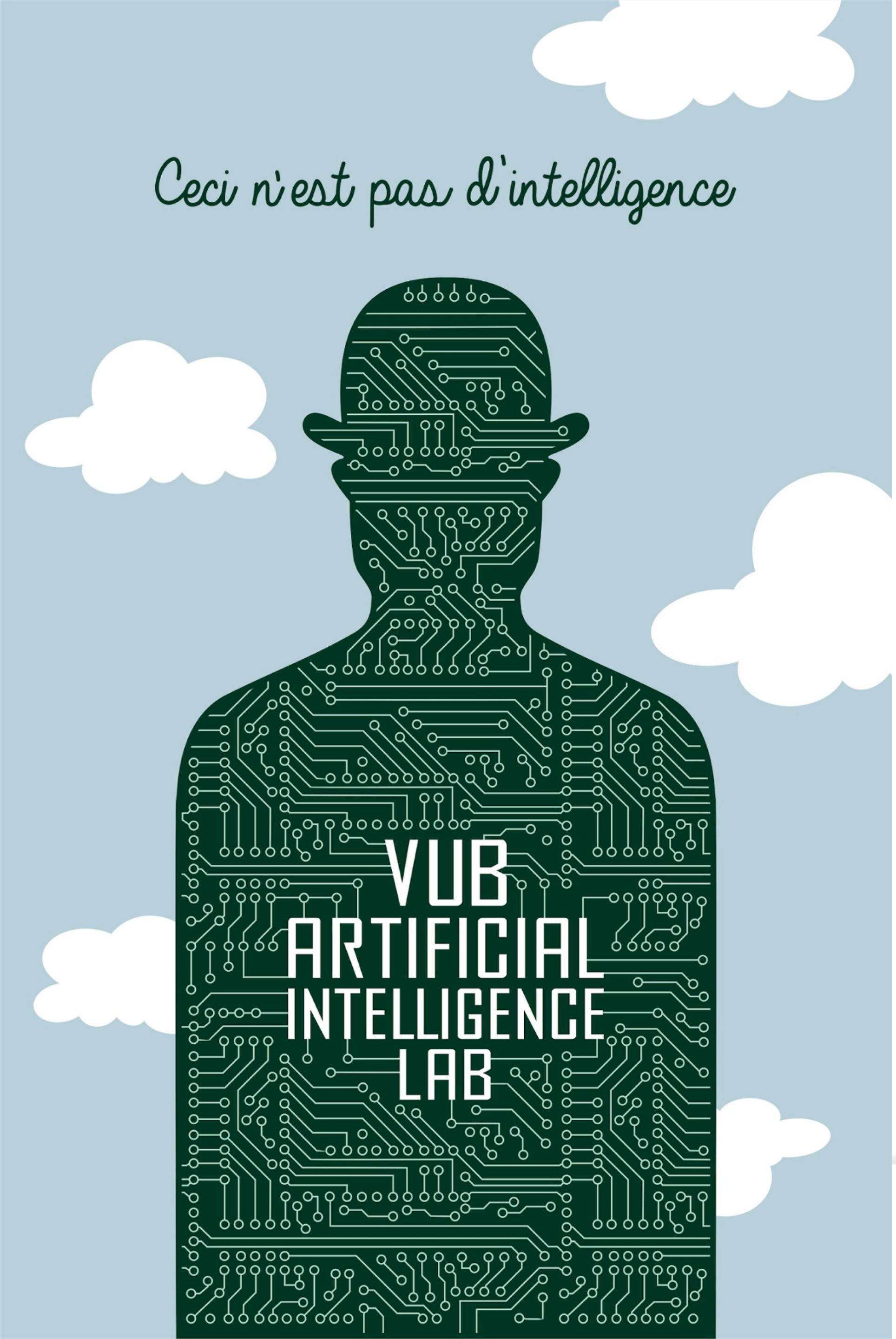

Logica en formele systemen

Predikaatlogica

Metatheorie

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

Inhoud predikaatlogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Theoretische aspecten

- Substitutie
- Prenexvorm
- Fragmenten van predikaatlogica
- Adequaatheid van tableaus
- Volledigheidsstelling

Herinner: definitie termen

De termen van de predikaatlogica worden als volgt geconstrueerd:

1. individuele variabelen en constanten zijn termen
2. als f een k-plaatsige functieletter is en $t_1, \dots, t_k$ zijn termen, dan is $f(t_1, \dots, t_k)$ ook een term
3. niets anders is een term

Herinner: definitie formules

De formules van de predikaatlogica worden als volgt gedefinieerd:

1. als P een k-plaatsige predikaatletter is en $t_1, \ldots, t_k$ zijn termen, dan is $P(t_1, \ldots, t_k)$ een formule
2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. als φ een formule is en x een variabele, dan zijn $\forall x\varphi$ en $\exists x\varphi$ ook formules
4. niets anders is een formule

Herinner: substitutie

1. Laat t en t' termen zijn en x een variabele. Dan is $[t\ /\ x]t'$ de term die ontstaat door elk voorkomen van x in t' te vervangen door t.
2. Laat φ een formule zijn, t een term en x een variabele. Dan is $[t\ /\ x]\varphi$ de formule die ontstaat door elk **vrij** voorkomen van x in φ te vervangen door t. $[t\ /\ x]\varphi$ noemt men ook instantie van φ.

Herinner: waardering termen

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. De semantische waardering $V_{M,b}$ van termen is alsvolgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)\,(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$

Herinner waardering formules

Laat $M = (\boldsymbol{D}, I)$ een model zijn en b een bedeling. De waarheidswaarden van formules zijn alsvolgt gedefinieerd:

- $V_{M,b}(P(t_1, \dots, t_k)) = 1 \Leftrightarrow I(P)(V_{M,b}(t_1), \dots V_{M,b}(t_k))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\varphi) = 1 \Leftrightarrow V_{M,b}(\varphi) = \mathbf{0}$ en gelijkaardig voor de andere connectieven
- $V_{M,b}\ (\exists x\ \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ er is een $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$
- $V_{M,b}\ (\forall x\ \varphi) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\varphi) = 1$

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Eigenschap waarheidsfunctie

Laat $x_1, \ldots\ x_k$ de vrije variabelen van φ zijn, b_1 en b_2 bedelingen zodat $b_1(x_i) =\ b_2(x_i)$ voor alle $i = 1, \ldots, k$ en een model M. Dan geldt $V_{M,b_1}(\varphi) = V_{M,b_2}(\varphi)$.

zonder bewijs

Eigenschap

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Eigenschap 1 substitutie

Voor alle termen t en t' en een variabele x geldt

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

voor alle M en b.

Eigenschap

Eigenschap 1 substitutie: bewijs (1/2)

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

We bewijzen dit met inductie naar de opbouw van t'.

1. Stel $t' = x$, dan
   - $V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b}([t/x]x) = V_{M,b}(t)$
   - $V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(x) = V_{M,b}(t)$
2. Stel $t' = y \neq x$ met y een variabele of constante, dan
   - $V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b}([t/x]y) = V_{M,b}(y)$
   - $V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(y) = V_{M,b}(y)$

Bewijs

Eigenschap1 substitutie: bewijs (2/2)

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

3. Inductiehypothese: $V_{M,b}([t/x]t_i) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t_i)$ voor alle M en b, dan
   - $V_{M,b}([t/x]f(t_1, \dots, t_k)) = V_{M,b}(f([t/x]t_1, \dots, [t/x]t_k)) = I(f)\left(V_{M,b}([t/x]t_1), \dots, V_{M,b}([t/x]t_k)\right) = \mathrm{I(f)}(V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t_1), \dots, V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t_k))$
   - $V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)\left(V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t_1), \dots, V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t_k)\right)$

Bewijs

Herinner: problematische substituties

bv $[y/x]\exists y\, y < x = \ \exists y\, y < y$

door substitutie kan een vrije variabele opeens gebonden worden

➔extra voorwaarde opleggen om substitutie uit te mogen voeren

we onderbouwen dit nu theoretisch

Eigenschap 2 substitutie

Voor een formule φ en variabele x zodat t vrij is voor x in φ geldt in elke model M en voor elke bedeling b dat

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

(Een term t heet vrij voor x in φ als in $[t\ /\ x]\varphi$ geen variabele van t gebonden wordt)

Eigenschap

Eigenschap 2 substitutie: bewijs (1/4)

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

We bewijzen dit met inductie naar de opbouw van φ.

1. Inductiehypothese: $V_{M,b}([t/x]t_i) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(t_i)$ voor alle M en b. Stel $\varphi = P(t_1, \dots, t_k)$, dan
   - $V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b}([t/x]P(t_1, \dots, t_k)) = V_{M,b}(P([t/x]t_1, \dots, [t/x]t_k))$
     $= I(P)(V_{M,b}([t\,/\,x](t_1)), \dots, V_{M,b}([t/x](t_k)))$
     $= \mathrm{I(P)}(V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(t_1), \dots, V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(t_k))$
   - $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}\big(P(t_1, \dots, t_k)\big)$
     $= \mathrm{I(P)}(V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(t_1), \dots, V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(t_k))$

Bewijs

Eigenschap 2 substitutie: bewijs (2/4)

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

2. Te bewijzen voor alle connectieven. Hier ter illustratie bewijzen we voor negatie $\varphi = \neg\psi$ met inductiehypothese $V_{M,b}([t/x]\psi) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\psi)$ voor alle M en b.

   Dan $V_{M,b}([t/x]\varphi) = 1$ desda $V_{M,b}([t/x]\psi) = 0$ desda $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\psi) = 0$ desda $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi) = 1$.

Bewijs

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Eigenschap 2 substitutie: bewijs (3/4)

$$V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi)$$

3. Te bewijzen voor beide kwantoren, ter illustratie hier $\varphi = \forall z \psi$ met inductiehypothese $V_{M,b}([t/x]\psi) = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\psi)$ voor alle M en b. We bekijken twee gevallen:
   - x is niet vrij in φ en dus $[t/x]\varphi = \varphi$ (definitie: enkel de vrije variabelen) zodat $V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b}(\varphi)$. Omdat x niet vrij is, geldt volgens een vorige bewering dat $V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi) = V_{M,b}(\varphi)$.
   - x is vrij in φ en dus $[t/x]\varphi = [t/x]\forall z\psi = \forall z\, [t/x]\psi$ zodat $V_{M,b}([t/x]\varphi) = V_{M,b}(\forall z\, [t/x]\psi)$. Dit betekent $V_{M,b}([t/x]\varphi) = 1$ desda voor alle $d \in D$: $V_{M,b[z \mapsto d]}([t/x]\psi) = 1$.

Bewijs

Eigenschap 2 substitutie: bewijs (4/4)

We onderzoeken $V_{M,b[z \mapsto d]}([t/x]\psi)$. Uit de inductiehypothese (neem $b[z \mapsto d]$) weten we dat in het bijzonder $V_{M,b[z\mapsto d]}([t/x]\psi) = V_{M,b[z\mapsto d][x\mapsto V_{M,b[z\mapsto d]}(t)]}(\psi)$. Gegeven is dat t vrij is voor x in φ, dus z komt zeker niet voor in t, dus $V_{M,b[z\mapsto d]}(t) = V_{M,b}(t)$. Extra aanname is dat x vrij is in φ dus $x \neq z$ (anders was x gebonden). Er volgt $b[z \mapsto d]\left[x \mapsto V_{M,b}(t)\right] = b\left[x \mapsto V_{M,b}(t)\right][z \mapsto d]$. Samengevat: $V_{M,b[z\mapsto d]}([t/x]\psi) = V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)][z\mapsto d]}(\psi)$.

We hernemen $V_{M,b}([t/x]\varphi) = 1$ desda voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)][z\mapsto d]}(\psi) = 1$. Dit is per definitie desda $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\forall z\psi) = 1$. Dus desda $V_{M,b[x\mapsto V_{M,b}(t)]}(\varphi) = 1$

Bewijs

Theoretische aspecten

- Substitutie
- Prenexvorm
- Fragmenten van predikaatlogica
- Adequaatheid van tableaus
- Volledigheidsstelling

Equivalenties $\forall$, $\exists$, $\neg$: lemma

Als φ en ψ formules zijn en x is een variabele, dan zijn volgende formules logisch equivalent:

- $\forall x \neg \varphi$ en $\neg \exists x \varphi$
- $\exists x \neg \varphi$ en $\neg \forall x \varphi$

Lemma

ARTIFICIAL
INTELLIGENCE
RESEARCH GROUP

Equivalenties ∀, ∃, ¬: lemma bewijs

We tonen als illustratie dat $\forall x \neg\varphi$ en $\neg\exists x\varphi$ logisch equivalent zijn

$V_{M,b}\ (\forall x\ \neg\varphi) = 1$

desda voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}\ (\neg\varphi) = 1$

desda voor alle $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}\ (\varphi) = 0$

desda er bestaat geen $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}\ (\varphi) = 1$

desda $V_{M,b}\ (\exists x\ \varphi) = 0$

desda $V_{M,b}\ (\neg\exists x\ \varphi) = 1$

Bewijs

Verband tussen ∀ en ∃: voorbeeld

$$\neg\neg\neg\exists x \forall y\, \varphi \equiv \neg\exists x \forall y\, \varphi \equiv \forall x \neg\forall y\, \varphi \equiv \forall x \exists y \neg\varphi$$

Equivalenties ∀, ∃,∧,∨: lemma

Als φ en ψ formules zijn en x is een variabele is **die niet vrij voorkomt in $\boldsymbol{\psi}$**, dan zijn volgende formules logisch equivalent:

- $(\exists x\varphi) \land \psi$ en $\exists x\ (\varphi \land \psi)$
- $(\forall x\varphi) \land \psi$ en $\forall x\ (\varphi \land \psi)$
- $(\exists x\varphi) \lor \psi$ en $\exists x\ (\varphi \lor \psi)$
- $(\forall x\varphi) \lor \psi$ en $\forall x\ (\varphi \lor \psi)$
- $\psi \land (\exists x\varphi)$ en $\exists x\ (\psi \land \varphi)$
- $\psi \land (\forall x\varphi)$ en $\forall x\ (\psi \land \varphi)$
- $\psi \lor (\exists x\varphi)$ en $\exists x\ (\psi \lor \varphi)$
- $\psi \lor (\forall x\varphi)$ en $\forall x\ (\psi \lor \varphi)$

Lemma

Equivalenties ∀, ∃,∧,∨: lemma bewijs

We bewijzen $(\exists x\varphi) \wedge \psi$ en $\exists x\, (\varphi \wedge \psi)$ als illustratie.

$V_{M,b}\left((\exists x\varphi) \wedge \psi\right) = 1$

desda $V_{M,b}(\exists x\varphi) = 1$ en $V_{M,b}\,(\psi) = 1$

desda er bestaat $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$ en $V_{M,b}\,(\psi) = 1$

desda er bestaat $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = 1$ en $V_{M,b[x\mapsto d]}\,(\psi) = 1$ (x niet vrij in ψ)

desda er bestaat $d \in D$: $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi \wedge \psi) = 1$

desda $V_{M,b}\left(\exists x\,(\varphi \wedge \psi)\right) = 1$

Bewijs

Equivalenties $\forall, \exists, \rightarrow$: lemma

Als φ en ψ formules zijn en x is een variabele is **die niet vrij voorkomt in $\boldsymbol{\psi}$**, dan zijn volgende formules logisch equivalent:

- $(\forall x\varphi) \rightarrow \psi$ en $\exists x\ (\varphi \rightarrow \psi)$
- $(\exists x\varphi) \rightarrow \psi$ en $\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\psi \rightarrow (\forall x\varphi)$en $\forall x\ (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\psi \rightarrow (\exists x\varphi)$en $\exists x\ (\psi \rightarrow \varphi)$

Lemma

Equivalenties ∀, ∃, →: lemma bewijs

We bewijzen $(\forall x \varphi) \to \psi$ en $\exists x\ (\varphi \to \psi)$ als illustratie.

$$(\forall x \varphi) \to \psi \equiv \neg\ (\forall x \varphi) \lor \psi \equiv \exists x (\neg \varphi) \lor \psi \equiv \exists x\ (\neg \varphi \lor \psi) \equiv \exists x (\varphi \to \psi)$$

Bewijs

Opmerking $\forall, \exists, \leftrightarrow$

Ook voor formules van de vorm $(\forall x \varphi) \leftrightarrow \psi$ kunnen we steeds een logisch equivalente formule vinden waarbij de kwantoren vooraan in de formule voorkomen. Mits voorwaarde over het niet vrij zijn van variabelen, maar dit kunnen we altijd oplossen door over te gaan op een alfabetische variant.

Prenexstelling

Voor elke formule φ bestaat er steeds een logisch equivalente formule in prenexvorm.

Waarbij prenexvorm betekent dat de formule van de vorm $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$ is met kwantoren $Q_1, \dots, Q_n$ zodat er geen kwantoren meer voor komen in ψ.

Stelling

Prenexstelling: bewijs

Via inductie naar φ.

(combinatie van de lemma's)

Bewijs

Prenexvorm: voorbeeld

$$\forall x(\forall y\,(Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall x\,Ax$$
$$\equiv \forall x(\forall y\,(Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall z\,Az$$
$$\equiv \forall x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall z\,Az$$
$$\equiv \exists x(\exists y\,((Ryx \to Ay) \to Ax)) \to \forall z\,Az)$$
$$\equiv \exists x(\forall y\,(((Ryx \to Ay) \to Ax) \to \forall z\,Az))$$
$$\equiv \exists x \forall y\left(\left((Ryx \to Ay) \to Ax\right) \to \forall z\,Az\right)$$
$$\equiv \exists x \forall y\left(\forall z\left(\left((Ryx \to Ay) \to Ax\right) \to Az\right)\right)$$
$$\equiv \exists x \forall y\,\forall z\left(\left((Ryx \to Ay) \to Ax\right) \to Az\right)$$

Merk op: oplossing is niet uniek

Theoretische aspecten

- Substitutie
- Prenexvorm
- Fragmenten van predikaatlogica
- Adequaatheid van tableaus
- Volledigheidsstelling

niet te kennen voor het examen

Monadische taal

Enkel 1 plaatsige predikaatletters: voldoende voor het behandelen van syllogismen (informeel: 2 aannames en 1 conclusie vd vorm alle/geen/sommige A is/zijn B)

Alle kaaimannen zijn reptielen: $\forall x\ (Kx \rightarrow Rx)$

Geen reptiel kan fluiten: $\neg\exists x\ (Rx\ \wedge Fx)$

Geen kaaiman kan fluiten: $\neg\exists x\ (Kx\ \wedge Fx)$

Eigenschap: voldoende om eindige modellen te beschouwen indien een eindig aantal predikaten

Universele formules

Beschouw enkel de formules met universele kwantoren in de prefix.

Eigenschap: indien waar in een model blijven universele formules waar in een deelmodel met minder objecten

Horn zinnen

Een horn zin is een universele formule en zin van de vorm

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n((A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B)$$

waar $A_1, \ldots, A_n, B$ atomaire beweringen zijn.

Bv $\forall x\, Rx$ en $\forall x \forall y\, ((Ax \wedge By) \rightarrow Cxy)$

Geen horn zinnen: $\forall x \exists y\, Sxy$ en $\forall x \forall y\, (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$

Wordt gebruikt in PROLOG.

Theoretische aspecten

- Substitutie
- Prenexvorm
- Fragmenten van predikaatlogica
- Adequaatheid van tableaus
- Volledigheidsstelling

Adequaatheidsstelling

Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt:

$\Sigma \vDash \varphi$ desda er bestaat een gesloten tableau voor $\Sigma \circ \varphi$

Mits beperking tot een taal zonder functiesymbolen, zonder individuele constanten en zonder vrije variabelen.

zonder bewijs

Stelling

Theoretische aspecten

- Substitutie
- Prenexvorm
- Fragmenten van predikaatlogica
- Adequaatheid van tableaus
- Volledigheidsstelling

Volledigheidsstelling

Voor elke formuleverzameling Σ en elke formule φ geldt:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ desda } \Sigma \vDash \varphi$$

zonder bewijs

correctheid (soundness)

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ impliceert } \Sigma \vDash \varphi$$

volledigheid (completeness)

$$\Sigma \vDash \varphi \text{ impliceert } \Sigma \vdash \varphi$$

Stelling