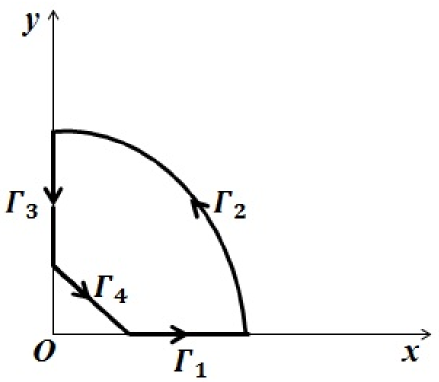
Biot-Savart y Ley de Ampère

Material de Apoyo para el Curso de Física II (ICF-190)

PROBLEMA RESUELTO 1

Una corriente de intensidad I circula por el conductor de la figura, donde la parte curva es un arco de circunsferencia con centro O. Determine la magnitud y dirección del campo magnético que produce en O.



Solución

El campo magnético lo podemos obtener de la ley de Biot-Savart en un punto P, como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} id\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\prime}{\|\vec{r} - \vec{r}\prime\|^3}, \tag{1}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición del punto P, en donde se quiere determinar el campo y $\vec{r}'$, el vector que define el elemento de corriente filamentaria. La curva Γ, en este caso, es cerrada y compuesta de cuatro tramos Γ_1 (tramo recto a lo largo del eje X), Γ_2 (tramo curvo),

Γ_3(tramo a lo largo eje Y) y Γ_4 (tramo a lo largo de la recta en el plano XY). El punto P está en el origen de coordenadas, así que, $\vec{r} = \vec{0}$, entonces:

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{\Gamma_1} id\vec{l_1} \times \frac{(-\vec{r_1})}{\|-\vec{r_1}\|^3} + \int_{\Gamma_2} id\vec{l_2} \times \frac{(-\vec{r_2})}{\|-\vec{r_2}\|^3} + \int_{\Gamma_3} id\vec{l_3} \times \frac{(-\vec{r_3})}{\|-\vec{r_3}\|^3} + \int_{\Gamma_4} id\vec{l_4} \times \frac{(-\vec{r_4})}{\|-\vec{r_4}\|^3}\right]. \tag{2}$$

Para los recorridos Γ_1 y Γ_3, el producto cruz dá cero y solo tendremos contribución al campo magnético por el recorrido curvo y por la recta en el plano XY. Para resolver el tramo curvo, utilizaremos coordenadas polares, entonces:

$$id\vec{l_2} = idl_2\hat{\theta} = i2Ld\theta\hat{\theta} \tag{3}$$

y

$$\vec{r_2'} = 2L\hat{r}, \tag{4}$$

entonces

$$id\vec{l_2} \times \vec{r_2'} = i(2L)^2 d\theta\hat{\theta} \times \hat{r} = -i(2L)^2\hat{k}. \tag{5}$$

Para el tramo cuarto, se tiene:

$$id\vec{l_4} = i(dx\hat{i} - dy\hat{j}) = i(dx\hat{i} - d(-x+L)\hat{j}) = i(dx\hat{i} + dx\hat{j}) \tag{6}$$

y

$$\vec{r_4}' = x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} + (L-x)\hat{j}. \tag{7}$$

Así,

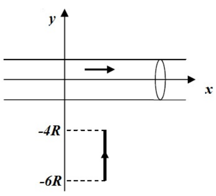
$$id\vec{l_4} \times \vec{r_4}' = iLdx\hat{k}, \tag{8}$$

por lo tanto, el campo magnético en el origen, es

$$\vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{i}{2L}\int_0^{\pi/2} d\theta - iL\int_0^L \frac{1}{(x^2+(L-x)^2)^{3/2}}\right]\hat{k} = \frac{\mu_0 i}{16\pi L}(8-\pi)\hat{k}. \tag{9}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1

Se dan dos distribuciones de corriente: la primera, es un conductor cilindrico, de radio $2R$, infinitamente largo, con eje coincidente con el eje X, y que conduce una corriente distribuida uniformemente $\vec{j} = j_0\hat{i}$, y la segunda es una línea recta de longitud $2R$, paralela al eje Y, con una corriente I_0. Los extremos de la línea recta están en los puntos $(R, -4R)$ y $(R, -6R)$. Determinar el campo magnético en el punto $(0, -3R)$.



Solución

El campo magnético en el punto $(0, -3R)$, es la superposición del campo magnético generado por el cilindrico y por el campo magnético generado por el alambre. Entonces, usando la Ley de Biot-Savart, obtenemos los campos magnéticos por el cilindro:

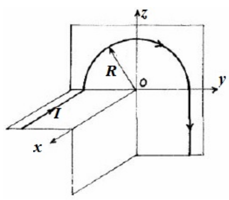
$$\vec{B_c} = -\frac{2}{3}\mu_0 j_0 R\hat{k} \tag{10}$$

y del alambre

$$\vec{B_a} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{k} \tag{11}$$

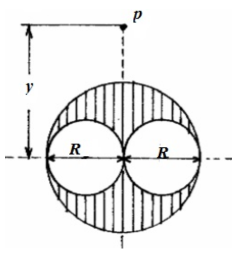
PROBLEMA DESAFIO 1.1

A lo largo del conductor de la figura, circula una corriente de intensidad I en la forma indicada en la figura. El radio de la circunsferencia es R y los tramos rectlíneos son semiinfinitos. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que produce en el punto O (origen de coordenadas).



PROBLEMA RESUELTO 2

Un largo conductor cilíndrico de radio R, tiene dos cavidades de diámetro R a través de toda su longitud, como se veen la figura. Una corriente de intensidad I, dirigida afuera de esta hoja, está uniformemente distribuida através de la sección transversal del conductor (parte "achurada"). Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, en términos de μ_0, I, r y R.



Solución

Resolveremos este problema, considerando el conductor cilíndrico de radio R lleno y determinaremos el campo magnético en el punto P. Luego, utilizaremos este resultados y calculamos el campo magnético de las cavidades como cilindros de radio $R/2$ y una corriente de intensidad $-I$ con los ajustes geométricos correspondientes. Entonces, usando la ley de Ampère, se tiene para el cilindro lleno:

$$\oint_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{B_1} = \mu_0 I, \tag{12}$$

de donde, se tiene el campo magnético:

$$\vec{B_1}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{i}. \tag{13}$$

Ahora, tomamos la cavidad de la izquierda. La distancia del centro de la cavidad al punto P es $d = \sqrt{r^2 + (R/2)^2}$. Tomando un lazo amperiano que encierra la corriente $-I$ y de radio d, se tiene que el campo magnético es:

$$\vec{B_2}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(cos(\theta)\hat{i} - sen(\theta)\hat{j}). \tag{14}$$

Para la cavidad de la derecha, se tiene analógamente

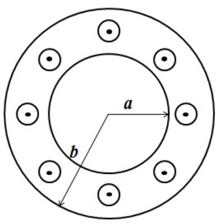
$$\vec{B_3}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}(cos(\theta)\hat{i} + sen(\theta)\hat{j}). \tag{15}$$

Luego, el campo magnético total en el punto P es:

$$\vec{B_P}(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{2r^2 + R^2}{(4r^2 + R^2)r}\hat{i}. \tag{16}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 2

En la figura, vemos un alambre cilindrico hueco de radio interior a y radio exterior b. En $r < a$, el alambre no conduce corriente, mientras que para $a < r < b$, la corriente tiene dirección saliente y densidad de corriente dada por $j(r) = k/r^2$, con k una constante. Calcule la magnitud del campo magnético para los casos: a) $r < a$ b) $a < r < b$ y c) $r > b$.



Solución

a) Para $r < a$, como la corriente se distribuye entre los radios a y b, el lazo amperiano no encierra corriente, por lo que, el campo magnético es cero.

b) Para un lazo amperiano en la zona $a < r < b$, el campo magnético es paralelo al vector desplazamiento, por lo que:

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int dl B(r) = B(r) 2\pi r. \tag{17}$$

Calculando la corriente encerrada por el anillo amperiano, puede mostrar que es:

$$I = 2\pi k ln(r/a). \tag{18}$$

Aplicando la ley de Ampère, se obtiene:

$$B(r) = \frac{\mu_0 k}{r} ln(\frac{r}{a}). \tag{19}$$

c) Para $r > b$, muestre que el campo magnético es:

$$B(r) = \frac{\mu_0 k}{r} ln(\frac{b}{a}). \tag{20}$$

PROBLEMA DESAFIO 2.1

La figura muestra la sección transversal de un largo cilindro de radio R, por el cuacircula axialmente una corriente de intensidad I, uniformemente distribuida, en el sentido indicado. En su interior hay un orificio cilíndrico de radio $R/3$, con su eje paralelo al eje del cilindro, a una distancia $\overline{AB} = R/2$ de éste. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en los puntos P y Q dentro del orificio. Los puntos A, B, P y Q son colineales tales que $\overline{PB} = \overline{BQ} = R/6$.