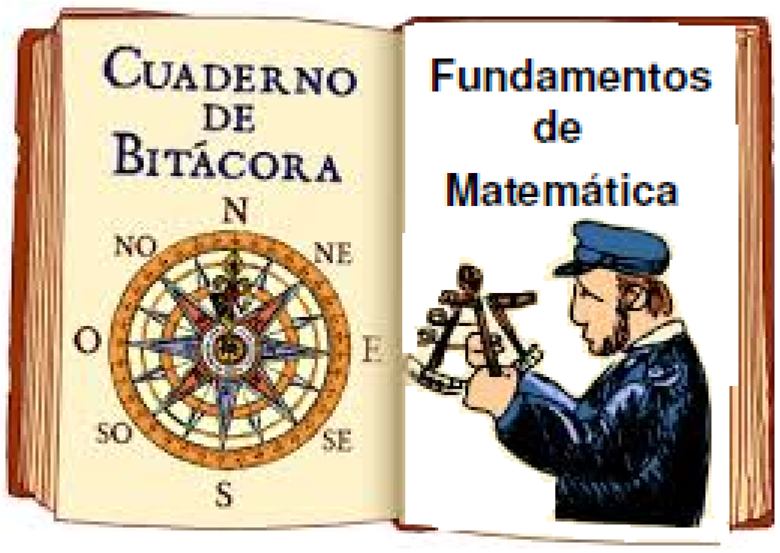
Bitácora: Números Reales



Ingenierías Civiles

---

1. Introducción

Iniciar estudios universitarios para los jóvenes de hoy no es tarea sencilla, para empezar hay que adaptarse a un mundo muy diferente al de la enseñanza media, en efecto, mencionemos algunos factores que dificultan esa adaptación:

- Esa "libertad" casi total que encuentra el estudiante en la Universidad y que por lo general no sabe administrar.
- El ritmo con que se ven los contenidos y que hace necesaria una adecuada planificación del tiempo.
- Las exigencias de las asignaturas de matemática, que requieren conocimientos previos.

Concientes, como profesores, de esas dificultades, queremos que vivan responsablemente esa libertad, que el periodo de adaptación para integrarse plenamente en el entorno universitario sea breve, y que adquieran hábitos de estudio adecuados para insertarse en plenitud en el proceso de aprendizaje universitario, especialmente en matemática.

Este curso es el primer acercamiento a la enseñanza de la matemática universitaria. Por tratarse del primer curso pretende proporcionar a todos sus estudiante los saberes necesarios e imprescindibles para afrontar con éxito el curso de Cálculo del segundo semestre. El enfoque será fundamentalmente práctico, centrado en la resolución de problemas y en la participación activa del estudiante.

Para empezar, debemos estar de acuerdo con el siguiente principio:

Cuando una persona adopta el papel de estudiante y se encuentra con sus profesores y compañeros en la sala de clases hay un acuerdo implícito

el estudiante está ahí para aprender y el profesor para enseñar

Te invito a leer y encontrar la respuesta a como el profesor enfrentará el proceso de enseñanza en la siguiente cita:

> Una de las herramientas que hace posible poner el acento en el trabajo del estudiante es el cuaderno de bitácora, o simplemente **bitácora**, que es un recurso formativo que tiene, entre sus objetivos específicos, iniciar a los estudiantes en la práctica de la observación a partir de referentes científicos; ayudarles a hacer explícitos sus propios dilemas; mostrarles de forma experiencial una herramienta pedagógica, y aprovecharla para el aprendizaje de contenidos relacionados con esta asignatura, habituar a los estudiantes a leer y a reflexionar sobre el curso de los acontecimientos y de la vida. Si no es suficiente con todo lo dicho, por último, la bitácora se convierte en una oportunidad para el crecimiento y desarrollo personal, aunque nada más sea por eso de que entregar los pensamientos al papel es toda una terapia.

En el contexto de la Ingeniería vamos a trabajar para que la Matemática alcance los siguientes objetivos:

- Sea una efectiva herramienta de cálculo.
- Sea una eficiente herramienta para modelar y resolver problemas de matemática, ciencias e ingeniería.
- Como lenguaje universal sea capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional.
- Aportar al logro del desarrollo del pensamiento lógico, a la capacidad de razonar y a enfrentarse a situaciones nuevas.

Esta bitácora tiene todos los contenidos del curso, pero en forma resumida, por lo cual no debe ser considerada ni un apunte ni texto, a lo más un cuaderno de trabajo, se debe complementar el estudio con los textos mencionados en la bibliografía. Esta bitácora considera ejemplos, actividades, y tareas. Los ejemplos son explicados por el profesor, las actividades son realizadas por los estudiantes en forma grupal, la tarea debe ser resuelta y agregada en la bitácora personal de cada estudiante.

Tarea 1 *La primera tarea que tienes por delante es averiguar en internet, qué es una bitácora, su origen, que contiene, cómo se hace, y todo aquello que te parezca relevante. Una vez que tenga esto medianamente claro anota en tu cuaderno=bitácora, en no más de una página lo referente a bitácora.*

Para que la bitácora no se salga de los márgenes por el cual navegan los contenidos del curso, te iré colaborando con algunas ideas básicas.
Bienvenidos y bienvenidas a esta asignatura, te invitamos a participar activamente de tu aprendizaje, ocupando todos los espacios que la Universidad te ofrece, entre los cuales están la Clinica Matemática, la Biblioteca, la sala nocturna y otras. Y recuerda:

*P*ara aprender Matemática hay que hacer Matemática

---

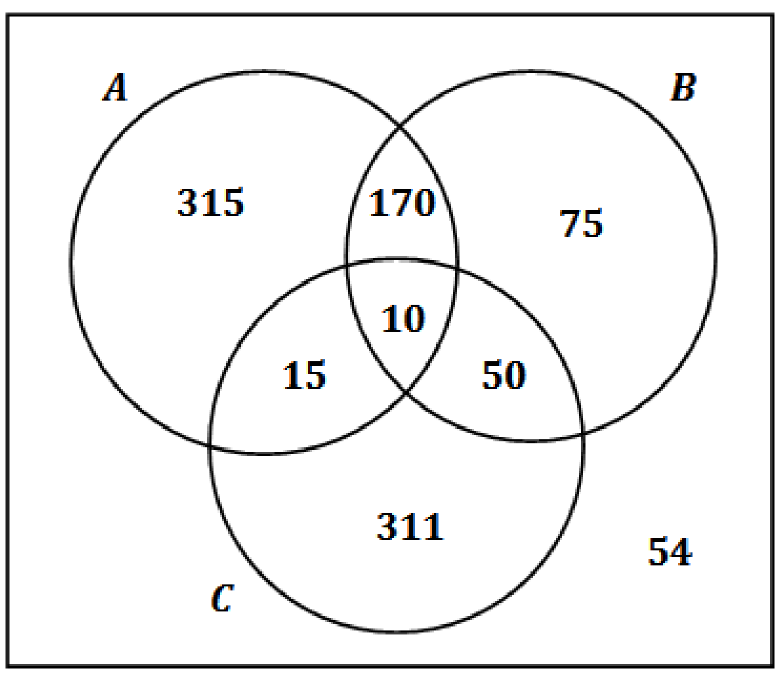
2. Inicio de la clase: ¡*Lluvia de ideas*!

La primera actividad que vamos a realizar es que me des a conocer, a través de una “lluvia de ideas”, que conceptos matemáticos recuerdas de tus estudios previos.

Los anotaré en la pizarra y luego vamos a conceptualizar algunos de ellos.

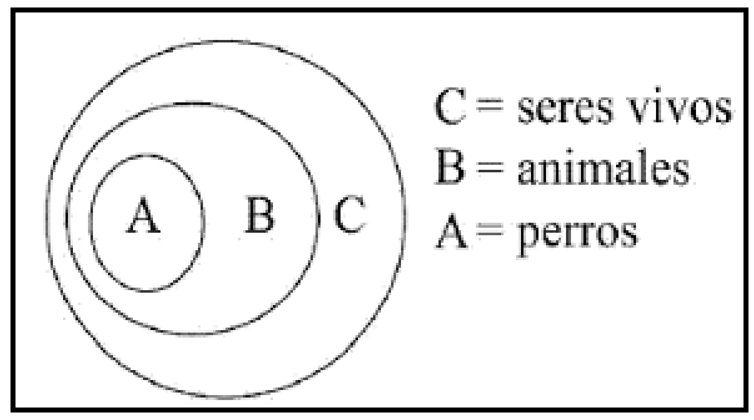
2.0.1. Conjunto

Actividad 1 *Considera el gráfico siguiente.*



1. *¿Cuántos conjuntos se observan?*
2. *Anota los elementos de ambos conjuntos*
3. *Indica los elemento que sólo están en el conjunto A.*
4. *Anota los elementos que conforman la intersección de esos conjuntos.*
5. *¿Qúe pasa con el 54?*

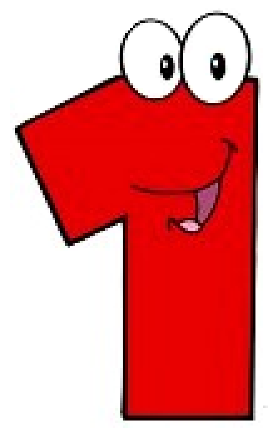
Actividad 2 *Para la figura siguiente.*



1. *¿Cuál es el concepto de conjunto que está presente en la figura*
2. *Una abeja ¿dónde la puedes ubicar?*
3. *Una manzana ¿en qué conjunto la ubicarías?*

2.0.2. Número

Un número (del latín numerus) es un concepto matemático fundamental, utilizado para contar, medir y agrupar. Han sido utilizados desde hace ya miles de años, y han acompañado a la raza humana prácticamente desde sus inicios, aunque los primeros números no se acercaban a la complejidad de los actuales. Hoy en día, la definición de número ha sido modificada para abarcar los conceptos de números negativos, números racionales, irracionales y complejos.



En la figura superior ¿recuerdas como se denomina el símbolo que representa al número 1? El número 5 que aparece en el reloj ¿existe en la naturaleza? ¿y la circunferencia existe en la vida real?

2.0.3. Tipos de números

Trabajan en forma grupal las siguientes actividades y dan respuesta a las interrogantes planteadas.

Actividad 3 *La suma de tres números impares consecutivos es 51. Hallar los tres números.*

Actividad 4 *Un día de invierno amaneció a 3 grados bajo cero. A las doce del mediodía la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cuatro de la tarde subió 2 grados más. Desde las cuatro hasta las doce de la noche bajó 4 grados, y desde las doce a las 6 de la mañana bajó 5 grados más. ¿Qué temperatura hacía a esa hora?*

Actividad 5 *En una panadería que abre de las 6 de la mañana a las 12 de la tarde se han vendido $\frac{2}{5}$ del pan de 6 a 8 de la mañana. En las dos horas siguientes, se vendieron los $\frac{3}{4}$ del pan que quedaba por vender y quedaron todavía 36 kg. ¿Cuánto pan pusieron a la venta a las 6 de la mañana?*

Actividad 6

1. *¿Es posible expresar la diagonal de un salón rectangular de 6 por 5 metros con un número racional?*
2. *Hallar las soluciones de la ecuación $2x^2 - 4x + 1 = 0$*
3. *El lado de un cuadrado mide $\sqrt{2}$. Su área es un número irracional?*

2.0.4. Números naturales

El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, \cdots\}$$

Actividad 7 *En grupo estudian y dan respuesta a las siguientes interrogantes:*

1. *El conjunto de los números naturales posee un primer elemento ¿cuál es?*
2. *Entre dos naturales consecutivos ¿existe otro natural?*
3. *Todo número natural a posee su sucesor ¿cuál es?*
4. *¿La suma y el producto de números naturales es un número natural?*
5. *¿Es posible encontrar un número natural que al restárselo a 2 de por resultado 8?*

2.0.5. Números enteros

El conjunto de los números enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Naturales, por ejemplo $3 - 8 =$?

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Como se puede observar, el conjunto de los enteros está formado por el conjunto de los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero.

Damos respuesta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Los enteros tienen un primer elemento?, ¿tienen último elemento?
2. ¿Cada entero tiene un antecesor? ¿y un sucesor?
3. ¿Cuántos números enteros existen entre -3 y 7? ¿Cuántos números enteros existen entre dos enteros dados ?
4. ¿La suma, resta y multiplicación de números enteros, es siempre es un número entero?
5. ¿existe algún número entero tal que al multiplicarlo por 3 de como resultado 5?

2.0.6. Números racionales

El conjunto de los números racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los números naturales y enteros. Por ejemplo, la ecuación $2x = 1$ no tiene solución en esos conjuntos.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

1. ¿Son los racionales un conjunto finito?
2. ¿Es posible encontrar dos racionales consecutivos? o lo que es lo mismo, entre dos números racionales ¿cuántos números racionales existen?
3. ¿Tienen los racionales primer y último elemento?
4. Escribir un número racional entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$. ¿Cuántos números racionales hay entre los dos dados?
5. ¿La suma, resta, multiplicación y división de dos números racionales es un número racional?
6. ¿Existe algún número racional que sea solución de la ecuación $x^2 = 2$?

2.0.7. Números Irracionales

Consecuencia de esto último es la necesidad de crear un nuevo conjunto, el de los números irracionales. El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$ y son aquellos números que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros. Ejemplos de irracionales son:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{4}, \quad \sqrt{6}, \quad \pi, \quad e, \sqrt[5]{-5}$$

Damos respuesta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Son los irracionales un conjunto finito?
2. ¿Es posible encontrar dos irracionales consecutivos? o lo que es lo mismo, entre dos números irracionales ¿cuántos números irracionales existen?
3. ¿Tienen los irracionales primer y último elemento?
4. ¿La suma, resta, multiplicación y división de dos números irracionales es un número irracional?
5. ¿Existe algún número irracional que sea solución de la ecuación $x^2 = 2$?

Tarea 2

1. *la diferencia entre dos números es 656. Dividiendo el mayor entre el menor, resulta 4 de cociente y 71 de resto.Determinar los números*
2. *Tres hermanos compiten por ver quién salta más. El mayor saltó los $\frac{3}{5}$ de los 10 metros que medía el foso de salto. El hermano mediano saltó los $\frac{2}{3}$ de lo que había saltado el mayor y el pequeño los $\frac{4}{5}$ de lo que había saltado el mediano. ¿Cuánto saltó el hermano pequeño? Resp. 3,2 mts*

3. *Uno de los números irracionales más famosos es π. Busca y escribe en tu bitácora una breve historia de este número.*

Hemos mencionado las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división. Al respecto cabe recordar su significado y establecer el lenguaje matemático pertinente.

- La **suma** o **adición** tiene dos elementos llamados *sumandos* y su resultado se denomina **suma**.

$$a+b=d, \qquad 3+5=8$$

- La **resta** o **sustracción** tiene dos elementos, *minuendo* y *sustraendo* y su resultado recibe el nombre de **diferencia**.

$$a-b=c, \qquad 7-2=5$$

- La **multiplicación** tiene dos elementos denominados *factores* y su resultado se llama **producto**.

$$a\cdot b=c, \qquad 3\cdot 7=21$$

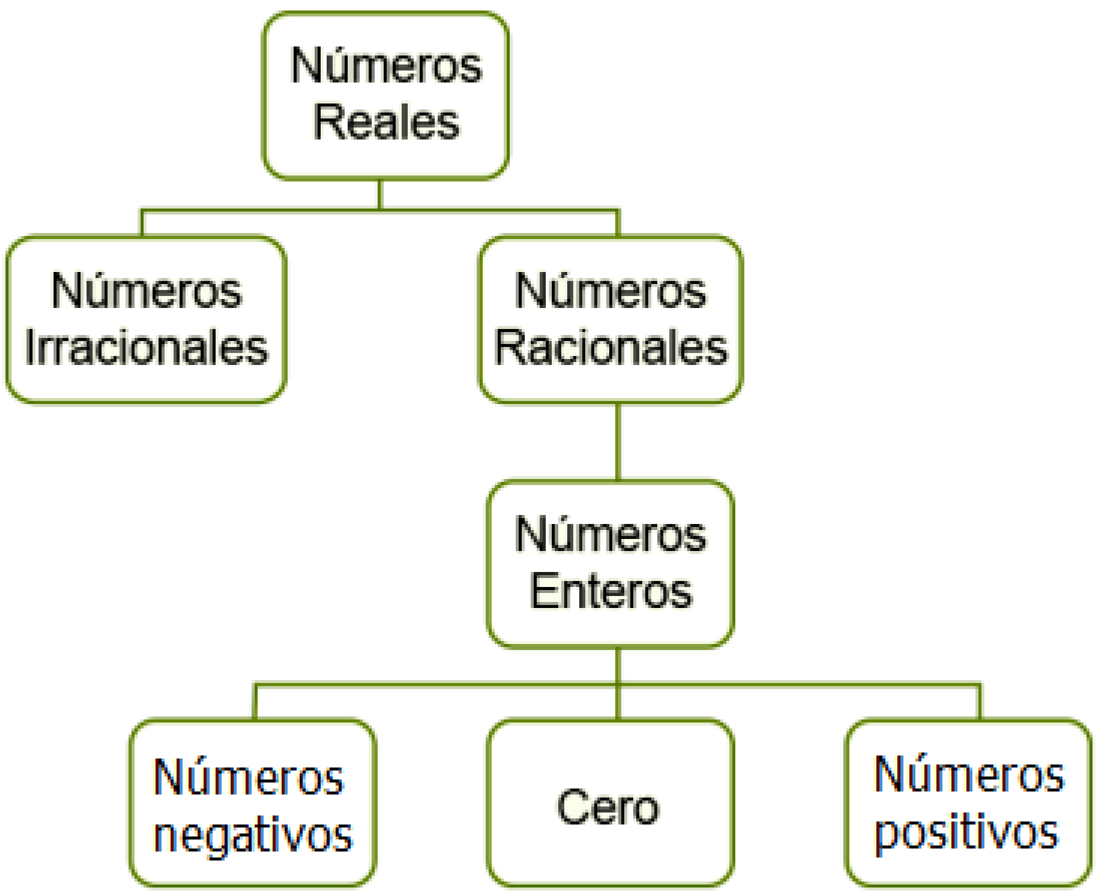
- La **división** tiene también dos elementos, el *dividendo* (el número que se divide) y el *divisor* (el número que divide), el resultado se llama **cociente** y si la división no es exacta aparece un número no nulo llamado *resto* o *residuo*, que es lo que sobra de la división.

$$\frac{a}{b}=c, \qquad \frac{12}{3}=4, \qquad \frac{5}{4}=1+0,25$$

Cerramos la introducción concluyendo que "al conjunto formado por la unión de los números racionales con los irracionales se conoce con el nombre de **conjunto de los números reales**", y se denota por el símbolo $\mathbb{R}$. Esto es,

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$$

Un esquema que permite ver como se relaciona $\mathbb{R}$ y sus subconjuntos es el siguiente:



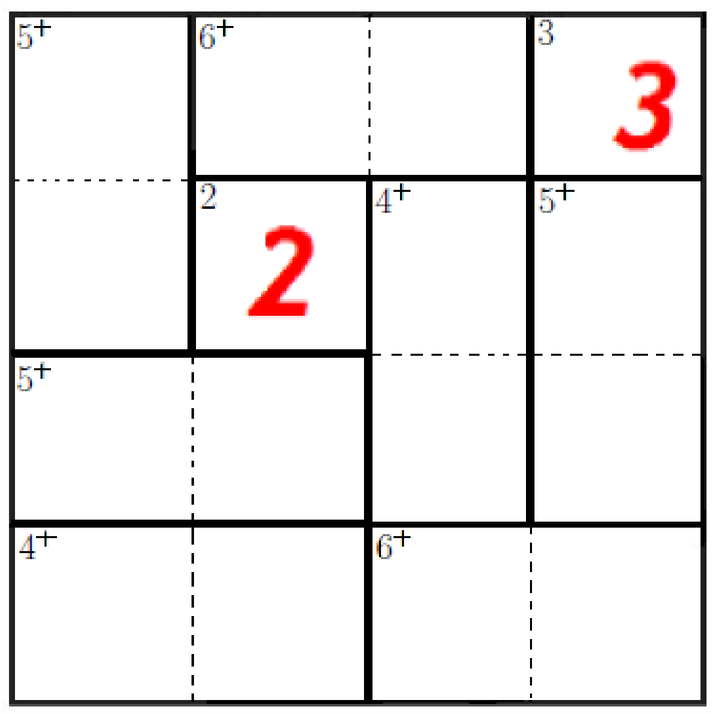
3. Conjunto de los números reales

Todos los números que usamos en nuestra vida diaria son números reales. Conocer sus propiedades te ayudará a resolver gran cantidad de problemas cuantitativos en cualquier disciplina. Como motivación e introducir su estudio te proponemos dos juegos sencillos.

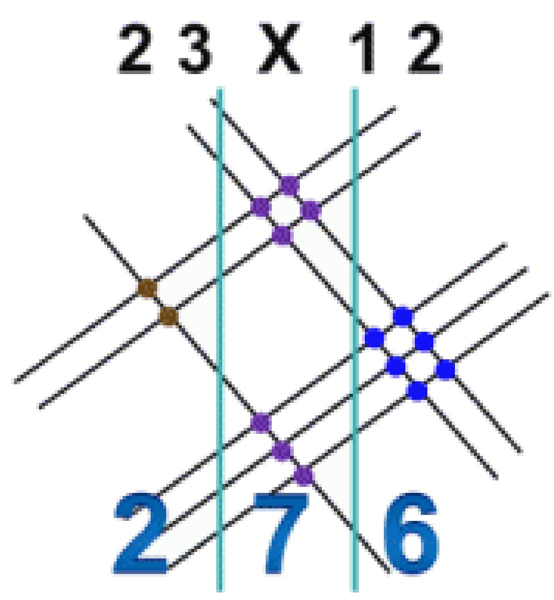
Actividad 8 *Este juego, llamado KENKEN, fue desarrollado por un profesor de matemáticas japonés, Tetsuya Miyamoto en el año 2004.*

Reglas del juego*:*

1. *El objetivo es rellenar la cuadrícula con números de forma tal que ninguno se repita en ninguna línea o columna.*
2. *Si la cuadrícula es de 4×4 se usarán los números del 1 al 4; en la cuadrícula de 5×5 se usarán los números del 1 al 5, y así sucesivamente hasta emplear los números del 1 al 9 en la cuadrícula de 9×9, que es la de mayor tamaño.*
3. *Cada grupo de casillas delimitado por un trazo grueso (caja) debe tratarse como una ecuación matemática. Trabaje para dilucidar qué dígitos pueden combinarse para lograr el número objetivo (ubicado en la esquina superior izquierda) usando la operación matemática que se indica. (5^+ indica que en ese rectángulo se colocan números que sumen 5)*
4. *En las cajas que contengan una sola casilla se debe colocar el número objetivo*



Actividad 9 *La figura muestra una forma de multiplicación poco conocida.*

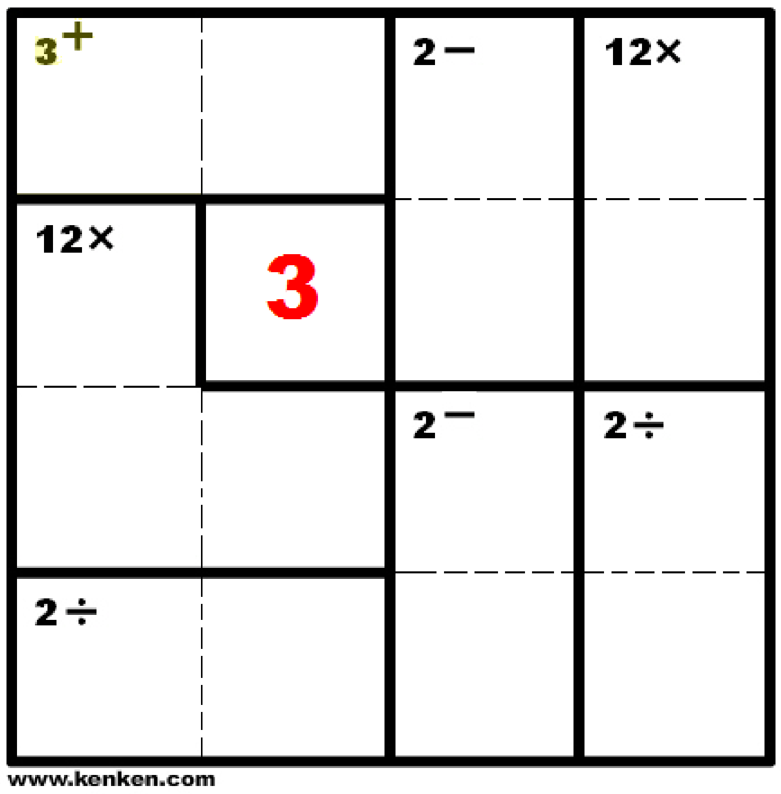


Me interesa conocer tu opinión de como funciona. Trabaja en forma grupal. Si estás en lo correcto comprueba tu método calculando 32×13

Tarea 3

1. *Busca en internet y anota en tu bitácora una forma de multiplicación, diferente a la mostrada.*

2. *Resuelve el siguiente Kenken. Anótalo en tu bitácora.*



3.1 Estructura de cuerpo

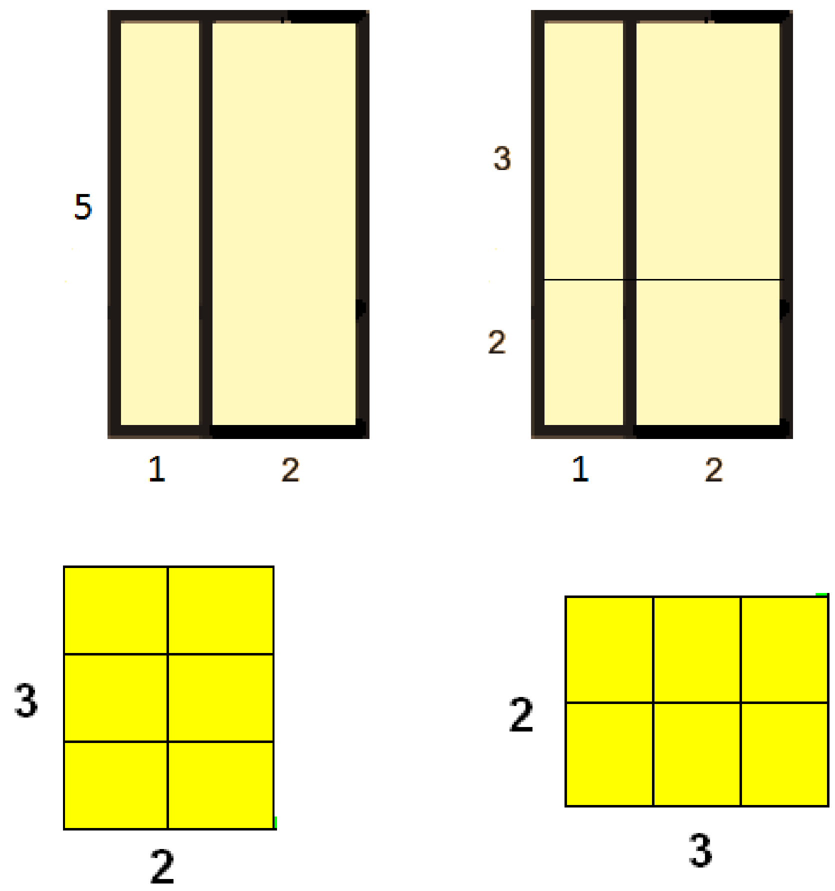
Vamos a destacar ciertas propiedades básicas que gobiernan el cálculo con números reales. Una vez establecidas esas propiedades deduciremos de ellas las reglas habituales de cálculo. Es conveniente señalar que lo importante de estas propiedades, llamadas axiomas, no es que las aprendas de memoria, sino que las puedas utilizar cuando sea necesario, por ejemplo para abreviar algunos cálculos o para despejar ecuaciones y que sepas también qué tipo de operaciones no se pueden hacer.

Propiedades de la suma	Forma simbólica
Clausura	
Existencia de Neutro	
Existencia de opuesto	
Conmutativa	
Asociativa	
Propiedades del producto	Forma simbólica
Clausura	
Existencia de Neutro	
Existencia de inverso	
Conmutativa	
Asociativa	
Distributiva respecto de la suma	

Actividad 10

1) *Trabajando en grupo completa la tabla de axiomas.*

2) *Mira las figuras. Considerando el área de los rectángulos ¿qué propiedad o axioma te sugiere cada figura? Anótala con los números indicados.*



El sistema formado por el conjunto $\mathbb{R}$ y las operaciones de adición $(+)$ y de multiplicación $(\cdot)$ constituye una estructura algebraica que anotaremos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y llamamos **cuerpo** en tanto satisface los once axiomas:

Definición 3.1

- *La resta o diferencia de los números reales, $a - b$, se define como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo:*

$$a - b = a + (-b)$$

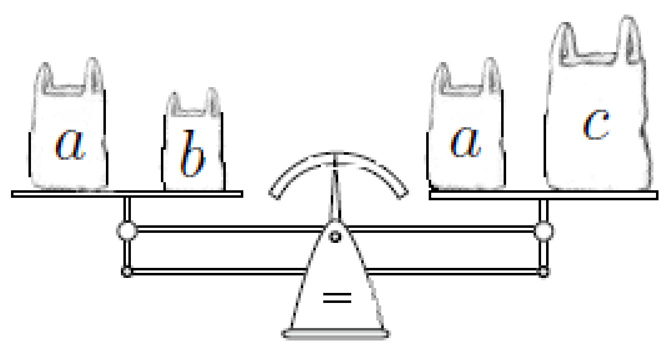
- *La división o cociente de dos números reales, que se anota a/b, $a \div b$ o bien $\frac{a}{b}$, se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor:*

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$$

3.1.1. Consecuencias de los axiomas de cuerpo

Ley de cancelación para la suma

Sean a, b y c números reales. Observa la figura y trata de deducir que propiedad se cumple:



Se cumple:

¿Cómo estar seguros que lo afirmado es siempre cierto? Para ello la matemática usa la **demostración**, que está compuesta por razonamientos lógicos que avanzan desde una hipótesis hasta llegar a una afirmación. Cada uno de estos pasos debe sostenerse a través de la deducción o de otro método. Te muestro como funciona una demostración en matemática y como cada paso se fundamenta en los axiomas de cuerpo.

Debemos probar que

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c$$

Esta clase de problemas es de la forma $H \Longrightarrow T$ (Hipótesis implica Tesis). Se trabaja la hipótesis ($a+b=a+c$) y mediante los axiomas de cuerpo se llega a la tesis ($b=c$). En efecto, Sabemos que dado $a \in \mathbb{R}$, existe el elemento inverso aditivo $-a \in \mathbb{R}$. Por tanto, podemos sumar en ambos lados este elemento inverso y tener:

$$-a+(a+b)=-a+(a+c)$$

Ahora se puede asociar

$$(-a+a)+b=(-a+a)+c$$

Pero lo del paréntesis tiene valor cero, así que

$$0+b=0+c$$

Y dado que 0 es el neutro, se obtiene

$$b=c$$

Multiplicación por cero

$$a\cdot 0=0, \qquad \forall a\in\mathbb{R}$$

Actividad 11 *Esta es una verdad que conoces "desde siempre" y que seguramente nunca te has cuestionado. Pero nunca es tarde para "ver" que es cierta. Te presento la siguiente demostración*

$$a\cdot 0=a\cdot(1-1)=a\cdot 1-a\cdot 1=0$$

En grupo discuten que axioma se ha aplicado en cada uno de los pasos.

Anulación de un producto

$$a\cdot b=0 \Longrightarrow a=0 \text{ o bien } b=0$$

Esta es otra propiedad que siempre hemos sabido, pues parece obvia, pero es de gran ayuda cuando resolvemos ecuaciones cuadráticas.

Actividad 12 *Trabajando en grupo resuelves las siguientes situaciones:*

1. *De un terreno rectangular se conoce que su área es de 600 m^2 y que puede ser cercado por una malla de 100m. ¿Puedes hallar sus dimensiones?*
2. *La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son los números?*

Ley de cancelación para la multiplicación

Sean a,b y c números reales. Si $a\neq 0$, entonces

$$a\cdot b=a\cdot c \Longrightarrow b=c$$

Actividad 13 1. *Trabajando en grupo descubres el axioma ocupado en cada paso de la demostración*

$$\begin{aligned} a\cdot b=a\cdot c \Longrightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b)&=a^{-1}\cdot(a\cdot c)\\ (a^{-1}\cdot a)\cdot b&=(a^{-1}\cdot a)\cdot c\\ 1\cdot b&=1\cdot c\\ b&=c \end{aligned}$$

2. *La siguiente secuencia algebraica muestra que todos los números reales son cero. ¿Dónde está el error?*

Si a ∈ R

$$\begin{aligned} a&=a\\ a^2&=a^2\\ a^2-a^2&=a^2-a^2\\ (a-a)\,(a+a)&=a\,(a-a)\\ a+a&=a\\ a&=a-a\\ a&=0 \end{aligned}$$

3.1.2. Ecuaciones de primer grado de una variable

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas con una o varias letras, en la que al sustituir las letras por números no siempre se obtiene un enunciado verdadero. Las letras son llamadas **variables** o **incógnitas** de la ecuación.

Reglas para despejar

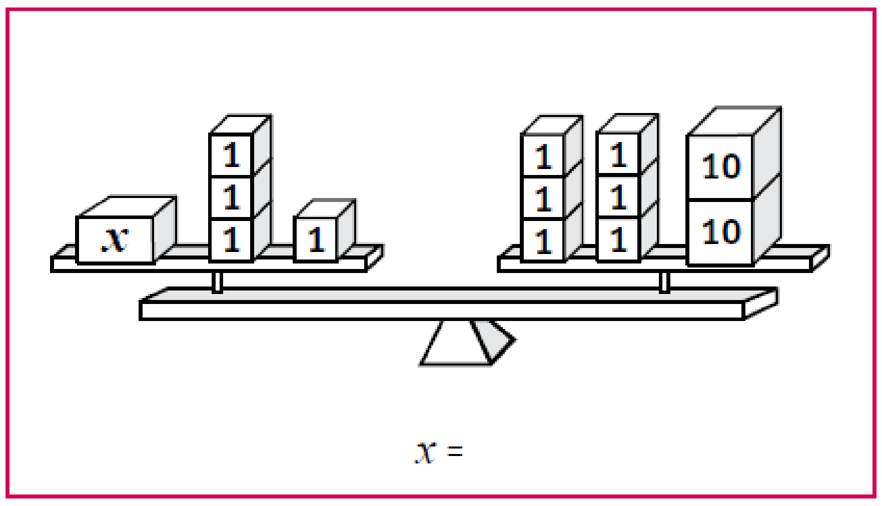
1. $a+x=b \Longrightarrow x=b-a$
2. $ax=b \Longrightarrow x=b\cdot a^{-1}$, siempre que $a\neq 0$

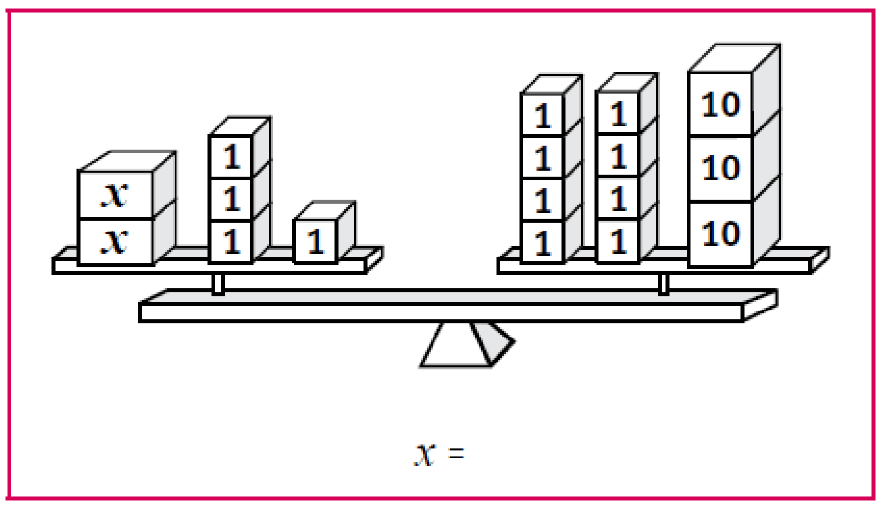
Las dos ecuaciones presentadas representan ecuaciones de primer grado y con una variable, la x.

Los métodos para resolver ecuaciones se aprenden mejor si se introducen por medio de modelos como el de la balanza, válidos, pero poco prácticos con ecuaciones más complejas.

Actividad 14

1. *En las figuras siguientes establece la ecuación y el valor de la x que estabiliza la balanza.*





2. *Trabajando en grupo prueba ambas afirmaciones*

Actividad 15 *Observa la resolución de la ecuación* $6x-7=2x+1$. *Indica la acción realizada en cada paso:*

Solución

$$\begin{aligned} 6x - 7 &= 2x + 1 \\ 6x - 7 + 7 &= 2x + 1 + 7 \\ 6x &= 2x + 8 \\ 4x &= 8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

En la práctica sumar o restar un mismo término a ambos miembros de una ecuación equivale a trasladar el término de un miembro al otro cambiándole el signo. Este procedimiento se llama **transposición** de términos.

Actividad 16 *Trabajando en grupo, plantean la ecuación y luego resuelven, justificando cada paso.*

1) *La edad de Pedro es el triple de la de Juan y las dos edades suman 40 años. Hallar ambas edades. Resp. 10 y 30*

2) *En un corral hay conejos y gallinas. El número total de animales es 30 y el de patas 100. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral? Resp. 20 y 10*

3.1.3. Regla de los signos

Diofanto de Alejandría, nacido alrededor del 200/214 y fallecido alrededor de 284/298, fue un antiguo matemático griego. Es considerado "el padre del álgebra". Nada se conoce con seguridad sobre su vida salvo la edad a la que falleció, gracias a este epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega.

`Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.`

Diofanto, en su Libro I, justificaba de la siguiente manera la regla de los signos:

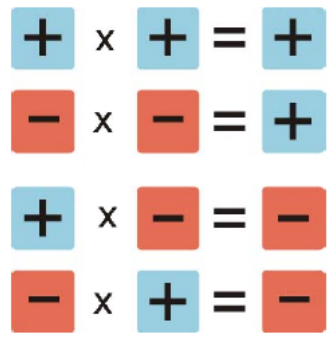
"LO QUE ES LO QUE FALTA MULTIPLICADO POR LO QUE ES LO QUE FALTA DA LO QUE ES POSITIVO; MIENTRAS QUE LO QUE ES LO QUE FALTA MULTIPLICADO POR LO QUE ES POSITIVO, DA LO QUE ES LO QUE FALTA"

1. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
2. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Nos vamos a detener un poco en esta parte por su importancia, ya que es una propiedad que estamos constantemente empleando en matemática, y además por que tiene "historia". Alguien estableció la siguiente analogía.

- Los amigos de mis amigos son mis amigos
- Los amigos de mis enemigos son mis enemigos
- Los enemigos de mis amigos son mis enemigos
- Y los enemigos de mis enemigos son mis amigos

¿Te atreves a traducirla en la figura siguiente?



Más aceptable es lo siguiente, en donde, el matemático Israel Geland explica las operaciones con signos de la siguiente forma, brillante y fácil de entender para cualquiera, tal y como se cuenta en The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics:

- $3 \times 5 = 15$. Si te dan tres veces cinco boletos tienes en total 15 boletos.
- $3 \times (-5) = -15$. Si das tres veces cinco pasos hacia atrás, entonces das 15 pasos hacia atrás.
- $(-3) \times 5 = -15$. Si no te dan tres veces cinco pesos es como que no te den 15 pesos.
- $(-3) \times (-5) = 15$. No pagar tres veces una multa de cinco pesos es como que te den 15 pesos.

Bueno, pero hay más, lo siguiente es obra de Adrián Paenza. Después de leer puede que te sientas identificado. [1]

`Una de las ''verdades'' que nos enseñan en la escuela o en el colegio es que ''Menos por menos es más''.`
`Uno anota. Piensa. No entiende. Vuelve a pensar. Sigue sin entender. Mira al compañero de al lado. El tampoco entiende. Y de pronto se escucha a la maestra o el profesor, que otra vez nos taladran con: ''Menos por menos es más''.`
`Uno tiene varias alternativas frente a esto. La más probable es que bloquee la mente, deje el cuerpo en el lugar, escriba como un autómata pero, en realidad, ya nada más de lo que se oiga o se lea en esa habitación va a convocar su atención, al menos por un rato.`
`-¿Qué dijo? -dice uno preocupado.`
`-Dijo algo así como que ··· menos por menos es más -contesta el compañero del banco de al lado.`
`-No entiendo -contesta el primero.`
`-Yo tampoco -dice el otro, que al menos pudo repetir lo que había escuchado.`
`Entonces uno levanta la vista y ve ejemplos escritos en el pizarrón:`

[1] autor de "Matemática ··· ¿Estas ahí?

1. $(-3) \times (-2) = 6$
2. $(-7) \times (-3) = 21$
3. $(-15) \times (-1) = 15$

Y un poco más abajo, uno advierte con horror, que incluso se !‘aplica a fracciones!

1. $(-\frac{1}{2}) \times (-6) = 3$
2. $(-9) \times (-\frac{2}{3}) = 6$
3. $(-\frac{2}{5}) \times (-\frac{3}{4}) = \frac{3}{10}$

El pizarrón escupe números, símbolos, igualdades, letras que invitan a abandonar todo y a escapar. ¿De qué habla esta mujer? Pero uno no tiene más remedio que aceptar. En la escuela o el colegio acepta, porque en general no se enseña con espíritu crítico (con las excepciones correspondientes), pero aquí lo que cabe es preguntar inmediatamente: ?‘por qué?
De todas formas, el tiempo pasa y uno termina aceptando el axioma (o lo que parece un axioma o verdad absoluta) de que menos por menos es más, porque:

- no le queda más remedio,
- no se contrapone con nada de lo que uno ya sabe,
- uno nunca necesitó usarlo en la vida cotidiana,
- cierto o falso, no me afecta y, por último,
- no me interesa.

Mi idea es acá tratar de encontrar alguna explicación del porqué es cierto que ‘‘menos por menos’’ tiene que ser más.

Caso 1

Supongamos que usted está manejando su auto a 40 kilómetros por hora. Si yo le preguntara dónde va a estar dentro de 3 horas, usted contestará: ‘‘Voy a estar a 120 kilómetros de acá’’. Este sería un ejemplo de que ‘‘más por más Es más’’. O sea, aunque uno no escriba los símbolos $(+)$ adelante, es como si estuviera diciendo:

$$(+40) \times (+3) = (+120)$$

Uno representa los 40 kilómetros por hora, con $(+40)$ y lo que ‘‘va a pasar’’ dentro de 3 horas, con $(+3)$. Multiplica y tiene $(+120)$, o sea, uno estará 120 kilómetros más adelante de donde está ahora.

Caso 2

Si ahora, en lugar de ir a 40 kilómetros por hora hacia adelante, usted empezara a manejar su auto marcha atrás a la misma velocidad (o sea, a 40 kilómetros por hora pero hacia atrás), yo podría preguntarle: ¿dónde vas a estar dentro de 3 horas?

$$(-40) \times (+3) = (-120)$$

Si uno quiere representar en símbolos que está yendo marcha atrás, lo que hace es escribir (-40). Por otro lado, como uno quiere saber, otra vez, ‘‘qué va a pasar dentro de 3 horas‘’’, uno usa el número $(+3)$ para representarlo.
Es decir, si uno maneja el auto hacia atrás a 40 kilómetros por hora, dentro de 3 horas va a estar 120 kilómetros atrás del lugar en donde está ahora. Esto corresponde -y espero que se entienda con el ejemplo- a que ‘‘menos por más ES menos’’.

Caso 3

Ahora bien, lleguemos entonces a la última pregunta (que le pido que lea con cuidado y sobre todo que piense usted sola/o la respuesta).
‘‘Si usted viene como recién, manejando su auto a 40 kilómetros marcha atrás y yo, en lugar de preguntarle dónde va a estar dentro de tres horas, le preguntara ¿dónde estabas hace tres horas?, usted, ¿qué contestaría? (por favor, más allá de responder, trate de convencerse de que me entendió la pregunta). Ahora sigo yo: la respuesta es que uno estaba ¡más adelante! Más aún: estaba 120 kilómetros más adelante de donde está ahora.
Si sigo usando los símbolos de más arriba, tengo que escribir:

$$(-40) \times (-3) = 120$$

Es decir, escribo (-40) porque estoy yendo marcha atrás, y escribo (-3) porque pregunto qué pasó hace tres horas. Y, como usted advierte, uno hace tres horas estaba 120 kilómetros más adelante del punto en donde está ahora. Y eso explica -en este caso- por qué ‘‘menos por menos es más’’.

> Luego, en este caso, se ve que ¡menos por menos es más! ’’

Tarea 4 *Anota en tu bitácora la demostración de que*

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Actividad 17 *Te agrego otra historia, que ilustra pero no demuestra. Lee en grupo, discute, y las dudas las consultas al profesor*

Parto de la base que la multiplicación de más por menos la tienes clara. Se acepta entonces que

$$5 \times (-6) = -30$$

Como $(10 - 5) = 5$, *entonces*

$$(10 - 5) \times (-6) = -30$$

Por propiedad distributiva:

$$10 \times (-6) + (-5) \times (-6) = -30 \Longrightarrow -60 + (-5) \times (-6) = -30$$

Esto significa, sumando inverso aditivo de 60, *que*

$$-60 + (-5) \times (-6) = -30 \Longrightarrow (-5) \times (-6) = 30$$

Actividad 18 *Mira la siguiente DEMOSTRACIÓN. Justifica cada paso con el axioma correspondiente.*

$$
\begin{aligned}
-(-a) &= -(-a)+0,\\
-(-a) &= -(-a)+[a+(-a)],\\
-(-a) &= -(-a)+[(-a)+a],\\
-(-a) &= [-(-a)+(-a)]+a],\\
-(-a) &= [-1+1]\cdot(-a)+a],\\
-(-a) &= 0\cdot(-a)+a,\\
-(-a) &= 0+a,\\
-(-a) &= a,
\end{aligned}
$$

3.1.4. Historia del cero

Respecto del cero, en la página `http://www.sangakoo.com/blog/el-cero` se lee:

A pesar de su indiscutible eficacia matemática, tuvieron que pasar casi 2.500 años antes de su total implantación. Y es que, nada más nacer, rebasó el ámbito matemático para tornarse en conflicto filosófico y en anatema religioso.

Cuando vemos escrito un número como 305 nuestra mente lo traduce automáticamente en ''trescientos cinco''. Si este número se corresponde con el precio de un determinado objeto, sabemos que equivale a tres billetes de cien y uno de cinco. Nadie añade espontáneamente ''y ninguno de diez''. Sin embargo, eso es lo que significa el símbolo 0 situado entre el tres y el cinco, que es precisamente el lugar destinado a las decenas. La lectura precisa de este número sería ''tres centenas, ninguna decena y cinco unidades''.

Pero esto que nos parece tan obvio, la utilización del símbolo cero para indicar la ausencia de determinadas cantidades, constituye uno de los descubrimientos más extraordinarios de la Aritmética. Sin embargo, no deja de ser sorprendente que en Europa no se introdujera hasta el siglo XIII o que una cultura tan avanzada como la griega, a la que consideramos cuna de nuestra civilización, no llegara ni siquiera a rozarlo como concepto. Y es que el número cero nació con dos caras, como las máscaras que simbolizan el teatro, una sonriente que miraba hacia la aritmética práctica, y otra de expresión sombría de la que recelaban los filósofos.

Al fin y al cabo, durante mucho tiempo la iglesia católica consideró al cero como ''el número infiel'', llegando a prohibir su utilización, lo que obligó a los calculistas a hacer su trabajo al amparo del secreto.

Mira como opera el famoso cero:

- $\frac{0}{b}=0\cdot b^{-1}=0$, con $b\neq 0$

Esto es, 0 dividido en cualquier número, distinto de cero, da cero porque si tienes nada de algo y lo divides en cuantas partes quieras sigues teniendo nada. Por ejemplo,

$$\frac{0}{8}=0$$

Así, si queremos repartir un cesto en el que hay cero manzanas entre un grupo de ocho personas, lógicamente, le tocan cero manzanas a cada uno.

Más complicado es el caso

$$\frac{5}{0}$$

Si x es tal número, entonces se debe tener:

$$\frac{5}{0}=x$$

Si empezamos a buscar, el 1 no sirve pues $0\cdot 1=0\neq 5$. Si continuamos en esta búsqueda, no sirve ningún entero, ningún racional y ningún número real, pues siempre $0\cdot x=0\neq 5$. Por tanto, la división por cero no está definida.

Pero el cero presenta otra arísta en

$$\frac{0}{0}$$

En tal caso, si ponemos

$$\frac{0}{0}=x$$

entonces sirve cualquier número, pues $0\cdot x=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Se dice entonces que estamos en presencia de una **indeterminación**.

El cero también aparece en las potencias:

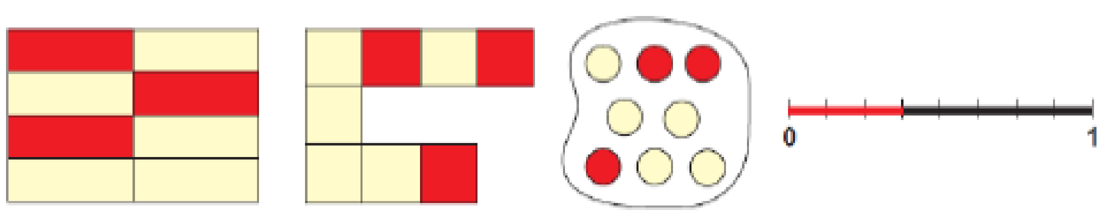
- $0^5=0^{1/2}=0^{50{,}000}=0$
- $5^0=(120)^0=\pi^0=1$
- 0^0 no está definido

4. Las fracciones

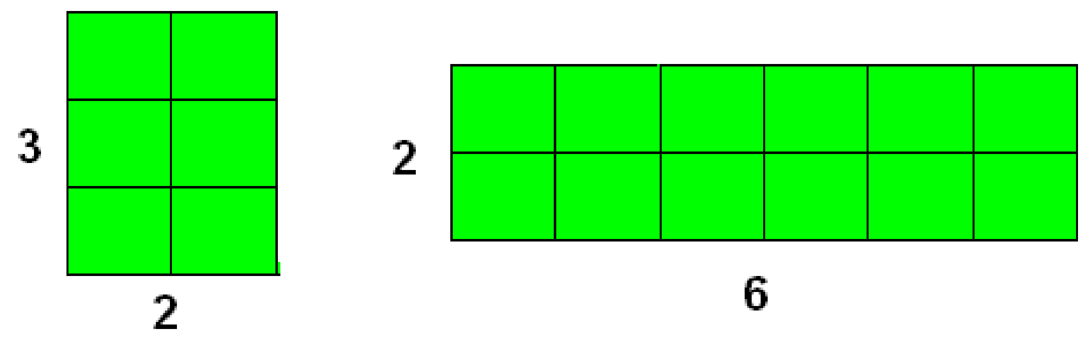
Generalmente, los conceptos matemáticos vienen expresados mediante varios sistemas de representación, por ejemplo, en la figura que sigue se muestran seis modos distintos de representar la misma idea: un medio.

Cada uno de estos sistemas de representación destaca alguna propiedad importante del concepto representado, y dificulta la comprensión de otras propiedades. Así, en la primera representación que aparece en la figura, sobre un rectángulo se destaca su partición en dos partes iguales; en la segunda destaca la idea de cociente asociada a la fracción; en la tercera expresión, el término "mitad" destaca la igualdad de las dos partes en que se ha dividido el todo; la cuarta representación hace patente la consideración de tomar el valor 100 como unidad; en la quinta expresión se destacan dos de cuatro unidades, mientras que la sexta representación señala un punto equidistante de 0 y 1 en la recta numérica.

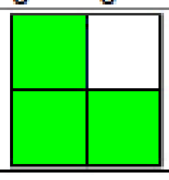
Actividad 19 *Indica que te sugiere la siguiente representación*



Para la enseñanza de la multiplicación de enteros se suele emplear rectángulos. Así, la figura siguiente permite visualizar las representaciones de los productos 2×3 y 2×6.



Para las fracciones, por lo general, se usa una representación gráfica de fácil fraccionamiento, equitativo y exhaustivo, como es el rectángulo, y como referencia el color.

Registro gráfico	Registro simbólico	Registro verbal	Referente
	$\frac{3}{4}$	tres cuartos	achurado (color verde)

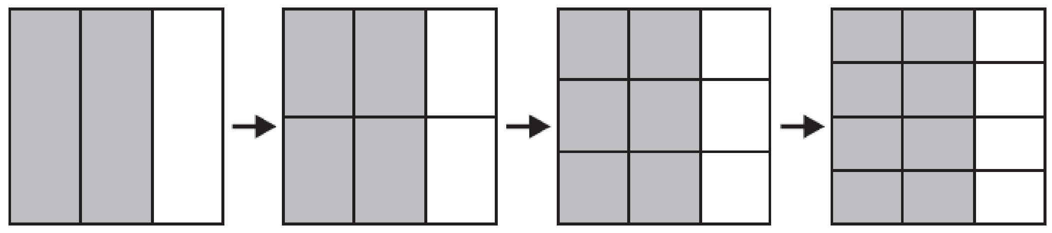
Una fracción se hace necesaria para representar los objetos resultantes de un reparto equitativo. Se escribe con dos números conocidos separados por una raya horizontal:

- el número que está encima (numerador) representa las partes que se toman de la unidad, y
- el número que está bajo la rayita (denominador) indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.

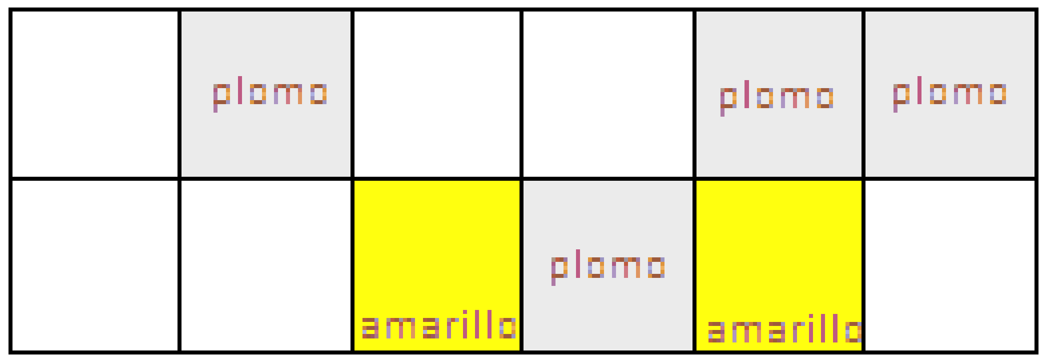
Trabajamos en grupo para dar respuesta a las siguientes actividades:

Actividad 20

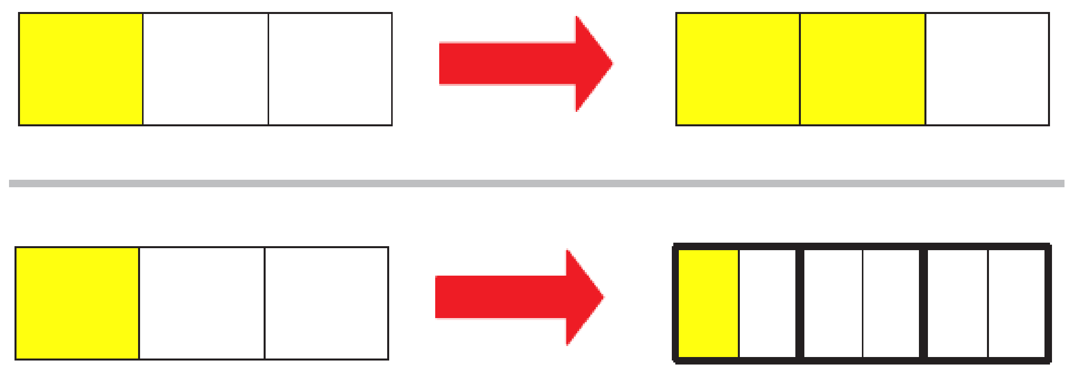
1. *¿Qué fracción representa la parte pintada de cada gráfica? ¿Representan todas las fracciones la misma cantidad?*



2. *La figura muestra una sección de pared con azulejos plomos, amarillos y blancos. ¿Qué parte de la sección está formada por azulejos amarillo? ¿Qué parte formada por azulejos de color plomo? y ¿Qué parte formada por azulejos de color blanco?.*



3. *Descubre la operación hecha en cada figura siguiente:*



Definición 4.1 *Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y solamente si se cumple que*

$$a \cdot d = b \cdot c$$

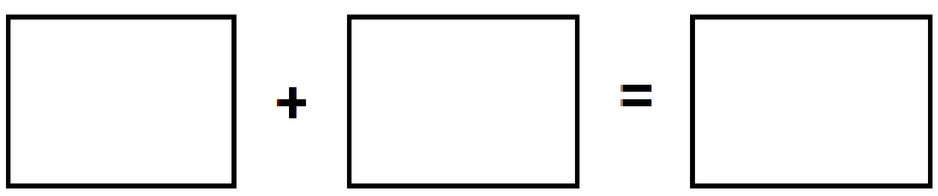
Son equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}, \cdots$$

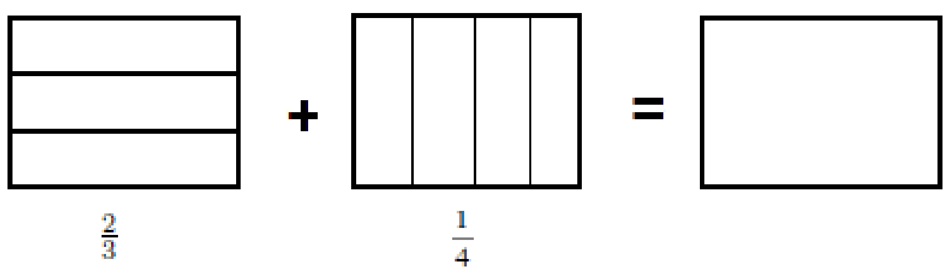
4.0.5. Suma de fracciones

Actividad 21

1. *Realiza la suma de las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$ utilizando los rectángulos que muestra la figura.*



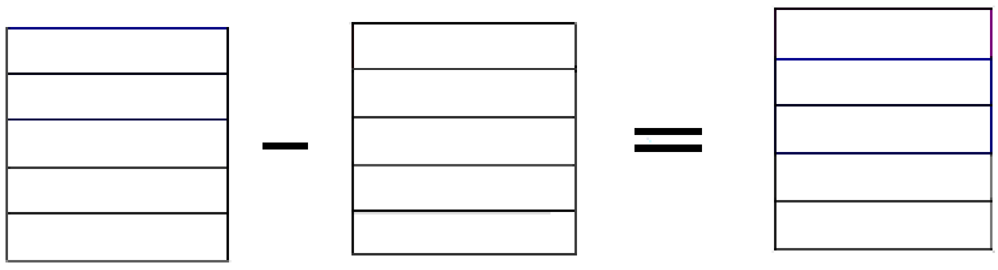
2. *Usa la figura para hallar $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$. Pinta cada sumando y el resultado final. Explica tu método.*



3. *¿Cuál es el requisito para sumar fracciones?*
4. *Ahora anota el algoritmo de cálculo de la suma de fracciones:*

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=$ $\qquad\qquad\qquad\qquad b\neq 0$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$ $\qquad\qquad\qquad\qquad b,d\neq 0$

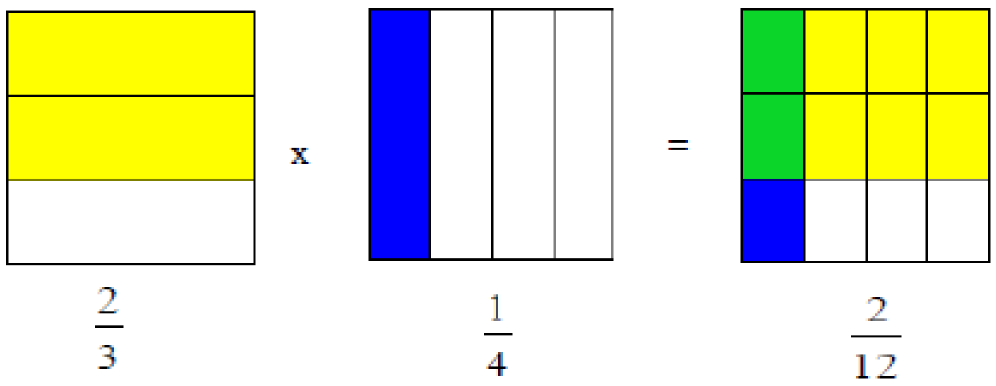
Actividad 22 *Solo para satisfacer cierta curiosidad, hallar $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$, usando los rectángulos de la siguiente figura:*



4.0.6. Multiplicación de fracciones

Las fracciones que vamos a multiplicar, deben tener distinto sentido de sombreado. La exigencia de sombreado de diferente color es para observar con más claridad cualquier intersección de colores. El resultado de la multiplicación será una fracción que tiene como numerador el total de partes sombreadas interceptadas y como denominador el total de divisiones de las láminas superpuestas.

Actividad 23 *La figura ilustra la multiplicación entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$. Trabajando grupalmente, quiero que adivinen como se hizo.*



Actividad 24 *Usando rectángulos realiza la multiplicacion de $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$. Puedes poner todo en un solo rectángulo, se visualiza mejor.*

Anota el algoritmo de la multiplicación para $b,d\neq 0$:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=$$

4.0.7. División de fracciones

Sabemos que una fracción indica la división del numerador por el denominador, y que podemos escribir, por ejemplo,

$$\frac{3}{5}=3\times\frac{1}{5}$$

Esto quiere decir, que la división la podemos pensar como "la multiplicación del numerador por el recíproco del denominador". Esto es,

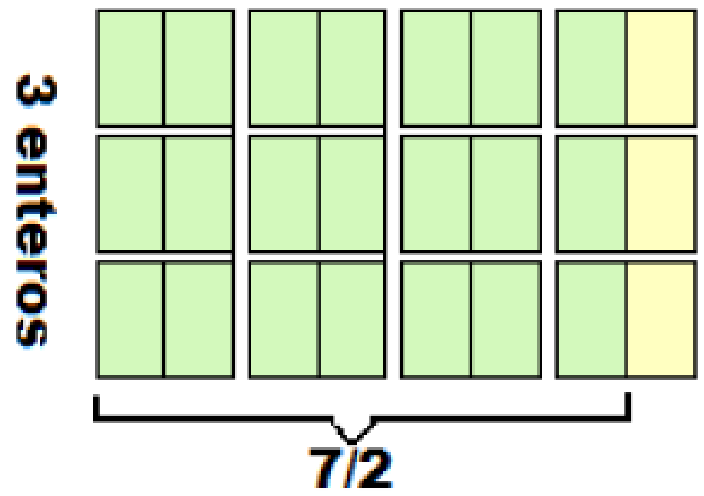
$$\frac{3}{5}=\text{numerador 3 }\times\text{ recíproco del 5}$$

Dos números son recíprocos si su producto es igual a 1

Así, $\frac{3}{4}$ es recíproco de $\frac{4}{3}$.

Con esta idea de recíprocos, la división de fracciones es lo mismo que multiplicar por su recíproco.

Actividad 25 *La figura muestra que dividir 3 en $\frac{2}{7}$ equivale a multiplicar 3 por $\frac{7}{2}$. Estudia con tu grupo el procedimiento empleado. Luego se socializa a toda la clase.*



Actividad 26 *Te desafío a hallar, con tu grupo, el resultado de dividir $\frac{1}{4}$ de unidad entre 3. Te dejo un rectángulo para trabajar.*

Ahora podemos establecer al algoritmo:

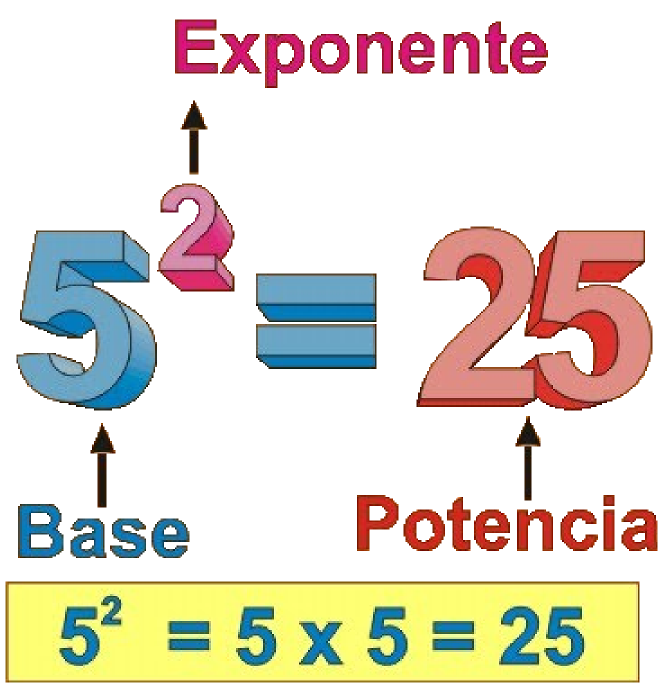
> Dividir un número por una fracción es equivalente a multiplicar el número por el recíproco de la fracción.
>
> $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\qquad b,c,d\neq 0$$

4.0.8. Potenciación

La operación de elevar un número a potencia es un caso especial de multiplicación en el que los factores son todos iguales.

Conversa con tu grupo sobre el siguiente "secreto":

Actividad 27 *Tres amigos se enteran de un secreto. Al otro día, esos tres amigos se lo cuentan a otros tres cada uno. Al tercer día, estos se lo cuentan a otros tres cada uno y así sucesivamente. ¿cuántas personas se enteran del secreto al cuarto día?*



La **potenciación** es una multiplicación de varios factores iguales. Formalmente:

Definición 4.2 *Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un número natural no nulo, el producto*

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n veces}$$

se representa por a^n y se denomina potencia $n-$ ésima de a o potencia de **base** *a y exponente n, o simplemente, a elevado a n.*

Algunos ejemplos de potencias son los siguientes:

$a)$ $\quad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$b)$ $\quad (2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)$

$c)$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$

De la definición de potencia $n-$ ésima se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

4.0.9. Propiedades de las potencias

Si a es un número real y n y m son números naturales, se cumple:

1) $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $\quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$

3) $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Actividad 28 *En forma grupal, crea un ejemplo para cada una de estas propiedades, considerando en uno de ellos la base entera y en el otro base fraccionaria.*

En la definición de potencia se ha exigido que el exponente sea un número natural. Si el exponente es entero, entonces

Si a es un número real distinto de cero, n y m números enteros, se cumple:

1) $\quad a^0 = 1$

2) $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

3) $\quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

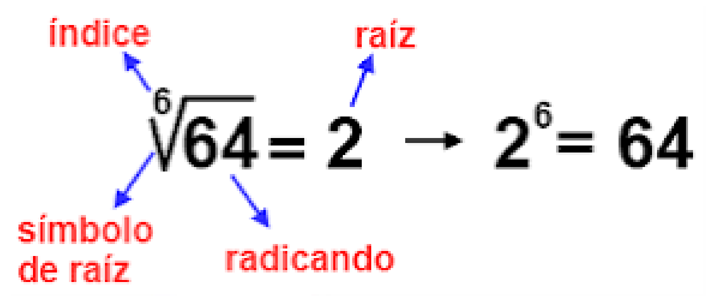
Actividad 29 *Halla el valor de las siguientes expresiones:*

- $\dfrac{(a^3)^{-2}}{(a^{-5})^3} =$
- $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 =$
- $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^4 =$
- $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^3 =$
- $\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{16} \div \left(\frac{3}{2}\right)^{18} - 1^5 =$
- $(3 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+2})^3 \div (3^{n+2})^3 =$
- $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-6} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^7 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \left[\left(-\frac{6}{5}\right)^{-2}\right] \div \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

4.0.10. Radicación

Iniciamos este concepto con una situación didáctica

Actividad 30 *Hay que construir una cerca alrededor del jardín cuyo terreno es cuadrado. Se sabe que el jardín tiene 12 m^2. El problema es determinar cuantos metros de cerca se deben comprar para cercar todo el jardín. En grupo buscas solución a esta situación.*



Se llama raíz $n-$ésima de a al número b tal que $b^n = a$ y se representa $\sqrt[n]{a} = b$. Al número n se le llama **índice** de la raíz y al número a radicando.

Observación 4.3

- *Si $n = 2$ decimos que $\sqrt[2]{x}$ es la raíz cuadrada de x y se escribe $\sqrt{x}$.*
- *Si $x < 0$, y n es impar, entonces $\sqrt[n]{x} < 0$.*
- *Si $x < 0$, y n es par, entonces $\sqrt[n]{x}$* **NO EXISTE**.

Para recordar:

- $\sqrt[4]{625} = 5$ *ya que* $5^4 = 625$
- $\sqrt{121} = 11$ *ya que* $11^2 = 121$

La radicación puede expresarse como potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Este hecho es de suma importancia ya que significa que todas las propiedades de las potencias se siguen cumpliendo en la radicación.

Actividad 31 *Entre las siguientes afirmaciones, determina si alguna de ellas es falsa, justifica.*

- $\sqrt{4} = 2$
- $-\sqrt{4} = -2$
- $\sqrt{4} = -2$
- $\sqrt{-4} = 2$
- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$

Actividad 32 *Trabajando en grupo, escribe en una sola raíz:*

1. $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[4]{125} =$
2. $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{14}} =$
3. $\sqrt[3]{16ab^2} + \sqrt[3]{250ab^2} + \sqrt[6]{4a^2b^4} =$
4. $\sqrt[3]{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2500} =$
5. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$

4.0.11. Racionalización de denominadores

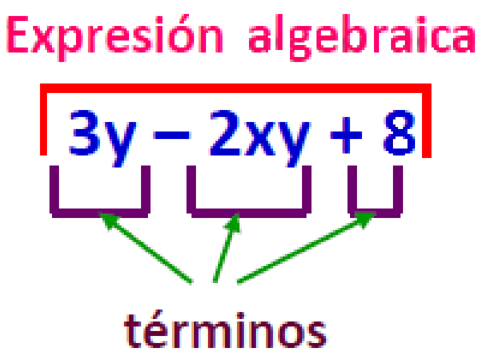
A veces conviene suprimir las raíces del denominador, por ejemplo, para simplificar. Para ello hay que multiplicarlo por la expresión adecuada. Naturalmente, el numerador también se multiplicará por esa misma expresión. Este proceso se conoce como "racionalización"

Actividad 33 *Trabajando en grupo, elimina las raíces del denominador:*

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} =$
2. $\dfrac{1}{5-\sqrt{3}} =$
3. $(1-\sqrt{18})\cdot\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) =$
4. $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{2}} =$
5. $\sqrt{\dfrac{5}{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}} =$

4.1 Lenguaje Algebraico

El lenguaje que utiliza letras en combinación con números y signos, y, además, las trata como números en operaciones y propiedades, se llama lenguaje algebraico.



Algunas definiciones preliminares:

- Expresión algebraica*: es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas.*
- Variable*: es un elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera, se denotan, usualmente, x, y, z.*
- Constantes*: son números o expresiones que representan números y acompañan a las variables, para ellas se usan las primeras letras del alfabeto a, b, c.*
- Término*: Es cada sumando, o cada parte, en una expresión algebraica, separada por $+$ o $-$.*
- Coeficiente*: es un factor multiplicativo que pertenece a una variable.*
- Términos semejantes*: Son los términos que tienen el mismo factor literal (se diferencian sólo en su coeficiente numérico).*

Actividad 34
Halla el coeficiente en:

1. - $9x^2y^3z^4$
   - $-\dfrac{4}{5}a^5b^8+\dfrac{2c}{7d^4}$
2. *¿Cómo son entre sí los términos $3x^2$ y $7x^2$?*

A continuación un listado que debes completar sobre el paso del lenguaje común al algebraico

Lenguaje común.	Lenguaje algebraico
La suma de 9 y x	
El producto de dos números más 4	
Un número más la quinta parte de otro	
La diferencia entre dos números más el doble del primero	
El 20 por ciento de un número más otro número	
El inverso de una cantidad más el triple de otra	
El cociente de dos números menos un tercio de otro	
La tercera parte de la suma de un número con el doble de otro	
Un cuarto de la diferencia de dos números más el doble del primero	
La suma de tres números enteros consecutivos es 123	

4.1.1. Polinomios

Un polinomio en x de grado n es una expresión del tipo:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y los a_i son números reales (coeficientes).

- *El* **grado** *de un polinomio con respecto a una literal es el mayor exponente de sus términos.*
- *Se dice que a es un* **cero** *de $P(x)$ si $P(a) = 0$.*
- *El* **valor numérico** *del polinomio P es el número que se obtiene al sustituir la x por un valor numérico dado y efectuar luego las operaciones indicadas.*
- *Un polinomio se dice que es* **mónico** *si el coeficiente del término de mayor grado es 1.*

Ejemplo 4.4 *Si $P(x) = x^2 + 3x - 4$, entonces su grado es 2 y sus valores numéricos para $x = 1$ y $x = 2$ son, respectivamente:*

$$P(1) = 1^2 + 3\cdot 1 - 4 = 0, \qquad P(2) = 2^2 + 3\cdot 2 - 4 = 6$$

Actividad 35 *Determina el grado de cada polinomio siguiente y halla su valor en $x = -1$:*

1) $5 + 2x - 6x^2 + 8x^3$
2) $2x^3 - 8x + 2x^4 - 1 + 10x^2$
3) $14 + 7x^3m^4 + 12m + 8x^2m - 7x^5m^3 + 5xm^2$

4.1.2. Suma y Resta

La **suma** *(***resta***) de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando (restando) sus términos semejantes.*

Actividad 36 *Trabaja en grupo para realizar las operaciones indicadas:*

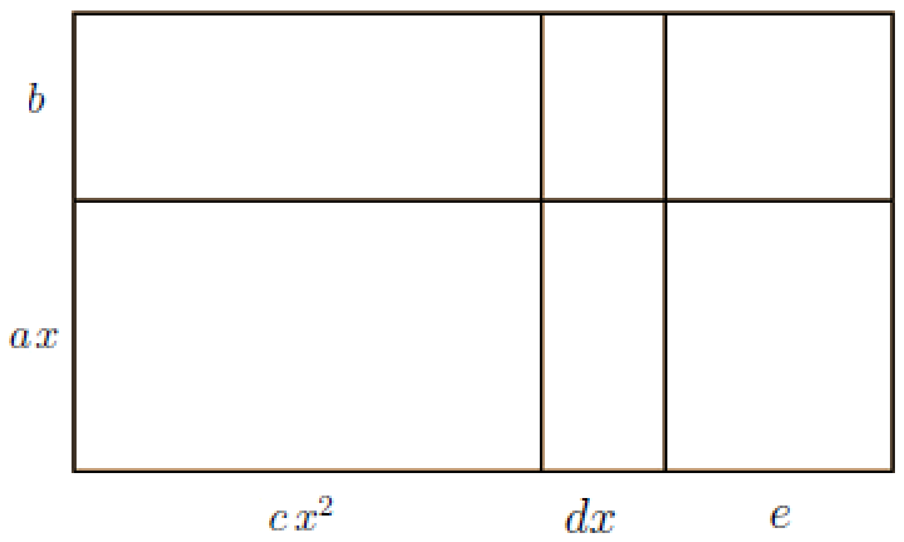
1) $(5x^2 - 3x + 7) + (4x^2 + 2x) =$
2) $(9x^3 + 4x^2 + 5x - 2) - (7x^3 - 2x^2 - 6x + 5) =$
3) $(3x^2 - 5x + 6)\cdot(4x^2 - 7x + 2) =$

4.1.3. Multiplicación

Para multiplicar dos polinomios se multiplica término a término aplicando la propiedad distributiva, de manera que se multiplican los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos en los números y la propiedad de la potenciación en las letras: producto de potencia de igual base.

Actividad 37 *Trabaja en grupo para realizar las operaciones indicadas:*

1) *Utilizando la figura, escribe el área de cada rectángulo y área total. Escribe el desarrollo del área total.*



2) *Hallar algebraicamente* $(3x^2-5x+6)\cdot(4x^2-7x+2) =$

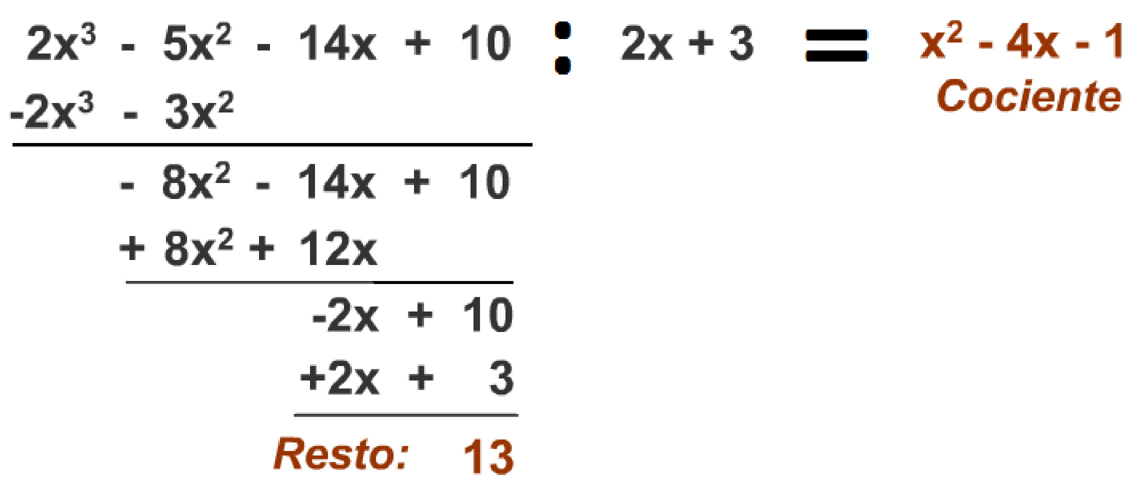
4.1.4. Cociente de dos polinomios

Para dividir un polinomio $P(x)$ *entre otro polinomio* $Q(x)$*, es necesario que el grado de* $P(x)$ *sea mayor o igual que el grado de* $Q(x)$*. Al efectuar la división de* $P(x)$ *entre* $Q(x)$*, se obtiene una expresión de la forma:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Se denomina a $P(x)$ *dividendo, a* $Q(x)$ *divisor,* $C(x)$ *cociente y* $R(x)$ *residuo o resto. Si* $R(x)=0$ *se dice que la división es exacta.*

A continuacion se presenta un procedimiento para dividir polinomios. Es más sencilla la explicación en la pizarra que en una hoja.



Actividad 38 *Realiza, junto a tu grupo, las siguientes divisiones:*

1. $2x^4+3x^3-2x^2+4x+1$ *entre* x^2-x+1

2. x^3+8 *entre* $x+2$

4.1.5. Regla de Ruffini o división sintética

Para dividir un polinomio $P(x)$ *por un binomio de la forma* $x-a$ *podemos usar la Regla de Ruffini, también llamada* **división sintética***, que explicaremos mediante un caso particular.*

Ejemplo 4.5 *Dividir* $2x^4-x^3+2x^2-3x+1$ *entre* $x-1$

El esquema es el siguiente:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & & 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

Se anotan en la primera línea los coeficientes del polinomio a dividir. El $a=1$*, del divisor, va en la primera columna, y el proceso consiste en multiplicar este* 1 *por el coeficiente del* x^4 *(máxima potencia) que es* 2*, luego, copiar el resultado de este producto en la tercera línea y bajo el mismo* 2*. Luego agregar este* 2 *en la tercera columna segunda fila para sumarlo con el* -1 *y poner este resultado sumado en la tercera línea. Se repite el proceso hasta terminar con el* 1*, que representa el resto. En consecuencia:*

$$2x^4-x^3+2x^2-3x+1 = (2x^3+x^2+3x)(x-1)+1$$

Actividad 39 *Realiza las siguientes divisiones:*

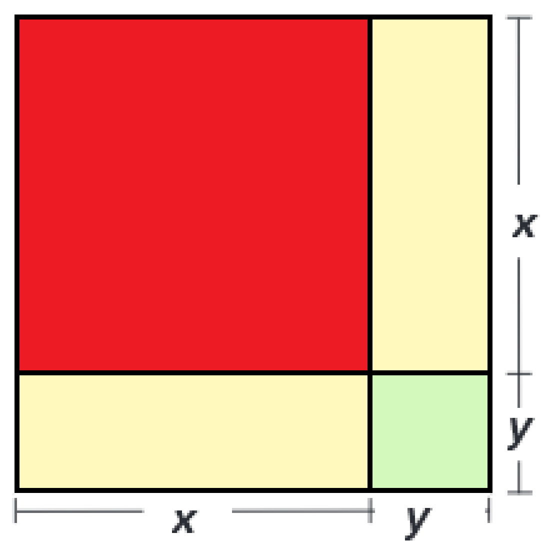
1) $(x^5+12x^2-x^3+8)\div(x+2)$
2) $(x^4-3x^2+2)\div(x-3)$
3) $(x^5-32)\div(x-2)$
4) $(4x^3+4x^2+x+75)\div(x+3)$

4.1.6. Productos notables

Productos notables *es el nombre que reciben aquellas multiplicaciones con expresiones algebraicas cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas. Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorizacion*

- **Cuadrado de un binomio**

Actividad 40 *La figura es un cuadrado dividido en cuatro partes: un cuadrado grande, un cuadrado chico y dos rectángulos iguales. Con base en esta información y la que ofrece la figura, anoten lo que se indica*



1. *La medida de un lado de la figura.*
2. *El área de cada una de las partes: Cuadrado grande Cuadrado chico Rectángulo*
3. *El área total de la figura.*

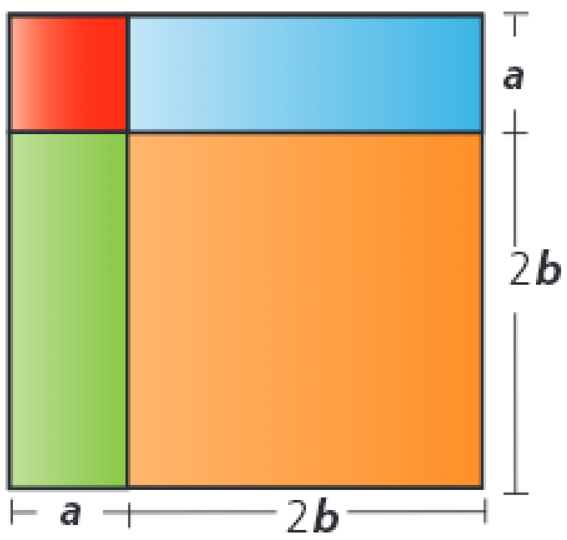
4. De las siguientes cuatro expresiones, hay dos que corresponden al área de la figura anterior. Márcalas.

- $x^2 + y^2$
- $(xy)^2$
- $(x + y)^2$
- $x^2 + 2xy + y^2$

5. Expliquen por qué se puede asegurar que la siguiente igualdad es correcta:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

***Actividad* 41** *La figura es un cuadrado dividido en cuatro partes: un cuadrado grande, un cuadrado chico y dos rectángulos.*



Relacionar las dos columnas, anota en el paréntesis el número que corresponde:

( ) *medida de un lado del cuadrado grande*

( ) *Área de un rectángulo*

( ) *Medida de un lado del cuadrado chico*

( ) *Área de la figura*

1) a

2) $a^2 + 4ab + 4b^2$

3) $2b$

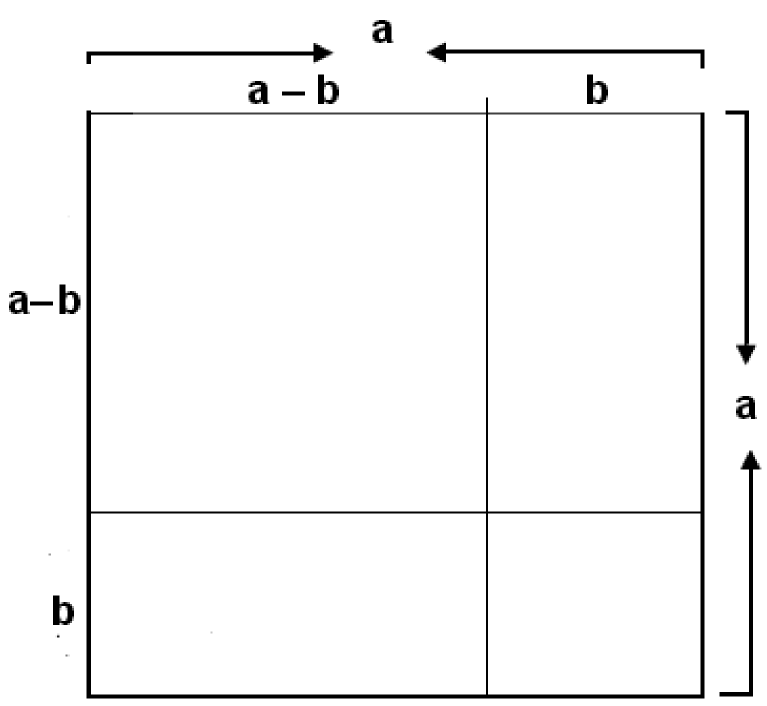
4) $2ab$

***Actividad* 42** *Los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, hallar en cada caso el binomio al cuadrado que corresponde.*

1. $n^2 + 2np + p^2$
2. $4a^2 + 8ab + 4b^2$
3. $9x^2 + 6xy + y^2$

- **Cuadrado de una diferencia**

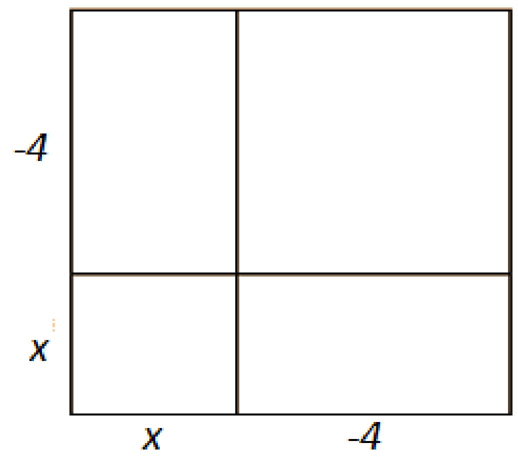
***Actividad* 43** *Observa la figura. Completa el área de cada rectángulo que divide la figura mayor. Escribe el valor de* $(a - b)^2$



Anota aquí tu resultado

Mira la alternativa si consideramos un lado con signo negativo. Esto es posible pues estamos interpretando $a - b = a + (-b)$

***Actividad* 44** *Observa la figura. Completa el área de cada rectángulo que divide la figura mayor. Escribe el valor del producto de factores y su desarrollo.*



Anota aquí tu resultado

En resúmen:

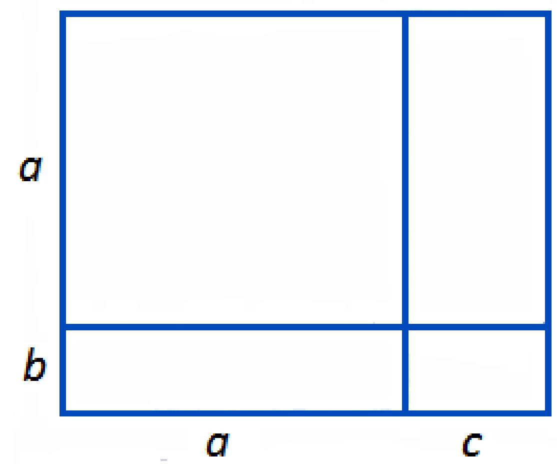
"El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término"

La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square \pm \triangle)^2 = (\square)^2 \pm 2 \cdot \square \cdot \triangle + (\triangle)^2$$

- **Producto de dos binomios**

***Actividad* 45** *Determinar el resultado de* $(a + b)(a + c)$ *usando la figura*

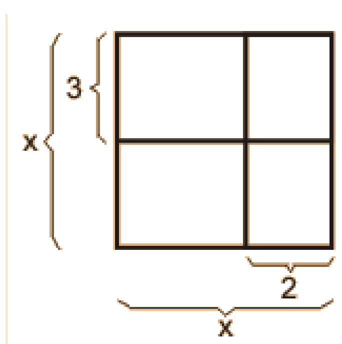


Anota aquí tu resultado

- **Productos de diferencias**

Podemos visualizar el producto de diferencias de una manera similar a la suma.

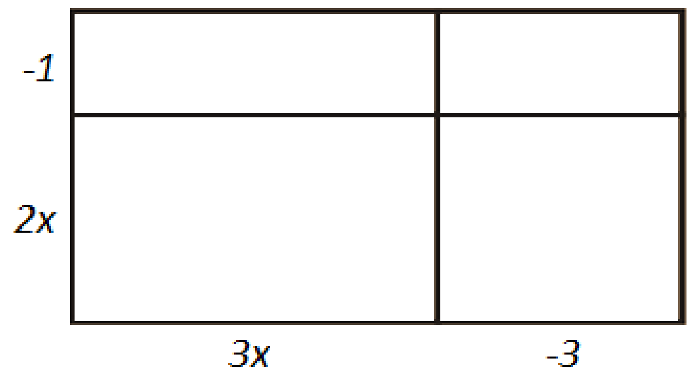
***Actividad* 46** *Basándote en la figura halla el desarrollo de* $(x - 2)(x - 3)$



Anota aquí tu resultado

Tenemos una alternativa para estos casos, y consiste en considerar el lado del rectángulo con signo negativo.

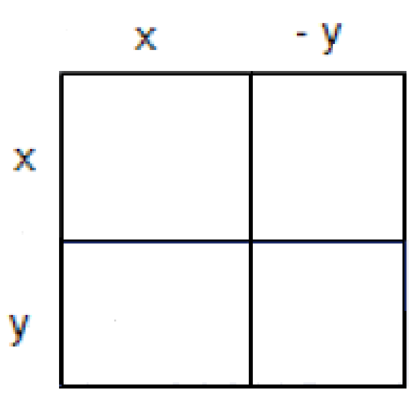
Actividad 47 *Descubre en la figura cuál es el producto de factores presente y escribe su desarrollo*



Anota aquí tu resultado

- **Suma por diferencia**

Actividad 48 *Anota el área de cada rectángulo y descubre cuál es el producto de factores presente y escribe su desarrollo*



Anota aquí tu resultado

Actividad 49 *Escribe en suma por diferencia las siguientes expresiones:*

1. $3a^2 - 3b^2 =$
2. $36x^2 - 25y^2 =$
3. $a^4 - b^4c^4 =$
4. $a^{10} - x^5$

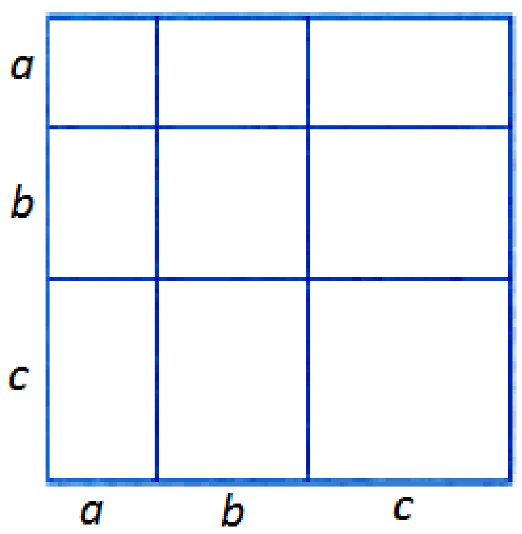
En resúmen:

"El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo"
La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square + \triangle)(\square - \triangle) = (\square)^2 - (\triangle)^2$$

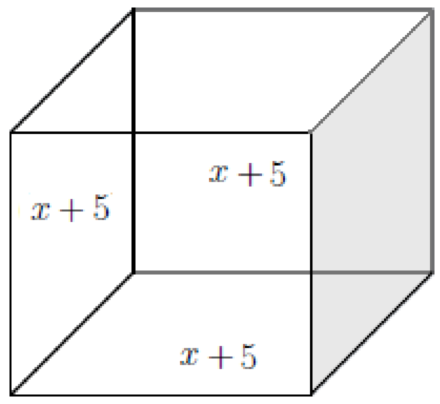
- **Trinomio al cuadrado**

Actividad 50 *Utiliza la figura para calcular* $(a+b+c)^2$



Anota aquí tu resultado

- **El cubo de una suma**



Para hallar el volumen de un cubo aplicamos la fórmula:

$$\textit{Volumen} = \textit{Largo} \times \textit{Ancho} \times \textit{Alto}$$

Si cada lado mide $x+5$, entonces

$$V = (x+5)^3 = (x+5)^2 \cdot (x+5)$$

Como ya se sabe calcular el cuadrado de una suma, por ley de distributividad:

$$(x+5)^3 = (x+5)^2 \cdot x + (x+5)^2 \cdot 5$$

Al hacer los cálculos y reunir términos semejantes:

$$(x+5)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3 \cdot x \cdot 5^2 + 5^3$$

El resultado de este producto notable es un polinomio:

"El cubo del primer término, más el triple del producto del primer término al cuadrado, por el segundo término, más el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término"

Actividad 51 *Hallar el desarrollo de* $(2x+1)^3$

- **Cubo de la diferencia**

En este caso sólo se debe tener en cuenta el signo de los términos

Actividad 52 *Hallar el desarrollo de* $(y-2)^3$

Presentamos en la siguiente tabla un resumen de los Productos Notables.

Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Cubo de una suma	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cubo de una diferencia	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Producto de dos binomios $(x+a)(x+b)$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

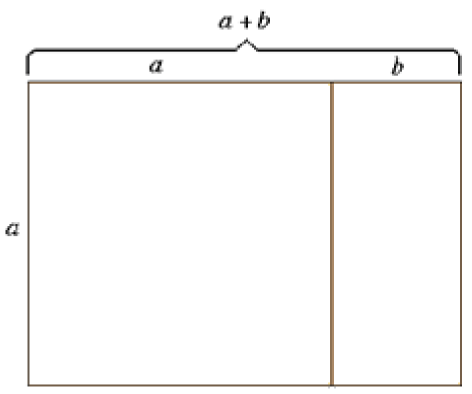
4.1.7. Factorización

Factorizar un polinomio dado es expresarlo como un producto de dos o más polinomios.

- *Caso I:* **Factor común**

Una expresión es factor común de todos los términos de un polinomio cuando aparece multiplicando en cada uno de los términos.

Actividad 53 *Observa con atención la figura*



1. *En el interior de cada rectángulo, anota su área.*
2. *Anota la suma de las áreas de los dos rectángulos.*
3. *Anota el área de la figura (rectángulo mayor).*
4. *Anota la igualdad que encontraste.*
5. *Los rectángulos ¿tienen algo en común?*

Como el área de un rectángulo es el producto de sus lados, y cada uno de ellos se llama **factor**, *lo que acabas de hacer es descubrir que existe un "factor común" (el lado a).*
Formalizamos las ideas anteriores:

Definición 4.6 *Factorizar una expresión algebraica, significa sustituirla por otra equivalente, constituida por dos ó más expresiones (factores), que al ser multiplicadas originan la primera.*

Si bien los modelos de área son una manera útil de visualizar un problema de multiplicación, en la práctica debemos usar la propiedad distributiva.

Actividad 54 *Saca factor común en las siguientes expresiones:*

1. $x^2 + 3x$	3. $4x^2 6x^4$
2. $5x^2 - 10x$	4. $3x^6 + 9x^2 - 6x^3$

- *Caso II:* **Factor común por grupos**

Una expresión algebraica puede no tener un único factor común en todos los términos sino factores comunes distintos en cada grupo de términos. Si luego de asociar convenientemente se puede extraer un único factor común se habrá factorizado.

Actividad 55 *Mira como se factoriza $2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$. Anota las acciones que se llevaron a cabo:*

$$\begin{aligned} 2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b &= (2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b) \\ &= a(2x - y + 5) + b(2x - y + 5) \\ &= (2x - y + 5)(a + b) \end{aligned}$$

Actividad 56 *Factoriza los siguientes polinomios:*

1. $12mx - 10x - 42m + 35 =$
2. $a^2y + ab^2 - axy - b^2x$
3. $x^3 + 2x - 3x^2 - 6 = a$

- *Caso III:* **Trinomio cuadrado perfecto**

Entre los los productos notables vimos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Las expresiones a la derecha de las igualdades, conocidas como trinomios cuadrados perfectos, sólo difieren en un signo. Así, un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que tiene las siguientes características:

1. *posee tres términos*
2. *dos de ellos son cuadrados.*
3. *el término restante es dos veces el producto entre a y b con signo $+$ o $-$.*

Ejemplo 4.7 *Factorizar $9x^2 + 12x + 4$*

Se observa que la expresión dada cumple ser un trinomio, tiene dos términos cuadrados $(3x)^2$ y $(2)^2$, además, el doble producto entre $3x$ y 2 es $12x$. Por tanto, ¡es un trinomio cuadrado perfecto!

$$(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

Actividad 57 *Factoriza:*

1)	$z^2 - zy + y^2$	3)	$4a^2 + 12ab + 9b^2$
2)	$9x^2 - 48x + 64$	4)	$c^8 - 45c^4 + 100$

¿Qué pasó con la última expresión? ¿No es trinomio cuadrado perfecto?

- *Caso IV:* **Trinomio no perfecto**

La expresión $a^4 + 2a^2 + 9$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque

$$a^4 = (a^2)^2, \quad 9 = 3^2 \quad \text{y} \quad 2(a^2)(3) = 6a^2 \neq 2a^2$$

Una manera de obtener un trinomio cuadrado perfecto es "transformando" el segundo término $2a^2$ en $6a^2$. Ello se logra si sumamos $4a^2$, pero como esto altera el problema debemos restar la misma cantidad $4a^2$ que se sumó. Dicho de otra manera, sumamos cero a la expresión, pero un cero adecuado a la circunstancia. Se tiene:

$$a^4 + 2a^2 + 9 = a^4 + 2a^2 + 4a^2 + 9 - 4a^2 = (a^4 + 6a^2 + 9) - 4a^2$$

Se sigue que esto equivale a

$$(a^2 + 3)^2 - 4a^2$$

Hemos logrado una diferencia de cuadrados, que como sabemos, corresponde a una "suma por diferencia".

$$(a^2 + 3)^2 - 4a^2 = [(a^2 + 3) + 2a] \cdot [(a^2 + 3) - 2a]$$

Actividad 58 Los siguientes trinomios no son perfectos. Usa el procedimiento del ejemplo para hallar una factorización en cada expresión dada:

1) $4x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4$	3) $4 - 108x^2 + 121x^4$
2) $c^8 - 45c^4 + 100$	4) $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$

- *Caso V:* **Suma de dos cuadrados**

Existen algunas sumas de dos cuadrados que sumándoles y restándoles una misma cantidad, pueden llevarse al caso anterior y factorizarse.

Ejemplo 4.8 Factorizar $4x^8 + y^8$

Como $4x^8 + y^8 = (2x^4)^2 + (y^4)^2$, entonces para completar un trinomio cuadrado perfecto se suma $2(2x^4)(y^4) = 4x^4y^4$, y para que el polinomio dado no varíe restamos ese mismo término. Haciendo esto estamos en el caso anterior y procedemos de igual forma:

$$\begin{aligned} 4x^8 + y^8 &= 4x^8 + y^8 + 4x^4y^4 - 4x^4y^4 \\ &= (4x^8 + 4x^4y^4 + y^8) - 4x^4y^4 \\ &= (2x^4 + y^4)^2 - (2x^2y^2)^2 \\ &= [(2x^4 + y^4) + 2x^2y^2] \cdot [(2x^4 + y^4) - 2x^2y^2] \\ &= (2x^4 + 2x^2y^2 + y^4)(2x^4 - 2x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

Actividad 59 Factorizar las siguientes sumas de cuadrados:

- $64 + a^{12}$
- $1 + 4n^4$

- *Caso VI:* **Trinomios de la forma** $x^2 + bx + c$

Un trinomio como este, si no es un binomio cuadrado perfecto, se puede factorizar como el producto de dos binomios que tienen un término común.

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

Debemos determinar los números y α β tales que

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta$$

Al comparando las expresiones, los números buscados deben cumplir las condiciones:

$$\alpha + \beta = b, \qquad y \qquad \alpha \cdot \beta = c$$

Ejemplo 4.9 Factorizar la expresión $x^2 + 8x + 15$

De acuerdo a lo señalado, debemos determinar dos números cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8. Es claro que 5 y 3 cumplen las condiciones, por tanto

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

Actividad 60 Factorizar:

1) $x^2 + 10x + 21$	3) $y^2 - 4y + 3$
2) $c2 - 9c + 20$	4) $28 + a^2 - 11a$

- *Caso VII:* **Trinomios de la forma** $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se efectúa el siguiente procedimiento:

1. Se multiplican todos los términos por el coeficiente a.
2. Se expresa el primer término en forma de cuadrado y para el segundo término se intercambia el coeficiente a por b.
3. Se factoriza aplicando el caso anterior.
4. Se divide el resultado entre a de forma tal que no quede ningún cociente.

Ejemplo 4.10 Factorizar el trinomio $6x^2 + 7x + 2$

Multiplicando los términos del trinomio por 6 se tiene lo siguiente:

$$6(6x^2) + 6(7)x + 6(2)$$

expresando el primer término en forma de cuadrado y en el segundo término intercambiando el coeficiente 6 por el 7:

$$(6x)^2 + 7(6x) + 12$$

Aplicando el caso anterior de factorización se buscan dos números que sumados sean 7 y multiplicados sean 12 se tiene:

$$(6x + 4)(6x + 3)$$

se divide por 6 de forma que no queden cocientes:

$$(3x + 2)(2x + 1)$$

por lo tanto:

$$6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)$$

Actividad 61 Factorizar los siguientes trinomios:

1) $2x^2 + 3x - 2$
2) $5x^4 - 13x^26$
3) $4z^6 - 15z^3 + 9$

4.1.8. La Ecuación Cuadrática General

La ecuación cuadrática general o ecuación de segundo grado, es una ecuación que tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hay varias maneras de resolver esta ecuación.
Una de ellas consiste en factorizar el trinomio de acuerdo con las técnicas estudiadas y luego usar el hecho de que

$$a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad o \quad b = 0$$

La manera más común de resolver esta ecuación es usando la llamada fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siendo a, b y c los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
El número $D = b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación y dependiendo de como sea este valor se pueden presentar 3 casos:

1) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales (raíces reales simples)
2) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real (raíz real doble)

3) *Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real (raíces complejas)*

Ejemplo 4.11 *Resolver $2x^2 + x = 15$*

Dado que la ecuación no se encuentra en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, debemos hacerlo para determinar en forma correcta los coeficientes. Se tiene

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

Ahora, $a = 2$, $b = 1$ y $c = -15$. Con ello

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{111}}{4}$$
$$= \frac{-1 \pm 11}{4}$$

de lo cual

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{o bien} \quad x = -3$$

Actividad 62 *Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:*

1) $3x^2 - 30x + 75 = 0$	2) $3 + \sqrt{x-1} = x$

4.1.9. Completación de cuadrados

Lo explicaremos con un problema sencillo.

Si el área de un cuadrado más 8 veces el lado es igual a 48, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?

Lo primero es hacer el planteamiento matemático del problema. Si x es el lado del cuadrado, entonces la ecuaci+on a resolver es:

$$x^2 + 8x = 48$$

El método que vamos a emplear se conoce como "completación de cuadrados", es decir, trataremos de formar una expresión de la forma $(x+a)^2$ en el primer miembro de la ecuación, sin alterar la ecuación misma. Dado que

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

entonces se debe tener que

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 8x$$

Se observa que x^2 se corresponde y no necesita ningún cambio. El término $2ax$ debe ser igual a $8x$, de lo cual queda claro que $a = 4$. Si reemplazamos, queda:

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

Estamos excedidos en 16 unidades respecto de la cantidad original. Pero esto tiene solución si usamos el neutro de la adición, sumando y restando una misma cantidad. Así:

$$x^2 + 8x = 48 \iff x^2 + 8x + 16 - 16 = 48$$

de lo cual

$$(x+4)^2 - 16 = 48$$

Esto que hemos hecho en el primer miembro de la ecuación se denomina completación de cuadrado. A partir de esta última ecuación se sigue que

$$(x+4)^2 = 48 + 16 = 64 \Longrightarrow x + 4 = \pm 8$$

Esto conduce a la dos soluciones de la cuadrática

$$x + 4 = 8$$
$$x + 4 = -8$$

De donde, finalmente, $x_1 = 4$ y $x_2 = -12$ son las soluciones. Por tratarse de un problema geométrico se descarta el valor negativo para el lado del cuadrado y la solución es sólo $x = 4$.

Actividad 63 *Completa cuadrado en las siguientes ecuaciones:*

1) $x^2 + 12x = 13$	3) $-x^2 + 4x = 29$
2) $x^2 - 9x = 16$	1) $x^2 + 7x = 12$

- *Caso VII:* **Suma o diferencia de cubos perfectos**

Dos productos, que pueden considerarse como productos notables, son:

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

proporcionan factorizaciones para una suma o una diferencia de cubos. El proceso se describe en las siguientes tablas; con la factorización del polinomio $125x^3 - 27y^6$

Descripción	Diferencia de cubos	
se obtiene la raíz cúbica de cada término de la diferencia	$125x^3 \downarrow 5x$	$27y^6 \downarrow 3y^2$

Descripción	Binomio	Trinomio
Se construyen los correspondientes binomio y trinomio	$5x - 3y^2$	$25x^2 + 15xy^2 + 9y^4$

Se halla que

$$125x^3 - 27y^6 = (5x - 3y^2)(25x^2 + 15xy^2 + 9y^4)$$

Actividad 64 *Factorizar cada polinomio dado.*

1) $8x^3 + 125$	2) $27a^3 - 8b^6$

4.1.10. Teorema del resto y del factor

Al evaluar el polinomio $P(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en $x = 2$ se tiene:

$$P(2) = 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 7$$

Veamos como esto entra en conexión con la siguiente división:

$$\frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 2} = (x-2)(4x+3) + 7$$

Al no ser exacta la división, existe un resto. Este hecho se conoce como **Teorema del residuo**. *Su enunciado es:*

Teorema 4.12 *(del resto) El residuo o resto de dividir un polinomio entre $x-a$ se obtiene reemplazando en el polinomio la variable x por a.*

Nótese que aplicando este teorema podemos hallar el residuo sin efectuar la división

Actividad 65 *Hallar el resto que se obtiene al dividir:*

1. $2x^3-6x^2+x-5$ entre $x-2$
2. x^3+2x^2-x-2 entre $x+1$

Teorema 4.13 *(del factor) Si al sustituir x por a en un polinomio en x, se obtiene 0, entonces $x-a$ es un factor del polinomio.*

Actividad 66 *Para el polinomio $x^4+x^3-5x^2+x-6$, determinar cuáles de los binomios siguientes son factores:*

1. $x-2$ | 2. $x+1$ | 3. $x+3$

Uno de los usos del teorema del factor es factorizar polinomios.

Ahora, para emplear dicho teorema necesitamos números tales que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0. En relación con esto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.14 *En un polinomio con coeficientes enteros y con 1 como coeficiente del término de mayor grado, solamente los factores del término independiente pueden ser los números que al sustituir la variable por ellos, se obtenga 0.*

Se llama término **independiente** *en un polinomio en una variable, al término que no tiene la variable. Así, en el polinomio x^3+2x^2-x-2, el término independiente es -2.*

Ejemplo 4.15 *Factorizar $z^4-2z^3-z^2-4z-6$*

El término independiente es -6, sus divisores son: ±1, ±2, ±3, ±6. Por acierto y error se encuentra que $z=-1$ es tal que:

$$(-1)^4-2\cdot(-1)^3-(-1)^2-4\cdot(-1)-6=1+2-1+4-6=0$$

Luego se procede a dividir el polinomio dado por el factor $(z-(-1)=z+1$. Se tiene:

$$z^4-2z^3-z^2-4z-6:z+1=z^3-3z^2+2z-6$$

Nos ha quedado un polinomio de grado 3. Repetimos el proceso para ver si podemos seguir factorizando. Para ello, de entre los divisores de -6, que son ±1, ±2, ±3, ±6 buscamos uno que nos de resto cero en el polinomio cúbico. Se halla que $z=3$ es factor. Se divide:

$$z^3-3z^2+2z-6:z-3=z^2+2$$

Como z^2+2 nunca se anula, se obtiene así la siguiente factorización en los enteros del polinomio dado:

$$z^4-2z^3-z^2-4z-6=(z^2+2)(z+1)(z-3)$$

Actividad 67 *Factorizar usando teorema del factor:*

1) $x^5+2x^4-3x^3+x^2-1$

2) $2x^3-x^2-8x+4$

5. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica en general es un cociente de polinomios, por ejemplo

$$\frac{a-b}{a+b},\quad \frac{(5x+3)^2}{(x-1)^3}$$

son ejemplos de fracciones algebraicas. Resulta muy útil en la manipulación algebraica la simplificación de una fracción algebraica.
En el caso en que tanto el numerador como el denominador son polinomios y si ambos poseen un mismo factor, entonces se puede cancelar dicho factor y la expresión simplificada es igual a la anterior (equivalente), excepto para aquellos valores en los que el factor que se canceló toma el valor de cero.

Actividad 68 *Simplificar las expresiones*

1) $\dfrac{a-1}{a^2-1}$

2) $\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-3x^2+2x}$

3) $\dfrac{a^5-a^4c-ab^4+b^4c}{a^4-a^3c-a^2b^2+ab^2c}$

5.1 Suma de fracciones algebraicas

Recordemos que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ son números racionales con el mismo denominador distinto de cero, la suma es:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Si en lugar de números racionales tenemos expresiones algebraicas, procedemos de la misma manera. Si los denominadores son distintos habrá que buscar el común denominador.

Actividad 69 *Sumar las expresiones*

1) $\dfrac{z}{z^2-9}-\dfrac{5}{z^2+6z+9}$

2) $\dfrac{a^2-7a+4}{a^2+10a+25}+\dfrac{1}{a+5}$

5.1.1. Producto de fracciones

El producto de dos o más fracciones es el producto de los numeradores dividido entre el producto de los denominadores, es decir,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Para fracciones algebraicas valen las mismas leyes que para las fracciones numéricas.

Actividad 70 *Hallar los productos siguientes, simplificando el resultado:*

1) $\dfrac{(a-2b)(a+b)}{(a-b)(a+3b)}\cdot\dfrac{(a-b)(a+5b)}{(a-2b)}\cdot\dfrac{(a+3b)}{(a+b)(a-3b)}$

2) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-2}\cdot\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-1}\cdot\dfrac{3x^2+6x}{2x-4}$

3) $\dfrac{a+2b}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a-2b}{b-a}\cdot\dfrac{a+b}{4b^2-a^2}$

5.1.2. División de fracciones

Para para dividir dos fracciones multiplicamos el dividendo por el divisor invertido. Esto es,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Para fracciones algebraicas valen las mismas leyes que para las fracciones numéricas.

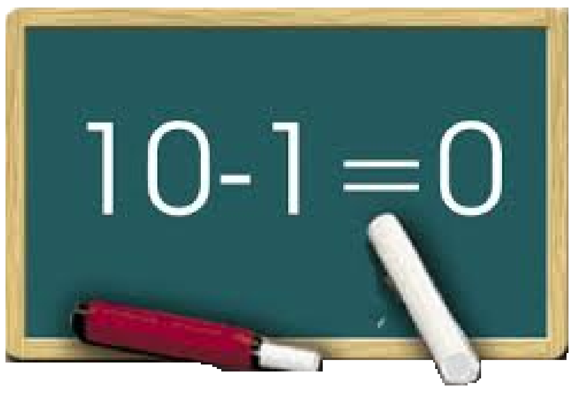
Actividad 71 *Realizar la división indicada y simplificar.*

1) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-7x+3} \div \dfrac{x^2-x-2}{2x^2+3x-2}$

2) $\dfrac{x^3+125}{x^2-64} \div \dfrac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}$

3) $\dfrac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$

5.2 Ecuaciones



En una expresión algebraica no constante, a las variables se les puede asignar valores reales para obtener así un valor numérico.

Actividad 72

- *En la expresión $3x^2bc$ ¿qué valores reales se puede asignar a la variable x?*
- *En la expresión $\dfrac{x^2+4}{x-2}$ ¿existe algún valor real de x no permitido para evaluar?*
- *En la expresión $\sqrt{x-5}$ ¿qué valores están permitidos para x?*

Definición 5.1

- *Todos aquellos valores que al ser sustituidos en una expresión algebraica dan como resultado un número real recibe el nombre de* **dominio** *de la variable para la expresión algebraica dada.*
- *Una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de las expresiones involucra variables, recibe el nombre de* **ecuación**.
- *Las variables, en una ecuación, se denominan incógnitas.*
- *En una ecuación de una incógnita cualquier número que esté contenido en el dominio de la incógnita y que al ser sustituido en la ecuación hace que la igualdad sea verdadera, es una* **solución** *de la ecuación.*
- *Al conjunto S del dominio de la incógnita que contiene todas las soluciones de la ecuación dada recibe el nombre de* **conjunto solución**.
- *Resolver una ecuación significa determinar su conjunto solución.*

Actividad 73 *Determina si las siguientes expresiones algebraicas son ecuaciones. Si lo son determina el conjunto solución y dominio de existencia de la variable:*

1) $(x+7)(x+5)=0$

2) $\dfrac{2}{x+1}=x$

3) x^2-2x+1

5.2.1. Ecuaciones lineales con una incógnita

Esta clase de ecuaciones ya fueron vistas, pero las recordamos.

Definición 5.2 *Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama* **ecuación lineal** *o de primer grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma la forma $ax+b=c$.*

Actividad 74 *Resolver las siguientes ecuaciones lineales:*

1) $(3-\dfrac{x}{2})-(1-\dfrac{x}{3})=7-(x-\dfrac{x}{2})$

2) $x-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{x+1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{5x+1}{6}=\dfrac{1}{6}$

Actividad 75 *Resolver los siguientes problemas:*

1. *¿Qué número es aquel que si se duplica, y luego se le resta 12, da por resultado el número aumentado en 3?*
2. *Juan tiene un año más que el doble de la edad de Jorge y sus edades suman 97. ¿Qué edad tienen ambos?*
3. *El perímetro de un jardín rectangular es de 58m. Si el lado mayor mide 11m. más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?*
4. *El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y éste 3 más que el menor. Si entre los tres suman la edad del padre que tiene 40 años ¿qué edad tiene cada hermano?*
5. *Hallar un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.*

5.2.2. Ecuación de orden dos

Definición 5.3 *Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama* **ecuación cuadrática** *o ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma:*

$$ax^2+bx+c=0$$

Esta clase de ecuaciones fue tratada en los métodos de factorización estudiados anteriormente. Veamos diferentes tipos de ecuaciones que se pueden presentar.

Actividad 76 *Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:*

1) $3x^2-x+1=0$

2) $x^2 + 2x - 3 = 5x - 3x$

3) $4x^2 + 2x = -2x - 1$

Actividad 77 *Resolver los siguientes problemas:*

1) *La suma de dos números es 29 y su producto 204, ¿cuáles son los números?*

2) *Hallar tres números impares consecutivos positivos, tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 7.*

3) *La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?*

5.2.3. Ecuaciones bicuadráticas

Se llaman bicuadráticas a las ecuaciones de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Son polinomios de grado 4 igualados a cero, pero no cualquiera, por que los coeficientes que acompañan a x^3 y a x siempre valen cero. Este tipo de ecuaciones se puede resolver utilizando la fórmula de la cuadrática haciendo un cambio de variable para poder llevar la ecuación a una de segundo grado. Si $z = x^2$, entonces

$$az^2 + bz + c = 0$$

Y esta ecuación ya se sabe resolver.

Actividad 78 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

2) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

5.2.4. Ecuaciones de grado mayor o igual que tres

En la resolución de este tipo de ecuaciones se hace uso de los conceptos de factorización ya estudiados, además de los procedimientos usados para resolver ecuaciones cuadráticas.

Actividad 79 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1) $x^3 - 5x = 0$

2) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

3) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

3) $x^4 + 5x^2 = 0$

5.2.5. Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son aquellas que involucran divisiones de polinomios, es decir que son de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x) \neq 0$ son dos polinomios cualesquiera. En este tipo de ecuaciones, las soluciones serán aquellas que anulen a $P(x)$ y no anulen a $Q(x)$.

Actividad 80 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$

2) $\dfrac{(x^2 + 3x)(x^2 + 2x)}{x^2 - 4} = \dfrac{8x + 24}{2x - 4}$

3) $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3x} + \dfrac{19x}{x^2} = \dfrac{-4x^2 + 3x - 9}{x^2 - 3x}$

En la resolución de ecuaciones es necesario tener presente las dos reglas siguientes:

Regla 1

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad verdadera, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el dominio de la incógnita.

Regla 2

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad falsa, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el conjunto vacío.

Actividad 81 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1) $\dfrac{x - \frac{x-1}{x+1}}{x - 1} - \dfrac{x + \frac{x-1}{x+1}}{x + 1} - 1 = 0$

2) $\dfrac{2x^2 - 7x + 16}{(x - 2)(x + 3)} - \dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{x}{x + 3} = 0$

5.2.6. Ecuación Radical

Definición 5.4 *Se llama ecuación radical a aquella ecuación que involucra al menos, un radical cuyo subradical es una expresión algebraica no constante.*

Las ecuaciones radicales que veremos tienen solo una incógnita.

Actividad 82 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1) $\sqrt{8 - x^2} = x$

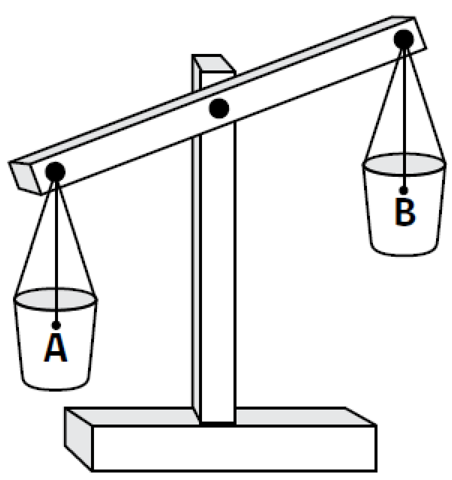
2) $\sqrt[3]{12x + 8} = x + 2$

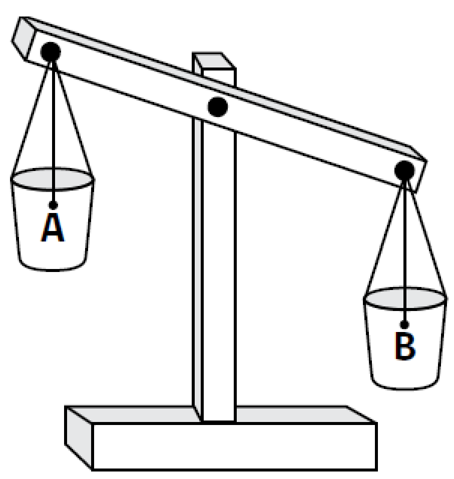
3) $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$

4) $\sqrt{x + 2} + 2x - 1 = 4x$

---

6. Axiomas de orden





En $\mathbb{R}$ tenemos una relación de orden, que permitirá comparar números reales y trabajar con desigualdades. Para poder definir el orden, partimos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ que se denota por $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos son llamados números reales positivos, tales que se verifican los siguientes dos axiomas:

Axioma 1: Tricotomía

- *Dado $a \in \mathbb{R}$ sólo puede darse una de las siguientes alternativas:*

  $$a = 0,\ a \in \mathbb{R}^+, \text{ o bien } -a \in \mathbb{R}^+$$

  En otras palabras, todo número real o es cero o es positivo o su opuesto es positivo.

Cuando se verifica que $-x \in \mathbb{R}^+$, estamos diciendo que x es un número negativo y denotamos por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números negativos, es decir,

$$\mathbb{R}^- = \{-x/\ x \in \mathbb{R}^+\}$$

Este axioma establece una partición del conjunto de los números reales, de modo que se puede escribir

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

Axioma 2: Clausura

- *Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, se verifica que $(a+b) \in \mathbb{R}^+$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$. Esto es, la suma y producto de números positivos son positivos.*

Veamos ya cómo comparar números reales.

Definición 6.1 *Sean x, y números reales. Los símbolos:*

- *$<$ se lee "menor que" y se tiene:*

  $$x < y \Longleftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^+$$

- *$>$ se lee "mayor que" y se tiene:*

  $$x > y \Longleftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}^+$$

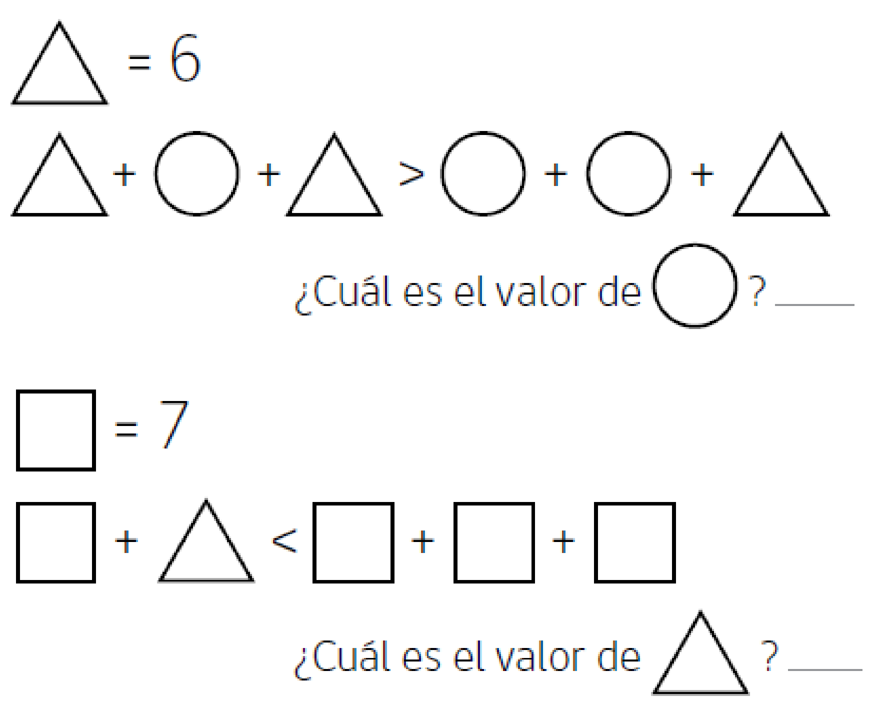
- *$\leq$ se lee "menor o igual que" y se tiene:*

  $$x \leq y \Longleftrightarrow x < y \quad \text{o} \quad x = y$$

- *$\geq$ se lee "mayor o igual que" y se tiene:*

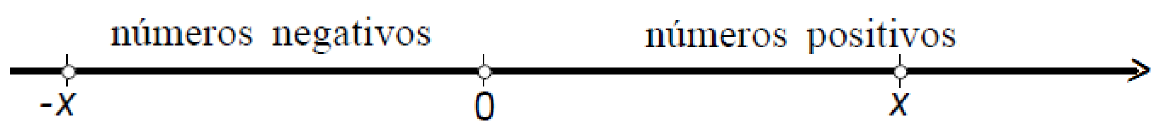
  $$x \geq y \Longleftrightarrow x > y \quad \text{o} \quad x = y$$

Actividad 83 *Resuelve lo que se pide en la figura.*



6.0.7. Representación geométrica de los reales

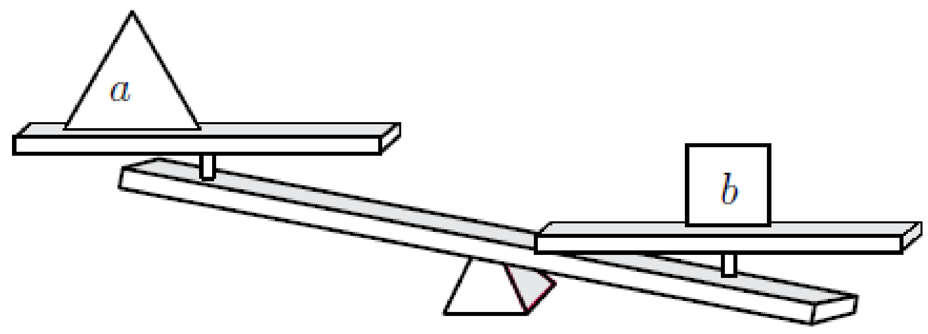
Una manera de representar geométricamente los números reales, consiste en tomar una recta horizontal, y fijar dos puntos distintos en ella, uno para indicar el cero (0) y otro para el uno (1) a la derecha del cero.



Se considera que cada punto de la recta corresponde a un número real y viceversa, a cada número real le corresponde uno y solo un punto de dicha recta (propiedad de completitud que se verá más adelante). Se establece de esta forma, una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de esta recta, la cual nos permite decir en adelante que cada punto "es" un número real. A la recta sobre la cual se hace representaciones de los números reales, se llama recta real. Dado que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, decir que $x < y$, equivale a tener, en la recta real, que x se encuentra a la izquierda de y en tal recta. Los números positivos están a la derecha del cero, y los números negativos a la izquierda.

6.0.8. Algunas propiedades de "menor que"

Actividad 84 *Observando la figura.*



1) *Anota la desigualdad que se cumple.*
2) *Si agregas en ambos lados un triángulo ¿cuál es la desigualdad que se cumple?*
3) *Si agregas en ambos lados un cuadrado ¿cuál es la desigualdad que se cumple?*
4) *Si agregas en ambos lados la misma cantidad c ¿cuál es la desigualdad que se cumple?*
5) *Si agregas un triángulo similar en la balanza izquierda y un cuadrado similar en la derecha, ¿cuál es la desigualdad que se cumple?*
6) *Si repites el proceso de la parte 5 una cantidad p de veces ¿cuál es la desigualdad que se cumple?*

Propiedad de los inversos

Respecto de los inversos se cumple que:

- $x \leq y \Longrightarrow -x \geq -y$
- $0 < x \leq y \Longrightarrow x^{-1} \geq y^{-1}$

Actividad 85 *Justifica cada paso en la demostración siguiente:*

$$x \leq y \Longrightarrow y - x \geq 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{-x} - \boxed{-y} \geq 0$$

$$\Longrightarrow -x \geq -y$$

Estas propiedades de inversos debes tenerlas muy presente:

"cada vez que multiplicas una desigualdad por un número negativo la desigualdad se invierte"

"cada vez que tomas recíprocos en una desigualdad de números positivos la desigualdad se invierte"

Actividad** **86 *En el rectángulo anota el símbolo de desigualdad adecuado:*

$$3 < 5 \implies 3 \cdot \frac{1}{2} \quad \square \quad 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-4 < -2 \implies -4 \cdot -\frac{1}{2} \quad \square \quad -2 \cdot -\frac{1}{2}$$

$$-4 < -2 \implies -4 \cdot \frac{1}{3} \quad \square \quad -2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-4 < -2 \implies 4^{-1} \quad \square \quad 2^{-1}$$

$$-3 < 0 \implies (-3)^2 \quad \square \quad 0$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \implies \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \square \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

6.0.9. Intervalos

Dentro de la recta real, donde están representados todos los números reales podemos definir una serie de subconjuntos, entre ellos los intervalos de gran importancia en el trabajo con desigualdades.

Definición 6.2 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llaman intervalos:*

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

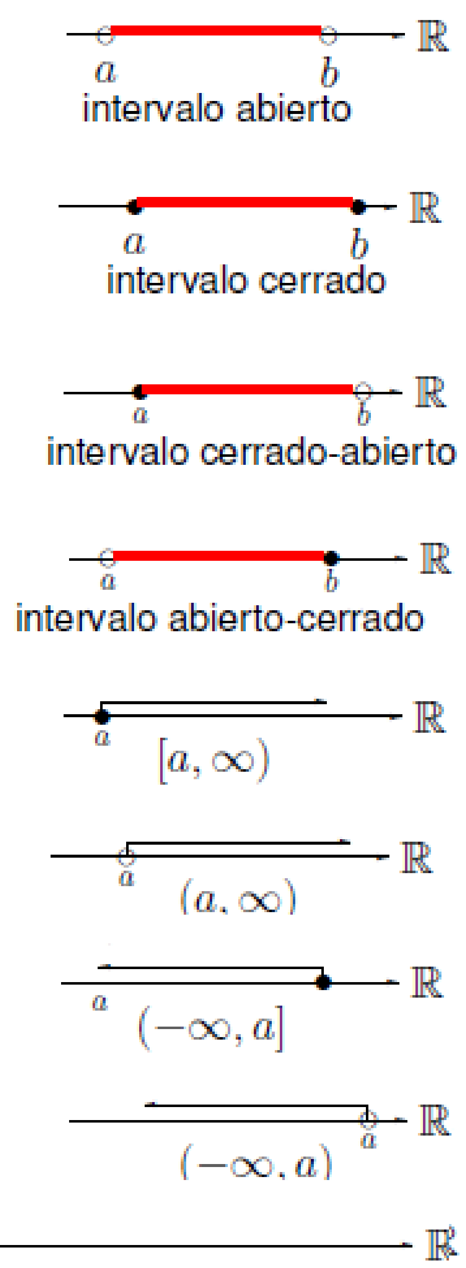
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Actividad** **87

1. *Halla y grafica los conjuntos $S \cup T$ y $S \cap T$, si $S = \{x \in \mathbb{R} /\ x > -2\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R} /\ -7 \leq x < 5\}$.*
2. *Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:*

   a) $\sqrt{x-4}$ | c) $\sqrt{-x}$
   b) $\sqrt{2x+1}$ | d) $\sqrt{-x-1}$
3. *Expresa como un único intervalo:*

   a) $(1, 6) \cup [2, 5)$ | c) $(1, 6] \cap [2, 7)$
   b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$ | d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

6.0.10. Desigualdades o Inecuaciones

Desigualdad o Inecuación es una afirmación del tipo

$$p(x) < q(x),\ p(x) \leq q(x),\ p(x) > q(x),\ p(x) \geq q(x)$$

- *Si al reemplazar x por a en una inecuación se obtiene una expresión verdadera, entonces a se llama solución de la inecuación.*
- *La colección de todas las soluciones se denomina* **conjunto solución** *y se denota por S.*
- *Resolver una inecuación es hallar el conjunto solución.*

Las desigualdades lineales son las más sencilla de resolver. Se dejan todas las expresiones de un sólo lado de la desigualdad, y luego se resuelve para la variable correspondiente.

Actividad** **88

Resolver e ilustrar en la recta real:

1. $2x + 3 \leq 4$
2. $3x - 5 \leq \dfrac{x}{4} + \dfrac{1-x}{4}$
3. $\dfrac{2x-5}{4} < \dfrac{6x+4}{3}$

Método de los puntos críticos

- *Realizar las operaciones necesarias para que toda la expresión quede a un lado de la inecuación y cero en el otro lado.*
- *Factorizar al máximo numerador y denominador (si existe).*
- *Se hallan a continuación los puntos críticos, igualando cada factor a cero.*
- *Se agregan estos puntos críticos en la recta numérica, guardando su relación de orden.*
- *Se forman así intervalos, en cada uno de los cuales se toma un valor numérico, se reemplaza en la expresión dada y se determina su signo.*
- *Si el $A(x) > 0$, se toman los intervalos positivos; si el $A(x) < 0$, se toman los intervalos negativos, obteniendo así el conjunto solución.*

Ejemplo 6.3 *Resolvemos* $3x^2 - x - 2 > 0$

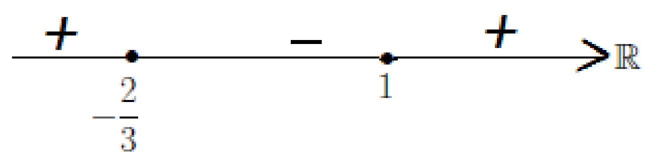
Se trata de una expresión polinomial con sus términos en el lado izquierdo y cero en la derecha.
Se factoriza:

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1)$$

Los puntos críticos son:

$$x = 1, \qquad y \qquad x = -\frac{2}{3}$$

Se ponen estos puntos en la recta real y se agregan los signos, a partir de la derecha, positivo, luego negativo y finalmente positivo



En consecuencia, el conjunto solución es:

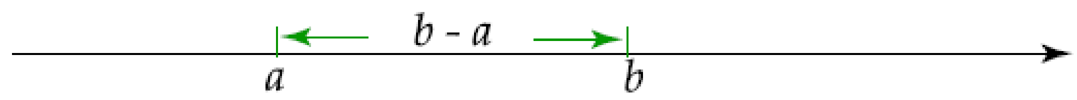
$$S = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$$

Actividad 89 *Considerando el ejemplo como modelo, resuelves en grupo, las siguientes inecuaciones:*

1. $x - \dfrac{5}{x} \leq 4$, $x \neq 0$
2. $(x - 1)(x + 2) < 4$
3. $\dfrac{1}{3x - 1} < \dfrac{2}{x + 5}$
4. $\dfrac{1}{1 + x^2} < \dfrac{2x - 3}{1 + x^2}$

6.0.11. Módulo o Valor absoluto

Definición 6.4 *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *y supongamos que* $a \leq b$. *Se llama* ***distancia*** *entre* a *y* b, *al número no negativo* $b - a$.



Actividad 90 *Halla las siguientes distancias:*

1. *La distancia entre* 1 *y* 4
2. *La distancia entre* 2 *y* -3
3. *La distancia entre* -7 *y* -3

A la distancia entre 0 *y un número real* x *cualquiera la denotaremos por* $|x|$ *y la llamaremos* ***valor absoluto*** *de* x. *Esto es,*

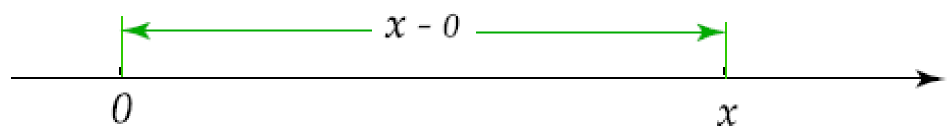
$|x|$ *indica la distancia entre* x *y* 0

Actividad 91 *Halla lo siguiente:*

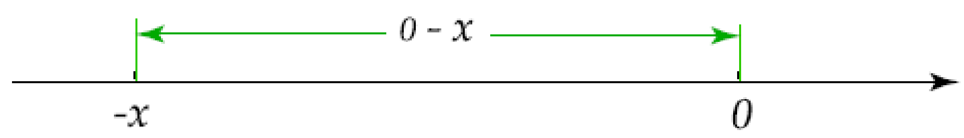
1. $|3| =$
2. $|0| =$
3. $|-5| =$
4. $|5| =$
5. *Alguna conjetura de* 3 *y* 4

En general, sea $x \in \mathbb{R}$

$1)$ *Si* $x > 0$, *tenemos* $|x| = x - 0 = x$. *Es decir si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x$



$2)$ *Si* $x < 0$, *tenemos* $|x| = 0 - x = -x$. *Es decir, si* $x < 0$ *entonces* $|x| = -x$



$3)$ *Si* $x = 0$, *tenemos* $|x| = 0 - 0 = 0$. *Es decir* $|0| = 0$

Así tenemos la siguiente definición

Definición 6.5 *Para cada número real* x, *definimos su valor absoluto, y lo representamos por* $|x|$ *de la manera siguiente:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Actividad 92

- *Halla los siguientes valores:*
  1. $|4| \cdot |-8| =$
  2. $||4| - 6| - 8 =$
- *Grafica dos recta reales paralelas. Coloca sobre una de ellas* $|3x|$ *y sobre la otra* $3|x|$. *¿Qué puedes afirmar?*

Actividad 93 *Aquellos valores que anulan el valor absoluto los llamaremos "puntos críticos". Halla los puntos críticos de:*

1. $|x - 3|$
2. $|4x - 1|$
3. $|3x + 12|$
4. $|4x + \frac{1}{2}|$

Actividad 94 *Determina cual de las siguientes afirmaciones es falsa. Usa un contraejemplo para ello:*

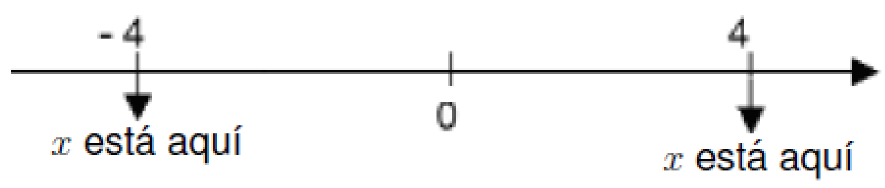
1. $|x| = |-x|$
2. $|x + y| = |x| + |y|$
3. $|x - y| = |x| - |y|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

6.0.12. Ecuaciones con valor absoluto

Mostramos un par de ejemplos de como resolver ecuaciones que contienen valor absoluto.

Ejemplo 6.6 *Resolvemos la ecuación* $|x| = 4$.

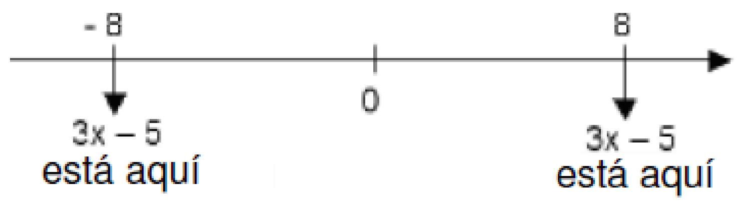
Recordemos que $|x|$ *es la distancia desde* x *hasta* 0 *en la recta numérica. De este modo,* $|x| = 4$, *significa que* x *está a cuatro unidades de* 0 *en la recta numérica. En la figura siguiente se puede ver las dos respuestas probables:*



$x = 4$ *o bien* $x = -4$, *ya que esos dos números están a* 4 *unidades del* 0.

Ejemplo 6.7 *Resolvemos la ecuación* $|3x - 5| = 8$

De acuerdo con la interpretación geométrica $|3x-5|$ debe estar a 8 unidades del 0 sobre la recta numérica.



Por lo tanto, debemos resolver dos ecuaciones:

$$3x-5=8 \qquad \text{y} \qquad 3x-5=-8$$

Al resolver se halla $x=\frac{13}{3}$ y $x=-1$.

Actividad 95 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1. $|3x+2|=5-x=$
2. $|x+2|=5|x-2|=$
3. $\dfrac{2x+6}{x-4}=$

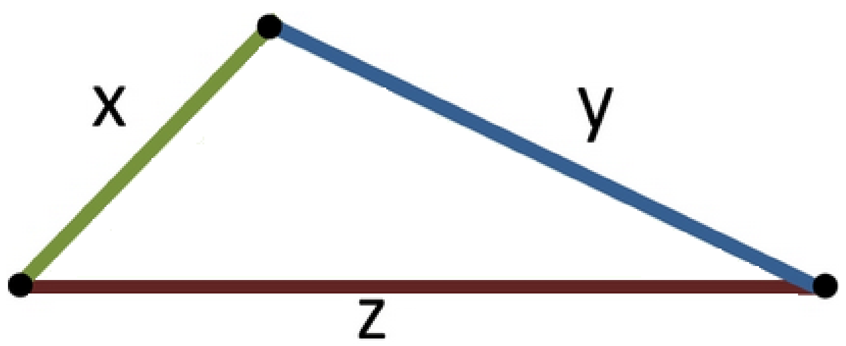
6.0.13. Propiedades del valor absoluto

Las siguientes propiedades las conoces:

- $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
- $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|},\ y\neq 0$

La siguiente se denomina desigualdad triangular

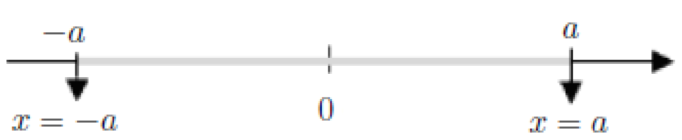
- $|x+y|\leq|x|+|y|$, *desigualdad triangular*



En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante. Esto significa que no puedes construir un triángulo cualquiera sin tener antes esta característica. ¿Puedes construir un triángulo de lados 7 cm, 3 cm y 12 cm?

- $|x|\leq a \Longleftrightarrow -a\leq x\leq a$

La figura muestra, en la recta real, la solución de la desigualdad $|x|\leq a$.



Se observa que esta solución corresponde a todos los puntos del intervalo $[a,b]$, es decir, al conjunto

$$\{x\in\mathbb{R}/\ -a\leq x\leq a\}$$

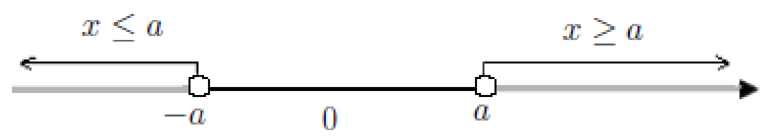
Esto nos lleva a establecer la propiedad

$$|x|\leq a \Longleftrightarrow -a\leq x\leq a$$

Actividad 96 *Resolver $|x-3|<2$*

- $|x|\geq a \Longleftrightarrow x\geq a\ \vee\ x\leq -a$

La figura muestra, en la recta real, la solución de la desigualdad $|x|\geq a$.



Se observa que esta solución corresponde a todos los puntos del intervalo $(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$, es decir, al conjunto

$$\{x\in\mathbb{R}/\ x\leq -a \quad \text{o} \quad x\geq a\}$$

Esto nos lleva a establecer la propiedad

$$|x|\geq a \Longleftrightarrow x\geq a\ \vee\ x\leq -a$$

Actividad 97 *Resolver $|3x+2|\geq 5$*

- $\sqrt{x^2}=|x|$

Usando esta propiedad derribamos un 'mito".

Veamos un ejemplo numérico.

- $\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$
- $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=|-2|=2$

Esto pone FIN al "mito" de que $\cancel{\sqrt{4}=\pm 2}$. Te anoto lo correcto

$$\sqrt{4}=2$$

Debes tener presente que el "doble signo" aparece cuando resuelves una ecuación cuadrática como la siguiente:

$$x^2-4=0 \Longrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Longrightarrow x=2\ \vee\ x=-2$$

6.0.14. Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver inecuaciones con valor absoluto se pueden usar las propiedades mencionadas. En el caso de que aparezcan más de un valor absoluto es recomendable usar la técnica de los "puntos críticos".

Actividad 98 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1) $|2x-3|\leq 2$

2) $|3x+2|\geq 1$

3) $\left|\dfrac{6-5x}{x+3}\right|\leq\dfrac{1}{2}$

4) $|3x-1|\geq|5x+4|$.

---

7. Axioma de Completitud

Los axiomas de cuerpo y de orden de los números reales nos dicen que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Pero $\mathbb{Q}$ también es un cuerpo ordenado, así que esos axiomas no determinan por completo a los números reales: es el axioma de completitud el que marca la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Actividad 99 *Considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$*

$$A=\{x\in\mathbb{Z}/\ 4<x^2<64\}$$

1. *Halla todos los números enteros que cumplen con esta propiedad.*
2. *Indica el menor elemento del conjunto.*
3. *Indica el mayor elemento del conjunto.*
4. *Señala si el menor elemento es parte del conjunto. ¿y el mayor?*

Definición 7.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de números reales no vacío:*

1. *Decimos que A está acotado* **superiormente** *si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$.*
2. *El número M o cualquier otro número mayor se llama* **cota superior** *del conjunto A.*
3. *Decimos que A está acotado* **inferiormente** *si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq m$ para todo $x \in A$.*
4. *El número m o cualquier otro número menor se llama* **cota inferior** *del conjunto A.*
5. *El conjunto A se dice* **acotado** *si lo está superior e inferiormente.*

Actividad 100 *Para el subconjunto de números reales*

$$A = \{x \in \mathbb{Z}/\ 4 < x^2 < 64\}$$

- *Determina si está acotado superiormente, si lo es anota una cota superior.*
- *Determina si está acotado inferiormente, si lo es anota una cota inferior.*
- *¿Te atreves a señalar cuál es la menor cota superior? y ¿cuál la mayor cota inferior?*
- *¿Son la mayor cota inferior y la menor cota superior parte del conjunto?*

Definición 7.2 *Sea A un conjunto no vacío de números reales acotado superiormente. Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el* **supremo** *del conjunto A si es la menor de sus cotas superiores. Se denota $\sup A = \alpha$.*

Para los conjuntos no acotados superiormente se dice que el supremo es $+\infty$. Esto es, si A es un conjunto no acotado superiormente escribimos $\sup A = +\infty$.

Definición 7.3 *Sea A un conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente. Decimos que $\beta \in \mathbb{R}$ es el* **ínfimo** *del conjunto A si es la mayor de sus cotas inferiores. Se denota $\inf A = \beta$.*

Para los conjuntos no acotados inferiormente se dice que el ínfimo es $-\infty$. Esto es, si A es un conjunto no acotado inferiormente entonces escribimos $\inf A = -1$.

Actividad 101 *Para el subconjunto de números reales*

$$A = \{x \in \mathbb{Z}/\ 4 < x^2 < 64\}$$

- *Anota el supremo y el ínfimo.*

Teorema 7.4 *Todo conjunto acotado superiormente no vacío tiene supremo.*

Obviamente existe un teorema análogo para la existencia del ínfimo.

Actividad 102 *Estudiar existencia de supremo e ínfimo en los conjuntos:*

- $A = \{x \in \mathbb{Q}/\ x^2 < 2\}$
- $B = \{x \in \mathbb{R}/\ x^2 < 2\}$

Esta actividad equivale a probar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

7.0.15. La propiedad arquimediana y consecuencias

La propiedad arquimediana de los números reales consiste en lo siguiente:

Teorema 7.5 *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*

Demostración. *Supóngase que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Entonces existe el supremo de $\mathbb{N}$ que denotamos por $\sup \mathbb{N} = \alpha$. Sea n cualquier número natural; obviamente $(n+1) \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $(n+1) \leq \alpha$. Pero entonces $n \leq \alpha - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto quiere decir que $\alpha - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ que menor que el supremo α. Esto es imposible, una contradicción, lo que prueba el teorema.*

Corolario 7.6 *Sean $0 < x < y$ dos números reales positivos. Existe un número natural n tal que $nx > y$.*

Este resultado es súper simple, por más pequeño que se tome x respecto de y, siempre podemos hallar un natural n tal que al multiplicarle por x sobrepase el y. Por ejemplo, $0,1$ es menor que 500 millones, pero con $n = 5001$ millones, el producto de $0,1$ por 5001 millones supera los 500 millones.

Corolario 7.7 *Para todo número real x existe un único número entero m que cumple $m \leq x < m+1$. Este m se llama* **parte entera** *de x y se anota $m = [x]$.*

Por ejemplo,

- $[3,3] = [3,99] = [3,0001] = 3$
- $[-1,5] = [-1,01] = [-1,999] = -2$

Corolario 7.8 *Si $x < y$ son dos números reales cualesquiera, existe un racional r tal que $x < r < y$.*

El ejemplo clásico es tomar la media aritmética entre dos números reales. Como $3 < 8$, entonces $\frac{11}{2}$ se halla entre los dos números dados.

Corolario 7.9 *Si $x < y$ son dos números reales cualesquiera, existe un irracional t tal que $x < t < y$.*

Estos últimos corolarios nos dicen que, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{I}$, son conjuntos infinitos y que también que son conjuntos "densos" en $\mathbb{R}$

7.0.16. Conjuntos Inductivos

Intuitivamente, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales está formado por los números que se obtienen sumando 1 consigo mismo:

$$1; 1+1=2; 1+1+1=3; \cdots$$

Sabemos ya que todos estos números son distintos:

$$1 < 2 < 3 < \cdots$$

Pero veamos una definición rigurosa del conjunto $\mathbb{N}$.

Definición 7.10 *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo cuando verifica las dos condiciones siguientes:*

(i) $1 \in A$

(ii) $x \in A \Longrightarrow (x+1) \in A$

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos.

Actividad 103

- *Verifica que $\mathbb{R}^*$ (reales sin el cero) no es inductivo.*
- *Verifica que $\mathbb{R}^-$ no es un conjunto inductivo.*
- *$A = \{1, 2, 3\}$ ¿es inductivo?*

Definición 7.11 *Definimos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Esto significa que es el MENOR conjunto inductivo de $\mathbb{R}$.*

Principio de inducción matemática

Una proposición $p(n)$ es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones :

Paso 1 *La proposición $p(n)$ es verdadera para $n = 1$, o bien, $p(1)$ es verdadera.*

Paso 2 **Hipótesis de Inducción**. *Se supone que $p(k)$ es verdadera, donde k es un número natural cualesquiera.*

Paso 3 **Tésis de Inducción**. *Se demuestra que $p(k+1)$ es verdadera, o bien,*

$$p(k) \text{ verdadera } \Longrightarrow p(k+1) \text{ verdadera}$$

Un día en la escuela cuando tenía 10 años el maestro propuso como ejercicio sumar 100 números consecutivos. Hay un método sencillo para hacerlo que el maestro conocía pero sus alumnos no. Era costumbre que el primero en acabar el ejercicio debía dejar su pizarra sobre la mesa del maestro (no existían cuadernos en esa época), el siguiente alumno encima de la del primero y así sucesivamente.

Nada más terminar el maestro el enunciado del ejercicio Gauss puso su pizarra sobre la mesa del maestro. Cuando al cabo de una hora acabaron sus compañeros, el maestro comprobó sorprendido como el resultado que aparecía en la pizarra de Gauss era el correcto.''

Actividad 104 *Con la ayuda del profesor demostrar que la suma de los n primeros números naturales es igual a*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Anotar cada uno de los tres pasos de la inducción matemática.

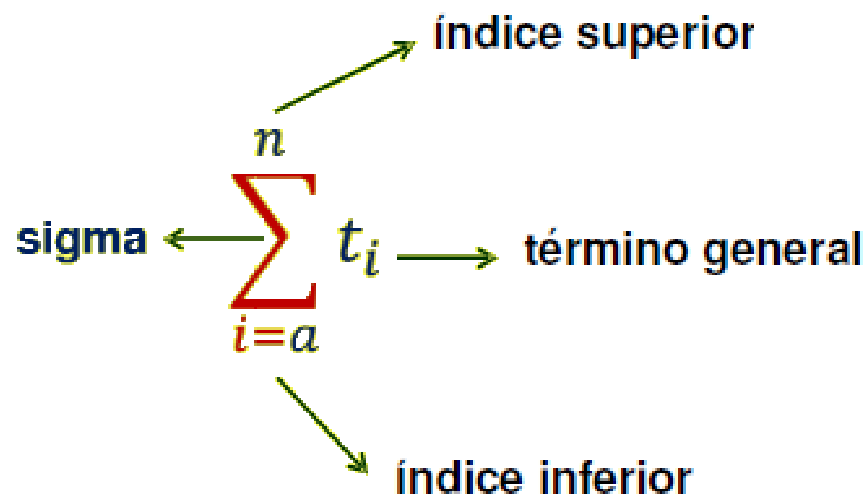
Actividad 105 *Probar que para todo natural n:*

1. $1 + 3 + 5 + \cdots (2n-1) = n^2$
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. *$n^5 - n$ es divisible por 5.*

Tarea 5 *Demostrar que $7^{2i-1}+1$ es divisible por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$*

7.0.17. Sumatoria

El sumatorio (o sumatoria) es un operador matemático, representado por la letra griega sigma mayúscula ($\sum$) que permite representar de manera abreviada sumas con muchos sumandos o incluso con infinitos sumandos.



Esta expresión se lee: "sumatoria de t sub-i, desde i igual a 1 hasta i igual a n."
En general,

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

representa la suma de los primeros n valores de la variable x.

Ejemplo 7.12

$$\sum_{i=1}^{3} (i+1) = (1+1) + (2+1) + (3+1) = 9$$

El índice de la sumatoria puede tomar cualquier conjunto de números enteros, es decir, no tiene porqué empezar necesariamente con el 1. La única condición que se tiene que cumplir es que el primer valor del índice, el *que aparece abajo, sea menor o igual que el último valor del índice, el que aparece arriba. Es decir, en la suma*

$$\sum_{i=k}^{n} x_i$$

el valor de k tiene que ser menor o igual que n para que la suma tenga sentido.

Propiedades

Dado que la sumatoria es simplemente una manera abreviada de representar una suma, entonces cumple todas las propiedades de la suma.

- **Propiedad conmutativa**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

- **Propiedad asociativa**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}(y_i + z_i)$$

- **Propiedad distributiva**

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- **Propiedad transitiva**

$$\sum_{i=1}^{h} a_i + \sum_{i=h+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- **Propiedad telescópica**

$$\sum_{i=p}^{n}(x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_p$$

- **Número de términos**

El número términos de $\sum_{i=p}^{n} a_i$ *con* $0 \leq p \leq n$ *es* $n - p + 1$.

En particular, $\sum_{i=1}^{n} 1$ *tiene* n *términos.*

Actividad 106 *Escribir usando sumatoria:*

1) *La suma de todos los números pares desde 1 hasta 100.*
2) *La suma de todos los números impares desde 1 hasta 100.*
3) *La suma de los 1000 primeros números naturales*

Actividad 107 *Calcular las siguientes sumas:*

1) $\sum_{i=1}^{5} k(k+1) =$

2) $\sum_{n=0}^{3} 2^n =$

3) $\sum_{h=-2}^{3} (6h - 1) =$

4) $\sum_{i=3}^{7} i(3 - 2i) =$

5) $\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+1} =$

6) $\sum_{i=p}^{n+1} \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} =$

Sumatorias Notables

Las siguientes sumatorias son de uso habitual en un curso de Cálculo:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

La demostración de estas igualdades se realiza por inducción.

7.0.18. Factorial de un número natural

Dado un conjunto de m objetos, se llama **permutación** *del mismo a cada una de las distintas formas de ordenar sus elementos.*

Actividad 108

1. *Para el conjunto formado por los tres símbolos que muestra la figura, determinar de cuántas maneras los puedes ordenar*

$$A = \{\bigcirc \ \triangle \ \square\}$$

2. *Un conjunto de 4 elementos:* $B = \{1, 2, 3, 4\}$ *¿de cuántas formas se pueden ordenar sus elementos?*
3. *¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 5 personas en una mesa con cinco sillas?*

Esta forma de multiplicación tiene la siguiente notación:

Definición 7.13 *Se llama factorial de un número natural n al producto de los n primeros números naturales. Se representa por $n!$.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Así por ejemplo,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Una propiedad interesante es que

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

A partir de esta propiedad podemos obtener lo siguiente:

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$
$$(0+1)! = 0!\,(0+1)$$
$$1! = 0!$$

7.0.19. El Binomio de Newton

Esta es una fórmula que se utiliza para desarrollar un binomio elevado a una potencia cualquiera de exponente natural. Es decir, se trata de una fórmula para desarrollar la expresión:

$$(a+b)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Es conveniente observar que a y b pueden ser números, letras o expresiones algebraicas cualesquiera.

Veamos el desarrollo de algunas potencias de $a+b$:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1\\
&(a+b)^1 = a+b\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

Lo primero que se observa es que la cantidad de términos es uno más que el exponente. En segundo lugar, los coeficientes de cada polinomio resultante siguen la siguiente secuencia:

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Además, que las potencias del primer sumando del binomio, a, comienzan por n y en cada sumando van disminuyendo de uno en uno hasta llegar a 0. Por el contrario, las potencias del segundo sumando del binomio, b, empiezan en 0 y van aumentando de uno en uno hasta llegar a n.
La secuencia anterior recibe el nombre de Triángulo de Pascal o de Tartaglia. Observa que el vértice superior es un 1 y que la segunda fila son siempre dos unos. A partir de la tercera fila, *el método de construcción es el siguiente:*

Primer número: 1

Números siguientes:

La suma de los dos que se encuentran inmediatamente por encima.

Último número: 1

Observa también que cada fila empieza y termina por 1, que los números que aparecen forman una fila simétrica, o sea, el primero es igual al último, el segundo igual al penúltimo, el tercero igual al antepenúltimo, etc.

Actividad 109

1. *Construye las primeras 10 filas del triángulo de Tartaglia.*
2. *Halla, en el triángulo de Tartaglia $(a-b)^6$ y $(a+b)^8$.*

El número combinatorio

Definición 7.14 *Se llama número combinatorio m sobre n a la expresión:*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Actividad 110 *Hallar los siguientes números combinatorios:*

1. $\binom{10}{3} =$
2. $\binom{10}{7} =$
3. $\binom{100}{98} =$
4. $\binom{100}{2} =$
5. $\binom{m}{0} =$
6. $\binom{m}{1} =$
7. $\binom{m}{m} =$
8. $\binom{0}{0} =$

Tarea 6 *Probar lo siguiente:*

1. $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$
2. $\binom{x}{4} + \binom{x}{5} = \binom{x+1}{5}$
3. $\binom{12}{x} + \binom{12}{x+1} = \binom{13}{x+1}$
4. $\binom{15}{x-1} + \binom{15}{x} = \binom{16}{x}$

Con números combinatorios se puede reescribir el triángulo de Tartaglia y queda como sigue:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

- **El binomio de Newton**

Para hallar potencias naturales de un binomio se usa la siguiente fórmula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{n}a^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Cálculo del término que ocupa el lugar k

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

Actividad 111

1. *Hallar el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^7 =$*
2. *Hallar el sexto término de $(x+y)^{15}$*
3. *Hallar el quinto término de $(x+2y)^5$*
4. *Hallar el cuarto término de $(2-3y)^4$*