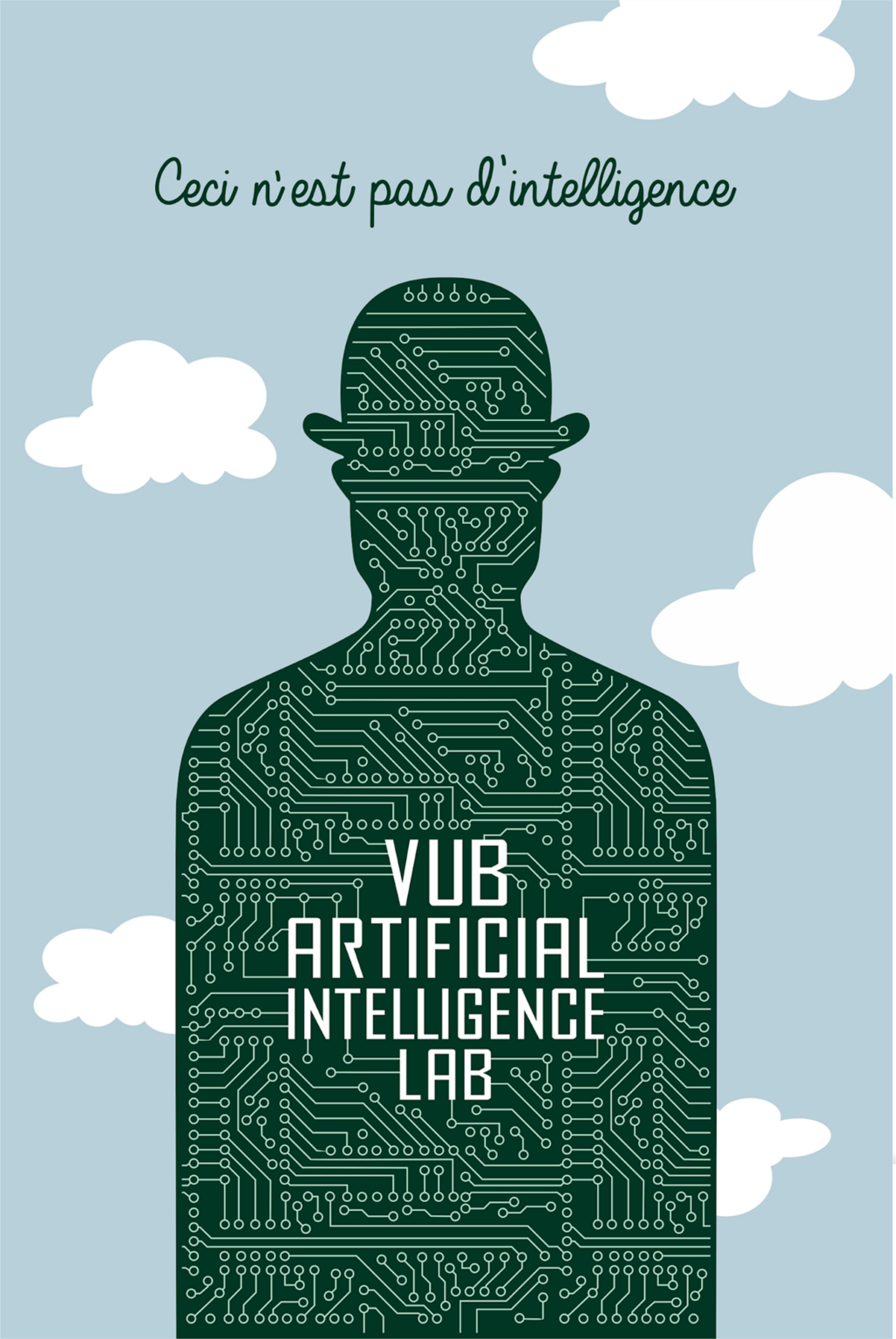


Logica en formele systemen

Propositielogica

Afleidingen

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud propositielogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Inleiding

In vorig deel bekeken we geldigheid van een gevolgtrekking op een semantische wijze.

Nu gaan we dit op een syntactische manier benaderen.

- bewijzen of afleiden van de conclusie uit de aannames

Afleiden: inleidend voorbeeld

Stel we hebben volgende info:

1. Jan vertelt een verhaal en Piet leest de krant.
2. Als Jan een verhaal vertelt, dan lacht Marie.
3. Als Piet de krant leest, dan kijkt Wilma televisie.

- Uit 1 leiden we af:1a Jan vertelt een verhaal
- Uit 2 en 1a leiden we af: 2a Marie lacht
- Uit 1 leiden we af: 1b Piet leest de krant
- Uit 3 en 1b leiden we af: 2b Wilma kijkt televisie
- Uit 2a en 2b leiden we af: Marie lacht en Wilma kijkt televisie

afleiding

Afleiden: inleidend voorbeeld

Stel we hebben volgende info:

1. Jan vertelt een verhaal en Piet leest de krant.
2. Als Jan een verhaal vertelt, dan lacht Marie.
3. Als Piet de krant leest, dan kijkt Wilma televisie.

- j: Jan vertelt een verhaal
- p: Piet leest de krant
- m: Marie lacht
- w: Wilma kijkt televisie

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{j \wedge p}{j} \qquad j \to m}{m} \qquad \dfrac{\dfrac{j \wedge p}{p} \qquad p \to w}{w}}{m \wedge w}$$

Afleiden: boomvorm

$$\frac{\varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_n}{\psi}$$

aannames

conclusie

Afleidingsregels: conjunctie

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\wedge\mathrm{E}$$

∧-Eliminatieregels

$$\dfrac{\begin{matrix}\Phi \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Psi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\wedge\mathrm{I}$$

∧-Introductieregel

Afleidingsregels conjunctie: voorbeeld

Uit $p \wedge (q \wedge r)$ leiden we af: $(p \wedge q) \wedge r$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{p}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{q \wedge r}\wedge\mathrm{E}}{q}\wedge\mathrm{E}}{p \wedge q}\wedge\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{p \wedge (q \wedge r)}{q \wedge r}\wedge\mathrm{E}}{r}\wedge\mathrm{E}}{(p \wedge q) \wedge r}\wedge\mathrm{I}$$

Afleidingsregels: implicatie

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \vdots \\ \varphi \to \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Phi \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\psi} \to\mathrm{E}$$

→-Eliminatieregel

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma, \varphi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to\mathrm{I}, [-\varphi]$$

hulp aanname

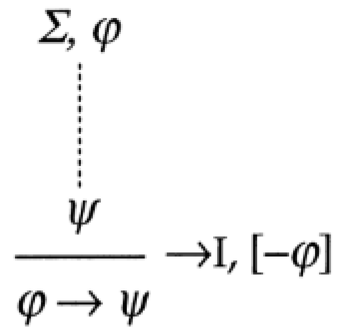
→-Introductieregel

Afleidingsregels implicatie: voorbeeld

Uit $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ leiden we af: $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Nodig als hulpaanname: $p \rightarrow q$.

Uit de hoofdaanname $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ en de hulpaanname proberen we af te leiden: $p \rightarrow r$. Indien ons dat lukt mogen we $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ afleiden.



Hoe leiden we $p \rightarrow r$ af? Door p als hulpaanname te nemen.

Afleidingsregels implicatie: voorbeeld

Uit $p \to (q \to r)$ leiden we af: $(p \to q) \to (p \to r)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p} \qquad \overset{2}{p \to q}}{q}\;{\to}\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{1}{p} \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\;{\to}\mathrm{E}}{r}\;{\to}\mathrm{E}}{p \to r}\;{\to}\mathrm{I}, [-1]}{(p \to q) \to (p \to r)}\;{\to}\mathrm{I}, [-2]$$

Afleidingsregels: voorbeeld

Uit $p \to (q \to r)$ leiden we af: $(p \wedge q) \to r$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p \wedge q}}{q}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{p \wedge q}}{p}\,\wedge\mathrm{E} \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\,\to\mathrm{E}}{r}\,\to\mathrm{E}}{(p \wedge q) \to r}\,\to\mathrm{I},\ [-1]$$

Afleidingsregels: disjunctie

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi \vee \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Phi, \varphi\\ \vdots\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Psi, \psi\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\ \vee\mathrm{E}, [-\varphi, -\psi]$$

∨-Eliminatieregel

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I}$$

∨-Introductieregel

Afleidingsregels disjunctie: voorbeeld

Uit $(p \vee q) \rightarrow r$ leiden we af: $(p \ \rightarrow r) \wedge (q \ \rightarrow r)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p}}{p \vee q}\ \vee\mathrm{I} \qquad (p \vee q) \to r}{r}\ \to\mathrm{E}}{p \to r}\ \to\mathrm{I}, [-1] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{q}}{p \vee q}\ \vee\mathrm{I} \qquad (p \vee q) \to r}{r}\ \to\mathrm{E}}{q \to r}\ \to\mathrm{I}, [-2]}{(p \to r) \wedge (q \to r)}\ \wedge\mathrm{I}$$

Afleidingsregels disjunctie: voorbeeld

Uit $(p \to r) \wedge (q \to r)$ leiden we af: $(p \vee q) \to r$.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{3}{p \vee q} \qquad \dfrac{\overset{1}{p} \qquad \dfrac{(p\to r)\wedge(q\to r)}{p\to r}\,\wedge\mathrm{E}}{r}\,\to\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{2}{q} \qquad \dfrac{(p\to r)\wedge(q\to r)}{q\to r}\,\wedge\mathrm{E}}{r}\,\to\mathrm{E}}{r}\,\vee\mathrm{E}, [-1,-2]}{(p\vee q)\to r}\,\to\mathrm{I}, [-3]$$

Afleidingsregels: negatie

$$\begin{array}{cc} \Phi & \Psi \\ \vdots & \vdots \\ \varphi & \neg\varphi \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\psi} \end{array} \;\neg\mathrm{E}$$

¬-Eliminatieregel

$$\begin{array}{cc} \Sigma, \psi & \Phi, \psi \\ \vdots & \vdots \\ \varphi & \neg\varphi \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\neg\psi} \end{array} \;\neg\mathrm{I}, [-\psi]$$

¬-Introductieregel

Afleidingsregels negatie: voorbeeld

Uit $p \to q$ leiden we af: $\neg q \to \neg p$.

contrapositie

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p} \qquad p \to q}{q}\ {\to}\mathrm{E} \qquad \overset{2}{\neg q}}{\neg p}\ \neg\mathrm{I}, [-1]}{\neg q \to \neg p}\ {\to}\mathrm{I}, [-2]$$

Afleidingsregels equivalentie

Geen aparte bewijsregels. We behandelen deze als dubbele implicatie.

Voorbeeld de eerste wet van De Morgan

$$(\neg p \land \neg q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)$$

Afleidingsregels: voorbeeld

Uit $\neg p \wedge \neg q$ leiden we af: $\neg(p \vee q)$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{3}{p \vee q} \qquad \dfrac{\overset{1}{p} \qquad \dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg p}}{\neg(p \vee q)}\neg\mathrm{E} \qquad \dfrac{\overset{2}{q} \qquad \dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg q}}{\neg(p \vee q)}\neg\mathrm{E}}{\neg(p \vee q)}\vee\mathrm{E}, [-1, -2] \qquad p \vee q}{\neg(p \vee q)}\neg\mathrm{I}, [-3]$$

Afleidingsregels: voorbeeld

Uit $\neg(p \vee q)$ leiden we af: $\neg p \wedge \neg q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{p}}{p \vee q} \qquad \neg(p \vee q)}{\neg p}\,\neg\mathrm{I},[-1] \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{q}}{p \vee q} \qquad \neg(p \vee q)}{\neg q}\,\neg\mathrm{I},[-2]}{\neg p \wedge \neg q}$$

Bewijs uit het ongerijmde

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma, \neg\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Phi, \neg\psi\\ \vdots\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi}\ \neg\text{E}^*, [-\neg\psi]$$

¬-E*regel

Bewijs uit het ongerijmde: voorbeeld

Uit ∅ leiden we af: $\neg\neg p \rightarrow p$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\neg p} \qquad\qquad \overset{2}{\neg\neg p}}{p}\ \neg\mathrm{E}^*, [-1]}{\neg\neg p \rightarrow p}\ \rightarrow\mathrm{I}, [-2]$$

Natuurlijke deductie

Alle regels samen vormen het afleidingssysteem van de natuurlijke deductie.

Afleidbaar: definitie

Een formule φ heet afleidbaar uit een verzameling aannames Σ als er een afleiding bestaat van φ waarin aan het eind alleen nog aannames uit Σ van kracht zijn.

Notatie: $\Sigma \vdash \varphi$

Indien $\Sigma = \emptyset$, dan heet φ een stelling. Notatie: $\vdash \varphi$

Indien φ niet afleidbaar is uit Σ noteren we $\Sigma \nvdash \varphi$

Definitie

Syntactisch consistent: definitie

Een verzameling formules Γ heet (syntactisch) consistent wanneer er geen formule φ is waarvoor zowel $\Gamma \vdash \varphi$ als $\Gamma \vdash \neg\varphi$ geldt.

Een verzameling formules die niet consistent is heet inconsistent.

Definitie

Syntactisch consistent: voorbeelden

Syntactisch consistent: $\{\neg p, p \rightarrow q, q\}$

hoe aantonen?

Syntactisch inconsistent: $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$

Syntactisch consistent: stelling 1

Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$.

bewijs later

Stelling

Syntactisch consistent: stelling 2

$\Gamma \nvdash \varphi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent.

bewijs later

Stelling

Volledigheidsstelling

Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ desda } \Sigma \vDash \varphi$$

bewijs later

- correctheid: als $\Sigma \vdash \varphi$ dan $\Sigma \vDash \varphi$
- volledigheid: als $\Sigma \vDash \varphi$ dan $\Sigma \vdash \varphi$ (ongelukkige naamgeving)

Stelling

Axiomatisch afleiden

- In natuurlijke deductie spelen de afleidingsregels de hoofdrol.
- In axiomatisch afleiden spelen axioma's de hoofdrol.
  - Traditionele manier van axiomatisch bewijzen in de wiskunde.

- Een axiomatisch systeem bestaat uit axioma's en afleidingsregels

niet te kennen voor het examen

Axiomatiek S

Axioma's:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

axioma's niet te kennen voor het examen

Afleidingsregels (modus ponens)

Uit φ en $(\varphi \rightarrow \psi)$ mogen we ook ψ afleiden.

Axiomatiek S

Als uit een formuleverzameling Σ met behulp van de axioma's en modus ponens een formule φ kan worden afgeleid noteren we $\Sigma \vdash_S \varphi$.

Indien we enkel $\{\neg, \rightarrow\}$ gebruiken (dit is ok, want functioneel volledig), is axiomatisch afleiden equivalent met natuurlijke deductie (zie volgende slide).

niet te kennen voor het examen

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Axiomatiek vs natuurlijke deductie

Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt:

$\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \vdash_S \varphi$

(bewijs niet te kennen)

niet te kennen voor het examen

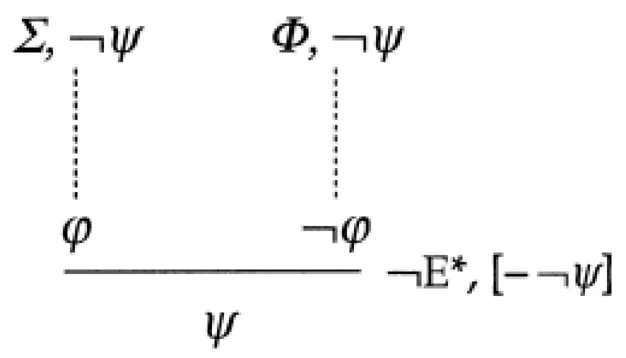
Stelling

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Intuïtionistische logica

Door bepaalde afleidingsregels weg te laten krijgen we deelsystemen.

Weglaten van



niet te kennen voor het examen

Volgende formules zijn nu geen stellingen meer:

- dubbele negatie $\neg\neg p \rightarrow p$
- principe van het uitgesloten derde $p \vee \neg p$

Overzicht afleidingsregels

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi}\ \wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\ \wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi}\ \wedge\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\rightarrow\psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\psi}\ \rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\rightarrow\psi}\ \rightarrow\mathrm{I},[-\varphi]$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\vee\psi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi,\varphi\\ \vdots\\ \alpha\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Psi,\psi\\ \vdots\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\ \vee\mathrm{E},[-\varphi,-\psi] \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\ \vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\ \vee\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi\\ \vdots\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\psi}\ \neg\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\neg\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi,\neg\psi\\ \vdots\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\psi}\ \neg\mathrm{E}^*,[-\neg\psi] \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma,\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Phi,\psi\\ \vdots\\ \neg\varphi\end{matrix}}{\neg\psi}\ \neg\mathrm{I},[-\psi]$$