Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Estadística

Guía de Ejercicios

Profesores : A. Antequeda, Ana Calfiqueo, Mirta Moraga, Joan Molina.

1. Identifique el tipo, grado y el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   $a)$ $x' - x + 1 = 0$ $\qquad$ $b)$ $x'' + 9x = 8sen(t)$

   $c)$ $y'^2 - 2y' + y - 3x = 0$ $\qquad$ $d)$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

   $e)$ $\frac{\partial v}{\partial x} = xy$ $\qquad$ $f)$ $(x^2 + y^2)dx - 3ydy = 0$

   $g)$ $xx' - t^3 + 1 = 0$ $\qquad$ $h)$ $\left(\frac{\partial y}{\partial x^2}\right)^3 + \frac{\partial y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 - x^7 y = sen(x)$

   $i)$ $x'^2 - tx = 0$

2. Verifique si las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas.

   a) $y = \frac{sen(x)}{x}, \quad xy' + y = cos(x)$

   b) $y = \frac{C}{e^{2x}} + \frac{e^x}{3}, \quad y' + 2y - e^x = 0$

   c) $y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad yy' = x - 2x^3$

   d) $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x, \quad y' - y = e^{x+x^2}$

   e) $y = \sqrt{x^2 - Cx}, \quad (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

   f) $\begin{cases} x = cos(x) \\ y = sen(x) \end{cases}, \quad xx' + yy' = 0$

   g) $x^2 + y^2 = 4, \quad y' = \frac{-x}{y}$

   h) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}, \quad (1 + xy)y' + y^2 = 0$

   i) $x = c\,\text{sen}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \left(x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y\right) dx - xdy = 0.$

3. Verifique si las funciones dadas son la solución general de las ecuaciones diferencial correspondiente.

   a) $y = \frac{C}{cos(x)}$, $\quad y' - ytg(x) = 0$

   b) $y = x(C - ln|x|)$, $\quad (x - y)dx + xdy = 0$

   c) $x = ye^{Cy+1}$, $\quad y' = \frac{y}{x(lnx - lny)}$

4. Para $y' - xy^{1/2} = 0$ muestre que

   a) $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$ es la solución general.

   b) Si $C = 0$ entonces $y = \frac{x^4}{16}$ es solución particular.

   c) Explicar por qué $y = 0$ es solución singular.

5. ¿Para qué valores de $m \in \mathbb{R}$, la función $y = e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$?

6. Determine a y b de forma que:

   a) $y(x) = ae^{2x} + be^{x} + 2sen(x)$ satisfaga la ecuación con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

   b) $y(x) = asen(x) + bcos(x) + 1$ satisfaga la ecuación con condiciones iniciales $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

7. Encuentre las ecuaciones diferenciales que modelan las curvas siguientes

   a) $y^2 - 2Cx - C^2 = 0$
   b) $y = Aarcsen(x + A)$
   c) $x^2 + y^2 = C$
   d) $y = Ae^{\frac{x}{A}}$
   e) $y = Ce^{y/x}$
   f) $x\sqrt{x^2 + y^2} = C(\sqrt{x^2 + y^2} - y)$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones por variables separables

   a) $y' + 2xy = 0$, $\quad$ (Sol. $y = Ce^{-x^2}$ con $C > 0$)

   b) $dy = ysen(x)dx$, $\quad$ (Sol. $y = Ce^{-cos(x)}$ con $C > 0$)

   c) $a\sqrt{x}y' = \sqrt{1 - y^2}$, $\quad$ (Sol. $a * \text{arcsen}(y) - 2\sqrt{x} = C$))

   d) $(1 - x^2)y' = 2y$, $\quad$ (Sol. $y = C\frac{1+x}{1-x}$ con $C > 0$)

e) $y^3y' = (y^4+1)cos(x)$, (Sol. $y^4 = Ce^{4sex(x)} - 1$ con $C > 0$)

f) $(4y + yx^4)dy - (2x + xy^2)dx = 0$, (Sol. $2ln(2+y^2) - arctg(\frac{x^2}{2}) = C$

g) $y' + y^2sen(x) = 0$, (Sol. $y = \frac{-1}{cos(x)+C}$)

h) $3e^x\mathrm{tg}(y)dx + (2-e^x)\sec^2(y)dy = 0$, (Sol. $\mathrm{tg}(y) = C(2-e^x)^3$)

i) $y' = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$, (Sol. $y = x + \ln(\frac{y+3}{x+4})^5 + C$

9. Encuentre la solución general de las ecuaciones a variables separables siguientes y luego determine la solución particular que satisface la condición inicial correspondiente.

   a) $y' = 3x^2(y+2)$; $y(4) = 8$, (Sol. $y = 10e^{x^3-64} - 2$)

   b) $xy' = y^2$; $y(3) = 5$, (Sol. $y = \frac{5}{1-5\ln(\frac{x}{3})}$)

   c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y}$; $y(1) = 7$, (Sol. $3y^2 = 2x(x^2+6) + 133$)

   d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\mathrm{sen}(1+x)}{y}$; $y(\pi-1) = 4$, (Sol. $y^2 = 4\cos(x+1) + 20$)

   e) $2y\frac{dy}{dx} = e^{x-y^2}$; $y(4) = -2$, (Sol. $y^2 = x$)

   f) $x^2y' = y - xy$; $y(-1) = -1$, (Sol. $yx = e^{-(1+1/x)}$)

   g) $y' = -3y\cot(x)$; $y(\pi/2) = 2$, (Sol. $y\mathrm{sen}^3(x) = 2$)

   h) $(3e^r + e^r\cos\theta)dr - (\mathrm{sen}\theta + e^{2r}\mathrm{sen}(\theta))d\theta = 0$; $y(\pi/2) = 0$, (Sol. $\mathrm{arctg}(e^r) = \ln(\frac{3}{3+\cos(\theta)}) + \frac{\pi}{4}$)

10. Muestre que toda ecuación de la forma $y' = f(ax+by+c)$ se reduce a variables separables con la sustitución $z = ax+by+c$. Utilizando lo anterior resuelva las siguientes ecuaciones

    a) $y' = \mathrm{sen}^2(x+2y+1)$

    b) $y' = (x+y)^2$

11. La ecuación
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy}$$
    no es separable. Compruebe que la transformación dada por $y = vx$ convierte la ecuación anterior en otra de variables separables. Resuelva la nueva ecuación y calcule la solución general de la ecuación original.

12. Una ecuación de la forma
$$\frac{dy}{dx} = \frac{yf(xy)}{xg(xy)}$$

no es separable. Sin embargo, compruebe que la transformación dada por $y = v/x$ convierte la ecuación anterior en otra separable. Aplique esta técnica para calcular la solución general de la ecuacion:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$$

13. Compruebe si las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas, si así es resuelvala.

    a) $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy}$, (Sol. $y^2 = x^2(C - x^2)$)

    b) $y' = \dfrac{3yx + 2y^2}{x^2}$, (Sol. $y = \frac{Cx^3}{1+Cx^2}$)

    c) $y' = \dfrac{xy - 3(x^2 + y^2)\arctan(y/x)}{x^2}$, (Sol. $y = x\mathrm{tg}(C/x^3)$)

    d) $x\mathrm{sen}(y/x)dy - (y\mathrm{sen}(y/x) + x)dx = 0$, (Sol. $\cos(y/x) + \ln(x) = C$)

    e) $(x + \sqrt{y^2 - xy})dy - ydx = 0$, (Sol. $2\sqrt{\dfrac{y - x}{y}} + \ln(y) = C$)

    f) $xy' = y + 2xe^{-y/x}$, (Sol. $e^{y/x} - \ln(x^2) = C$)

    g) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln(y) - \ln(x)}$

14. Una ecuación de la forma $(ax + by + c)dx + (ex + fy + g)dy = 0$, donde a, b, c, e, f y g son constantes, es una ecuación de coeficientes lineales. Analiza los siguientes casos:

    a) Si c y g son nulos.

    b) Si $a \cdot f = e \cdot b$.

    c) Si $a \cdot f \neq e \cdot b$. Demuestre que mediante la transformación $x = u + h$, $y = v + k$ (traslación de ejes),la ecuación de coeficientes lineales se transforma en otra de coeficientes homogéneos. ¿Qué condición debe satisfacerse para que lo anterior se cumpla?

15. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas:

    a) $y' = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$

    b) $(x + 4y + 2)dy - (x + y - 1)dx = 0$

    c) $(4x + 6y)dy - (2x + 3y - 1)dx = 0$

d) $y' = \dfrac{x-3y-7}{x-4}$

e) $y' = \dfrac{x-2y}{3x-6y+4}$

f) $y' = \dfrac{x-y+6}{3x-3y+4}$

g) $y' = \dfrac{3x+y-1}{6x+2y-3}$

h) $y' = \left[\dfrac{x-y+1}{x+1}\right]^2$

i) $y' = \left[\dfrac{x-y+1}{2x-2y}\right]^2$

j) $y' = \dfrac{1-xy^2}{2x^2y}$

k) $2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})dx + x^3dy = 0$

l) $(x+y+1)dx + (y-x-3)dy$

m) $(x-2y+4)dx + (2x-y+2)dy$

16. Haciendo los cambios de coordenadas $u = \dfrac{1}{2}x^2, v = \dfrac{1}{2}y^2$, resuelva la ecuación

$$(2x^2+3y^2-7)xdx - (3x^2+2y^2-8)ydy = 0.$$

17. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:
    1. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\, dx + (\cos x + x\cos y - y)\, dy = 0$ (Sol. $x \operatorname{sen} y + y\cos x - \frac{y^2}{2} = C$)
    2. $(x^3+y^3)\, dx + 3xy^2dy = 0$
    3. $(3x^2y+e^y)\, dx + (x^3+xe^y-2y)\, dy = 0$ (Sol. $x^3y + xe^y - y^2 = C$)
    4. $(ye^{xy}+4y^3)dx+(xe^{xy}+12xy^2-2y)dy = 0$, con $y(0) = 2$. (Sol $e^{xy}+4xy^3-y^2 = -3$)

18. Determine el valor de k de modo que las siguientes ecuaciones sean exactas
    1. $(y^3+kxy^4-2x)\, dx + (3xy^2+20x^2y^3)\, dy = 0$
    2. $(2x - ysen(x) + ky^4)\, dx - (20xy^3 + xsen(xy))\, dy = 0$
    3. $(6xy^3 + cos(y)) + (kx^2y^2 - xsen(y))\, dy = 0$

19. Obtenga una función $M(x,y)$ de forma que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right) = 0$$

sea exacta.

20. Determine una función $N(x,y)$ de manera que la ecuación diferencial

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x,y)dy=0$$

sea exacta.

21. Considere la ecuación diferencial

$$x^2ydx+(y^2+x^2p(x))dy=0 \tag{1}$$

Encuentre la función $p(x)$ de forma tal que la ecuación (1) sea exacta y resuelva dicha ecuación diferencial.

22. Halle la solución particular que pasa por el punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ de la ecuación

$$\left[\frac{ln(ln(y))}{x}+\frac{2}{3}xy^3+6x\right]dx+\left[\frac{ln(x)}{yln(y)}+x^2y^2+4e^{-2y}\right]dy=0$$

23. Encuentre el factor integrante $\mu(x,y)$ función de xy para resolver

$$ydx+(x-3x^2y^2)dy=0$$

24. Encuentre los valores de p y q tal que $\mu(x,y)=x^py^q$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(2y^2+4x^2y)dx+(4xy+3x^3)dy=0$$

25. Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y)=h(x+y)$ y use este resultado para encontrar la solución general de

$$(7x^3+3x^2y+4y)dx+(4x^3+x+5y)dy=0$$

26. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

    a) $2xyln(y)dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$ (Sol. $x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}=C$)

    b) $(3x^2+y)\,dx+(x^2y-x)\,dy=0$

    c) $(y^2+2xy)\,dx-x^2dy=0$ (Sol. $x+\dfrac{x^2}{y}=C$)

    d) $(x^4-x+y)\,dx-xdy=0$

27. Para las siguientes ecuaciones diferenciales encuentre un factor integrante de la forma x^ny^m y resuelva la ecuación.

a) $(2y^2 - 6xy)\,dx + (3xy - 4x^2)\,dy = 0$

b) $(12 + 5xy)\,dx + \left(6\frac{x}{y} + 2x^2\right) dy = 0$ ($\mu(x, y) = x^{-7}y^{-3}$, Sol. $-2x^{-6}y^{-3} - x^{-5}y^{-2} = C$)

c) $\frac{2y}{x}dx + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) dy = 0$

28. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + xtan\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

haciendo el cambio de variable $y = xz^n$, eligiendo un valor conveniente de n.

29. Halle la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones lineales

a) $xy' + 2y = 0$

b) $(xy + x^3 + x)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$

c) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$

d) $\frac{dr}{d\theta} + rsec(\theta) = cos(\theta)$

e) $(2ysen(x) - tan(x))\,dx + (1 - cos(x))\,dy = 0$

f) $xy' + (1 + x)\,y = e^{-x}sen(2x)$

g) $y' - y = xy^2$

h) $y^2dx + (xy - x^3)\,dy = 0$

i) $y' + \frac{y}{x} = xy^2$

j) $xy' + y = y^2Ln(x)$

k) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^5+xy}$

l) $4\,(1 + x^2)\,\frac{dy}{dx} = 2xy\,(y^4 - 1)$

m) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \;\; y(1) = \frac{1}{2}$

n) $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \;\; y(1) = 1$

ñ) $(3x^2 + 1)y' - 2xy = 6x$

o) $xsenxy' + (senx + xcosx)y = xe^x$

p) $xy' + \frac{y}{\sqrt{2x+1}} = 1 + \sqrt{2x + 1}$

q) $senxcosxy' + y = tan^2x$

r) $(1 + seny)dy + (2cosxy - tanx)dx = 0$

s) $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3e^{-x}$

t) $yy' + xy^2 - x = 0$

u) $(x^2 + 1)\sqrt{y}y' = xe^{\frac{3x}{2}} + (1 - x^2)y\sqrt{y}$

v) $xy' + \frac{y}{lnx} = \frac{x(x+lnx)}{y^2lnx}$

w) $(xy^2)' = (xy)^3(x^2+1)$

x) $2ydx + (x+4y^2)\,dy = 0$

30. Resuelva la ecuación diferencial $xy' + 3 = 4xe^{-y}$ sujeta a la condición $y(2) = 0$

31. Resuelva la ecuación diferencial

$$-sen(y)\frac{dy}{dx} + 2cos(y)cos(x) = sen^2(x)cos(x)$$

haciendo el cambio de variable $u = cos(y)$.

32. Resuelva la ecuación

$$xy'' - 3y' = 4x^2$$

(Sugerencia: Haga $u = y'$)

33. Cualquier Ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0 \qquad (2)$$

en que $a_2(x),\ a_1(x),\ a_0(x)$ son continuas en un intervalo I. se llama *ecuación de Riccati*. Sea $y_i(x)$ una solución particular de (2). Demostrar que el cambio de variables $y = y_1 + \frac{1}{z}$ reduce (2) a una ecuación *lineal* de primer orden en z.

34. Utilizar la técnica sugerida en el ejercicio anterior para hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones

a) $y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1;$ Solución particular $y = 1$

b) $y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1;$ Solución particular $y = x - 1$

c) $y' + y^2 - (1+2e^x)y + e^{2x} = 0;$ Solución particular $y = e^x$

d) $y' - (senx)^2y^2 + \frac{1}{senxcosx}y + cos^2x = 0;$ solución particular $y = cotgx$

35. Demostrar que una ecuación de Riccati de coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 + by + c = 0 \qquad (3)$$

tiene una solución de la forma $y = m,\ m$ constante, si y sólo si m es una raíz de la ecuación cuadrática $am^2 + bm + c = 0$

36. Utilizar resultado anterior, para resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ y` + y^2 + 3y + 2 = 0$ $\qquad b)\ y' + 4y^2 - 9 = 0$

$c)\ y' + y^2 - 2y + 1 = 0$ $\qquad d)\ 6y' + 6y^2 + y - 1 = 0$

37. Use el teorema de existencia y unicidad para determinar si existen soluciones únicas para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales

1. $\begin{cases} y' &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' &= \sqrt{xy} \\ y(1) &= 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' &= \frac{1}{x^2+y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' &= \frac{1}{x^2-y^2} \\ y(1) &= 2 \end{cases}$

38. Muestre que $y = \frac{1}{4}(x+c)^2$ y $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y}$. Discuta sobre la relación de estas soluciones con el teorema de existencia y unicidad.

39. Determine una región R del plano xy para la cual la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$ tenga solución única en el punto (x_0, y_0).

40. Determine los valores de a y b de forma que el problema de valor inicial tenga solucion unica.

$$\begin{cases} y' &= \frac{x}{y} \\ y(a) &= b \end{cases}$$

41. ¿ Que dice el teorema de existencia unicidad respecto a la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

42. Encuentre las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden conociendo las soluciones generales.

    a) $y = xy' + y'^2$, $y = Cx + C^2$
    b) $(xy' + y)^2 = 0$, $y(C - x) = C^2$
    c) $y^2y'^2 + y^2 = 1$, $y^2 + (x - C)^2 = 1$

43. Para las siguientes ecuaciones encuentre las soluciones singulares en caso de que existan.

    a) $(1 + y'^2)y^2 - 4yy' - 4x = 0$
    b) $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$
    c) $y'^2 - y^2 = 0$

44. Integre las siguientes ecuaciones

a) $y = y'^2 e^{y'}$

b) $y = ln(y') + sen(y')$

c) $x(1 + y'^2) = 1$

d) $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$

e) $2y = xy' + y'ln(y')$

f) $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$

g) $y = \frac{3xy'}{2} + e^{y'}$

h) $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$

45. Hallar la envolvente del haz $\phi(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - 4C = 0$

46. Compruebe que la familia de rectas $y = cx + c^2$ es solución de la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^2$. Determine un valor de k de forma que $y = kx^2$ sea una solución singular de la ecuación diferencial dada. Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la solución singular y algunas soluciones particulares.

47. Compruebe que la familia de rectas $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ es solución de la ecuación diferencial $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$. Demuestre que el cálculo $x^2 + y^2 = 1$ es una solución singular de la ecuación diferencial dada. Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la solución singular y algunas soluciones particulares.

48. Compruebe que la familia de curvas $y = \frac{1+Ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$ es solución de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$. Determine una solución singular para la ecuación diferencial. Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la solución singular y algunas soluciones particulares.

49. Encuentre la ecuación diferencial de las siguientes familias:

a) La familia de todas las circunferencias que pasan por los puntos $(0,\ 1)$ y $(-1,\ 0)$.

b) La familia $y = x^2 \cos(x + C)$.

c) La familia que cumple la condición: la parte de la normal entre $(x,\ y)$ y el eje Y queda bisectada por el eje X.

50. Halle la familia de trayectorias ortogonales a las siguientes familias:

a) $12y + x^2 = C^2,\ C > 0$

b) $x^2 + y^2 = Cy$

c) $y = x\,\mathrm{sen}(x + C)$

d) $y = \ln(\tan(x + C))$

e) $r = \dfrac{C}{1 - \cos\theta},\ C > 0$

f) Γ es la familia de todas las rectas tangentes al círculo unitario.

g) Γ es la familia de curvas que satisface la siguiente condición geométrica: la parte de la normal entre el punto $(x,\ y)$ y el eje Y tiene como punto medio la intersección con el eje X.

51. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas que satisface la condición: La porción de la tangente limitada por los ejes tiene como punto central al punto de tangencia.

52. Encontrar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen.

53. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

54. Halle la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación $y = \frac{Cx}{1x+}$

55. Determine la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$

56. Encuentre el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = Ce^y$ que pasa por el punto $(0, 5)$.

57. Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de dólares hace un año, y ahora tiene dos millones, ¿Cuánto tendrá dentro de seis meses?; ¿ dentro de un año?

58. Cuando $t = 0$, había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el $3\,\%$. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 2 horas.

59. Un cultivo bacteriano tiene una densidad de población de 100 mil organismos por pulgada cuadrada. Se observó que un cultivo que abarcaba un área de una pulgada cuadrada a las 10:00 a.m. del día martes ha aumentado a 3 pulgadas cuadradas para el mediodía del jueves siguiente. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo a las 3:00 p. m. del domingo siguiente suponiendo que la densidad de población cambia a una tasa proporcional a sí misma? ¿Cuántas bacterias habrá el lunes a las 4:00 P.M.?

60. Se sabe que un cierto material radiactivo decae con una rapidez que es proporcional a la cantidad presente en cada instante. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de 100 gramos y se observa que 20 años después, su masa es de 80 gramos. Determine una expresión para la masa del material en función del tiempo. Calcule la semivida del material y la cantidad de él que quedará después de 40 años.

61. Suponga que un elemento radioactivo A se descompone en un segundo elemento radioactivo B y este a su vez se descompone en un tercer elemento radioactivo C. Si la

cantidad de A presente inicialmente es x_0 y las cantidades de A y B son x e y respectivamente en el instante t y si $k1$ y $k2$ son las constantes de rapidez de descomposición, hallar y en función de t.

62. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C_14. Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del C_14 es 5600 años.

63. Un cuerpo se calienta a $110°$ C y se expone al aire libre a una temperatura de $10°$ C. Si al cabo de una hora su temperatura es de $60°$ C. ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a $30°$ C?

64. Si en un análisis de una botella de leche se encuentran 500 organismos (bacterias), un día después de haber sido embotelladas y al segundo día se encuentran 8000 organismos. ¿Cual es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

65. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes regresó con gripe. Si se supone que la gripe se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. Determinar el número de agripados cinco días después, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

66. Si el alimento y el espacio vital son ilimitados, alguna poblaciones aumentan a una razón proporcional a la población. Se calcula que la población del mundo en 1900 era de 1600 millones de personas y que para 1950 había aumentado a 2510 millones. ¿Cuál será la población del mundo en el año 2010, suponiendo que hay alimento y espacio vital ilimitados?

67. Un cuerpo de masa M se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la velocidad del cuerpo alcance el $80\,\%$ de su velocidad límite.

68. Un barco retrasa su movimiento por acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 mt/seg, después de 5 seg. su velocidad sería 8 mt/seg. Después de cuanto tiempo la velocidad será 1 mt/seg ?

69. Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 millas/hora en el momento de agotarse el combustible; si el agua se opone al movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si en una milla de recorrido reduce su velocidad a 30 millas/hora. ¿A que distancia se detendría?

70. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de $300°$ F. Después de 3 min., es de $200°F$. ¿En cuánto tiempo alcanzará una temperatura de $75°$ F, si la temperatura del medio es de $70°$F?

71. El estroncio (Sr^{90}) tiene una vida media de 25 años. Si 10 gramos de Sr^{90} se colocan inicialmente en un recipiente sellado, ¿cuántos gramos permanecerán después de 10 años?

72. Suponga que la población P de bacterias en un cultivo al tiempo t cambia a una razón proporcional a $P^2 - P$. Asuma que $P^2 - P > 0$.

   a) Sea k la constante de proporcionalidad. Escriba una ecuación diferencial para $P(t)$ y obtenga la solución general.

   b) Encuentre la solución si hay 1000 bacterias al tiempo $t = 0$ horas.

   c) Determine la constante k suponiendo, además, que hay 100 bacterias en $t = 5$ horas.

   d) Determine $\lim t \to \infty P(t)$

73. Supongamos que la población de la Tierra cambia a una velocidad constante proporcional a la población actual. Supongamos además, que al tiempo t = 0 (1650 d.C.) la población era de 250 millones; en 1950 la población era de 2,5 billones $(2,5 \cdot 10^9)$. Encuentre la población de la Tierra en cualquier instante t. Suponiendo que la mayor población que puede soportar la Tierra es de 25 billones, ¿Cuándo se alcanzará ese límite?

74. Para hacer un buen diagnóstico oftalmológico, ayer a las 20:00 horas se le administrá a Nicolás cierta droga que dilata la pupila. El médico explicó que la droga tiene una semivida de 6 horas y que Nicolás presentaría molestias visuales hasta que se hubiera eliminado el $80\,\%$ del medicamento. Cuando Nicolás se levantó esta mañana a las 7, se quejó de tener aún la vista borrosa. ¿Era por efecto del medicamento?

75. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en el que hay disueltas 75 libras de sal. A partir de un instante t = 0 comienza a fluir en él salmuera a una velocidad de 2 galones por minuto. Simultáneamente, la mezcla sale del depósito a razón de un galón por minuto.

   a) ¿Qué cantidad de sal hay en el depósito en un tiempo t?

   b) ¿En qué instante habrá 125 libras de sal disueltas en el depósito?

76. Suponga que el Lago Erie tiene un volumen de 480 km^3 y que sus tasas de flujo de entrada(desde el Lago Hurón) y de salida(hacia el Lago Ontario) son ambas de 350 km^3 por año. Suponga también que en el instante t = 0 (años) la concentración de contaminación del Lago Erie-provocada por contaminación industrial pasada que ahora se ha ordenado que se detenga- es cinco veces la del Lago Hurón. Si el flujo de salida es agua del lago perfectamente mezclada, ¿cuánto tiempo le tomará reducir la concentración de contaminación en el Lago Erie al doble de la del Lago Hurón?.

77. Muchas sustancias se disuelven en el agua a un ritmo conjuntamente proporcional a la cantidad no disuelta y a la diferencia entre la concentración de una solución saturada y la concentración en ese momento. Para una tal sustancia, colocada en un depósito que contiene G galones de agua, hallar la cantidad x no disuelta en el instante t, si $x = x_0$ cuando t = 0 y $x = x_1$ cuando $t = t_1$, y si S es la cantidad disuelta en el depósito cuando la solución está saturada.

78. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera, que contiene x gramos de sal por litro, a razón de 1,5 litros por minuto. La mezcla, bien revuelta, sale del tanque a razón de 1 litro por minuto. Si la concentración debe ser de 20 gramos por litro después de 20 minutos, calcular el valor de x.

79. Se tiene un tanque que contiene 1500 litros de una salmuera que lleva disueltos 2000 gr de sal. Al tiempo t = 0, comienza a fluir dentro del tanque agua pura a una razón de 100 lt/min. La mezcla bien agitada, sale del tanque a la misma razón y pasa a un segundo tanque que tenía inicialmente 1500 lt de agua pura. A su vez la mezcla bien agitada abandona este segundo tanque a razón de 100 lt/min.

    a) Determine la cantidad de sal en el primer tanque a los 10 minutos.
    b) Determine la cantidad de sal en el segundo tanque a los 10 minutos.
    c) Calcule el momento en el que en el primer tanque queda la mitad de sal que había inicialmente.
    d) Calcule la cantidad máxima de sal que hay en el segundo tanque en cualquier tiempo.
    e) Calcule la cantidad de sal que hay en el segundo tanque después de una hora.

80. Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/min. y la solución bien homogeneizada sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que trascurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance el $1\,\%$ de su valor original.

81. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera que contiene k gramos de sal por litro, a razón de $1{,}5$ litros por minuto. La mezcla bien homogenizada, sale del tanque a razón de un litro por minuto. Si la concentración es 20 gr/litro al cabo de 20 minutos. Hallar el valor de k.

82. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en las que están disueltas 25 libras de sal. Comenzando en el tiempo $t = 0$, entra agua al depósito a razón de 2 gal./min. y la mezcla sale al mismo ritmo para entrar a un segundo depósito que contenía inicialmente 50 galones de agua pura.La salmuera sale de este depósito a la misma velocidad. ¿Cuándo contendrá el segundo depósito la mayor cantidad de sal?

83. Un tanque contiene inicialmente 100 galones de agua pura. Comenzando en t = 0, entra al tanque una salmuera que contiene 4 libras de sal por galón a una razón de 5 gal/min. La mezcla se conserva uniforme mediante agitación, y estando bien agitada sale con una rapidez de 3 gal/min.

    a) ¿Qué cantidad de sal habrá en el tanque después de 20 min?
    b) ¿Cuándo habrá en el tanque 50 lb de sal?

c) Si el tanque tiene una capacidad de 400 galones. ¿ Cuánto tiempo demora en llenarse?

84. Un tanque contiene en un principio 40 litros de salmuera con 8 kilos de sal en solución. Entra en el tanque, a razón de 8 litros por minuto salmuera conteniendo $\frac{1}{8}$ kilo de sal por litro. La mezcla bien agitada para que sea homogénea, sale del tanque a razón de 4 litros por miniuto.

    a) Calcular la cantidad de kilos de sal que hay en el tanque a los 5 minutos.

    b) A los 10 minutos se modifica la concentración de entrada de sal a K kilos de sal por litro. Si se mantienen los otros datos, calcule K de modo que a los 20 minutos la concentración de sal en el tanque sea de 83/4 kilos por litro.

85. Un tanque de 400 litros de capacidad está lleno con solución salina con concentración 1/5 kilos por litro. En t = 0, se abren simultáneamente una llave de entrada A y una llave de salida B. Por A entra solución que contiene 0,25 kg de sal por litro a razón de 4 lts por segundo, y por B sale solución a razón de 12 lts. por segundo.

    a) Determine el tiempo $t = t_0$ que tarda el tanque en quedar vacío.

    b) Determine la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante $t < t_0$.

    c) Calcule la concentración de sal en el tanque para t = 37,5 segundos.