Raíces de polinomios

Métodos Numéricos

Prof. Juan Pablo Concha y Eduardo Uribe

Conferencia 9

Conferencia 9

1. Polinomios
2. Sucesiones de Sturm
3. Esquema de Horner

Aspectos básicos

Definición

Un polinomio de grado n es una función que tiene la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde los a_i son los coeficientes de P y $a_n \neq 0$.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos o reales posee al menos una raíz (eventualmente compleja).

Consecuencias

- Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene n raíces (algunas eventualmente complejas) si se suman las multiplicidades.
- Si dos polinomios de grado n coinciden en más de n puntos entonces son idénticos.

Algoritmo de Euclides

Definición(División euclídea de polinomios)

Dados los polinomios $P(x)$ de grado n y $Q(x)$ de grado m con $n \geq m$ y $Q(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

y grado$(R(x)) <$ grado $(Q(x))$.

Teorema

Si $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$, entonces $\mathrm{m.c.d}(P, Q) = \mathrm{m.c.d.}(Q, R)$.

La proposición anterior motiva el siguiente método para el cálculo del máximo común divisor, conocido como Algoritmo de Euclides:

Algoritmo de Euclides

Dados P, Q, con $grado(P) \geq grado(Q)$, hacemos la división euclídea

$$P = C_1 Q + R_1;$$

si R_1 es no nulo, volvemos a dividir:

$$Q = C_2 R_1 + R_2;$$

de nuevo, si R_2 es no nulo, volvemos a dividir $R_1 = C_3 R_2 + R_3$, y reiteramos el proceso hasta obtener un resto $R_{k+1} = 0$. Como $R_{k-1} = C_{k+1} R_k$, en virtud de la proposición anterior tenemos que

$$m.c.d.(P, Q) = m.c.d.(Q, R_1) = m.c.d.(R_1, R_2) = \ldots = m.c.d.(R_{k-1}, R_k) = R_k$$

es decir, que el **máximo común divisor** de P y Q es el último resto no nulo obtenido en el proceso anterior.

Ejemplo: Calcule el $\mathrm{m.c.d.}$ de

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ y } Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$$

Al hacer las divisiones se tiene que:

- $x^4+4x^3+6x^2+4x+1 = (x^3-x^2-5x-3)(x+7)+16x^2+32x+16$
- $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x - 3) + 0$

Con lo que concluimos que el $\mathrm{m.c.d}(P, Q) = x^2 + 2x + 1$.

Observación

Si calculamos el $\mathrm{m.c.d}$ entre $P(x)$ y $P'(x)$ podemos eliminar las raíces repetidas de la siguiente manera:

$$D(x) = \frac{P(x)}{\mathrm{m.c.d}(P(x), P'(x))}$$

donde $D(x)$ contiene solo la raíces simples de P

Cota de raíces de polinomio

Sea $P(x)$ polinomio de grado n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, las raíces $\bar{x}$ de $P(x)$, cumplen que

$$|\bar{x}| < 1 + \frac{\text{máx}\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}}{|a_n|}$$

Regla de Descartes

Sea R el número de raíces positivas de $P(x)$ y S el número de cambios de signo de los coeficientes no nulos de $P(x)$ entonces,

$R \leq S$ y R es par(impar) si S es par(impar)

En el caso de las raíces negativas se repite el análisis anterior, pero usando el polinomio $P(-x)$.

Ejemplo

Consideremos el polinomio

$$p(x) = x^{11} + 2x^{10} - 5x^9 + 4x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 10x - 7$$

La variación de signos de los coeficientes de $p(x)$ es 5. Por otro lado,

$$p(-x) = -x^{11} + 2x^{10} + 5x^9 + 4x^4 - 7x^3 - 5x^2 - 10x - 7$$

tiene 2 variaciones de signos.

Luego, podemos concluir:

- La cantidad de ceros positivos de p es uno, tres o cinco.
- La cantidad de ceros negativos de p es cero o dos.
- p tiene al menos cuatro raíces complejas.

Sucesiones de Sturm

La sucesión $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ es una sucesión de Sturm en $[a,\ b]$ si, f_0 presenta sólo raíces simples en $[a, b]$, f_m no se anula en $[a, b]$ y la Construcción de la sucesión a partir de un polinomio $p(x)$ sigue de la siguiente forma

- Sea $f_0 = p(x)$,
- $f_1 = p'(x)$,
- $f_2 = -resto(f_0/f_1)$,...,
- $f_{j+1} = -resto(f_{j-1}/f_j),\ j = 2, 3, \ldots, m-1$

Observaciones

El proceso tiene un término, puesto que el grado de los polinomios es cada vez menor. Si f_m es constante no nula, entonces la sucesión obtenida es de Sturm.

El número de raíces reales de $p(x)$ en $[a, b]$ está dado por la diferencia entre el número de cambios de signo en

$$\{f_0(a), f_1(a), \ldots, f_m(a)\}$$

y el número de cambios de signos en

$$\{f_0(b), f_1(b), \ldots, f_m(b)\}$$

Siempre que $f_0(a) \cdot f(b)$ no sea cero.

Ejemplo: Ubique las raíces de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

Por la regla de signo de Descartes podemos observar:

1. No tiene raíces reales negativas.
2. Tiene 1 o 3 raíces reales positivas.

Además,

$$\max\{1/1, 2/1, 3/1, 1/1\} = 3 \Rightarrow |r| < 1 + 3 = 4$$

Con lo que concluimos que las raíces deben estar entre $[0, 4]$

Construyamos la sucesión de Sturm

- $f_0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
- $f_1 = 3x^2 - 4x + 3$, Observemos que

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\right)(3x^2 - 4x + 3) + \frac{10}{9}x - \frac{1}{3}$$

- $f_2 = -\frac{10}{9}x + \frac{1}{3}$, Observemos que

$$3x^2 - 4x + 3 = \left(-\frac{10}{9}x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{27}{10}x + \frac{274}{100}\right) + \frac{207}{100}$$

- $f_3 = -\frac{207}{100}$

Así la sucesión es:

$$\left\{x^3 - 2x^2 + 3x - 1,\ 3x^2 - 4x + 3,\ -\frac{10}{9}x + \frac{1}{3},\ -\frac{207}{100}\right\}$$

Determinemos el número de raíces entre $[0, 4]$

	-4	0	1	4	6
$x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-\frac{10}{9}x + \frac{1}{3}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-\frac{207}{100}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
Variaciones	2	2	1	1	1

Entonces, concluimos que entre $[0, 1]$ tiene que haber una raíz simple.

Ejemplo 2: Ubique las raíces de $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

Por la regla de signo de Descartes podemos observar:

1. Tiene 1 raíz real positiva.
2. Tiene 1 o 3 raíces reales negativas.

Además,

$$\max\{1/1, 2/1, 3/1, 4/1.1/1\} = 4 \Rightarrow |r| < 1 + 4 = 5$$

Con lo que concluimos que las raíces deben estar entre $[-5, 5]$

Construyamos la sucesión de Sturm

- $f_0 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$
- $f_1 = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$
- $f_2 = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$
- $f_3 = \frac{80}{9}x + \frac{40}{9}$
- $f_4 = \frac{1}{16}$

Determinemos el número de raíces entre $[-5, 5]$

	-5	-3	-2	-1	0	1	5
$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$	$-$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$\frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{80}{9}x + \frac{40}{9}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{1}{16}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Variaciones	4	4	3	3	1	1	0

Entonces, concluimos que entre $[-3, -2]$ y $[1, 5]$ tienen que haber raíces simples. Ahora evaluando $f(-0.5) > 0$ por lo que existe un raíz simple entre $(-1,\ -0.5)$ y otra entre $(-0.5,\ 0)$

Evaluando polinomios

Teorema (Método de Horner)

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si defininimos

$$b_n = a_n; \quad b_k = a_k + b_{k+1} x_0, k = n-1, \ldots, 0$$

entonces $P(x_0) = b_0$. Además se tiene que

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$$

si $Q(x)$ es el polinomio $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$

Observación

Si $P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$, entonces $P'(x_0) = Q(x_0)$
El cálculo de P en x_0 usando el esquema de Horner puede simplificar el método de Newton!

Ejemplo de método de Horner

Evaluación

Calcular $P(-2)$ si $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	2	0	-3	3	-4
-2		-4	8	-10	14
x_0	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
	2	-4	5	-7	**10**
-2		-4	16	-42	
x_0	c_4	c_3	c_2	c_1	
	2	-8	21	**-49**	

Luego $P(-2) = 10$ y $P'(-2) = -49$. Método de Newton:

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{10}{-49} \approx -1.796$$

Ejercicios

1) Eliminar las raíces múltiples en la ecuación

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

Resolver, exactamente, la ecuación resultante y comprobar la multiplicidad de cada raíz en la ecuación original.

2) Dada la ecuación $8x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = 0$, acotar y separar sus raíces reales usando sucesiones de Sturm.

3) Aplicar el método de Sturm para separar las raíces de la ecuación

$$2x^6 - 6x^5 + x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$$

y obtener la mayor de sus raíces usando el método de Horner.