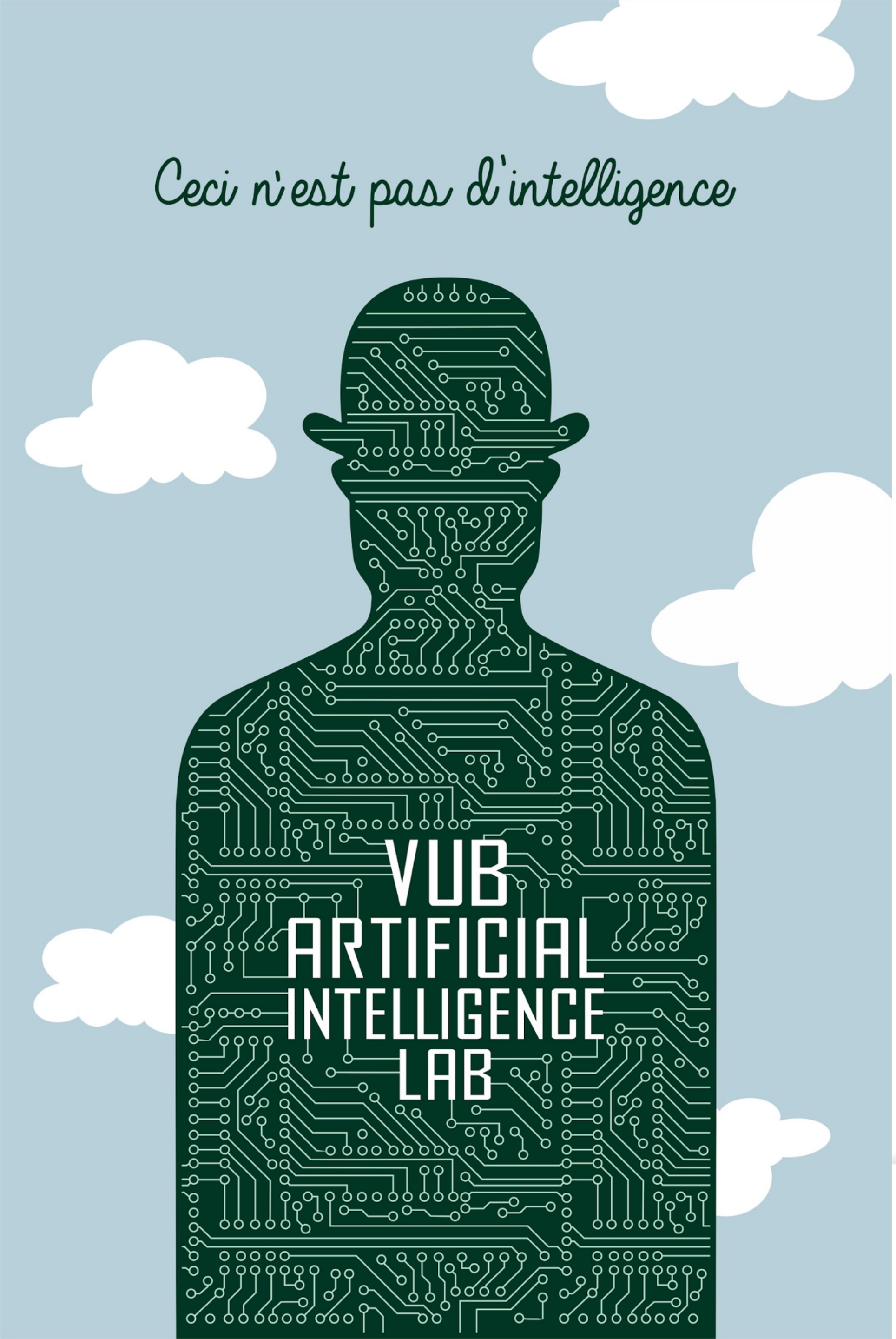


Logica en formele systemen

Predikaatlogica

Geldig gevolg

Prof. dr. Marjon Blondeel

Academiejaar 2024-2025

VUB ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Inhoud predikaatlogica

- Inleiding
- Syntaxis
- Semantiek
- **Geldig gevolg**
- Afleidingen
- Metatheorie

Herinner: definitie geldig gevolg

Laat Σ een verzameling formules zijn en ψ een formule. Dan zeggen we dat ψ een geldig gevolg is van Σ (notatie $\Sigma \vDash \psi$) indien voor elk model M en elke bedeling b geldt

als voor elke $\varphi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\varphi) = 1$ dan geldt ook $V_{M,b}(\psi) = 1$

Propositielogica vs predikaatlogica

We willen semantische tableaus gebruiken om geldig gevolg aan te tonen of te weerleggen. Idee: systematisch zoeken naar een tegenvoorbeeld voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$.

Wat ontbreken we?

- reductieregels voor ∀ en ∃
- construeren van een domein D voor het tegenvoorbeeld
- bijhouden interpretatiefunctie I en bedeling b

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

Beperkingen cursus

We beperken ons in de cursus tot

- een taal zonder functieletters
- gevolgtrekkingen zonder individuele constanten en zonder vrije variabelen (anders te ingewikkeld en er is ook een theoretische reden)
  - Dus we moeten geen bedeling bijhouden.

Inleidend voorbeeld (1/4)

Geldige gevolgtrekking:

$$\forall x\,(Ax \to Bx), \forall x\,(Bx \to Cx)\ /\ \forall x\,(Ax \to Cx)$$

We starten met een topsequent

$$\forall x\,(Ax \to Bx), \forall x(Bx \to Cx) \circ \forall x\,(Ax \to Cx)$$

Tegenvoorbeeld: formules aan de linkerkant waar, de formules aan de rechterkant onwaar. De rechterkant is simpel. Merk ook op dat we nog geen domein hebben.

Inleidend voorbeeld (2/4)

$\forall x\,(Ax \rightarrow Cx)$ is onwaar als we een object in het domein hebben waarvoor $Ax \rightarrow Cx$ onwaar is. Laten we dit object invoeren.

$$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx) \circ Ad_1 \rightarrow Cd_1, D = \{d_1\}$$

We kunnen nu regel van de implicatie rechts toepassen:

$$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx), Ad_1 \circ Cd_1, D = \{d_1\}$$

Inleidend voorbeeld (3/4)

Nu weten we ook dat de linkerkant de “voor alle” formules waar moeten zijn voor d_1:

$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx), Ad_1 \rightarrow Bd_1, Bd_1 \rightarrow Cd_1, Ad_1 \circ Cd_1, D = \{d_1\}$

We kunnen nu puur propositioneel verder werken. Het reduceren van $Ad_1 \rightarrow Bd_1$ geeft twee takken:

$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx), Bd_1, Bd_1 \rightarrow Cd_1, Ad_1 \circ Cd_1, D = \{d_1\}$

$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \forall x(Bx \rightarrow Cx), Bd_1 \rightarrow Cd_1, Ad_1 \circ Ad_1, Cd_1, D = \{d_1\}$

de laatste tak sluit

Inleidend voorbeeld (4/4)

We onderzoeken nog

$\forall x\ (Ax \to Bx), \forall x(Bx \to Cx), Bd_1, Bd_1 \to Cd_1, Ad_1 \circ Cd_1, D = \{d_1\}$

Het reduceren van $Bd_1 \to Cd_1$ geeft wederom twee takken:

$\forall x\ (Ax \to Bx), \forall x(Bx \to Cx), Bd_1, Cd_1, Ad_1 \circ Cd_1, D = \{d_1\}$

$\forall x\ (Ax \to Bx), \forall x(Bx \to Cx), Bd_1, Ad_1 \circ Bd_1, Cd_1, D = \{d_1\}$

die beiden sluiten

Reductieregels ∀

$\forall_R$: $\Phi \circ \forall x\, \varphi, \Psi$

$$\Phi \circ [d_{k+1}/x]\varphi, \Psi$$ voor een nieuwe d_{k+1}

$\forall_L$: $\Phi, \forall x\, \varphi \circ \Psi$

$$\Phi, [d/x]\varphi \circ \Psi$$ voor alle $d \in D$ hier aanwezig

vereenvoudigde notatie, ∀ links is nooit uitgewerkt (best laten staan)

Reductieregels ∀: voorbeeld

Een tableau voor $\forall x\,(Ax \to\ \forall y\, By)/\forall x\, \forall y\,(Ax \to By)$

$$
\begin{array}{llll}
 & \forall x\,(Ax \to \forall y\, By) \circ \forall x\, \forall y\,(Ax \to By) & & \\
\forall_R & \circ\ \forall y\,(Ad_1 \to By) & & D = \{d_1\} \\
\forall_L & (Ad_1 \to \forall y\, By) \circ & & \\
\forall_R & \circ\ (Ad_1 \to Bd_2) & & D = \{d_1, d_2\} \\
\forall_L & (Ad_2 \to \forall y\, By) \circ & & \\
 & Ad_1 \circ Bd_2 & & \\
 & \forall y\, By \circ & \circ\ Ad_1 & \\
 & & = & \\
\forall_L & Bd_1, Bd_2 \circ & & \\
 & = & &
\end{array}
$$

Reductieregels ∃

$\exists_L$: $$\Phi, \exists x\, \varphi \circ \Psi$$
$$|$$
$$\Phi, [d_{k+1}/x]\varphi \circ \Psi$$ voor een nieuwe d_{k+1} in het domein

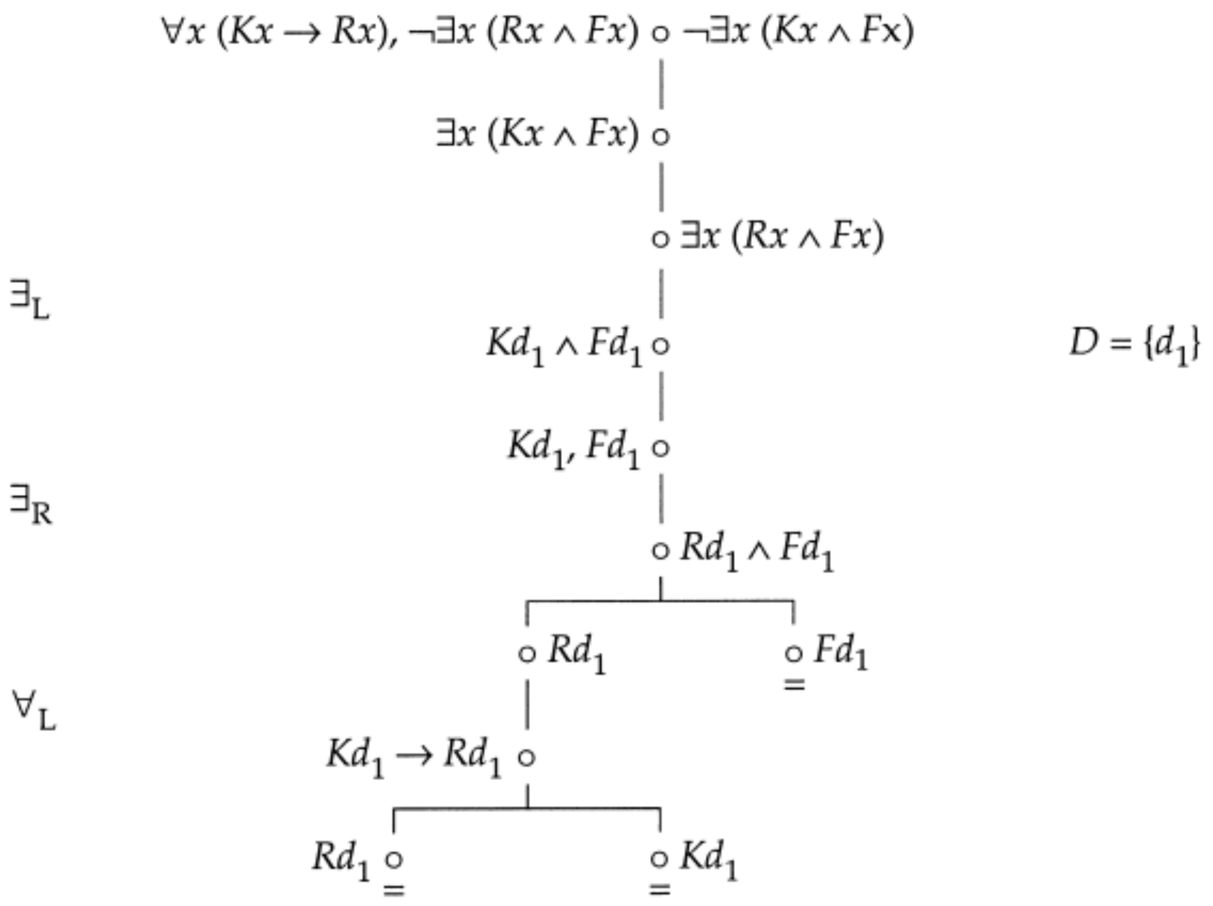
$\exists_R$: $$\Phi \circ \exists x\, \varphi, \Psi$$
$$|$$
$$\Phi \circ [d/x]\varphi, \Psi$$ voor alle $d \in D$ hier aanwezig

vereenvoudigde notatie, ∃ rechts is nooit uitgewerkt (best laten staan)

ARTIFICIAL INTELLIGENCE RESEARCH GROUP

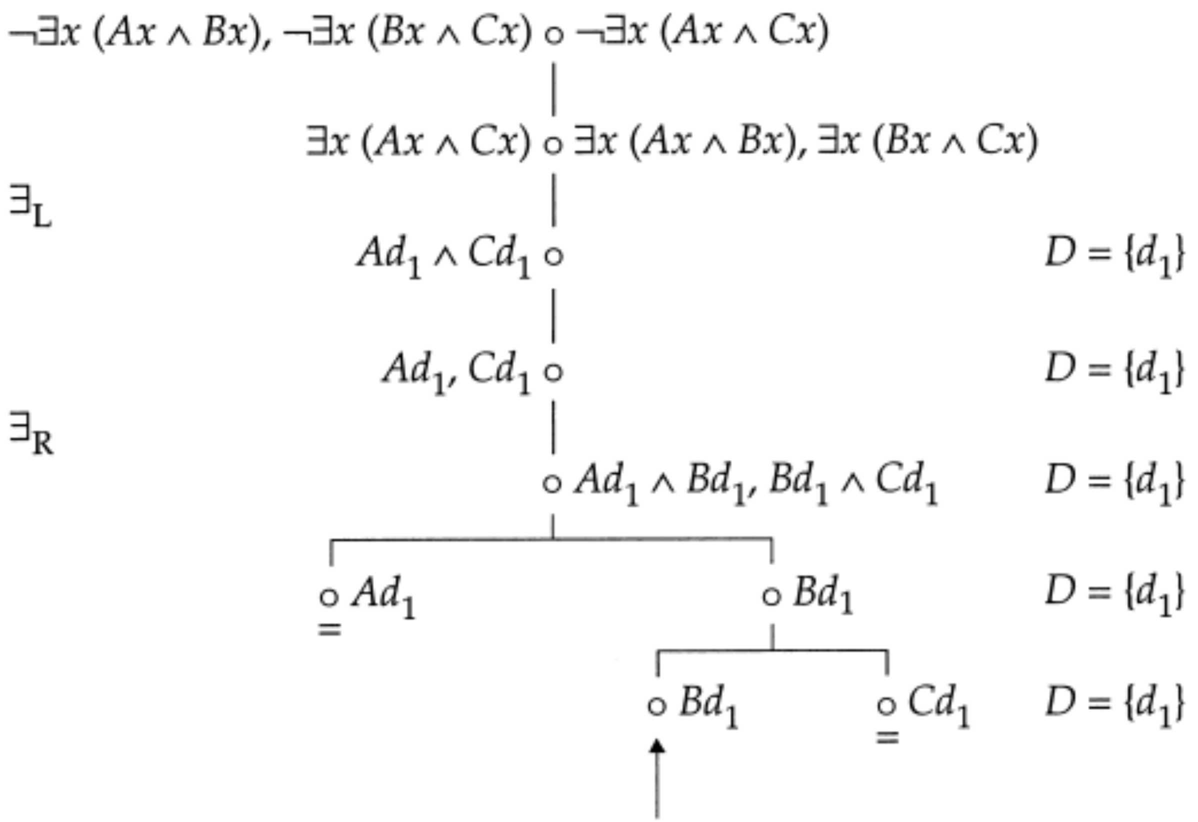
Reductieregels ∃: voorbeeld

Een tableau voor $\forall x\,(Kx \rightarrow Rx), \neg\exists x\,(Rx \wedge Fx) / \neg\exists x(Kx \wedge Fx)$



Reductieregels ∃: voorbeeld (1/3)

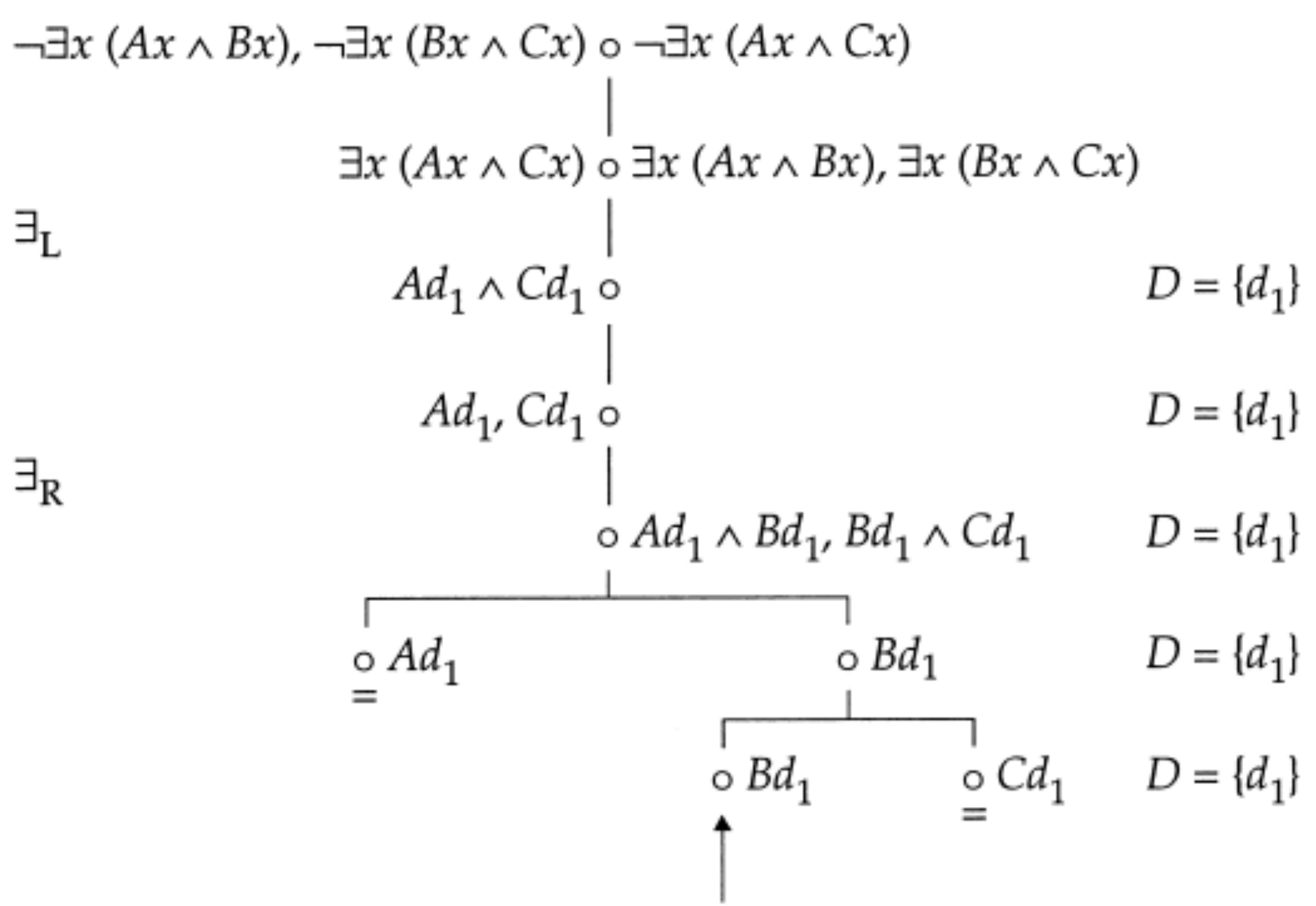
Een open tableau voor $\neg\exists x\,(Ax \land Bx), \neg\exists x\,(Bx \land Cx) / \neg\exists x(Ax \land Cx)$



Reductieregels ∃: voorbeeld (2/3)

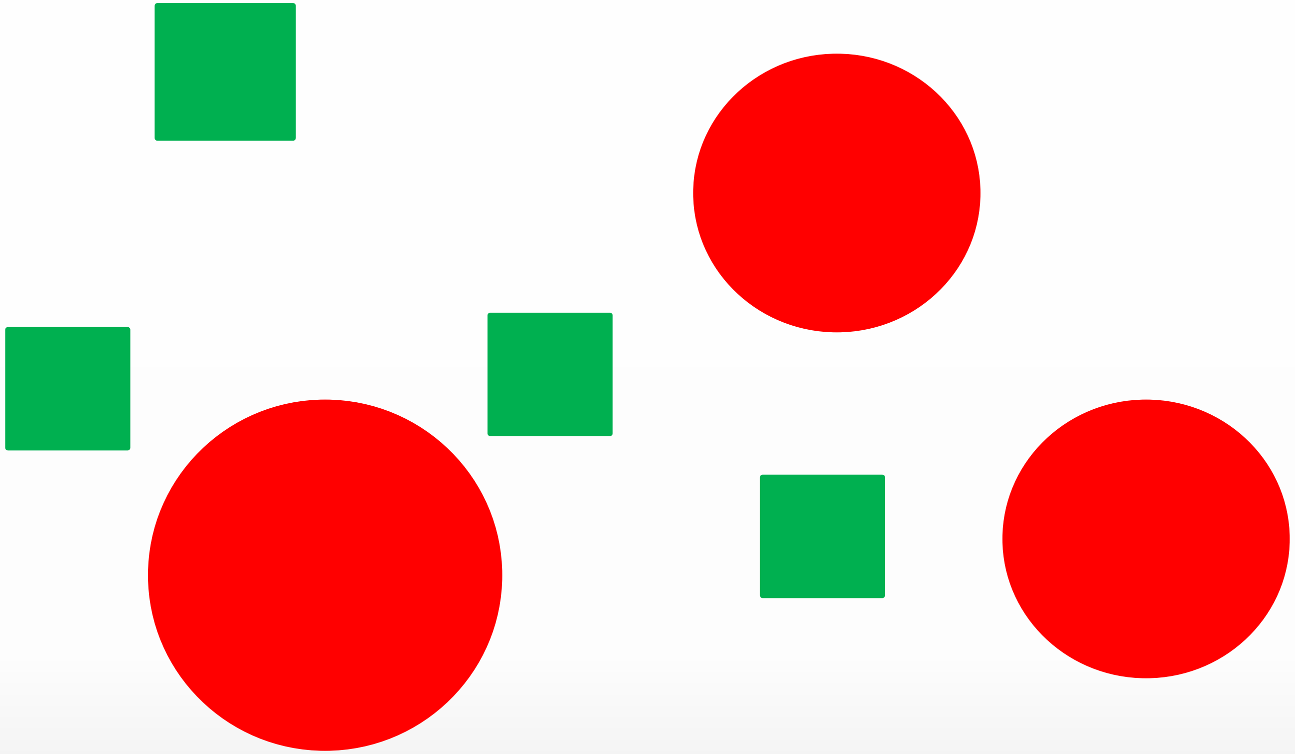
Tegenvoorbeeld:

model met 1 element $d_1 \in D$ waarin Ad_1 en Cd_1 waar zijn en waarin Bd_1 onwaar is



Reductieregels ∃: voorbeeld (3/3)

$\neg\exists x\,(Ax \wedge Bx), \neg\exists x\,(Bx \wedge Cx) / \neg\exists x(Ax \wedge Cx)$



Concreet tegenvoorbeeld

$I(A)$ = is vierkant

$I(B)$ = is rood

$I(C)$ = is klein

Domein: {rode grote cirkels, kleine groene vierkanten}

d_1 klein groen vierkant

Wat nu? (1/3)

$$\forall y \exists x\, Rxy / \exists x\, \forall y Rxy$$

We kunnen geen regel toepassen omdat we niets in het domein hebben. Echter, lege domeinen beschouwen we niet dus we nemen er eentje willekeurig.

Wat nu? (2/3)

We verkrijgen een oneindig tableau!

$$
\begin{array}{lcl}
 & \forall y\, \exists x\, Rxy \circ \exists x\, \forall y\, Rxy & D = \{d_1\} \\
\forall_L, \exists_R & | & \\
 & \exists x\, Rxd_1 \circ \forall y\, Rd_1y & D = \{d_1\} \\
\exists_L & | & \\
 & Rd_2d_1 \circ \forall y\, Rd_1y & D = \{d_1, d_2\} \\
\forall_R & | & \\
 & Rd_2d_1 \circ Rd_1d_3 & D = \{d_1, d_2, d_3\} \\
\forall_L, \exists_R & | & \\
 & Rd_2d_1, \exists x\, Rxd_2, \exists x\, Rxd_3 \circ Rd_1d_3, \forall y\, Rd_2y, \forall y\, Rd_3y & D = \{d_1, d_2, d_3\}
\end{array}
$$

Wat nu? (3/3)

Oneindige tableaus leveren een tegenvoorbeeld op (geen bewijs te kennen).

$$\forall y \exists x\, Rxy / \exists x\, \forall y Rxy$$

tegenvoorbeeld: domein $\mathbb{N}$ met $I(R) = >$

linkerkant is dan waar, maar rechterkant niet

Tegenvoorbeelden van oneindige tableaus hebben een oneindig domein (geen bewijs te kennen).

Samenvatting

- Het tableau sluit, de gevolgtrekking is dan geldig
- Het tableau is eindig met een open tak, de gevolgtrekking is dan niet geldig.
- Het tableau sluit niet want het blijft oneindig doorlopen, de gevolgtrekking is dan niet geldig.

Stelling van Church (1936)

De predikaatlogica is niet beslisbaar.

Een gevolg hiervan: er bestaat geen algoritme om voor een willekeurige formule te bepalen of deze al dan niet een geldig gevolg is van een formuleverzameling. Bij propositielogica is dit wel het geval!

Sommige fragmenten zijn wel beslisbaar:

zonder bewijs

De adequaatheidsstelling geldt voor een taal zonder functiesymbolen, individuele constanten en zonder vrije variabelen.