Factorización de matrices

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez.

Conferencia 12

Conferencia 12

Operaciones elementales

$(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$, con $\lambda \neq 0$

Por ejemplo $(E_4 + 5E_2) \to (E_4)$ equivale a multiplicar a la izquierda por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

Por ejemplo $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ equivale a multiplicar a la izquierda por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Eliminación de Gauss

Dos pasos principales

- **Eliminación:** Sucesión de operaciones elementales
- **Sustitución hacia atrás:** Solución de un sistema $Ux = b$ con U triangular superior

Cantidad de Operaciones

	Eliminación	Sustitución hacia atrás	Total
M/D	$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$	$\frac{n^2-n}{2}$	$O(n^3)$
S/R	$\frac{n^3-n}{3}$	$\frac{n^2+n}{2}$	$O(n^3)$
Total	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$

Definiciones

Triangular inferior

Una matriz $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior si: $l_{ij} = 0, \forall i < j$.

Triangular superior

Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior si $u_{ij} = 0, \forall i > j$.

Ejemplos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- El resultado de la Eliminación es triangular superior.
- Las matriz correspondiente a la operación elemental $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ es triangular inferior.

Propiedades básicas

Proposición 1

- Una matriz triangular (inferior o superior) es regular si y solo si todos los elementos sobre la diagonal son distintos de cero.
- La solución de un sistema triangular superior $Ux = b$ con $det(U) \neq 0$ (**Sustitución hacia atrás**) requiere $O(n^2)$ operaciones aritméticas.
- La solución de un sistema triangular inferior $Lx = c$ con $det(L) \neq 0$ (**Sustitución hacia adelante**) requiere $O(n^2)$ operaciones aritméticas.

Producto de matrices triangulares

Proposición 2

El producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores) resulta en una matriz triangular superior (inferior). Si además, ambas matrices tienen el valor uno en toda la diagonal, entonces la matriz producto también.

Explicación

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

Hay dos métodos para calcular la inversa de una matriz

- Denotemos por $cof(A)$ la matriz de los cofactores de la matriz A definida por $cof(A) = (\mathcal{A}_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$, es decir, el elemento (i,j) de $cof(A)$ es el cofactor del elemento a_{ij} de A.

El primer método para calcular la inversa de A es entonces:

$$A^{-1} = \frac{cof(A)^{\intercal}}{\det(A)}.$$

- El segundo método para calcular la inversa consiste en adjuntar a la matriz A la matriz identidad I del mismo orden:

$$A \to [A \quad I]$$

y efectuando transformaciones elementales, transformar la matriz A en la identidad.

Cálculo de la inversa(A través de cofactores)

Calculemos los primeros cofactores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Calculemos $\mathcal{A}_{11}$: $\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Calculemos $\mathcal{A}_{12}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Calculemos $\mathcal{A}_{13}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Cálculo de la inversa(A través de cofactores)

Calculemos los primeros cofactores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Calculemos $\mathcal{A}_{11}$: $\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Calculemos $\mathcal{A}_{12}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Calculemos $\mathcal{A}_{13}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Cálculo de la inversa(A través de cofactores)

Calculemos los primeros cofactores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Calculemos $\mathcal{A}_{11}$: $\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Calculemos $\mathcal{A}_{12}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Calculemos $\mathcal{A}_{13}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Cálculo de la inversa(A través de cofactores)

Calculemos los primeros cofactores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Calculemos $\mathcal{A}_{11}$: $\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Calculemos $\mathcal{A}_{12}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Calculemos $\mathcal{A}_{13}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Cálculo de la inversa(A través de cofactores)

Calculemos los primeros cofactores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Calculemos $\mathcal{A}_{11}$: $\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

Calculemos $\mathcal{A}_{12}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Calculemos $\mathcal{A}_{13}$: $\mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Así la matriz de cofactores de B

$$cof(B_1) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad det(B_1) = 1 - 4 + 2 = -1 \neq 0$$

Así la matriz inversa de B

$$B_1^{-1} = \frac{cof(B_1)^T}{det(B_1)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

Inversa de una matriz triangular

Proposición 3

La matriz inversa de una matriz regular y triangular superior (inferior) también es triangular superior (inferior).

Explicación y ejemplo

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & \bigstar & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ & & \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \dashrightarrow det \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Motivación

Menos operaciones

Si una matriz se factoriza como $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces el sistema

$$Ax = b$$

puede resolverse haciendo una sustitución hacia adelante

$$Ly = b$$

y luego una hacia atrás:

$$Ux = y$$

utilizando en total $O(n^2)$ operaciones.

Existencia

Eliminación sin intercambio de filas

Supongamos que al aplicar el algoritmo de Eliminación al sistema $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, no se intercambian filas, entonces existen $M_1, \ldots, M_{n-1}$ matrices tales que

$$K \cdot A = U, \quad K = M_{n-1} \cdots M_1$$

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \ldots M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -m_{n-1,1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 4

Si el algoritmo de Eliminación aplicado a $Ax = b$ culmina sin intercambio de filas, entonces existen matrices regulares K, L (ambas triangular inferior) y U (triangular superior) tales que:

$$K \cdot A = U \quad \wedge \quad L = K^{-1} \quad \wedge \quad A = L \cdot U$$

Estructura de L

Observación

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -m_{n-1,1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Doolittle

Teorema

Si el algoritmo de Eliminación aplicado a $Ax = b$ culmina sin intercambio de filas, entonces A puede factorizarse $A = LU$, donde U es triangular superior y L es triangular inferior y:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -3 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 4 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Algoritmo de Eliminación

$(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$; $(E_3 - 3E_1) \to (E_3)$; $(E_4 - (-1)E_1) \to (E_4)$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$(E_3 - 4E_2) \to (E_3)$; $(E_4 - (-3)E_2) \to (E_4)$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

Factorización LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

Solución utilizando factorización

Sistema a resolver

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución utilizando factorización

Otro sistema a resolver

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 14 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & -7 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & ? \\ 0 & -1 & -1 & -5 & ? \\ 0 & 0 & 3 & 13 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -13 & ? \end{array}\right]$$

$Ly = b$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{array}\right] \rightsquigarrow y = \left[\begin{array}{r} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{array}\right]$$

$Ux = y$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{array}\right] \rightsquigarrow x = \left[\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 12 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Eliminación

$(E_2 - (1/3)E_1) \to (E_2);\ (E_3 - (2/3)E_1) \to (E_3)$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & -4/3 & -7/3 \end{bmatrix}$$

$(E_3 - (4/7)E_2) \to (E_3);$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & -4/3 & -7/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Factorización LU

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución utilizando factorización

Sistema a resolver

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Factorización LU

Pseudocódigo

DATOS: $A = [aij], 1 \le i, j \le n$: Matriz
Diagonales $l_{11} = \ldots = l_{nn} = 1$ ó $u_{11} = \ldots = u_{nn} = 1$
RESULT: $l_{ij}, i \ge j \ge n$, $u_{ij}, j \ge i \ge n$ ó reporte de no existencia

PASO 1: Seleccionar l_{11} y u_{11} con $l_{11}u_{11} = a_{11}$
si $l_{11}u_{11} = 0$ STOP("No hay factorización LU"),
PASO 2: Para $j = 2 : n$ tomar $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$; $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$
PASO 3: Para $i = 2 : n - 1$ hacer los pasos 4 y 5
PASO 4: Seleccionar l_{ii} y u_{ii} con $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$
si $l_{ii}u_{ii} = 0$ STOP("No hay factorización LU"),
PASO 5: Para $j = i + 1 : n$ tomar
$u_{ij} = [a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}]/l_{ii}$; $l_{ji} = [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}]/u_{ii}$
PASO 6: Seleccionar l_{nn} y u_{nn} con $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$
PASO 7: STOP($l_{ij}, i \ge j \ge n$, $u_{ij}, j \ge i \ge n$)

Ejercicio

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 - x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 7 \end{aligned}$$

1) Encuentre la descomposición LU de la matriz A
2) Encuentre la solución del sistema de ecuaciones.
3) Usando la descomposición encuentre la matriz inversa de A