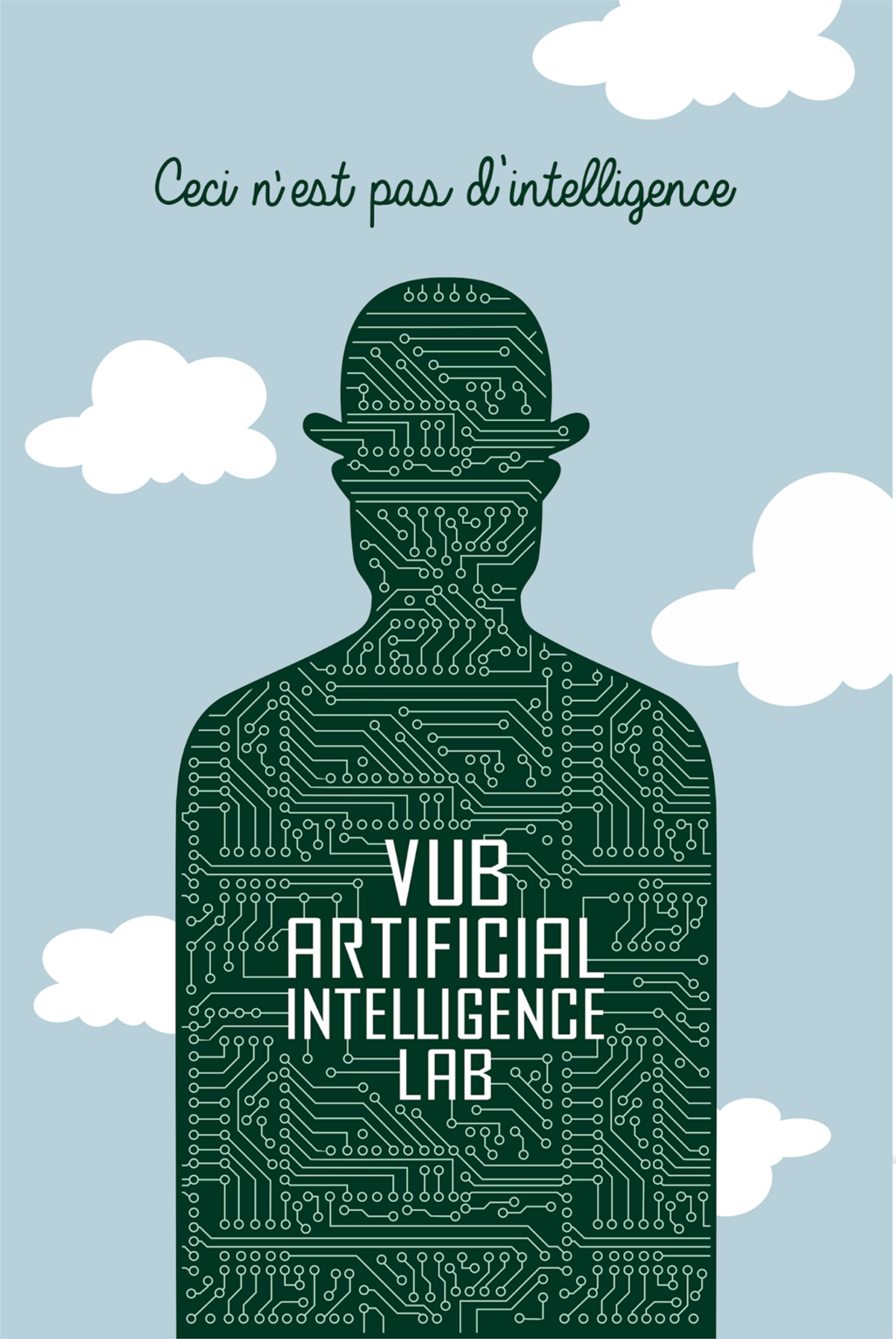


Logica en formele systemen

Predikaatlogica

Syntaxis

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB
ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud predikaatlogica

- Inleiding
- **Syntaxis**
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Alfabet: definitie

Het alfabet van de predikaatlogica bestaat uit

1. een verzameling C van individuele constanten
2. een verzameling P van predikaatletters
3. een verzameling F van functieletters
4. de logische symbolen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ en $\exists$
5. individuele variabelen
6. hulpsymbolen:) en (

Definitie

Notatie

constanten: kleine letters

- meestal $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$

predikaatletters: hoofdletters

- meestal $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$

functieletters: kleine letters

- meestal $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$

variabelen: kleine letters

- meestal $u, v, w, x, y, z, x_1, x_2, \dots$

Plaatsigheid

plaatsigheid: aantal argumenten (functieletters, predikaatletters), wordt soms aangeduid via een index

- f^3abc vs $f(a,b,c)$ vs $f^3(a,b,c)$ (3-plaatsig)
- P^2xy vs $\mathrm{P}(x,y)$ vs $P^2(x,y)$ (2-plaatsig)

0-plaatsige predikaatletters

Propositieletters kan je beschouwen als 0-plaatsige predikaatletters.

Predikaat (eigenschap) zonder argument

Bv. Het regent

Term: definitie

De termen van de predikaatlogica worden als volgt geconstrueerd:

1. individuele variabelen en constanten zijn termen
2. als f een k-plaatsige functieletter is en $t_1, \dots, t_k$ zijn termen, dan is $f(t_1, \dots, t_k)$ ook een term
3. niets anders is een term

Voorbeeld: $f^3(g^2(x, h^1(y)), a, h^1(g^2(a, y)))$

Definitie

Term: voorbeelden

- $+(3,5)$
  - $+$ is een functie
  - 3 en 5 zijn termen want constanten

- $+(3, x)$
  - $+$ is een functie
  - 3 is een term want een constante
  - x is een term want een variabele

Term: infix en prefix

Prefixnotatie

- $f(x, y)$
- $+(x, y)$

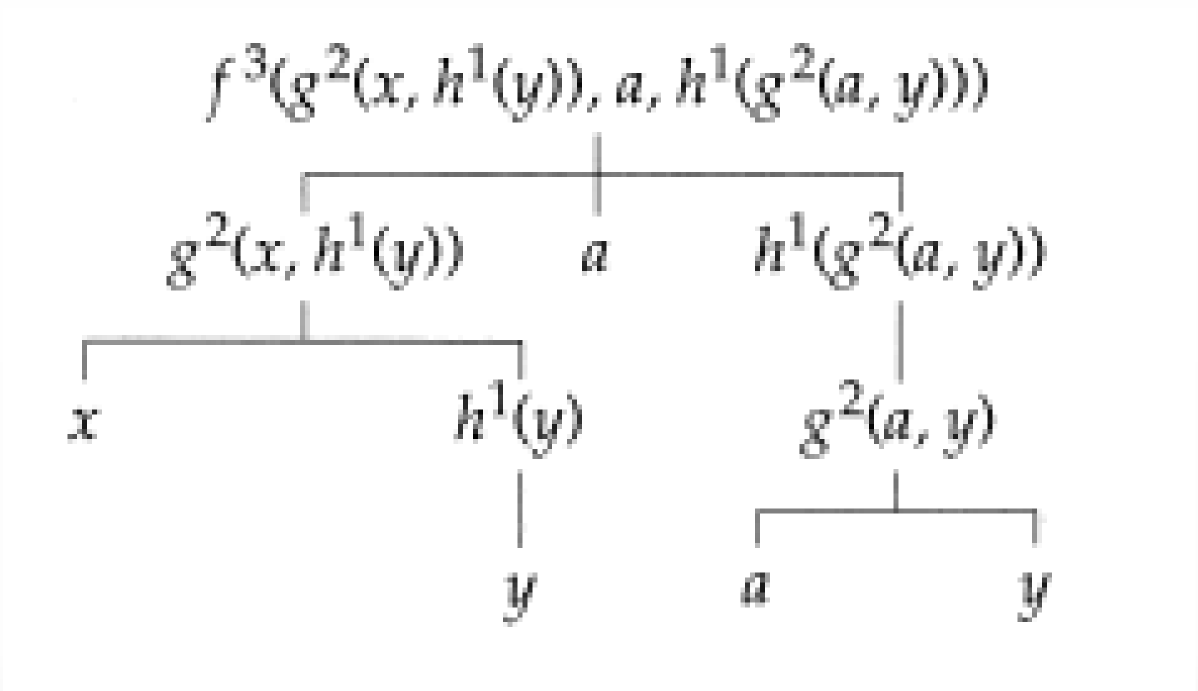
Infixnotatie

- $x + y$

In logica wordt prefix notatie gebruikt.

Term: constructieboom

$$f^3(g^2(x, h^1(y)), a, h^1(g^2(a, y)))$$



Formule: definitie

De formules van de predikaatlogica worden als volgt gedefinieerd:

1. als P een k-plaatsige predikaatletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen, dan is $P(t_1, \ldots, t_k)$ een formule
2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. als φ een formule is en x een variabele, dan zijn $\forall x\varphi$ en $\exists x\varphi$ ook formules
4. niets anders is een formule

Definitie

Formule: voorbeelden

Een formule van de vorm is $P(t_1, \ldots, t_k)$ met $t_1, \ldots, t_k$ termen heet een atoom of een atomaire bewering

- $P^2(x, a)$
- $P^2\left(f^2(x, y), g^1(a)\right)$

Formules die niet atomair zijn:

- $\forall x(A^1(x) \rightarrow \forall y(R^2(x, y) \rightarrow A^1(y)))$
- $\forall x \exists y \forall z(R^2(z, y) \leftrightarrow \neg Q^2(y, x))$

Formule: voorbeelden

Zijn geen formules

- $P(\neg x)$
- $A(x)\forall x$
- $\forall x \exists R(x, y)$

We proberen notatie zo eenvoudig te houden

- zo weinig mogelijk indices
- zo weinig mogelijk haakjes

Syntaxis: betekenisvolle voorbeelden

- Alle honden zijn zoogdieren. $\forall x(Hx \rightarrow Zx)$
- Sommige voetballers zijn tweevoetig. $\exists x(Vx \ \land Tx)$
- Max ziet alle mensen graag. $\forall x(Mx \rightarrow Gxm)$
- Niemand kent iedereen. $\neg\exists x\ \forall y\ Kxy$
- Wie iemand kent, kent iedereen $\forall x(\exists y\ Kxy \rightarrow \forall z\ Kxz)$
- Wie alleen zichzelf kent, wordt door niemand gekend. $\forall x(\forall y\big(kxy \leftrightarrow = (x,y)\big) \rightarrow \neg\exists z\ Kzx)$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Basis programmeertalen

bv PROLOG, answer set programming (ASP)

```
% instance
eagle(eddy).
penguin(tux).

% encoding
 fly(X) :- bird(X), not -fly(X).
-fly(X) :- penguin(X).
bird(X) :- penguin(X).
bird(X) :- eagle(X).
```

constanten
eddy/tux

predikaten
eagle/penguin
bird/fly

variabele X

“voor alle”

Bereik van kwantoren: voorbeeld

Zijn volgende formules gelijkwaardig?

$$(\exists x\, Ax \ \land\ \forall y\, Bxy)$$

en

$$\exists x\, (Ax \ \land\ \forall y\, Bxy)$$

Bereik van kwantoren

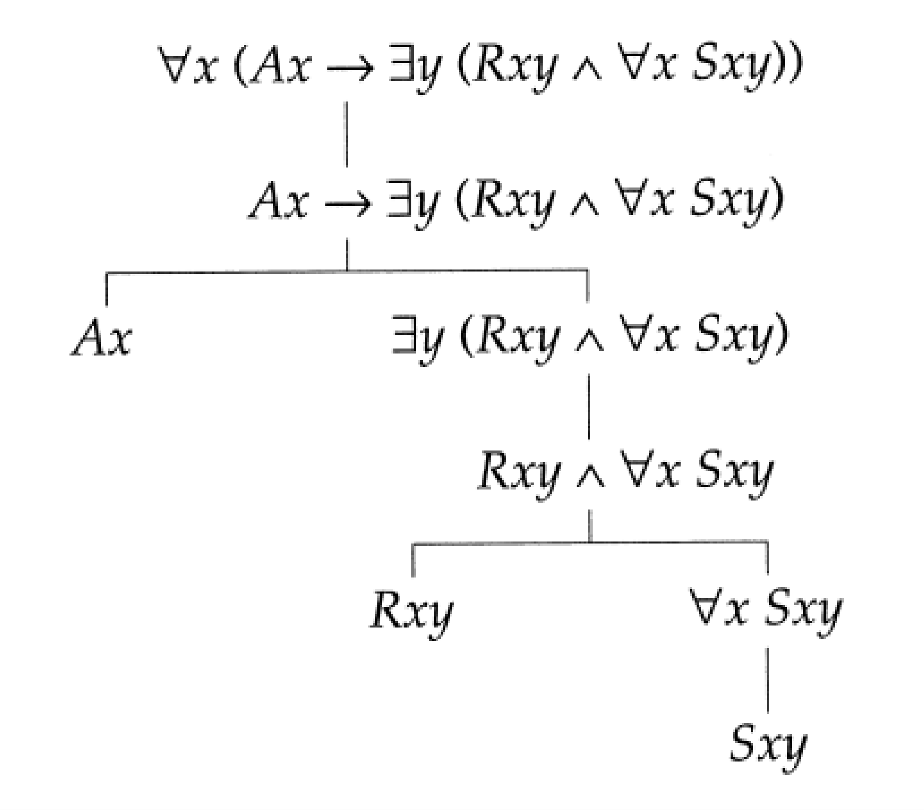
Het bereik van een kwantor in een formule φ is de subformule waarvoor die kwantor is gevoegd tijdens de constructie van φ.

$$(\exists x\ \underline{Ax}\ \wedge\ \forall y\ Bxy)$$

en

$$\exists x\ \underline{(Ax\ \wedge\ \forall y\ Bxy)}$$

Bereik van kwantoren: constructieboom



Bereik van

- eerste ∀: $Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy)$
- tweede ∀: Sxy
- ∃: $Rxy \wedge \forall x\, Sxy$

Vrije en gebonden variabelen

Een voorkomen van een variabele x heet vrij als deze niet in het bereik van een kwantor $\forall x$ of $\exists x$ ligt.

Een kwantor $\forall x$ of $\exists x$ bindt de voorkomens van variabelen x in zijn bereik, voor zover deze nog vrij zijn. Deze variabelen heten dan gebonden.

$$\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$$

Definitie

Gesloten formule

Een zin of een gesloten formule is een formule zonder vrije variabelen.

- $\forall x(Ax \to \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$
- Pa

Definitie

Open formule

Een formule met vrije variabelen heet een open formule.

- Rax
- $\exists x\, Sxy$
- $(\forall x\, \neg(Ax \wedge Rxy) \rightarrow \exists y\, (Syx \wedge Bz))$

Definitie

Substitutie: inleidend voorbeeld

- $\forall x(Rx \lor Sx) \land Pxx$
  - Hoe kan je x substitueren door y?
  - Merk op dat de x'en verschillende "functies" hebben.
  - $\forall x(Rx \lor Sx) \land Pyy$

Substitutie: definitie

1. Laat t en t' termen zijn en x een variabele. Dan is $[t\ /\ x]t'$ de term die ontstaat door elk voorkomen van x in t' te vervangen door t.
2. Laat φ een formule zijn, t een term en x een variabele. Dan is $[t\ /\ x]\varphi$ de formule die ontstaat door elk **vrij** voorkomen van x in φ te vervangen door t. $[t\ /\ x]\varphi$ noemt men ook instantie van φ.

Definitie

Substitutie: voorbeelden

- $[y/x](\forall x(Rx \vee Sx) \wedge Pxx) = \forall x(Rx \vee Sx) \wedge Pyy$
- $[f(a,b)/z]\exists x(Px \rightarrow Ryz) = \exists x(Px \rightarrow Ryf(a,b))$
- $[y/x]\exists y\, Kyx = \exists y\, Kyy$
  - juist per definitie, maar levert een ongewenst resultaat op, bijvoorbeeld wanneer Kxy gelijk is aan is $x < y$
  - voorkomen door te definiëren wanneer een term subtitueerbaar is voor een variabele

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

“Veilige” substituties

Een term t heet vrij voor x in φ als in $[t\ /\ x]\varphi$ geen variabele van t gebonden wordt.

- y is niet vrij voor x in $\exists y\ y < x$
- f^2zy is niet vrij voor x in $\exists y\ Rxy$
- f^2zy is vrij voor x in $\exists u\ Rxu$
- f^2zy is vrij voor x in Rxy

Definitie

Alfabetische variant

Een alfabetische variant van een formule onstaat door gebonden variabelen door nieuwe variabelen te vervangen.

Voorbeelden:

- $\exists y\ Rxy$ en $\exists u\ Rxu$
- $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy\ \wedge \forall x\ Sxy))$ en $\forall z(Az \rightarrow \exists y(Rzy\ \wedge \forall x\ Sxy))$

Alfabetische varianten worden gebruikt om

- substitutie veilig te kunnen uitvoeren,
- verwarring te verkomen.

(Veilige) substitutie: voorbeelden

- $[y/x]\exists y\, Kyx = [y/x]\exists z\, Kzx = \exists z\, Kzy$
- $[f^2zy/x]\exists y\, Rxy = [f^2zy/x]\exists u\, Rxu = \exists u\, Rf^2zyu$
- $[y/x]\forall x\big(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy)\big) =$
  $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$