

Guía de trabajo dirigido: Reales

1. Resolver:

- a) $3\left(\frac{11x}{6} - x\right) = 2x - 3\left(1 - \frac{x}{6}\right)$
- b) $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2} - \frac{(2x-3)^2}{3} = 4x - \frac{41}{6}$. Resp. $x = \pm 1$
- c) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$, Resp $x = 114$
- d) $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{x-2}$, Resp $x = -3$
- e) $\frac{3x^2+1}{6x+1} = \frac{6x-1}{3x^2-1}$, Resp $x = 0; x = \pm 2$
- f) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 98$
- g) $\sqrt[3]{x} + 6 = x$

2. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

- a) Todo número real es racional.
- b) Todo número natural es entero.
- c) Todo número entero es racional.
- d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.
- e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.
- f) Entre dos números reales existe siempre un racional.
- g) Entre dos números reales existe siempre un irracional.

3. Representar los siguientes intervalos e indicar su unión e intersección:

- a) $[-2, 5]$ y $[3, \infty)$
- b) $(0, 3)$ y $[\frac{9}{2}, \infty)$
- c) $(-5, -1]$ y $[-1, 4]$
- d) $(-1, 3)$ y $[3, \infty)$

4. Indicar para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones; en el caso de las desigualdades, indicar la solución mediante intervalos:

- a) $|x| = 5$
- b) $|x| \leq 5$
- c) $|x| > 5$
- d) $|x-4| = 2$, Resp $x_1 = 2, x_2 = 6$
- e) $|x-4| \leq 2$, Resp $x \in [2, 6]$
- f) $|x-4| > 2$, Resp $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$
- g) $|x| = -2$
- h) $|x| = 0$
- i) $|x| < 2$
- j) $|x| \geq 2$
- k) $|x+1| = 3$, Resp $x_1 = -4, x_2 = 2$
- l) $|x-2| \leq 3$, Resp $x \in [-1, 5]$
- m) $|2x| < 8$, Resp $x \in (-4, 4)$
- n) $|x+4| > 5$, Resp $x \in (-\infty, -9) \cup (1, \infty)$

5. Resolver las siguientes inecuaciones de 2º grado:

- a) $x^2 - 6x + 8 \geq 0$, Resp $x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$
- b) $x^2 - 2x - 3 < 0$, Resp $x \in (-1, 3)$
- c) $x^2 - 5x + 6 > 0$, Resp $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
- d) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$, Resp $x \in [-2, 5]$
- e) $3x^2 - 10x + 7 \geq 0$, Resp $x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{7}{3}, \infty)$
- f) $2x^2 - 16x + 24 < 0$, Resp $x \in (2, 6)$
- g) $x^2 - 4x + 21 \geq 0$, Resp $x \in \mathbb{R}$
- h) $x^2 - 3x > 0$, Resp $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$
- i) $x^2 - 4 \geq 0$, Resp $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
- j) $x^2 - 4x + 4 > 0$, Resp $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

6. Decidir si el conjunto dado tiene una cota superior. En caso afirmativo hallar el supremo.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x^2 < 3\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} / 2 + x \leq x^2 \leq 6 + x\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{n+1}{n+2}\}$

7. Hallar el conjunto solución de las inecuaciones dadas y encontrar supremo ínfimo, máximo y mínimo.

- a) $3(x+8) < 60 - 4(x-5)$ Resp $(-\infty, 8)$
- b) $(6x+5)(x-1) \leq (2x-3)(3x+5)$ Resp. $[5, \infty)$
- c) $(x-1)^2 - (x-2)^2 > -2$ Resp $(\frac{1}{2}, \infty)$
- d) $(x-2)^2 > (x+2) \cdot (x-2) + 8$ Resp. $(-\infty, 0)$
- e) $(x-1)^2 < x \cdot (x-4) + 8$ Resp. $(-\infty, \frac{7}{2})$
- f) $3 - (x-6) \leq 4x - 5$ Resp. $[\frac{14}{5}, \infty)$
- g) $\frac{3x-5}{4} - \frac{x-6}{12} < 1$ Resp. $(-\infty, \frac{21}{8})$
- h) $\frac{1-x}{9} - 5 < 9 + x$ Resp. $(-\frac{67}{9}, \infty)$
- i) $\frac{x+6}{3} - x + 6 \leq \frac{x}{15}$ Resp. $[\frac{120}{11}, \infty)$
- j) $x^2 \geq 16$ Resp. $\mathbb{R} - (-4, 4)$
- k) $9x^2 < 25$ Resp. $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$
- l) $36 > (x-1)^2$ Resp. $(-5, 7)$

- m) $(x+5)^2 \leq (x+4)^2 + (x-3)^2$ Resp. $\mathbb{R} - (0, 8)$
- n) $x(x-2) < 2(x+6)$ Resp. $(-2, 6)$
- ñ) $x^2 - 3x > 3x - 9$ Resp. $\mathbb{R} - \{3\}$
- o) $4(x-1) > x^2 + 9$ Resp. \emptyset
- p) $2x^2 + 25 \leq x(x+10)$ Resp. $\{5\}$
- q) $1 - 2x \leq (x+5)^2 - 2(x+1)$ Resp. \mathbb{R}
- r) $3 > x(2x+1)$ Resp $(-\frac{3}{2}, 1)$
- s) $x(x+1) \geq 15(1-x^2)$ Resp. $\mathbb{R} - (-1, \frac{15}{16})$
- t) $(x-2)^2 \geq 0$ Resp. \mathbb{R}
- u) $(x-2)^2 < 0$ Resp. \emptyset
- v) $(x-2)^2 \leq 0$ Resp. $\{2\}$

8. Resolver las desigualdades que se indican. Hallar supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

- a) $\frac{4-x}{x+1} \leq \frac{x-2}{3-x}$ Resp $(-\infty, -1) \cup (\frac{7}{3}, 3)$
- b) $\frac{x^2+2x+2}{x^2-4} \leq 0$ Resp. $(-2, 2)$
- c) $\frac{3x^2+22x-56}{x+1} \leq 2(x+4)$ Resp. $(-\infty, -4)$
- d) $\frac{2x^2+x+3}{x^3-x} > 0$ Resp. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
- e) $1 + \frac{6}{x^2+3x+2} \geq \frac{6}{x+2}$ Resp. $\mathbb{R} - (-2, -1)$
- f) $\frac{x^3+x^2-2x}{x^2+1} \geq 0$ Resp. $(-2, 0) \cup (1, \infty)$
- g) $\frac{x^3}{x-1} \geq x$ Resp. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
- h) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+6} < 3$ Resp. \mathbb{R}
- i) $\frac{x+4}{x^3+x} \geq \frac{x}{x^2+1}$ Resp. $(0, \infty)$
- j) $2x^2+x+6 \geq \frac{6}{1-x}$ Resp. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$
- k) $\frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} \leq \frac{x-2}{x+2}$ Resp. $(-\infty, -2) \cup (2, 3]$
- l) $\left|\frac{9-x}{x}\right| \geq x-1$ Resp. $(-\infty, 0) \cup (0, 9)$
- m) $\frac{|x-5| + |2x+1|}{x-3} < 0$ Resp. $(-\infty, 3)$
- n) $\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\right| \leq 1$ Resp $[0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$
- ñ) $\frac{|x|-4}{|x|+4} < \frac{|x|-5}{|x|+5}$ Resp $(-\infty, 0)$
- o) $\left|1 + \frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| + \frac{1}{2}$ Resp. $[-4, 0)$

9. Demostrar usando inducción:

- a) $3 + 2 \cdot 3^1 + \dots + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- b) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (n-1) \cdot (n-1)! = n!, \forall n > 1$
- c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- e) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x+y$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- f) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- g) $n! > 2n, \forall n > 4$.

10. Escribe el término de grado 8 en el desarrollo de $(3x^2 + \frac{1}{x})^7$, Resp $k = 3$
11. Escribe, sin desarrollar, el cuarto término del desarrollo de $(x+y)^9$ y el quinto del desarrollo de $(2x-y)^8$.
12. Escribe y simplifica el tercer término del desarrollo de $(x^3 - \frac{2}{x})^7$
13. Escribe y simplifica el término central del desarrollo de $(\frac{x^2}{9} + \frac{1}{x^3})^4$
14. Halla el grado del término central del desarrollo de $(3x^2 - 5x^4)^{12}$
15. El tercer término del desarrollo de $(x^2 + \frac{3}{x})^5$ coincide con el cuarto del desarrollo de $(x^3 - \frac{1}{x})^5$. Calcula x .
16. Averigua qué valor deber darse a x para que el tercer término del desarrollo de $(\frac{3}{x} - x)^5$ sea igual a 90.
17. El tercer término del desarrollo de $(x^2 + \frac{3}{x})^n$ es de segundo grado. Calcula n y desarrolla la potencia del binomio.
18. El segundo término del desarrollo de $(x^{-\frac{1}{x}})^n$ es de grado 11. Escribe los términos restantes.
19. Averigua si hay algún término del desarrollo de $(2x^2 + \frac{5}{x})^6$ que sea de grado 3. Si lo hay, escríbelo.
20. Averigua el lugar que ocupa el término de grado 13 en el desarrollo de la potencia $(3x - x^2)^8$.

21. Halla El quinto término, el término que contiene a x^5 , y el término independiente de x en $(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x})^9$. Resp. T_5 , no existe, T_7
22. Encuentra el término central en $(x + \frac{1}{x})^{12}$. Resp. $T_7 = \binom{12}{6}$
23. Calcular 11^5 por medio de la fórmula de Newton y comprueba el resultado con la calculadora.
24. Resuelve las ecuaciones $\binom{x}{2} = 21$; $\binom{x}{2} - x = 9$; $\binom{8}{x-2} = \binom{8}{6}$
25. Encuentre el valor de n si $\binom{n}{n-2} = 10$. Resp $n = 5$

Problemas

1. La suma de n números enteros positivos, a partir del numero 1 puede encontrarse mediante la fórmula

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Encuentre cuantos numeros enteros positivos deben sumarse a partir del 1 para que la suma sea 6670. Resp: 115 numeros.
2. El producto de dos números pares consecutivos es 624. Encuentrelos. Resp: 24 y 26
3. Determine el número que sumado a su inverso de por resultado $\frac{82}{9}$. Resp: $\frac{1}{9}$
4. Encuentre, si existe, el número tal que si se lo multiplica por 8 da el mismo número que se obtiene si a su cuadrado se le resta 65. Resp: 13 y -5
5. La superficie de un triángulo rectángulo es 170 cm² y la suma de sus cate-tos es 37 cm. Halle las longitudes de los catetos.
6. El largo de una piscina rectangular tiene 3 metros más que el doble del ancho. Si la superficie de la piscina es de 152 m², determine sus dimensiones. Resp: ancho: 8 m, largo: 19 m.
7. Encuentre dos números tales que su suma sea -56 y su diferencia 106. Resp: 25 y -81
8. Dos números son tales que su suma es 140, el cociente y el resto de la división entre los mismos son, respectivamente, 1 y 38. ¿Cuáles son esos números? Resp: 89 y 51
9. Un equipo de básquetbol anotó 108 puntos en un partido. Anotaron 2 veces y media más canastas que tiros libres. ¿Cuántas canastas y cuántos tiros libres hicieron? ¿Cuántos puntos anotaron de cada uno? (Las canastas valen 2 puntos, los tiros libres 1 punto y no hubo canastas de tres puntos) Resp: 45 canastas y 18 tiros libres. 90 puntos por canastas y 18 por tiros libres.
10. En un teatro cobran \$20 la entrada de los adultos y \$12 la de los niños. Un día, abonaron su entrada 774 personas y se recaudaron \$ 11256. ¿Cuántas entradas vendieron para adultos y para niños? Resp: 528 niños y 246 adul-tos.
11. Encuentre dos números tales que su suma sea 106 y su diferencia 56. Resp: 81 y 25
12. Dos números son tales que su suma es 140, el cociente y el resto de la división entre los mismos son, respectivamente, 1 y 38. ¿Cuáles son esos números? Resp: 89 y 51
13. En un corral hay un cierto número de conejos y patos. En total hay 194 patas y 61 animales. ¿Cuántos conejos y patos hay? Resp: 25 patos y 36 conejos
14. Un productor agropecuario vendió soja a 27 dólares el quintal y maíz a 13 dólares el quintal. En total vendió 200 quintales y recibió 4.196 dólares. ¿Cuántos quintales de soja y de maíz vendió? Resp: 114 quintales de soja y 86 quintales de maíz
15. Se compraron dos productos de diferente costo por un total de \$ 510. El costo del mayor menos cuatro veces el costo del menor es de \$ 10. ¿Cuál es el costo de cada producto? Resp: mayor: \$ 410 ; menor: \$ 100
16. Una placa radiográfica rectangular tiene un perímetro de 156 cm. y su lar-go es 6 cm. más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la placa? Resp: largo: 42 cm. ; ancho 36 cm.
17. La suma de tres números impares consecutivos es 81. ¿Cuáles son esos números? Resp: 25, 27, 29
18. Encuentre cuatro números consecutivos, tales que el primero más el cuádruplo del tercero, menos el doble del cuarto, sea igual a 95. Resp: 31, 32, 33, 34
19. Si a un número se lo multiplica por y se le suma , se obtiene el mismo resultado que si a ese número se le resta. ¿Cuál es el número? Resp: $\frac{3}{2}$
20. Encuentre el número por el cual se debe dividir 282 para que el cociente sea 13 y el resto 9. Resp: 21
21. El perímetro de un rectángulo es de 318 cm. El largo supera al ancho en 11 cm. Calcule las dimensiones del rectángulo. Resp: 85 m largo; ancho 74 cm
22. El perímetro de un triángulo isósceles es de 2,57 m. Los lados iguales su-peran a la base en 28 cm. Calcule el valor de cada lado. Resp: base 67 cm; lados 95 cm

23. Se reparten \$ 22.500 entre tres personas. La segunda recibe el doble de la primera y la tercera un cuarto de lo que reciben las otras dos juntas. ¿Cuánto recibe cada una? Resp: \$ 6.000, \$ 12.000 y \$ 4.500 respectiva-mente.

1. Resolver los siguientes problemas de polinomios:
- a) Halle el polinomio que dividido por $5x^2 - 1$ da el cociente $2x^2 + x - 2$ y el resto $x - 2$. Resp $10x^4 + 5x^3 - 12x^2$
- b) Encuentre a, b, c y d para que $a+(a-b)x+(b-c)x^2+dx^3 = 8+12x+5x^2-10x^3$. Resp $a = 8, b = -4, c = -9, d = -10$

2. Halle el cociente y el resto
- a) $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x - 3)$. Resp. $2x^2 + 9x + 31$ y 98
- b) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1)$ Resp. $x^4 + x^2 + 1$ y 0
- c) $(x^4 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4}) + \frac{1}{5} \div (x - 1)$ Resp. $x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{6} + \frac{7}{12}$ y $\frac{47}{60}$
- d) $(x^3 - 27) \div (x - 3)$ Resp. $x^2 + 3x + 9$ y 0
- e) $(x^3 + 27) \div (x + 3)$ Resp. $x^2 - 3x + 9$ y 0
- f) $(x^4 + 16) \div (x + 2)$ Resp.
- g) $(x^4 - 16) \div (x - 2)$ Resp.
- h) $(x^4 - 16) \div (x + 2)$ Resp.
- i) $(x^4 + 16) \div (x - 2)$ Resp.

3. Factorizar las siguientes expresiones:
- | | |
|---|--|
| a) $3x^5 - 6x^4 + 3x^3$ | e) $8(x+1)^3(x-2)^2 + 6(x+1)^2(x-2)^3$ |
| b) $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^8$ | f) $x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}(2x + 1)$ |
| c) $10(x+1)^3(1-x)^2 + 5(x+1)^2(1-x)^2$ | g) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x + 1) + x^{\frac{2}{3}}(x + 1)$ |
| d) $25(x - 3) - 100$ | h) $4x^{\frac{3}{4}}(2x + 5) + x^{-\frac{1}{4}}$ |

4. Factorizar cada una de las siguientes expresiones:
- | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 2x - 3$ | f) $3x^2 - x - 14$ | k) $16x^2 - 25$ |
| b) $x^2 + 3x - 10$ | g) $x^2 - 7x + 12$ | l) $2x^2 - 32$ |
| c) $x^2 - 2x + 1$ | h) $x^2 + 6x + 9$ | m) $x^4 - 5x^2 + 4$ |
| d) $2x^2 + x - 10$ | i) $2x^2 + 3x + 1$ | n) $3x^2 + 5x - 2$ |
| e) $4x^2 + 12x + 9$ | j) $x^2 + x - 2$ | ñ) $x^2 - 5x + 6$ |

5. Escribe en forma de fracción las expresiones decimales siguientes:
- | | | | | |
|---------|---------|-----------|---------|----------|
| a) 0,75 | c) 0,24 | e) 2,23 | g) 2,05 | i) 8,423 |
| b) 1,36 | d) 1,3 | f) 0,0052 | h) 1,63 | j) 1,345 |
6. En cada una de las siguientes expresiones, calcule el valor de la letra para que la igualdad sea verdadera.
- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| a) $\log_x 1 = 0$ | e) $\log_{x+1} 4 = 2$ | h) $\log_8 N = -\frac{1}{2}$ |
| b) $\log_x(x^2 + x) = 2$ | f) $\log_x(2x^2 - x) = 2$ | i) $\log_{6x-17}(x^2 - 9) = 1$ |
| c) $\log_2(-x + 1) = 3$ | g) $\log_2 \frac{1}{4} = x$ | j) $\log_2(x^2 + 2^x) = x$ |
| d) $\log_4 2 = x + 1$ | | |

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:
- | | |
|---|--|
| a) $3^{-2x+5} = 1$. Resp $x = \frac{5}{2}$ | b) $\ln[(x + 3)(x + 5)] = \ln 15$. Resp $x = -8, x = 0$ |
|---|--|
8. Resuelva para x cada una de las siguientes ecuaciones.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a) $3 = 2e^x$ | g) $9^{2x} = 3 \cdot 27^x$ |
| b) $7 = e^{-6x}$ | h) $3^{x+1} = 729$ |
| c) $11 = \frac{2^x}{3}$ | i) $4 \cdot 16^x = 64^{x-1}$ |
| d) $\sqrt{5} = \frac{r^x}{\sqrt{5}}$ | j) $5^{4x^2-4x-3} = 1$ |
| e) $e^x = 81$ | k) $8^{x-1} \cdot 2^x \cdot \frac{1}{4^{x-2}} = \frac{1}{16}$ |
| f) $3^{-x} = 27$ | l) $\sqrt{125^x} \cdot \frac{1}{25^{x-1}} = \sqrt{5^x}$ |
9. Resolver las siguientes ecuaciones:
- a) Resolver $\log(x - 3) + \log(x + 2) = \log(5x - 14)$. Resp $x = 4$
- b) Resolver $2 \log(1 - 2x) = \log(-x + 1)$. Resp $x = 0$
- c) Resolver $\ln(x - 10) - \ln(x - 7) = \ln 2$ Resp \emptyset
- d) Resuelva $9 \cdot 3^{2x} - 15 \cdot 3x - 6 = 0$. Resp $x = \log_3 2$
- e) Resuelva $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$. Resp $x = 1$ y $x = 16$

10. Resuelva para x , cada una de las siguientes ecuaciones:
- | | |
|--|---|
| a) $3^{2x+2} - 5 \cdot 3^{x+1} - 6 = 0$ | k) $-1 + \log x = \frac{-1-\log x}{\log x+1}$ |
| b) $9^{x-2} + 3^{x-1} - 2 = 0$ | l) $\log(x^8) = (\ln x)^4$ |
| c) $27^{x+3} = \frac{(\sqrt{3})^x}{9^{x-2}}$ | m) $\log x^3 = (\log x)^3$ |
| d) $3^{1-2x} = 2^{x+5}$ | n) $\log x^4 = \log^4 x$ |
| e) $10^{7-2x} = 3^{5-3x}$ | ñ) $2 \log_5(x - 2) - \log_5(x + 4) = \log_5 3$ |
| f) $5^{x+2} = 4^{x-1}$ | o) $\log(2x + 7) - \log(x - 1) = \log 5$ |
| g) $-\log(x - 1) = 2$ | p) $-\log_2 \frac{1}{x-2} = 2 + \log_2(x - 2)$ |
| h) $-\log_2(x - 2) = 1$ | q) $e^{\ln 4} = e^{(x+\sqrt{x^2-4})}$ |
| i) $\log \sqrt{x} = \sqrt{\ln x}$ | r) $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$ |
| j) $\frac{2 \log(1+x)}{\log(x+2)} = 0$ | |