1. Ejercicios: derivadas

1. Hallar derivada de las funciones que se indica:
   a) $f(x) = 4 - ax^2$. Resp. $f'(x) = -2ax$
   b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Resp. $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
   c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$. Resp. $f'(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$
   d) $f(x) = \frac{a-x}{a+x}$. Resp. $f'(x) = -\frac{2a}{(a-x)^2}$
   e) $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$. Resp. $f'(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$
   f) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$. Resp. $f'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$
   g) $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$. Resp. $f'(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$
2. Derivar implícitamente:
   a) $3x - 2y + 4 = 2x^2 + 3y - 7x$. Resp. $y' = 2 - \frac{4x}{5}$
   b) $x^2 + y^2 - 16 = 0$. Resp. $y' = -\frac{y}{x}$
   c) $x^2 - 2xy + y^2 = x$. Resp $y' = \frac{1+2(y-x)}{2(y-x)}$
3. Verificar el valor de las siguientes derivadas:
   a) $y = arctg\left(\frac{\sqrt{1-cosx}}{\sqrt{1+cosx}}\right) \Longrightarrow y' = \frac{1}{2}$
   b) $y = 2x\, arctg(2x) - \ln\sqrt{1+4x^2} \Longrightarrow y' = 2arctg(2x)$
   c) $y = arcsenx + arcsen\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow y' = 0$
   d) $y = x^2 arctg\frac{a}{x} + a^2 arcctg\frac{x}{a} + ax \Longrightarrow y' = 2xarctg\frac{a}{x}$
4. Calcular usando derivación logarítmica:
   a) $f(x) = (x+1)^x + (e^x)^x$ | *b)* $f(x) = (x)^{e^x}$
5. Determinar la pendiente de las siguientes curvas en sus intersecciones con los ejes coordenados:
   a) $y = \ln\frac{x^2-4x+7}{4}$ | *b)* $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
6. Determinar intervalos de concavidad, puntos de inflexión y graficarlas:
   a) $y = e^{-x^2}$
   b) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$
   c) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$
   d) $y = \frac{x^3}{1-x}$
7. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva el punto dado:
   a) $x = cos(x^2y) + 3y^2 - 4$ en $P(0, 1)$
   b) $18y = (x^3 + y)^2$ en $P(2, 8)$
   c) $9x^2 + 4y^2 = 36$ en $P(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$
8. Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión. Graficar:
   a) $y = -x^3 + 4x - 1$
   b) $y = 2x^4 - x^2 - 4$
   c) $y = \frac{\ln x}{x}$
   d) $y = x \ln x$
9. trazar la gráfica de la función que satisface lo siguiente:
   a) la función es discontinua en $x = 3$
   b) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$
   c) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (3, \infty)$
   d) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$
   e) $f''(x) < 0$ en $(-1, 3)$
   f) $f(0) = f(2) = 0$ y $f(1) = 2$
10. Verificar por reglas de L'Hopital:
    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arcsenx - arctgx}{arccosx - arcctgx} = -1$
    b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \dfrac{1}{a}$
    c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(1+\sqrt{x})} = 4$
11. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto $x = 2$:
    $$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$$
12. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto $x = 1$:
    $$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le 1 \\ 2x-2, & x > 1 \end{cases}$$
13. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto $x = 1$:
    $$f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x \le 2 \\ 2x-2, & x > 2 \end{cases}$$
14. Estudiar la derivabilidad de la función
    $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x^2+2x, & x > 0 \end{cases}$$
15. Hallar la primera y la segunda derivada de la funcion $f(x) = x\,|x|$
16. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 6|$
17. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto $x = 1$:
    $$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le 1 \\ 2x-2, & x > 1 \end{cases}$$
18. Hallar a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en $x = 1$:
    $$f(x) = \begin{cases} ax-2, & x \le 1 \\ 3x-b, & x > 1 \end{cases}$$
19. Continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 1| + 2|x - 1|$. Resp. Siempre continua. No derivable en $x \pm 1$
20. Dadas las funciones $f(x) = (x+1)^2$ y $g(x) = x^2$. Calcular:
    a) $(f \circ g)'(x)$ | *b)* $(g \circ f)'(x)$

21. Hallar la fórmula de la derivada enésima de la función $f(x) = \dfrac{10}{(x-5)^2}$. Ayuda: toma $f(x) = 10(x-5)^{-2}$

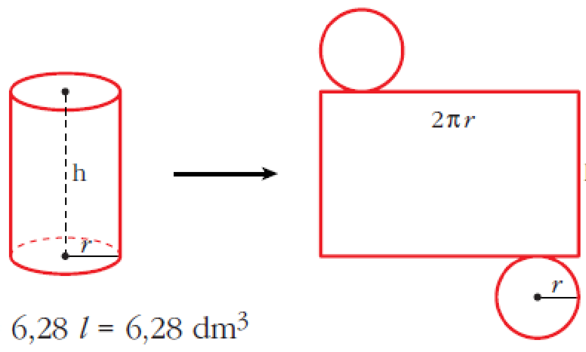
22. Hallar la primera derivada de la función $y = f(x)$, que está definida implícitamente por la ecuación

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{y^2}{x^3} = \frac{5}{2}$$

Resp. $y' = \frac{3y}{2x}$

Aplicaciones de la derivada

1. Hallar los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que están más próximos del punto $(0, 2)$.
2. Halla todos los puntos críticos y de inflexión de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Si te queda tiempo grafica.
3. Halla todos los puntos críticos y de inflexión de la función $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$. Si te queda tiempo grafica.
4. Estudia la concavidad de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
5. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima. Resp $x = 5$
6. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima. Resp. cada cateto mide 5
7. Halla, entre todos los rectángulos de perímetro 12, el que tiene la menor diagonal. Resp un cuadrado de lado 3.
8. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata. Resp. El cilindro tendrá radio 1 y altura 2.



V = 6,28 l = 6,28 dm^3

9. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$. Resp. $y = 2x$
10. Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$. Resp. $y = -2x + 8$
11. Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:
    a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$. Resp. punto de inflexión en $(1, 29)$.
    b) $y = \frac{1}{x^2+1}$. Resp máximo en $(0, 1)$, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ y $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$ puntos de inflexión.
12. Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:
    a) $y = x^3 - 3x + 4$. Resp. convexa en $(-\infty, 0)$, cóncava en $(0, \infty)$, punto de inflexión $(0, 4)$
    b) $y = x^4 - 6x^2$. Resp. cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, convexa en $(-1, 1)$, puntos de inflexión $(-1, -5)$ y $(1, -5)$
    c) $y = (x-2)^4$. Resp. cóncava sin puntos de inflexión
    d) $y = x\,e^x$. Resp. convexa en $(-\infty, -2)$, cóncava en $(-2, \infty)$, punto de inflexión $(-2, -\frac{2}{e^2})$
    e) $y = \frac{2-x}{x+1}$. Resp. convexa en $(-\infty, -1)$, cóncava en $(-1, \infty)$, sin puntos de inflexión
    f) $y = \ln(x+1)$. Resp. convexa en $(-1, \infty)$
13. Dibujar aproximadamente la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 1}$, indicando: monotonía, extremos y asíntotas.
14. Estudia y representa la función $\dfrac{3-x}{x^2-1}$
15. Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Resp. $(3, -3)$ es el punto de tangencia.
16. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$. Resp. $y = -x^2 + 6x - 7$
17. La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c. Resp. $a = -6$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{31}{3}$
18. De la función $f(x) = ax^3 + bx$ se sabe que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Hallar a y b. Resp. $a = -2$, $b = 3$
19. De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que tiene un mínimo en $x = 2$ y que su gráfica pasa por el punto $(2, 2)$. Hallar a y b. Resp. $a = 4$, $b = 6$
20. Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto $(-2, 1)$ y presente un mínimo en $x = -3$. Resp. $p = 6$ y $q = 9$
21. Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$. Resp. $a = 6$, $b = 0$, $c = -6$
22. Se sabe que el rendimiento, r en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por

$$r(t) = 300t(1-t), \text{ siendo } 0 \leq t \leq 1, \; t \text{ en horas}$$

    a) Explica cuando aumenta y cuando disminuye el rendimiento. Resp. aumenta en $[0, \frac{1}{2})$ y disminuye en $(\frac{1}{2}, 1]$
    b) ¿Cuándo se anula? Resp. en $t = 0$ y $t = 1$
    c) ¿Cuándo es máximo? Resp. en $\frac{1}{2}$
23. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de pesos viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de pesos, por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,4x + 3,5$$

    a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan. Resp. 200.000
    b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?. Resp. 43500

24. Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de dólares, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que éste llevaba en el mercado por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4, & 0 \leq t \leq 2 \\ 25 - \frac{5t}{2}, & 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$. Resp. creciente en $0 < t < 2$ y decreciente en $2 < t < 8$

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo? Resp. 20

25. La función $f(x) = \frac{60x}{x^9+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? Resp en $x = 3$ años.

c) ¿Cuál es ese beneficio? Resp. El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

d) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento? Resp. No perderá dinero.

26. La efectividad de un comercial en televisión depende de cuantas veces lo ve un espectador. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad determinó que la fórmula para determinar la efectividad E es,

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

donde n es el número de veces que un espectador ve un cierto comercial.

a) Para que éste tenga una efectividad máxima, ¿cuántas veces debería verlo un espectador? Resp. 30 veces.

b) ¿Cuál es la máxima efectividad que puede lograr un comercial? Resp. 10

27. Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$. Resp. máximo relativo en $(0, 4)$. No tiene máximo absoluto, mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el minimo tambien es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

28. La función $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c. Resp. $a = -3$, $b = 3$, $c = 0$

29. En un laboratorio de investigaciones nucleares, cierto científico encontró que la función que describe la posición de una determinada partícula subatómica, que se desplaza sobre una recta es

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

Usando la derivada halla su gráfica y describe todas sus características (monotonía, concavidad, puntos de inflexión, máximos y mínimos). Resp. $t = 2$, $t = 6$ puntos críticos. El punto $(4, -4)$ es de inflexión

Más Problemas

1. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(2, 4)$.

2. Demuestre que si $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x) = f\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 31 = 0$, en el punto $(-2, 3)$. Sol: $y = \frac{7x}{10} + \frac{22}{5}$

4. La ecuación $sin(x + y) = xsiny$ define implícitamente y como una función de x. Encuentre y' en el punto $(0, 0)$. Sol: -1

5. Encuentre y' para $y = \ln(2x^3) + sin(1 - x) - xe^{3x}$. Sol: $y' = 3x - cos(1 - x) - e^{3x} - 3xe^{3x}$

6. Sea $f(2) = -3,\ f'(x) = \sqrt{x^2 + 5},\ g(x) = x^2 \cdot f\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Hallar $g'(2)$. Sol: -24.

7. Verificar que la función $y = sen(\ln x) + cos(\ln x)$ satisface la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$

8. Se desea cercar un terreno rectangular de área 10000 m^2, sabiendo que uno de sus lados ya está cubierto por un río. Hallar las dimensiones del terreno, de manera que el costo del cercado sea mínimo. Sol: Ancho= $50\sqrt{2}$, Largo= $100\sqrt{2}$

9. La reacción a dos drogas como función del tiempo (medido en horas) está dada por:

$$R_1(t) = t \cdot e^{-t}, \quad R_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}$$

Debido a las características de cierta enfermedad, se optaría por aquella droga que tenga una reacción máxima mayor. ¿Qué droga se debe elegir? Sol: La droga 1.

10. Dada la función $y = x \cdot f(\ln x - x)$. Hallar la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ si $f(-1) = 2$.

11. Se construye un contenedor de modo que su capacidad sea de 288 pies cúbicos. El contenedor tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales. Si la base y la tapa del contenedor están hechas de acero y las caras laterales de concreto. ¿Cuáles serán las dimensiones del contenedor para que el costo de construcción sea mínimo sabiendo que el concreto tiene un costo de $US 3 por pie cuadrado y el acero un costo de $US 4 por pie cuadrado? Sol: Debe ser de $6 \times 6 \times 8$ pies

12. Para la función definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, encuentre los valores críticos y clasifíquelos en máximos o mínimos.

13. Encuentre y' a partir de $y^2 + y = \ln x$

14. El siguiente límite representa la derivada de una función f en un punto x

$$\lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h}$$

Deduzca $f(x)$.

15. Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de t años, N miles de personas adultas recibiría beneficios directos, donde

$$N = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t, \quad 0 \leq t \leq 8$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

16. Suponga que t semanas después del brote de una epidemia,

$$f(t) = \frac{2000}{1 + 3e^{-0,8t}}$$

personas la adquieren. ¿Cuál es la razón de cambio del crecimiento de f al finalizar la semana uno?

17. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$

    a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

    b) Si $g(x) = senx$, calcule $(f \circ g)'$.