Ciencias de la Computación I

Teoría de Grafos III

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

16 de noviembre de 2016

1. Teorema de Kuratowski

2. Coloración de Grafos

Subdivisión Elemental

Para lo que sigue necesitamos de una nueva definición para cierta construcción de grafos.

Subdivisión Elemental

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos, tal que $E \neq \emptyset$. Una subdivisión elemental de G resulta cuando eliminamos un arista $e = \{u, w\}$ de G y entonces las aristas $\{u, v\}$ y $\{v, w\}$ se añaden a $G - e$, así como v también se agrega a V.

Grafos Homeomorfos

Los grafos no dirigidos sin lazos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son homeomorfos si son isomorfos o si ambos pueden obtenerse del mismo grafo H mediante una sucesión de subdivisiones elementales.

Es claro que si G' se obtiene de una subdivisión elemental de G, entonces G' tiene un vértice y una arista más que G.

Subdivisión Elemental

Nos faltan aún criterios para decidir si un grafo es plano o no. En 1930, el matemático polaco Kasimir Kuratowski demostró el siguiente resultado:

Teorema de Kuratowski

Un grafo no es plano si y sólo si contiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$

La demostración de este resultado es extensa y escapa a los fines del curso.

Teorema

La siguiente relación fue descubierta por Euler y relaciona el número de vértices, aristas y regiones definidas por una inmersión de un grafo.

Sea G un grafo o multigrafo plano conexo con $|V| = n$ y $|E| = m$. Sea r el número de regiones en el plano determinadas por una inmersión plana de G; una de estas regiones tiene un área infinita y se le conoce como **región infinita**. Entonces $n - m + r = 2$.

Este resultado puede resultar muy familiar ya que caracteriza a los sólidos platónico con respecto a sus vértices, aristas y caras.

Otro resultado directo del anterior el siguiente:

Corolario

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo sin lazos con $|V| = n$ y $|E| > 2$ y r regiones. Si G es plano entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$.

Con este criterio se puede probar que el K_5 no es plano. El criterio no funciona para $K_{3,3}$, pero podemos razonar a través del teorema de Euler.

Coloración de Grafos

Coloración de Grafos

Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido, una **coloración propia** de G ocurre cuando coloreamos los vértices de G de modo que si $\{a, b\}$ es una arista de G, entonces a y b tienen colores distintos. El número mínimo de colores necesarios para una coloración propia de G es el número cromático de G y se denota por $\chi(G)$.

No es difícil observar que $\chi(K_n) = n$.

Polinomio Cromático

Coloración propia

Una coloración propia que usa como máximo λ colores es una función f, con dominio V y codominio $\{1, 2, 3, ..., \lambda\}$.

Diremos que dos coloraciones son diferentes si son diferentes como funciones. Ahora veremos un método para determinar $\chi(G)$.

Polinomio Cromático

Sea G un grafo no dirigido y sea λ el número de colores disponibles para la coloración propia de los vértices de G. Definimos como $P(G, \lambda)$, en la variable λ llamada **polinomio cromático** de G que representa el número de coloraciones propias diferentes de los vértices de G, usando un máximo de λ colores.

Observaciones

- Si $G = (V, E)$ es tal que $|V| = n$ y $E = \emptyset$, entonces G tiene n puntos aislados y por la regla del producto, $P(G, \lambda) = \lambda^n$.
- Si $G = K_n$, entonces debemos disponer de al menos n colores para obtener una coloración propia de G.
- En general, si G es un camino simple con n vértices, entonces $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.
- Si G está conformado por componentes $G_1, G_2, \ldots, G_k$, entonces usamos de nuevo la regla del producto para obtener $P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda)P(G_2, \lambda) \cdots P(G_k, \lambda)$.

Teorema de Descomposición

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Para $e = \{a, b\} \in E$, sea G_e el subgrafo de G que se obtiene al eliminar e de G, sin quitar los vértices a y b. A partir de G_e obtenemos un segundo subgrafo de G, identificando los vertices a y b. Este segundo subgrafo se denota con G'_e.

Teorema de Descomposición de Polinomios Cromáticos

Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo y $e \in E$, entonces

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)$$

Observaciones

- Para cualquier grafo G, el término constante en $P(G, \lambda)$ es 0.
- Sea $G = (V, E)$ con $|E| > 0$. Entonces la suma de los coeficientes es $P(G, \lambda)$ es 0.

Podemos también considerar un nuevo grafo al agregar una arista y obtener otro teorema de descomposición.

Teorema de Descomposición de Polinomios Cromáticos

Sea $G = (V, E)$, $a, b \in V$ y con $\{a, b\}$ una arista que no pertenece a E. Escribimos G_e^+ para el grafo que se obtiene al añadir la arista $\{a, b\}$. Al identificar los vértices a y b en G, obtenemos el subgrafo G_e^{++} de G. En estas circunstancias

$$P(G, \lambda) = P(G_e^+, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda)$$