PROBLEMA RESUELTO 2

Una esfera de radio R tiene una densidad de carga $\rho = \frac{\alpha}{r}$ donde α es una constante y r es la distancia al centro de la esfera. Calcule el campo eléctrico como función de r para:

a) Puntos interiores a la esfera

b) Puntos exteriores a la esfera

Solución

La densidad volumétrica de carga se define como $\rho = \frac{dq}{dV}$, donde q significa carga eléctrica y V es volumen. A partir de tal definición puede escribirse:

$$dq = \rho dV$$

$$dq = \rho\left[4\pi r^2 dr\right], \qquad (1)$$

$$pero\ \rho = \frac{\alpha}{r}; entonces$$

$$dq = 4\pi\alpha\, r\, dr$$

a) r < R

En este caso (figura 26), como la superficie gaussiana está dentro de la esfera, la carga está dada por

$$q = \int_0^r dq$$

$$= \int_0^r 4\pi\alpha\, r\, dr$$

$$= 4\pi\alpha \int_0^r r\, dr$$

$$= 4\pi\alpha \frac{r^2}{2}\Big]_0^r$$

$$q = 2\pi\alpha r^2 \qquad (2)$$

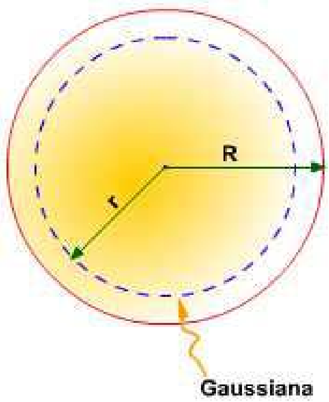

Fig.26

Por la ley de Gauss, se tiene

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$$

Con q igual a la carga encerrada por la superficie gaussiana. Como el campo E es constante en todos los puntos de la superficie gaussiana, por la simetría, entonces,

$$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q$$
$$= 2\pi\alpha r^2$$

y despejando,

$$E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}$$

b) r > R

Para todos los puntos fuera de la esfera r > R (Fig. 27), y la carga total de la esfera se obtiene integrando (1)

$$q = 4\pi\alpha\int_0^R r\,dr,$$

luego,

$$q = 2\pi\alpha R^2, \qquad (3)$$

Aplicando la ley de Gauss :

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q$$

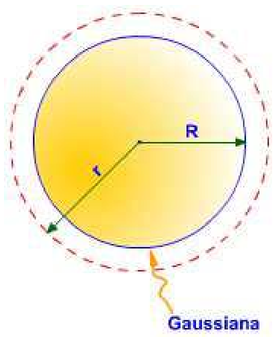

Fig. 27

Puesto que el campo eléctrico fuera de la esfera solo depende de r, es radial (y en consecuencia es perpendicular a cualquier superficie esférica centrada en el centro de la esfera) y para un valor determinado de r la magnitud de $\vec{E}$ permanece constante,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q\,,$$

luego

$$\varepsilon_0 E 4\pi r^2 = q \qquad (4)$$

Reemplazando en (4) la expresión de q dada por (3), y resolviendo para *E*:

$$E = \frac{\alpha R^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$