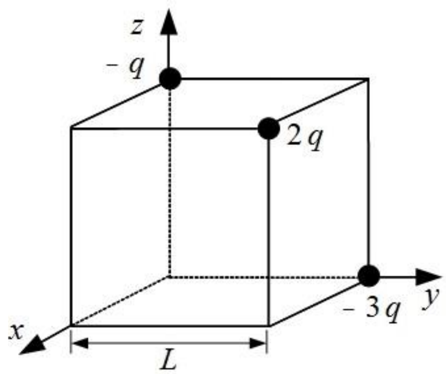
Campo Eléctrico Distribuciones Discretas, Interacción Campo Carga, Densidad de Carga y Campo Eléctrico de una Distribución Continua

Material de Apoyo para el Curso de Física II (ICF-190)

1. CAMPO ELÉCTRICO DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE CARGA

PROBLEMA RESUELTO 1.1

En la figura se muestra tres cargas puntuales en los vértices de un cubo de lado L. Calcule el campo eléctrico neto en el centro del cubo.



Solución

Los vectores posición del centro del cubo y de cada una de las cargas son

$$\vec{r} = \frac{L}{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$\vec{r}_1 = L\hat{k}$$
$$\vec{r}_2 = L(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$\vec{r}_3 = L\hat{j}$$

Usando la expresión

$$\vec{E} = \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3},$$

El campo eléctrico debido a cada carga, para la carga 1 es

$$\vec{E}_1 = \frac{kq\frac{L}{2}\left(-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)}{\frac{3}{8}\sqrt{3}L^3} = \frac{4kq}{3\sqrt{3}L^2}(-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$$

para la carga 2

$$\vec{E}_2 = \frac{k(2q)\frac{L}{2}\left(-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)}{\frac{3}{8}\sqrt{3}L^3} = \frac{8kq}{3\sqrt{3}L^2}(-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$$

y para la carga 3

$$\vec{E}_3 = \frac{k(3q)\frac{L}{2}\left(-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)}{\frac{3}{8}\sqrt{3}L^3} = \frac{4kq}{\sqrt{3}L^2}(-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\,.$$

El campo en el punto pedido es:

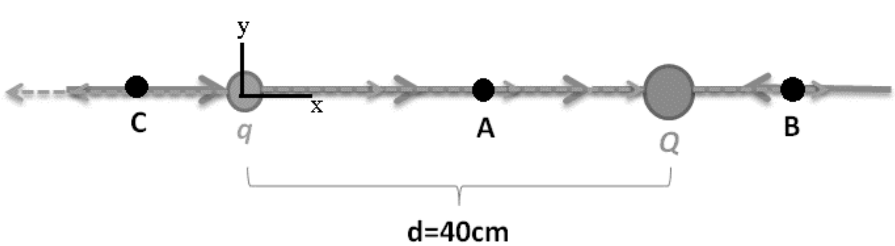
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_1(\vec{r})+\vec{E}_2(\vec{r})+\vec{E}_3(\vec{r})\\ &= \frac{4kq}{\sqrt{3}L^2}\left[\left(-\frac{1}{3}\hat{i}-\frac{1}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}\right)+\left(-\frac{2}{3}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k}\right)+\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)\right]\end{aligned}$$

simplificando

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{8kq}{3\sqrt{3}L^2}\left(3\hat{i}+2\hat{k}\right).$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1.1

Dos cargas $q = +12\mu C$ y $Q = -18\mu C$ están separadas 40 cm tal como se muestra en la figura. Determinar en qué punto del espacio el campo es nulo.



Indicaciones para la solución

La suma de dos vectores es nula si tienen igual magnitud y dirección, pero con sentido contrario, es decir, forman un ángulo de 180° entre ellos. Esto puede ocurrir solo en la línea que une a las dos cargas. Las líneas de campo eléctrico salen de cargas positivas y entran a cargas negativas. A continuación, analizaremos los tres casos posibles.

Punto A: En el punto A, el campo eléctrico no puede ser nulo, ya que las líneas de campo eléctrico tienen la misma dirección y sentido por lo tanto se suman.
Punto B: En el punto B, si bien es cierto las líneas de campo tienen la misma dirección pero sentido contrario, la carga Q es mayor que la carga q y la distancia de Q a B es menor que la distancia de q a B, por lo tanto el campo generado por la carga Q en el punto B será siempre mayor que el campo generado por q, luego, el campo eléctrico jamás se anulará en dicha región.
Punto C: En el punto C las líneas de campo tienen la misma dirección pero sentido contrario, al estar más cerca de la carga q los campos van a ser iguales en modulo y el campo total se anula, así

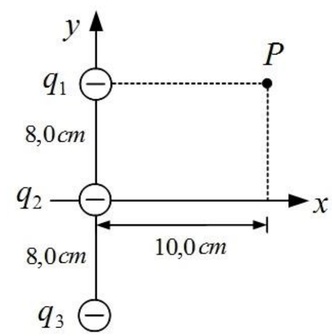
$$|E_{qc}| = |E_{qc}|,$$

$$\Rightarrow \frac{k(12x10^{-6})}{L^2} = \frac{k(18x10^{-6})}{(0{,}4 + L)^2},$$

de donde se obtiene que $L = 1{,}78\ m$. Concluimos que el campo se anulará a 1,78m a la izquierda de la carga positiva.

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1.2

Tres cargas puntuales negativas están sobre una línea, como se ilustra en la figura. Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce este sistema de cargas en el punto *P*, cuyas coordenadas son *x* = 10 *cm* e *y* = 0.8 *cm*. Las cargas de las partículas son $q_1 = q_3 = -6nC$ y $q_2 = -10nC$.



Indicaciones para la solución

En la figura vemos que los vectores posición de cada carga y del punto *P* son respectivamente

$$\vec{r}_1 = 0.080\,\hat{j}, \quad \vec{r}_2 = \vec{0}, \quad \vec{r}_3 = -0.080\,\hat{j}, \quad \vec{r}_P = 0.100\hat{i} + 0.080\,\hat{j}\,.$$

El campo eléctrico debido a cada partícula se determina aplicando para cada una de las cargas

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_P - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_P - \vec{r}_i), \qquad i = 1, 2, 3$$

lo que da

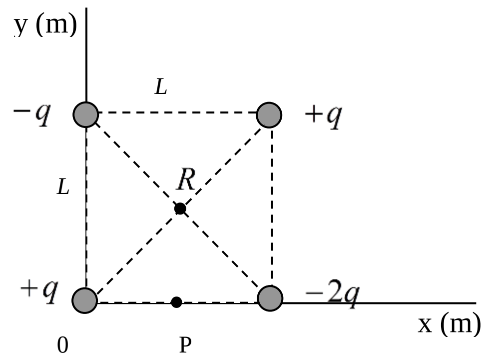
$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -5400\hat{i}\ N/C \\ \vec{E}_2 &= -\left(4285\hat{i} + 3428\,\hat{j}\right) N/C\,. \\ \vec{E}_3 &= -\left(804\hat{i} + 1286\,\hat{j}\right) N/C \end{aligned}$$

Finalmente, el campo neto en *P* es

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}_P) = -\left(10489\hat{i} + 4714\,\hat{j}\right) N/C$$

PROBLEMA DESAFIO 1.1

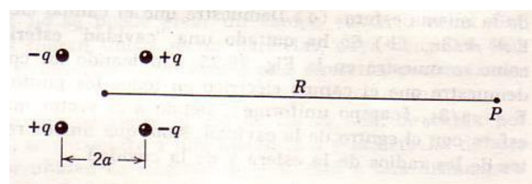
Cuatro partículas cargadas se ubican en los vértices de un cuadrado de lado $L = 0.5\ m$ como muestra la figura donde $|q| = 4.0\ \mu C$. Calcule el campo eléctrico en P y en R.



PROBLEMA DESAFIO 1.2

Un tipo *"cuadrupolo eléctrico"* está formado por cuatro cargas ubicadas en los vértices de un cuadrado de lado $2a$. El punto P se encuentra a una distancia R del centro de cuadrupolo en una línea paralela a dos lados del cuadrado, como se muestra en la figura. Demostrar que para una distancia $R >> a$ la magnitud del campo eléctrico en P aproximadamente es

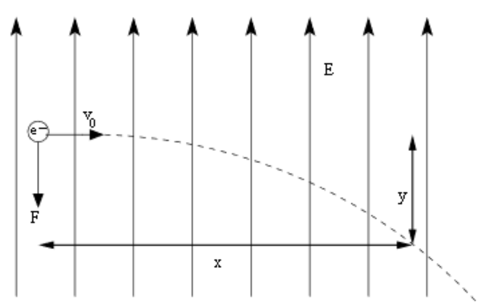
$$E = \frac{3kq(2qa^2)}{R^4}$$



2. INTERACCIÓN CAMPO ELÉCTRICO CARGA

PROBLEMA RESUELTO 2.1

Un electrón con una velocidad de $\vec{v} = 5 \cdot 10^6\ \hat{\imath}\ m/s$ entra a una región donde existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 3000\hat{\jmath}\ N/C$. Deduzca la ecuación de la trayectoria que describe el electrón. ¿Qué distancia recorre verticalmente el electrón si avanza 12cm horizontalmente?



Solución

Al ingresar a la zona con campo eléctrico, el electrón será sometido a una fuerza eléctrica en la misma dirección de las líneas de campo, pero en sentido contrario, debido a la carga negativa del electrón. Así el electrón adquiere un movimiento horizontal con velocidad constante (MRU) y un movimiento vertical con aceleración constante (MRUA). Como la fuerza eléctrica tiene sentido contrario a las líneas de campo, el electrón tendrá una aceleración dirigida hacia la parte negativa del eje vertical. Aplicando la segunda ley de Newton tendremos en módulo

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{|q|E}{m}.$$

Al considerar el origen de nuestro sistema de referencia, el punto en el que el electrón ingresó a la zona con campo eléctrico, tenemos que las condiciones iniciales son: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = 5 \cdot 10^6\ m/s$ y $v_{0y} = 0$, así las ecuaciones de itinerario son

$$x(t) = v_{0x}t,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}\frac{|q|E}{m}t^2,$$

donde el signo menos indica que la aceleración es hacia el sentido negativo del eje vertical. Eliminando el tiempo de las ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria

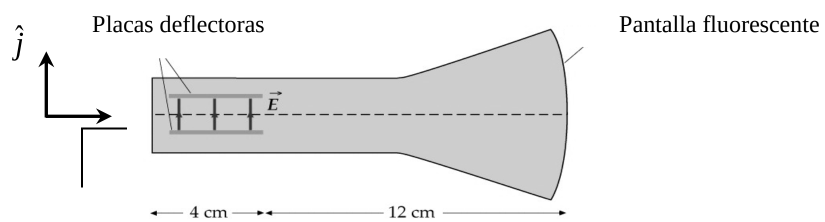
$$y = -\frac{1}{2}\frac{|q|E}{mv_{0x}^2}x^2,$$

la cual es la ecuación de una parábola. Para conocer la distancia recorrida verticalmente, cuando se han recorrido 0,12m horizontalmente, basta reemplazar en la ecuación de la trayectoria

$$y = -\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3000}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^6)^2}(0.12)^2 = -0{,}15m$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1.1

Un electrón cuya velocidad inicial $\vec{v}_0 = 21 \times 10^6\, \hat{i} \quad m/s$ se mueve hacia la derecha por un tubo de rayos catódicos como se muestra en la figura. En la región entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico uniforme de valor $\vec{E} = 20000\, \hat{j}\ N/C$. En cualquier otra región $\vec{E} = \vec{0}$. ¿Cuánto vale la magnitud de la velocidad del electrón en el momento que abandona las placas deflectoras?

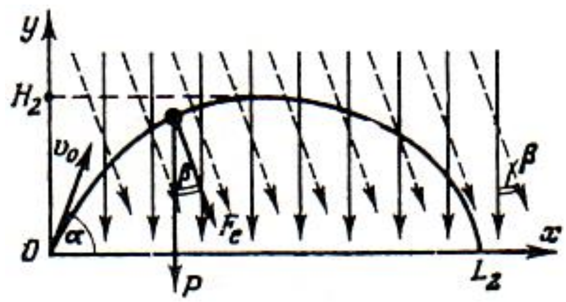


Indicaciones para la solución

En la región entre las placas, el electrón experimenta una aceleración vertical constante $\vec{a} = \frac{eE}{m}\hat{j}$ debido a la acción del campo eléctrico uniforme. Como la velocidad inicial del electrón es perpendicular a la aceleración la trayectoria es una parábola, similar a la trayectoria seguida por una pelota rodante, por una superficie horizontal, que cae con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{i}$ a un desnivel inferior con una aceleración $\vec{a} = -g\,\hat{j}$ constante. Siguiendo procedimientos similares se obtiene que la magnitud de la velocidad del electrón al abandonar las placas es $22.03\times10^6\,\hat{i} \quad m/s$.

PROBLEMA DESAFÍO 2.1

Un cuerpo (partícula) de masa m y de carga $+q$ es lanzado con una velocidad inicial v_0 y formando un ángulo α con la horizontal. El cuerpo se mueve simultáneamente en el campo gravitatorio y en un campo eléctrico homogéneo $\vec{E}$. Las líneas de campo eléctrico forman un ángulo β con la vertical como se muestra en la figura. Determinar el tiempo T_2, el alcance L_2 y la altura máxima H_2



3. DENSIDAD DE CARGA

PROBLEMA RESUELTO 3.1

Un tubo cilíndrico muy largo, de radio interior a y radio exterior b tiene la siguiente densidad volumétrica de carga:

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{r^2} & a \le r \le b \\ \\ 0 & otro\ caso \end{cases},$$

siendo r la distancia perpendicular al eje del cilindro y $r_0 > 0$ una constante. Determine la carga neta al interior de un trozo del cilindro de largo L del tubo cilíndrico.

Solución

Por definición de densidad volumétrica de carga tenemos que

$$\rho(r) = \frac{dQ}{dV} \quad \Rightarrow \quad Q = \iiint \rho(r)dV$$

donde para coordenadas cilíndricas, el elemento de volumen es $dV = rdrd\theta dz$. Así, la carga neta vendrá dada por

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\rho_0}{r^2} r dr d\theta dz \\
&= \left(\int_0^L dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\rho_0 \int_a^b \frac{dr}{r} \right) \\
&= 2\pi L \rho_0 \int_a^b \frac{dr}{r}
\end{aligned}
$$

hay que notar que cuando la distribución volumétrica de carga no depende de las variables z ni θ, siempre aparecerá en la solución el factor $2\pi L$, de modo que en la solución solo habrá que realizar una integral de una variable, que corresponde al radio. Finalmente, la carga será

$$
Q = 2\pi L \rho_0 \int_a^b \frac{dr}{r} = 2\pi L \rho_0 \ln\left(\frac{b}{a} \right)
$$

PROBLEMA RESUELTO 3.2

Sobre un disco de radio *R* se distribuye una carga *Q* de modo que la densidad de carga es

$$
\sigma(r) = A e^{-\frac{r^2}{R^2}}
$$

donde *r* es la magnitud de la distancia al origen y *A* es una constante a determinar. Determine la constante *A* en términos de *Q* y *R*.

Solución

De acuerdo a la definición de densidad superficial de carga, tendremos

$$
\sigma(r) = \frac{dQ}{dS} \quad \Rightarrow \quad Q = \iint \sigma(r) dS
$$

donde *dS* es el elemento de superficie, y que de acuerdo a la simetría de la distribución, será considerado en coordenadas polares, esto es $dS = r dr d\theta$, por tanto la carga neta se calcula a partir de

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R A \exp\left(-\frac{r^2}{R^2} \right) r dr d\theta \\
&= A \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left[\int_0^R r \exp\left(-\frac{r^2}{R^2} \right) dr \right] \\
&= 2\pi A \int_0^R r \exp\left(-\frac{r^2}{R^2} \right) dr
\end{aligned}
$$

Para llevar a cabo la integración, hacemos el cambio de variable

$$u = -\frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r\,dr = -\frac{R^2}{2}du$$

con lo que se obtiene

$$\int_0^R r\exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)dr = -\frac{R^2}{2}\int_0^{-1} e^u du = \frac{R^2}{2}e^u\Big|_{-1}^{0} = \frac{R^2}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

Por tanto, la carga neta y la constante *A* serán respectivamente

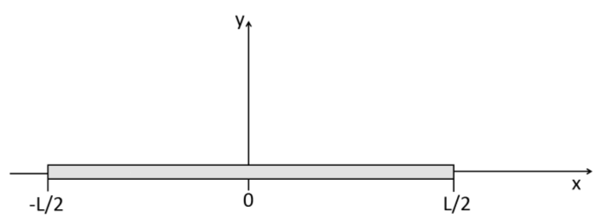
$$Q = \pi R^2 A\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

y

$$A = \frac{Q}{\pi R^2}\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 3.1

Obtenga la carga total Q de la varilla de longitud L mostrada en la figura, si la densidad de carga lineal está dada por la expresión $\lambda(x) = \dfrac{\lambda_0}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$, donde la constante $a > 0$.



¿Cuánto vale Q si la longitud de la varilla es infinita?

Indicaciones para la solución

La carga total de la varilla está determinada por la integral $Q = \int_\ell \lambda\, d\ell$. Calcule esta integral, luego, analice y discuta el resultado obtenido para el caso de una varilla de longitud infinita.

PROBLEMA DESAFÍO 3.1

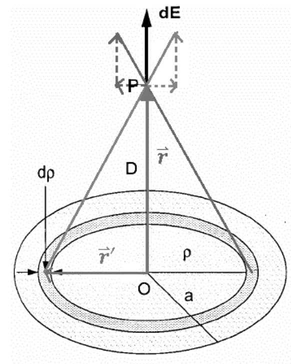
Un cilindro de macizo de radio R y largo *L*, tiene una carga positiva distribuida uniformemente tal que $\rho = \rho_0$. El cilindro está rodeado por un casquete cilíndrico de paredes delgadas, de radio $3R$, de largo *L*, y con una carga superficial positiva distribuida uniformemente $\sigma = \dfrac{\rho_0 R}{18}$.

a) Calcule la carga contenida en el cilindro para $r < R$.
b) Calcule la carga total de la distribución.

4. CAMPO ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA

PROBLEMA RESUELTO 4.1

Un disco circular, horizontal de radio a está uniformemente cargado con densidad de carga superficial σ . ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto del eje vertical que atraviesa el disco en su centro, a una distancia D del centro?



Solución

Sí se analiza la simetría de la distribución de cargas, se encuentra que el campo eléctrico generado en P por el disco completo, solo tiene componente en el eje z, es decir:

$$\vec{E} = E_z\hat{k}$$

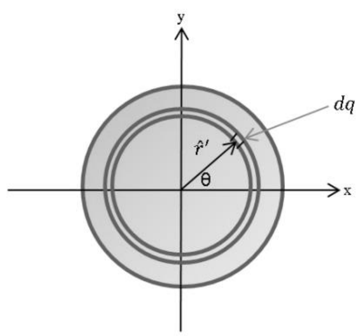
El campo eléctrico debido a un segmento infinitesimal de carga dq viene dado por

$$d\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}(\vec{r}-\vec{r}'),$$

donde dq *es la* carga de un elemento infinitesimal de la superficie del disco.

El campo eléctrico total, es el resultado de la contribución de todos los dq que forman el objeto cargado, así tenemos que $\vec{E} = \int d\vec{E}$. La carga de un elemento infinitesimal de superficie de un disco de radio ρ, viene dado por

$$dq = \sigma ds,$$
$$dq = \sigma\rho d\rho d\theta,$$



donde $0 \le \rho \le$ a y $0 \le \theta \le 2\pi$.

Por otro lado, tenemos que la posición de del punto P es $\vec{r} = D\hat{k}$ y la posición de dq es $\vec{r}' = \rho\cos\theta\,\hat{\imath} + \rho\sin\theta\,\hat{\jmath}$, así tenemos que

$$\hat{r} - \hat{r}' = D\hat{k} - \rho\cos\theta\,\hat{\imath} - \rho\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\|\hat{r} - \hat{r}'\| = (D+\rho)^{1/2} \Rightarrow \|\hat{r} - \hat{r}'\|^3 = (D^2+\rho^2)^{3/2}$$

Por lo tanto, tenemos que el campo eléctrico en el punto P generado por un segmento infinitesimal de carga dq es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(D^2+\rho^2)^{3/2}}\left(D\hat{k} - \rho\cos\theta\,\hat{\imath} - \rho\sin\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{a}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(D^2+\rho^2)^{3/2}}\left(D\hat{k} - \rho\cos\theta\,\hat{\imath} - \rho\sin\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

Por la simetría del problema, sabemos que el campo eléctrico solo tiene componente en $\hat{k}$, por lo que ignoraremos las componentes en $\hat{I}$ y en $\hat{J}$ pues de todos modos se van a anular durante el desarrollo de las integrales (muéstrelo), así tenemos que

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\mathrm{a}}\frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{(D^2+\rho^2)^{3/2}}\hat{k}.$$

La integración en θ es trivial, dando como resultado 2π, entonces

$$\vec{E} = \frac{\sigma D}{2\varepsilon_0}\int_0^{\mathrm{a}}\frac{\rho d\rho}{(D^2+\rho^2)^{3/2}}\hat{k},$$

Integrando en ρ obtenemos como resultado

$$\vec{E} = -\frac{\sigma D}{2\varepsilon_0}(D^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\mathrm{a}}\ \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{D}{(D^2+\mathrm{a}^2)^{1/2}}\right]\hat{k}$$

Así obtenemos el valor del campo eléctrico, el cual es vertical y apunta en dirección al disco si σ es negativo y en sentido contrario si σ es positivo.

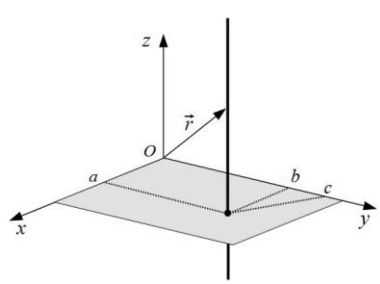
Este ejercicio permite obtener un resultado importante en el caso límite en que $\mathrm{a} \to \infty$, donde obtendremos el campo eléctrico producido por un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial de carga σ

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{k}$$

El campo es perpendicular al plano y apunta en dirección a él si σ es negativo y en sentido contrario si σ es positivo

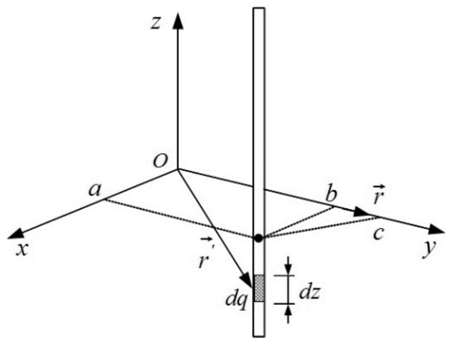
PROBLEMA RESUELTO 4.2

Una línea de carga infinita y uniforme, paralela al eje z intersecta al plano xy en el punto de coordenadas $(a,\ b,\ 0)$. Obtener las componentes rectangulares del campo eléctrico en el punto $(0,\ c,\ 0)$.



Solución

La figura siguiente muestra un elemento de carga *dq* de longitud *dz* perteneciente a la línea de carga que está ubicado a una distancia *z* por debajo del plano *xy*. Además se muestran los vectores posición del elemento de carga *dq* y del punto de campo.



De acuerdo a esta figura

$$\vec{r} = c\hat{j}$$
$$\vec{r}\,' = a\hat{i} + b\hat{j} - z\hat{k}$$

Por lo que el campo eléctrico debido al elemento de carga *dq* será

$$d\vec{E} = \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^{3/2}} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 \left|-a\hat{i} + (c-b)\hat{j} + z\hat{k}\right|^{3/2}}(-a\hat{i} + (c-b)\hat{j} + z\hat{k})$$

donde se ha hecho el reemplazo $dq = \lambda dz$, de acuerdo a la definición de densidad lineal de carga. Dado que la línea es de extensión infinita, para obtener el campo neto en el punto pedido se deberá integrar en el intervalo [-∞,+∞], con lo que tendremos

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + (c-b)^2 + z^2\right)^{3/2}}(-a\hat{i} + (c-b)\hat{j} + z\hat{k})$$

o también

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{adz}{\left(a^2 + (c-b)^2 + z^2\right)^{3/2}}\hat{i} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(c-b)dz}{\left(a^2 + (c-b)^2 + z^2\right)^{3/2}}\hat{j} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zdz}{\left(a^2 + (c-b)^2 + z^2\right)^{3/2}}\hat{k}\right]$$

De este resultado vemos que las componentes del campo eléctrico son

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{a\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left[a^2+(c-b)^2+z^2\right]^{3/2}} \\
E_y &= \frac{(c-b)\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left[a^2+(c-b)^2+z^2\right]^{3/2}} \, . \\
E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{zdz}{\left[a^2+(c-b)^2+z^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Si hacemos $u=a^2+(c-b)^2$, vemos que las componentes x y y contienen integrales del tipo

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left(u^2+z^2\right)^{3/2}} = \left.\frac{z}{u^2\sqrt{u^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{u^2}
$$

mientras que la integral de la componente z es

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{zdz}{\left(u^2+z^2\right)^{3/2}} = -\left.\frac{1}{\sqrt{u^2+z^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = 0\, .
$$

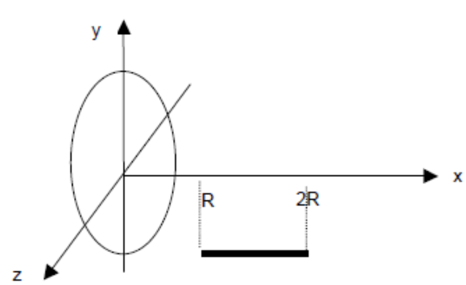
Así entonces,

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{a\lambda}{4\pi\varepsilon_0\left[a^2+(c-b)^2\right]^2} \\
E_y &= \frac{(c-b)\lambda}{4\pi\varepsilon_0\left[a^2+(c-b)^2\right]^2} \quad . \\
E_z &= 0
\end{aligned}
$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 4.1

En la figura se muestra un sistema de cargas: un disco de radio R, carga positiva Q distribuida uniformemente, centrada en el origen; y una varilla de longitud R, carga Q negativa distribuida uniformemente. Determine:

a) El campo eléctrico resultante en el punto X = 1.5R.
b) Determine la fuerza ejercida sobre un electrón por el sistema disco-varilla en el punto X = 1.5R.



Indicaciones para la solución

Primero, debemos calcular el campo eléctrico del disco en el punto X = 1.5R. Por simetría, el campo eléctrico estará en la dirección de su eje de simetría (eje X), entonces

$$\vec{E}_{disco} = k\sigma 2\pi \left(1 - \frac{x}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}_{disco}(x = 1.5R) = k\sigma 2\pi \left(1 - \frac{1.5R}{R\left(1.5^2 + 1\right)^{1/2}} \right) \hat{i}$$

Por otra parte, el campo eléctrico generado por la varilla en el punto X = 1.5R es

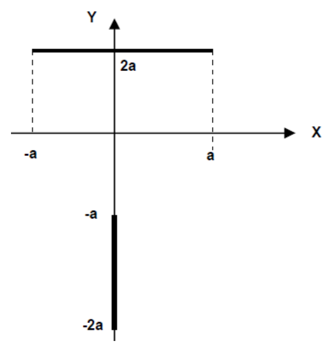
$$\vec{E}_{varilla} = -\frac{0.89kQ}{R^2}\hat{j}$$

Así, usando el principio de superposición, se tiene el campo eléctrico total

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{disco} + \vec{E}_{varilla}$$

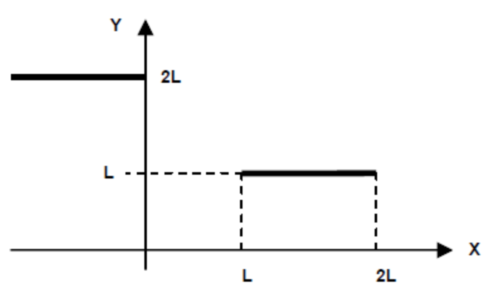
PROBLEMA DESAFÍO 4.1

Una línea de cargas de longitud 2a, paralela al eje x por y = 2a, tiene una carga distribuida uniformemente con $\lambda = -\frac{3Q}{a}$. Otra línea de cargas de longitud a, coincidente con el eje Y tiene una carga desconocida distribuida uniformemente. Determinar la carga desconocida de modo que el campo eléctrico resultante en el origen sea cero



PROBLEMA DESAFIO 4.2

Un sistema de cargas está formado por dos líneas: la línea (1) paralela al eje x en y = 2L, limitada por x = 0 y x = -L, y con carga distribuida uniformemente con $\lambda_1 = -\frac{2Q}{5a}$; mientras que la línea (2) es paralela al eje x en y = L, limitada por x = L y x = 2L, y cargada uniformemente (λ_2). Calcular la densidad lineal (λ_2) de modo que los campos eléctricos producidos en P (L; 0) tengan igual componente x.



PROBLEMA DESAFIO 4.3

Considere dos filamentos cargados ambos con densidad de carga λ. Uno de los filamentos es de longitud infinita y el otro de longitud a, están ubicados en un mismo plano como se muestra en la figura. Determine la fuerza que el campo eléctrico del filamento de longitud infinita ejerce sobre el filamento de longitud a.