Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

Item I: Cálculo de límites y análisis de la continuidad.

1. Usando la definición delta-epsilon probar el valor de cada límite siguiente:

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x+2$

b) $\lim\limits_{x\to -3} 2x+5$

c) $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+2x-5$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-2}{x^2+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+5x-9)$

h) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-5x+2)$

i) $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2-5x+7)=5$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x+2}{2x+1}$

k) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+1}{x+1}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-6x+8}{5x^2+3}$

2. Con las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=x^2+3$, $h(x)=\frac{1}{x^2}$ calcular el límite que se indica:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{h(x)-f(3)}{x-3}$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt[3]{x^2+2}+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|}$

g) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{sen\, 6t}{t}$

h) $\lim\limits_{z\to \pi} \dfrac{sen\, z}{z-\pi}$

i) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{tg\, y}{3y}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x sen\, x}{1-cos\, x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} x\; ctg\, 3x$

l) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{cos\, x - sen\, x}{cos\, 2x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x}{\sqrt[3]{x}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4+cos\, x}{1-sen\, x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+tg\, x}{sen\, x}$

o) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

p) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

q) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

r) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

s) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

t) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

u) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{x+5}}{1-\sqrt{5-x}}$

v) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

w) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

x) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

z) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

4. Calcular los siguientes límites si existen:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+3}{x^4+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-x$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{x-a}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$

l) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{5-x}$

m) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2}$

n) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

o) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

p) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

r) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

s) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3h}}{x^2-49}$

5. Calcular los siguientes límites exponenciales y trigonométricos:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)^{x^2+2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{5}{2x}\right)^x$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, 3x}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, x^2}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x}{x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos\, x}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\, \alpha x}{\beta x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2sen(x-2)}{x^2-4}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi x^2}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos \pi x}{x^2}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, sen\dfrac{1}{x}$

u) $\lim\limits_{x\to\alpha} x\, \dfrac{sen(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(2x-2)}{x^3-1}$

w) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{tg\, \pi x}{x-2}$

x) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{sen(2x-1)}{4x-2}$

6. Calcular, para $x\to\infty$, los siguientes límites:

a) $\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x}$

b) $\left(5+\dfrac{1}{5x}\right)^{5x}$

c) $\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$

e) $\left(5+\dfrac{5}{x}\right)^{5x}$

f) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

g) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x-2}$

h) $\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{5}$

i) $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{4x}$

j) $\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{3x}$

k) $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$

l) $\left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{5x}$

7. Hallar un valor de a tal que $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$

8. Graficar la función $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{, si } x\leq 0 \\ 1 & \text{, si } x>0 \end{cases}$. Con la ayuda del gráfico decidir si los siguientes límites existen:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

9. Graficar la función $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{, si } x\geq 0 \\ x+1 & \text{, si } x<0 \end{cases}$. Con la ayuda del gráfico, determinar si existen los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

10. Analizar la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-|x-7|-49}{|x-7|}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}, & x>1 \\ \frac{2x^2-3}{x^2+3}, & x<1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{3x+21}, & x<-1 \\ \frac{1}{x^2+1}, & x>-1 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2-2}{x-1}, & x<-2 \\ -\frac{5x}{3}, & -2\leq x\leq 3 \\ x+1, & x>3 \end{cases}$

11. Hallar a y b para que existan los límites laterales en $f(x)=\begin{cases} x+2a, & x<-2 \\ 3ax+b, & -2\leq x\leq 2 \\ 3x-2b, & x>2 \end{cases}$

12. Hacer el gráfico de la función f que satisface simultáneamente que,

$$dom(f)=[-2,2]-\{1\},\quad f(-2)=2,\quad f(2)=3,\quad f(-1)=-1,\quad \lim_{x\to 1} f(x)=2,\quad \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

13. Dibujar la función f, calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$, si $f(x)=\begin{cases} 1, & si\ x \text{ es entero} \\ 2, & si\ x \text{ no es entero} \end{cases}$

14. Averiguar continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\leq 3 \\ 5-x, & x>3 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} |x-2|+3, & x<0 \\ 5+x, & x\geq 0 \end{cases}$

15. Encontrar los valores de a y b para que sea continua la función

$$f(x)=\begin{cases} -2sen\, x, & x\leq -\frac{\pi}{2} \\ b+asen\, x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ cos\, x, & \frac{\pi}{2}\leq x \end{cases}$$

16. Encontrar las discontinuidades y diga si se pueden remover, si son de salto o si son infinitas

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

17. Averiguar continuidad de la función $h(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$

18. Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ usar el teorema de Valor Intermedio para probar que existe un número real a tal que $f(a) = 100$

19. Probar que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

20. Encontrar cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales la ecuación $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$ tenga una raíz.

21. Estudiar la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 2 \\ a - x^2, & x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \leq 0 \\ x + 2a, & x > 0 \end{cases}$

22. Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1, & x > 1 \\ 2x^2 + ax + b, & x \leq 1 \end{cases}$$

23. Analizar continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{, si } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{, si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{, si } x < 1 \\ x - 1 & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si } 0 \leq x < 3 \\ 6 & \text{, si } x = 3 \\ 9 & \text{, si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 2x^3}{x - 2} & \text{, si } x \neq 2 \\ 8 & \text{, si } x = 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & \text{, si } x \neq 2 \\ 3 & \text{, si } x = 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{, si } x \neq -3 \\ -6 & \text{, si } x = -3 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{, si } -2 < x \leq 0 \\ 3 & \text{, si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{, si } x \neq 3 \\ 5 & \text{, si } x = 3 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{, si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x - 3} & \text{, si } 3 < x < 5 \\ \frac{1}{2} & \text{, si } x \geq 5 \end{cases}$

24. Determinar los valores de m y n para que la siguiente función sea continua en $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, si } 1 < x < 3 \\ x^2 + mx + n & \text{, si } x \geq 3 \end{cases}$$

25. Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 4ax & \text{, si } x < 1 \\ ax + b & \text{, si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x^2 - 5b & \text{, si } x > 2 \end{cases}$$

26. Determinar todos los valores reales de x para los cuales es continua la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$$

27. Determinar el valor que se debe asignar a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$ para que sea continua en $x = 4$.

28. Determine si la siguiente función es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, si } x < 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \\ \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} & \text{, si } x > 0 \end{cases}$$

En caso de no ser continua, indique si es reparable o irreparable.

29. Determine los valores de a y b, de modo que sea continua en $x = 1$ y $x = 2$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(x^3-1)}{x+1} + b & \text{, si } x < 1 \\ 2ax - 3 & \text{, si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{b(x^2+3x-10)}{x-2} & \text{, si } x > 2 \end{cases}$$

30. Encontrar el valor de $L \in \mathbb{R}$ de modo que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$. Resp. $\frac{1}{4}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}}{x-2} & \text{, si } x \neq 2 \\ L & \text{, si } x = 2 \end{cases}$$

31. Sea la función $f(x) = x^2 + 1$. ¿Se puede asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$?. En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

32. Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + cos\, x$ se cortan en algún punto.

33. Probar que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.

34. Si f es continua en $[1, 9]$, $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿Se puede asegurar que $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 9]$?

35. Halla una función que no esté definida en $x = 3$, pero que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

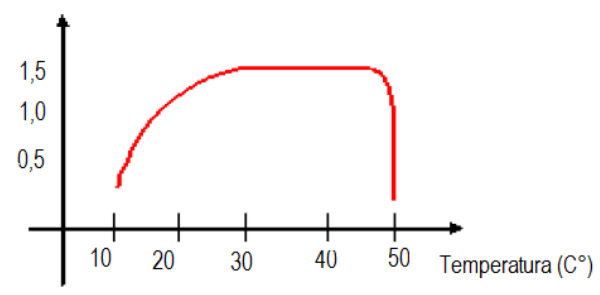
ITEM II: Problemas de aplicación

1. El costo (en dólares) de eliminar x % de la polución del agua en cierto riachuelo esta dado por:

$$C(x) = \frac{75x}{100 - x}, \qquad \text{para } 0 \leq x < 100$$

   a) Hallar el costo de eliminar la mitad de la poblacion.
   b) ¿Qué porcentaje de la polución puede eliminarse con US$ 20.000?
   c) Evaluar $\lim\limits_{x \to 100} C(x)$. Interpretar el resultados.

2. La grafica siguiente muestra como cambia con la temperatura la tasa de crecimiento R(T) de una colonia bacterial.



   a) ¿Qué puede decirse de la tasa de crecimiento para $30 < T < 45$
   b) ¿Qué sucede cuando la temperatura alcanza más o menos $45°$ celsius?
   c) ¿Tiene sentido calcular $\lim\limits_{T \to 50} R(T)$?
   d) Escribir un párrafo que describa como afecta la temperatura a la tasa de crecimiento de una especie.

3. La concentración de cierto medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de la inyección está dada por:

$$C(t) = \frac{0{,}2t}{t^2 + 1}$$

   miligramos por centímetro cúbico. Evalúe $\lim\limits_{t \to \infty} C(t)$, e interprete los resultados.

4. Los ingresos totales en taquilla a nivel mundial de cierta pelicula son aproximados por la funcion :

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

   donde $T(x)$ se mide en millones de dólares y x son los meses posteriores al lanzamiento de la película.

   a) ¿Cuáles son los ingresos totales en taquilla después del primero, segundo y tercer mes?
   b) ¿Cuál será el ingreso bruto total de la película a largo plazo?

5. Una gran empresa está construyendo la comunidad Waca-Waca, con casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias, en 120 hectáreas cercanas a Pucón. Como resultado de este desarrollo, los encargados han estimado que dentro de t años a partir de ahora esa comunidad estará dada (en miles) por:

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a) ¿Cuál es la población actual de Waca-Waca?

b) ¿Cuál será su población a largo plazo?

6. Un estudio de los costos de uso de los automoviles compactos del ano 1992 (cuatro cilindros) halló que el costo promedio (pagos del automovil, gasolina, seguro, mantenimiento y depreciación), medido en centavos por milla, es aproximado por la función

$$C(x) = \frac{2010}{x^2} + 1780$$

dónde x denota el número de millas (en miles) recorridas por el automóvil en un año

a) ¿Cuál es el costo promedio de uso de un automóvil compacto que recorre 5.000, 10.000, 15.000, 20.000 y 25.000 millas al año?

b) Utilice lo anterior como apoyo para trazar la grafica de la funcion C.

c) ¿Qué le ocurre al costo promedio cuando las millas recorridas aumentan sin límite?

1.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (2x^2-6x+1)$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3+x}{x^2-1}$ **Demuestra que los limites a), b), c)**

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{3x^2-3}$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2sen(x-\frac{\pi}{3})}{(x^2-\frac{\pi^2}{9})}$ **son los que calculaste, y en cada uno**

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^3 - \log x\right]$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3^x}{x^2+1}$ **de estos calcular** δ_ε $cuando\ \varepsilon = 0{,}1$

2.- Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}$

3.- Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[2^x - x^2\right]$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}$ $h)$ $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}$

Universidad de La Frontera

Facultad de Ingeniería, Ciencias y Adm.

Departamento de Matemática y Estadística

GUIA N^o 3 (IME050)
CALCULO EN UNA VARIABLE

1. Aplicando la definición de límite demostrar que:

   (i)
   $$\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3\ ,$$

   (ii)
   $$\lim_{x\to 3} f(x)=6\ .$$

   donde
   $$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si : } x<3 \\ 8 & \text{si : } x=3 \\ 3x-3 & \text{si : } x>3 \end{cases}$$

   Esbozar el gráfico en cada caso.

2. Explicar la razón por la que los siguientes límites no existen:

   (i)
   $$\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}.$$

   (ii)
   $$\lim_{x\to 1} f(x)$$

   donde
   $$f(x)=\begin{cases} x & \text{si : } x<1 \\ 3 & \text{si : } x\geq 1 \end{cases}$$

3. Sean $x_1 < x_2$ las raíces de la ecuación $x^2-2ax+b^2=0$,con $a,\ b\in\mathbb{R}^+$ y $a>b$. Determinar los límites:

   - $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{x_2-x_1}{\sqrt{a-b}}$
   - $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{ax_2-b^2}{ax_1-b^2}$
   - $\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{ax_2-bx_1}{ax_1-bx_2}$

4. En los ejercicicos que aparecen a continuación, utilice las propiedades de los límites para evaluar aquellos que existan.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(3x^2+7x-11)$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(2x-x^7)$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{x^3-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to -\frac{4}{3}} \dfrac{9x^2-16}{3x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x^{\frac{2}{3-4}}}{x-2\sqrt{2x}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{4x^2+8x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{3-\sqrt{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{7}\right)$

5. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\operatorname{sen} 2x}{7\operatorname{sen} 3x}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(1-\operatorname{sen}(x))}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(1+\cos(x))}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^4 x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}(3\operatorname{sen}(4x)))}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} [x]$

k) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}-\sqrt{9-x^2}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-3}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

n) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen} 3x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{x}{3}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\operatorname{sen} x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

6. En cada uno de los ejercicios siguientes evaluar el límite en caso que exista o justificar por qué no existe.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+4}{3x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+2x+5}{2x^2-6x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{4-x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+a^2}-x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{4-x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$

l) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{|\,x\,|}$

7. Calcular:

   a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+8x^2-3x-9}{10x^3+9x^2-5x+6}$

   b) Si $m,\, n \in \mathbb{N}$, se pide: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

   d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

   e) Si $m,\, n \in \mathbb{N}$, se pide: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}$

   f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

   g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2a-\sqrt[3]{4(a^3+x^3)}}{\sqrt[3]{4(a^3+x^3)}-2x}$

   h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}$

8. Calcular

   a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$

   b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$

   c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\tan x-1}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{sen} x}$

   e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan x-1}$

   f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$

   g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)}$

   h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x}$

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x-a}$ si $a>0$.

   j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x-a}$ si $a>0$.

   k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)^2}$ si $a>0$.

9. Para cuales valores de p es
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(1-\cos(\operatorname{sen}^2(x)))}{x^p}$$
un número finito y distinto de cero?

10. Para cuales valores de p es
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(1-\cos(\cos^2(x)))}{(x-\frac{\pi}{2})^p}$$
un número finito y distinto de cero?

11. Calcular en caso que exista:

   a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^5+3x^2-3}{7x^5+x^2-2}$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^7+3x^4-3}{7x^3+x^2-7}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3x^2-3}{7x^4+x^3+5}$

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x}{x^2-3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^4+x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^2}{x^7+x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x}{x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$

k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

l) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^3-2x^2-3x}$

12. Calcular en caso que exista:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x)$

d) $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{sen}(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos(x))^2-1}{\operatorname{sen}(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\operatorname{sen}(x+3)}{x^3-2x^2-3x}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} [x]$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}})$

k) $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1})$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} ((x^3+x^2+1)^{\frac{1}{3}}-(x^3-x^2+1)^{\frac{1}{3}})$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{[x]}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1} (\dfrac{3}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{1-x^{\frac{1}{3}}})$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-\operatorname{sen}(x)+1}-\sqrt{x^2+\cos(x)+1})$

13. Calcular en caso que exista:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(7x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(-7x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{(\tan(x))^2}$

h) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\operatorname{sen}(x+3)}{x^3-2x^2-3x}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos\left(\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|x|}$