PROBLEMA RESUELTO 4

Una concha metálica hueca tiene radio interior a y radio exterior b, como muestra la figura 29. Hallar el campo eléctrico y el potencial en las regiones I, II y III sabiendo que hay una carga q en el centro.

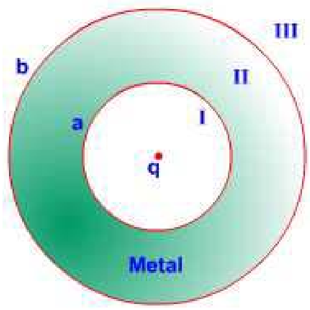

Fig. 29

En la región II, por ser metálica, el campo electrostático es cero, y en consecuencia el potencial es constante:

$$E_{II} = 0, \qquad (1)$$
$$V_{II} = constante$$

Para hallar E_I tomamos como superficie gaussiana una esfera concéntrica de radio r<a. Como $\vec{E}_I$ se espera que tenga dirección radial, entonces el flujo de $\vec{E}_I$ a través de la superficie gaussiana es $E_I\, 4\pi r^2$, y la ley de Gauss dice que $E_I\, 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, de donde:

$$\vec{E}_I = \frac{q}{4\pi\, r^2 \varepsilon_0}\hat{u}_r, \qquad (2)$$

$$Sabemos\ que\ dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}, es\ decir$$

$$\int_{V_I(a)}^{V_I(r)} dV_I = -\int_a^r E_I\, dr, de\ donde$$

$$V_I(r) - V_I(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}, \qquad (3)$$

Podemos fácilmente hallar la carga eléctrica que se acumula en la superficie interior del metal, la que tiene radio a (Fig. 30). Imaginamos el volumen comprendido entre dos esferas, una de radio r < a y otra de radio K tal que a < K < b, como muestran los trazos punteados en el dibujo. Calcularemos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie de este volumen mencionado; utilizando (1) y (2) vemos que el flujo es $-E_I\, 4\pi\, r^2$ y la ley de Gauss dice que

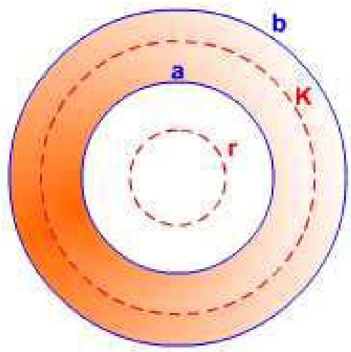

Fig. 30

$$-E_I\, 4\pi\, r^2 = \frac{carga\ acumulada\ en\ la\ pared\ interior\ del\ metal}{\varepsilon_0}$$

y utilizando (2) vemos que la carga acumulada es $-E_I\,4\pi\,r^2\varepsilon_0 = -q$. Una carga igual y de signo contrario se acumula en la otra pared:

En la pared exterior del metal (la que tiene radio b) se acumula una carga
q, (4)

Finalmente utilizaremos la ley de Gauss para hallar E_{III}. Imaginamos el volumen comprendido entre dos esferas, una de radio r > b y otra de radio K tal que a < K < b, como muestran los trazos punteados en la figura 31. Calcularemos el flujo del campo eléctrico a través de la superficie de este volumen mencionado, utilizando (1) vemos que el flujo es $E_{III}\,4\pi r^2$ y la ley de Gauss dice:

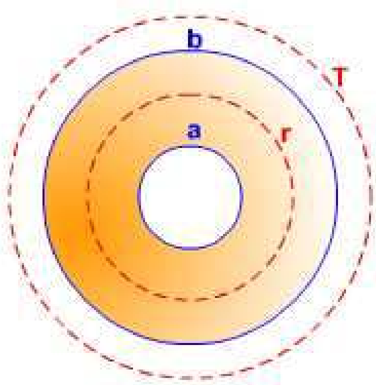

Fig.31

$$E_{III}\,4\pi\,r^2 = \frac{carga\,acumulada\,en\,la\,pared\,exterior\,del\,metal}{\varepsilon_0}$$

Y (4) permite entonces concluir que

$$E_{III} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ , \qquad (5);$$

e integrando como en (3):

$$V_{III}(r) - V_{III}(\infty) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (6)$$

Las ecuaciones (2), (3), (4), (5), (6) serían lo que se obtendría si no hubiera metal.