Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias Segundo Semestre 2013

Departamento de Matemática y Estadística

Guía N°3: Aplicaciones de la Integral Definida
Cálculo de una Variable (IME050)

Carreras: Ingenierías Civiles

Profesores: H. Burgos, M. Choquehuanca, E. Henríquez, A. Parra, A. Sepúlveda, H. Soto, P. Valenzuela.

1. En cada uno de los siguientes ejercicios obtenga el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Bosqueje la gráfica de la región.

   a) $\mathcal{R}$ acotada por la curva $y = x - x^2$ y el eje x

   b) $\mathcal{R}$ acotada por la curva $y = (3 - x)\sqrt{x}$ y el eje x

   c) $\mathcal{R}$ acotada por las curvas $y = x^3 + x$, $x = 2$ y el eje x

   d) $y = 9x - x^2$, $y = 0$

   e) $y = x^2$, $y = x$, $x = 1$, $x = 3$

   f) $x = y^2 - 2y - 3$, $x = 0$

   g) $x^2 = y^3$, $x = 0$, $y = 4$ en el primer cuadrante

   h) $x = 4y^2 - y^3$, $x = -1 - y$, $y = 0$, $y = 3$

   i) $y^2 = 4x + 1$, $x + y = 1$

   j) $y = |x + 1| + |x|$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$

   k) $x = 5y, x = y^3 - 2y^2 - 3y$

   l) $y^2 = 6 + 3x$, $y = 3x$

   m) $y = 2x$, $4y = x$, $y = \dfrac{2}{x^2}$, $x > 0$

   n) $y = x^2$, $x = y^3$, $x + y = 2$

   ñ) $y = x^3 - x^2$, $y = 2x^2 - 4$

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ de tal manera que la región sobre la recta $y = mx$ y bajo la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área de $36\,[u^2]$. R: $m = -4$.

3. Determine el área encerrada por las parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$, con $p > 0$.

4. Dibuje el recinto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|\}$ y calcule su área.

5. Sea $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = ax$. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para el que el área de la región acotada acotada por ambas funciones sea $\dfrac{9}{2}$.

6. Halle el área de la región acotada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 1)$ y el eje x.

7. Encuentre $b \in \mathbb{R}$ tal que la recta $y = b$ divida la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones con áreas iguales.

8. Halle los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ sea 576.

9. ¿Para qué valores de m, la recta $y = mx$ y la curva $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ encierra una región?. Encuentre el área de la región?

10.
    a) Hallar el número a tal que la recta $x = a$ divida el área de la región acotada por $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq 4$, en dos partes iguales.
    b) Encontrar el número b tal que la recta $y = b$ divida el área de la región acotada por $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq 4$, en dos partes iguales.

11. Suponga que $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ ¿Para qué valores de c, el área de la región encerrada por las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos x$, $x = \pi$ e $y = 0$?

12. Existe una recta que pase por el origen y divida la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje de las abscisas en dos regiones de igual área ¿Cuál es la pendiente de esa recta?

13. En cada uno de los siguientes casos hallar el volumen del sólido generado por la rotación de la región acotada por las curvas que se indican en torno a la recta $\mathcal{L}$ dada:

    a) $x + y = 2$ $x = 0$, $y = 0$, $\mathcal{L}$: eje x
    b) $y = 2\sqrt{5x}$, $x = 4$, $\mathcal{L}$: eje x, eje y
    c) $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $\mathcal{L}$: eje x, eje y
    d) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $\mathcal{L}$: eje x
    e) $y = 4x^2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $\mathcal{L} : x = -1$
    f) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$, $\mathcal{L} : y = -1$
    g) $y = 9 - x^2$, $y = 2x^2$, $\mathcal{L}$: eje y
    h) $y = \sqrt{x^2 - 9}$, $x = 5$, $x = 9$, $y = 0$, $\mathcal{L}$: eje y
    i) $y = 1 + \operatorname{sen} x$ $y = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $\mathcal{L}$: eje y
    j) $y = x^2$, $x = y^2$, $\mathcal{L} : x = -2$

    R: (a) $\frac{8\pi}{3}$; (b) 160π, $\frac{256\pi}{\sqrt{5}}$; (c) $\frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$; (d) $\frac{\pi}{10}$; (e) 54π; (f) πe; (g) $\frac{27\pi}{2}$; (h) $\frac{32\pi}{3}\left(27\sqrt{2} - 4\right)$; (i) $4\pi^2(\pi - 1)$; (j) $\frac{49\pi}{30}$.

14. Exprese las integrales necesarias para determinar, por el método del disco y la corteza, el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar las región $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de las funciones $y = x^2 + 4$, $y = 8$, en el primer cuadrante, en torno a:

a) El eje x.

b) El eje y.

c) La recta $y = 2$.

d) La recta $y = 8$.

e) La recta $x = -1$.

f) La recta $x = 4$

15. Determine la longitud de arco de la curva en el intervalo dado:

    a) $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{x^4}{16}$ $x \in [2, 3]$

    b) $8y = x^4 + 2x^{-2}$, $x \in [1, 2]$

    c) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0, b]$

    d) $y = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

    e) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{1}{2x}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

    f) $f(x) = \ln(\cos x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

    R: (a) $\frac{59}{24}$; (b) $\frac{33}{16}$; (c) $\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})$; (d) 1; (e) $\frac{33}{16}$; (f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

16. Determine la longitud del segmento de recta $y = 3x + 5$, $x \in [1, 4]$. Compare el resultado con la fórmula de distancia entre dos puntos.

17. Determine el área de la superficie generada al hacer girar el arco de curva para el intervalo dado, en torno a la recta $\mathcal{L}$ que se indica:

    a) $y = x^3$, $x \in [0, 1]$, $\mathcal{L}$: eje x

    b) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}$, $x \in [0, 3]$; $\mathcal{L}$: eje y

18. Calcule el área de la parte de la esfera que se genera al girar la curva $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0, 2]$ alrededor del eje y. R: $6\pi(3 - \sqrt{5})$.

19. Muestre que el área de la superficie lateral de un cono recto de altura h y radio basal r es $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

20. Represente la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y encuentre el centroide de la región:

    a) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$

    b)) $y = 4 - x^2$, $y = 0$

    c) $y^2 = x$, $2y = x$

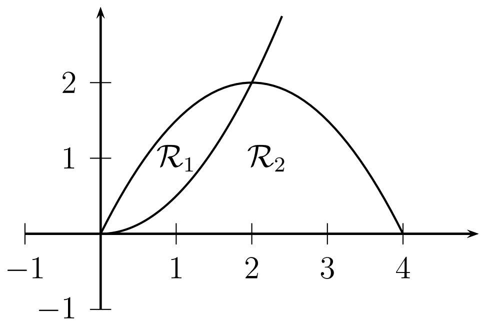
    d) $y = 1 - x^2$, $y = x - 1$

    e) $y = \operatorname{sen} 2x$, eje x, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

    R: (a) $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{7}\right)$; (b) $\left(0, \frac{8}{5}\right)$; (c) $\left(\frac{8}{5}, 1\right)$; (d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$; (e) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$

Problemas de Prueba

21. Considere las gráficas de las curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$ y el eje x que acotan los recintos $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ mostrados en la figura siguiente:



a) Utilizando el *Método del Disco* **exprese** las integrales para el volumen del sólido de revolución generado al rotar $\mathcal{R}_1$ en torno a los ejes que se indican.

i) Eje x.
ii) Eje y.
iii) Recta $x = -1$.
iv) Recta $y = 3$.

b) Utilizando el *Método de la Corteza* **exprese** las integrales para el volumen del sólido de revolución generado al rotar $\mathcal{R}_2$ en torno a los ejes que se indican.

i) Eje x.
ii) Eje y.
iii) Recta $y = -3$.
iv) Recta $x = 6$.

c) **Exprese** el área de la superficie de revolución generada al rotar el arco de parábola $y = \frac{x^2}{2}$ para $0 \leq x \leq 2$ en torno: *a*) eje x, *b*) eje y.

22. Considere la región $\mathcal{R}$ del plano, acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $x - 2 = 0$ y $x + y = 2$.

a) **Exprese** las integrales para determinar el área de $\mathcal{R}$, tanto en términos de x como de y. **Calcule una de ellas**.

b) **Calcule** el perímetro de $\mathcal{R}$.

c) **Calcule** el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a los ejes que se indican:

i) $x = 5$, utilizando el método de la corteza.
ii) $y = -1$, utilizando el método del disco.

23. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de $y = -x^2 + 6x - 4$ y $x + y - 6 = 0$.

a) **Exprese** por los métodos del disco y la corteza la(s) integral(es) que representa el volumen generado al rotar $\mathcal{R}$ alrededor de:

i) $x = 6$
ii) $x = -1$
iii) $y = 7$
iv) $y = -2$

b) **Exprese** la(s) integral(es) que represente el perímetro de $\mathcal{R}$.

c) Considere sólo el arco de la parábola anterior que une los puntos $(2, 4)$ y $(5, 1)$. **Exprese** la(s) integral(es) que representan el área de la superficie de revolución generada al rotar alrededor de:

i) $y=-1$
ii) $y=6$

24. Sean $\mathcal{R}_1$ la región acotada por $y=(x-2)^2$, $y=x$ y el eje x para $x\in[0,2]$ y $\mathcal{R}_2$ la región acotada por $y=(x-2)^2$, para $x\in[2,a]$ y el eje x. Determine el valor de la constante a para que el área de $\mathcal{R}_1$ sea igual al área de $\mathcal{R}_2$.

25. Considere la región $\mathcal{R}$ del plano, acotada por las curvas $y=\sqrt{x+2}$, $y=\dfrac{1}{x+1}$, $x=0$ y $x=2$.

    a) **Calcule** el área de $\mathcal{R}$.
    b) **Escriba** la(s) integral(es) que permiten determinar el perímetro de $\mathcal{R}$.
    c) **Escriba** mediante el método del disco y la corteza la(s) integral(es) que permiten determinar el volumen sólido de revolución generado al rotar $\mathcal{R}$ en torno los ejes que se indican y **en cada caso** calcule una de ellas:

        i) Eje x.
        ii) Eje y.

26. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por las gráficas de $y=5x-x^2$ e $y=x$.

    a) Determine el área de $\mathcal{R}$, integrando respecto a la variable x y luego respecto a la variable y.
    b) Calcule el perímetro de la región.
    c) Encuentre las coordenadas del centroide.
    d) Exprese utilizando el método del disco y la corteza, el volumen generado al rotar $\mathcal{R}$ en torno a los ejes que se indican y en cada caso calcule una de ellas.

        i) Eje x
        ii) Eje y
        iii) $y=-1$
        iv) $y=4$
        v) $x=-1$
        vi) $x=3$

27. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de $y=6+x$, $y=x^3$ y $x+2y=0$.

    a) Encuentre el área de $\mathcal{R}$.
    b) Exprese las integrales para el perímetro de $\mathcal{R}$.
    c) Calcule el centro de masa de $\mathcal{R}$ si la densidad es $\rho=|x|$
    d) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar $\mathcal{R}$ en torno al eje de las abscisas.

28. Encuentre el valor de la constante $a\in\mathbb{R}$ para que el volumen del sólido de revolución generado rotar la región acotada por las gráficas de $y=x^2$, $y=ax$ en torno al eje x sea $V=\dfrac{64\pi}{15}\,[u^3]$.