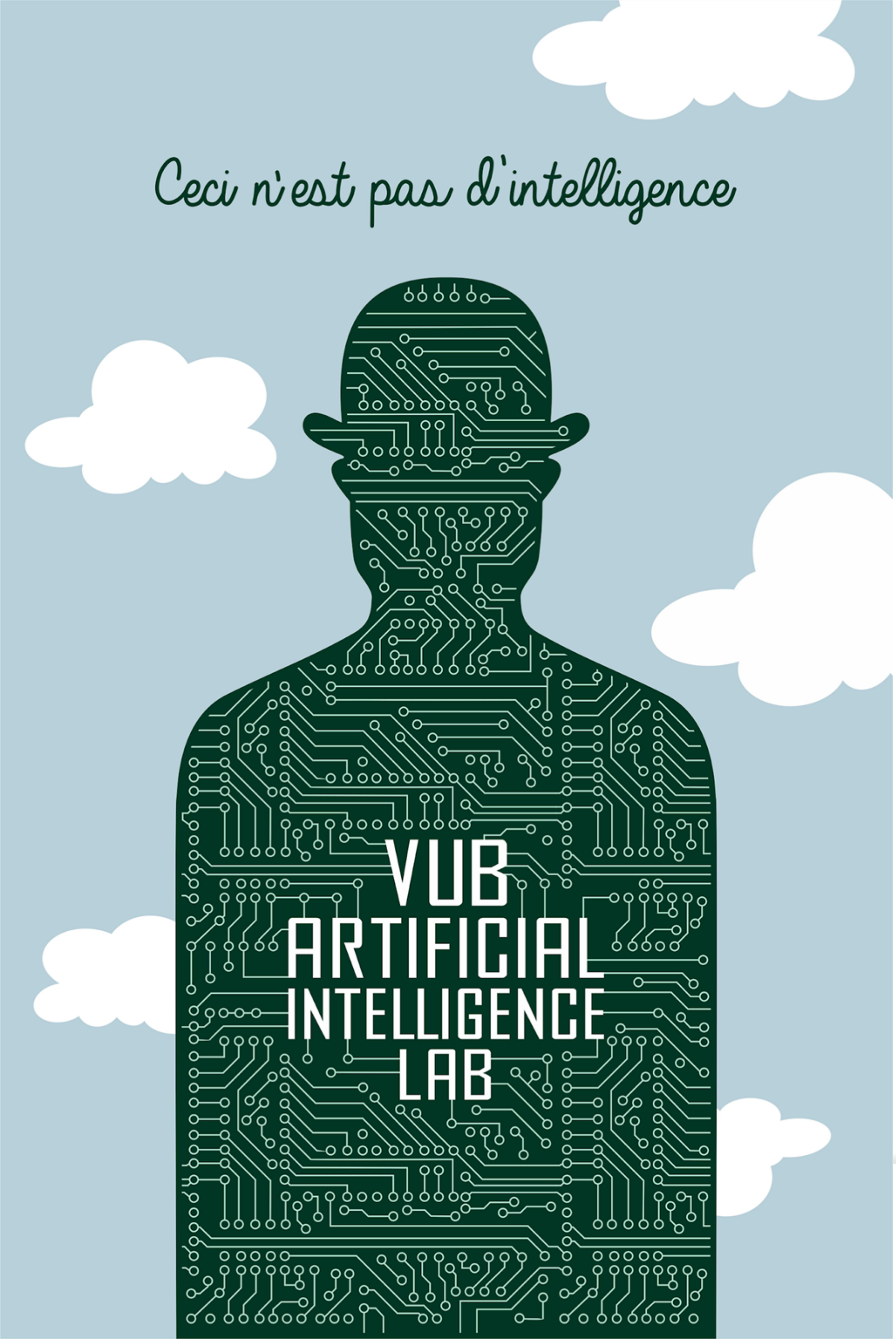


Logica en formele systemen

Propositielogica

Geldig gevolg

Prof. dr. Marjon Blondeel
Academiejaar 2024-2025

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud propositielogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- **Geldig gevolg**
- Afleidingen
- Metatheorie

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Herinner: gevolgtrekkingen

Typerende vorm: aannames en een conclusie

- Aanname: Als je ziek bent, dan lust je geen koffie.
- Aanname: Je lust koffie.
- Conclusie: Je bent niet ziek.

idee: als aannames waar zijn, dan moet conclusie ook waar zijn

Geldig gevolg: definitie

Een formule ψ heet een geldig gevolg van een verzameling formules Σ als elk model van Σ ook een model is van ψ.

Notatie: $\Sigma \vDash \psi$

Alternatieve notatie: de gevolgtrekking Σ / ψ is geldig

Als $\Sigma = \{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ schrijven we ook $\varphi_1, \dots \varphi_n \vDash \psi$

Definitie

Geldig gevolg: voorbeelden

- $p, p \rightarrow q \ \vDash q$
- $p, p \rightarrow q, q \rightarrow r \ \vDash r$
- $\neg q, p \rightarrow q \ \vDash \neg p$

Herinner:

- een waardering V heet een model van een formule φ als geldt $V(\varphi) = 1$.
- Een waardering V heet een model van een formuleverzameling Σ als V een model is van elke formule $\varphi \in \Sigma$.

Geldig gevolg: voorbeelden

$p, p \to q \ \vDash q$

	p	q	$p \to q$
V_1	1	1	1
V_2	1	0	0
V_3	0	1	1
V_4	0	0	1

V_1 is enige waardering die een model is van $\{p, p \to q\}$ en V_1 is ook een model van q

Geldig gevolg: voorbeelden

$\neg q, p \rightarrow q \ \vDash \neg p$

	p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$
V_1	1	1	0	1	0
V_2	1	0	1	0	0
V_3	0	1	0	1	1
V_4	0	0	1	1	1

V_4 is enige waardering die een model is van $\{\neg q, p \rightarrow q\}$ en V_4 is ook een model van $\neg p$

Geldig gevolg: tautologie

Wat als $\Sigma = \emptyset$?

- Elke waardering is een model van $\emptyset$.
- $\models \psi$ betekent dat ψ een tautologie is (waar voor elke waardering)

Geldig gevolg: tegenvoorbeeld

Indien ψ niet een geldig gevolg is van Σ noteren we dit als

$$\Sigma \nvDash \psi$$

Er bestaat dan een model V van Σ dat geen model is van ψ. Het model V heet dan een tegenvoorbeeld van $\Sigma \vDash \psi$.

Voorbeeld: $q, p \to q \ \nvDash p$

$$V(q) = 1, V(p) = 0$$

Geldig gevolg vs waarheid

Geldig gevolg en waarheid zijn niet hetzelfde!

$$p \vee q, \neg q \wedge r \ \vDash p \wedge r$$

Maar de waardering $V(p) = V(q) = V(r) = 0$ maakt alle formules onwaar.

Bekende geldige gevolgen

- $\varphi, \neg\varphi \ \vDash \ \psi$ voor alle ψ
- contrapositie: $\varphi \rightarrow \psi \ \vDash \ \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
- hypothetisch syllogisme: $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \ \vDash \ \varphi \rightarrow \chi$
- disjunctief syllogisme: $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \ \vDash \ \psi$

toon aan als oefening

Semantische tableaus

Geldige gevolgtrekking nagaan via waarheidstabellen kan, maar de grootte van zo’n tabel is exponentieel in het aantal proposities.

Idee semantische tableaus: we zoeken naar een tegenvoorbeeld. Als we geen tegenvoorbeeld vinden, is het een geldig gevolg.

Semantische tableaus: sequent

Een sequent is een rijtje van de vorm

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$$

met $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m$ formules.

Een waardering V heet een tegenvoorbeeld van een sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$ indien $V(\varphi_1) = \ldots = V(\varphi_n) = 1$ en $V(\psi_1) = \ldots = V(\psi_m) = 0$.

Definitie

Semantische tableaus: sequent

Een sequent $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi_1, \ldots, \psi_m$ waarbij er i en j bestaan zodat $\varphi_i = \psi_j$ heeft geen tegenvoorbeelden.

Volgt onmiddellijk uit de definitie.

Belangrijke eigenschap!

Eigenschap

Semantische tableaus: proces

Een semantisch tableau is een schema waarin we op systematische wijze het mogelijke bestaan van tegenvoorbeelden van een gegeven sequent reduceren tot dat van 1 of meer overzichtelijkere sequenten.

Bepalen of $\varphi_1, \ldots\ \varphi_n\ /\ \psi$ een tegenvoorbeeld heeft doen we door een semantisch tableau te maken van $\varphi_1, \ldots\ \varphi_n \circ \psi$

Semantische tableaus: voorbeeld

Heeft de gevolgtrekking $p \lor q, \neg q \;/\; p$ een tegenvoorbeeld?

- Heeft het sequent $p \lor q, \neg q \circ p$ een tegenvoorbeeld?
- Heeft het sequent $p \lor q \circ q, p$ een tegenvoorbeeld?
  ($\neg q$ waar maken is hetzelfde als q onwaar maken)
- Heeft het sequent $p \circ q, p$ een tegenvoorbeeld? OF Heeft het sequent $q \circ q, p$ een tegenvoorbeeld?
  ($p \lor q$ waar maken is ofwel p waar maken ofwel q waar maken)
- Beide hebben geen tegenvoorbeeld (eigenschap). De gevolgtrekking $p \lor q, \neg q \;/\; p$ is geldig.

Semantische tableaus: voorbeeld

$$p \vee q, \neg q \circ p$$

$$p \vee q \circ p, q$$

$$p \circ p, q \qquad\qquad q \circ p, q$$

$$= \qquad\qquad\qquad =$$

Semantische tableaus: reductieregels

desda

$$\begin{array}{c} \Phi \circ \Psi \\ | \\ \Phi' \circ \Psi' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Phi \circ \Psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Phi' \circ \Psi' & & \Phi'' \circ \Psi'' \end{array}$$

desda

Een sequent wordt gereduceerd met behulp van reductieregels.

Notatie: Φ is een rijtje $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, Ψ is een rijtje $\psi_1, \ldots, \psi_m$

Reductieregels negatie

$$
\neg_L : \quad \begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ | \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}
\qquad\qquad
\neg_R : \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \neg\alpha, \Psi \\ | \\ \Phi, \alpha \circ \Psi \end{array}
$$

α	$\neg\,\alpha$
1	0
0	1

Reductieregels conjunctie

$$\wedge_L : \quad \begin{array}{c} \Phi, \alpha \wedge \beta \circ \Psi \\ | \\ \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \end{array}$$

$$\wedge_R : \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \qquad \Phi \circ \beta, \Psi \end{array}$$

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Reductieregels disjunctie

$$\vee_L : \quad \Phi, \alpha \vee \beta \circ \Psi$$

$$\Phi, \alpha \circ \Psi \qquad \Phi, \beta \circ \Psi$$

$$\vee_R : \quad \Phi \circ \alpha \vee \beta, \Psi$$

$$\Phi \circ \alpha, \beta, \Psi$$

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Reductieregels implicatie

$$\to_L: \quad \Phi, \alpha \to \beta \circ \Psi$$

$$\Phi, \beta \circ \Psi \qquad\qquad \Phi \circ \alpha, \Psi$$

$$\to_R: \quad \Phi \circ \alpha \to \beta, \Psi$$

$$\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi$$

α	β	$\alpha \to \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Reductieregels equivalentie

$$\leftrightarrow_L: \quad \dfrac{\Phi, \alpha \leftrightarrow \beta \circ \Psi}{\Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \qquad \Phi \circ \alpha, \beta, \Psi}$$

$$\leftrightarrow_R: \quad \dfrac{\Phi \circ \alpha \leftrightarrow \beta, \Psi}{\Phi, \alpha \circ \beta, \Psi \qquad \Phi, \beta \circ \alpha, \Psi}$$

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Semantische tableaus: boom

Door het toepassen van reductieregels verkrijgen we een boom. Als er geen reductieregel meer toegepast kan worden spreken we van een semantisch tableau.

Elke tak in een semantisch tableau correspondeert met een route om een tegenvoorbeeld te vinden.

Semantische tableaus: open/gesloten

Een tak heet gesloten indien links en rechts in het sequent dezelfde formule optreedt.

Een tak heet open wanneer de tak niet gesloten is en er geen reductieregels meer toegepast kunnen worden.

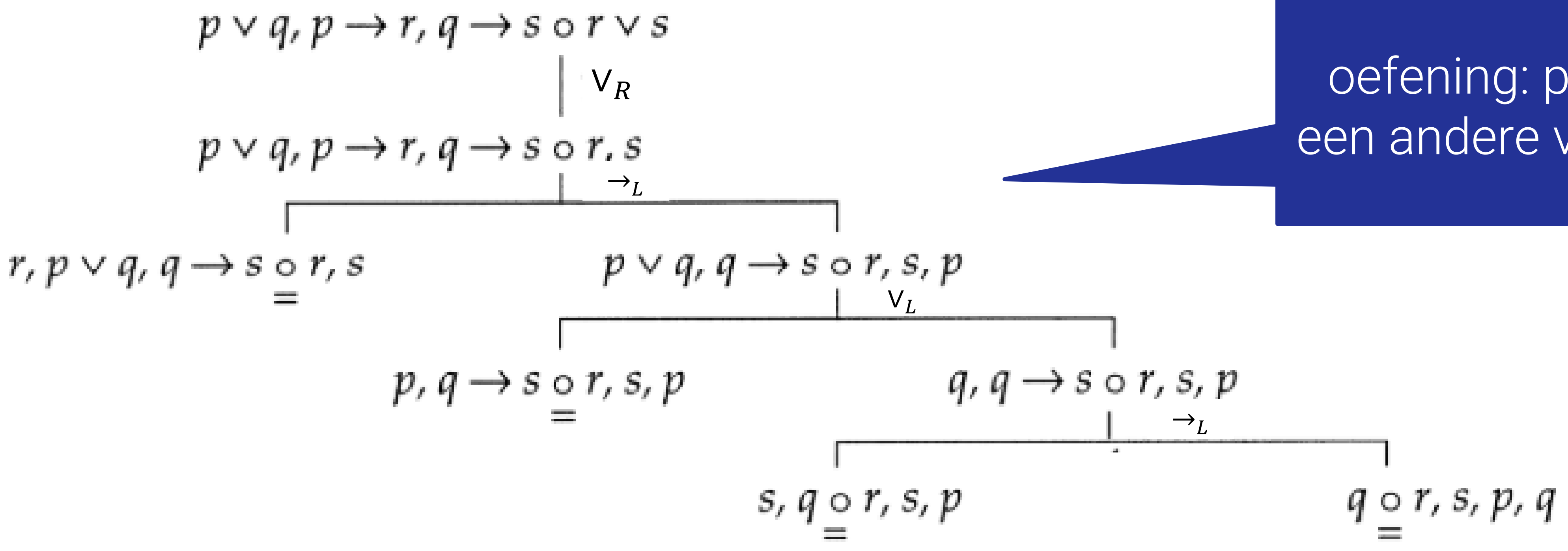
Een tableau heet gesloten indien alle takken gesloten zijn.

Een tableau heet open indien er minstens 1 tak open is.

Dus: geldig gevolg indien een tableau gesloten is

Semantisch tableau: voorbeeld

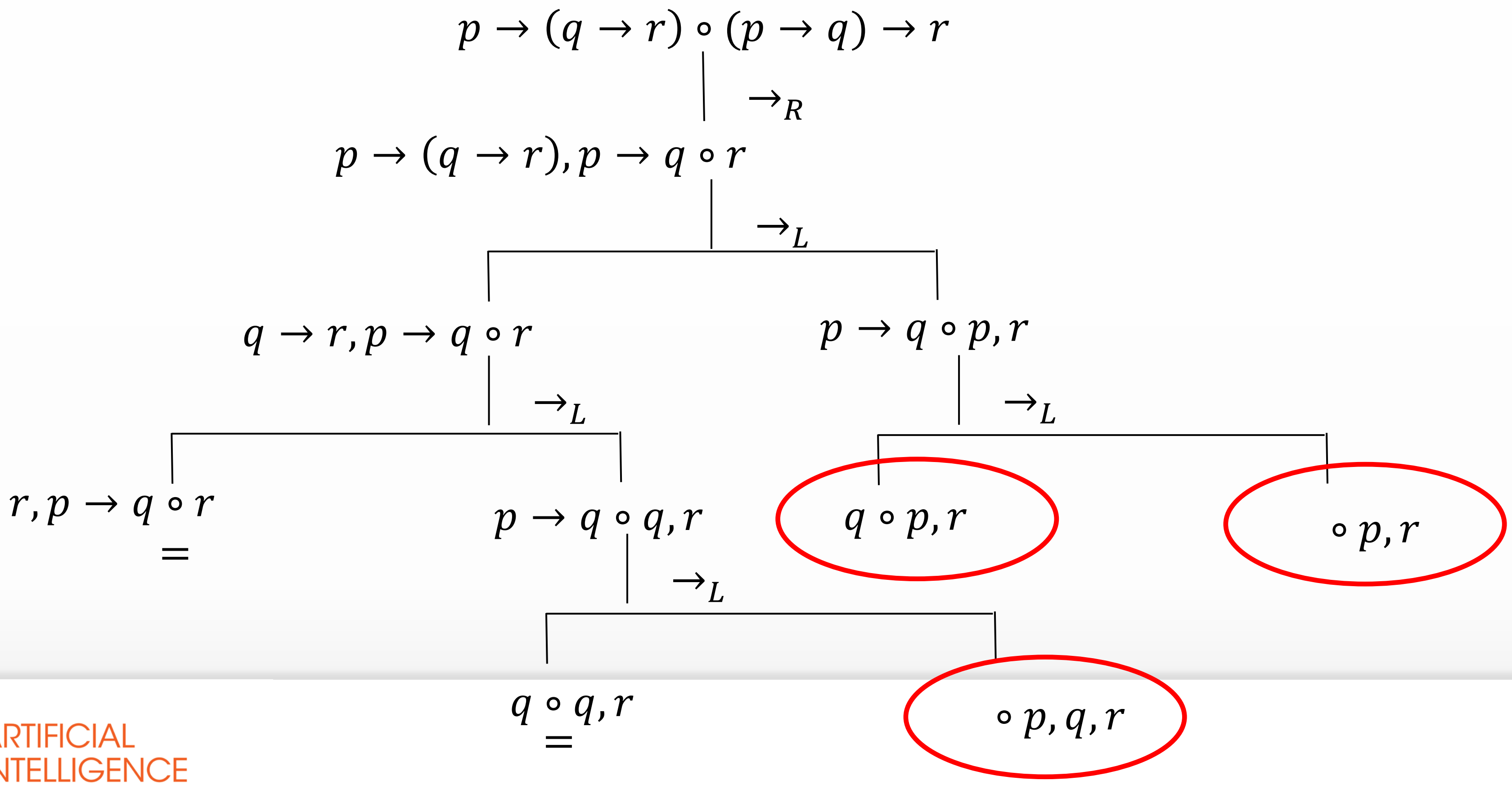
Is $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \;/\; r \vee s$ een geldige gevolgtrekking?



oefening: probeer een andere volgorde

Semantisch tableau: voorbeeld

Is $p \rightarrow (q \rightarrow r)/(p \rightarrow q) \rightarrow r$ een geldige gevolgtrekking?



Semantisch tableau: voorbeeld

Is $p \rightarrow (q \rightarrow r) / (p \rightarrow q) \rightarrow r$ een geldige gevolgtrekking?

3 tegenvoorbeelden:

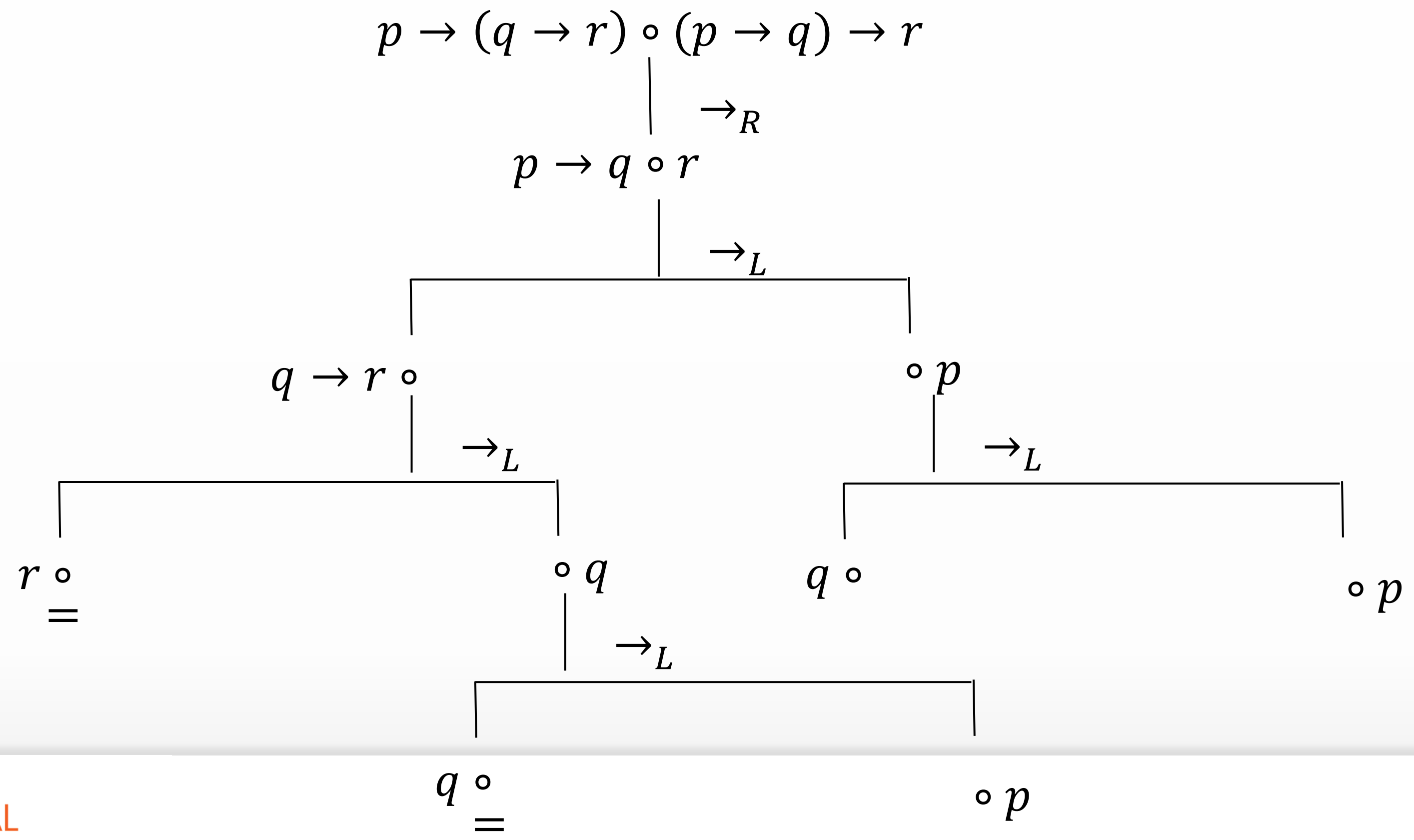
1. $V(p) = V(q) = V(r) = 0$
2. $V(p) = V(r) = 0, V(q) = 1$
3. $V(p) = V(r) = 0$ (omvat 2 andere tegenvoorbeelden)

semantisch tableau vindt alle tegenvoorbeelden (bewijs later)

Besluit: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \nvDash (p \rightarrow q) \rightarrow r$

Semantisch tableau: kortere schrijfwijze

Is $p \to (q \to r)/(p \to q) \to r$ een geldige gevolgtrekking?



Semantisch consistent

Een formuleverzameling Σ is (semantisch) consistent als Σ een model heeft.

Een formuleverzameling die niet consistent is heet inconsistent.

Definitie

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Consistentie via semantisch tableau

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ is consistent desda er een V bestaat zodat $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ$ heeft een tegenvoorbeeld desda er een V bestaat zodat $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$.

Dus: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ is consistent desda $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ$ een tegenvoorbeeld heeft (open tableau).

Semantisch consistent: oefening

Is $\{p \vee q, \neg(p \to \neg r), q \to r, \neg(r \wedge p)\}$ consistent of inconsistent?

Tautologie via semantisch tableau

Een formule φ is een tautologie indien voor elke waardering V geldt dat $V(\varphi) = 1$. Of equivalent indien er geen waardering V bestaat zodat $V(\varphi) = 0$.

$\circ\, \varphi$ heeft een tegenvoorbeeld indien er een waardering V bestaat zodat $V(\varphi) = 0$.

Een formule φ is een tautologie indien er geen tegenvoorbeeld bestaat voor $\circ\, \varphi$ (gesloten tableau).

Tautologie: oefening

1. Is $\neg(p \wedge \neg p)$ een tautologie?
2. Zijn $\varphi \rightarrow \psi$ en $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ logisch equivalent?

Adequaatheidsstelling

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ desda er bestaat een gesloten tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$

bewijs later

Stelling

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Overzicht reductieregels

$$\neg_L: \quad \begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

$$\neg_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \neg\alpha, \Psi \\ \\ \Phi, \alpha \circ \Psi \end{array}$$

$$\to_L: \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi, \alpha \to \beta \circ \Psi} \\ \\ \Phi, \beta \circ \Psi & \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

$$\to_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \to \beta, \Psi \\ \\ \Phi, \alpha \circ \beta, \Psi \end{array}$$

$$\leftrightarrow_L: \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi, \alpha \leftrightarrow \beta \circ \Psi} \\ \\ \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi & \Phi \circ \alpha, \beta, \Psi \end{array}$$

$$\leftrightarrow_R: \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi \circ \alpha \leftrightarrow \beta, \Psi} \\ \\ \Phi, \alpha \circ \beta, \Psi & \Phi, \beta \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

$$\wedge_L: \quad \begin{array}{c} \Phi, \alpha \wedge \beta \circ \Psi \\ \\ \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \end{array}$$

$$\wedge_R: \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi} \\ \\ \Phi \circ \alpha, \Psi & \Phi \circ \beta, \Psi \end{array}$$

$$\vee_L: \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\Phi, \alpha \vee \beta \circ \Psi} \\ \\ \Phi, \alpha \circ \Psi & \Phi, \beta \circ \Psi \end{array}$$

$$\vee_R: \quad \begin{array}{c} \Phi \circ \alpha \vee \beta, \Psi \\ \\ \Phi \circ \alpha, \beta, \Psi \end{array}$$