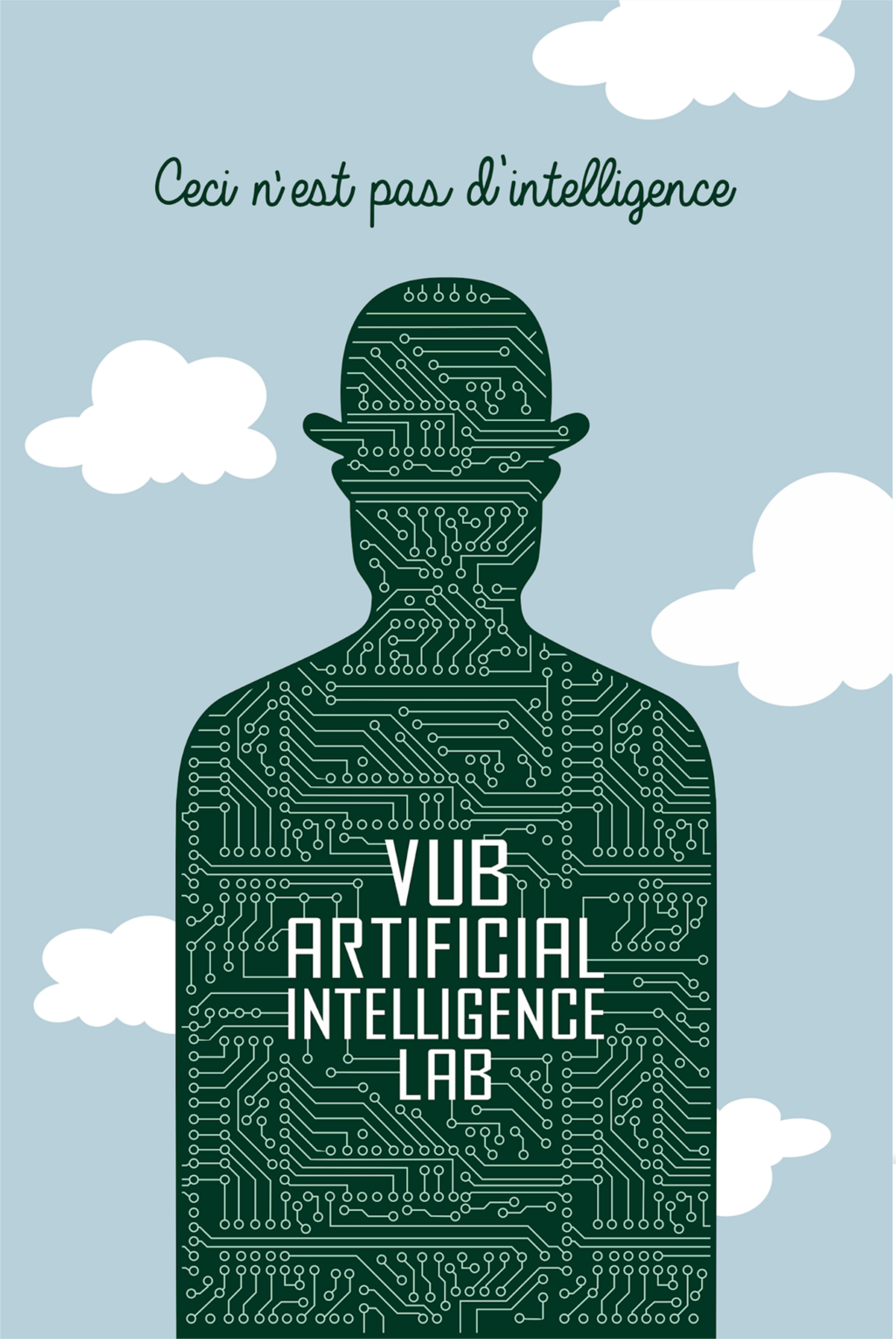


Logica en formele systemen

Propositielogica

Semantiek

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB
ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud propositielogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Wat is de betekenis van een formule?

De betekenis van een formule is zijn waarheidswaarde, waar of onwaar

Voorbeeld (natuurlijke taal):

- “Het regent” kan waar of onwaar zijn.
- “Het regent en de zon schijnt” kan waar of onwaar zijn en hangt af van de waarheidswaarden van de onderdelen.

niet waar

niet waar

niet waar

waar

Waarheidswaarden

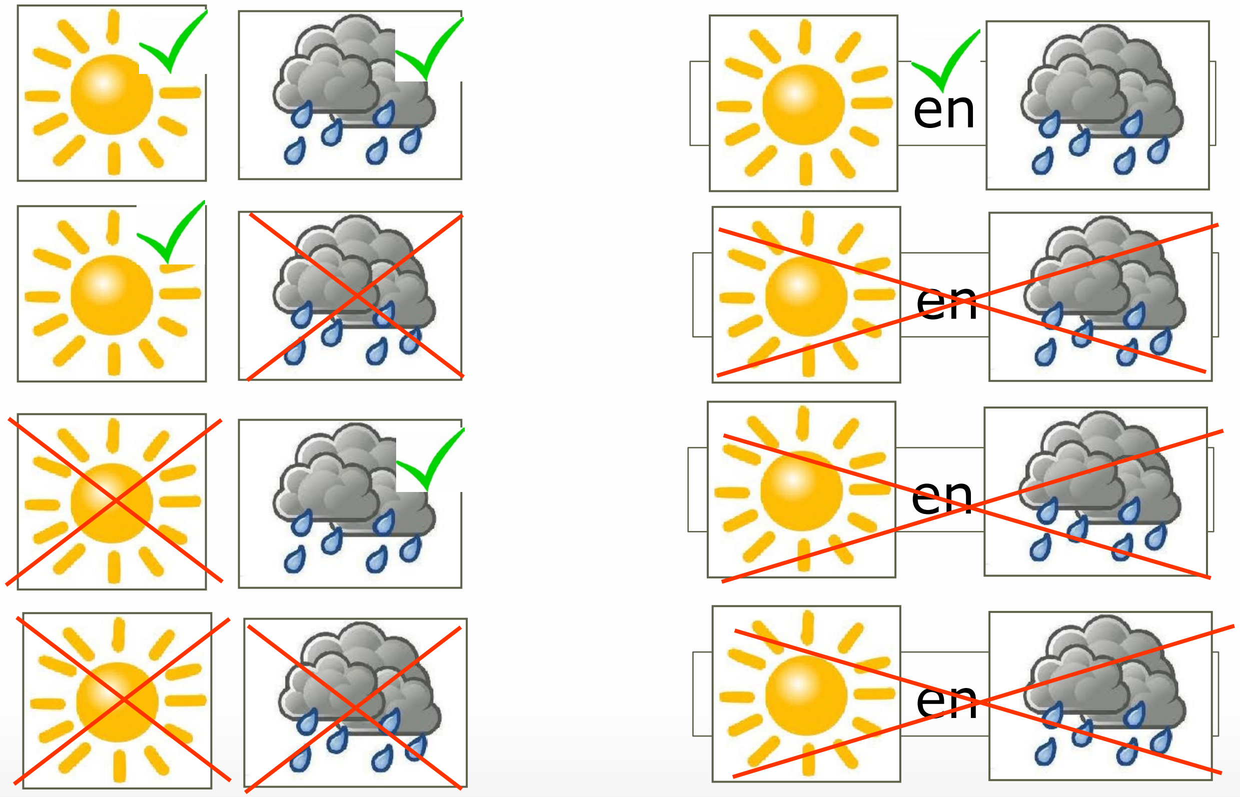
- waar en niet waar/onwaar/vals zijn waarheidswaarden
- ipv waar wordt ook 1 gebruikt
- ipv niet waar wordt ook 0 gebruikt

Voor atomen kunnen we de waarheidswaarde niet verder analyseren en moeten we waarheidswaarde veronderstellen.

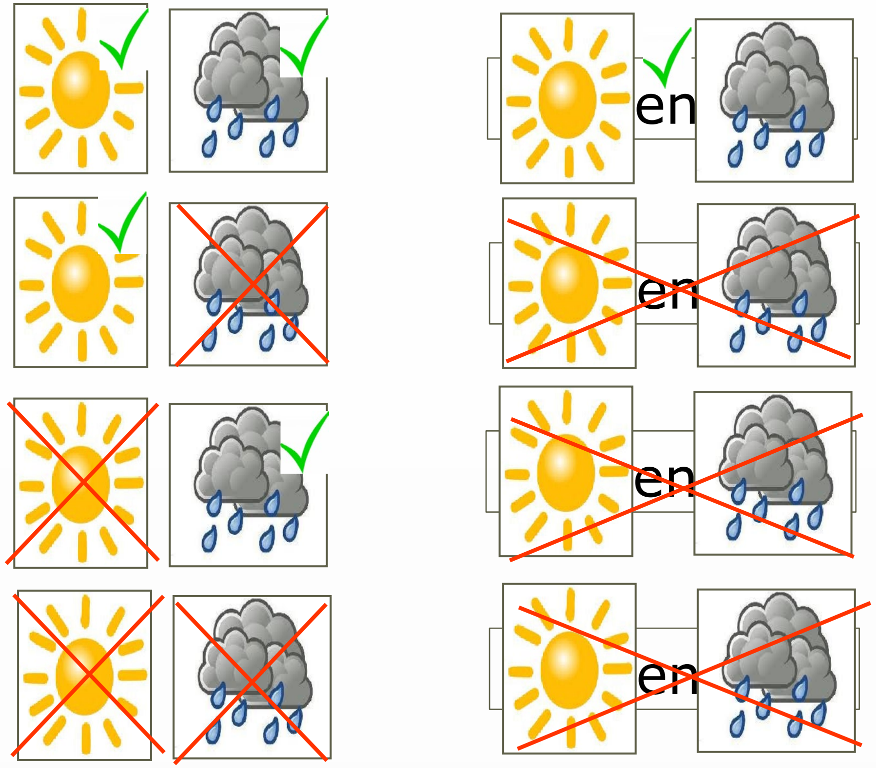
Voor samengestelde formules gebruiken we de waarheidstabellen van de connectieven.

Waarheidstabel: voorbeeld

“de zon schijnt” en “het regent”



Waarheidstabel: voorbeeld



p	q	$(p \land q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Waardering

p	q	$(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Elke rij is een bepaalde situatie. We noemen dit een waardering.

Een waardering is een functie van propositieletters naar waarheidswaarden.

$V(p) = V(q) = 1$ dan $V\big((p \wedge q)\big) = 1$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Waarheidstabellen

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Intuïtie implicatie

A 3 2 B

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Als op de ene kant van een kaart een “A” staat, dan staat op de andere kant een “2”.

Waarheidstabellen: voorbeeld

Waarheidstabel voor $((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$

h	s	u	$(h \wedge s)$	$\neg u$	$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

Waarheidstabellen: voorbeeld

compactere notatie

h	s	u	$((h \land s) \rightarrow \neg u)$
1	1	1	1 0 0
1	1	0	1 1 1
1	0	1	0 1 0
0	1	1	0 1 0
1	0	0	0 1 1
0	1	0	0 1 1
0	0	1	0 1 0
0	0	0	0 1 1

Complexiteit waarheidstabellen

Als er n verschillende propositieletters in een formule voorkomen, dan heeft de waarheidstabel van de formule 2^n rijen.

Gevolg: waarheidstabellen kunnen zeer groot worden

Waardering: definitie

Een waardering is een functie van alle propositieletters naar waarheidswaarden.

Opmerkingen:

- In de praktijk gebruiken we een beperkt domein: enkel de propositieletters die voorkomen in de formules die we beschouwen.
- We gebruiken vaak de functie naam V.

Definitie

Waardering: voorbeeld

8 verschillende waarderingen

	h	s	u	$(h \wedge s)$	$\neg u$	$((h \wedge s) \rightarrow \neg u)$
V_1	1	1	1	1	0	0
V_2	1	1	0	1	1	1
V_3	1	0	1	0	0	1
V_4	0	1	1	0	0	1
V_5	1	0	0	0	1	1
V_6	0	1	0	0	1	1
V_7	0	0	1	0	0	1
V_8	0	0	0	0	1	1

Model: definitie

Een waardering V heet een model van een formule φ als geldt $V(\varphi) = 1$.

De verzameling van alle modellen van φ noteren we als

$$MOD(\varphi) = \{V \mid V(\varphi) = 1\}$$

Definitie

Model van een verzameling: definitie

Een waardering V heet een model van een formuleverzameling Σ als V een model is van elke formule $\varphi \in \Sigma$.

De verzameling van modellen van Σ noteren we als $MOD(\Sigma)$.

Definitie

Model: oefening

Wat zijn de modellen van $\{(r \rightarrow s), \neg(r \land s)\}$?

Merk op: $MOD(\Sigma \cup \varphi) \subseteq MOD(\Sigma)$

Modeleleminatie: motivatie

1. Jan komt als Marie of Anne komt.
2. Anne komt als Marie niet komt.
3. Jan komt niet als Anne komt.

Is dit voldoende informatie om te weten wie wel en niet komt?

We maken gebruik van $MOD(\Sigma \cup \varphi) \subseteq MOD(\Sigma)$.

Modeleliminatie: voorbeeld

1. Jan komt als Marie of Anne komt. φ: $((m \vee a) \rightarrow j)$
2. Anne komt als Marie niet komt. ψ: $(\neg m \rightarrow a)$
3. Jan komt niet als Anne komt. χ: $(a \rightarrow \neg j)$

Heeft $\{\varphi, \psi, \chi\}$ een uniek model?

- Bepaal $MOD(\varphi)$.
- Welke waarderingen in $MOD(\varphi)$ zijn ook modellen van ψ?
- Welke overgebleven waarderingen zijn ook modellen van χ?

Modeleliminatie: voorbeeld

	m	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{j}$	$((m \lor a) \rightarrow j)$	$(\neg m \rightarrow a)$	$(\boldsymbol{a} \rightarrow \neg \boldsymbol{j}))$
V_1	1	1	1	1	1	0
V_2	1	1	0	0		
V_3	1	0	1	1	1	1
V_4	0	1	1	1	1	0
V_5	1	0	0	0		
V_6	0	1	0	0		
V_7	0	0	1	1	0	
V_8	0	0	0	1	0	

Tautologie en contradictie: definitie

Een formule φ heet een tautologie als elke waardering een model is van φ, m.a.w voor elke waardering V geldt: $V(\varphi) = 1$.

Een formule φ heet een contradictie als geen enkele waardering een model is van φ, m.a.w voor elke waardering V geldt: $V(\varphi) = 0$.

Definitie

Tautologie en contradictie: voorbeelden

Alle instanties van

- $(\varphi \vee \neg\varphi)$
- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

zijn tautologieën.

Alle instanties van

- $(\varphi \wedge \neg\varphi)$

zijn contradicties.

toon aan als oefening

Logisch equivalent: definitie

Twee formules φ en ψ zijn logisch equivalent als de formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is.

Vaakgebruikte notatie: $\varphi \equiv \psi$

Definitie

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Logisch equivalent: gevolg

Formules φ en ψ zijn logisch equivalent als

- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is
- voor elke waardering V geldt $V((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$
- voor elke waardering V geldt $V(\varphi) = V(\psi)$

Veel gebruikte logische equivalenties

- φ en $\neg\neg\varphi$
- de wetten van De Morgan:
  - $\neg(\varphi \land \psi)$ en $(\neg\varphi \lor \neg\psi)$
  - $\neg(\varphi \lor \psi)$ en $(\neg\varphi \land \neg\psi)$
- de principes van de distributiviteit
  - $(\varphi \land (\psi \lor \chi))$ en $((\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi))$
  - $(\varphi \lor (\psi \land \chi))$ en $((\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi))$

toon aan als oefening

Veel gebruikte logische equivalenties

- contrapositie: $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

toon aan als oefening

Lossere notatie

Volgende formules zijn ook logisch equivalent (associativiteit)

- $(\varphi \land (\psi \land \chi))$ en $((\varphi \land \psi) \land \chi)$
- $(\varphi \lor (\psi \lor \chi))$ en $((\varphi \lor \psi) \lor \chi)$

Dit laat toe om haakjes weg te laten bv $(((p \land q) \land r) \land s)$ kunnen we ook schrijven als $(p \land q \land r \land s)$. Ook buitenste haakjes worden vaak weggelaten: $p \land q \land r \land s$.

Functioneel volledig

Een verzameling van connectieven C heet functioneel volledig als elke formule φ logisch equivalent is met een formule ψ die enkel connectieven uit C bevat.

bewijs komt later

Stelling: De verzameling $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functioneel volledig.

Gevolg: De verzameling $\{\neg, \vee\}$ is functioneel volledig wegens de tautologie $\big(\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)\big)$.

Definitie

Functioneel volledig: oefening

De verzameling $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functioneel volledig. Geef logische equivalente formules voor onderstaand formules gebruikmakend van enkel connectieven uit $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

1. $(\varphi \rightarrow \psi)$
2. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

NOR connectief

- noch … noch …
- $\{NOR\}$ is functioneel volledig

zonder bewijs

φ	ψ	$(\varphi\ \boldsymbol{NOR}\ \psi)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Disjunctieve normaalvorm

Een formule is in disjunctieve normaalvorm als deze de syntactische vorm heeft van een disjunctie van conjuncties:

$$(\varphi_1 \land \ \dots \ \land \varphi_{n_1}) \lor \cdots \lor (\psi_1 \land \ \dots \ \land \psi_{n_k})$$

waarbij $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_1}, \dots, \psi_1, \dots \ \psi_{n_k}$ atomen of negaties van atomen zijn.

Definitie

Disjunctieve normaalvorm: voorbeelden

Disjunctieve normaalvorm:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg a \ \wedge b)$
- $a \wedge \neg b \wedge c$
- $a \vee \neg b \vee c$

Geen disjunctieve normaalvorm:

- $\neg(a \wedge b)$
- $a \vee (b \wedge (c \vee d))$

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Disjunctieve normaalvorm

Voor elke formule φ bestaat er een formule φ^* in disjunctieve normaalvorm zodat φ en φ^* logisch equivalent zijn.

zonder bewijs

Stelling

Disjunctieve normaalvorm: oefening

- $\big((a \wedge b) \to c\big) \equiv (\neg a \vee \neg b) \vee c$
- $(p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$

Merk op:

- $\varphi \vee 0 \equiv \varphi$, $\varphi \vee 1 \equiv 1$
- $\varphi \wedge 0 \equiv 0$, $\varphi \wedge 1 \equiv \varphi$