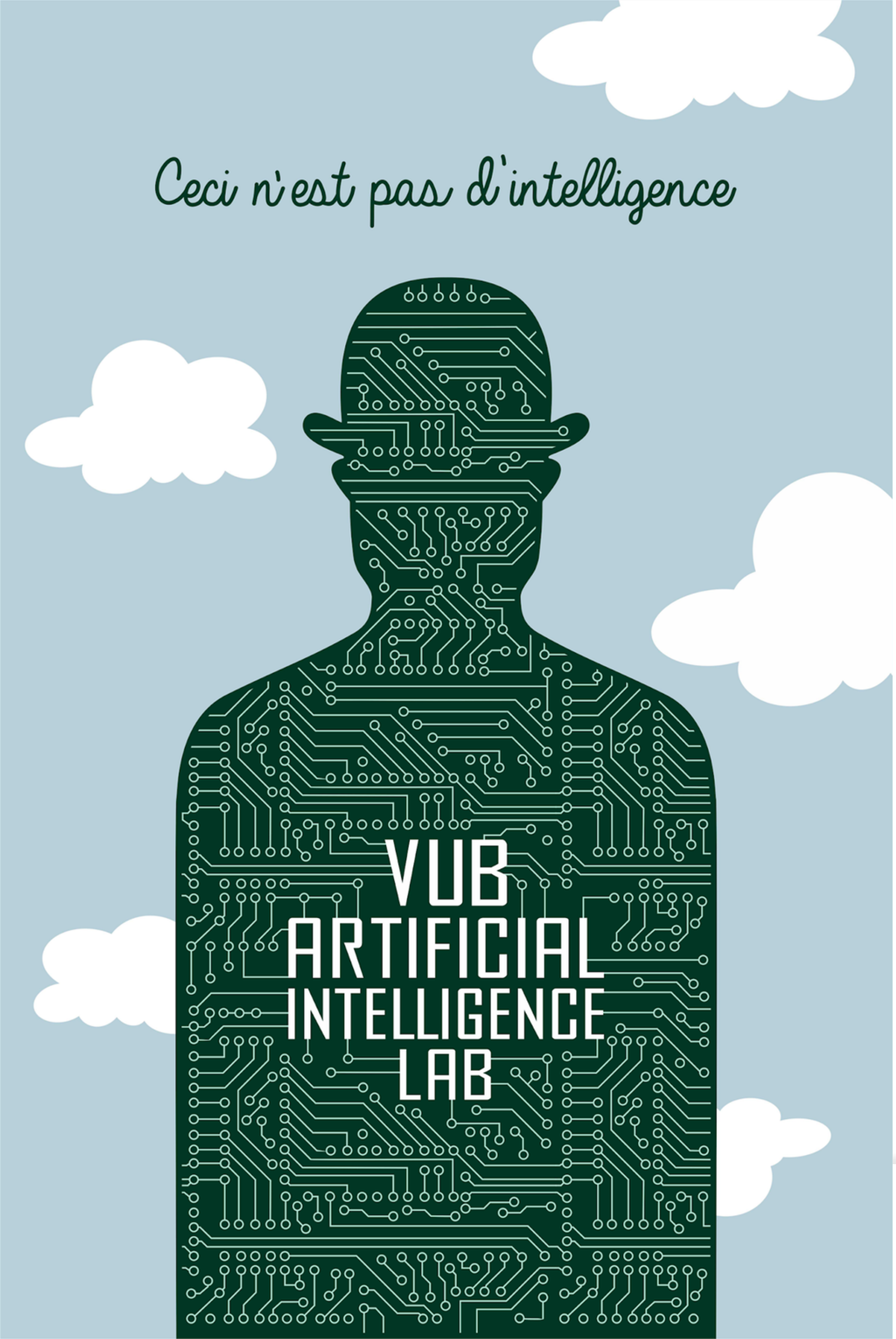


Logica en formele systemen

Propositielogica

Metatheorie

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud propositielogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- Geldig gevolg
- Afleidingen
- Metatheorie

Metatheorie

Metabeweringen: beweringen over het systeem

Voorbeelden:

- functionele volledigheid van connectieven
- volledigheidsstelling

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Formule-inductie

Hoe bewijzen we dat iets geldt voor alle formules uit de propositielogica?

Idee: alle formules zijn opgebouwd vanuit een eindige basisverzameling van bouwstenen (propositieletters) via eindige combinaties met logische operatoren

Basisstap: Bewering geldt voor de propositieletters.

Inductiestap: Als bewering geldt voor φ en ψ (inductiehypothese) dan geldt ze ook voor $\neg\varphi$, $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Formule-inductie: voorbeeld

Definieer voor elke formule φ:

- $subf(\varphi)$ als het aantal subformules in φ
- $length(\varphi)$ als het aantal symbolen in φ (de hulpsymbolen "(" en ")" niet meegerekend)

Stelling: Voor elke formule φ geldt: $subf(\varphi) = length(\varphi)$

Formule-inductie: voorbeeld

Stelling: Voor elke formule φ geldt: $subf(\varphi) = length(\varphi)$

Bewijs:

Basisstap: Stel $\varphi = p$ (propositieletter). Dan geldt $subf(\varphi) = 1 = length(\varphi)$

Inductiestap:

Inductiehypothese: Voor formules α en β geldt: $subf(\alpha) = length(\alpha)$ en $subf(\beta) = length(\beta)$.

Er volgt:

- $subf(\neg\alpha) = 1 + subf(\alpha) =_{IH} 1 + length(\alpha) = length(\neg\alpha)$
- $subf(\alpha \wedge \beta) = subf(\alpha) + 1 + subf(\beta) =_{IH} length(\alpha) + 1 + length(\beta) = length(\alpha \wedge \beta)$
- $subf(\alpha \vee \beta) = subf(\alpha) + 1 + subf(\beta) =_{IH} length(\alpha) + 1 + length(\beta) = length(\alpha \vee \beta)$
- $subf(\alpha \rightarrow \beta) = subf(\alpha) + 1 + subf(\beta) =_{IH} length(\alpha) + 1 + length(\beta) = length(\alpha \rightarrow \beta)$
- $subf(\alpha \leftrightarrow \beta) = subf(\alpha) + 1 + subf(\beta) =_{IH} length(\alpha) + 1 + length(\beta) = length(\alpha \leftrightarrow \beta)$

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Functionele volledigheid

De verzameling $\{\neg, \ \wedge\}$ is functioneel volledig.

Herinner:

Een verzameling van connectieven C heet functioneel volledig als elke formule φ logisch equivalent is met een formule ψ die enkel connectieven uit C bevat.

Stelling

Functionele volledigheid

Stelling: De verzameling $\{\neg, \ \wedge\}$ is functioneel volledig.

Bewijs: We bewijzen voor elke formule: er bestaat formule φ' die logisch equivalent is met φ (laten we dit noteren als $\varphi \equiv \varphi'$) die enkel connectieven uit $\{\neg, \ \wedge\}$ bevat.

Basisstap: Als $\varphi = p$, neem dan $\varphi' = p$. De formule φ' bevat geen connectieven en $\varphi \equiv \varphi'$.

Inductiestap: Veronderstel dat er φ' en ψ' bestaan die enkel connectieven uit $\{\neg, \ \wedge\}$ bevatten zodat $\varphi \equiv \varphi'$ en $\psi \equiv \psi'$ (inductiehypothese).

- $\neg\varphi \equiv_{IH} \neg\varphi'$
- $(\varphi \wedge \psi) \equiv_{IH} (\varphi' \wedge \psi')$
- $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv_{IH} \neg(\neg\varphi' \wedge \neg\psi')$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv_{IH} \neg(\varphi' \wedge \neg\psi')$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \equiv (\neg(\varphi' \wedge \neg\psi') \wedge \neg(\psi' \wedge \neg\varphi'))$

Bewijs

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Dualiteit

Laat φ een formule zijn die enkel bestaat uit de connectieven $\{\wedge, \vee, \neg\}$. De duale vorm van φ (genoteerd als φ^d) is de formule die onstaat door elk voorkomen van $\wedge$ te vervangen door $\vee$ en elk voorkomen van $\vee$ te vervangen door $\wedge$.

Voorbeelden:

- $(p \vee q)^d = (p \wedge q)$
- $(\neg p \ \vee (p \wedge q))^d = (\neg p \ \wedge (p \vee q))$

Definitie

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Dualiteit: stelling

Laat φ en ψ formules zijn waarin enkel connectieven uit $\{\wedge, \vee, \neg\}$ voorkomen. Dan geldt:

$$\vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vDash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$$

Stelling

Dualiteit: bewijs (1/2)

We bewijzen eerst een hulpstelling. Stel dat χ een willekeurige formule is en χ^+ is de formule die onstaat door in χ^d alle atomen te vervangen door hun negaties. We tonen: $\vDash \neg\chi \leftrightarrow \chi^+$.

Basisstap: Als χ een atoom p is, dan $\chi^d = p^d = p$. Dus $\chi^+ = \neg p = \neg\chi$ en $\vDash \neg\chi \leftrightarrow \chi^+$.

Inductiestap: Inductiehypothese: $\vDash \neg\alpha \leftrightarrow \alpha^+$ en $\vDash \neg\beta \leftrightarrow \beta^+$.

- $(\alpha \wedge \beta)^+ = \alpha^+ \vee \beta^+ \equiv_{IH} \neg\alpha \vee \neg\beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$ dus $\vDash \neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta)^+$
- $(\alpha \vee \beta)^+ = \alpha^+ \wedge \beta^+ \equiv_{IH} \neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \neg(\alpha \vee \beta)$ dus $\vDash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)^+$
- $(\neg\alpha)^+ = \neg\alpha^+ \equiv_{IH} \neg(\neg\alpha)$ dus $\vDash \neg(\neg\alpha) \leftrightarrow (\neg\alpha)^+$

bewijs niet te kennen voor het examen

Bewijs

Dualiteit: bewijs (2/2)

We gaan nu verder met het bewijs van de dualiteit. Stel $\vDash \varphi \leftrightarrow \psi$. Er geldt dan ook $\vDash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. Uit de hulpstelling volgt $\vDash \varphi^+ \leftrightarrow \psi^+$.

Als we in φ^+ (resp ψ^+) de atomen vervangen door hun negatie krijgen we een formule $(\varphi^+)'$ (resp $(\psi^+)'$) die op basis van de dubbele negatie logisch equivalent is met φ^d (resp ψ^d).

Uit substitutie volgt $\vDash (\varphi^+)' \leftrightarrow (\psi^+)'$ en dus ook $\vDash \varphi^d \leftrightarrow \psi^d$.

bewijs niet te kennen voor het examen

Bewijs

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Semantische tableaus: herinner

Een sequent is een rijtje van de vorm

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$$

met $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m$ formules.

Een waardering V heet een tegenvoorbeeld van een sequent $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$ indien $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$ en $V(\psi_1) = \dots = V(\psi_m) = 0$.

Gevolg: Een segment $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$ waarbij er i en j bestaan zodat $\varphi_i = \psi_j$ heeft geen tegenvoorbeelden.

Semantische tableaus: herinner

Door het toepassen van reductieregels verkrijgen we een boom. Als er geen reductieregel meer toegepast kan worden spreken we van een semantisch tableau.

Semantische tableaus: herinner

Een tak heet gesloten indien links en rechts in het sequent dezelfde formule optreedt.

Een tak heet open wanneer de tak niet gesloten is en er geen reductieregels meer toegepast kunnen worden. De tak heeft een tegenvoorbeeld: er is een waardering V die alle propositieletters langs links waar maakt en alle propositieletters langs rechts vals.

Een tableau heet gesloten indien alle takken gesloten zijn.

Een tableau heet open indien er minstens 1 tak open is.

Adequaatheidsstelling

Als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ formules zijn dan

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ desda er bestaat een gesloten tableau voor

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$$

Stelling

Hulpstellingen

Hulpstelling 1:

Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau. Dan geldt $\Phi \vDash \Psi$ (voor elke waardering V die alle formules in Φ waarmaakt is er minstens 1 formule in Ψ die waar is).

Hulpstelling 2:

Een open tableau heeft een tak τ die niet sluit. Zij V de waardering die alle propositieletters links op τ waar maakt en alle propositieletters rechts onwaar. Dan geldt voor elke formule φ: als φ links op de tak voorkomt, dan $V(\varphi) = 1$ en als φ rechts op de tak voorkomt, dan $V(\varphi) = 0$.

Adequaatheidsstelling: bewijs

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ desda er bestaat een gesloten tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$

Bewijs:

⇒ Stel uit het ongerijmde dat er geen gesloten tableau bestaat. Alle tableaus zijn dan open. Er bestaat altijd een tableau. Dit tableau heeft een open tak: er bestaat dus een waardering V die de propositieletters langs links op de tak waar maakt en de propositieletters langs rechts vals. Uit hulpstelling 2 volgt dan dat $V(\varphi_1) = \ldots = V(\varphi_n) = 1$ en $V(\psi) = 0$. Dit is in tegenspraak met $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

⇐ Dit is een speciaal geval van hulpstelling 1.

Bewijs

Hulpstelling 1: bewijs (1/3)

Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau. Dan geldt $\Phi \vDash \Psi$ (voor elke waardering V die alle formules in Φ waarmaakt is er minstens 1 formule in Ψ die waar is).

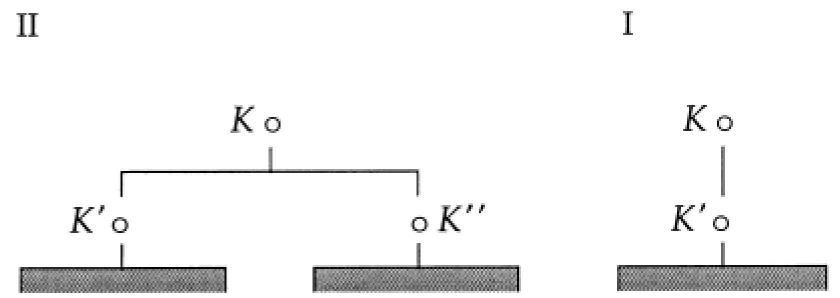
Bewijs:

We bewijzen dit via inductie op het aantal knopen.

Basisstap: Het tableau heeft 1 knoop. We hebben dus sluiting in het topsequent: er is een formule φ die zowel links en rechts in het topsequent voorkomt. Neem een waardering V die alle formules in Φ waarmaakt. Er volgt $V(\varphi) = 1$. Aangezien $\varphi \in \Psi$ volgt $\Phi \vDash \Psi$.

Inductiestap: Onderstel dat de eigenschap geldt voor een tableau met minder dan k >1 knopen (inductiehypothese). We tonen dat dat de eigenschap ook geldt voor een boom met k knopen.

Meerdere knopen ontstaan door het toepassen van ofwel een niet-splitsende reductieregel (geval 1) ofwel een splitsende reductieregel (geval 2).



Bewijs

Hulpstelling 1: bewijs (2/3)

Geval 1: bijvoorbeeld de $\neg L$ regel

$$\neg_L : \quad \begin{array}{c} \Phi, \neg\alpha \circ \Psi \\ | \\ \Phi \circ \alpha, \Psi \end{array}$$

We hebben een gesloten tableau en we willen tonen dat $\Phi, \neg\alpha \vDash \Psi$. Neem hiervoor een willekeurig waardering V die de formules in Φ en $\neg\alpha$ waarmaakt. We moeten tonen dat V minstens 1 formule in Ψ waarmaakt.

Uit de IH volgt $\Phi \vDash \Psi, \alpha$ (gesloten tableau met minder knopen). Aangezien V de formules in Φ waarmaakt, moet deze ofwel een formule Ψ waarmaken ofwel α waarmaken. Aangezien $V(\neg\alpha) = 1$ volgt $V(\alpha) = 0$. En dus dat V een formule in Ψ waarmaakt.

Andere regels van geval 1 volgen een zelfde bewijs.

Bewijs

Hulpstelling 1: bewijs (3/3)

Geval 2: bijvoorbeeld de $\wedge R$ regel

$$\wedge_R : \quad \dfrac{\Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi}{\Phi \circ \alpha, \Psi \qquad \Phi \circ \beta, \Psi}$$

We hebben een gesloten tableau en willen tonen dat $\Phi \vDash \alpha \wedge \beta, \Psi$. Neem hiervoor een willekeurig waardering V die de formules in Φ waarmaakt. We moeten tonen dat V ofwel een formule in Ψ waarmaakt, ofwel $\alpha \wedge \beta$ waarmaakt.

Uit de IH volgt $\Phi \vDash \alpha, \Psi$ en $\Phi \vDash \beta, \Psi$ (gesloten tableau met minder knopen). Aangezien V de formules in Φ waarmaakt, onderscheiden we twee gevallen:

- V maakt een formule waar in Ψ en het bewijs is klaar.
- V maakt geen enkele formule in Ψ waar. Uit $\Phi \vDash \alpha, \Psi$ volgt dan $V(\alpha) = 1$ en uit $\Phi \vDash \beta, \Psi$ volgt dan $V(\beta) = 1$. En dus ook dan $V(\alpha \wedge \beta) = 1$. En het bewijs is klaar.

Andere regels van geval 2 volgen een zelfde bewijs.

Bewijs

Hulpstelling 2: bewijs (1/2)

Een open tableau heeft een tak τ die niet sluit. Zij V de waardering die alle propositieletters links op τ waar maakt en alle propositieletters rechts onwaar. Dan geldt voor elke formule φ: als φ links op de tak voorkomt, dan $V(\varphi) = 1$ en als φ rechts op de tak voorkomt, dan $V(\varphi) = 0$.

Bewijs:

We bewijzen dit via formule inductie.

Basisstap: Voor propositieletters geldt de bewering automatisch.

Inductiestap: Stel dat de bewering geldt voor formules α en β (inductiehypothese). We tonen enkel 2 gevallen, de andere lopen gelijkaardig.

Bewijs

Hulpstelling 2: bewijs (2/2)

Geval 1: Stel $\neg\alpha$ komt links op de tak voor. Eronder moet ergens de $\neg L$ regel toegepast zijn waardoor α rechts voorkomt. Volgens de IH volgt $V(\alpha) = 0$ en dus $V(\neg\alpha) = 1$.

$$\neg_L: \quad \Phi, \neg\alpha \circ \Psi$$
$$\Phi \circ \alpha, \Psi$$

Geval 2: Stel $\alpha \wedge \beta$ komt rechts op de tak voor. Er onder moet ergens de $\wedge R$ regel toegepast zijn waardoor een splitsing ontstaat.

$$\wedge_R: \quad \Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi$$
$$\Phi \circ \alpha, \Psi \qquad \Phi \circ \beta, \Psi$$

- Stel dat de tak de linkerkant volgt. Volgens de IH volgt $V(\alpha) = 0$ en dus ook $V(\alpha \wedge \beta) = 0$. Het bewijs is klaar.
- Stel dat de tak de rechterkant volgt. Volgens de IH volgt $V(\beta) = 0$ en dus ook $V(\alpha \wedge \beta) = 0$. Het bewijs is klaar.

Bewijs

Gevolg

Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau, dan sluiten alle tableaus voor $\Phi \circ \Psi$

Bewijs:

Uit hulpstelling 1 volgt $\Phi \vDash \Psi$ (voor elke waardering V die alle formules in Φ waarmaakt is er minstens 1 formule in Ψ die waar is). Stel nu dat er een tableau bestaat dat niet sluit. Dit tableau heeft een open tak. Uit hulpstelling 2 volgt dat er een waardering bestaat die alle formules langs links waar maar en alle formules langs rechts vals. In het bijzonder maakt het alle formules uit Φ waar en alle formules uit Ψ vals. Dit is een tegenstrijdigheid.

Bewijs

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Syntactisch consistent: herinner

Een verzameling formules Γ heet (syntactisch) consistent wanneer er geen formule φ is waarvoor zowel $\Gamma \vdash \varphi$ als $\Gamma \vdash \neg\varphi$ geldt.

Stelling 1:

Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$.

Stelling 2:

$\Gamma \nvdash \varphi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent.

Syntactisch consistent: stelling 1

Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$.

$\Rightarrow$

Gegeven: Γ is consistent. Per definitie betekent dit dat er geen enkel formule φ bestaat zodat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Nemen we nu een willekeurige formule α, dan geldt dat ofwel $\Gamma \nvdash \alpha$ of $\Gamma \nvdash \neg\alpha$.

Als $\Gamma \nvdash \alpha$ dan is α de gezochte formule.

Als $\Gamma \nvdash \neg\alpha$ dan is $\neg\alpha$ de gezochte formule.

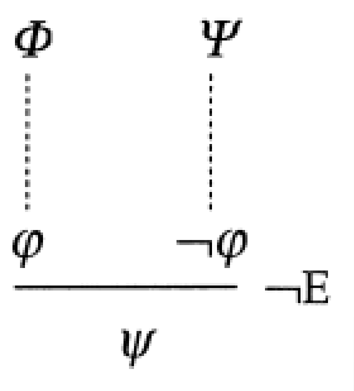
Bewijs

Syntactisch consistent: stelling 1

Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$.

$\Leftarrow$

We bewijzen dit via contrapositie. Gegeven: Γ is inconsistent. Er bestaat dan per definitie een formule α zodat $\Gamma \vdash \alpha$ en $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Volgens de $\neg$ Eliminatieregel kan je dan elke formule afleiden uit Γ. Er bestaat dus geen enkele formule φ zodat $\Gamma \nvdash \varphi$.



Bewijs

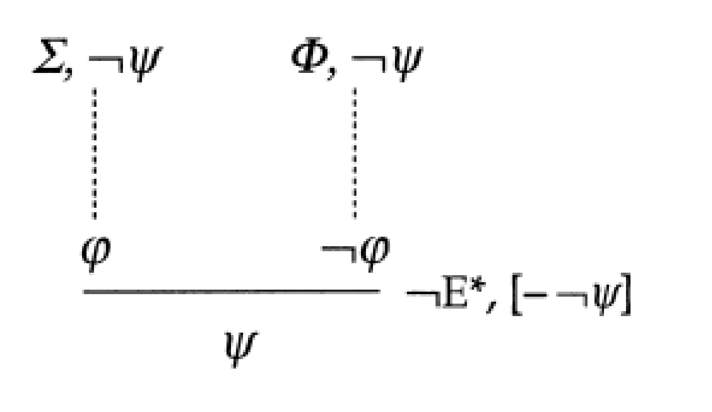
ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Syntactisch consistent: stelling 2

$\Gamma \nvdash \varphi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent

$\Rightarrow$

We gebruiken contrapositie. Gegeven: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent. Per definitie betekent dit dat er een formule α bestaat zodat $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \alpha$ en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\alpha$. De $\neg E^*$ regel geeft dan $\Gamma \vdash \varphi$.



Bewijs

Syntactisch consistent: stelling 2

$\Gamma \nvdash \varphi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent

$\Leftarrow$

We gebruiken contrapositie. Gegeven: $\Gamma \vdash \varphi$. Onmiddellijk volgt $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$. Maar we hebben ook $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$. Uit de definitie volgt $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent.

Bewijs

Metatheorie

- Formule-inductie
- Functionele volledigheid
- Dualiteit
- Adequaatheidsstelling
- Stellingen over syntactische consistentie
- Volledigheidsstelling

Volledigheidsstelling

Als Σ een verzameling formules is en φ een formule, dan geldt

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \vDash \varphi$$

Merk op: de tautologieën zijn de stellingen in het bewijssysteem van natuurlijke deductie

Stelling

Volledigheidsstelling: bewijs

Bewijs:

$\Rightarrow$ $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \vDash \varphi$ correctheid/soundness

idee: toon aan dat alle afleidingsregels om te zetten zijn in een geldig gevolg (via inductie op aantal knopen in een bewijsboom)

$\Leftarrow$ $\Sigma \vdash \varphi \Leftarrow \Sigma \vDash \varphi$ volledigheid/completeness

bewijs gebaseerd op maximal consistente verzamelingen

bewijs niet te kennen voor het examen

Bewijs