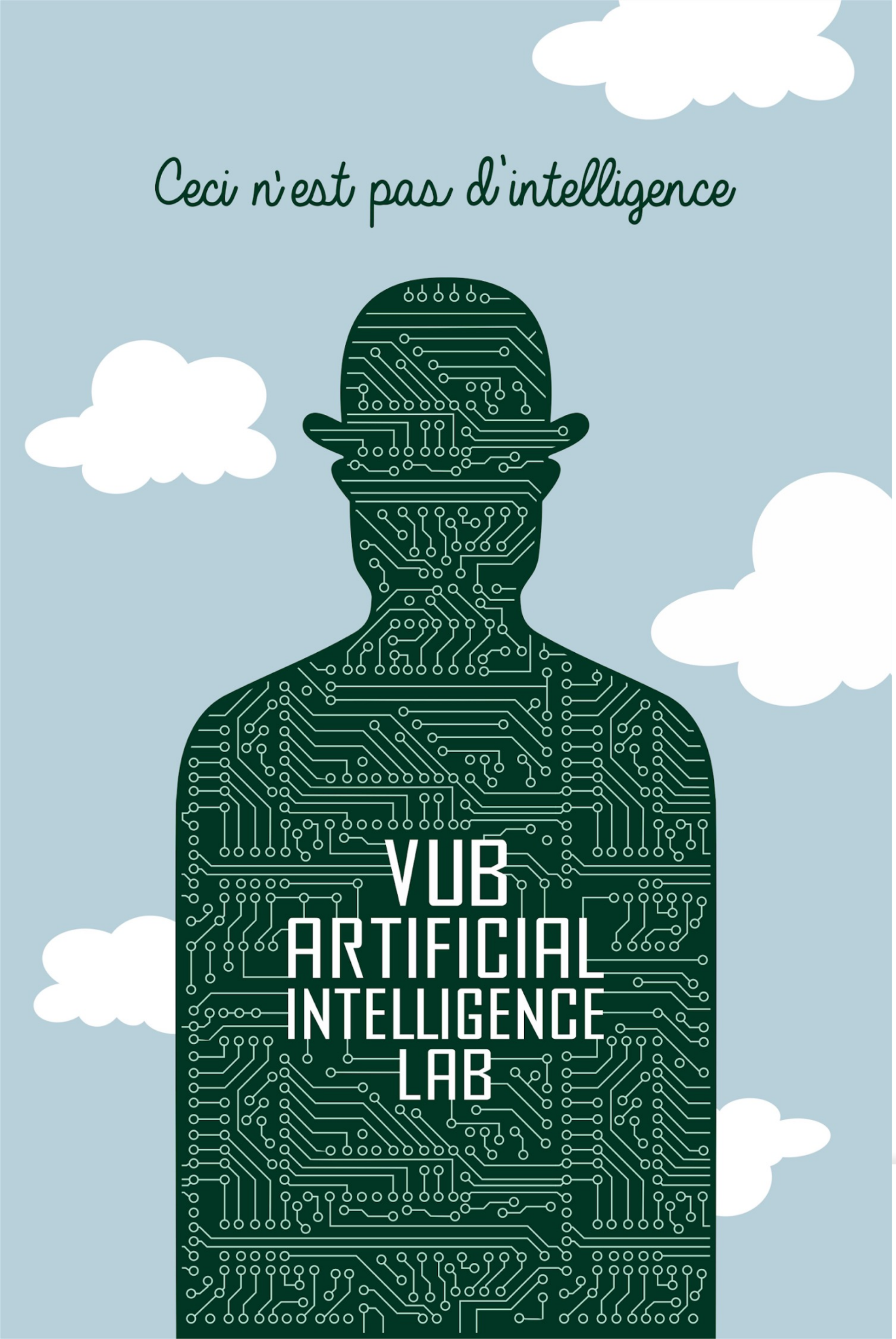

Logica en formele systemen

Predikaatlogica

Semantiek

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB
ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud predikaatlogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Inleidend voorbeeld

$$\forall x\ \exists y\ (Rxy\ \land Ay)$$

Enkele voorbeelden van interpretaties:

domein	Rxy	Ay	Interpretatie formule
$\mathbb{N}$	$\mathbf{x}$ is kleiner dan $\mathbf{y}$	$\mathbf{y}$ is even	Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter getal dat even is.
mensen	$\mathbf{x}$ is de moeder van $\mathbf{y}$	$\mathbf{y}$ is een vrouw	Elk persoon is moeder van een vrouw.

Structuur: inleiding

Een structuur kan je zien als een domein waarop relaties en operaties/functies gedefinieerd zijn.

Voorbeeld: het domein van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

- relaties: $<, =, \ldots$
- functies: $+, *, \ldots$

Informeel:

- relaties corresponderen met beweringen (waar/vals)
- functies leveren andere objecten op

Structuur: definitie

Een structuur $\boldsymbol{D}$ is een drietal $\langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O} \rangle$ bestaande uit een niet-lege verzameling D (het domein), een verzameling $\boldsymbol{R}$ van relaties op D en een verzameling $\boldsymbol{O}$ van operaties op D.

Relationele structuur: een structuur met $\mathbf{R} \neq \emptyset$.

- bv $D = \{1,2,3\}$ met 1 relatie kleiner dan

Operationele structuur: een structuur met $\boldsymbol{O} \neq \emptyset$.

- bv groepen, ringen (algebra)

Definitie

Structuur: voorbeeld

$$\langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$$

(met $\mathbf{0}$ de nul van de natuurlijke getallen -> speciaal object, nul plaatsige operatie)

$\langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O} \rangle$: domein, relaties en operaties

Interpretatiefunctie: definitie

Laat $\mathbf{D} = \langle D, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{O} \rangle$ een structuur zijn. Een interpretatiefunctie I kent aan

- elke individuele constante c een speciaal object $I(c) \in \boldsymbol{O}$ toe (nulplaatsige operatie)
- elke predikaatletter P een relatie $I(P) \in \boldsymbol{R}$ toe (van zelfde plaatsigheid)
- elke functieletter f een operatie $I(f) \in \boldsymbol{O}$ (van zelfde plaatsigheid)

Definitie

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Interpretatiefunctie: voorbeeld

$$\langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$$

Stel P is een 2-plaatsige predikaatletter, f is een 2-plaatsige functieletter, g is een 2-plaatsige functieletter en a is een constante.

voorbeeld interpretatiefunctie

- $I(P) = <$
- $I(f) = +$
- $I(g) = \cdot$
- $I(a) = 0$

Model: definitie

Een paar $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{I})$ met $\boldsymbol{D}$ een structuur en $\boldsymbol{I}$ een interpretatiefunctie heet een model.

Een (on)eindig model is een model met een (on)eindig domein.

Definitie

Model: voorbeeld

$M = (\boldsymbol{D}, I)$ waar

$\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$ en I gedefinieerd als $I(P) = <$, $I(f) = +$, $I(g) = \cdot$, $I(a) = 0$

$$Px_1x_2 \wedge Pf(a, x_9)g(x_5, x_9)$$

wordt dan geïnterpreteerd als

$$\text{‘}x_1 < x_2 \text{ en } x_9 < (x_5 \cdot x_9)\text{’}$$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Bedeling: definitie

Een bedeling b is een functie die aan elke variabele x een object $b(x) \in D$ toekent.

Definitie

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Bedeling: voorbeeld

$M = (\boldsymbol{D}, I)$ waar

$\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$ en I gedefinieerd als $I(P) = <, I(f) = +,$ $I(g) = \cdot, I(a) = 0$

Voorbeeld bedeling $b(x_i) = i$ $(i = 1,2,3, \ldots)$

$$Px_1x_2 \wedge Pf(a, x_9)g(x_5, x_9)$$

wordt dan geïnterpreteerd als

'$1 < 2$ en $9 < 45$'

Notatie

- $\langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$ wordt ook als $\langle \mathbb{N}, <, 0, +, \cdot \rangle$ genoteerd, zolang duidelijk is wat de relaties en wat de functies zijn
- $b[x \mapsto d]$ is de bedeling b die d aan de variabele x toekent, ongeacht wat $b(x)$ ervoor was. Stel $b(x_i) = i$ $(i = 1,2,3, \ldots)$, dan
  - $b[x_1 \mapsto 10](x_1) = 10$
  - $b[x_1 \mapsto 10](x_2) = 2$

Herinner: definitie term

De termen van de predikaatlogica worden als volgt geconstrueerd:

1. individuele variabelen en constanten zijn termen
2. als f een k-plaatsige functieletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen, dan is $f(t_1, \ldots, t_k)$ ook een term
3. niets anders is een term

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Waardering van termen: definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. De semantische waardering $V_{M,b}$ van termen is alsvolgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(f(t_1, \ldots, t_k)) = I(f)\,(V_{M,b}(t_1), \ldots, V_{M,b}(t_k))$

Definitie

Waardering van termen: voorbeeld

$M = (\boldsymbol{D}, I)$ waar

$\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, \{<\}, \{0, +, \cdot\} \rangle$ en I gedefinieerd als $I(P) = <, I(f) = +,$ $I(g) = \cdot, I(a) = 0$

bedeling $b(x_i) = i \ (i = 1,2,3, \ldots)$

$$V_{M,b}(f(a, x_1)) = I(f)\left(V_{M,b}(a), V_{M,b}(x_1)\right) = I(f)(I(a), b(x_1)) = + \left(\mathrm{I(a), b}(x_1)\right) = +(0,1) = 1$$

Herinner: definitie formule

De formules van de predikaatlogica worden als volgt gedefinieerd:

1. als P een k-plaatsige predikaatletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen, dan is $P(t_1, \ldots, t_k)$ een formule
2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. als φ een formule is en x een variabele, dan zijn $\forall x\varphi$ en $\exists x\varphi$ ook formules
4. niets anders is een formule

Waardering van formules: definitie

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. De waarheidswaarden van formules zijn alsvolgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(P(t_1, \ldots, t_k)) = 1 \Leftrightarrow I(P)(V_{M,b}(t_1), \ldots V_{M,b}(t_k))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow V_{M,b}(\varphi) = 0$ en gelijkaardig voor de andere connectieven
- $V_{M,b}\ (\exists x\ \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ er is een $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}\ (\forall x\ \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

Definitie

Waardering van formules: notatie

Het is gebruikelijk om $M, b \models \varphi$ te schrijven in plaats van $V_{M,b}(\varphi) = 1$.

Het is gebruikelijk om $M, b \not\models \varphi$ te schrijven in plaats van $V_{M,b}(\varphi) = 0$.

Als er geen verwarring mogelijk is schrijven we $V(\varphi)$ in plaats van $V_{M,b}(\varphi)$.

Opmerking: model

Propositielogica: een model is een waardering die de formule waarmaakt.

Predikaatlogica: een model is een paar $(\boldsymbol{D}, I)$

Toch is het een passende generalisatie. We blijven zeggen dat een paar $\mathrm{M} = (\boldsymbol{D}, I)$ een model van een formule φ is indien voor elke bedeling b geldt $V_{M,b}(\varphi) = 1$.

Semantiek: voorbeeld

$M = (\boldsymbol{D}, I)$ waar $\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ en I gedefinieerd als $I(R) = <$ met bedeling $b(x_1) = 4$

$V_{M,b}(\forall y(Rx_1y \rightarrow \exists z(Rx_1z \land Rzy))) = 1$

desda voor alle $q \in \mathbb{Q}$: $V_{M,b[y \mapsto q]}(Rx_1y \rightarrow \exists z(Rx_1z \land Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in \mathbb{Q}$: als $V_{M,b[y \mapsto q]}(Rx_1y) = 1$ dan $V_{M,b[y \mapsto q]}(\exists z(Rx_1z \land Rzy)) = 1$

desda voor alle $q \in \mathbb{Q}$: als $I(R)(V_{M,b[y \mapsto q]}(x_1), V_{M,b[y \mapsto q]}(y)) = 1$ dan er bestaat een $q' \epsilon\ \mathbb{Q}$: $V_{M,b[y \mapsto q][z \mapsto q']}(Rx_1z \land Rzy) = 1$

desda voor alle $q \in \mathbb{Q}$: als $4 < \mathrm{q}$ dan er bestaat een $q' \epsilon\ \mathbb{Q}$: $V_{M,b[y \mapsto q][z \mapsto q']}(Rx_1z) = 1$ en $V_{M,b[y \mapsto q][z \mapsto q']}(Rzy) = 1$

desda voor alle $q \in \mathbb{Q}$: als $4 < \mathrm{q}$ dan er bestaat een $q' \epsilon\ \mathbb{Q}$: $4 < q'$ en $q' < q$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Gelijkheid van termen

De gelijkheidsrelatie is niet standaard gedefinieerd. Indien nodig moeten we dit expliciet definiëren.

Voorbeeld definitie:

$V_{M,b}(t_1 = t_2) = 1$ desda $V_{M,b}(t_1) = V_{M,b}(t_2)$ voor alle M en b

Object in domein!

Object in domein!

Gelijkheid van termen: voorbeeld

Zij $M = (\boldsymbol{D}, I)$ waar $\boldsymbol{D} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ en $I(f) = \cdot$, $I(g) = +$

Stel

$t_1 = f(x, g(y, z))$ en $t_2 = g(f(x, y), f(x, z))$

Voor elke bedeling b hebben we $V_{M,b}(t_1) = V_{M,b}(t_2)$

Dit geldt echter niet voor $I(f) = +$, $I(g) = \cdot$, behalve voor de bedelingen b waarvoor $b(x) = 0$

Eigenschap waarheidsfunctie

Laat $x_1, \ldots\ x_k$ de vrije variabelen van φ zijn, b_1 en b_2 bedelingen zodat $b_1(x_i) = \ b_2(x_i)$ voor alle $i = 1, \ldots, k$ en een model M. Dan geldt $V_{M,b_1}(\varphi) = V_{M,b_2}(\varphi)$.

zonder bewijs

Waarheidswaarde enkel afhankelijk van de bedeling van de vrije variabelen!

Eigenschap

Waarheidwaarde gesloten formules

Herinner: een zin of een gesloten formule is een formule zonder vrije variabelen.

- $\forall x(Ax \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall x\, Sxy))$
- Pa

➔ bedeling doet er niet toe voor zinnen, enkel waar of onwaar in het model

Eigenschap substitutie

Voor alle termen t en t' en een variabele x geldt

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

voor alle M en b.

bewijs later

Eigenschap

Oefening (deel 1)

Toon $V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$ voor $t = a$ (een constante) en $t' = f(x, y)$.

$$
\begin{aligned}
& V_{M,b}([t/x]t') \\
&= \ V_{M,b}\big([a/x]f(x,y)\big) \\
&= \ V_{M,b}\big(f(a,y)\big) \\
&= I(f)(V_{M,b}(a), V_{M,b}(y)) \\
&= I(f)(I(a), b(y))
\end{aligned}
$$

Oefening (deel 2)

Toon $V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$ voor $t = a$ (een constante) en $t' = f(x, y)$.

$$
\begin{aligned}
& V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t') \\
& = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(f(x, y)) \\
& = I(f)(V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(x), V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(a)]}(y)) \\
& = I(f)\left(V_{M,b}(a), b(y)\right) \\
& = I(f)(I(a), b(y))
\end{aligned}
$$

Geldig gevolg: definitie

Laat Σ een verzameling formules zijn en ψ een formule. Dan zeggen we dat ψ een geldig gevolg is van Σ (notatie $\Sigma \vDash \psi$) indien voor elk model M en elke bedeling b geldt

als voor elke $\varphi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = 1$ dan geldt ook $V_{M,b}(\psi) = 1$

Definitie

Geldig gevolg: voorbeelden

- $\forall x\ (Rx \to Px), \exists x\ Rx \ \vDash\ \exists x\ Px$
- $\forall x\ \exists y\ Rxy, \forall x\ \forall y\ (Rxy \to Ryx), \forall x\ \forall y\ \forall z\ \big((Rxy\ \wedge Ryz) \to Rxz\big) \vDash\ \forall x\ Rxx$

Geldig gevolg: oefening

$$\forall x\,(Rx \to Px), \exists x\, Rx \ \vDash\ \exists x\, Px$$

Neem M, b willekeurig en gegeven: $V_{M,b}\big(\forall x\,(Rx \to Px)\big) = 1$ en $V_{M,b}(\exists x\, Rx) = 1$:

1. voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x \mapsto d]}(Rx \ \to Px) = 1$
2. er bestaat $d' \in D$: $V_{M,b[x \mapsto d']}(Rx) = 1$

Uit 2 volgt $I(R)(d') = 1$. In het bijzonder (neem $d = d'$) volgt uit 1 $V_{M,b[x \mapsto d']}(Rx \ \to Px) = 1$: als $I(R)(d') = 1$, dan volgt $I(P)(d') = 1$. We weten dus dat $I(P)(d') = 1$. We concluderen $V_{M,b}(\exists x\, Px) = 1$.

Universeel geldig: definitie

Laat ψ een formule zijn. We zeggen dat een formule ψ universeel geldig is indien

$$\vDash \psi$$

Notatie $\vDash \Sigma$ betekent dat minstens één van de formules in Σ universeel geldig is.

Definitie

Universeel geldig: voorbeeld

- $\vDash Ta \to \exists x\, Tx$
- $\vDash \forall x\, K(x,x)$ met K "gelijk aan"

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Universeel geldig: oefening

$$\vDash Ta \rightarrow \exists x\, Tx$$

Neem M, b willekeurig, we tonen $V_{M,b}(Ta \rightarrow \exists x\, Tx) = 1$. Om dit te tonen nemen we als gegeven $V_{M,b}(Ta) = 1$, en we tonen $V_{M,b}(\exists x\, Tx) = 1$. Het volstaat te tonen dat er een $d \in D$ bestaat zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(Tx) = 1$, hetgeen voldaan is voor $d = a$.

Universeel geldig: oefening

$\vDash \forall x\, K(x,x)$ met K “gelijk aan”

Neem M, b willekeurig, we tonen $V_{M,b}(\forall x\, K(x,x)) = 1$. We nemen hiervoor $d \in D$ willekeurig en tonen $V_{M,b[x\mapsto d]}(K(x,x)) = 1$ ofwel $I(K)(d,d) = 1$. Dit is automatisch voldaan.

Logisch equivalent: definitie

Als voor formules φ en ψ geldt dat $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ dat heten φ en ψ logisch equivalent.

Merk op: φ en ψ zijn logisch equivalent indien voor elk model M en elke bedeling b geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = V_{M,b}(\psi)$.

Definitie

Logisch equivalent: voorbeelden

- $\forall x\, Rx$ en $\neg\exists x\, \neg Rx$
- $\forall x\, (Rx \land Ax)$ en $(\forall x\, Rx \land \forall x\, Ax)$

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Logisch equivalent: oefening (deel 1)

$\forall x\ Rx$ en $\neg\exists x\ \neg Rx$ zijn logisch equivalent

Neem M, b willekeurig, we tonen $V_{M,b}(\forall x\ Rx) = V_{M,b}(\neg\exists x\ \neg Rx)$.

1. Stel $V_{M,b}(\forall x\ Rx) = 1$. Dan voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}(Rx) = 1$, of $V_{M,b[x\mapsto d]}(\neg Rx) = 0$. Er bestaat dus geen $d' \in D$ zodat $V_{M,b[x\mapsto d']}(\neg Rx) = 1$. Dit betekent $V_{M,b}(\exists x\ \neg Rx) = 0$. Dus $V_{M,b}(\neg\exists x\ \neg Rx) = 1$.

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Logisch equivalent: oefening (deel 2)

$\forall x\ Rx$ en $\neg\exists x\ \neg Rx$ zijn logisch equivalent

Neem M, b willekeurig, we tonen $V_{M,b}(\forall x\ Rx) = V_{M,b}(\neg\exists x\ \neg Rx)$.

2. Stel $V_{M,b}(\forall x\ Rx) = \mathbf{0}$. Dan is het niet zo dat voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}(Rx) = \mathbf{1}$. Er bestaat dus een $d' \in D$ zodat $V_{M,b[x\mapsto d']}(Rx) = \mathbf{0}$, ofwel $V_{M,b[x\mapsto d']}(\neg Rx) = \mathbf{1}$. Dit betekent $V_{M,b}(\exists x\ \neg Rx) = \mathbf{1}$ en dus $V_{M,b}(\neg\exists x\ \neg Rx) = \mathbf{0}$.

Theorieën en axiomas: inleiding

Herinner: voor zinnen φ (formules zonder vrije variabelen) geldt voor alle bedelingen b_1 en b_2 dat $V_{M,b_1}(\varphi) = V_{M,b_2}(\varphi)$ voor alle M.

We kunnen dus ondubbelzig spreken over de waarheidswaarde van een zin in een model. Voor geldig gevolg is dus ook enkel het model belangrijk.

Vragen: - Gegeven een model, welke zinnen zijn waar?

- Gegeven een zin, welke modellen maken de zin waar?

Theorie: definitie

De theorie van een model M is gedefinieerd als

$$Th(M) = \{\varphi | \varphi \text{ } een \text{ } zin \text{ } en \text{ } M \vDash \varphi\}$$

Definitie

Axiomaverzameling: definitie

Een formuleverzameling Σ axiomatiseert $Th(M)$ als voor alle zinnen φ geldt:

$$\varphi \in Th(M) \Leftrightarrow \Sigma \vDash \varphi$$

We noemen Σ een axiomatiek of axiomaverzameling voor $Th(M)$.

Opmerking $Th(M)$ is een axiomatiek voor $Th(M)$.

Een goede axiomatiek geeft de essentiële kenmerken weer van het model.

Definitie

Modelverzameling: definitie

De modelverzameling van een zin φ is gedefinieerd als

$$MOD(\varphi) = \{M | M \vDash \varphi\}$$

De modelverzameling van een verzameling zinnen Σ is gedefineerd als

$$MOD(\Sigma) = \{M | M \vDash \varphi \text{ } voor \text{ } alle \text{ } \varphi \in \Sigma\}$$

Definitie