Ecuaciones no lineales

Métodos Numéricos

Prof. Juan Pablo Concha y Eduardo Uribe

Conferencia 5

Conferencia 4

Modelo no lineal

Caída libre

Para el caso de velocidad inicial cero:

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

v: velocidad dependiente del tiempo
g: constante gravitacional
m: masa del cuerpo
c: coeficiente de rozamiento

Problema 1

Calcular el coeficiente de rozamiento c necesario para que un paracaidísta de masa $m = 68.1kg$ tenga una velocidad de $40m/s$ después de una caída libre de $t = 10s$. ($g = 9.8m/s^2$).

Solución

Analítica

Hallar c tal que: $v(10) - 40 = 0$, o sea:

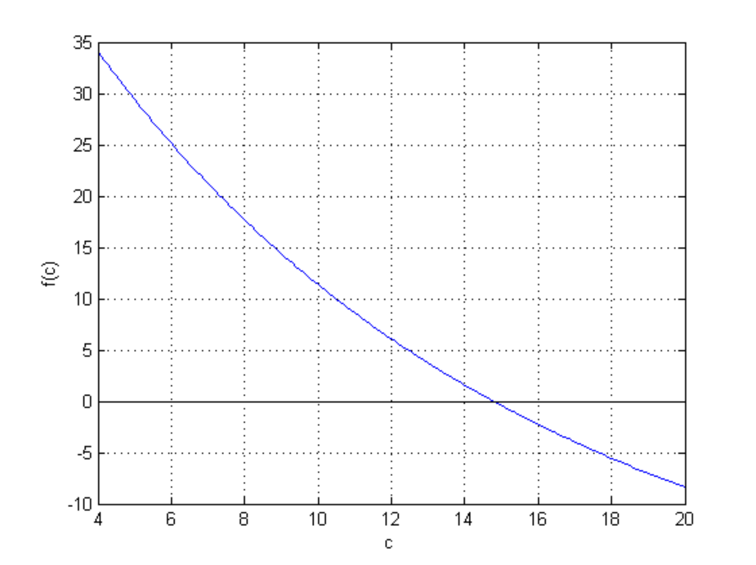
$$f(c) = \frac{9.8 \cdot 68.1}{c}\left(1 - e^{-(c/68.1)\cdot 10}\right) - 40 = 0$$

$$f(c) = \frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.14684c}\right) - 40 = 0$$

Numérica

c	$f(c)$
4	34.11378
8	17.65283
12	6.06661
16	-2.26895
20	-8.40073

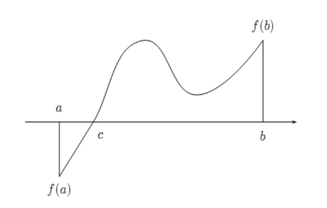
Gráfica



Existencia

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.



Observación:

Este teorema nos permite asegurar la existencia de una solución, pero no nos entrega información sobre la unicidad, consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo

Sea la función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$ con $x \in [-2, 2]$.

- f función continua pues es un polinomio.
- $f(-2) \approx -10.363$ y $f(2) \approx 20.003$.
- Se cumplen las hipótesis del teorema y se concluye que existe al menos una solución

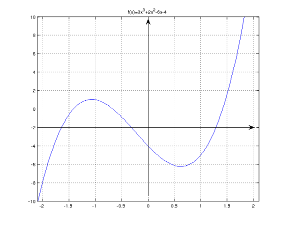


Figure: $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$

Unicidad

Teorema de Rolle

Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y que $f'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Observación

Para comprobar la unicidad usemos la contra recíproca del teorema

- Si la función sea continua y derivable.
- Si $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
- Entonces $f(x_1) \neq f(\bar{x})$ para cualquier $x_1 \in [a,\ b]$
- En particular $\nexists\ x_1 \neq \bar{x}$ tal que $f(x_1) = 0$.

Ejemplo

- La función $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$ tiene varias raíces en el intervalo $[-2,\ 2]$.
- Su derivada $f'(x) = 9x^2 + 4x - 6$ tiene ceros $\bar{x} = \frac{-2\pm\sqrt{58}}{9}$ que es aproximadamente $\bar{x_1} = 0.6239$ y $\bar{x_2} = -1.0684$.
- Ambos valores pertenecen al intervalo $[-2, 2]$ por lo cual si queremos garantizar la unicidad necesitamos disminuir el intervalo de manera tal que se siga cumpliendo el teorema de Bolzano, pero que la derivada sea distinta de cero.
- Por ejemplo, $[-2,\ -1.5]$ o $[-0.5,\ 0.5]$ o $[1,\ 2]$.

Observación

Notemos que ambos teoremas son sólo condiciones suficientes, es decir, si no se satisfacen no quiere decir que no exista raíz o que está no sea única.

Ejercicios

1) Demuestre que la función $f(x) = x - 0.8 - 0.2\sin(x) = 0$ tiene un único cero en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Demuestre que la función $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - x^3$ tiene una raíz real única en $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$.

3) Compruebe que la función $p(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$ no cumple el teorema de bolzano en el intervalo $[0, 1]$, sin embargo $\bar{x} = 0.12132$ cumple que $p(\bar{x}) \approx 0$.

4) Demuestre que la función $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ tiene una única solución en el intervalo $[-2,\ 2]$

5) Demostrar que la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + k$ cruza el eje x exactamente una vez, cualquiera que sea el valor de la constante $k \in \mathbb{R}$.

6) Demuestre que la función $f(x) = e^x - 3x^2$ tiene 3 ceros reales.