178

PRIMERA PRUEBA DE FÍSICA II
ICF- 190
PRIMER SEMESTRE DE 2015
13 / ABRIL / 2015

— PAUTA —			
NOMBRE COMPLETO		**PUNTAJE**	**NOTA**
CARRERA	**MÓDULO**		

Instrucciones

1. *Esta prueba tiene* ***9 preguntas****. En las preguntas de selección múltiple, usted debe responder marcando la letra A, B, C, D o E que corresponde a la respuesta correcta. En las preguntas de desarrollo, es necesario que explicite los cálculos realizados.*
2. *El puntaje total de la prueba es de* ***24 puntos****. El puntaje asignado a cada pregunta está en la primera columna.*
3. *La nota 4.0 se obtiene con el 50% del puntaje total y el 7.0 con el 100% del puntaje.*
4. *Usted está autorizado para usar calculadora.*
5. *A partir de este momento usted dispone de* ***2 horas*** *para responder la prueba.*

Información para preguntas 1 a 4.

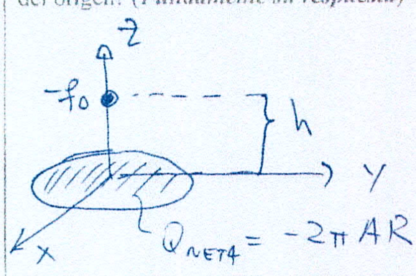
Un disco de radio R se encuentra en el plano xy con su eje de simetría a lo largo del eje z y es portador de una carga superficial $\sigma = -\dfrac{A}{r}$ donde A es una constante positiva y $r \leq R$.

(1) 1.- ¿Cuánto vale la carga neta Q del disco? (***Debe incluir desarrollo***).

$$Q_{NETA} = \int dq = -A\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{r\,dr\,d\theta}{r} = -2\pi AR$$

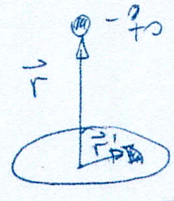
$$\boxed{Q_{NETA} = -2\pi AR}$$

(1) 2.- ¿En qué dirección y sentido se desplazaría una partícula con carga $-q_0$ si se libera a una distancia $z = h$ del origen? (***Fundamente su respuesta***)



La carga $-q_0$ experimenta una fuerza de repulsión dirigida directamente hacia arriba ($+\hat{k}$) debido a la Q_{NETA} distribuida uniformemente en el plano xy
$\Rightarrow$ Se moverá a lo largo del eje z, en el sentido positivo del mismo.

(4) 3.- Calcule la fuerza eléctrica que el disco ejerce sobre la carga $-q_0$ en el punto $z = h$ ***(Debe incluir desarrollo).***



$$\vec{r} = h\hat{k} \qquad \vec{r} - \vec{r}' = -r\hat{r} + h\hat{k}$$

$$\vec{r}' = r\hat{r} \qquad \|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\Longrightarrow d\vec{F}_{DISCO} = -\frac{k\, q_0\, dq\,(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{k q_0 A r\, dr\, d\theta(-r\hat{r} +}{r\,(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

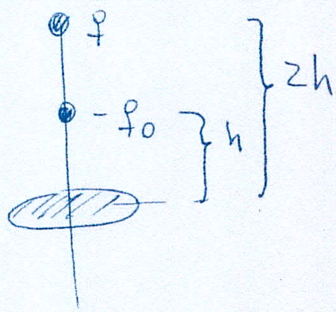
Integral en $\hat{r}$ es nula, debido a la simetría de la distribución

$$\vec{F}_{DISCO} = 2\pi k\, q_0\, h\, A \int_0^R \frac{dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}}\, \hat{k}$$

∴ La fuerza que ejerce el disco sobre la carga $-q_0$

$$\boxed{\vec{F}_{DISCO} = \frac{2\pi k q_0 A R}{h\sqrt{h^2 + R^2}}\,\hat{k}}$$

(2) 4.- Si en el punto $z = 2h$ se ubica una carga q, encuentre el valor y el signo de q para que la fuerza neta sobre la carga $-q_0$ sea nula en el punto $z = h$. ***(Debe incluir desarrollo)***



$$\vec{F}_{NETA} = \vec{F}_{DISCO} + \vec{F}_q = 0 \quad (1)$$

fuerza neta sobre q_0

fuerza que ejerce el disco

fuerza que ejerce la carga q

∴ Utilizando (1)

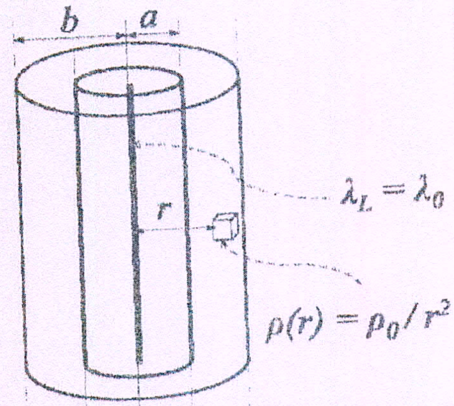
$$\vec{F}_q = -\vec{F}_{Disco} = -\frac{2\pi k q_0 A R}{h\sqrt{h^2 + R^2}}\,\hat{k}$$

$$\vec{F}_q = \frac{k\, q\, q_0}{h^2}\,\hat{k} = -\frac{2\pi k q_0 A R}{h\sqrt{h^2 + R^2}}\,\hat{k}$$

$$\boxed{q = -2\pi h R\, A}$$

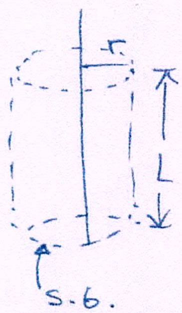
Información para preguntas 5 a 7.

Considere una corteza cilíndrica gruesa (radio interior a y radio exterior b), **infinitamente larga**, que posee una densidad volumétrica de carga $\rho(r)=\dfrac{\rho_0}{r^2}$, con r la distancia perpendicular al eje de simetría. Sobre el eje de simetría de la corteza cilíndrica hay una varilla delgada, **infinitamente larga**, con densidad uniforme de carga λ_0.



(2) 5.- Encuentre el campo eléctrico total para $r < a$. ***(Debe incluir desarrollo)***

$0<r<a$



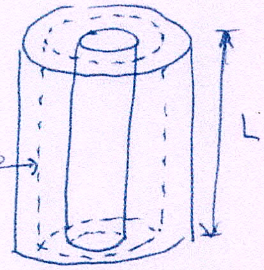
$$\oiint_{S.G.} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda_0 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}} \quad 0<r<a$$

(4) 6.- Encuentre el campo eléctrico total para $a < r < b$. ***(Debe incluir el desarrollo)***

$\vec{E}_{cil}$



$$\oiint_{S.G.} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E_c(2\pi r L) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_a^r \frac{r\,dr\,d\theta\,d}{r^2}$$

$$E_c(2\pi r L) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} L(2\pi)\ln(r/a$$

$$E_c = \frac{\rho_0 \ln(r/a)}{\varepsilon_0 r}$$

$$\therefore \vec{E}_{TOTAL} = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\left(\rho_0 \ln(r/a) + \frac{\lambda_0}{2\pi}\right)\hat{r} \quad a\le r\le b$$

pues debe sumarse el campo debido a la distribución lineal de carga (Principio de Superposición).

(2)	7.-	Encuentre la relación $\left(\frac{\lambda_0}{\rho_0}\right)$ que permite que el campo eléctrico al exterior de la corteza cilíndrica, $r > b$ sea cero. ***(Debe incluir desarrollo)***

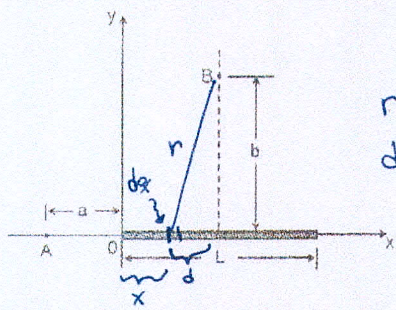
Para $\underline{r>b}$ el resultado anterior conduce a:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\underbrace{\left(\rho_0 \ln(b/a) + \frac{\lambda_0}{2\pi}\right)}_{=0}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\lambda_0}{\rho_0}\right) = -2\pi \ln\left(b/a\right)}$$

Información para preguntas 8 a 9.

Una varilla delgada de longitud L se ubica a lo largo del eje x, con su extremo izquierdo en el origen 0. La densidad lineal de carga en la varilla es $\lambda = \lambda_0 x$, donde $\lambda_0 > 0$ es una constante. El punto B está a una distancia b de la varilla a lo largo de la línea perpendicular desde su punto medio.



$r = \sqrt{b^2+d^2}$

$d = \frac{L}{2} - x$

(7)	8.-	Encuentre el trabajo que debe hacer un agente externo para mover una carga Q desde el punto A hasta el punto B. ***(Debe incluir el desarrollo).***

$$W_{A\to B} = \Delta U = Q\left(V(B) - V(A)\right)$$

$$V(A) = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int_0^L \frac{\lambda}{r}\,dx = k_e \int_0^L \frac{(\lambda_0 x)}{x+a}\,dx$$

$$= k_e \lambda_0 \int_0^L \frac{x}{x+a}\,dx = k_o \lambda_o \left[x - a \ln(x+a)\right]_0^L$$

$$\boxed{V(A) = k_e \lambda_0 \left[L - a \ln\left(\frac{L+a}{a}\right)\right]}$$

$$V(B) = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int_0^L \frac{(\lambda_0 x)\, dx}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}} \quad \text{(ver figura)}$$

Cambio de variable $z = \frac{L}{2} - x$, $x = \frac{L}{2} - z$, $dx = -dz$, $\int_0^L \rightarrow \int_{+L/2}^{-L/2}$

$$V(B) = k_e \lambda_0 \int_{L/2}^{-L/2} \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{b^2 + z^2}} (-dz) = k_e \lambda_0 \left[\frac{L}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{\sqrt{b^2+z^2}} + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{-z}{\sqrt{b^2+z^2}} dz \right]$$

$$= k_e \lambda_0 \left[\frac{L}{2} \ln\left(\sqrt{b^2+z^2} + z\right)\Big|_{-L/2}^{L/2} - \underbrace{\sqrt{b^2+z^2}\Big|_{-L/2}^{L/2}}_{0} \right]$$

$$\boxed{V(B) = k_e \lambda_0 \frac{L}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{b^2 + L^2/4} - L/2} \right)}$$

Por lo tanto

$$\boxed{W_{A\to B} = Q k_e \lambda_0 \left\{ L \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{b^2 + L^2/4} - L/2} \right) - 1 \right] + a \ln\left(\frac{L+a}{a}\right) \right\}}$$

(1) 9.- Encuentre el trabajo debido al campo que está presente en esta situación. (*Debe incluir desarrollo*).

$$\boxed{W_{A\to B}^{campo} = - W_{A\to B}}$$