

Tussentijdse evaluatie 1

Donderdag 31 oktober 2024

Theorievraag 1 (20 punten)

Theorievraag 2 (20 punten)

Theorievraag 3 (10 punten)

Oefening 1 (15 punten)

Oefening 2 (20 punten)

Oefening 3 (15 punten)

Theorievraag 1 (20 punten)

- Wat is een tautologie? Geef een definitie en een voorbeeld.
- Geef 2 verschillende semantische methodes om na te gaan of een formule een tautologie is. Leg voor beide methodes uit waarom je hier kan nagaan of een formule al dan niet een tautologie is.
- Wat is een stelling? Geef de definitie en een voorbeeld.
- Wat is het verband tussen een stelling en een tautologie? Leg uit waarom dit zo is.

Theorievraag 2 (20 punten)

- Geef een definitie voor syntactisch consistent.
- Leg intuïtief uit wat syntactisch consistent betekent.
- De volgende bewering is incorrect:
"Een verzameling formules Γ is syntactisch consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \vdash \varphi$."
Geef een tegenvoorbeeld voor de bewering.
- Verbeter bovenstaande uitspraak zodat deze wel correct is.

Theorievraag 3 (10 punten)

Beschouw de volgende uitspraak en bijhorend bewijs:

Uitspraak: Veronderstel $x, y \in \mathbb{R}$ zodat $x + y = 10$, dan is $x \neq 3$ en $y \neq 8$.

Bewijs: Veronderstel uit het ongerijmde dat de conclusie vals is. Dan is $x = 3$ en $y = 8$. Bijgevolg is

$x + y = 11$, een tegenspraak met $x + y = 10$. Er moet dus gelden dat $x \neq 3$ en $y \neq 8$.

- Het gegeven bewijs is incorrect. Leg uit wat er misloopt.
- Is de uitspraak correct of niet? Indien correct, geef een bewijs. Zo niet, geef een tegenvoorbeeld.

Oefening 1 (15 punten)

Lara Croft komt op haar reizen doorheen oude, achtergelaten tempels vaak puzzels tegen. Vandaag is weer zo'n moment: ze staat op een kruispunt in een gang met 3 deuren (links, rechtdoor en rechts).

Achter haar komt een gigantische slang aan, er is dus geen weg terug, en ze zal snel moeten beslissen door welke deur ze stapt. Ze weet dat sommige gangen in deze tempels giftige gassen bevatten: gissen is dus geen optie! Voor haar staat een pilaar met volgende inscriptie:

- Het is niet zo dat de linkerdeur, de rechterdeur en de deur rechtdoor allen tegelijkertijd onveilig zijn!
- De linker- en rechterdeur zijn niet tegelijkertijd veilig.
- Als de deur rechts niet veilig is, dan is de deur links veilig als de deur rechtdoor veilig is.
- Bovendien, als de deur rechtdoor veilig is als de linkse deur veilig is, dan is de deur rechts niet veilig.

Vertaal deze 4 zinnen naar formules in de propositielogica en bepaal via modeleliminatie het model (of de modellen). Welke deur moet Lara nemen om zeker te overleven?

Oefening 2 (20 punten)

Veronderstel in deze vraag dat $\Sigma = \{(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p), \neg s, \neg(\neg(p \wedge q) \vee r)\}$.

- Als je de definitie van formule uit de cursus strikt toepast, zijn niet alle expressies uit Σ een formule. Geef voor elke expressie aan of ze wel of niet een formule is (volgens de strikte definitie).
- We mogen alle expressies uit Σ echter wel beschouwen en gebruiken als formules. Waarom is dit?
- Geef voor elke formule uit Σ de constructieboom.
- Geldt er $\Sigma \models s$? Motiveer je antwoord.

Oefening 3 (15 punten)

Bewijs via natuurlijke inductie en via semantische tableaux dat

$$\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow (q \wedge r).$$

Het feit dat je dit kan aantonen zowel via natuurlijke inductie als via semantische tableaux is gebaseerd op een belangrijke stelling in de propositiële logica. Welke stelling is dit?