TEOREMA DE GAUSS.

15. Hallar el flujo del campo $\overrightarrow{a} = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ a través de la superficie

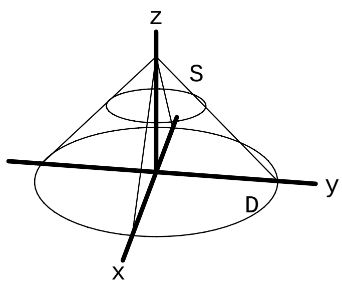
$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1.$$

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Gauss.

Solución

Llamaremos S a la superficie dada y D a su proyección sobre el plano XY (ver figura).



A partir de la fórmula explícita $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, obtenemos el vector normal exterior a la superficie:

$$\overrightarrow{n} = \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\Big) = \Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big).$$

Como el flujo del campo corresponde a la integral de superficie, por definición tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_S \overrightarrow{a}\, dS &= \iint_D (x^2, y^2, (1-\sqrt{x^2+y^2})^2)\cdot\overrightarrow{n}\, dxdy \\ &= \iint_D \Big[\frac{-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + (1-\sqrt{x^2+y^2})^2\Big]\, dxdy.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que D es el círculo $x^2+y^2 \le 1$, resolveremos la integral mediante un cambio a coordenadas polares. Así,

$$\iint_S \overrightarrow{a}\, dS = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} u\cdot\Big[\frac{-u^3\cos^3 v}{u} - \frac{u^3 \operatorname{sen}^3 v}{u} + (1-u)^2\Big]\, dv = \frac{\pi}{6}.$$

Para poder aplicar el teorema de Gauss, la superficie debe ser cerrada. Por lo tanto, consideraremos la superficie formada por la unión de S y D y llamamos V al sólido que limita dicha superficie. De este modo,

$$\iint_{S\cup D} \overrightarrow{a}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{a}\, dxdydz,$$

con lo que

$$\iint_S \vec{a}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz - \iint_D \vec{a}\, dS.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz &= \iint_D dxdy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} (2x+2y+2z)\, dz \\ &= \iint_D [(2x+2y)(1-\sqrt{x^2+y^2}) + (1-\sqrt{x^2+y^2})^2]\, dxdy.\end{aligned}$$

Si hacemos en esta última integral un cambio a coordenadas polares, resulta:

$$I = \int_0^1 u\, du \int_0^{2\pi} [(2u\cos v + 2u \operatorname{sen} v)(1-u) + (1-u)^2]\, dv = \frac{\pi}{6}.$$

Por último, teniendo en cuenta que el vector $\vec{n} = (0,0,-1)$ es normal unitario exterior a la superficie D, resulta:

$$\iint_D \vec{a}\, dS = \iint_D (x^2, y^2, 0) \cdot (0,0,-1)\, dxdy = 0.$$

En definitiva,

$$\iint_S \vec{a}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}\, dxdydz - \iint_D \vec{a}\, dS = \frac{\pi}{6}.$$

---

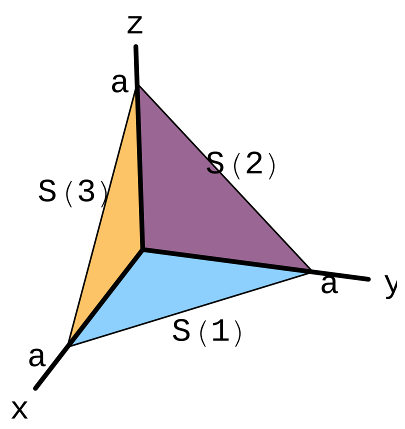
16. Comprobar la fórmula de Gauss para calcular

$$\iint_S x^3\, dydz + y^3\, dxdz + z^3\, dxdy,$$

donde S es la superficie exterior de una pirámide formada por los planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Solución

La superficie dada está compuesta por las cuatro caras del tetraedro de la figura, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ (donde S_4, que es la cara no contenida en ningún plano coordenado, no se muestra para mayor claridad del dibujo).



Si aplicamos el teorema de Gauss, resulta:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F\, dxdydz = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\, dxdydz.$$

Teniendo en cuenta que la proyección del sólido V sobre el plano XY es el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$, entonces la integral triple se descompone de la forma siguiente:

$$\iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\, dxdydz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\, dxdydz.$$

Al resolver las sucesivas integrales llegamos al resultado $I = \dfrac{3a^5}{20}$. Para resolver la integral directamente, sin aplicar la fórmula de Gauss, debemos descomponerla en suma de integrales sobre cada una de las caras que limitan la pirámide. Así pues:

- La superficie S_1 se define por la ecuación $z = 0$ y su vector normal exterior es $\overrightarrow{n_1} = (0, 0, -1)$. Por tanto,

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{F}\, dS = \iint_{S_1} (x^3, y^3, 0) \cdot (0, 0, -1)\, dS = 0.$$

- La superficie S_2 viene dada por la ecuación $x = 0$ y el vector normal exterior es $\overrightarrow{n_2} = (-1, 0, 0)$; entonces

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{F}\, dS = \iint_{S_2} (0, y^3, z^3) \cdot (-1, 0, 0)\, dS = 0.$$

- La superficie S_3 viene definida por $y = 0$, con vector normal exterior $\overrightarrow{n_3} = (0, -1, 0)$, de donde

$$\iint_{S_3} \overrightarrow{F}\, dS = \iint_{S_3} (x^3, 0, z^3) \cdot (0, -1, 0)\, dS = 0.$$

- La superficie S_4 se define por la ecuación $z = a - x - y$, cuando $(x, y) \in S_1$, y tiene por vector normal exterior a $\overrightarrow{n_4} = (1, 1, 1)$. Por definición,

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \overrightarrow{F}\, dS &= \iint_{S_1} (x^3, y^3, (a - x - y)^3) \cdot (1, 1, 1)\, dS \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} [x^3 + y^3 + (a - x - y)^3]\, dy = \frac{3a^5}{20}. \end{aligned}$$

Sumando los valores correspondientes a cada superficie llegamos al mismo resultado obtenido con la fórmula de Gauss.

---

17. *Calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{a} = 4xz\,\overrightarrow{i} + xyz\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$ a través de la cara exterior de la superficie*

$$S : x^2 + y^2 = z^2 \;\; (0 \le z \le 4).$$

a) Directamente.

b) *Aplicando el teorema de Gauss.*

Solución

Parametrizamos la superficie S mediante la fórmula explícita $z = \sqrt{x^2+y^2}$, con $(x,y) \in D$, donde $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 16\}$. De este modo, un vector normal exterior a S viene dado por

$$\overrightarrow{n} = \Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big) = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\Big).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F &= \iint_S \overrightarrow{a}\, dS \\ &= \iint_D (4x\sqrt{x^2+y^2}, xy\sqrt{x^2+y^2}, 3\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\Big)\, dxdy \\ &= \iint_D (4x^2+xy^2-3\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy. \end{aligned}$$

Resolveremos esta integral mediante un cambio a coordenadas polares, $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $(0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$. De este modo,

$$F = \int_0^{2\pi} dv \int_0^4 (4u^3\cos^2 v + u^4 \cos v \operatorname{sen}^2 v - 3u^2)\, du = 128\pi.$$

Para aplicar el teorema de Gauss, consideramos la superficie cerrada $S \cup S'$, donde S' es la "tapa"del cono, es decir, el círculo $x^2+y^2 \leq 16$ contenido en el plano $z = 4$. De este modo,

$$\begin{aligned} \iint_{S\cup S'} \overrightarrow{a}\, dS &= \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{a}\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (4z+xz+3)\, dz \\ &= \iint_D \Big[32 - 2(x^2+y^2) + 8x - \frac{x(x^2+y^2)}{2} + 12 - 3\sqrt{x^2+y^2}\Big]\, dxdy. \end{aligned}$$

Resolvemos esta última integral mediante un cambio a coordenadas polares, y llegamos al resultado

$$\iint_{S\cup S'} \overrightarrow{a}\, dS = 64\pi.$$

Por otra parte, como S' se define mediante la fórmula explícita $z = 4$, su vector normal exterior es $\overrightarrow{n} = (0,0,1)$, de modo que

$$\iint_{S'} \overrightarrow{a}\, dS = \iint_D (16x, 4xy, 12) \cdot (0,0,1)\, dxdy = 12 \cdot \text{área } (D) = 192\pi.$$

En definitiva,

$$\iint_S \overrightarrow{a}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{a}\, dxdydz - \iint_{S'} \overrightarrow{a}\, dS = 128\pi,$$

resultado que coincide con el obtenido de forma directa.

---

18. Sea $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(y,z,xz)$. Evaluar $\displaystyle\iint_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}$, donde Ω es el sólido $x^2+y^2\le z\le 1$.

Solución

Por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}F\,dxdydz=\iiint_{\Omega}x\,dxdydz.$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$x=u\cos v,\ y=u\operatorname{sen}v,\ z=z,$$

la región Ω se escribe como

$$0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi,\ u^2\le z\le 1.$$

La integral queda ahora:

$$\iiint_{\Omega}x\,dxdydz=\int_0^1 u^2du\int_0^{2\pi}\cos v\,dv\int_{u^2}^1 dz=0.$$