Bitácora

Funciones reales

---

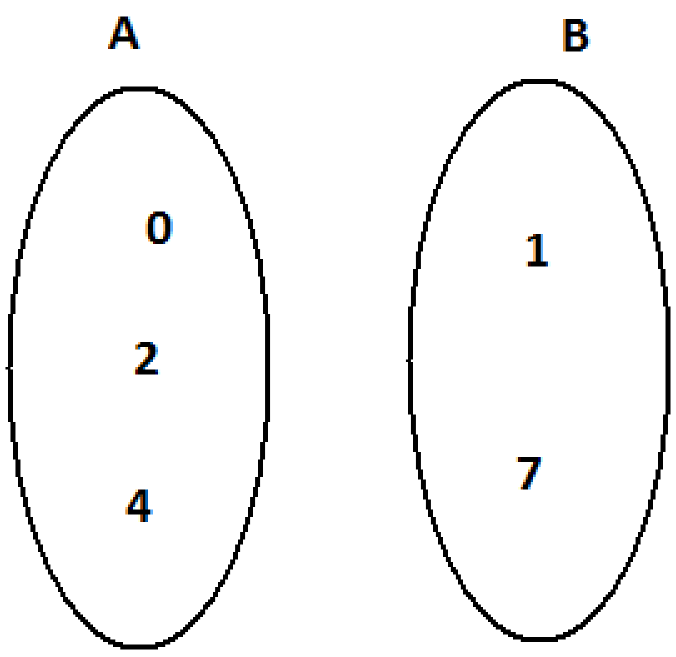
1. Introducción

Al estudiar un fenómeno cualquiera, se suele observar que las magnitudes o cantidades que intervienen presentan una relación entre ellas, de forma que una de las magnitudes depende de la otra.

Actividad 1 *Consideremos dos conjuntos*

$$A = \{0, 2, 4\} \qquad y \qquad B = \{1, 7\}$$

vamos a asociar los elementos de A con los elementos de B mediante la expresión "la componente x de A es mayor que la componente y de B". Una forma gráfica para representar esta idea es a través de un diagrama sagital.

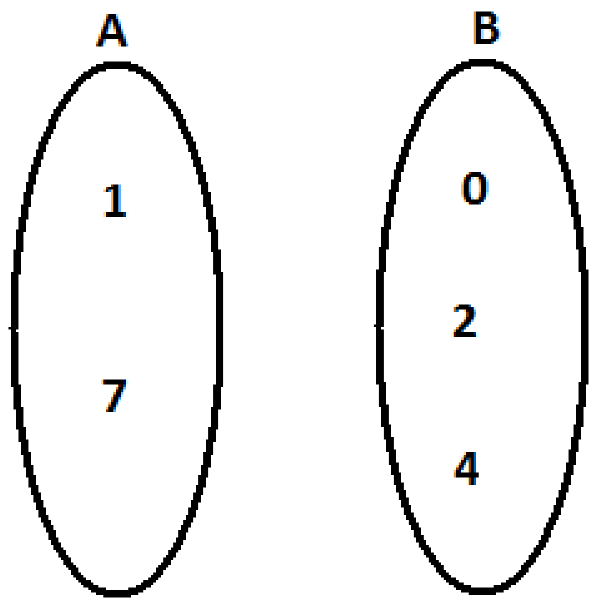


1. *Asocia, en la figura, los elementos que cumplen la condición*
2. *Busca, una forma conjuntista, de denotar la condición entre los elementos que la cumplen.*

Definición 1.1 *un **par ordenado** es una pareja de objetos matemáticos, en la que se distingue un primer elemento y un segundo elemento. El par ordenado cuyo primer elemento es a y cuyo segundo elemento es b se denota como (a, b).*

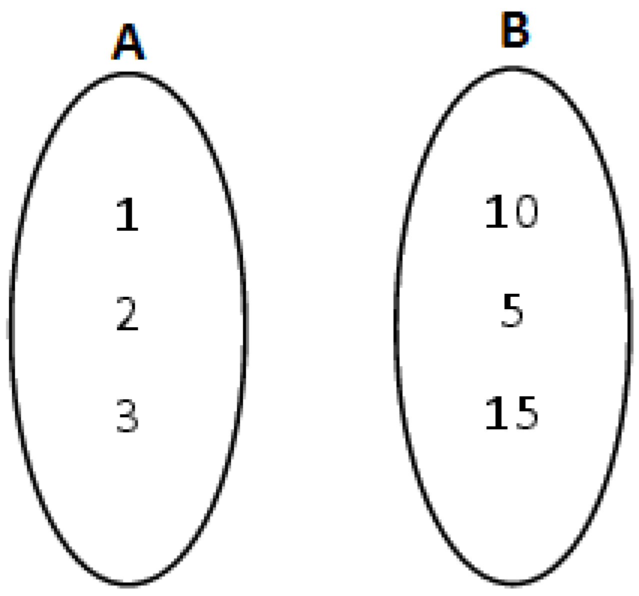
Vamos a estudiar que pasa si cambiamos de orden los conjuntos.

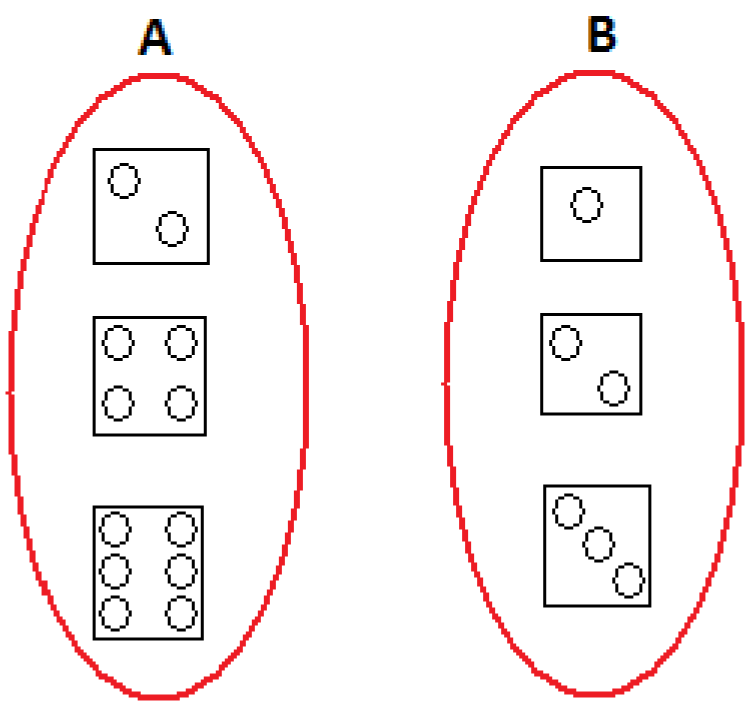
Actividad 2 *Sean $A = \{1, 7\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ y mantenemos la condición de que la componente del primer conjunto es mayor que la componente del segundo conjunto*



1. Asocia, en la figura, los elementos que cumplen.
2. Anota, como par ordenado, los elementos que cumplen. ¿Es importante el orden en que se toman los conjuntos para aplicar la condición?

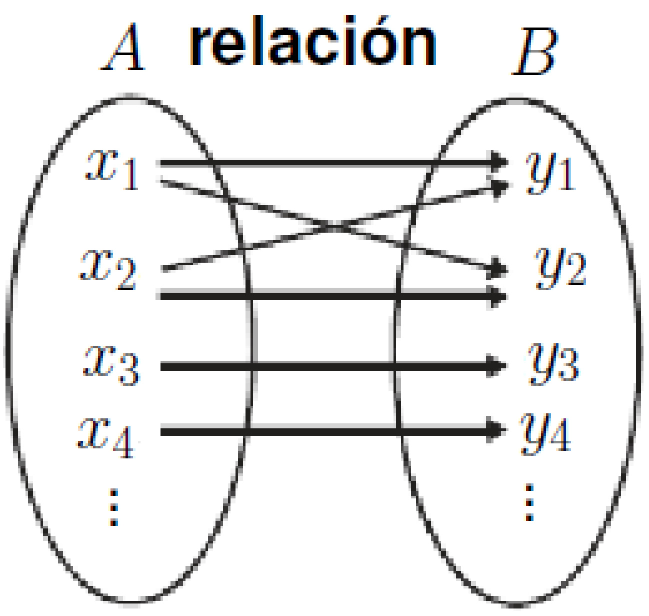
Actividad 3 *Para los diagramas sagitales siguientes, establece una "relación" matemática entre los elementos del primer conjunto con los del segundo conjunto*





Vamos a formalizar el concepto central que hemos trabajado.

Definición 1.2 *Una* **relación** *es una correspondencia que existe entre dos conjuntos: a cada elemento del primer conjunto le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto.*



---

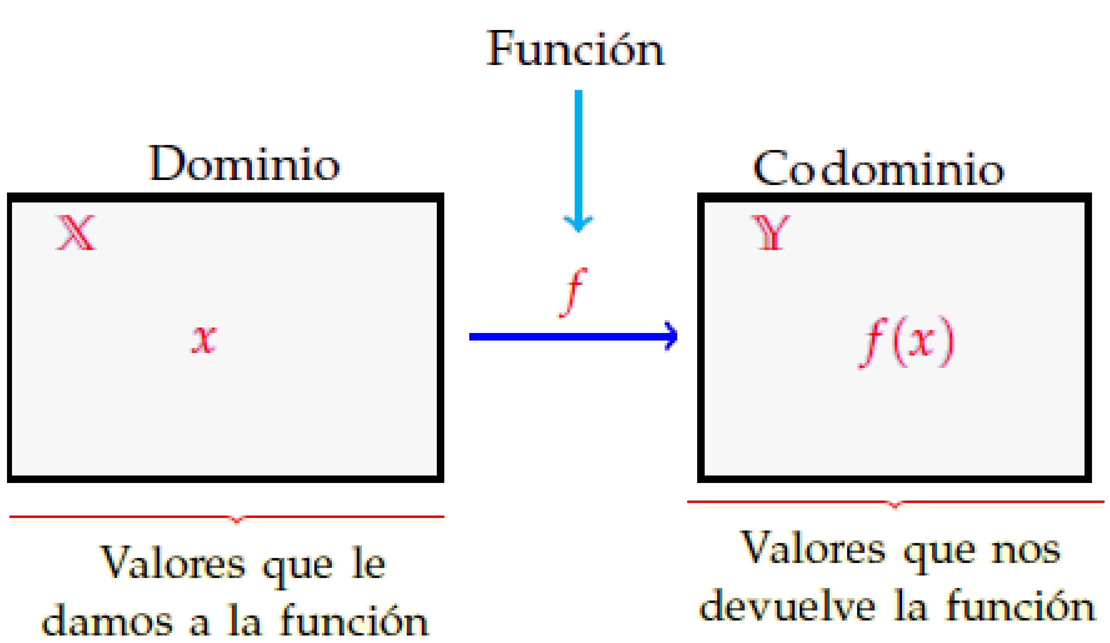
2. Funciones

Las relaciones más importantes se denominan **funciones**, e intuitivamente podemos afirmar que:

" una función es una regla que asocia elementos de un conjunto A con elementos de un conjunto B de modo que el elemento del conjunto A se asocia con $\boxed{\text{un y sólo un}}$ *elemento del segundo conjunto".*

2.0.1. La máquina

Podemos considerar a la función como una máquina, la cual recibe unos elementos y les aplica un proceso (este proceso es la regla que define la función) para transformar ese elemento en otro **único elemento**, no en dos o tres.
Imaginemos que esta máquina va a tomar los valores de un primer conjunto, le efectua un proceso y los coloca en un segundo conjunto. Al conjunto de donde la máquina toma inicialmente los valores le llamaremos el **dominio** de la función. Al conjunto donde la máquina deposita los valores procesados le llamaremos el **recorrido** o **rango** de la función.

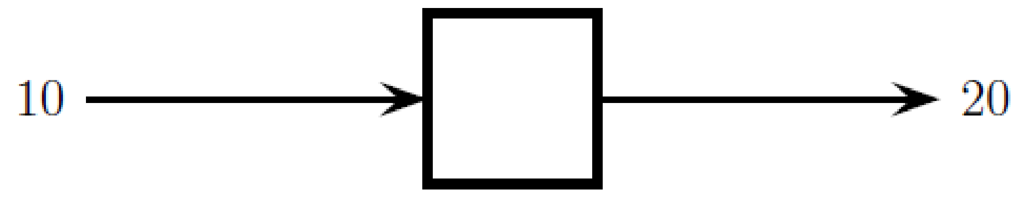


Una entrada es la cantidad independiente que no se repite. La salida es la cantidad dependiente. El valor de salida depende del valor de entrada. Para cada entrada, hay una salida única. No es posible que al darle un valor la función nos devuelva dos o más valores, pero sí es posible que nosotros le demos un valor y la función no nos pueda devolver valor alguno. En este último caso decimos que el valor que le dimos a la función no pertenece al dominio de la función, precisamente porque no lo puede transformar.

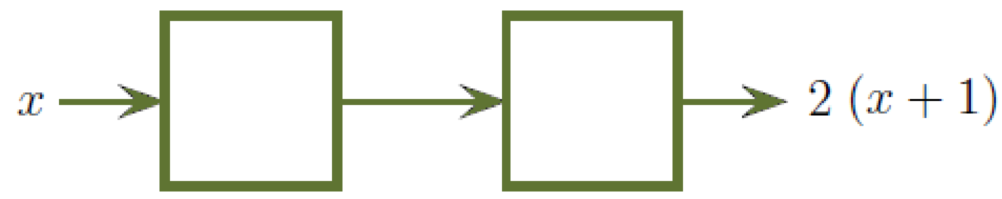
Notación: al número que "entra" a la máquina usualmente lo denotamos con la letra x. Al número que "sale" de la máquina lo denotamos con el símbolo $f(x)$.

Actividad 4

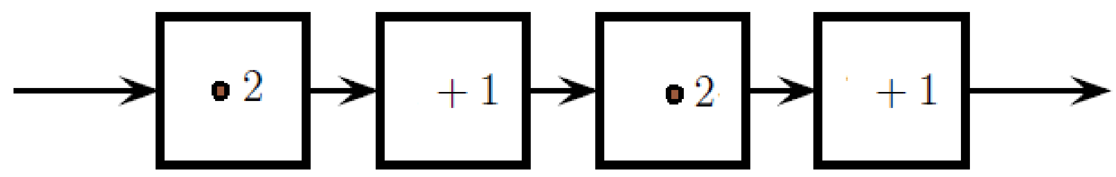
1. *En la figura, indica que acción realiza la máquina.*



2. *La figura presenta una máquina con dos procesadores, halla las acciones que hace cada máquina para obtener el resultado final indicado*



Actividad 5 *Se cuenta con la siguiente cadena de procesadores de una máquina, en donde cada uno hace la acción que se indica:*

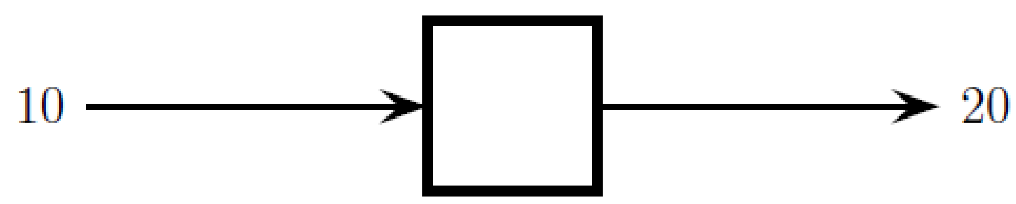


1. *¿Cuál número sale si la entrada es de 18?*
2. *¿Cuál número hay que dar de entrada para que salga el número 11?*
3. *¿Cuál término sale si la entrada es x?*
4. *¿Cuál término hay que dar de entrada para tener de salida y?*

Tarea 1 *Diseña una cadena de máquinas que produzca el término $2 \cdot \dfrac{2 \cdot x}{3} + 1$ a partir de la entrada x. ¿cuántas máquinas necesitaste?*

2.0.2. La función como par ordenado

Al escribir las entradas y salidas de una función como "pares ordenados", la entrada siempre va primero y la salida después. Así por ejemplo, en la máquina que duplica



$(10, 20)$ significa que la función toma el 10 (ingresa el 10 a la máquina) y devuelve 20. De igual modo el par $(5, 10)$ significa que entra el 5 y sale el 10. Esto me permite decirte que una función se puede definir también como un conjunto de pares ordenados:

Definición 2.1 *Una función de A en B es un conjunto de pares ordenados del tipo (a, b) con la propiedad de que cada elemento de A es el primer componente de una pareja ordenada y para todo $a \in A$, si (a, b) y (a, c) pertenece a función, entonces $b = c$ (porque a no se repite en otra pareja)*

Otra manera de decir lo anterior es que una entrada no puede dar dos resultados diferentes.

2.1 La función dada por una tabla

Cuando un función, matemática o empírica, es de mucha utilidad, se disponen sus valores en tablas. La tabla de la función nos indica algunos valores del conjunto inicial A y sus correspondiente valores del conjunto final B.

Actividad 6 *Estudiemos la variación de la superficie del cuadrado en función del lado. Una tabla y las preguntas que se formulan, te ayudarán. Consideremos las variables:*

- y: *valor del área del cuadrado.*
- x: *valor de la longitud del lado del cuadrado.*

Completa la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	a	a+1
y							

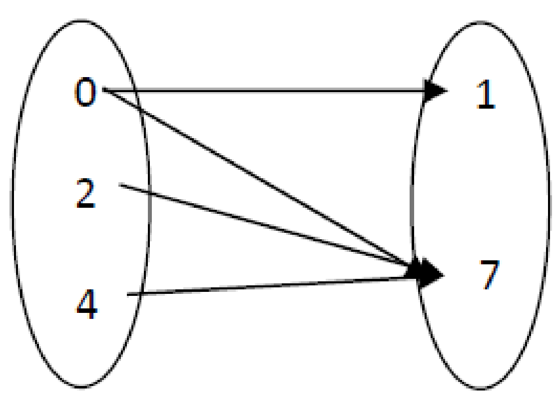
De la tabla de doble entrada se observa que a cada valor de x le corresponde **un y sólo un** valor al área.

Responde las siguientes preguntas:

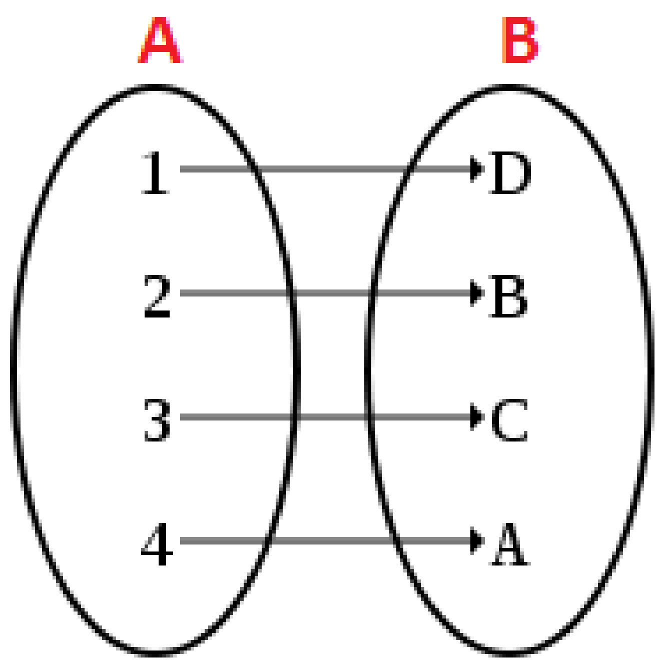
1. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado de 3,2 cm de lado?
2. ¿Cuál es la superficie de un cuadrado de 6,4 cm de lado, es decir, de lado doble del anterior?
3. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado de 25 cm^2 de superficie?
4. ¿cuál es el lado de un cuadrado de 10 cm^2 de superficie?
5. De la tabla, ¿es posible hallar una fórmula para el área de un cuadrado?

2.2 Función como correspondencia

Una correspondencia entre dos conjuntos es una relación entre ambos conjuntos, que hace corresponder a elementos del primer conjunto, elementos del segundo. La figura muestra una correspondencia cualesquiera, que no es interesante.



Cuando cada elemento del dominio solamente tiene una única imagen, entonces la correspondencia se denomina aplicación. Esto es más interesante, pues coincide con lo que hemos visto sobre funciones.

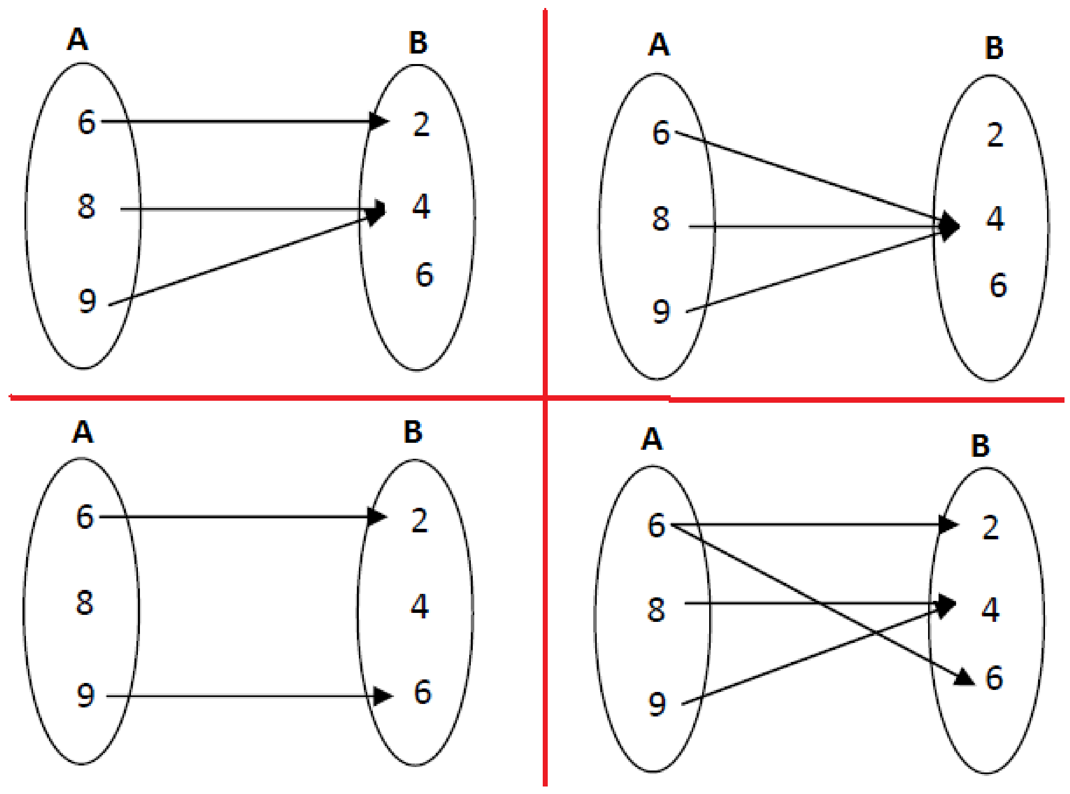


Definición 2.2 *Se establece una función de un conjunto A en un conjunto B, cuando se da una regla (criterio o ley) a través de la cual asociamos a cada elemento x de A un* **único** *elemento y de B*

$$\begin{aligned} f\ &: A \longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- La regla de correspondencia o de aplicación de la función se denota por la letra f, y representa a la función.
- La letra x es la llamada variable independiente (designa cualquier elemento de A)
- La letra $y = f(x)$ es la variable dependiente (representa un elemento de B), y es la imagen o valor de x por la función f
- A es el dominio o campo de existencia de la función.
- B es el codominio de la función.
- El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A se llama **recorrido** o **rango** de la función. Es un subconjunto del codominio. Se denota $rec(f)$ o bien $rang(f)$.
- Cuando A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se dice que f es una función real de variable real,

Actividad 7 *Dados los conjuntos $A = \{6, 8, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, y las relaciones definidas por los diagramas sagitales, determina cuáles son o no funciones de A en B.*



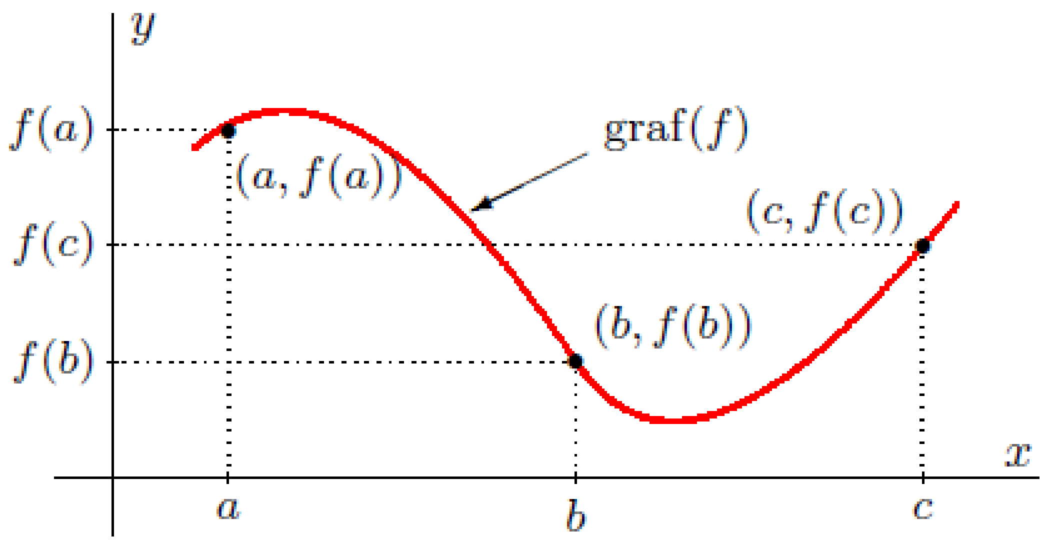
Observamos que para tener una función, debemos contar con 2 conjuntos, que pueden ser iguales entre sí, y una regla de correspondencia con las características antes descritas. Cuando no hay lugar a confusión, nos referimos a una función mediante la letra que usamos para su regla de correspondencia; por ejemplo, en el caso que nos ocupa podemos hablar simplemente de la función f.

2.2.1. Representación gráfica

Una función se representa en un gráfico en el sistema de coordenadas cartesianas: en el eje horizontal, llamado eje de las abscisas o eje x, se representa la variable independiente, y en el eje vertical, que se llama eje de las ordenadas o eje y, la variable dependiente.
Formalmente:

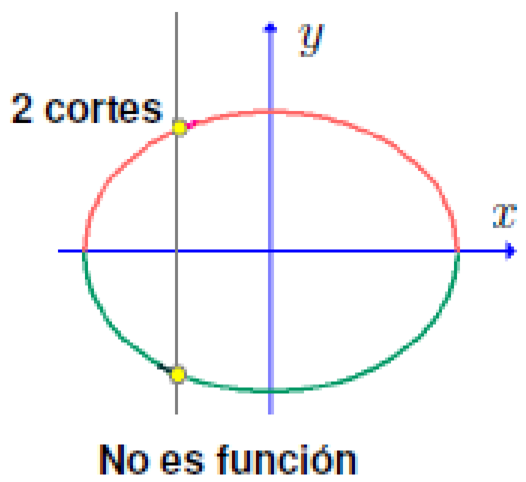
Definición 2.3 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El* **gráfico** *o* **gráfica** *de f es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ tal que $x \in dom(f)$. A su representación en el plano se le denomina curva o lugar geométrico. Escribimos*

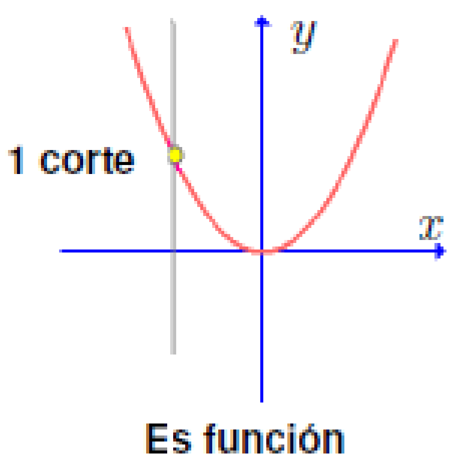
$$graf(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ x \in A\}$$



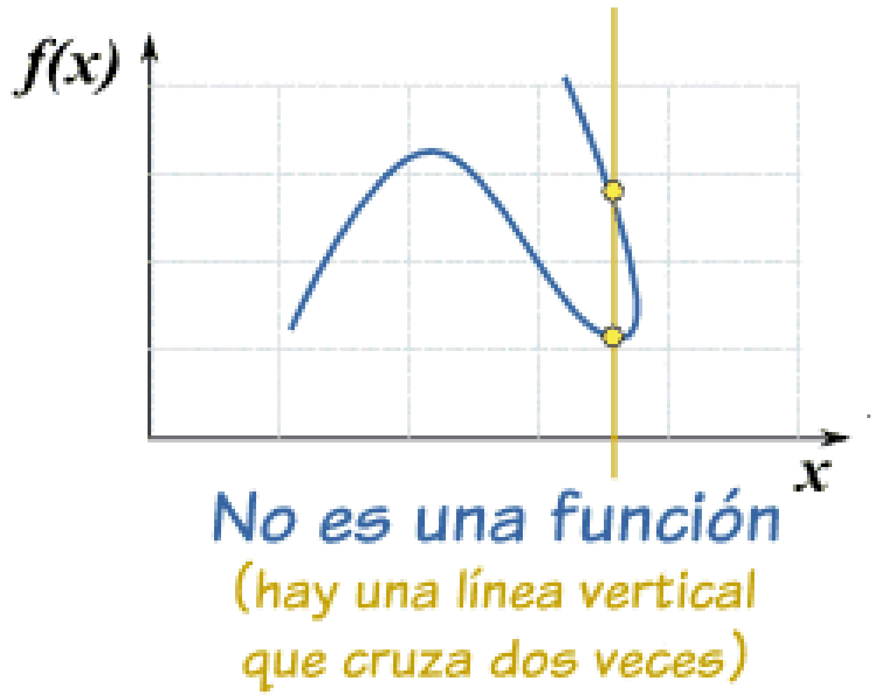
Al representar una función f en el sistema cartesiano, los pares ordenados $(x, f(x))$ se representan como puntos en el plano, de manera que podemos concluir que la gráfica de una función es un subconjunto del plano cartesiano. No toda curva en un plano cartesiano representa una función por lo tanto, tiene sentido preguntarse ¿Cuándo una curva en un plano cartesiano representa una función?

2.2.2. La prueba de la línea vertical





No es sencillo, a partir de una fórmula, descubrir si se trata de una función o no, por ejemplo, de las expresiones: $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - y = 0$, solamente la segunda de ellas es una función ¿Cómo saberlo? La gráfica en el plano cartesiano nos puede ayudar.
En un gráfico de función, ninguna línea vertical la intersecta más de una vez. Si alguna cruzara más de una vez no sería una función.



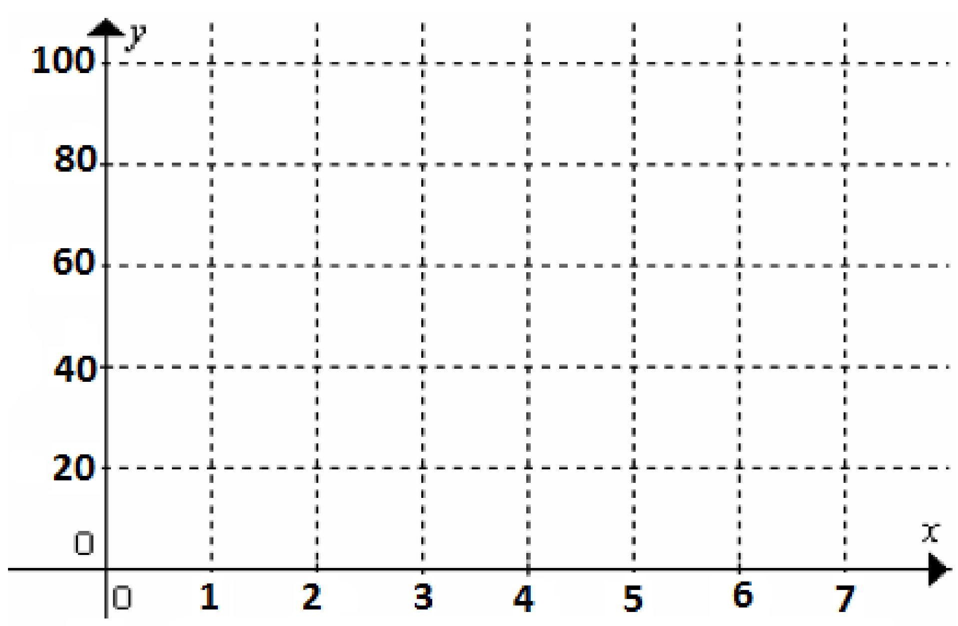
2.2.3. Funciones por fórmulas

Todo fenómeno que se pretenda modelizar necesita ser cuantificado, así las variables relacionadas pueden considerarse como pertenecientes a conjuntos de números, en este caso hablamos de funciones numéricas.

Actividad 8 *Un pub abre a las 20 p.m. y cierra cuando todos los clientes se han ido. A partir de registros mensuales se obtuvo una función cuadrática que permite modelizar el número de personas que hay en el pub t horas después de su apertura, la misma es:*

$$P(t) = 60t - 10t^2$$

1. *Bosquejar en el plano cartesiano una posible gráfica de esta situación.*



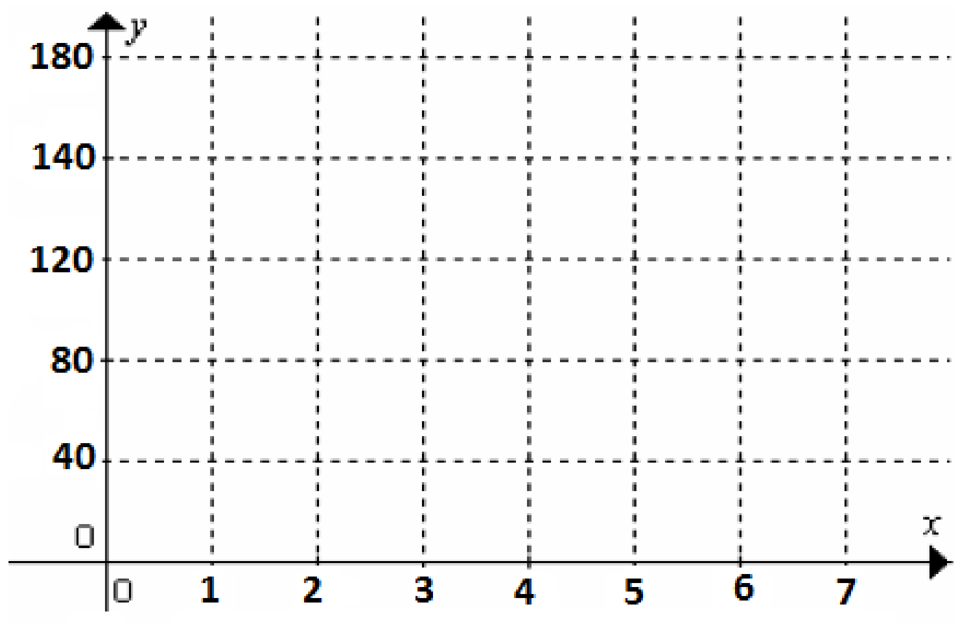
2. *Determinar el número máximo de personas que van al pub una determinada noche e indicar en qué horario se produce la máxima asistencia de clientes.*
3. *Si queremos ir al pub cuando haya al menos 50 personas, ¿a qué hora tendríamos que ir?*
4. *Si queremos estar sentados y el pub sólo tiene capacidad para 80 personas sentadas, ¿a partir de qué hora ya estamos seguros que no conseguiremos sillas?*

Las fórmulas tienen la ventaja que permiten construir tablas y gráficos, además de poder usarlas para explicar comportamientos pasados y extrapolar tendencias futuras.

Actividad 9 *Un auto avanza a una velocidad constante de 40 kilómetros por hora. Completa la tabla siguiente y da respuesta a las interrogantes.*

horas	x	1	2	3	4	5	6	7
distancia	y	40						

- *¿Qué distancia recorre al cabo de 3 horas?*
- *¿Qué distancia recorre al cabo de 6 horas?*
- *Escribe los pares ordenados encontrados para esta relación*
- *Escribe la fórmula que indica la distancia recorrida (y) en función del número de horas (x)*
- *¿Todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con algún elemento del conjunto de llegada?*
- *¿Cada elemento del dominio está relacionado con uno y sólo un elemento del conjunto de llegada?*
- *Haz un bosquejo gráfico del problema.*



2.3 Calculando dominio de funciones

Para una función $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, el dominio de una función lo constituyen todos los valores del argumento x que hacen que $f(x)$ exista y sea un número real. Esto es,

$$dom(f(x)) = \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

A veces ocurre, según qué regla definamos, que no todo elemento del dominio tiene su correspondiente imagen. Por eso es necesario identificarlos y excluirlos.

Ejemplo 2.4 *Consideremos la fórmula* $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Si queremos que represente una función debemos determinar los valores de la variable independiente x que indefinen la fórmula. Una fracción se indefine sólo si el denominador se anula, y eso acontece si $x = 1$. Por tanto, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ representa una función si

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/\ x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

de este modo toda $x \in \mathbb{R}$ tiene una imagen, y ésta es única.
El siguiente cuadro es referencial y contiene todas las funciones que estudiaremos a lo largo del curso.

Función	Dominio
$f(x) = a_0 + a_x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\mathbb{R} - \{Q(0)\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\{x \in \mathbb{R}/\ x \geq 0\}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a^x$, $a > 0, A \neq 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R}/\ x > 0\}$
$f(x) = sen x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{sen x}{\cos x}$	$\mathbb{R} - \{\cos x = 0\}$

Actividad 10 *Para las fórmulas dadas, establece el dominio que las transforma en función:*

- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = \sqrt{-x}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1}$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \lvert x - 2 \rvert$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Tarea 2 *Prueba que el intervalo $[0, 5]$ es el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{x(5 - x)}$

---

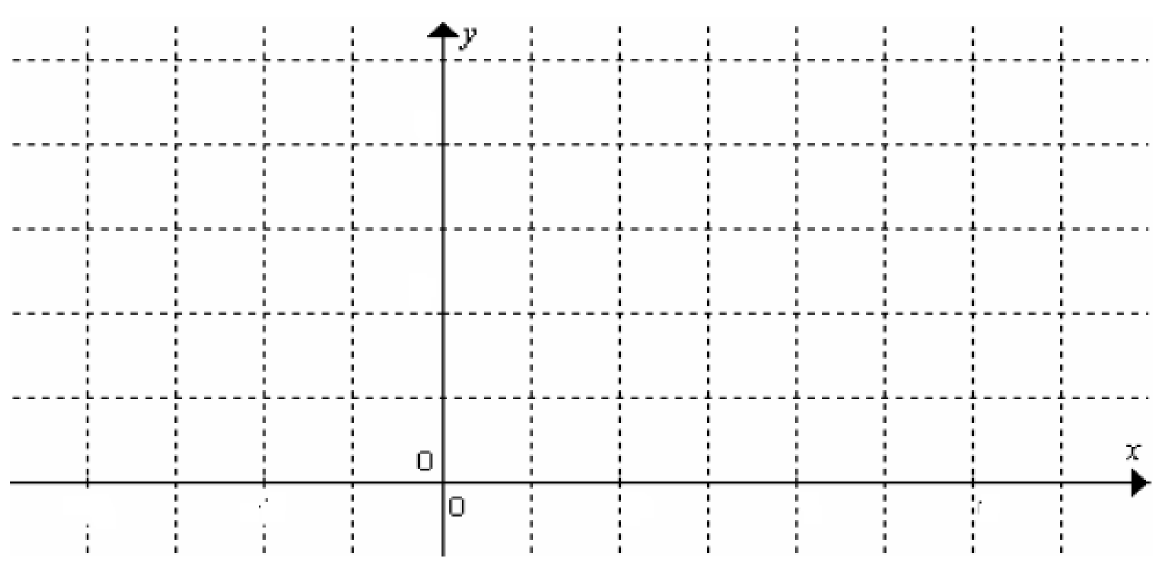
3. Tipos de funciones

Dependiendo de las características que tome la función f en x, tendremos distintos tipos de funciones:

- **Función constante**

Actividad 11 *Considera la función que a todo número real de entrada le asigna el valor 3.*

1. *Anota la fórmula de esta función.*
2. *Anota el dominio de la función.*
3. *Anota el recorrido de la función.*
4. *Utiliza el sistema cartesiano dado para graficar la función.*

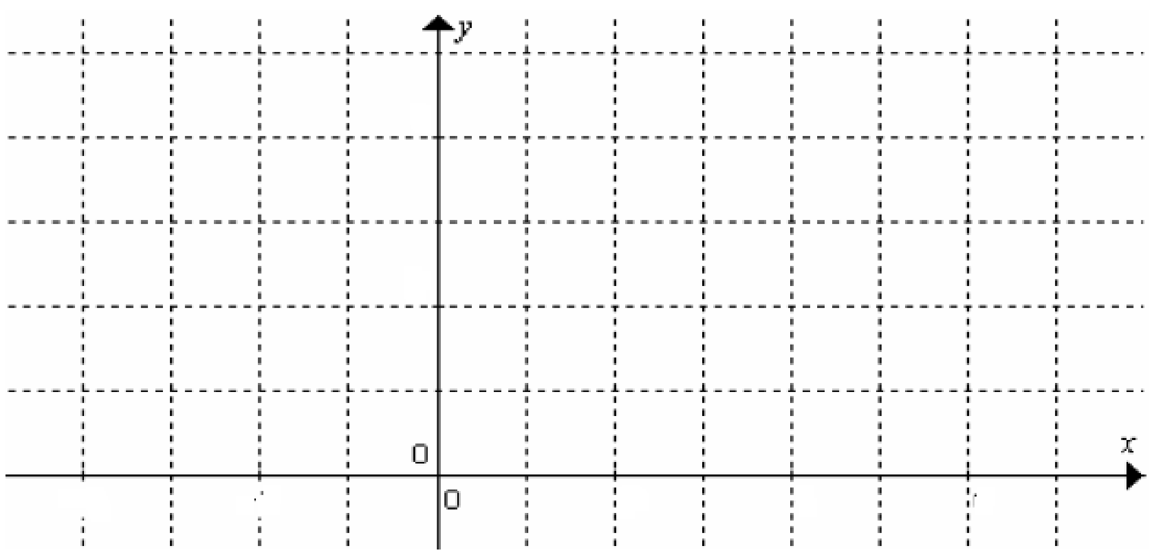


Definición 3.1 *Una función de la forma $f(x) = b$, donde b es una constante, se conoce como una función constante.*

- **Función lineal**

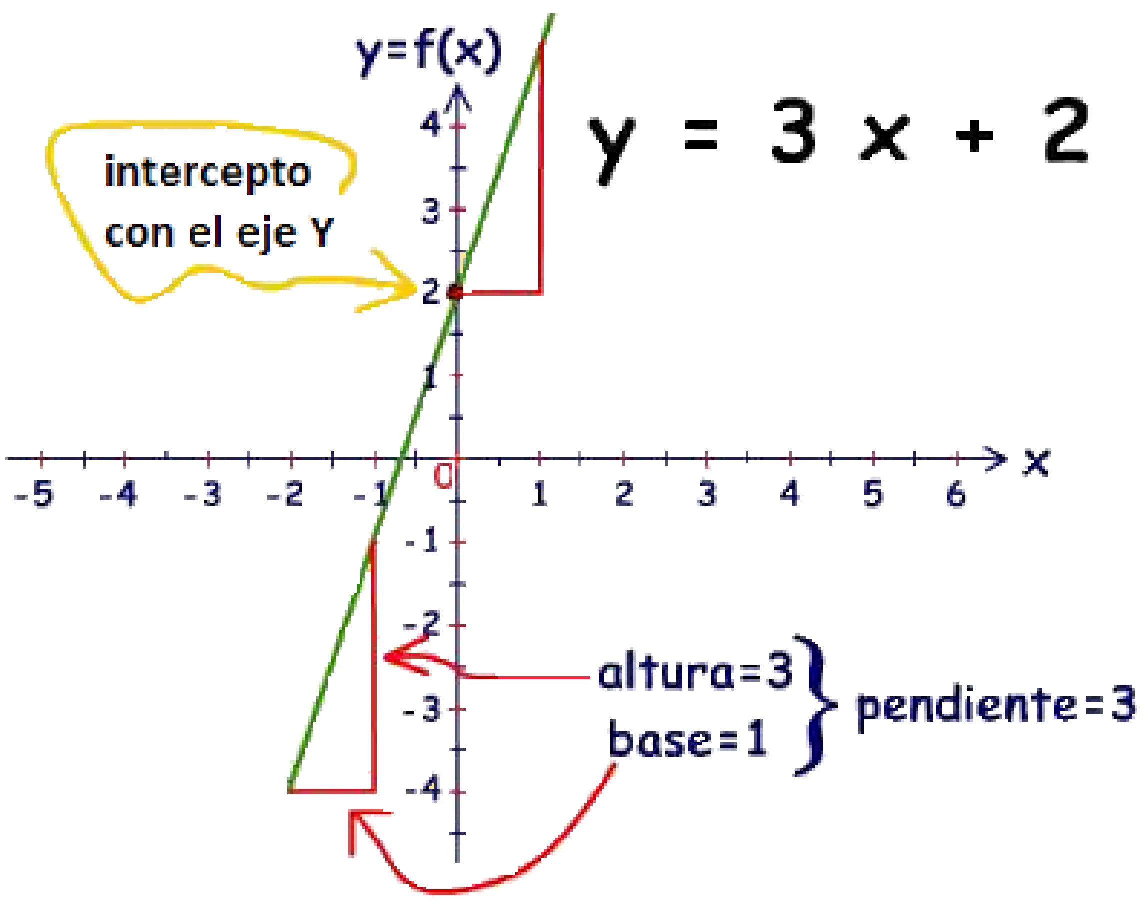
Actividad 12 *Considera la función que a todo número real de entrada le asigna el doble del número.*

1. *Anota la fórmula de esta función.*
2. *Anota el dominio de la función.*
3. *Anota el recorrido de la función.*
4. *Utiliza el sistema cartesiano dado para graficar la función.*



Definición 3.2 *Una relacion funcional de la forma $y = mx + n$ se denomina* **función lineal**.

El número real m se llama **pendiente** o **tasa de cambio** de la recta y es la relación entre la altura y la base. El número real n es el punto donde esta función se intersecta con el eje de ordenadas, se denomina **coeficiente de posición**.



La figura muestra la gráfica de la función lineal $y = 3x+2$. Se observa que $m = 3$ y $n = 2$, y vemos que por cada unidad recorrida en x la recta sube 3 unidades en y por lo que la pendiente es $m = 3$.
Si la pendiente m no viene explicitada, con dos puntos que estén en la recta la tenemos, pues

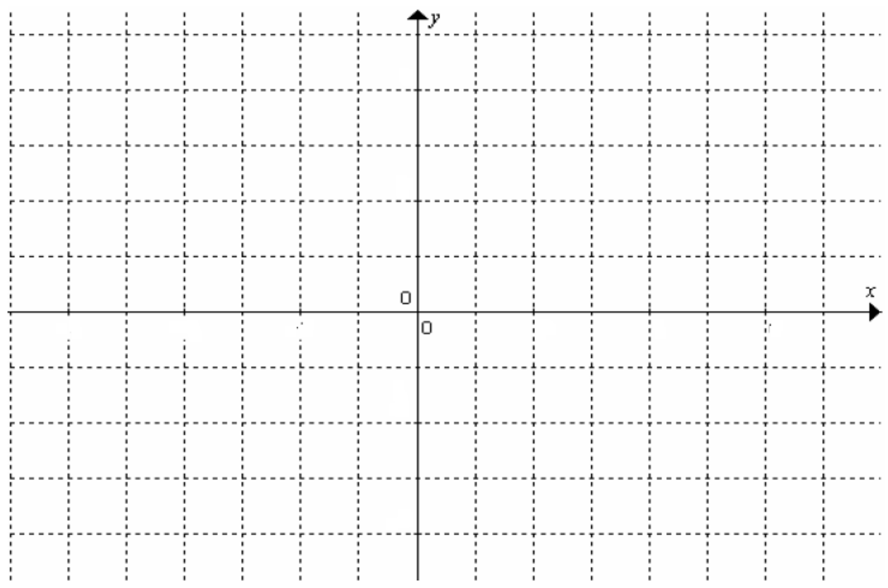
$$\text{pendiente } m = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$

Actividad 13 *Considera la función lineal $y = 2x - 1$*

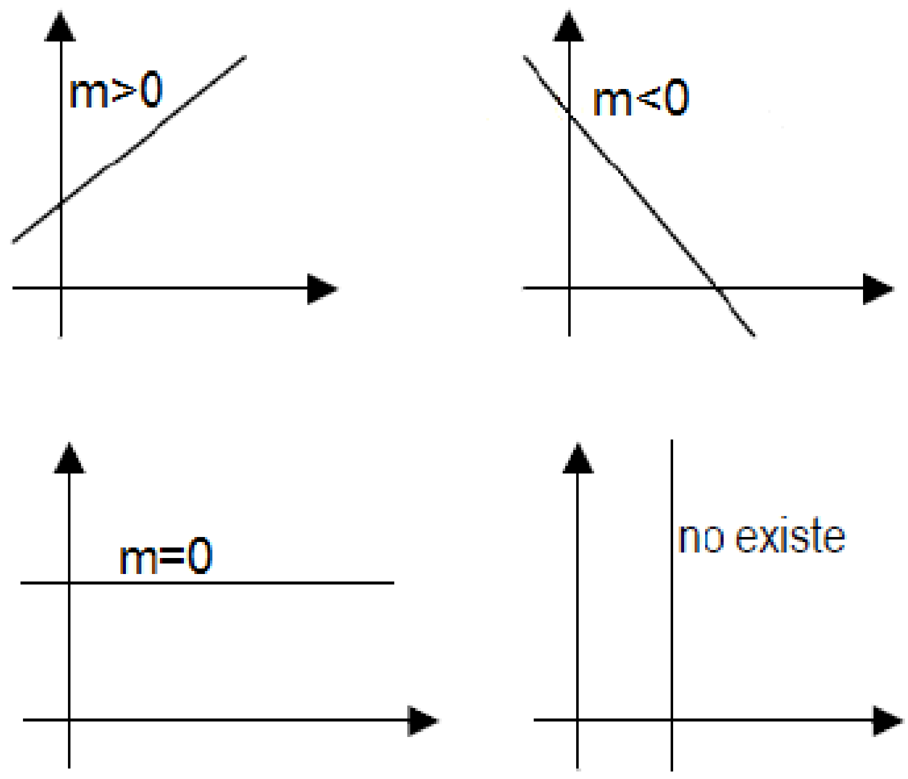
1. *Determina la pendiente*
2. *Halla el coeficiente de posición.*
3. *Tabula algunos puntos:*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y									

4. *Con estos datos bosqueja la recta.*

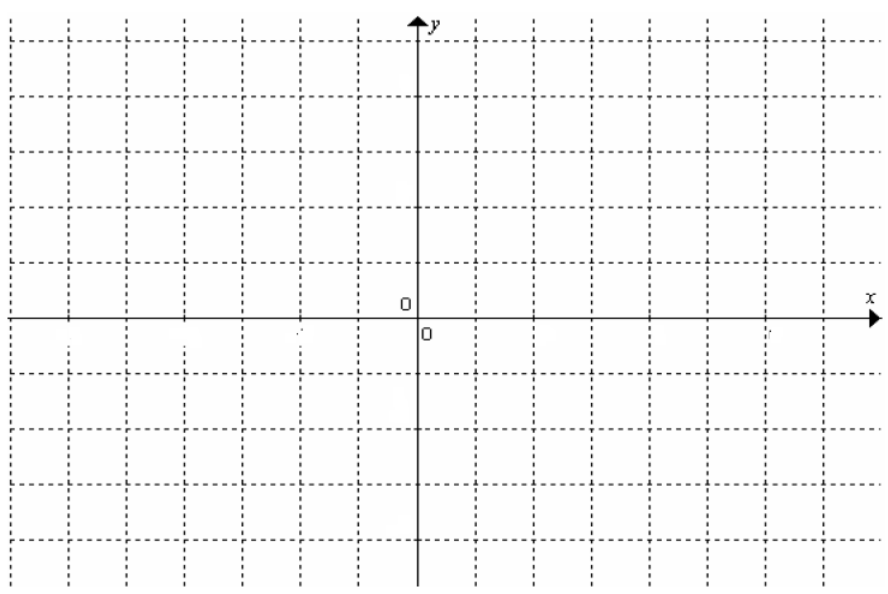


La característica geométrica de una función lineal es que representa una línea recta, de modo que su representación gráfica y los valores asignados a la pendiente m y al coeficiente de posición n, son de gran utilidad en la interpretación de situaciones prácticas. La representación gráfica de la función lineal de acuerdo a las propiedades asociadas a la pendiente son de la forma:



Actividad 14 *Graficar en el plano cartesiano las funciones:*

$$f(x) = x, \quad f(x) = 2x, \quad f(x) = x - 1$$

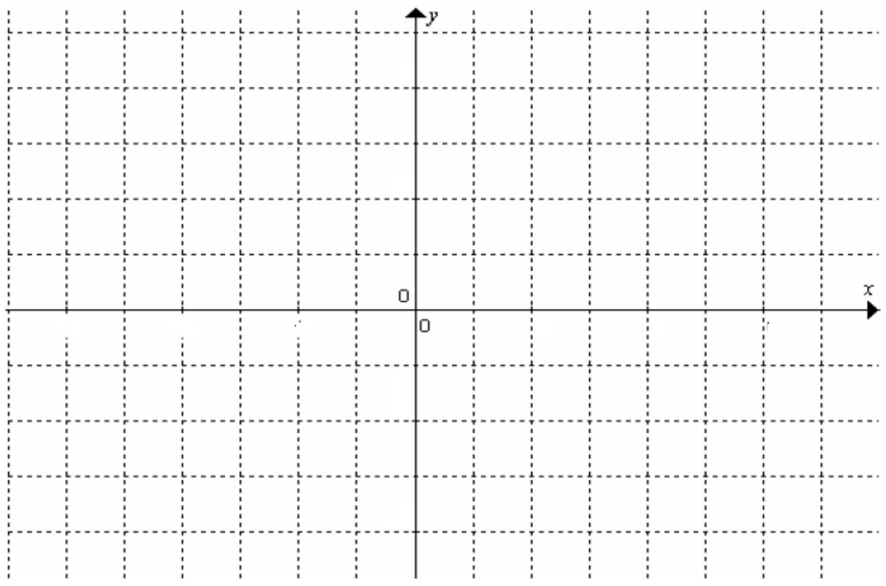


Definición 3.3 *La función de* **identidad** *se define mediante la expresión $f(x) = x$*

La función identidad tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder el mismo valor en el codominio y, por lo tanto, éste es $\mathbb{R}$. La gráfica de esta función es la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de $45°$.

Actividad 15 *Graficar las funciones:*

$$f(x) = -x, \quad f(x) = -3x, \quad f(x) = -x + 1$$



De las actividades anteriores puedes decidir ¿cuándo dos rectas son paralelas?

Tarea 3 *La gráfica de la temperatura en grados Fahrenheit (F) en función de la temperatura en grados celcius (C) es una recta. Se sabe que $212°\,F$ y $100°\,C$ representan la temperatura a la que hierve el agua. De igual manera, $32°\,F$ y $0°\,C$ representan el punto de congelación del agua.*

1. *Escribir la ecuación de la recta*
2. *Escribir la pendiente de la recta*
3. *¿Qué temperatura F corresponde a $20°\,C$?*
4. *¿Qué temperatura tiene el mismo valor tanto en F como en C?*
5. *Graficar la recta*

- **Función cuadrática**

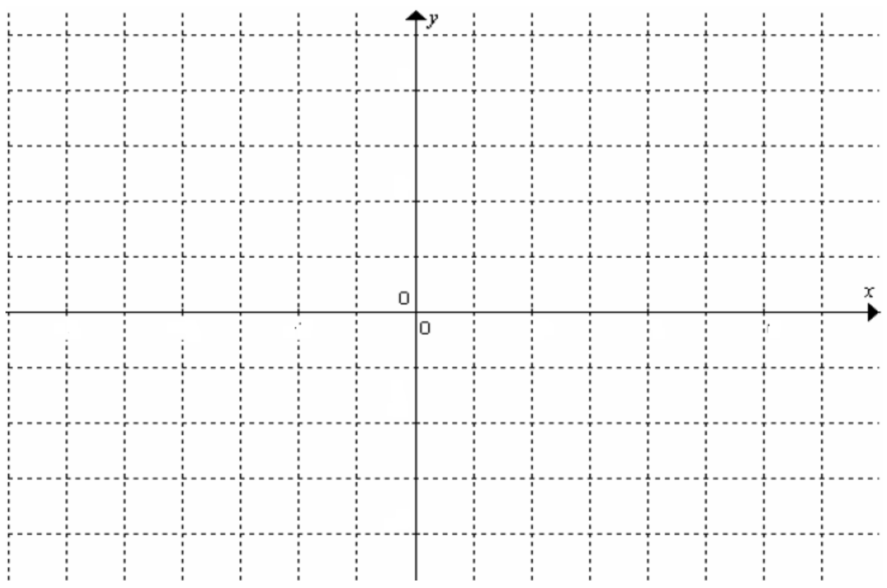
Definición 3.4 *Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes y a es diferente de cero, se conoce como función cuadrática.*

La representación gráfica de una función cuadrática es una parábola. Una parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. El vértice de una parábola se puede hallar por la fórmula:

$$\left(-\frac{2b}{a}, f\left(-\frac{2b}{a}\right)\right)$$

Actividad 16 *Considera la función que a todo número real de entrada le asigna el cuadrado del número.*

1. *Anota la fórmula de esta función.*
2. *Anota el dominio de la función.*
3. *Anota el recorrido de la función.*
4. *Utiliza el sistema cartesiano dado para graficar la función.*



- **Función polinómica**

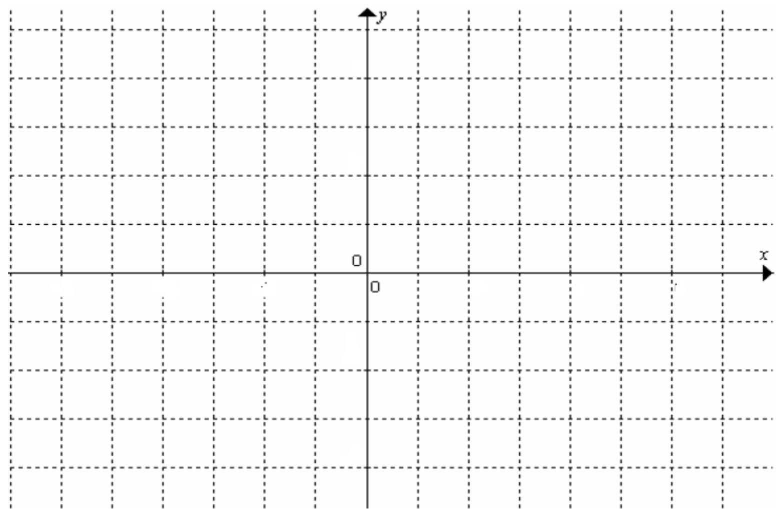
Definición 3.5 *Esta clase de funciones se caracterizan por ser de la forma*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

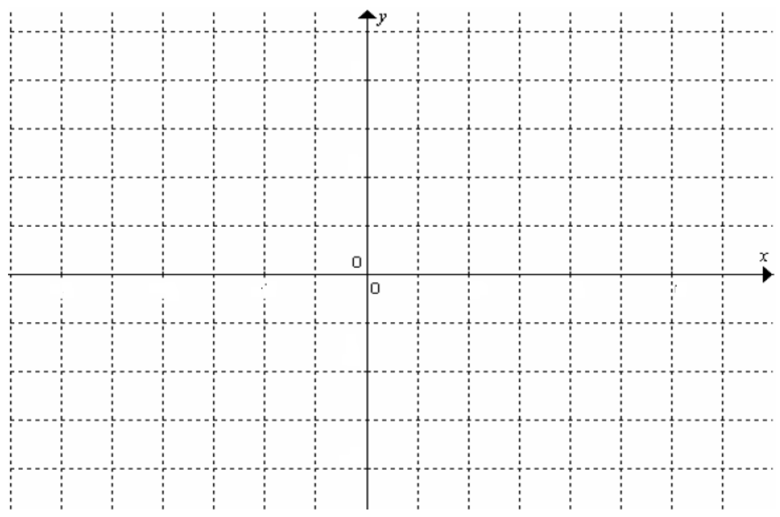
en donde los a_i son números reales y se denominan coeficientes de la función polinomial.

Para graficar estas funciones debemos tener claro, en primer lugar, cual es su recorrido. Para esto, lo único que tenemos que hacer es ver si n es **par** o **impar** y que signo tiene el coeficiente de a_n.

Actividad 17 *Hagamos un bosquejo de las funciones:* $y = x^2,\ y = x^4,\ y = -x^2,\ y = -x^4$

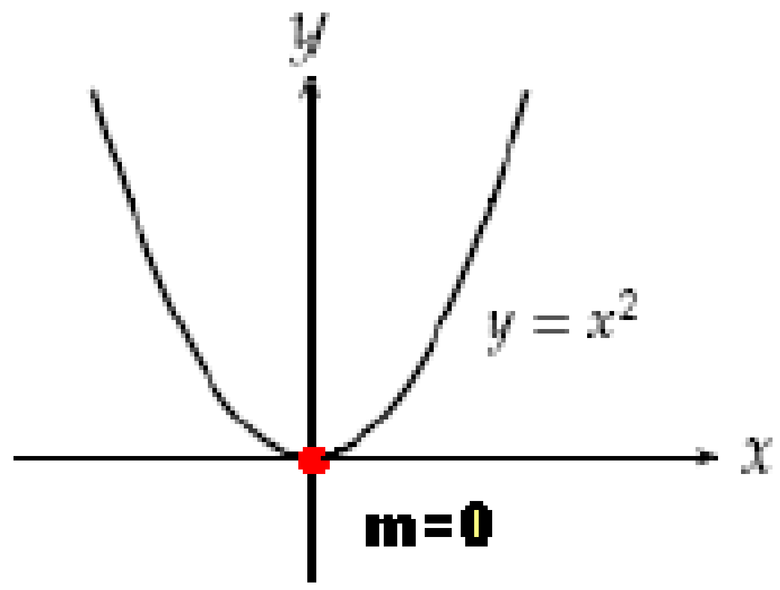


Actividad 18 *Hagamos un bosquejo de las funciones:* $y = x^3,\ y = -x^3,\ y = x^5,\ y = -x^5$

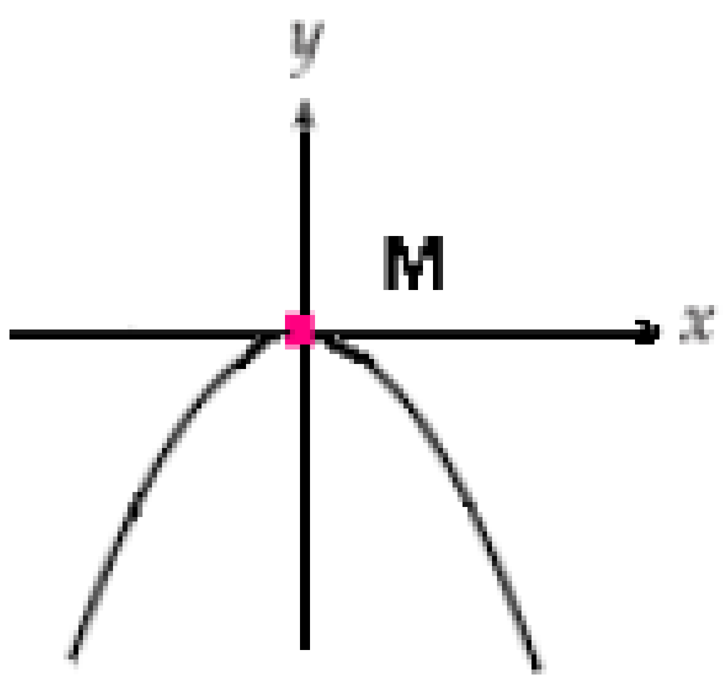


De estos ejemplos podemos inferir que:

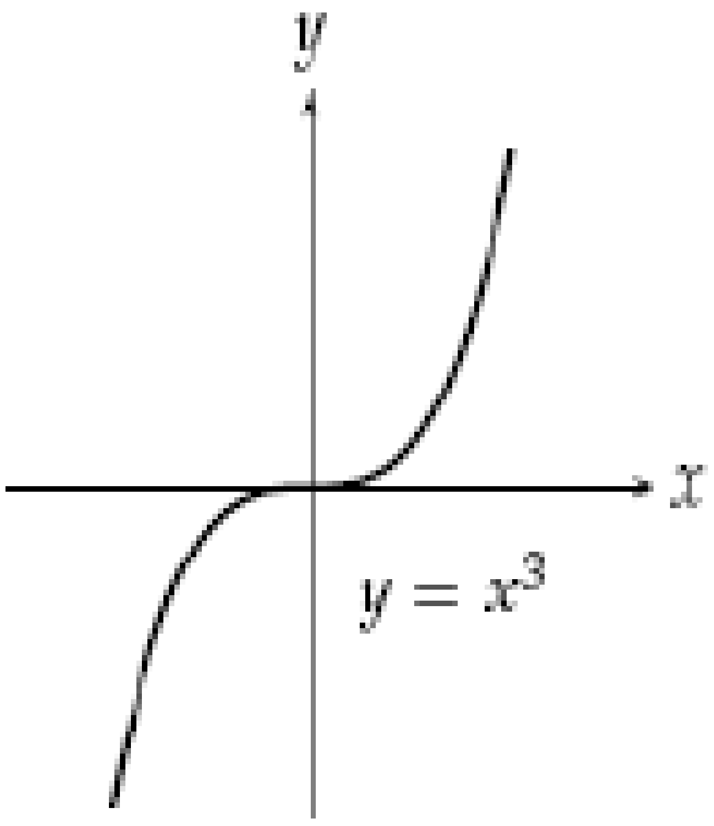
1. Si $a_n > 0$ y n es par, entonces el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$, siendo m el mínimo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = 1$, $n = 2$ se tiene la parábola $y = x^2$, que satisface esta propiedad. En este caso $m = 0$.



2. Si $a_n < 0$ y n es par, entonces el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, siendo M el máximo valor de la función. Por ejemplo, con $a_n = -1$, $n = 2$ se tiene la parábola $y = -x^2$, que satisface esta propiedad. $M = 0$



3. Si n es impar, entonces el recorrido es el intervalo $(-\infty, \infty)$. En este caso la función no tiene valor mínimo ni máximo. Por ejemplo, con $n = 3$ se tiene la parábola $y = x^3$ que satisface esta propiedad.

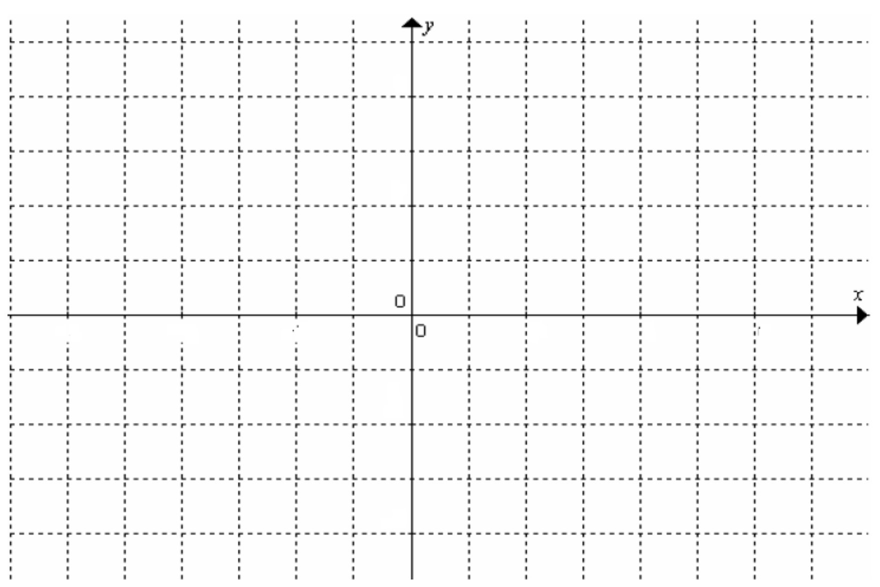


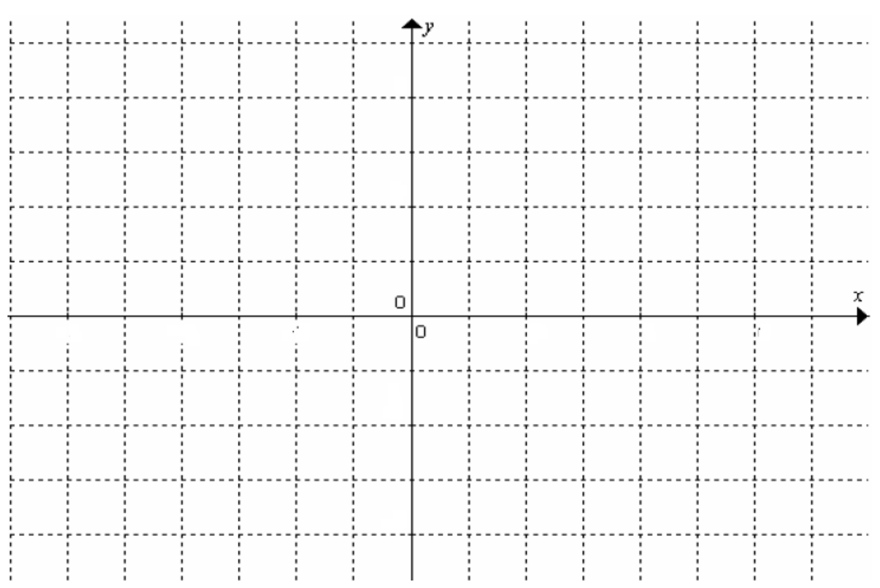
Actividad 19 *A partir de la gráfica de $y = x^2$, graficar:*

1) $y = (x+1)^2, \ y = (x-1)^2$

2) $y = x^2 + 1, \ y = x^2 - 1$

3) $y = 2x^2, \ y = \frac{1}{2}x^2$





Tarea 4 *Una epidemia se empieza a propagar por el país. El Servicio de Salud de la Araucanía estima que el número de personas que la contraerán es una función del tiempo transcurrido desde que se descubrió la epidemia queda establecida por la siguiente ecuación*

$$n = f(t) = 300t^3 - 20t^2$$

en donde n es el número de personas enfermas y $0 < t \leq 30$, medidos en días contados a partir de la detección de la epidemia.

1. *¿Cuántas personas contraerán la epidemia al cabo de 10 días?*
2. *¿Cuántas personas la contraerán al cabo de 15 días?*
3. *Graficar la función.*

Observación 3.6 *Funciones polinómicas de orden mayor a 3 no serán de nuestro interés, pues serán graficadas con bastante exactitud en el curso siguiente, haciendo uso de la derivada*

3.1 Funciones Racionales

Una función racional es una función que puede ser expresada de la forma:

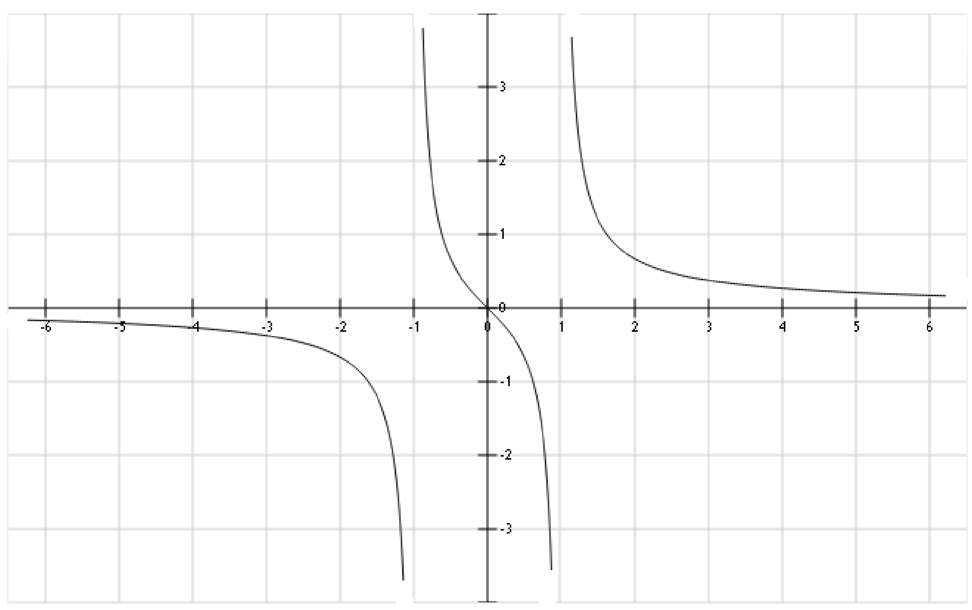
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. El dominio de definición son todos los números reales menos las raíces del denominador.
En esta clase de funciones es interesante saber sobre la existencia o no de ciertas rectas llamadas asíntotas.

Definición 3.7 *Se llama* **asíntota** *de una función a una recta cuya distancia a la curva tiende a cero, a medida que el argumento x de la función crece sin límite o bien cuando tiende a un número.*

1. *Si $q(a) = 0$ implica que $x = a$ es asíntota* **vertical**
2. *$n < m$ implica que el eje x es asíntota* **horizontal**
3. *$n > m$ implica que no hay asíntota* **horizontal**
4. *$n > m$ en un grado, entonces la función lineal que queda al dividir $p(x)$ por $q(x)$ es asíntota* **oblícua**
5. *$n = m$ implica que la recta $\frac{a_n}{b_n}$ es asíntota* **horizontal**

Actividad 20 *Observa la gráfica siguiente que representa a la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$*



1. *Anota el dominio de esta función.*
2. *Escribe el recorrido de la función*
3. *¿Ves alguna asíntota?*

4. El profesor te mostrará como se hace la gráfica.

Actividad 21 Estudia la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

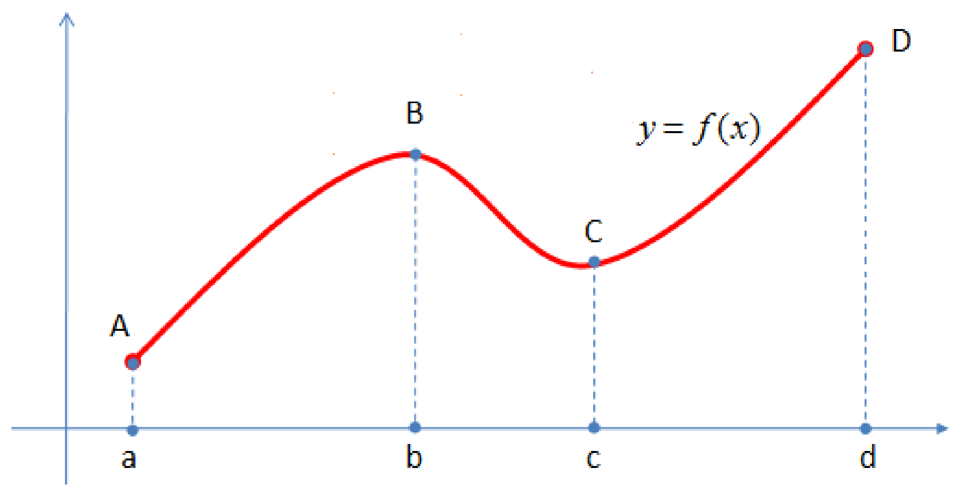
3.2 Propiedades de las funciones

Algunas propiedades o características que pueden presentar las funciones las estudiamos a continuación.

3.2.1. Funciones Monótonas

*La expresión " monótona" involucra dos tipos de comportamientos en las funciones, el crecimiento (a medida que la x crece la y también **crece**) y el decrecimiento (a medida que la x crece la y **decrece**).*

Actividad 22 *La gráfica muestra una función definida en $[a, d]$. Establece en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente. Anota su mayor y menor valor.*



Definición 3.8 *Sea f función real definida sobre $D \subset \mathbb{R}$. Se tiene:*

- *f es creciente en D si y sólo si*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- *f es decreciente en D si y sólo si*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *f es estrictamente creciente en D si y sólo si*

$$x_1 <\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- *f es estrictamente decreciente en D si y sólo si*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

En la práctica, el método más cómodo para estudiar la monotonía de una función (sin derivada) es mediante la tasa de variación media. Esto es,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$x_1 - x_2 < 0 \Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0$$

Por tanto, si dividimos la variación de la imagen entre la variación de los argumentos, el cociente (tasa de variación media) será mayor o igual que cero:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0, \ \forall x_1, x_2 \in D$$

Para los casos restantes tenemos:

- *f es estrictamente creciente en D si y sólo si*
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \ \forall x_1, x_2 \in D$$
- *f es decreciente en D si y sólo si*
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0, \ \forall x_1, x_2 \in D$$
- *f es estrictamente decreciente en D si y sólo si*
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \ \forall x_1, x_2 \in D$$

Actividad 23

1. *Probar que la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.*
2. *Determinar los intervalos en que crece o decrece la función f con ecuación $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, con $x \neq 1$.*

Tarea 5 *Usa la tasa de variación media para probar que:*

1. *La función $f(x) = 2x + 3$ es estrictamente creciente.*
2. *La función $g(x) = -2x + 3$ es estrictamente decreciente.*
3. *La función $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 1]$ y es estrictamente creciente en el intervalo $[1, \infty)$*

ADVERTENCIA:

Es muy importante señalar que para probar que la función es creciente, no es suficiente hacerlo con ejemplos numéricos, por numerosos que sean, puesto que no estamos seguros que en algún par de puntos no se cumpla la condición.

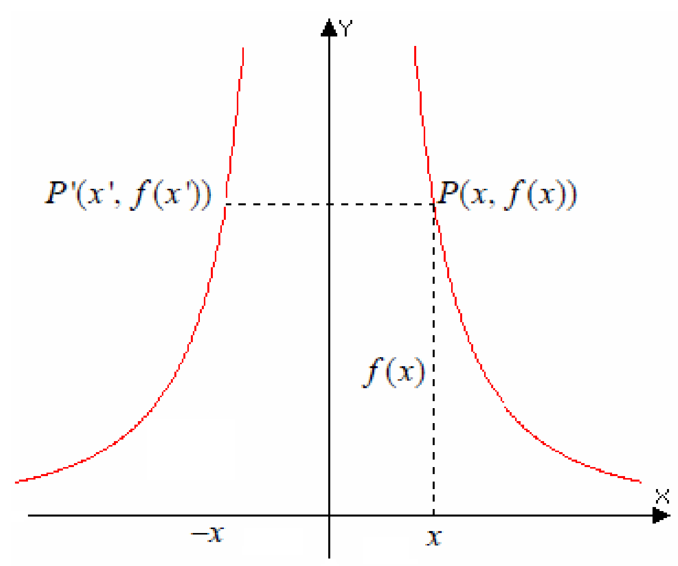
NO SE PUEDE DEMOSTRAR UNA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA SOLO CON EJEMPLOS

3.2.2. Funciones Pares e Impares

Desde un punto de vista geométrico, las funciones pares son las que presentan simetría respecto del eje y, así como las impares la presentan respecto del origen.

- **FUNCIONES PARES:**

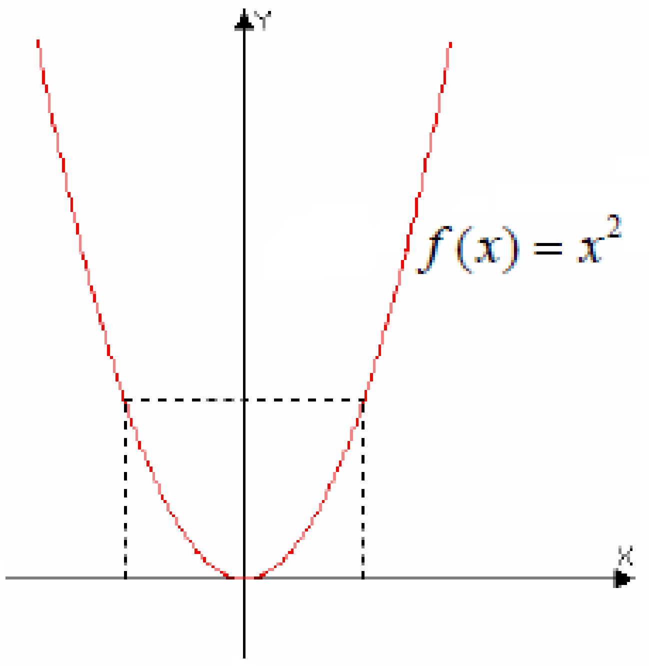
Sea $f : D \to \mathbb{R}$. Se dice que f es simétrica respecto del eje de ordenadas y cuando todo punto de la gráfica de f tiene su simétrico respecto de y en la misma grafica.



Definición 3.9 *Decimos que f es una función par o simétrica respecto del eje de ordenadas si*

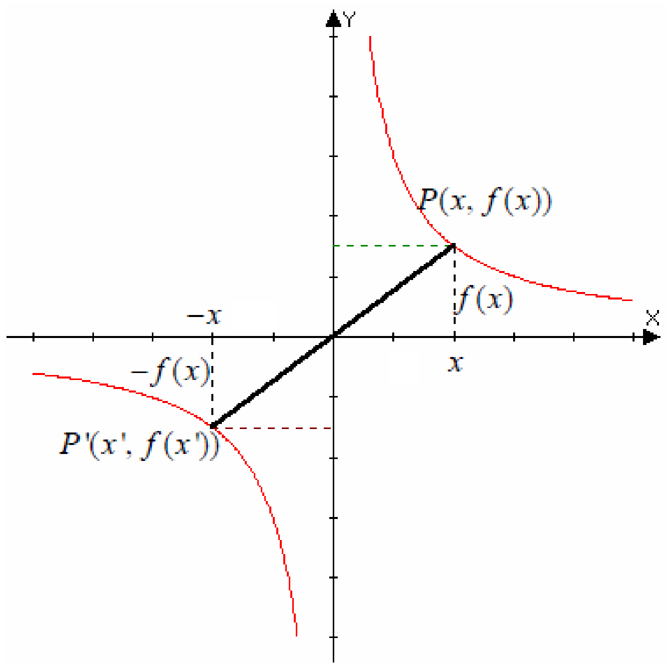
$$f(x) = f(-x),\ \forall x, -x \in dom(f)$$

Actividad 24 *Prueba, usando la definición, que f de la figura es una función par.*



- **FUNCIONES IMPARES:**

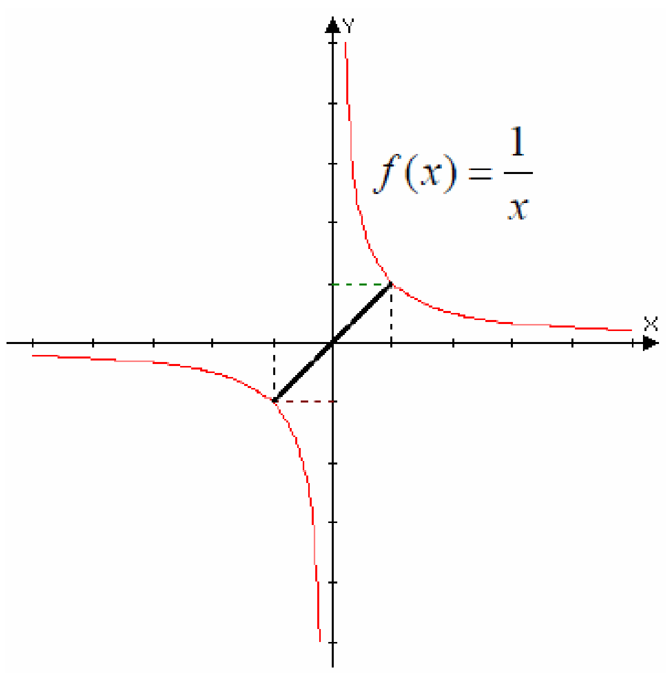
Una función es simétrica respecto del origen cuando todo punto de la gráfica de f tiene su simétrico respecto del origen en la misma gráfica.



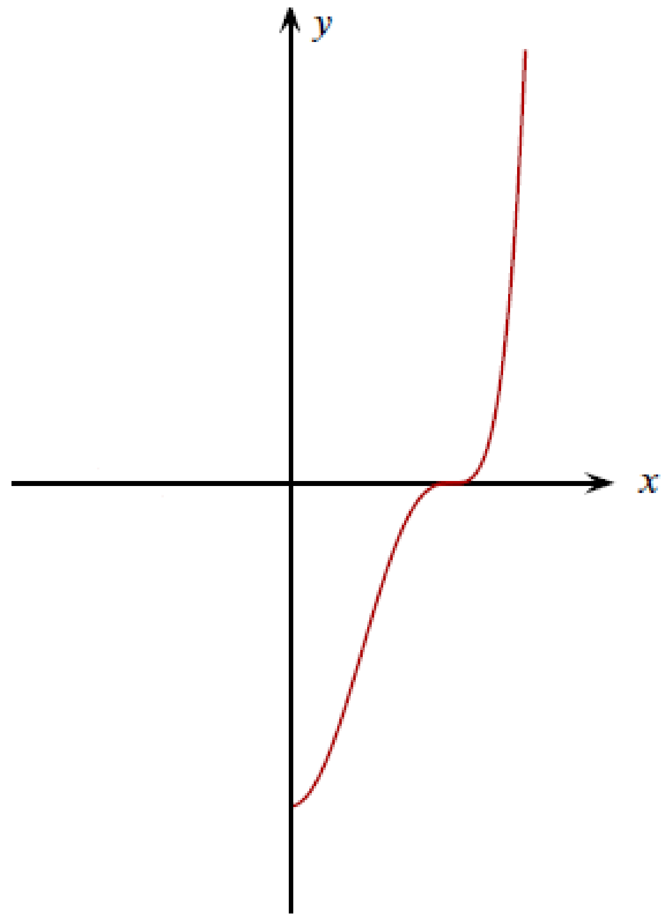
Definición 3.10 *Decimos que f es una función impar o simétrica respecto del origen de coordenadas si*

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x, -x \in dom(f)$$

Actividad 25 *Verifica, usando la definición, que la función que muestra la gráfica es impar.*



Actividad 26 *Completa la gráfica de la función para que sea una función par.*



Actividad 27 *Determina, algebraicamente, la paridad o imparidad de las funciones:*

- $f(x) = x^2 - 4$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
- $f(x) = x^3 - x^5$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

3.2.3. Funciones Acotadas

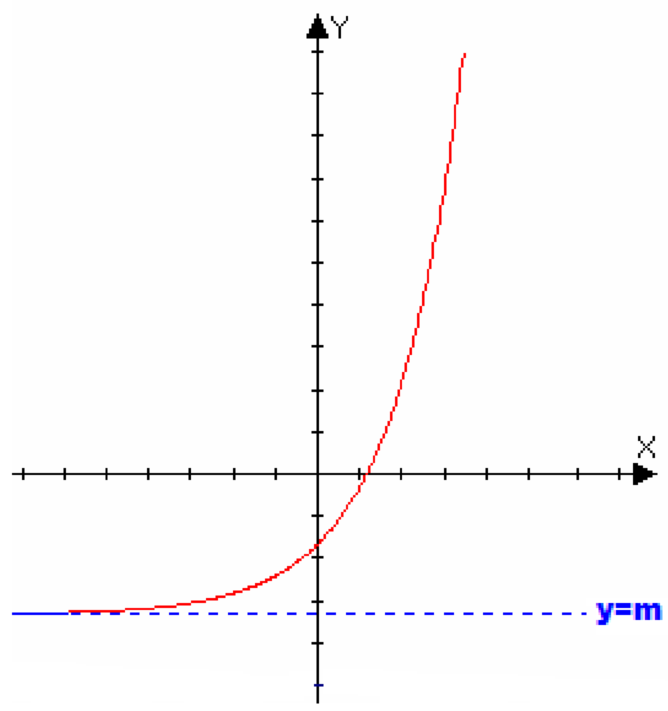
Aquí lo único que cuenta es el rango o recorrido de la función. Si el rango está acotado entonces la función se dice **acotada**, *en caso contrario,* **no acotada**. *Esto es como saber si hay un piso y un techo para la fluctuación de la función. Formalizamos:*

Definición 3.11

- *Decimos que f está acotada inferiormente sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ si existe un número real m tal que*

  $$f(x) \geq m, \quad \forall x \in D$$

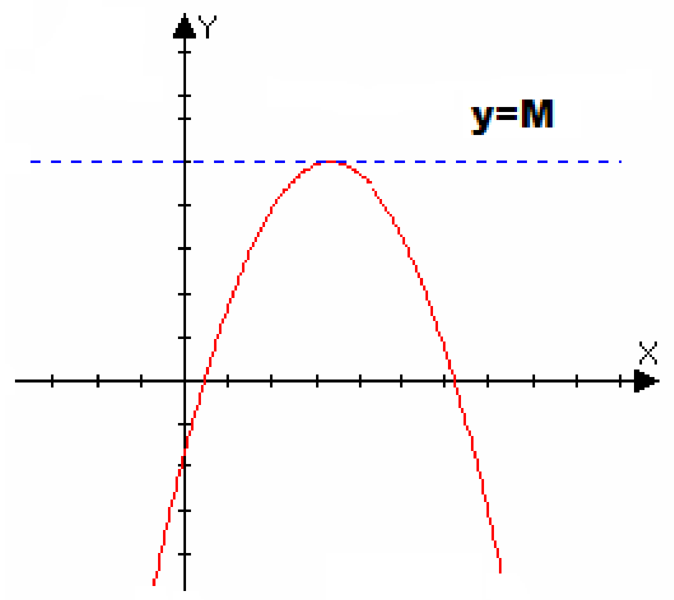
  Este número real m recibe el nombre de COTA INFERIOR de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es inferior al valor m y, por tanto, la gráfica de la función f estará por sobre la recta $y = m$.



- *Decimos que f está acotada superiormente sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ si existe un número real M tal que*

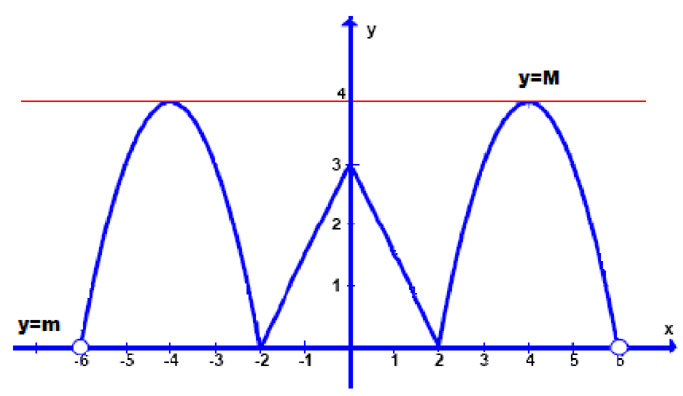
  $$f(x) \leq M, \quad \forall x \in D$$

Este número real M recibe el nombre de COTA SUPERIOR de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es superior al valor M y, por tanto, la gráfica de la función f estará por debajo de la recta $y = M$.

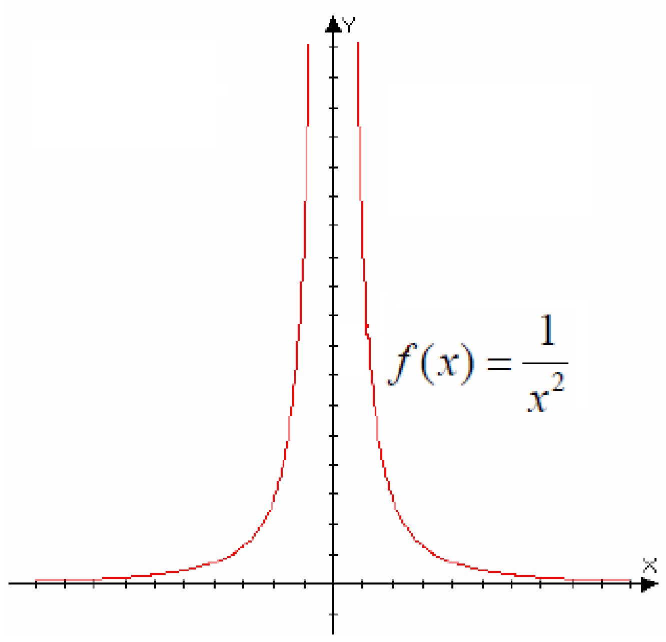


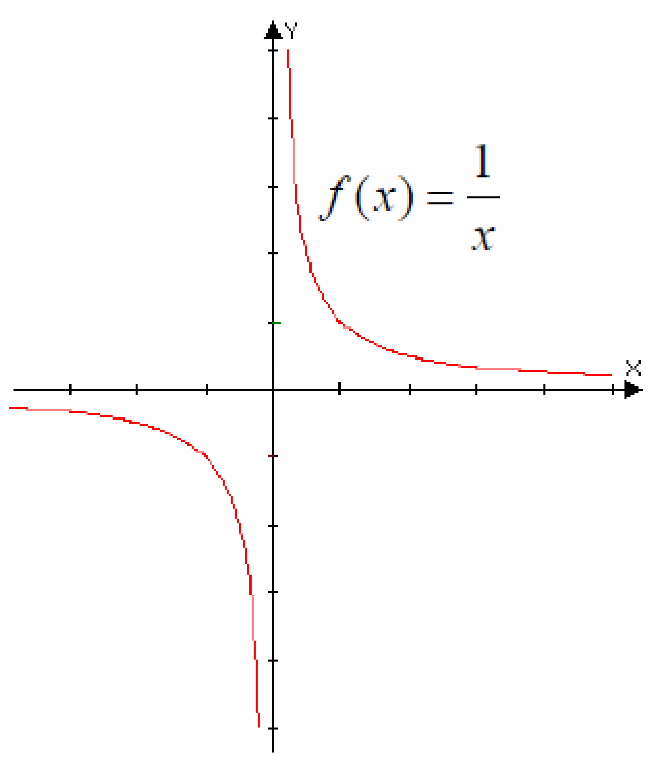
- *Decimos que f está* **acotada** *sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ si lo está inferior y superiormente. En tal caso existe un número real K tal que*

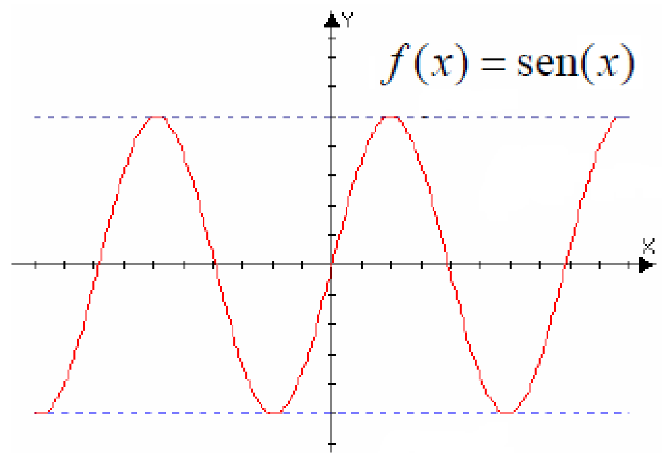
$$|f(x)| \leq K, \quad \forall x \in D$$



Actividad 28 *Para las tres gráficas siguientes:*







1. *Identifica si existe alguna función par.*
2. *Determina si alguna de las funciones es impar.*
3. *Averigua si alguna de las funciones es acotada (superior o inferiormente).*

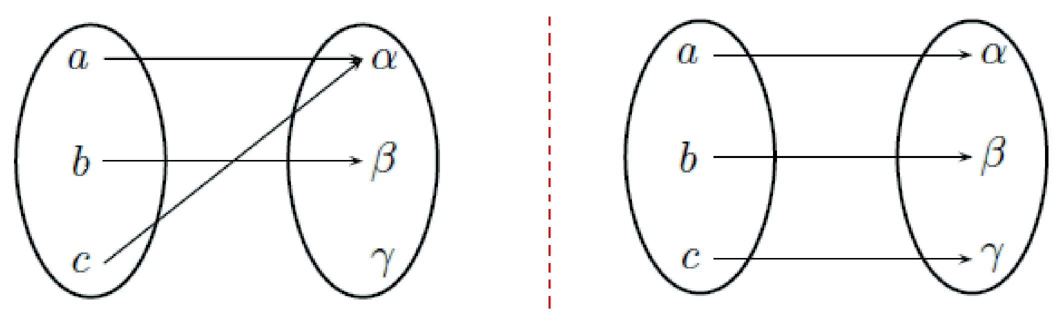
3.3 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Esta clasificación obedece a la forma en que están relacionados los elementos del dominio con los del codominio. Por tanto, es fundamental dar a conocer el dominio de la función y su codominio.

Funciones Inyectivas

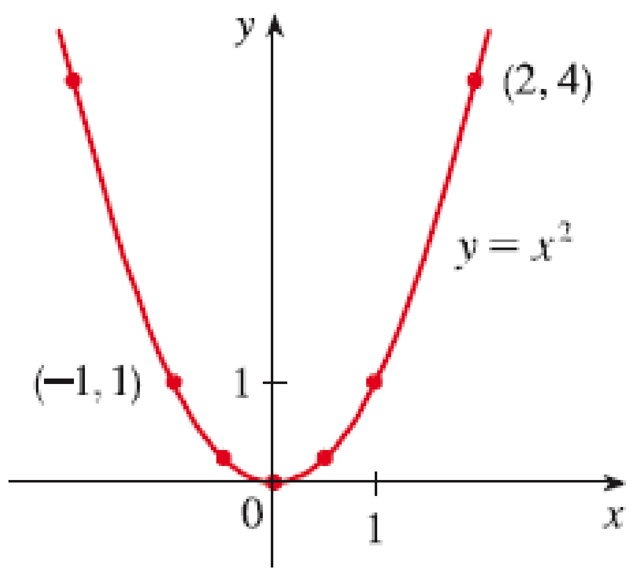
Te presento una primera aproximación a este concepto.

Actividad 29 *La figura muestra dos aplicaciones en un esquema sagital*



1. *Determina si ambas aplicaciones son funciones.*
2. *Busca alguna diferencia entre estas aplicaciones*

Actividad 30 *La figura tiene por dominio el conjunto de los números reales y por codominio el conjunto de los reales no negativos.*



1. *Da a conocer algunas características de la función.*
2. *Proporciona dos elementos del dominio que tengan igual imagen.*
3. *¿Cuántos elementos del dominio cumplen la condición de la parte 2.*
4. *Traza una recta paralela al eje x y sobre el recorrido de la gráfica. ¿esta recta intersecta a la gráfica en más de un punto?*

Definición 3.12 *Una función $f: A \to B$ es inyectiva si a valores del dominio distintos, corresponden imágenes distintas. Esto es,*

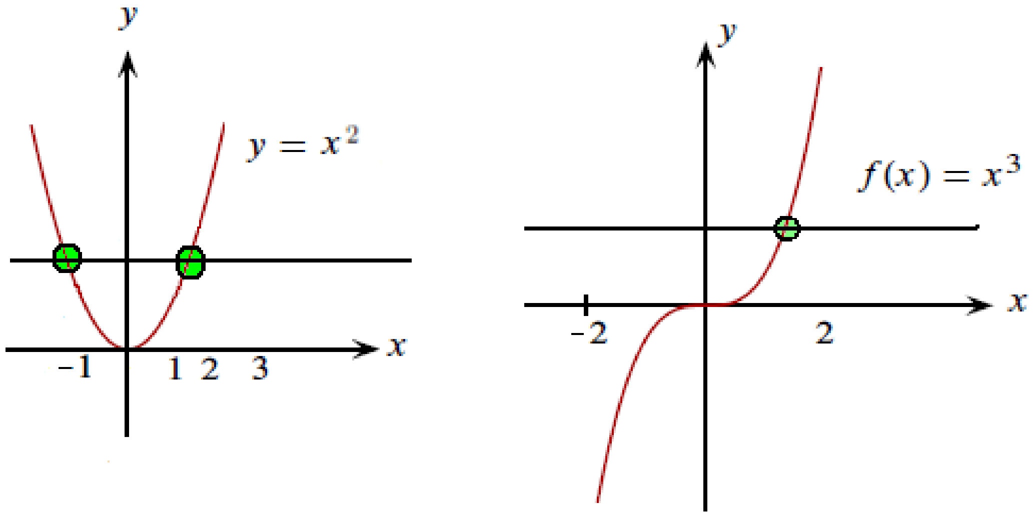
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

lo que equivale a decir:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

En términos gráficos esto significa, que en el rango de la función, a saber $f(A)$:

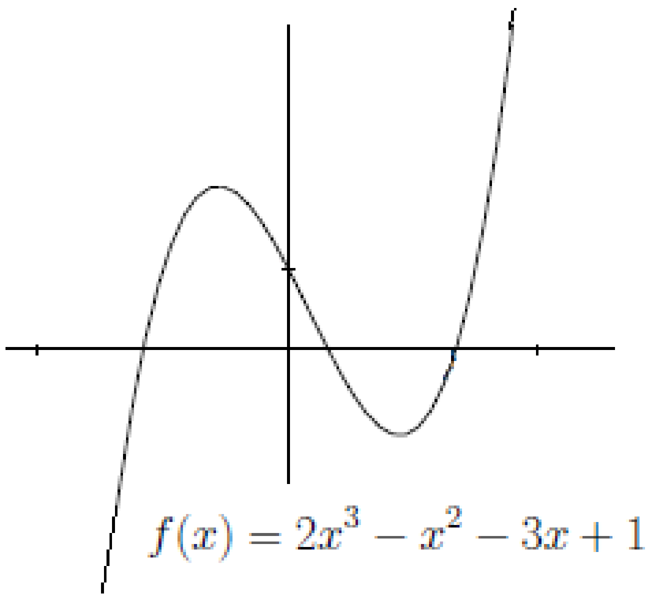
cualquier recta paralela al eje x corta al gráfico de f en a lo más un punto



Actividad 31 *1. Prueba que la función $f(x) = 3x - 2$ es inyectiva.*

2. Prueba que $f(x) = x^3$ es inyectiva.

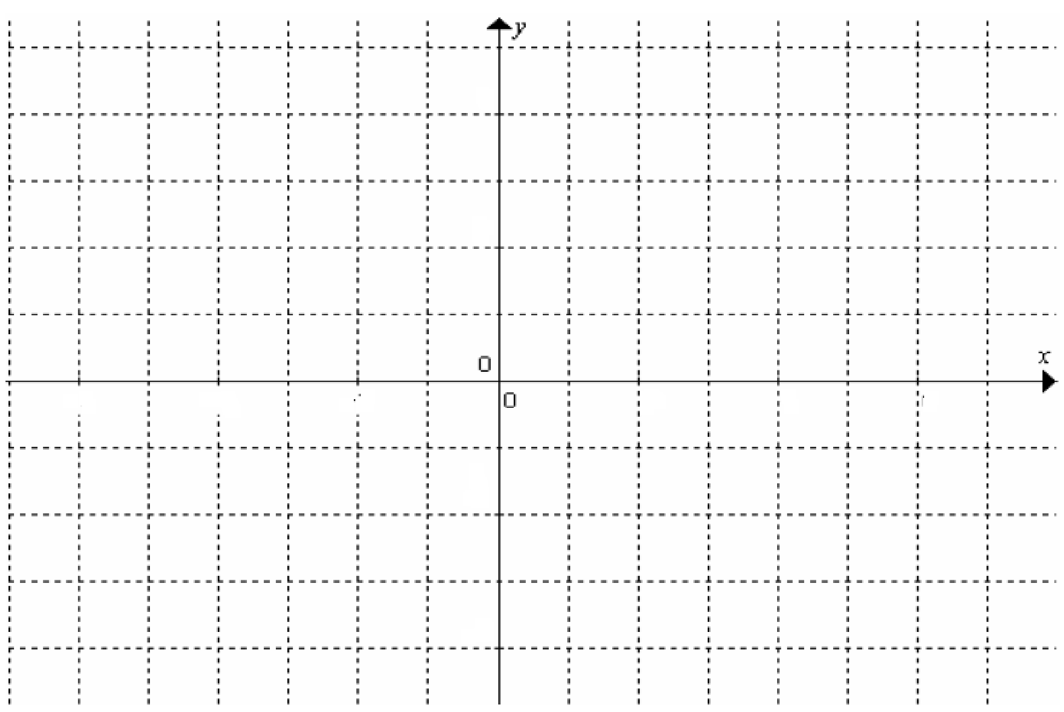
3. La figura de la gráfica tiene dominio y codominio los números reales.



a) De la gráfica ¿puedes determinar si es o no inyectiva la función?

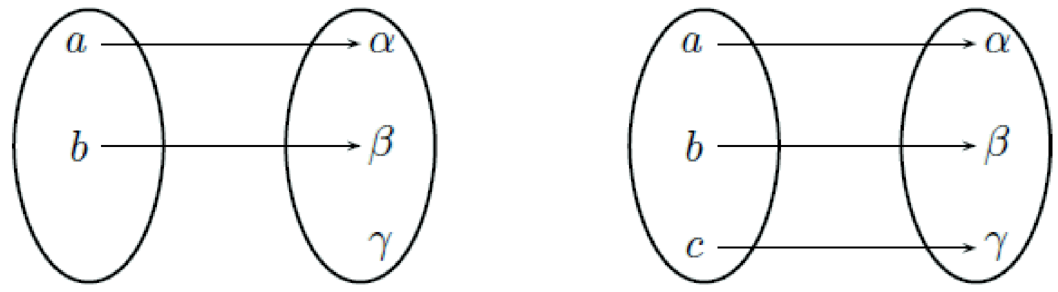
b) Prueba, usando $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$, que f si es inyectiva.

4. Muestra, algebraicamente, que la función $f(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva. Grafíca la función.



Funciones Sobreyectivas

Actividad 32 *La figura muestra dos aplicaciones en un esquema sagital*



1. Determina si ambas son funciones.

2. ¿Busca alguna diferencia entre estas aplicaciones.

Definición 3.13 *Una función $f: A \to B$ es sobreyectiva si todo elemento del codominio se encuentra conectado con uno del dominio.*

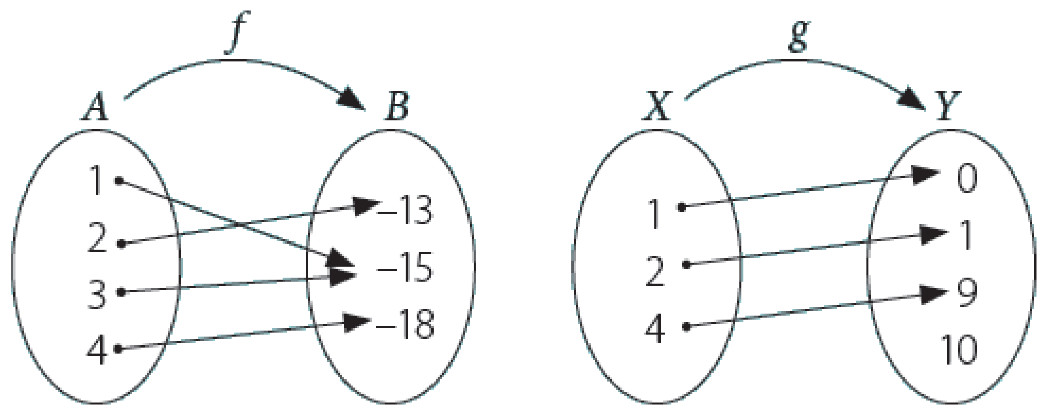
$$\forall\, y \in B \;\; \exists\;\; x \in A \;\; \text{tal que} \;\; y = f(x)$$

En términos gráficos, esto significa, que en el codominio de la función:

toda recta paralela al eje x debe cortar al gráfico de f

Dicho de otra forma: Una función f es sobreyectiva cuando el recorrido de la función es igual al codominio, es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio.

Actividad 33 *Considera las aplicaciones en diagrama sagital siguiente:*



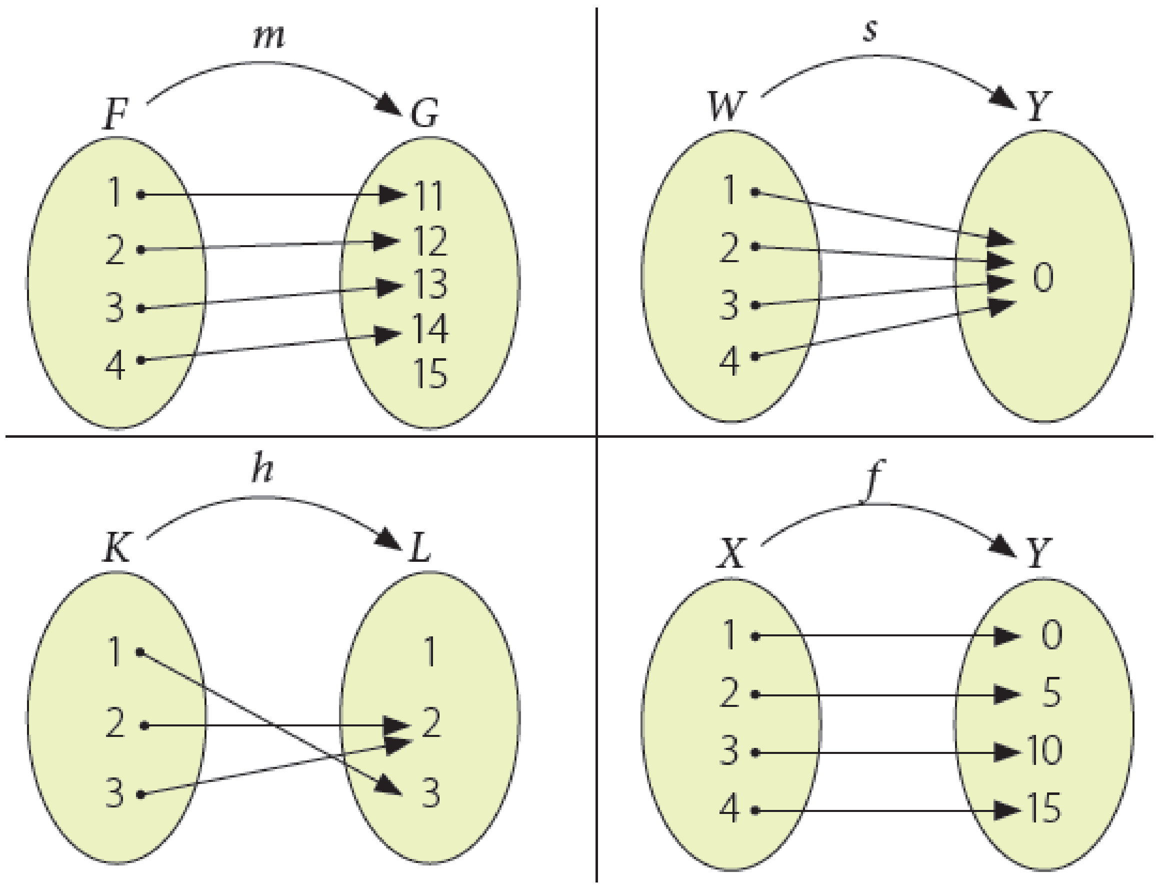
1. Determinar si alguna de ellas representa una función sobreyectiva.

Dada cualquier función f, siempre es posible construir una función sobreyectiva considerando

$$f: A \to f(A)$$

Las funciones que son inyectivas y sobreyectivas se llaman **biyectivas**.

Actividad 34 *Entre las siguientes aplicaciones, determina cuáles son inyectivas, cuáles sobreyectivas, y si existe alguna biyectiva*

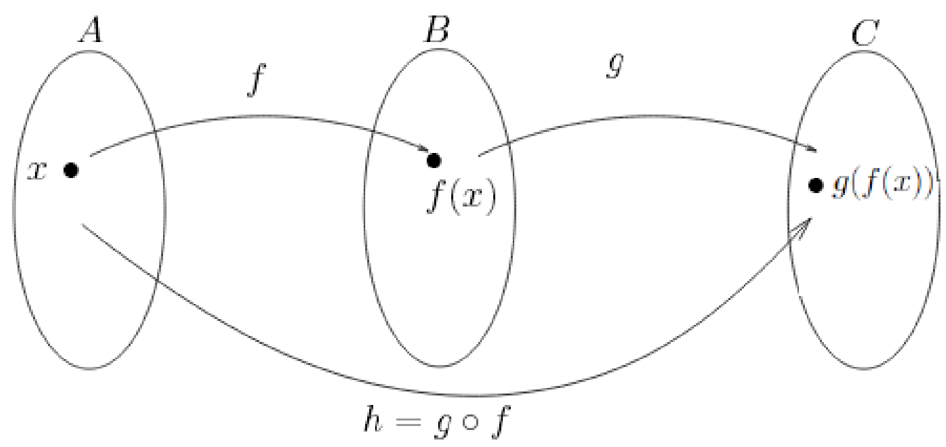


3.4 Función compuesta

Si se toman dos funciones y se "componen" mediante cierto proceso, entonces dan origen a una nueva función. Esta es otra forma de ir creando nuevas funciones a partir de funciones conocidas. Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una función compuesta, de las siguientes maneras:

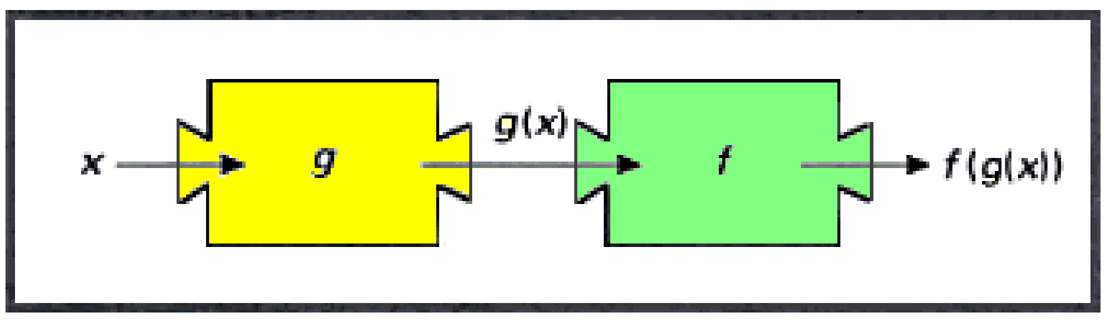
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. La función $g \circ f : A \to C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, se llama función compuesta de f y g. De manera análoga se obtiene $f \circ g$.



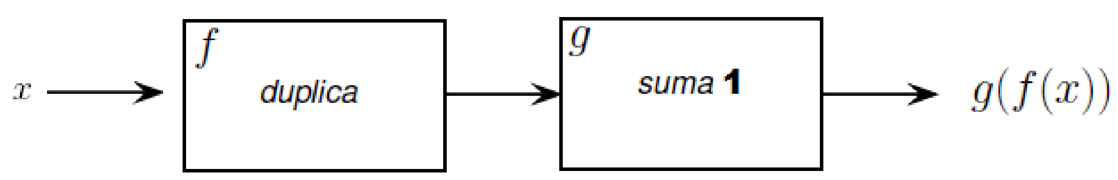
Debe tenerse claro que los valores $g(x)$ deberán estar en el dominio de f para poder realizar $(f \circ g)$, y que los valores $f(x)$ deberán estar en el dominio de g para poder hacer $(g \circ f)$

Para ilustrar la situación consideramos la analogía de máquina que muestra la figura



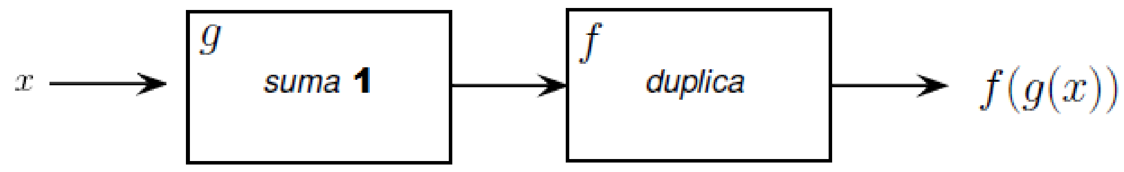
Esto se debe entender que componerlas significa aplicar una tras otra.

Actividad 35 *La figura muestra dos máquinas, la primera la llamamos f y a la segunda g*



1. *Determina el valor de salida en la segunda máquina g si por la máquina f entra $x = 2$*
2. *Halla $(g \circ f)(2) = g(f(2)) =$*
3. *Encuentra $g(f(\square)) =$*
4. *Escribe la fórmula de $g(f(x))$*

Actividad 36 *La figura muestra las dos máquinas anteriores, pero ahora actúa primero g.*



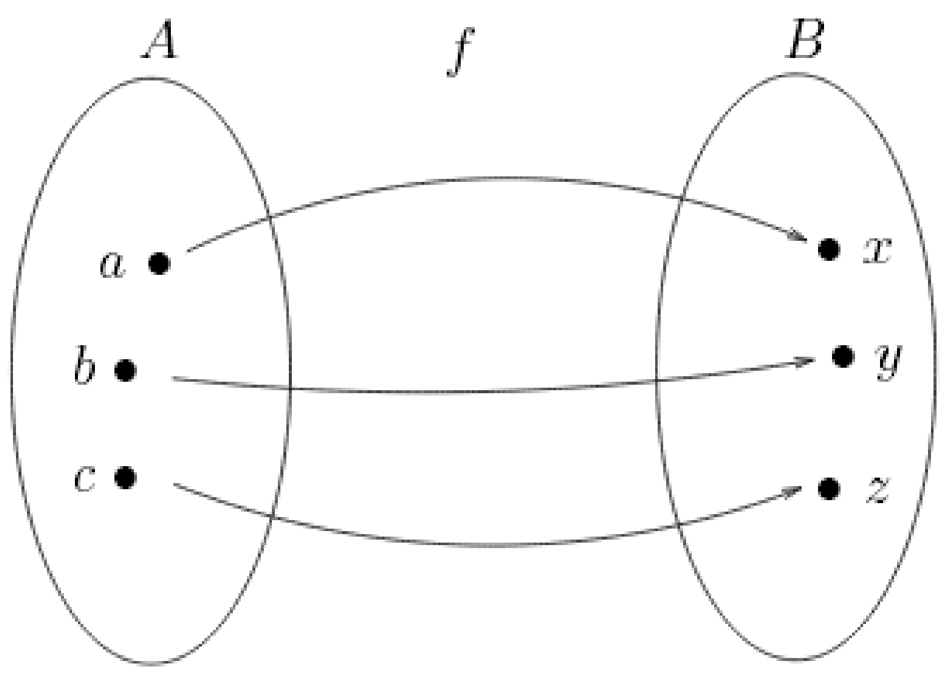
1. *Determina el valor de salida en la segunda máquina f si por la máquina g entra $x = 2$*
2. *Halla $(f \circ g)(2) = f(g(2)) =$*
3. *Encuentra $f(g(\square)) =$*
4. *Escribe la fórmula de $f(g(x))$*
5. *Anota tu conclusión de estas dos actividades.*

Tarea 6 *Dadas $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = x^2$. Determina si es posible o no realizar $f \circ g$ o $g \circ f$. En caso de ser posible realiza esa operación.*

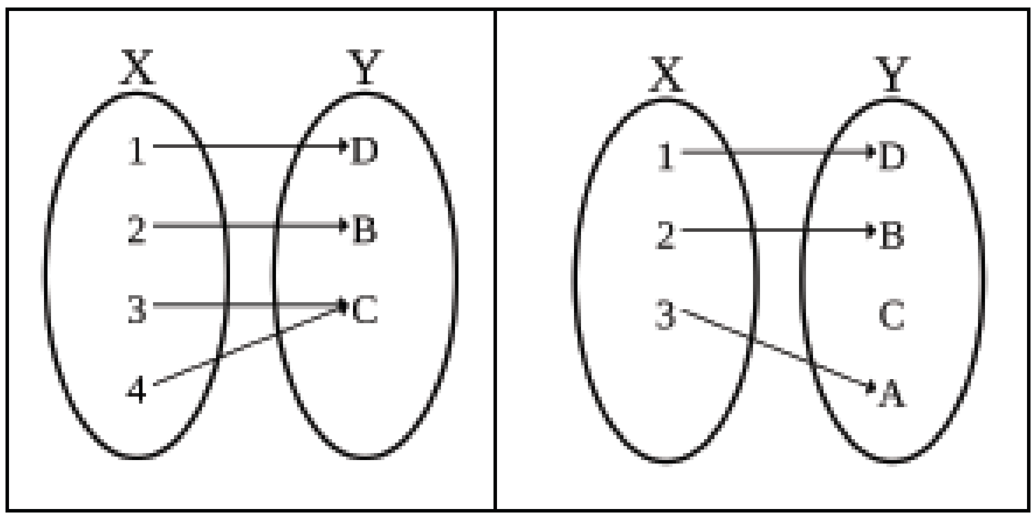
3.5 Funciones Inversas

Una forma sencilla de visualizar la existencia de la función inversa y sus requisitos es mediante diagramas sagitales.

Actividad 37 *Observa la función f dada en diagrama sagital*



1. *Determina si es inyectiva y/o sobreyectiva*
2. *¿se puede invertir la correspondencia? Esto es, ¿se puede construir una función $g : B \to A$?*
3. *Anota las imágenes de f*
4. *Anota las imágenes de g*
5. *Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿alguna conclusión?*
6. *¿Es cierto que g "deshace" lo que f "hace"?*
7. *Para las funciones del diagrama siguiente ¿se puede invertir la correspondencia?*



8. ¿Puedes establecer un requisito para que exista g?

Definición 3.14 *Dada una función $f : A \to B$, se llama función inversa de f a la función $g : B \to A$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$g \circ f = 1_A \qquad\qquad f \circ g = 1_B$$

Se usa la notación $g = f^{-1}$, y se dice también que la función f es invertible

Se verifican también las siguientes propiedades.

- *Una función tiene inversa si, y sólo si, es biyectiva.*
- *La función inversa de una función es invertible, y su inversa es la función original. O sea que $(f^{-1})^{-1} = f$.*
- *La composición de dos funciones invertibles es invertible, y su inversa es la composición de las inversas de los factores pero con el orden invertido. Esto es,*

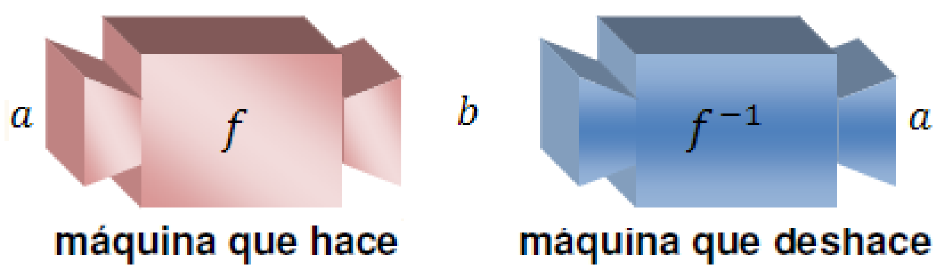
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Tarea 7 *Verifica esta última propiedad para las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$*

El uso de diagramas sagitales permite claridad en los conceptos, pero no es útil en los casos prácticos.
Te muestro otra forma didáctica, a partir de la cual se entra en el estudio de la inversa, y que permite luego aplicarla en la práctica.

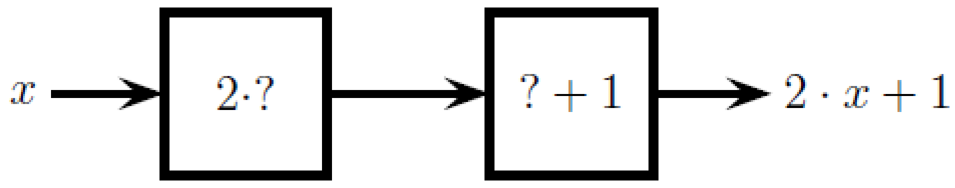
3.5.1. Una máquina

A la máquina que deshace (o invierte) todo lo que hace una función dada se le llama la función inversa de la función dada. Así por ejemplo, lo inverso de "duplicar por dos" es "dividir entre dos" y lo inverso de "aumentar en uno" es "disminuir en uno".
Vamos a mirar este concepto con funciones inversas como muestra la figura

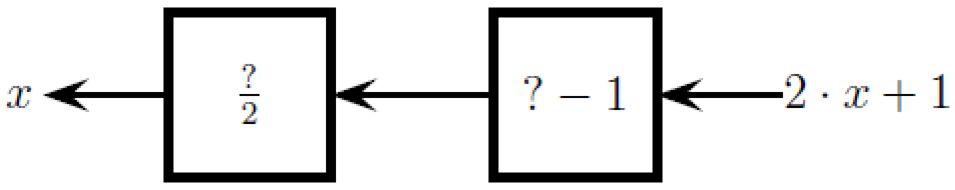


Así, si f toma a y lo transforma en b, entonces f^{-1} deshará lo que hizo f para que recibamos como salida el mismo valor, a, con que comenzamos.

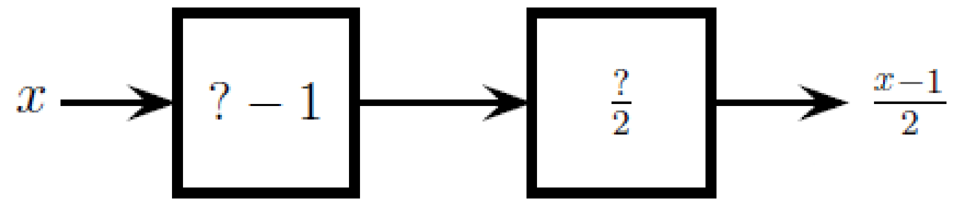
Ejemplo 3.15 *Para la máquina de la figura*



la máquina inversa debe hacer el siguiente proceso, que muestra la figura



Que anotamos ahora de izquierda a derecha como muestra la nueva figura

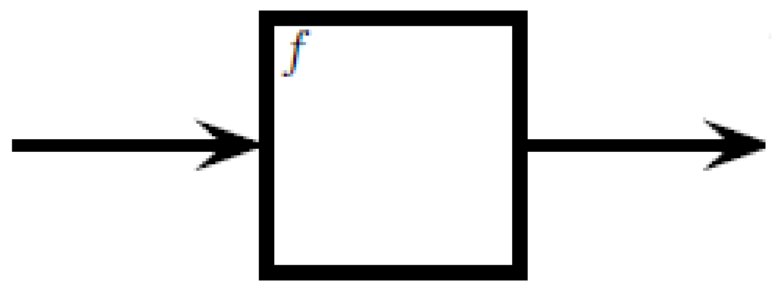


Actividad 38 *Realizar la composición de las funciones $f(x) = 2x + 1$ con $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, en ambos sentidos.*

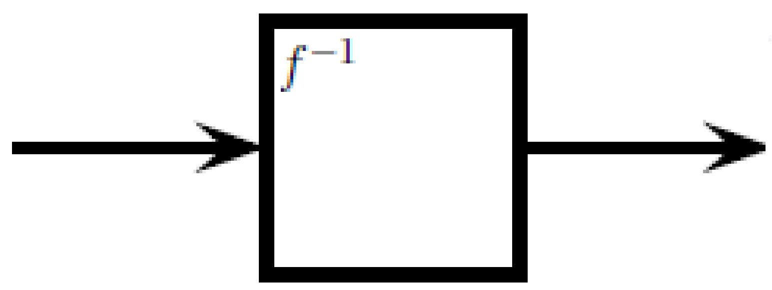
Actividad 39 *Te proporciono una tabla para la función.*

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	6	7	8	9	10

1. *Establece la relación funcional de la tabla (la fórmula)*
2. *En el gráfico está diseñada la máquina de entrada. Anota el elemento de entrada y de salida*



3. *La figura muestra la máquina inversa de la dada, anota el elemento de entrada y el de salida*

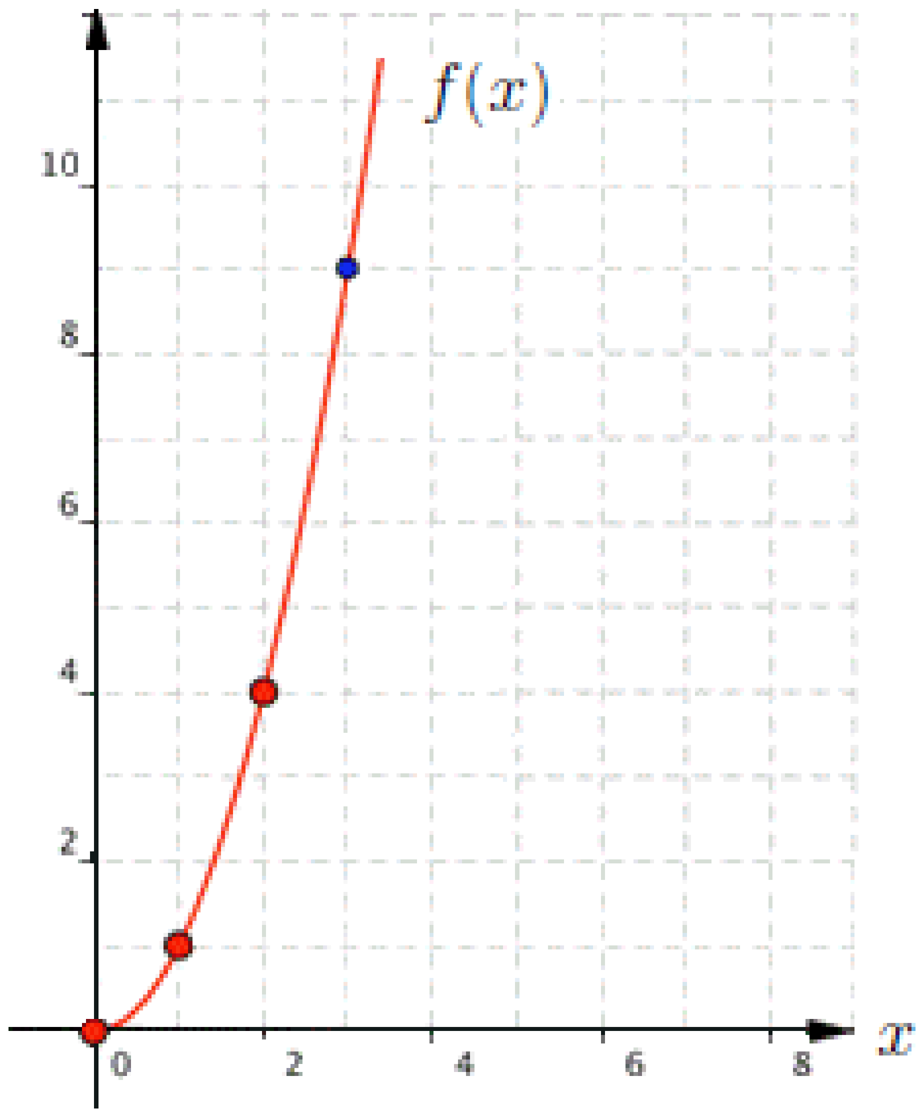


4. *Completa la tabla de la inversa.*

x	5					
$f^{-1}(x)$	0					

5. *Anota la fórmula de la función inversa.*

Actividad 40 *Vamos a hallar la inversa de la siguiente función:*



1. Completa la tabla de esta función

x	0					
$f(x)$						

2. Escribe la fórmula de esta función:
3. Completa la tabla de la función inversa

x						
$f^{-1}(x)$	0	1	2	3		

4. Anota la fórmula de esta inversa:
5. En el mismo plano cartesiano de la f bosqueja la inversa f^{-1}. ¿Notas algo interesante?

3.5.2. La inversa desde la fórmula

Considera la siguiente relación:

	x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$y = 3x - 1$	-1	2	5	8	11	14

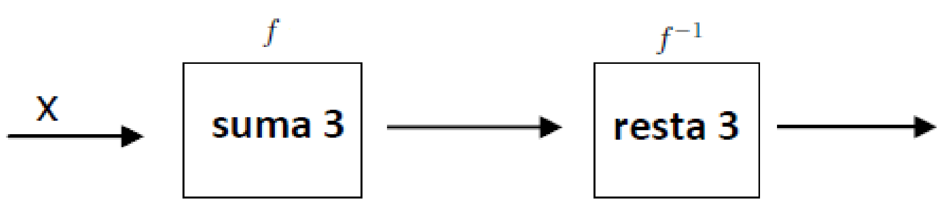
Cambiando la x por la y y viceversa, la tabla queda como sigue:

	y	0	1	2	3	4	5
$f^{-1}(x)$	$x = 3y - 1$	-1	2	5	8	11	14

Actividad 41 Para $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$ hallar $(f \circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1} \circ f)(x)$

Actividad 42 Dada la función $f(x) = x + 3$

1. Halla f^{-1}.
2. Calcula $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.
3. Completa la representación en máquinas



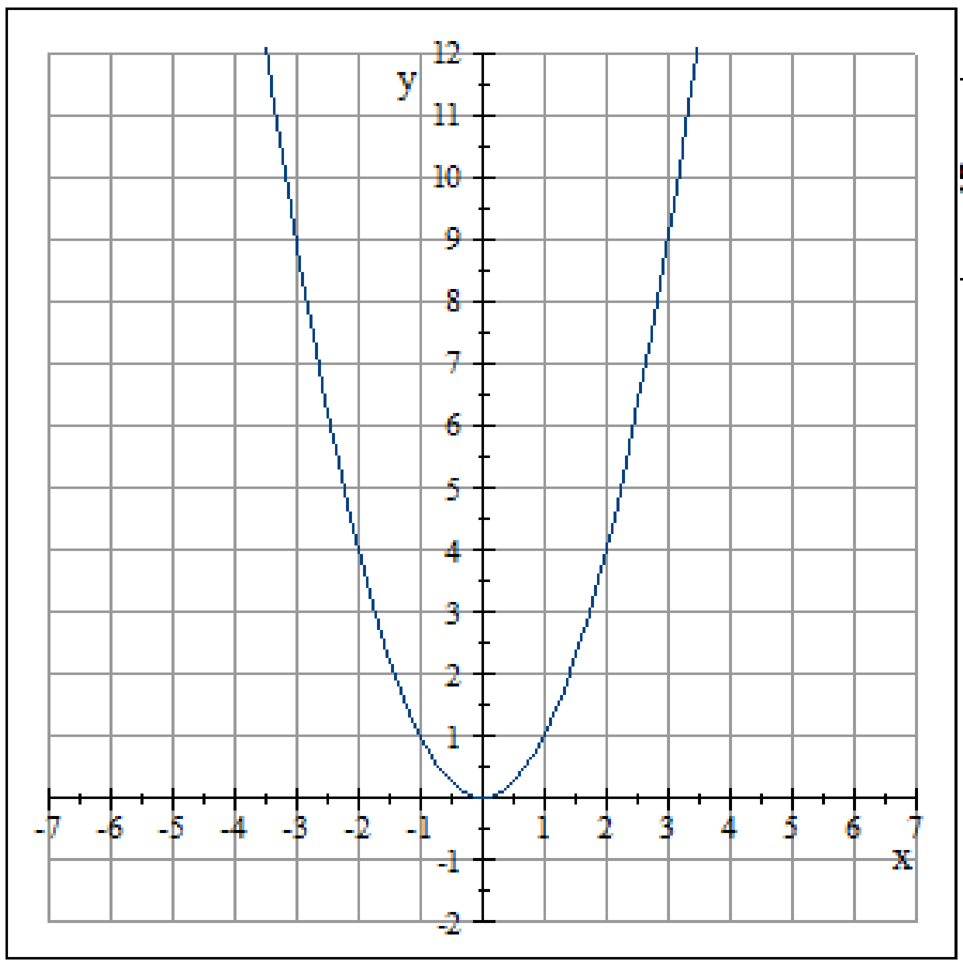
Tarea 8 Sea f una función biyectiva tal que $f(x) = 2x+1$. Se pide calcular el valor de $a + b$, si se sabe que:

1. $f(a) = 6$
2. $f^{-1}(b) = 7$

Actividad 43 Determinar si la función representada por la siguiente tabla, tiene inversa.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	4	8	3	1	5

Actividad 44 Determinar si la función representada por la siguiente gráfica, tiene inversa.



1. Completa la tabla

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

2. La relación inversa correspondiente, estaría representada por la tabla:

x	9	4	1	0	1	4	9
$f^{-1}(x)$							

3. ¿Cuál es la razón de que no exista la función inversa?

Desde una gráfica, podemos establecer que:

La función f tiene una inversa f^{-1} si y sólo si cualquier recta paralela al eje x intersecta a la curva en un solo punto de su recorrido.

Calcula la inversa con

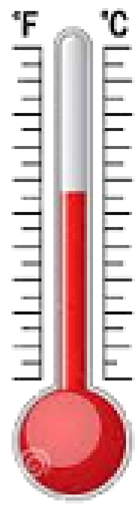
$$f(f^{-1})(x) = x$$

Actividad 45

1. Hallar la función inversa de $y = 5x - 2$, y representar las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema coordenado.
2. Comprueba que las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = x^2 - 4$ son inversas.
3. Calcula la inversa de $y = -2x + 3$
4. Calcula la inversa de $y = \sqrt{x+5}$. Establece el dominio de f.

5. Determinar si la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. Si no lo es, restringe dominio para hallar la función inversa.

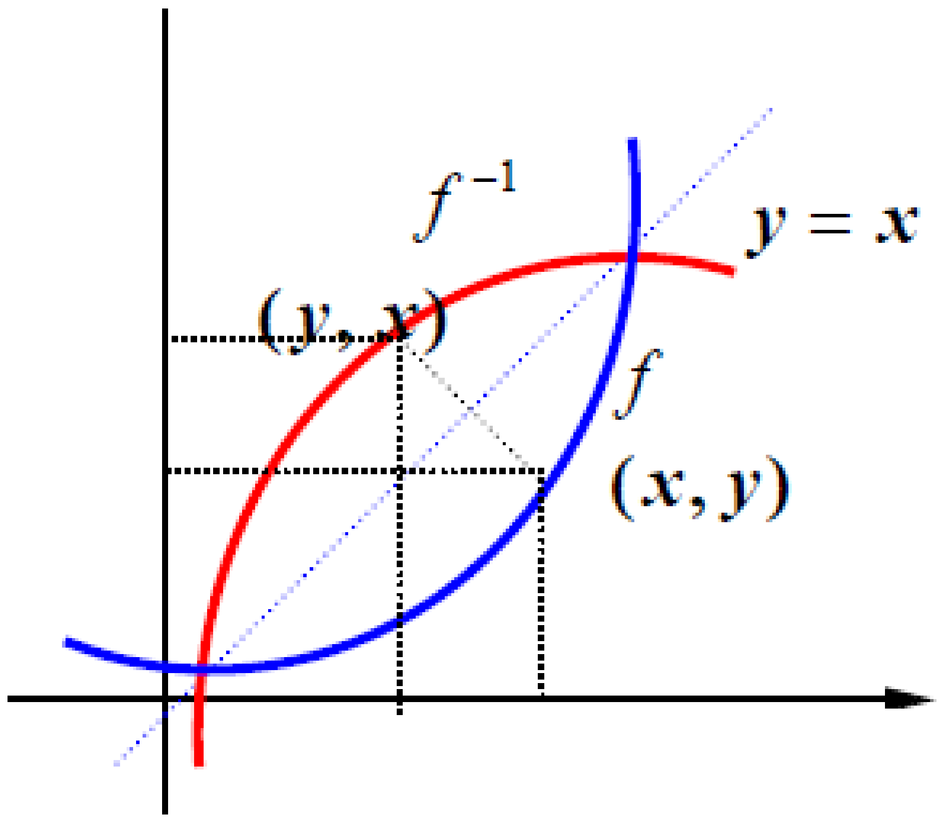
***Actividad* 46** Sea $T(x)$ la temperatura en grados F° que marca un termómetro cuando la columna de mercurio alcanza x cms de longitud. Responde, en palabras:



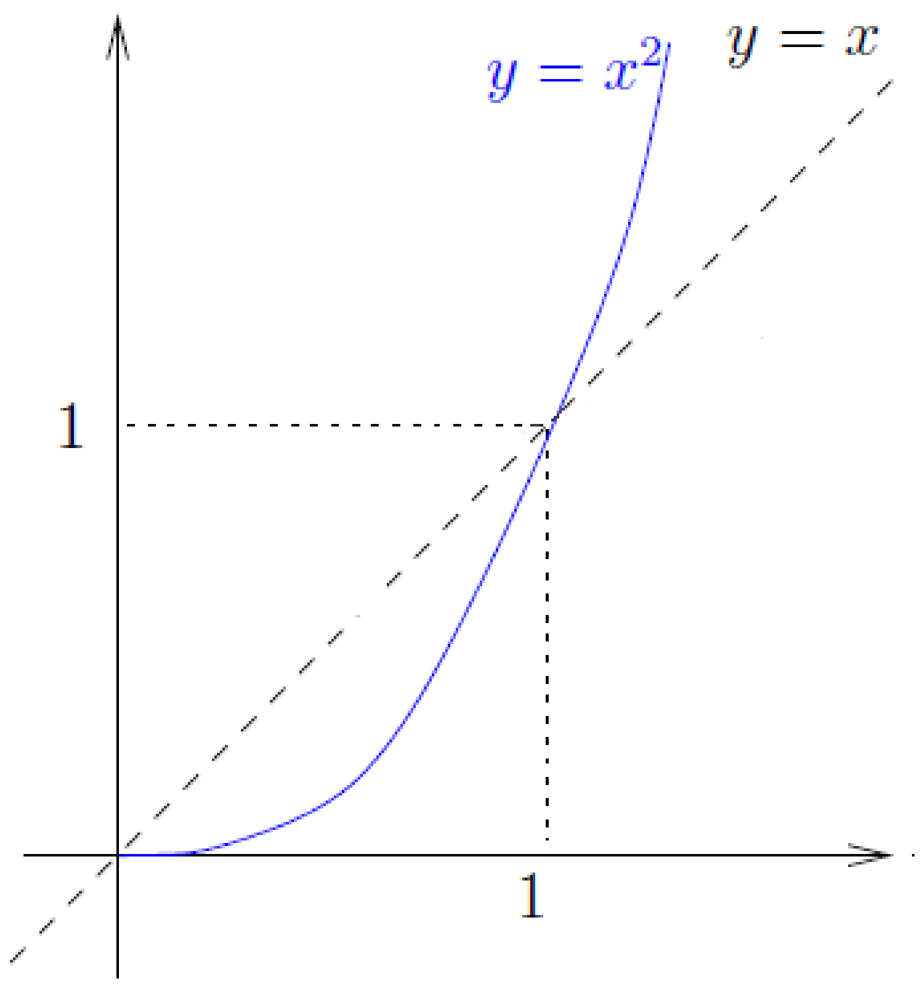
1. ¿Qué significa $T(10)$?
2. ¿Qué significa $T^{-1}(75)$?

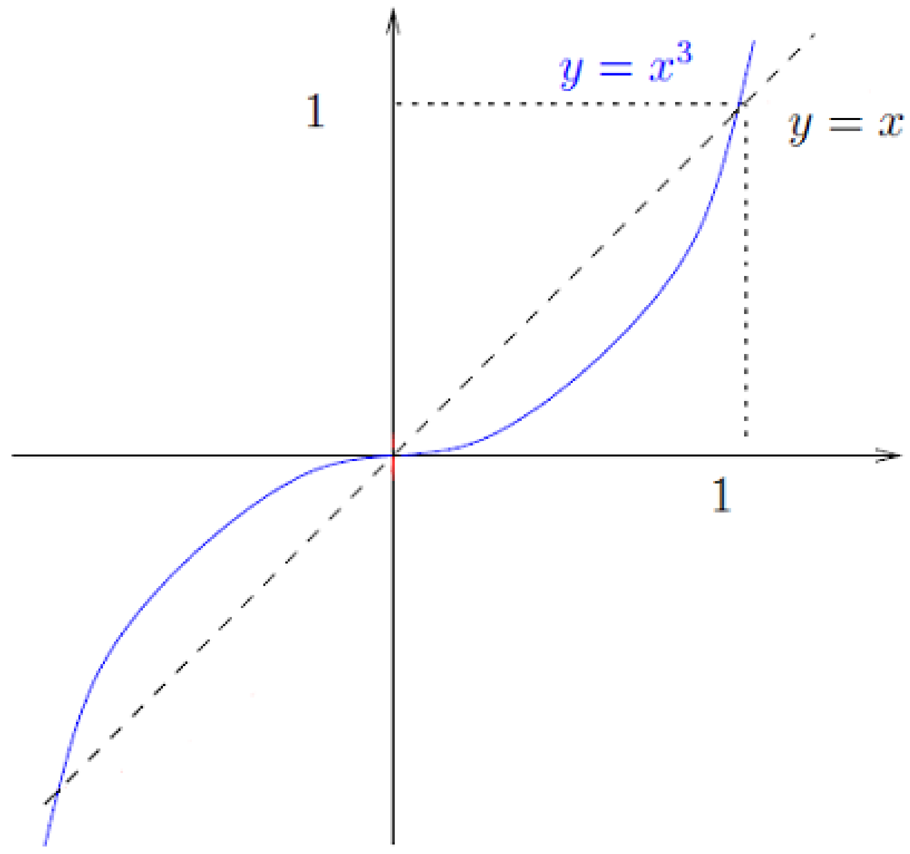
3.5.3. Gráfica de la Inversa

Si un punto con coordenadas (a, b) está en el gráfico de la función f, esto quiere decir que $f(a) = b$ y por lo tanto $f^{-1}(b) = a$ y por lo tanto el punto con coordenadas (b, a) está en el gráfico de la función f^{-1}. Además, si simetrizamos el punto (a, b) con respecto la recta $y = x$, obtenemos el punto (b, a). Por lo tanto, el gráfico de la función f^{-1} se obtiene simetrizando el gráfico de f con respecto a la recta $y = x$.



***Actividad* 47** *Completa los gráficos bosquejando la inversa de cada función:*





3.5.4. Funciones definidas a trozos

Una función definida a trozos es aquella cuya expresión analítica contiene más de una fórmula, esto es, para distintos valores de la variable independiente x se deben usar distintas fórmulas que permitan calcular la imagen y que les corresponde.
Es imprescindible conocer qué formula usar con cada valor de x, por lo que cada una de las fórmulas se acompaña obligatoriamente de una condición que especifica su dominio de aplicación.

***Actividad* 48** *Bosquejar la gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

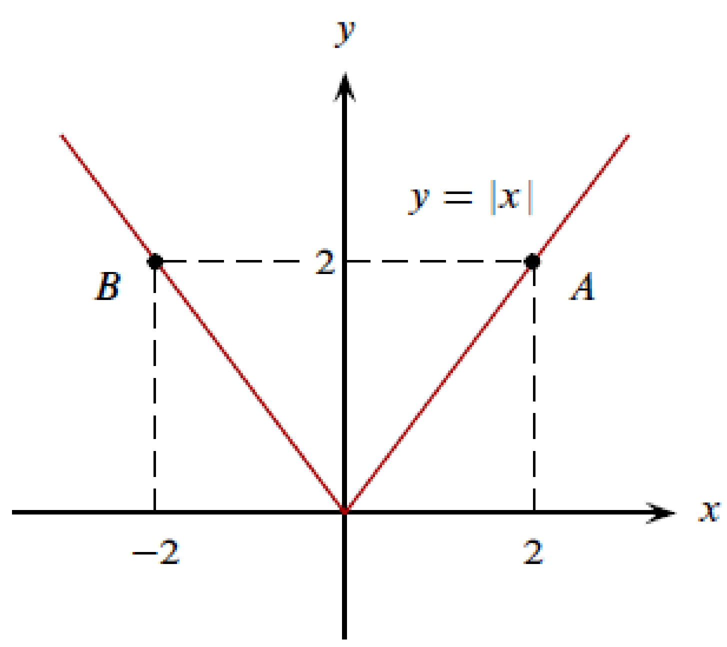
***Actividad* 49** *Bosquejar la gráfica de*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 < x < 1 \\ 8 - 3x, & 1 \leq x < 4 \end{cases}$$

Entre las funciones a trozos más famosas tenemos; el valor absoluto y la parte entera.

3.5.5. Función valor absoluto

La función valor absoluto *tiene por ecuación $f(x) = |x|$. Siempre será positiva o nula. Esta condición, de ser siempre positiva o nula, hace que su gráfica se encuentre sobre el eje x, o a lo sumo, tocándolo.*



Actividad 50 *Mira la gráfica superior para responder.*

1. *¿Presenta algún tipo de simetría? ¿Qué tipo de función es?*
2. *Determina su dominio de definición.*
3. *¿Cuál es su recorrido?*
4. *Halla intervalos de monotonía.*
5. *¿Tiene función inversa?*

Las funciones en valor absoluto se pueden resolver o graficar siguiendo los siguientes pasos:

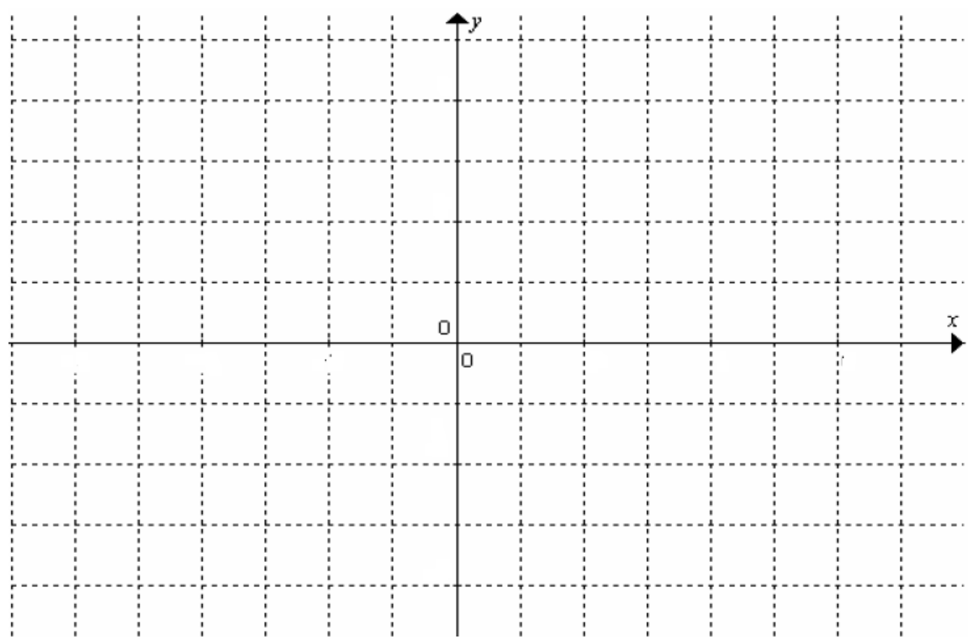
1. *Se hallan los puntos de "quiebre".*
2. *Se evalúa el signo a izquierda y derecha.*
3. *Se representa la función resultante.*

Actividad 51 *Representar* $y = |x - 3|$

1. *Anota el punto de "quiebre"*
2. *Anota la función sin valor absoluto.*

$$f(x) = \begin{cases} \qquad , & \text{si } x > 3 \\ \qquad , & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

3. *Para graficar, toma un par de valores a izquierda y derecha del punto de quiebre.*



Actividad 52 *Representa las siguientes funciones:*

1. $f(x) = |x + 2|$
2. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
3. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
4. $f(x) = |-x^2 + 5x - 4|$
5. $f(x) = |x| - x$
6. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Actividad 53 *Estudia, a partir del gráfico de* $f(x) = |x|$*, lo que sucede con las siguientes funciones:*

1. $f(x) = |x| + 1$
2. $f(x) = |x| - 2$
3. $f(x) = 2|x|$
4. $f(x) = \frac{1}{3}|x|$
5. $f(x) = |x - 1|$
6. $f(x) = |x + 1|$
7. $f(x) = |2x|$
8. $f(x) = |\frac{x}{2}|$

3.5.6. Función parte entera

La función parte entera hace que a cada numero real, se le asigne un número entero, y este numero ENTERO que se le asigne, debe ser el mayor entero que es menor que x*. Otra cosa interesante es saber que como entre dos enteros, hay infinitos decimales, todos esos decimales tendrán la misma imagen, pues la parte entera se define como el entero anterior.*

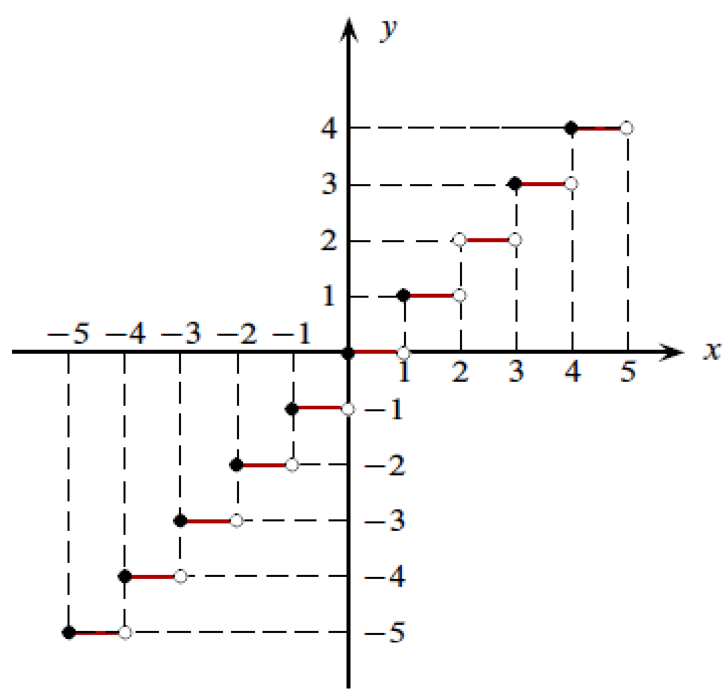
$$f(x) = [x] = max\{k \in \mathbb{Z} / \ k \leq x\}$$

Esta función se conoce también como "función escalera" o "escalonada" por la forma de su gráfica.

Actividad 54 1. *Completa la siguiente tabla*

x	y = f(x) = [x]	(x,y)
-2		
-1,5		
-1		
-0,5		
0		
0,5		
1		
1,5		
2		

2. *Tus valores deben corresponderse con la siguiente gráfica.*



Tarea 9 *Graficar las funciones:*

1. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{si } x > 0 \\ 4 - 2x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x = 2 \\ 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{si } x \leq 0 \\ 2, & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

3.5.7. Función Exponencial

LEER ES DIVERTIDO

Las funciones exponenciales están presentes en una gran variedad de fenómenos. Las encontramos, por ejemplo, en la forma en que se reproduce la llamada marea roja, que consiste en una gran colección de billones de protozoos que se multiplican a gran velocidad, afectando a muchas especies marinas. Un ejemplo más cercano lo constituye la división celular que tiene lugar en el vientre materno cuando se gesta un ser humano. El núcleo del espermatozoide del hombre se fusiona con el óvulo de la mujer dando origen a una única célula llamada CIGOTO, la cual se divide en dos células, luego en cuatro, luego ocho y así, el proceso continúa de modo exponencial hasta formarse una esfera celular hueca llamada MÓRULA la cual continua desarrollándose como embrión mediante sucesivas etapas hasta llegar al nacimiento de una nueva persona.

Definición 3.16 *Son aquellas de la forma*

$$f(x) = q_0\, a^x, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1$$

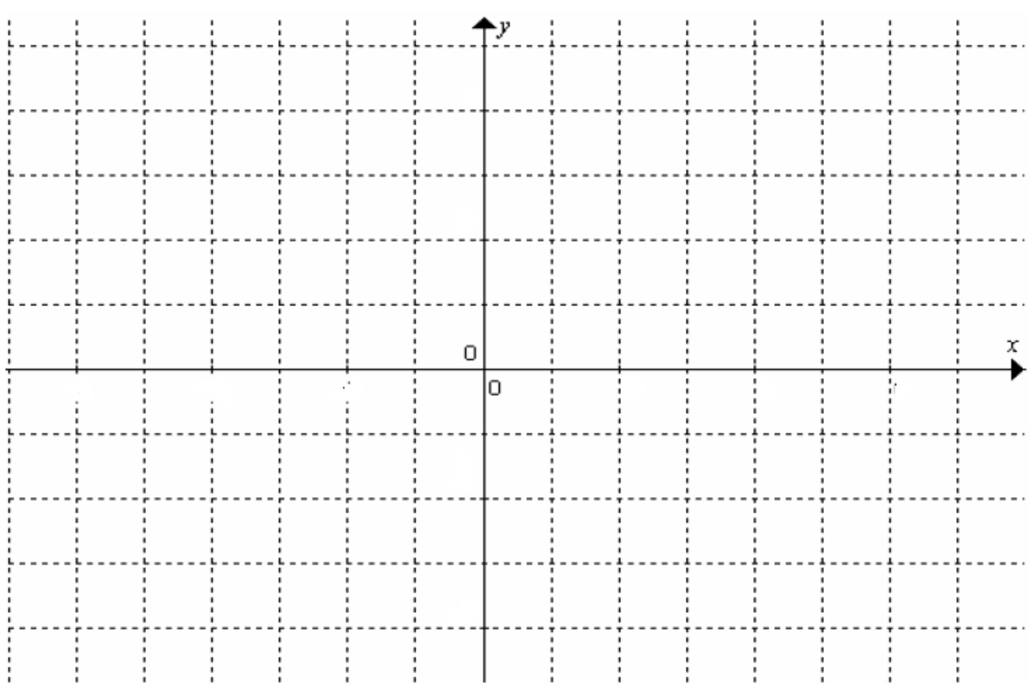
Respecto de su ecuación, cabe señalar que, la constante q_0 representa la cantidad inicial (cuando $x = 0$), que a es un factor de cambio de f cuando x aumenta. De hecho, si $a > 1$, entonces la función representa un **crecimiento** *exponencial, y si $0 < a < 1$, entonces se trata de un* **decrecimiento** *exponencial.*

Actividad 55 *Graficar la función $y = 2^x$*

Completa la tabla de valores

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
2^x									

Bosqueja la gráfica de $f(x) = 2^x$

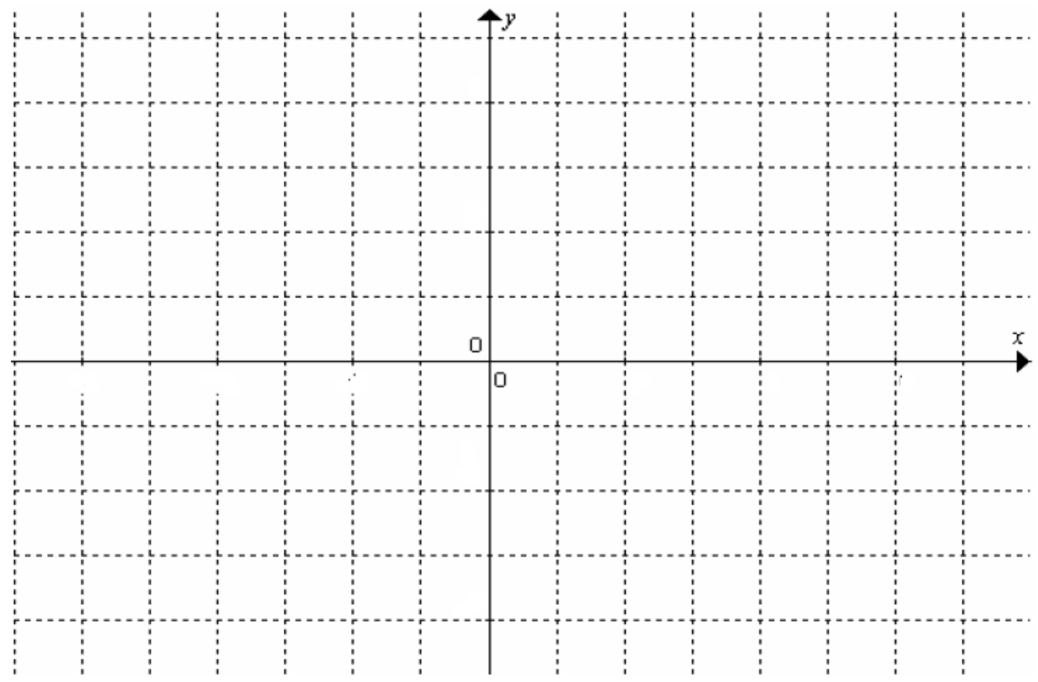


Actividad 56 *Graficar la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$.*

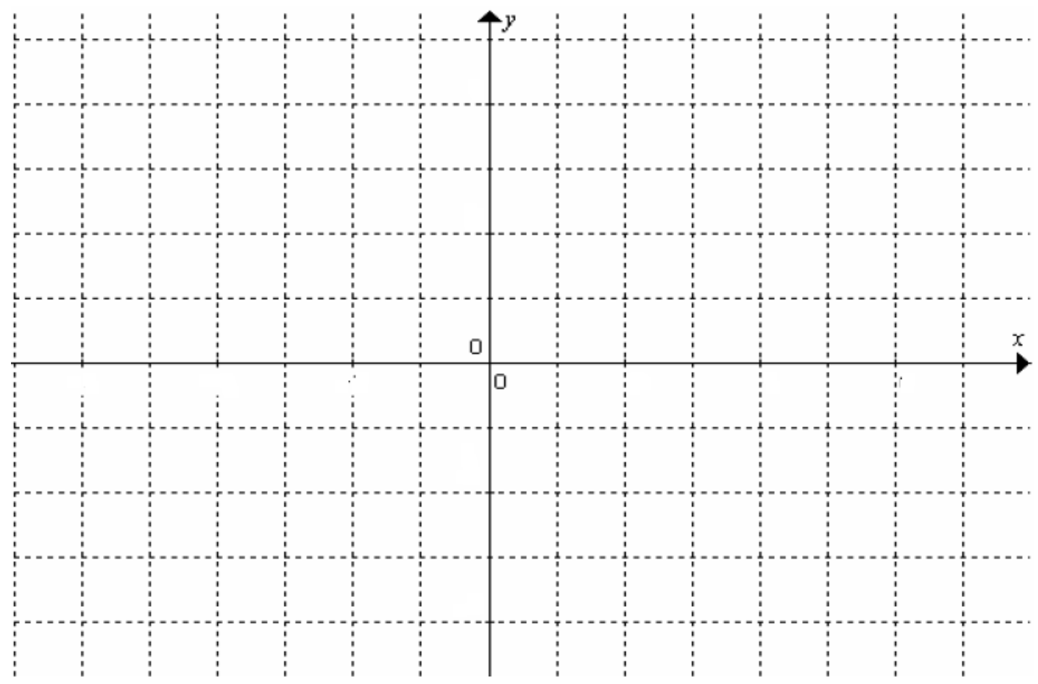
Completa la tabla

x	0	-1	-2	-3	-4	1	2	3	4
$\frac{1}{2^x}$									

Bosqueja la gráfica



Actividad 57 *Grafica las funciones $y = 3^x$ y $y = 3^{-x}$*



Algunas Propiedades de $y = a^x$

1. *Todas las gráficas intersectan en el punto $(0, 1)$.*
2. *Todas las gráficas son continuas, sin saltos.*
3. *El eje de las x es asíntota horizontal.*
4. *Si $a > 1$, entonces $y = a^x$ aumenta conforme aumenta x.*
5. *Si $0 < a < 1$, entonces $y = a^x$ disminuye conforme aumenta x.*
6. *La función $y = a^x$ es uno a uno (inyectiva).*

- **La vida media**

Cuando hablamos del tiempo de vida de una partícula nos estamos refiriendo al tiempo de vida medio, una partícula que no sea absolutamente estable tiene, en cada momento de su vida, la misma probabilidad de desintegrarse. Algunas partículas viven más que otras, pero la vida media es una característica de cada familia de partículas.

Por ejemplo, la **vida media** *del carbono 14 es de 5730 años. En palabras esto significa que*

La mitad del carbono desaparece en 5730 años

- **cálculo de lo queda**

Supongamos que la vida media de una sustancia es de h años (minutos, segundos). Si la cantidad inicial de sustancia es q_0, la cantidad q **que queda** *al pasar t unidades de tiempo se determina por*

$$q = q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/h}$$

Actividad 58 Algunas pruebas atómicas de 1960 liberaron radio 226, y se fijó en los huesos de las personas de ese entonces. La vida media del radio 226 es 1620 años

1. Hallar la cantidad de radio 226 que queda en los huesos después de 500 años. Resp. $0,81\,q_0$
2. Hallar la cantidad perdida al cabo de 500 años. Resp. $19\,\%$
3. Determinar el porcentaje que queda a los 500 años. Resp. $81\,\%$

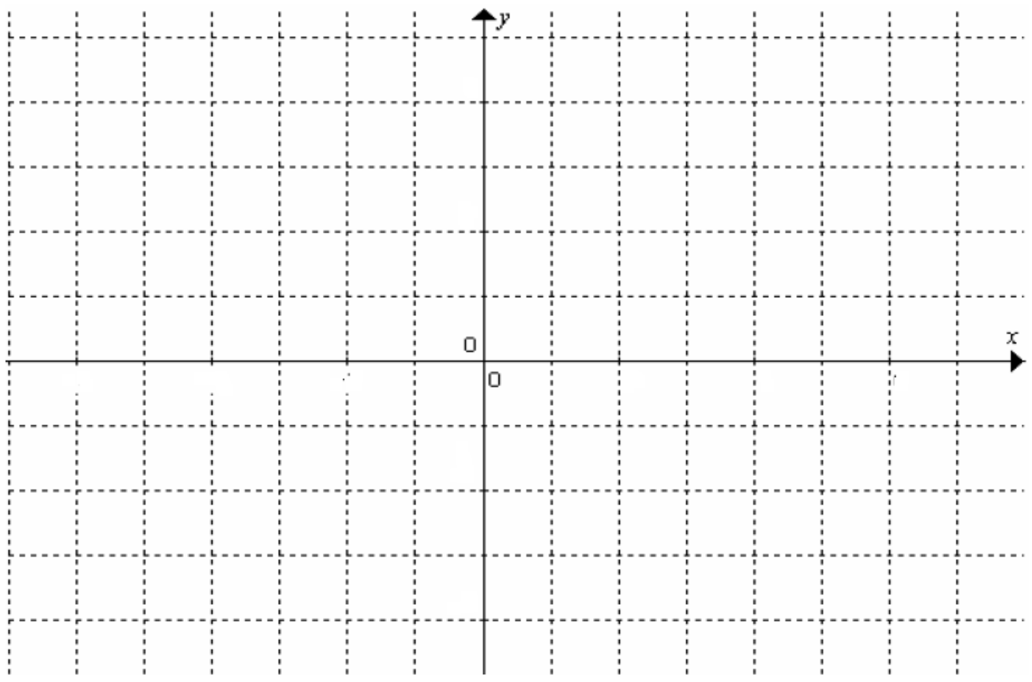
Actividad 59 Una pintura que se supone es obra de Vermeer (1632-1675) contiene el 99,5 % de su carbono 14 original.

1. A partir de esta información decide si la pintura es o no una falsificación. Resp. falsa

3.5.8. Traslaciones

- Las funciones $y = a^x + b$ son de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia arriba si b es positivo, y en b unidades hacia abajo si es negativo.
- Las funciones $y = a^{x+b}$ son también de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia la izquierda si b es positivo, y en b unidades hacia la derecha si es negativo.

Actividad 60 Tomando en consideración lo recién establecido, representa en los mismos ejes las funciones:$y = 2^x$, $y = 2^{x+3}$, $y = 2^{x-3}$, $y = 2^x + 3$, $y = 2^x - 3$



3.5.9. La función e^x

Se obtiene de $y = a^x$ reemplazando a por e que es la base de los logaritmos naturales. Es la más famosa de las funciones exponenciales. Como $e = 2{,}718281828459045 23\cdots > 1$, entonces se trata de una función creciente. Esta función tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales.

4. Función Logaritmo

En el cuerpo de los números reales se pueden realizar las operaciones clásicas de adición, multiplicación, división, sustracción, potenciación y radicación. En lo que se refiere a la potenciación se tiene que "dado cualquier número real positivo a y cualquier número real x es posible determinar un único número real y tal que $y = a^x$".

Ahora bien, el proceso inverso, esto es, el que permite obtener el valor de x conociendo el valor de $y = a^x$, con $a > 0$, se le llama **logaritmación** en base a.

Definición 4.1 Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Si $z \in \mathbb{R}^+$, entonces el único exponente v tal que $a^v = z$, se denomina el **logaritmo** de z en base a. Se denota por $\log_a z$

La conexión potenciación - logaritmación es

$$v = \log_a z \Longleftrightarrow a^v = z$$

Si $a = 10$ el logaritmo se llama decimal. Se anota $\log x$. Si $a = e$, el logaritmo se llama natural. Se anota $\ln x$.

Actividad 61 Hallar el elemento x que falta:

$\log_2 32 = x$	$\log_2 43 = x$	$\log_a 1 = x$
$\log_x 64 = 4$	$\log_x 5 = 1$	$\log_a a = x$
$\log_3 x = 4$	$\log_3 x = 0$	$\log_a a^k = x$

Actividad 62 Resolver las ecuaciones:

- $5^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 6^{2x+1}$
- $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

4.0.10. Cambio de base

¿Tienes calculadora a mano? Calcula el logaritmo de 2 en base 3. No hay respuesta. El problema está en la base 3, la calculadora funciona con base 10 y base $e = 2,71\cdots$. Por esta razón conviene estudiar de qué forma podemos cambiar bases en los logaritmos. La tarea es entonces, calcular el logaritmo de un número en cualquier base, dado el logaritmo de este número en otra base.

- **La fórmula**

  Podemos escribir

$$\log_a(z) = x \Longrightarrow a^x = z$$

Aplicando logaritmo de base b después de la implicación:

$$\log_b(a^x) = \log_b(z)$$

Se sigue que

$$x \log_b(a) = \log_b(z)$$

Como $\log_a(z) = x$, entonces

$$\log_a(z) \cdot \log_b(a) = \log_b(z)$$

Que mejor se escribe

$$\log_b(a) \cdot \log_a(z) = \log_b(z)$$

expresión que se "ve" y recuerda como una transitividad. Escrita como cociente esta fórmula es sencilla de recordar

$$\boxed{\log_b(z) = \frac{\log_a(z)}{\log_a(b)}}$$

Actividad 63 *Hallar:*

1. $\log_3(21) =$	4. $\log_3 243 =$
2. $\log_3 5 =$	5. $\ln e^{30}$
3. $\log_5(81) \cdot \log_3(25) =$	6. $\log_2 \sqrt[5]{128}$

Actividad 64

1. *Expresa como una suma o resta de logaritmos*

$$\log \left[\frac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$$

2. *Simplifica al máximo*

$$\log \left[\frac{x}{x-1}\right] \log \left[\frac{x+1}{x}\right] - \log(x^2-1)$$

4.0.11. Logaritmo: La función

A la función $f(x) = \log_a x$, siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, se le llama función logarítmica de base a.

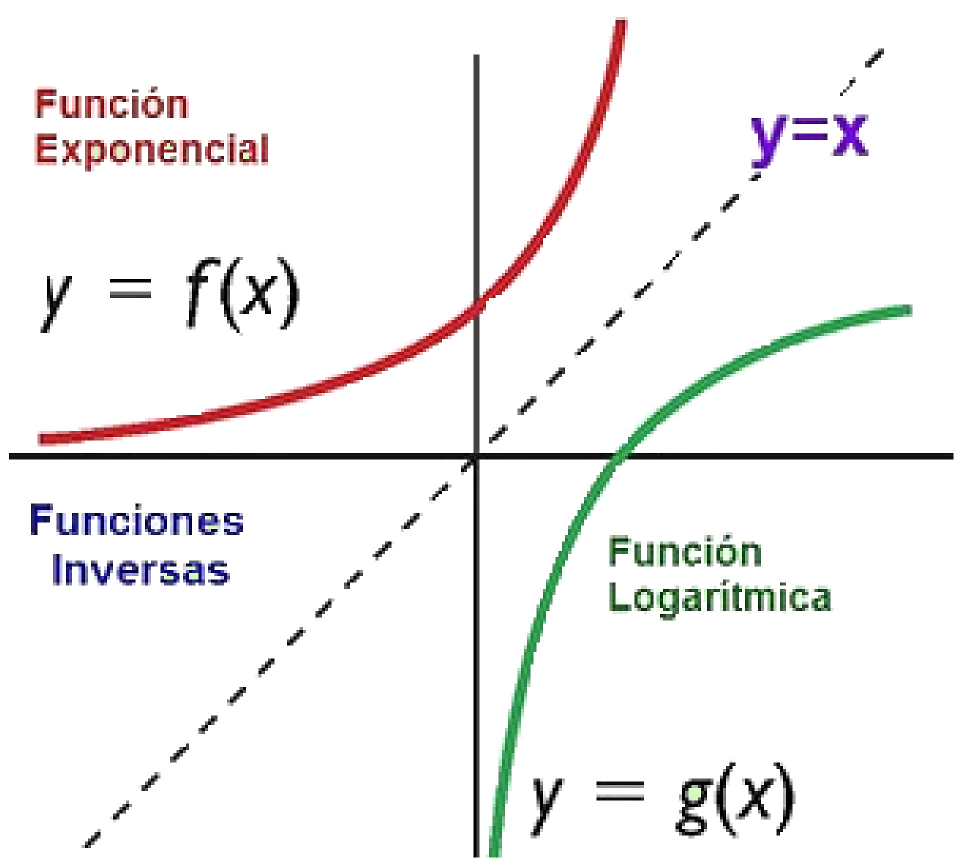
La función logarítmica más utilizada es la que tiene por base el número e, de hecho cuando hablemos de la "función logarítmica" sin especificar la base, entenderemos que es la que tiene por base dicho número, le llamaremos función logaritmo natural y le denotamos como $f(x) = \ln x$.

Esta clase de funciones sirven para modelar una gran cantidad de situaciones

Las formas exponencial y logarítmica están conectadas por

$$\boxed{y = a^x \Longleftrightarrow \log_a y = x}$$

Desde un punto de vista geométrico, las gráficas de las funciones exponencial y logarítmicas son simétricas respecto de la recta $y = x$. El par de figuras siguientes ilustra esta propiedad.



Actividad 65 *Hacer la gráfica de las funciones $y = \log_2 x$ y $y = \log_{\frac{1}{2}} x$*

Algunas propiedades de $y = \log_a x$

Las propiedades generales de la función logarítmica se deducen a partir de las de su inversa, la función exponencial. Así, se tiene que:

1. *La función logarítmica sólo existe para valores de x positivos, sin incluir el cero. Por tanto, su dominio es el intervalo $(0, \infty)$.*
2. *Las imágenes obtenidas de la aplicación de una función logarítmica corresponden a cualquier elemento del conjunto de los números reales, luego el recorrido de esta función es $\mathbb{R}$.*
3. *En el punto $x = 1$, la función logarítmica se anula, ya que $\log_a 1 = 0$, en cualquier base.*
4. *La función logarítmica de la base es siempre igual a 1.*
5. *La función logarítmica es creciente para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$.*

Tarea 10 *Bosqueja en un mismo sistema cartesiano las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x$. Prueba, analíticamente, que son inversa una de la otra*

---

5. Funciones periódicas

Veamos la siguiente situación: Si en este momento son las 11 de la mañana ¿qué hora será dentro de 24 hrs? ¿Y que hora será dentro de 48 hrs? ¿Y que hora será dentro de cualquier múltiplo de 24 hrs? Por supuesto que tendremos la misma hora, 11 de la mañana.

Este en un ejemplo de función periódica, su período (ciclo) es de 24 hs.

Podemos establecer lo siguiente:

Una función es periódica cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama ***periodo****.*

$$f(x + \text{periodo}) = f(x)$$

Formalmente

Definición 5.1 *Una función se dice que es periódica si existe $T > 0$ tal que*

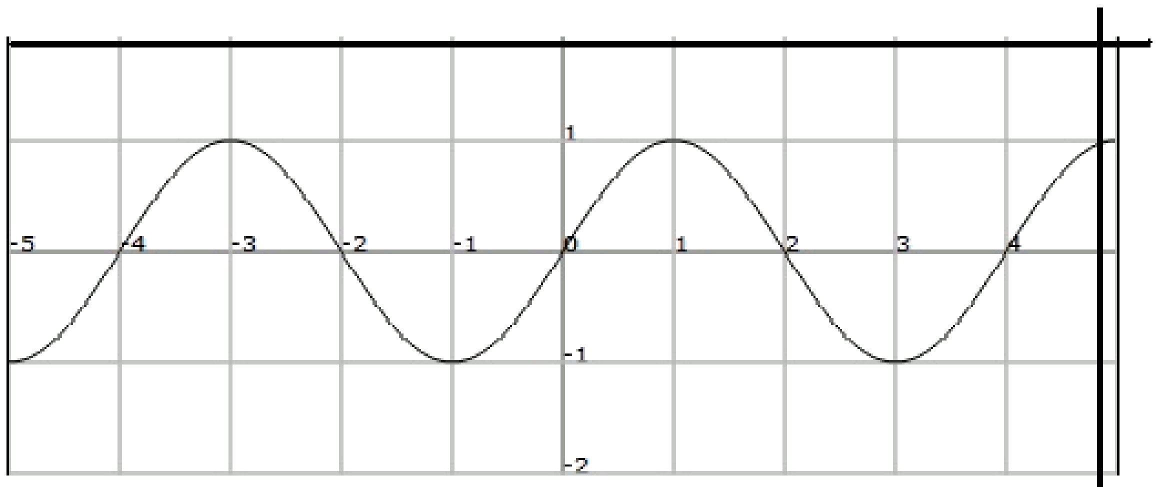
$$f(t+T) = f(t), \quad \text{para todo } t$$

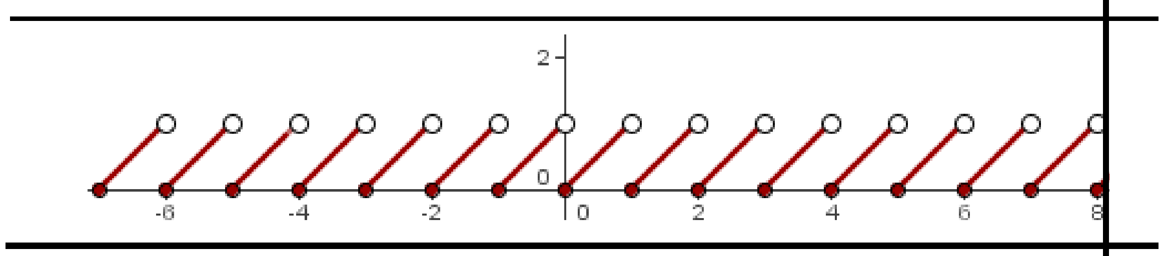
Diremos que T es un periodo de la función

El valor de $T > 0$ más pequeño que verifica $f(t+T) = f(t)$ se llama **periodo fundamental** *de la función.*

Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo su comportamiento en un periodo.

Actividad 66 *Determina si las gráficas siguientes representan una función periódica. Si es así halla el periodo de cada función.*



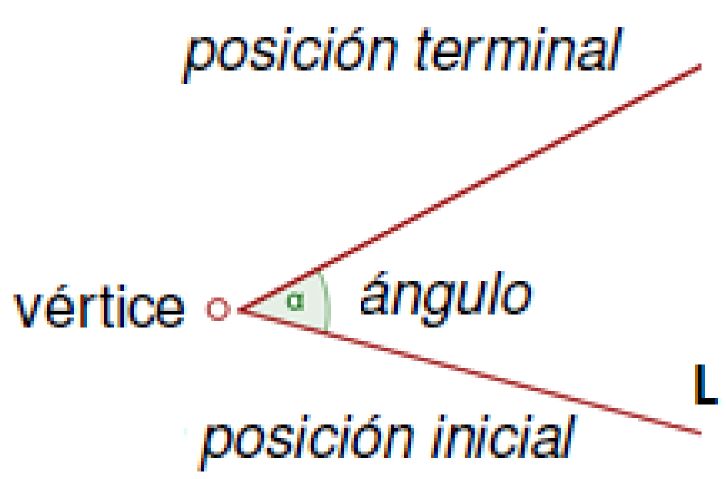


5.0.12. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas se encuentran relacionadas con fenómenos que se repiten periódicamente, es decir, situaciones que se repiten una y otra vez. Por ejemplo, la variación diaria de la marea, el cambio de temperatura durante del día, corriente eléctrica alterna, movimiento de los planetas, ciclos biológicos, etc.

Ángulo

Un ángulo es la región del plano engendrada por la rotación de una semirecta alrededor de su extremo, desde una posición inicial hasta una posición terminal.

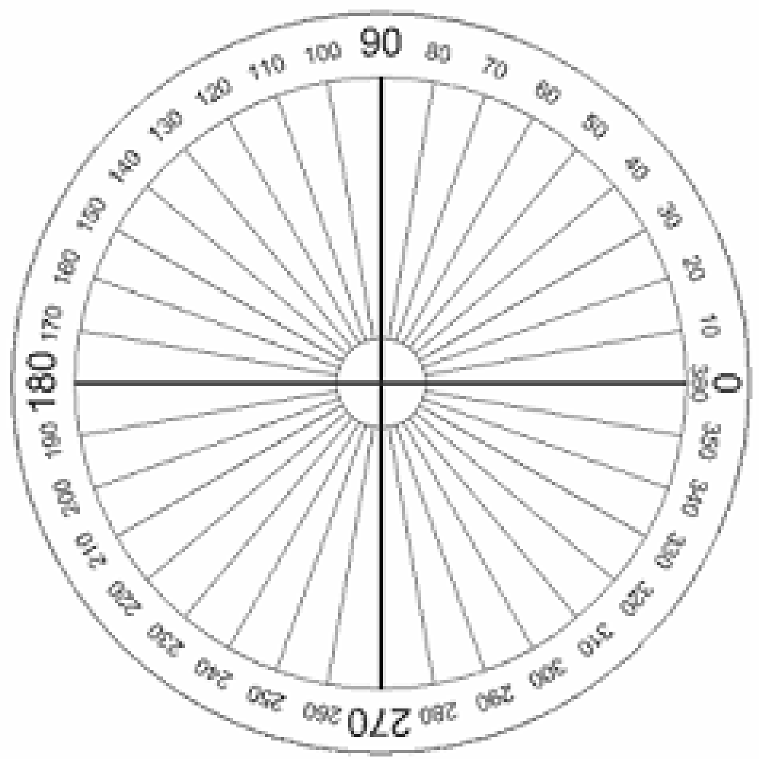


Las semirrectas se llaman **lados del ángulo**. *El origen común es el* **vértice**.

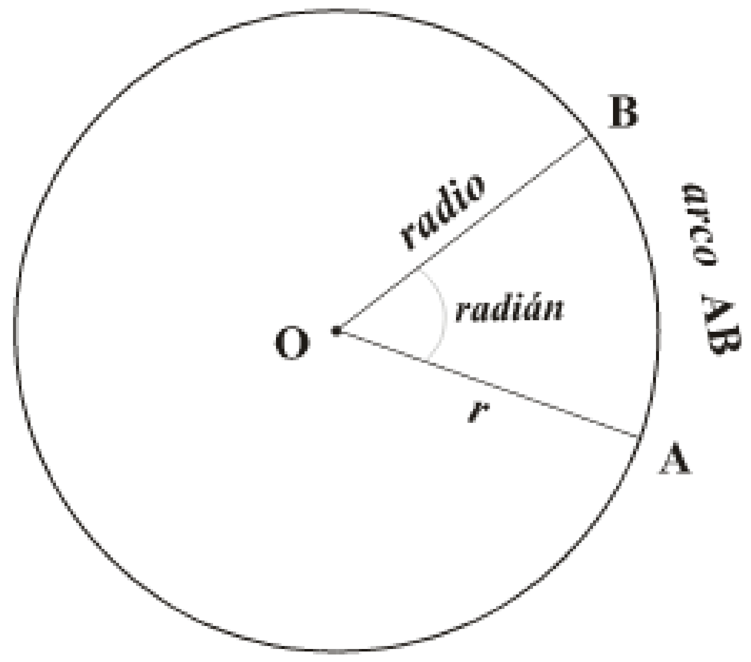
- **medida del ángulo**: *es la amplitud de la rotación.*

  Si la rotación de la semi-recta se hace en sentido izquierdo, entonces el ángulo se considera positivo, y negativo si es en sentido contrario. La medida de un ángulo se hace en grados o en radianes.

- **grado** : *Se divide el arco de circunferencia en 360 partes iguales. La magnitud del ángulo cuyos lados intersectan un arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia se llama* **grado** *sexagesimal*



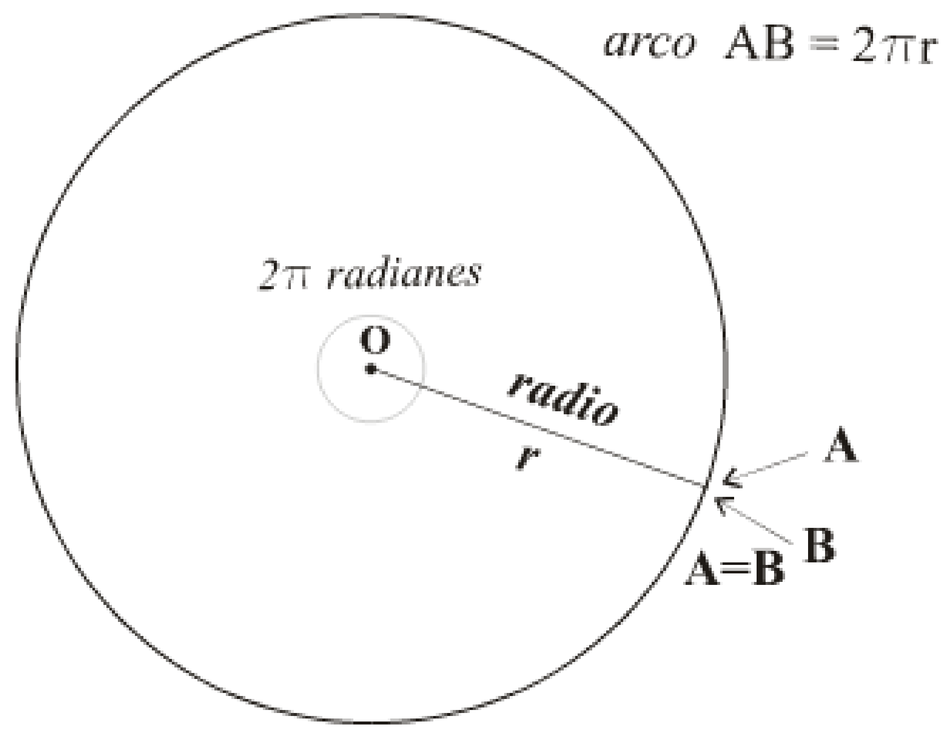
- **radian**: *Se divide el arco de circunferencia tomando como medida el radio de la circunferencia. El ángulo del centro cuyos lados intersectan un arco de circunferencia de longitud igual al radio se llama* **radian**.



- **Medida en radianes de un ángulo completo**

  Nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuántos radianes mide un ángulo completo?
  Veamos:

  Un ángulo completo se corresponde con un arco igual a la circunferencia completa, es decir, con una vuelta completa a la circunferencia.



En la figura tenemos una circunferencia de radio r en la que hemos trazado el arco AB (en este caso $A = B$). La medida de dicho arco coincide con la longitud de la circunferencia, es decir:

$$\text{longitud } \widehat{\mathrm{AB}} = \text{longitud circunferencia} = 2\pi r$$

Como cada medida del radio se corresponde con un radián, si el arco mide 2π veces el radio r, entonces la medida del ángulo será 2π radianes

A partir de esto se obtiene:

$$\boxed{2\pi \text{ radianes} = 360}$$

Esto equivale a decir que $1\,\pi$ radián $= 180$, de lo cual

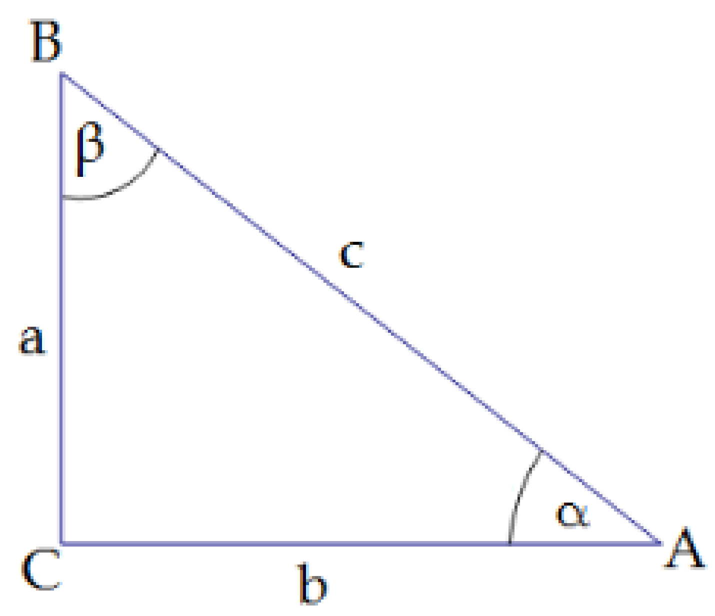
$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Actividad 67 *Completa la siguiente tabla:*

grados	0	30	45	60		120	150	180	210		270	300
radianes					$\frac{\pi}{2}$					$\frac{4\pi}{3}$		

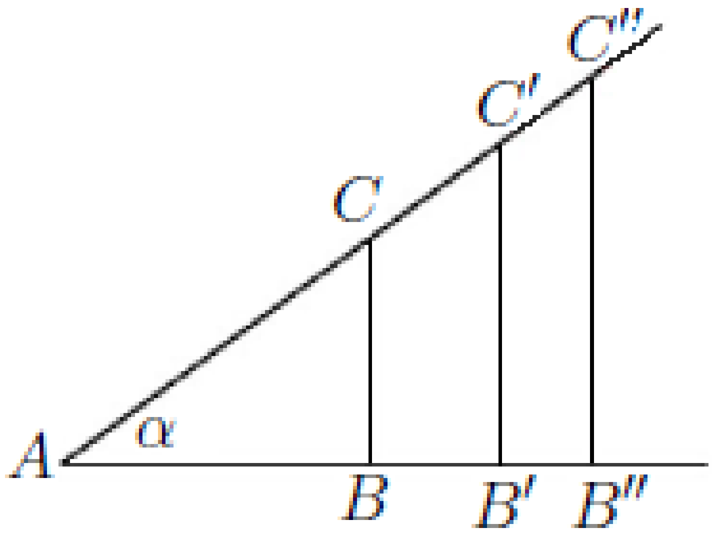
5.0.13. Razones trigonométricas

Debido a que un triángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones, dos entre cada pareja de estos lados. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son las siguientes:



- $sen\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\,\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
- $tg\,\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{a}{b}$
- $cotg\,\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{b}{a}$
- $\sec\,\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
- $\csc\,\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a}$

Observación 5.2 *Se han definido las razones trigonométricas para un ángulo a través de la construcción de un triángulo rectángulo, pero también pueden construirse muchos triángulos rectángulos que tengan ese mismo ángulo. En la figura los tres triángulos son semejantes*



Cuando los triángulos son semejantes las proporciones entre sus lados son iguales, es decir:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} = sen\alpha$$

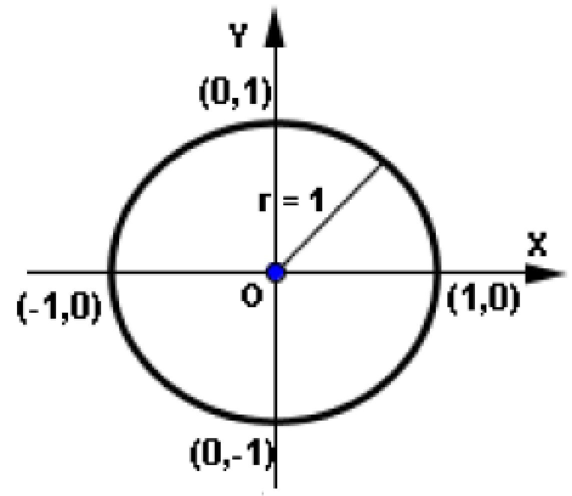
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC''} = cos\alpha$$

Esto que es válido para las restantes funciones trigonométricas significa que:

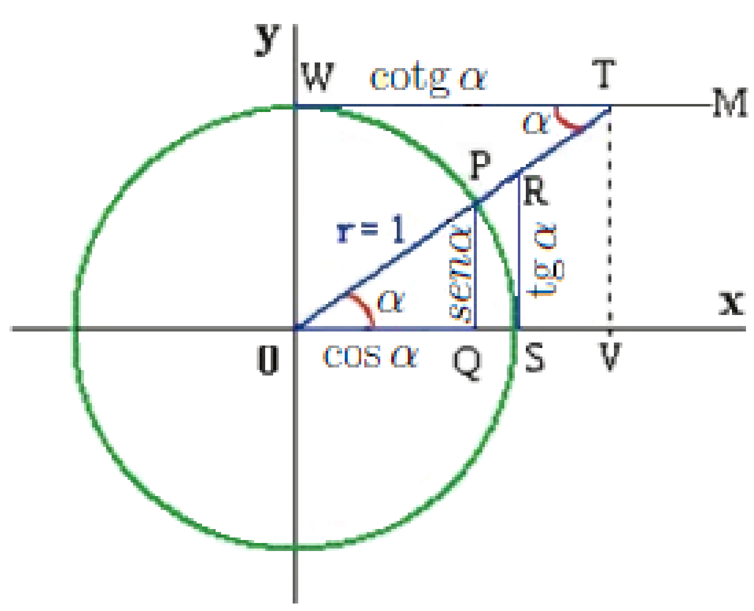
> *Las razones Trigonométricas no dependen de la medida de los lados, dependen del ángulo*

☞ **Circunferencia Trigonométrica**

Se llama circunferencia trigonométrica o goniométrica a aquella que tiene su centro es el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas, su radio unitario, siendo el punto origen de los arcos el punto de intersección de esa circunferencia con el semieje positivo de las abscisas



Las razones trigonométricas deducidas en una circunferencia goniométrica (de radio unitario) se corresponden con los valores de ciertos segmentos de recta que se denominan **líneas trigonométricas**. *A continuación se muestran las líneas trigonométricas en el primer cuadrante. La forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrantes es similar.*



El punto P tienen coordenadas (x, y). Los triángulos OQP, OSR, TWO y OVT son semejantes, los cuatro son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (por lo tanto, también el tercero). La consecuencia de esto es que las razones entre dos de los lados de uno cualquiera de los triángulos, es igual a la razón entre los lados homólogos en los otros triángulos. Teniendo en cuenta esto y que el radio del círculo es 1, se deducen las seis líneas trigonométricas.

$$sen\alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = \overline{PQ} = \textbf{ordenada de P} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{1} = \overline{OQ} = \textbf{abscisa de P} = x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = \frac{RS}{1} = \overline{RS}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OV}{TV} = \frac{WT}{OW} = \frac{WT}{1} = \overline{WT}$$

$$\sec\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{1} = \overline{OR}$$

$$\csc\alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OT}{1} = \overline{OT}$$

5.0.14. Comportamiento del seno y coseno

- **Primer cuadrante**

***Actividad* 68** *Considerando la figura del círculo unitario:*

1. *¿Cuál es el valor del seno en 0?*
2. *¿Cuál es el valor del seno en $90°$?*
3. *¿Cuál es el intervalo de variación de los valores del seno en el primer cuadrante? Anota*

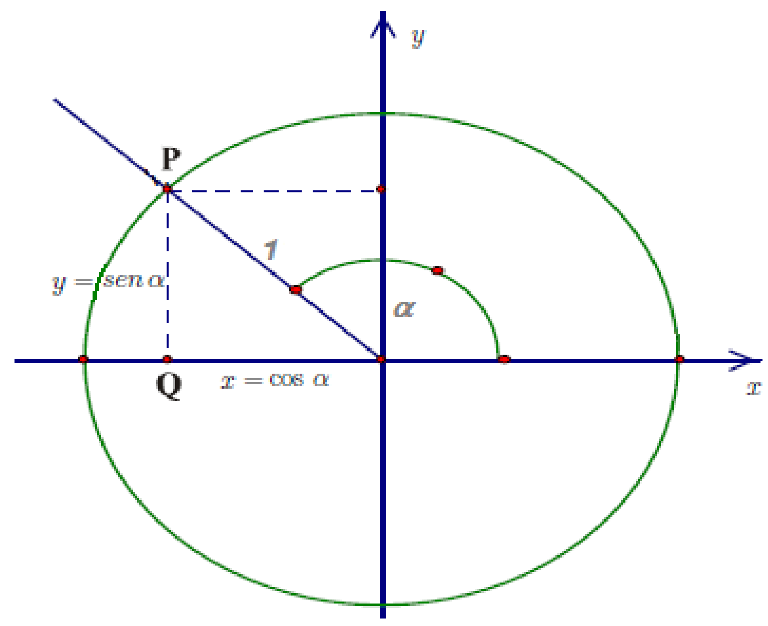
$$\leq sen\alpha \leq$$

4. *¿Signo del seno en el primer cuadrante?*
5. *¿Cuál es el valor del coseno en 0?*
6. *¿Cuál es el valor del coseno en $90°$?*
7. *¿Cuál es el intervalo de variación de los valores del coseno en el primer cuadrante? Anota*

$$\leq cos\alpha \leq$$

8. *¿Signo del coseno en el primer cuadrante?*

- **Segundo cuadrante**



***Actividad* 69**

1. *Anota el segmento que define el seno: $sen\,\alpha =$*
2. *¿Qué signo tiene el seno en el segundo cuadrante?*
3. *Anota el intervalo de variación de los valores del seno*

$$\leq sen\alpha \leq$$

4. *Anota el segmento que define el coseno: $\cos\alpha =$*
5. *¿Qué signo tiene el coseno en el segundo cuadrante?*
6. *Anota el intervalo de variación de los valores del coseno*

$$\leq cos\alpha \leq$$

***Tarea* 11** *Repite las actividades anteriores para el tercer y cuarto cuadrante*

- **Las restantes funciones**

Las siguientes formas de escribir las restantes funciones trigonométricas en función del seno y del coseno facilitan los cálculos:

- *La tangente de x se define para todo valor de x que no anule al coseno como*

$$tg\,x = \frac{sen\,x}{\cos\,x}$$

- *La cotangente de x se define para todo valor de x que no anule al seno como*

$$ctg\,x = \frac{\cos\,x}{sen\,x}$$

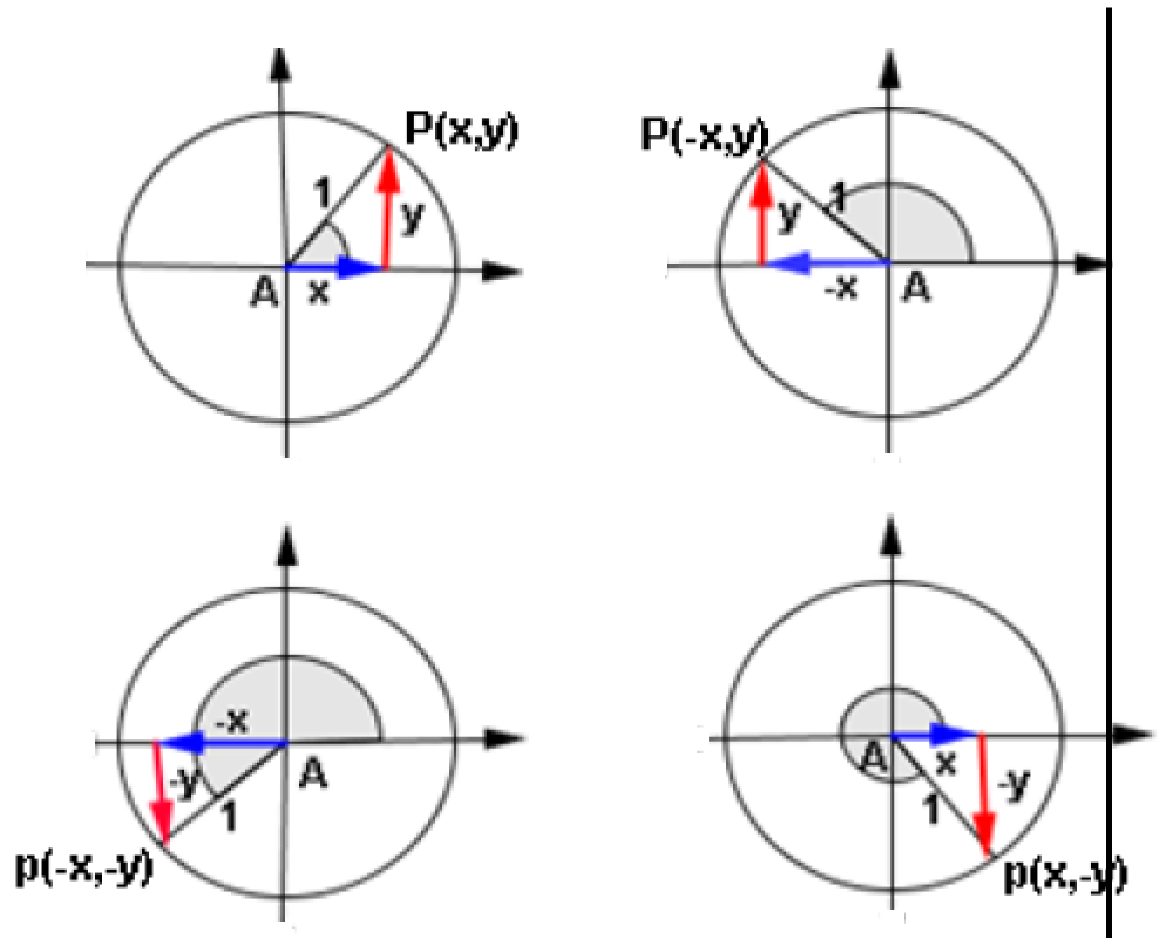
- *La secante de x se define para todo valor de x que no anule al coseno como*

$$sec\,x = \frac{1}{\cos\,x}$$

- *La cosecante de x se define para todo valor de x que no anule al seno como*

$$csc\,x = \frac{1}{sen\,x}$$

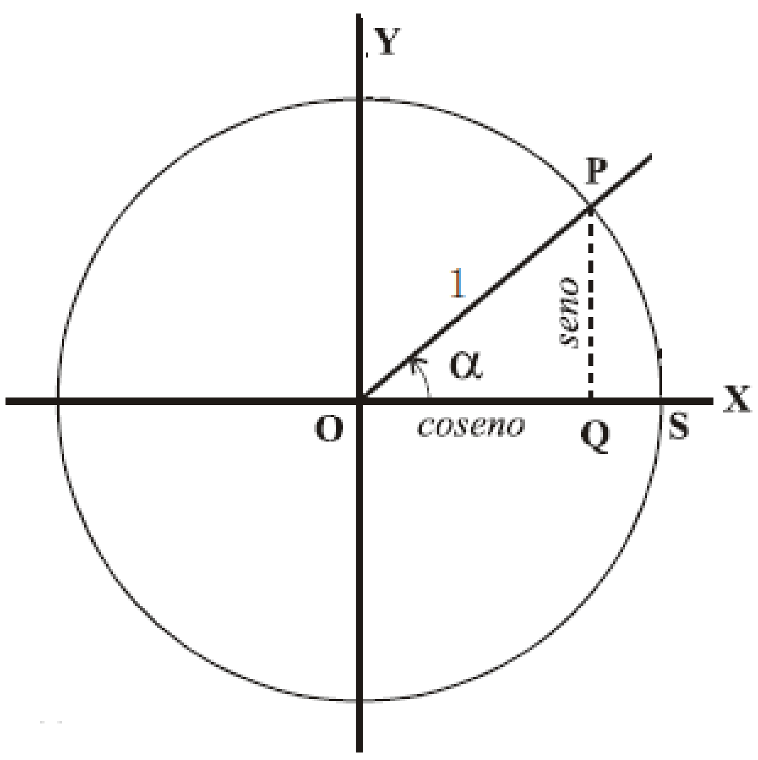
- **Signo de las funciones trigonométricas**



Actividad 70 Considera la figura superior para completar la siguiente tabla con los signos de cada función trigonométrica en cada cuadrante

	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
I						
II						
III						
IV						

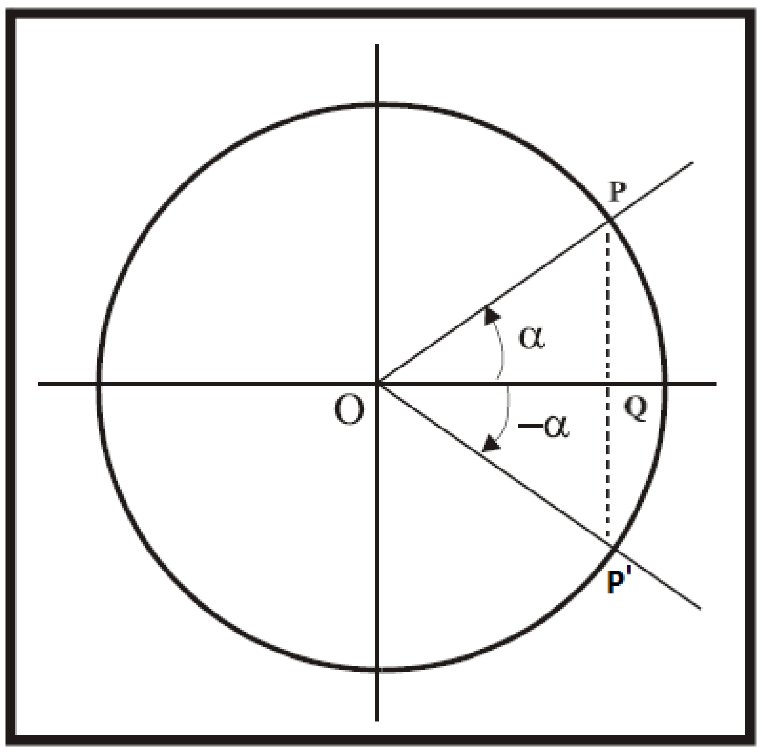
Actividad 71 En la figura tenemos el triángulo rectángulo OQP con ángulo recto en el vértice Q, catetos PQ y OQ e hipotenusa $r = 1$. Anota la propiedad que cumplen, en conjunto, el seno y el coseno. (Pitágoras es clave)



Actividad 72 Se sabe que α es un angulo del segundo cuadrante y que $sen\,\alpha = \frac{2}{5}$. Hallar $\cos\,\alpha$

Actividad 73 Si α es un ángulo, su opuesto se escribe $-\alpha$ y se interpreta como un ángulo de igual tamaño pero tomado en sentido contrario a α, es decir, si α está tomado en el sentido del movimiento contrario a las agujas de un reloj (sentido positivo), entonces $-\alpha$ está tomado en el sentido del movimiento de las agujas del reloj. Además, la suma de un ángulo y su opuesto es el ángulo 0, es decir:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

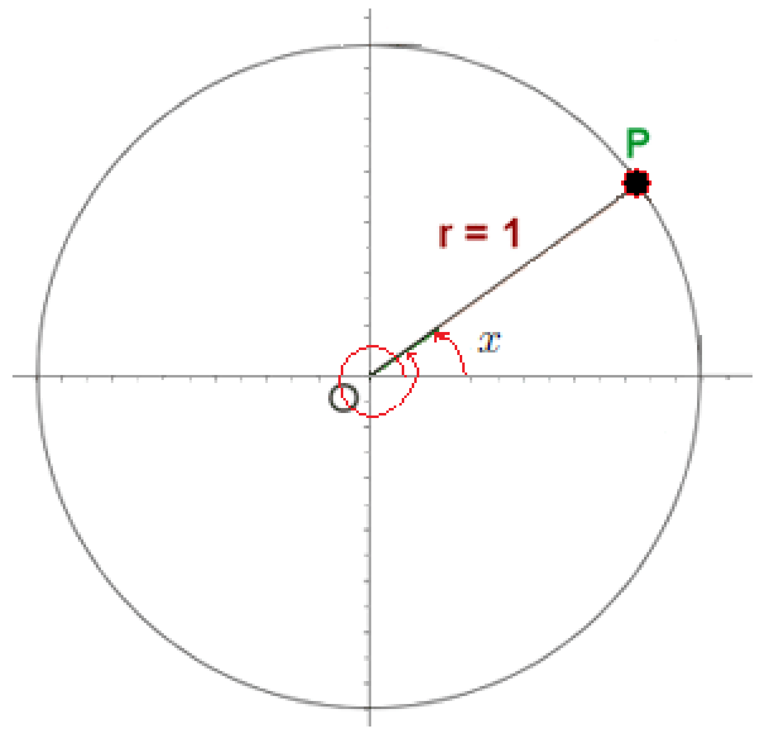


A partir de la figura (considera el signo de los segmentos), responde lo siguiente:

1. Anota el segmento que define $sen(\alpha) =$ ....
2. Anota el segmento que define $sen(-\alpha) =$ ....
3. Anota el segmento que define $cos(\alpha) =$ ....
4. Anota el segmento que define $cos(-\alpha) =$ ....
5. Anota las dos conclusiones:

En lenguaje común y corriente significa que el coseno es una **función par**, y que el seno es una **función impar**.

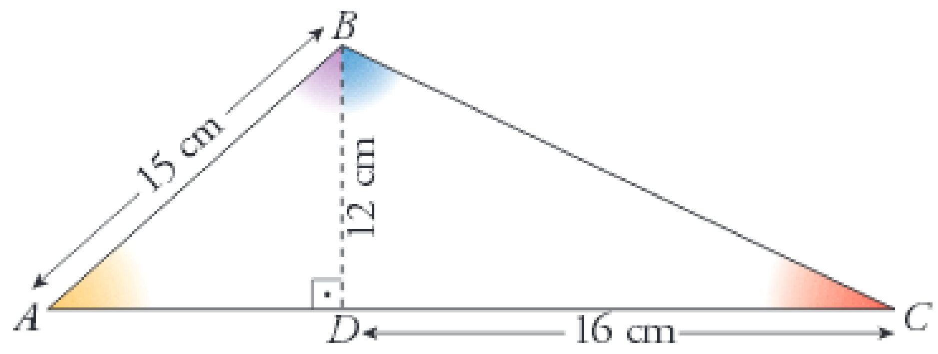
Actividad 74 Considera el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria que se ve en la figura



1. ¿Cuánto demora el punto P en recorrer la circunferencia y volver al mismo punto?
2. Esto es válido para las funciones seno y coseno, ¿cuál es su periodo?
3. Anota las dos conclusiones:

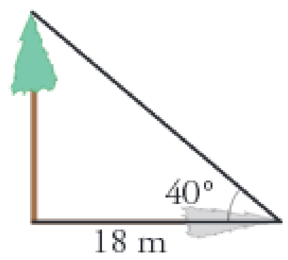
Actividad 75

1. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos A, C, ABD, CBD a partir de la figura

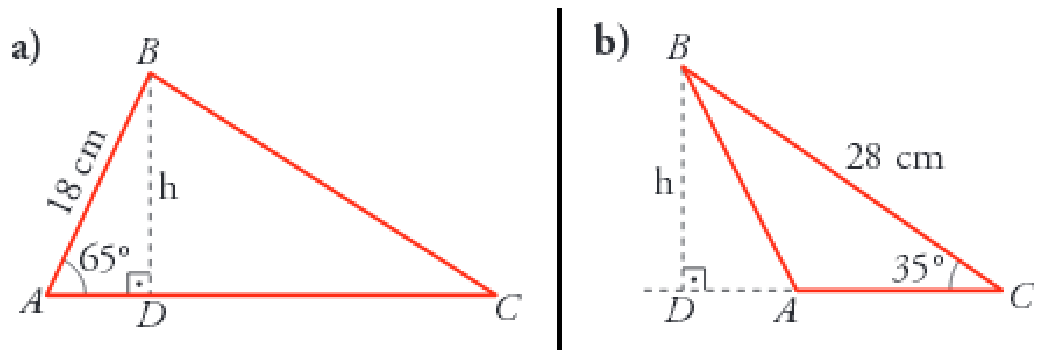


2. Si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$, α ángulo del primer cuadrante

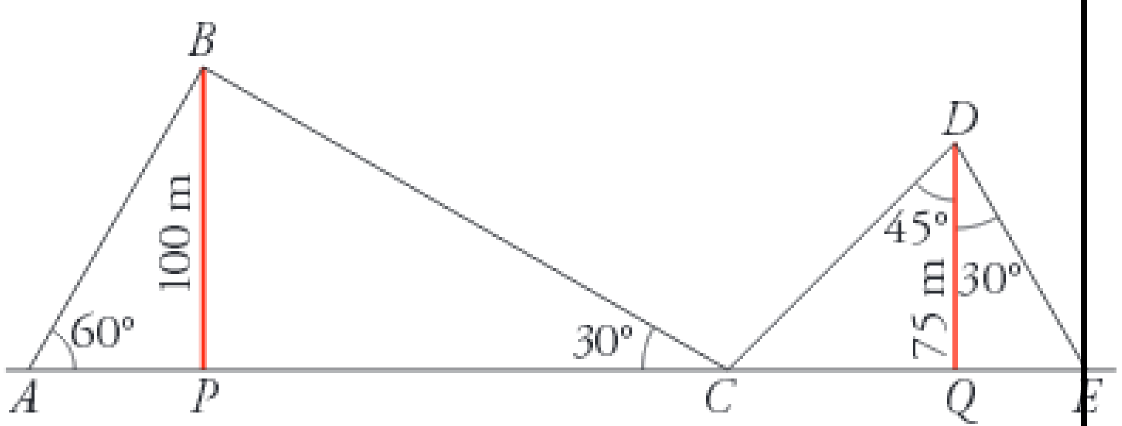
3. Cuando los rayos del sol forman 40 con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?



4. Calcula la altura, h, de los siguientes triángulos:



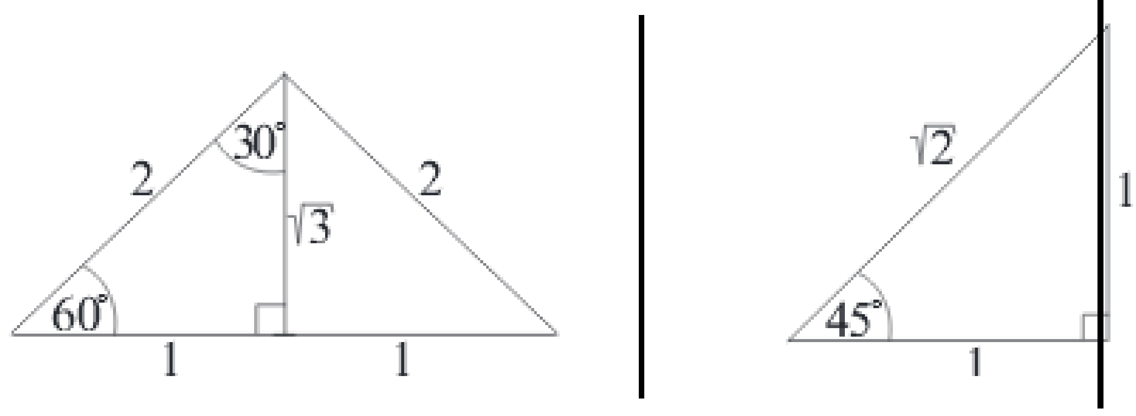
***Tarea* 12** Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia $d(A, E)$. Resp $d(A, E) = 349, 25m$



5.0.15. Razones de ángulos especiales

Llamamos ángulos especiales a los de 30, 45 y 60

***Actividad* 76** A partir de las figuras halla los valores de las funciones trigonométricas de 30, 45 y 60. Completa la tabla



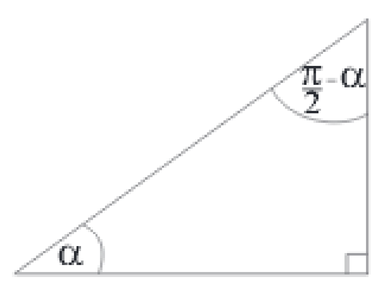
ángulo		sen	cos	tg
0º	0 rad			
30º	$\frac{\pi}{6}$ rad			
45º	$\frac{\pi}{4}$ rad			
60	$\frac{\pi}{3}$ rad			

- **Cofunciones**

Se acostumbra a decir que la función coseno es la cofunción del seno y viceversa,que la función cotangente es la cofunción de la tangente y viceversa y que la cosecante es la cofunción de la secante y viceversa. La relación entre una función y su cofunción está dada por:

$$\text{función}\,(\alpha) = \text{cofunción}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

***Actividad* 77** A partir de la figura halla seno, tangente y secante del ángulo α. Calcula también coseno, cotangente y cosecante de $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Anota tu conclusión.

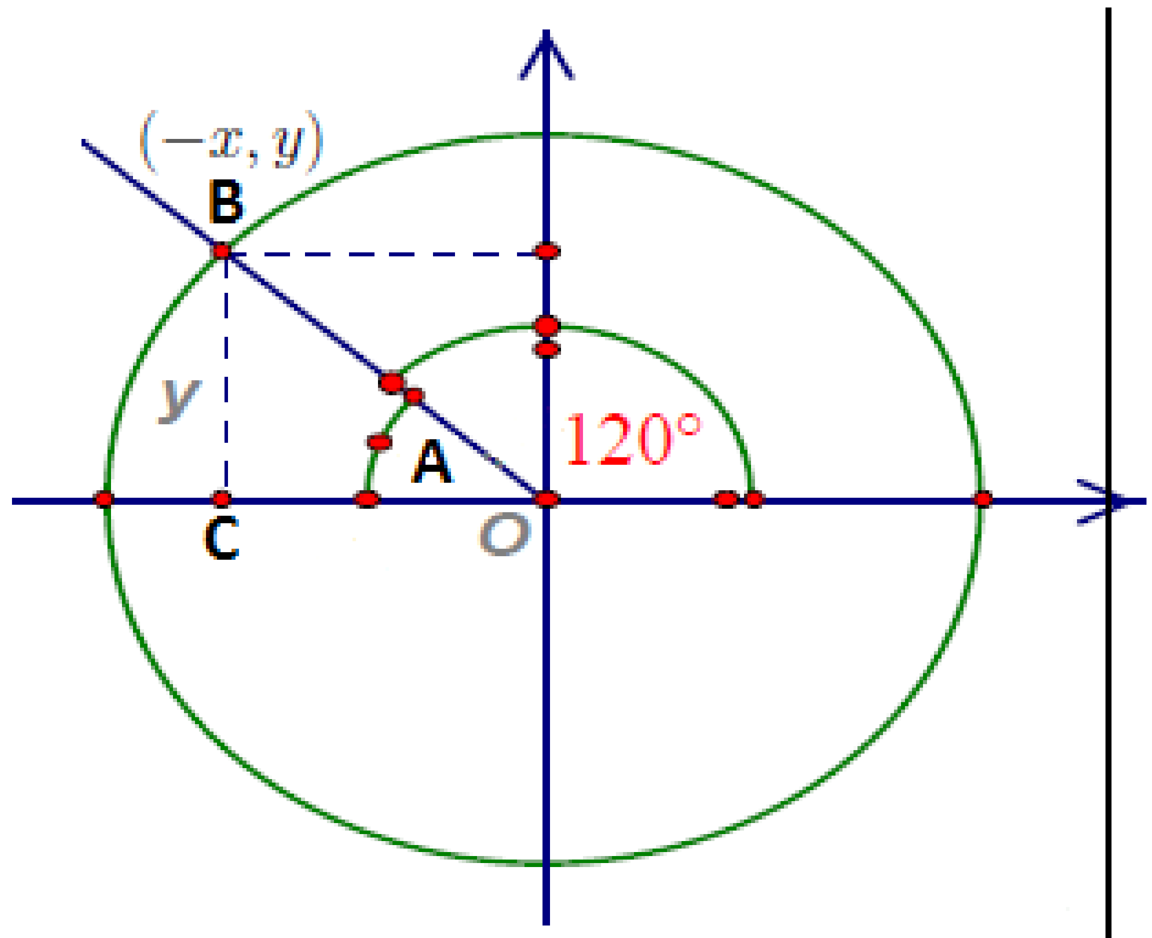


***Actividad* 78** Si $3\operatorname{tg}\alpha = \sec\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Hallar los valores de $\cos\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ y $(\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)^2$

5.0.16. Reducción de ángulos

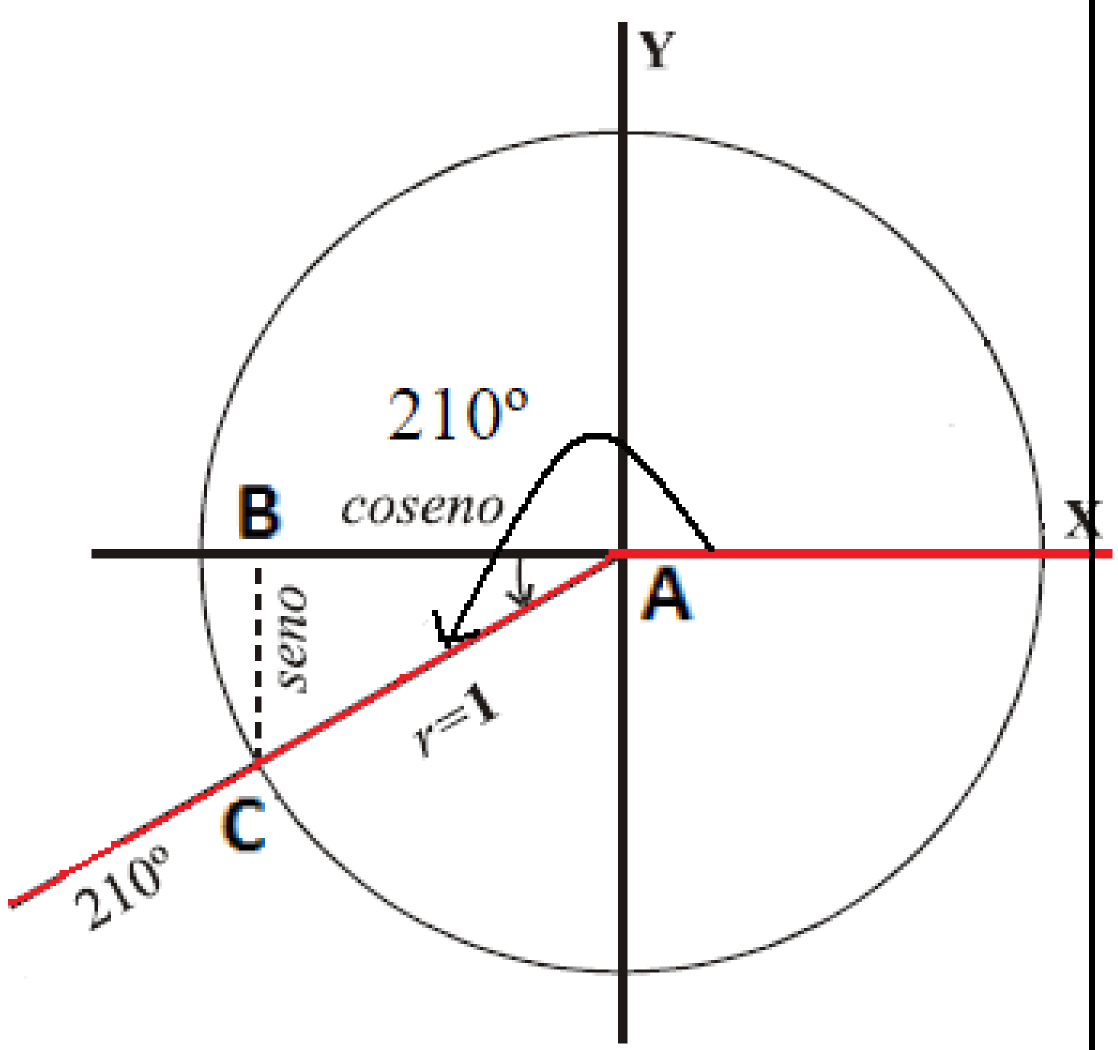
Los ángulos entre 0 y 90 son los ángulos del llamado del primer cuadrante. Sus razones trigonométricas son conocidas, y cualquier otro ángulo mayor que estos, puede reducirse a uno de ellos mediante las fórmulas de reducción, y sus razones trigonométricas coinciden con las de éste, por lo que en la práctica se utilizan estas fórmulas con este fin.

***Actividad* 79** Usa la figura siguiente para hallar el $sen(120)$ y las demás funciones en ese ángulo.



1. ¿Qué segmento representa al $sen 120$:
2. ¿Cuánto mide el ángulo en A?
3. ¿Cuánto mide el ángulo en B?
4. Construye un triángulo congruente al ACB en el primer cuadrante.
5. El valor de $sen 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ¿Cuál es el valor de $sen 120$?

***Actividad* 80** Utilizar la figura siguiente para hallar los valores de las funciones trigonométricas de 210.



1. ¿Qué segmento representa al $sen 210$:
2. ¿Cuánto mide el ángulo en A?
3. ¿Cuánto mide el ángulo en C?
4. Construye un triángulo congruente al ACB en el primer cuadrante.
5. El valor de $sen 30 = \frac{1}{2}$ ¿Cuál es el valor de $sen 210$?

Estas dos actividades caben dentro del siguiente resultado general:

Teorema 5.3 Las funciones trigonométricas de 180 más o menos un ángulo agudo son iguales a las mismas funciones del ángulo agudo, con el signo correspondiente al cuadrante en que se halla el ángulo obtuso. Esto es:

$sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$	$sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$
$\sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha$
$\csc(\pi - \alpha) = \csc\alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = \csc\alpha$

Lo mismo ocurre con las funciones de 360 más o menos un ángulo agudo. Esto es:

Teorema 5.4

$sen(2\pi - \alpha) = -sen\alpha$	$sen(2\pi + \alpha) = sen\alpha$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$
$\sec(2\pi - \alpha) = \sec\alpha$	$\sec(2\pi + \alpha) = \sec\alpha$
$\csc(2\pi - \alpha) = \csc\alpha$	$\csc(2\pi + \alpha) = \csc\alpha$

***Actividad* 81** Hallar los valores del seno, coseno y tangente en 150, 240, 300, 330 y 420

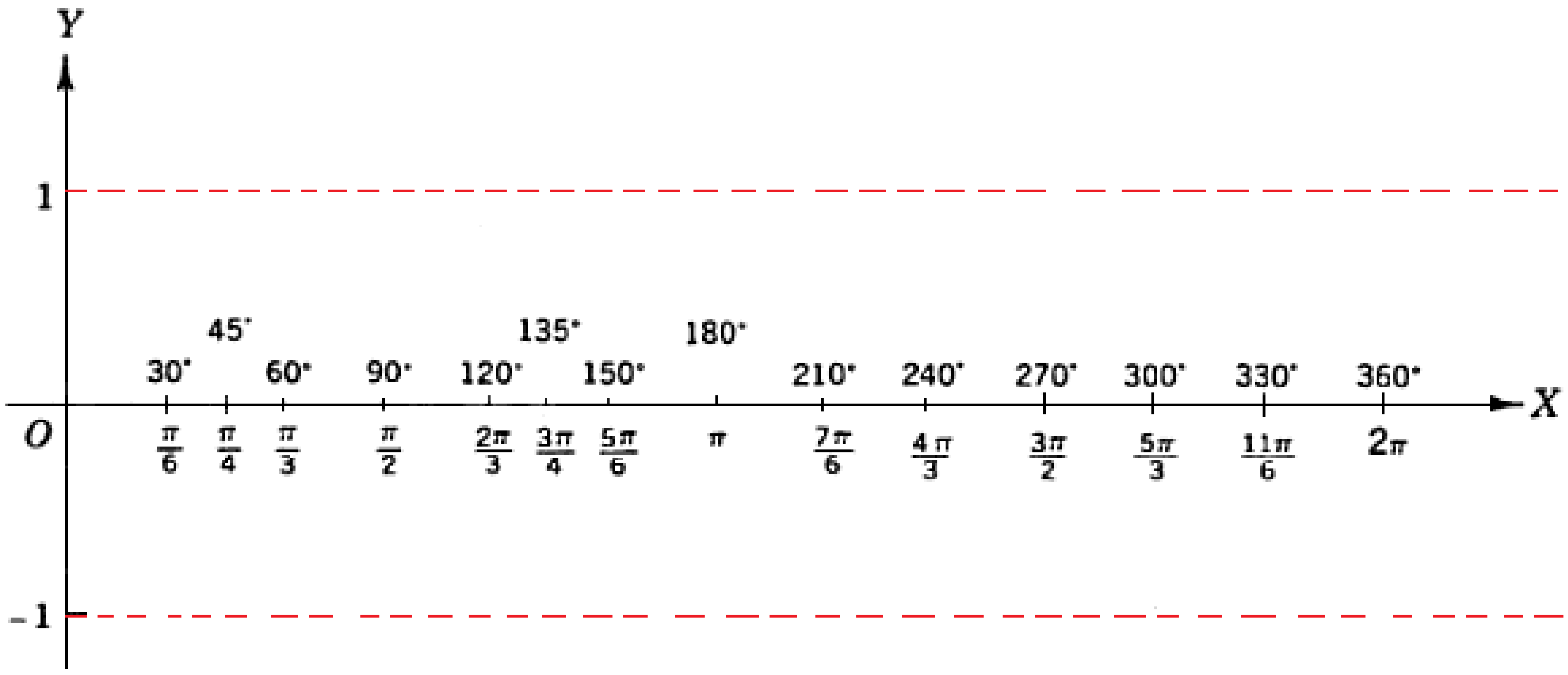
***Actividad* 82** Reducir a su menor expresión:

1. $\frac{sen 40}{sen 140} + \frac{\cos 20}{\cos 160} + \frac{\operatorname{tg} 80}{\operatorname{tg} 180} =$
2. $sen 150 + \cos 240 - \operatorname{tg} 315 =$

5.0.17. Gráfica de las funciones trigonométricas

Lo primero y más importante es que sabemos que ambas funciones, el seno y el coseno, son periódicas de periodo 2π. Esto significa que graficamos en un intervalo de longitud 2π y luego "clonamos" la gráfica en el resto de los intervalos de igual longitud. También conocemos que sus valores máximo y mínimo son 1 y -1 respectivamente.

***Actividad* 83** Grafica la función seno utilizando los valores dados en el siguiente gráfico

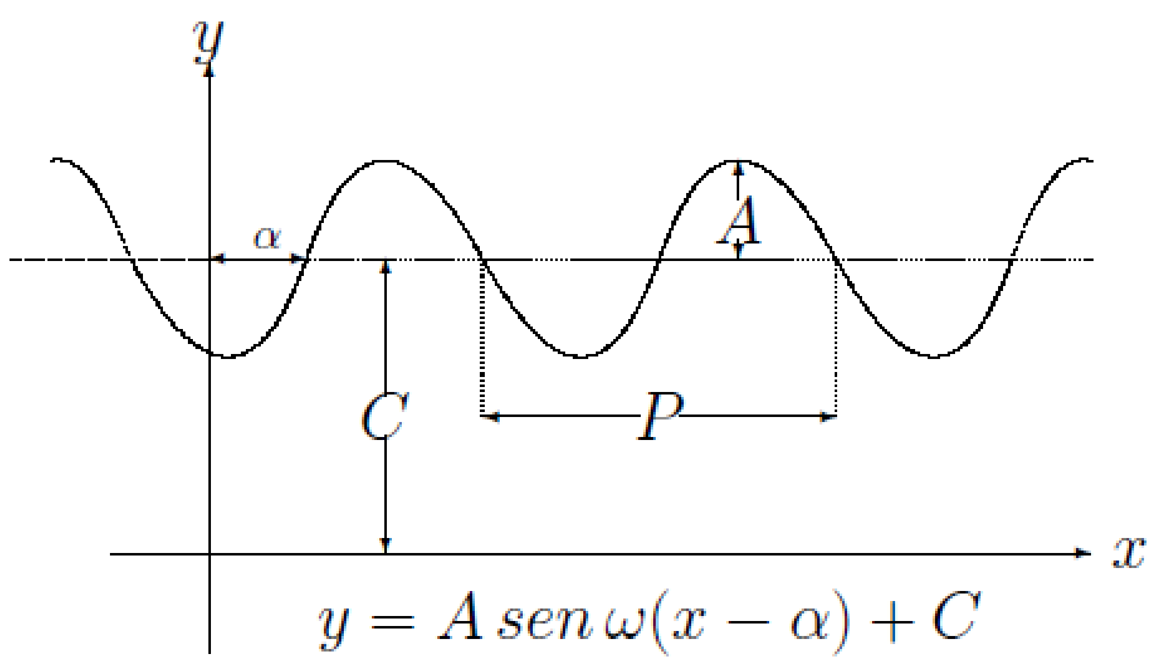


5.0.18. Gráfica de $y = A \cdot sen[\omega(x-\alpha)] + C$

Una sinusoide se la describe en forma analítica por medio de la siguiente ecuación:

$$y = Asen[\omega(x-\alpha)] + C$$

Vamos a estudiar de qué manera A, ω, α y C afectan el comportamiento de la gráfica de la función seno.



- **Eje de Referencia**

El eje de referencia, $y = C$, es la recta horizontal que divide a la sinusoide en dos porciones equivalentes. Se conoce también como desplazamiento vertical.

- **Amplitud**

Es la distancia vertical que existe entre el eje de referencia y la parte más alta o la parte más baja de la sinusoide (cambia el tamaño de la función)

- **El periodo**

P es el **periodo** o **longitud de onda**, esto es, el tiempo necesario para que la función ejecute un ciclo completo.

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

En las funciones base, $y = senx$ e $y = \cos x$, el ciclo tiene un período de 2π.

- **Frecuencia**

La letra ω es la **frecuencia angular**, cambia el valor del período de la sinusoide (modifica el grado de repetición).

$$\omega \cdot P = 2\pi$$

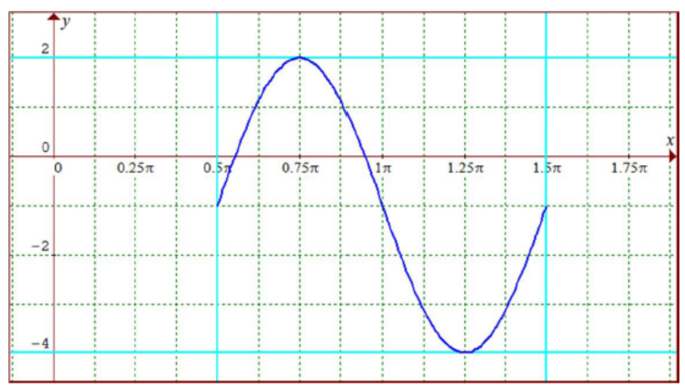
- **Ángulo de Fase**

El ángulo de fase α es donde la curva cruza la recta $y = C$, o bien, el desplazamiento que sufre la función por una traslación horizontal. O, en otras palabras, el ángulo de fase es el valor de x desde donde comienza a dibujarse el ciclo.

- **Fin del ciclo**

La gráfica de la función periódica termina en $\alpha + P$

Actividad 84 *A partir de la siguiente figura completa la tabla. Anota la función seno que representa a la gráfica*



Eje de referencia	C	
Amplitud	A	
Ángulo de fase (inicio del ciclo)	α	
Período	P	
Frecuencia	ω	
Fin del ciclo	$P+\alpha$	

Eje de referencia	C	
Amplitud	A	
Ángulo de fase (inicio del ciclo)	α	
Período	P	
Frecuencia	ω	
Fin del ciclo	$P+\alpha$	

Actividad 85 *1. Analiza las siguientes funciones, en cuanto a amplitud, periodo, frecuencia y ángulo de fase. Haz las graficas.*

a) $y = sen\,2t$
b) $y = sen\,4t$
c) $y = -2\,sen\left(\frac{x}{3}\right)$
d) $y = 1 + 2sen\,x$
e) $y = 3\,sen\,2x$
f) $y = 2sen\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

Tarea 13 *La demanda de empleo se modela por la función*

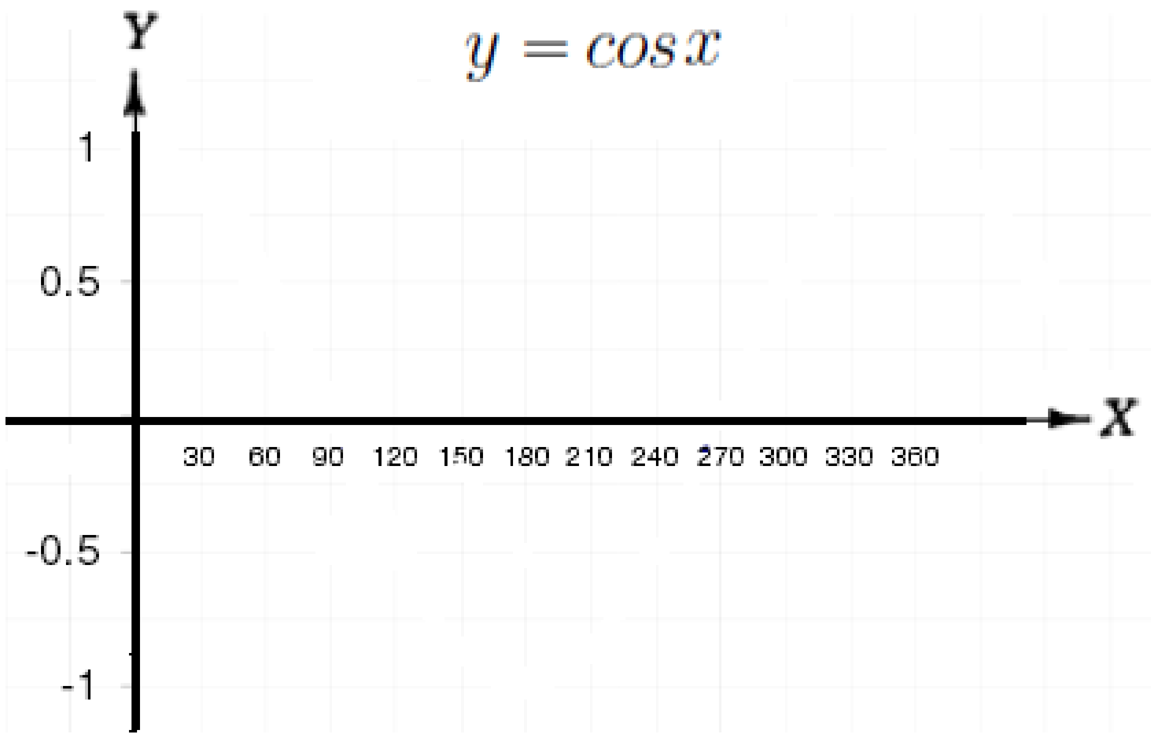
$$f(t) = 4\,sen(t+3) + 8$$

con t tiempo en años.

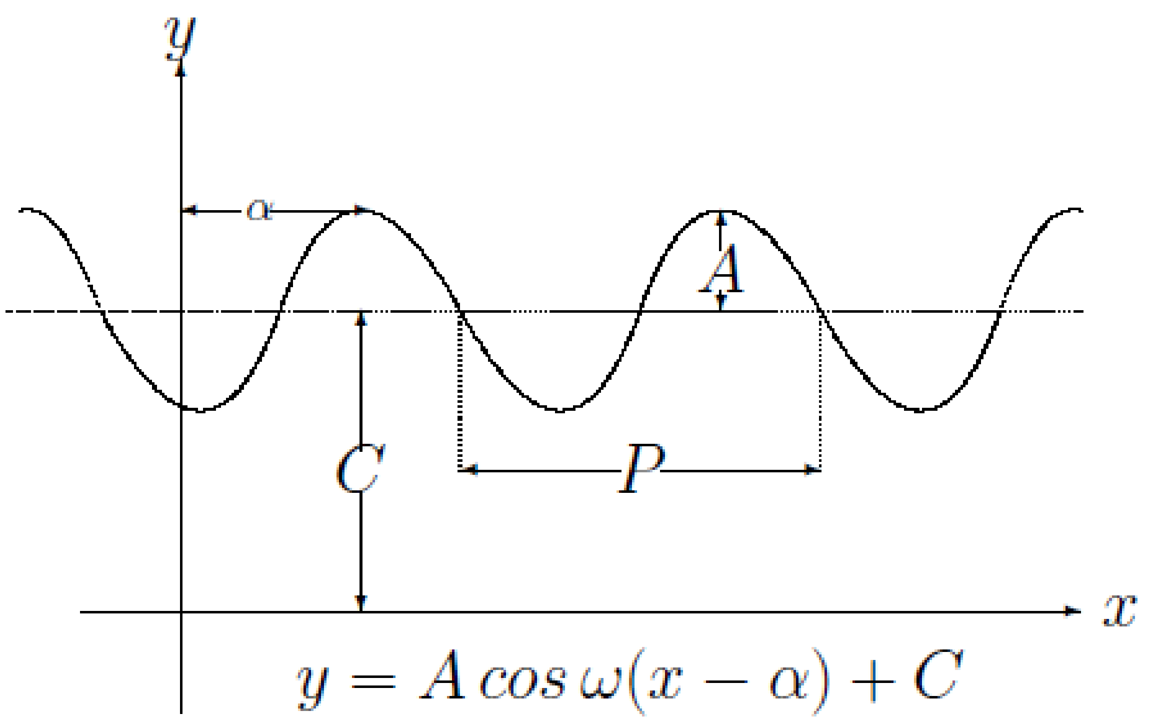
1. *Hallar la amplitud, el desplazamiento vertical, el desplazamiento de fase, la frecuencia angular y el periodo. Graficar.*

5.0.19. Gráfica del Coseno

Actividad 86 *Grafica la función coseno con los valores dados*



5.0.20. Gráfica de $y = A\cdot\cos[\omega(x-\alpha)] + C$



La figura muestra la **curva general del coseno**. En ella, A es la **amplitud**, C el **desplazamiento vertical**, P el **periodo** o **longitud de onda**, ω la **frecuencia angular** ($\omega\cdot P = 2\pi$), y α el **desplazamiento de fase** (la distancia entre el eje y y su valor máximo)

Actividad 87 *Grafica la siguientes funciones, indicando amplitud, periodo, frecuencia y ángulo de fase:*

1. $y = 2\cos(3x+\pi) - 1$
2. $y = -\frac{1}{2}\cos x$
3. $y = \cos 4x$
4. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
5. $y = 1 + \cos(3x + \frac{\pi}{2})$
6. $y = -5\cos(3x - \frac{\pi}{4})$

Tarea 14 *El nivel del agua en función del tiempo para las mareas está gobernado por la ecuación*

$$y = 5 + 4\,cos(\frac{\pi}{6}x)$$

1. *Hallar amplitud, periodo y fase. Trazar la gráfica*

5.0.21. Identidades trigonométricas

En muchos problemas que involucran funciones trigonométricas es necesario cambiar una expresión por otra que sea equivalente. Estas expresiones son las que se denominan identidades trigonométricas. Tienen la característica de ser verdaderas para todo valor del ángulo involucrado.

Hemos tenido ya la oportunidad de conocer algunas de ellas. La más conocida

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

que fue deducida de la circunferencia unitaria. Otras identidades son las que se forman por cocientes de senos y/o cosenos cuando se crean las restantes funciones trigonométricas, a saber:

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$
- $ctg\,\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sen\alpha}$
- $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$
- $csc\,\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$
- $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$

Actividad 88 *Completa las siguientes identidades:*

$$1 + tg^2\alpha \;=\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 + ctg^2\alpha \;=\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La siguiente es una lista de identidades de gran uso en problemas de cálculo:

5.0.22. Identidades Básicas

1. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
2. $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$
3. $1 + ctg^2\alpha = csc^2\alpha$
4. $csc\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$
5. $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$
6. $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$
7. $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$
8. $ctg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$
9. $tg(x+y) = \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\,tg\,y}$
10. $tg(x-y) = \dfrac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x\,tg\,y}$
11. $sen(2x) = 2sen\,x\,cos\,x$
12. $cos(2x) = cos^2x - sen^2x$
13. $sen(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{2}}$
14. $cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\,x}{2}}$

15 $sen(x+y) = sen\,x\,cos\,y + cos\,x\,sen\,y$

16 $sen(x-y) = sen\,x\,cos\,y - cos\,x\,sen\,y$

17 $cos(x+y) = cos\,x\,cos\,y - sen\,x\,sen\,y$

18 $cos(x-y) = cos\,x\,cos\,y + sen\,x\,sen\,y$

19 $sen\,x + sen\,y = 2sen(\frac{x+y}{2})\cdot cos(\frac{x-y}{2})$

20 $sen\,x - sen\,y = 2cos(\frac{x+y}{2})\cdot sen(\frac{x-y}{2})$

21 $cos\,x + cos\,y = 2cos(\frac{x+y}{2})\cdot cos(\frac{x-y}{2})$

22 $\cos x - \cos y = -2sen(\frac{x+y}{2}) \cdot sen(\frac{x-y}{2})$

Te haremos entrega de un formulario que contiene todas estas identidades, no queremos que las memorices todas, ¡no!, nuestro objetivo es que las aprendas a usar. No existe un método obligatorio para resolver una identidad. Puedes partir del lado izquierdo de la igualdad y por procesos algebraicos llegar al lado derecho, o bien, trabajar en paralelo ambos lados de la igualdad y llegar a un resultado común, y por último, pasar todo a un solo lado y resolver la igualdad a cero. Los profes tienen particular preferencia por la primera forma.

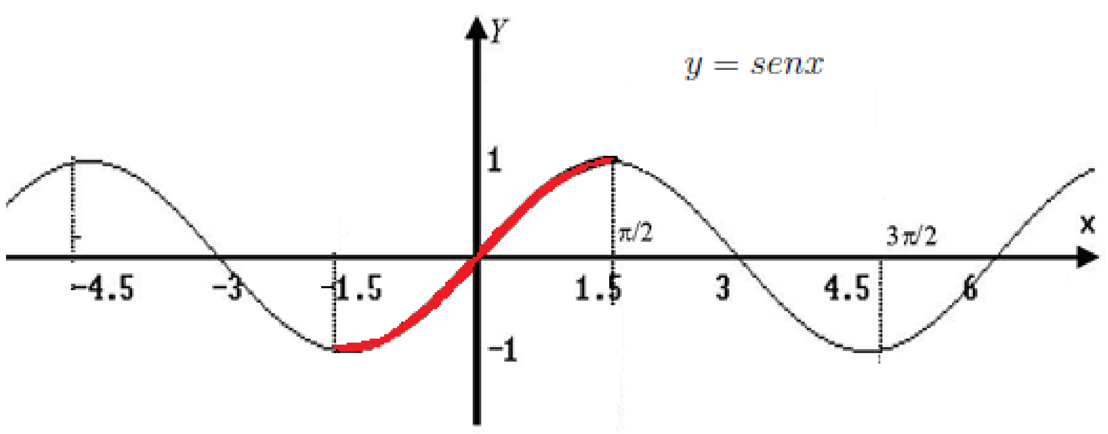
Actividad 89 *Probar las siguientes identidades:*

1. $\frac{\sec x}{tg\, x + ctg\, x} = sen\, x$
2. $\frac{tg\, x - sen\, x}{sen^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$

5.1 Funciones trigonométricas Inversas

Las funciones trigonométricas son todas periódicas, de modo que las gráficas de ninguna de ellas pasa la prueba de la línea horizontal para ser inyectiva. Esto significa que ninguna de ellas tiene una inversa a menos que el dominio de cada una esté restringido a hacer de ella una función inyectiva.

Restricción para $y = senx$



- Se restringe el dominio de $f(x) = senx$ al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para hacerla inyectiva y estrictamente creciente.

En estas condiciones existe la función inversa de $senx$, que se denota $arcsen\, x$.

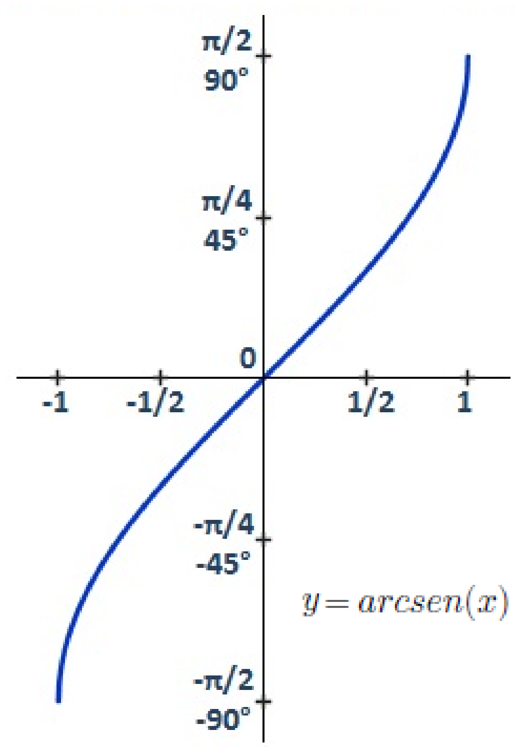
$$arcsen:\ [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$arcsenx = y \Longleftrightarrow x = seny$$

A partir de lo cual se satisface:

$$arcsen(senx) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

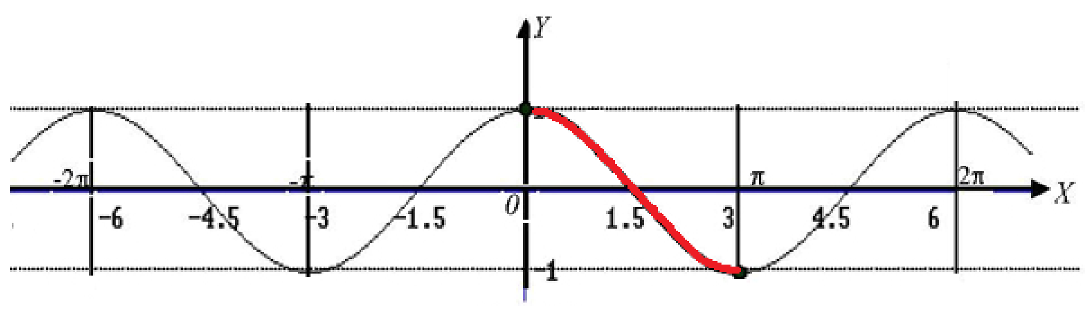
$$sen(arcsen(x)) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$



Actividad 90 *Completa la siguiente tabla:*

Función	Expresión equivalente	Solución
$y = arcsen(\frac{1}{2})$	$sen(y) = \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = arcsen(-\frac{1}{2})$		
$y = arcsen(-1)$		
$y = arcsen(-\frac{\sqrt{2}}{2})$		
$y = arcsen(-\frac{\sqrt{3}}{2})$		
$y = arcsen(0)$		

Restricción para $y = \cos x$



- Se restringe el dominio de $f(x) = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$ para hacerla inyectiva.

En estas condiciones existe la función inversa de $\cos x$, que se denota $arccos\, x$.

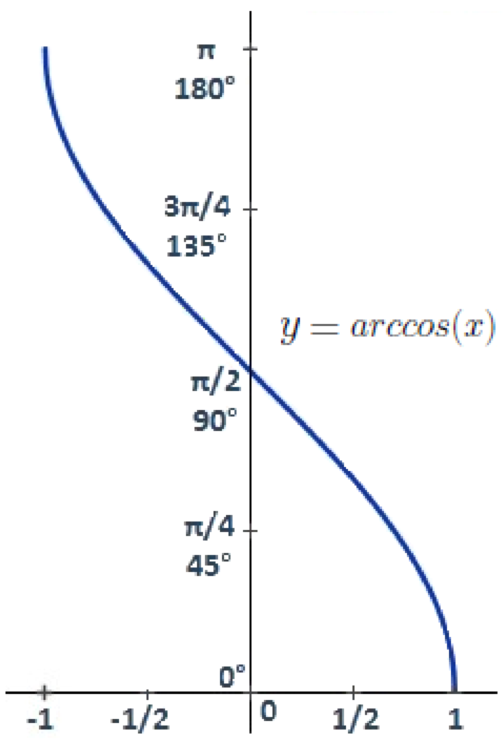
$$arccos:\ [-1,1] \to [0, \pi]$$

$$arccosx = y \Longleftrightarrow x = \cos y$$

Se verifica que:

$$arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(arccos(x)) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$$



Actividad **91** *Completa la siguiente tabla:*

Función	Expresión equivalente	Solución
$y = arccos(\frac{1}{2})$	$\cos(y) = \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = arccos(-\frac{1}{2})$		
$y = arccos(-1)$		
$y = arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$		
$y = arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$		
$y = arccos(0)$		

5.2 Ecuaciones trigonométricas

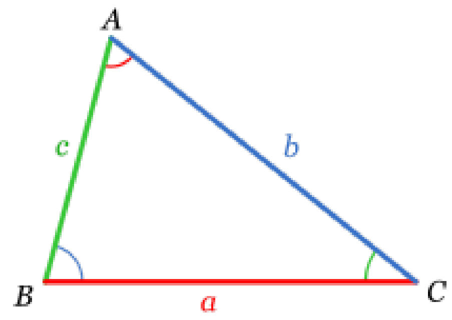
Estas son expresiones que contienen funciones trigonométricas y que son válidas sólo para **algunos valores** del ángulo involucrado. Trabajamos en $[0, 2\pi]$, ya que por peridiocidad para seno y coseno solo es necesario sumar 2π y para tangente y cotangente sumar π.
Para resolver una ecuación trigonométrica es conveniente expresar todos los términos de la ecuación con el mismo ángulo y después reducirlo a una sola razón trigonométrica, o bien, factorizar la ecuación si es posible.

Ejemplo 5.5 *Resolver la ecuación* $sen(2x) = senx$

Actividad **92** *Resolver, para ángulos en* $[0, 2\pi]$, *las siguientes ecuaciones:*

1. $2\,cos^2 x + cos\,2x - 1 = 0$
2. $senx \cdot \cos x + 3cos^2 x = 0$
3. $\operatorname{tg} 2x = 3senx$
4. $\dfrac{1 - \cos 2x}{senx} = \dfrac{sen2x}{1 - \cos 2x}$
5. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

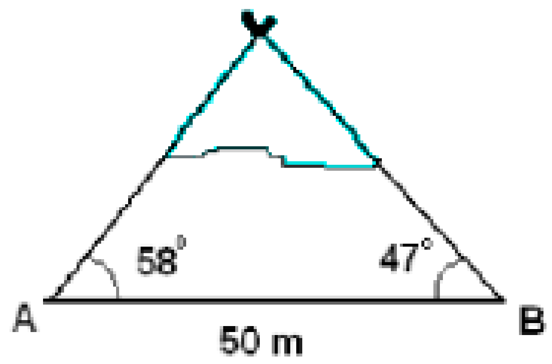
5.2.1. Ley del seno



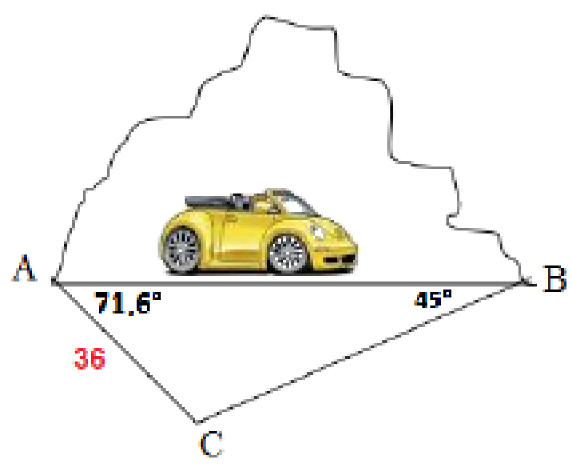
En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

Actividad **93** *Artemio, el salvavidas de la caseta A, observa a un nadador que se ahoga bajo un ángulo de 58°. Al mismo tiempo, Anastasio, el salvavidas de la caseta B, lo observa bajo un ángulo de 47°. Si ambos están separados a una distancia de 50m entre sí. ¿Qué distancia tiene que recorrer cada salvavidas para rescatarlo? ¿Quién llegará primero?*



Actividad **94** *Para ir del pueblo A al pueblo B los vehículos deben pasar primero por el pueblo C. Para minimizar el tiempo de viaje se construirá un túnel para unir A con B. Los ingenieros hicieron las siguientes medidas $\overline{AC} = 36$ kms, $\angle CBA = 45°$, $\angle CAB = 71,6°$. Hallar la distancia del túnel ($\overline{AB}$) y los kilómetros que se ahorran con la construcción del túnel.*

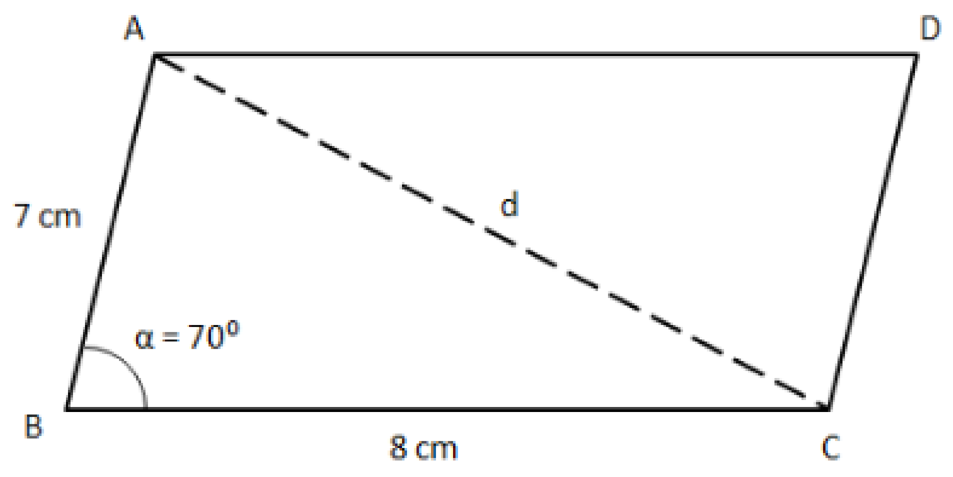


5.2.2. Ley del coseno

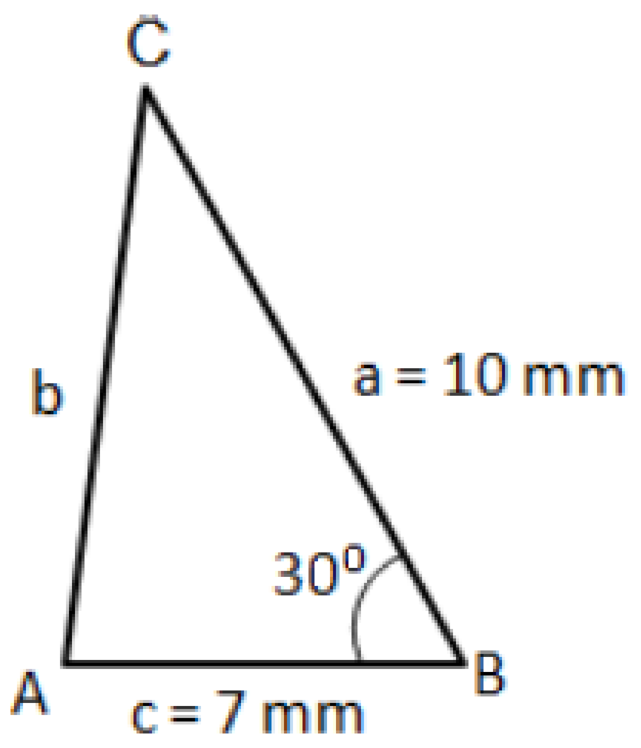
En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido, es decir

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\,B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\,C \end{aligned}$$

Actividad **95** *Los lados de un paralelogramo forman un ángulo de 70. Sus medidas son 7 y 8 centímetros. Calcula la longitud de la diagonal d en la figura.*



Actividad 96 *En el triángulo de la figura hallar el lado b y los ángulos restantes. Resp. $b = 5,26$*



Tarea 15 *Halla la medida de la diagonal del paralelogramo en la figura*