Ecuaciones ordinarias de primer orden

Ecuaciones diferenciales. Ingenierías Civiles

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de la Frontera

Primer Semestre 2016

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

- Una paracaidista pesa 125 libras, y su paracaídas y equipo combinado pesan otras 35 libras.

- Una paracaidista pesa 125 libras, y su paracaídas y equipo combinado pesan otras 35 libras.
- Después de lanzarse desde un avión a 15 000 pies de altura, espera 15 segundos y abre su paracaídas.

- Una paracaidista pesa 125 libras, y su paracaídas y equipo combinado pesan otras 35 libras.
- Después de lanzarse desde un avión a 15 000 pies de altura, espera 15 segundos y abre su paracaídas.
- Supongamos que la resistencia del aire antes de abrir el paracaídas es despreciable y que, una vez abierto, es proporcional a su velocidad instantánea, con constante de proporcionalidad $k = 10$.

- Una paracaidista pesa 125 libras, y su paracaídas y equipo combinado pesan otras 35 libras.
- Después de lanzarse desde un avión a 15 000 pies de altura, espera 15 segundos y abre su paracaídas.
- Supongamos que la resistencia del aire antes de abrir el paracaídas es despreciable y que, una vez abierto, es proporcional a su velocidad instantánea, con constante de proporcionalidad $k = 10$.
- Supongamos también que la velocidad inicial al salir del avión es cero.

Preguntas

Preguntas

- ¿Cuántos pies ha recorrido después de 10 segundos?
- ¿Cuántos pies recorrió en caída libre antes de abrir el paracaídas?
- ¿A qué altura del suelo se encuentra después de 20 segundos?
- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?
- ¿Con qué velocidad toca el suelo?

Datos

Datos

- Peso total: $125 + 35 = 160$ (libras).
- Altura total: 15 000 (pies).
- Tiempo en caída libre: 15 (segundos).

Fijando variables

Fijando variables

- Sea $x(t)$ la distancia recorrida por la paracaidista después de t segundos.

Fijando variables

- Sea $x(t)$ la distancia recorrida por la paracaidista después de t segundos.
- Sea $v(t)$ la velocidad en el instante t.

Segunda ley de Newton

$$F = m \cdot a$$

$0 \leq t \leq 15$

$$ma = mg$$

$0 \leq t \leq 15$

$$\begin{aligned} ma &= mg \\ a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 15$

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\
\frac{dv}{dt} &= 32
\end{aligned}
$$

$0 \leq t \leq 15$

$$\begin{aligned} ma &= mg \\ a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\ \frac{dv}{dt} &= 32 \\ v(t) &= 32t + C \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 15$

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\
\frac{dv}{dt} &= 32 \\
v(t) &= 32t + C \\
v(0) = 0 &\Rightarrow C = 0
\end{aligned}
$$

$0 \leq t \leq 15$

$$\begin{aligned} ma &= mg \\ a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\ \frac{dv}{dt} &= 32 \\ v(t) &= 32t + C \\ v(0) = 0 &\Rightarrow C = 0 \\ v(t) &= 32t \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 15$

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
a &= 32(\mathrm{pies}/\mathrm{seg}^2) \\
\frac{dv}{dt} &= 32 \\
v(t) &= 32t + C \\
v(0) = 0 &\Rightarrow C = 0 \\
v(t) &= 32t \\
\frac{dx}{dt} &= 32t
\end{aligned}
$$

$0 \leq t \leq 15$

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\
\frac{dv}{dt} &= 32 \\
v(t) &= 32t + C \\
v(0) = 0 &\Rightarrow C = 0 \\
v(t) &= 32t \\
\frac{dx}{dt} &= 32t \\
x(t) &= 16t^2 + C
\end{aligned}
$$

$0 \leq t \leq 15$

$$
\begin{aligned}
ma &= mg \\
a &= 32(\text{pies}/\text{seg}^2) \\
\frac{dv}{dt} &= 32 \\
v(t) &= 32t + C \\
v(0) = 0 &\Rightarrow C = 0 \\
v(t) &= 32t \\
\frac{dx}{dt} &= 32t \\
x(t) &= 16t^2 + C \\
x(0) = 0 &\Rightarrow x(t) = 16t^2
\end{aligned}
$$

- Después de 10 segundos ha recorrido 1 600 pies.

- Después de 10 segundos ha recorrido 1 600 pies.
- Al abrir el paracaídas ha recorrido $16 \cdot 15^2 = 3600$ pies.

$$t > 15$$

$t > 15$

- $x(15) = 3600.$

$t > 15$

- $x(15) = 3600.$
- $v(15) = 32 \cdot 15 = 480$ pies por segundo.

$t > 15$

- $x(15) = 3600$.
- $v(15) = 32 \cdot 15 = 480$ pies por segundo.
- $ma = mg - 10v$

$t > 15$

- $x(15) = 3600.$
- $v(15) = 32 \cdot 15 = 480$ pies por segundo.
- $ma = mg - 10v$
- $m\dfrac{dv}{dt} = mg - 10v$

Definiciones y notación

Definición

Una ecuación diferencial es cualquier ecuación en la que interviene una o más variables dependientes y alguna(s) de sus derivadas con respecto a una o más variables independientes.

Definición

Una ecuación diferencial es una Ecuación Diferencial Ordinaria si en ella intervienen solo derivadas de funciones de una variable.

Definición

Una ecuación diferencial es una Ecuación Diferencial Ordinaria si en ella intervienen solo derivadas de funciones de una variable.

De lo contrario, decimos que la ecuación diferencial es una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales.

Ejemplo

Ecuaciones ordinarias:

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$
6. $(x'y - 1)x'' = 1$
7. $y' = xy - 1$

Ejemplo

Ecuaciones en derivadas parciales:

1. La ecuación del calor

$$a^2(\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz}) = \omega_t$$

2. La ecuación de onda

$$a^2(\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz}) = \omega_{tt}$$

3. La ecuación de Laplace

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz} = 0$$

Definición

El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada de orden más alto que aparezca en ella.

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$ primer orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$ primer orden
6. $(x'y - 1)x'' = 1$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$ primer orden
6. $(x'y - 1)x'' = 1$ segundo orden

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$ primer orden
6. $(x'y - 1)x'' = 1$ segundo orden
7. $y' = xy - 1$

Ejemplo

Revisamos el ejemplo anterior.

1. $y' - 3y = \operatorname{sen} t + 2\cos t$ primer orden
2. $y''y' - y^3 = 2x + 1$ segundo orden
3. $x''' + 3x'' + 3x' + x = e^t + e^{-t}$ tercer orden
4. $3xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$ primer orden
5. $y' = xy - \operatorname{sen} x$ primer orden
6. $(x'y - 1)x'' = 1$ segundo orden
7. $y' = xy - 1$ primer orden

Nota

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n se representa mediante la identidad

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria es lineal si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

donde $a_n, \ldots, a_1, a_0, f$ son funciones reales definidas sobre algún intervalo común I.

Definición

Una ecuación diferencial ordinaria es lineal si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

donde $a_n, \ldots, a_1, a_0, f$ son funciones reales definidas sobre algún intervalo común I.

En otras palabras una ecuación es lineal si la variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado y su coeficiente solo depende de la variable independiente x.

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$ no es lineal pues el coeficiente de y'' depende de y.

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$ no es lineal pues el coeficiente de y'' depende de y.
4. $y'' - \operatorname{sen}\, y = 1$

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$ no es lineal pues el coeficiente de y'' depende de y.
4. $y'' - \operatorname{sen} y = 1$ no es lineal, pues y aparece como argumento de una función trigonométrica.

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$ no es lineal pues el coeficiente de y'' depende de y.
4. $y'' - \operatorname{sen} y = 1$ no es lineal, pues y aparece como argumento de una función trigonométrica.
5. $(y')^2 - x^2 = 0$

Ejemplo

Veamos algunos casos.

1. $y' - y\sqrt{x} = 1$ es una ecuación lineal de primer orden.
2. $y''' - 3y'' + (x^2 + 1)y = e^x$ es una ecuación lineal de tercer orden.
3. $xyy'' - 2y' = 0$ no es lineal pues el coeficiente de y'' depende de y.
4. $y'' - \operatorname{sen} y = 1$ no es lineal, pues y aparece como argumento de una función trigonométrica.
5. $(y')^2 - x^2 = 0$ no es lineal pues y' tiene potencia distinta de 1.

Solución de una ecuación diferencial

Solución (o integral) de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición

Una función real $y = \varphi(x)$ con al menos n derivadas definida en un intervalo I es una solución explícita de la ecuación $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ en I si y solo si se cumple la identidad

$$F\left(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$$

para todo $x \in I$.

Ejemplo

La función $y = \dfrac{x^4}{16}$ es una solución de la ecuación no lineal de primer orden $y' = xy^{1/2}$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo

La función $y = \dfrac{x^4}{16}$ es una solución de la ecuación no lineal de primer orden $y' = xy^{1/2}$ en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x^3}{4} \Rightarrow y' - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\sqrt{\frac{x^4}{16}} = 0$$

Ejemplo

La función $y = e^{-2x}$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden

$$y' + 2y = 0$$

en $\mathbb{R}$.

Nota

No toda ecuación diferencial tiene necesariamente una solución que corresponda a una función real. Por ejemplo, la ecuación

$$(y')^2 + 1 = 0$$

claramente no la tiene.

Definición

- Una solución explícita de una ecuación diferencial es una solución en que la variable dependiente se escribe solo en términos de la variable independiente y constantes, como en el ejemplo anterior.

Definición

- Una solución explícita de una ecuación diferencial es una solución en que la variable dependiente se escribe solo en términos de la variable independiente y constantes, como en el ejemplo anterior.
- También es posible obtener la solución de una ecuación diferencial definida paramétricamente. Es decir, la variable dependiente y la variable independiente se definen en función de algún parámetro y de constantes.

Definición

- Una solución explícita de una ecuación diferencial es una solución en que la variable dependiente se escribe solo en términos de la variable independiente y constantes, como en el ejemplo anterior.
- También es posible obtener la solución de una ecuación diferencial definida paramétricamente. Es decir, la variable dependiente y la variable independiente se definen en función de algún parámetro y de constantes.
- Otras veces, la solución está definida implícitamente por una relación $G(x, y) = 0$ en I.

Ejemplo

Veamos algunos ejemplos.

- La función $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, es solución explícita de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - y = 0$.

Ejemplo

Veamos algunos ejemplos.

- La función $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$, donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, es solución explícita de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - y = 0$.
- La relación $x^2 + y^2 = C^2$ es una solución implícita de la ecuación $yy' + x = 0$ en el intervalo $(-C, C)$.

Ejemplo

Veamos algunos ejemplos.

- La función $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, es solución explícita de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - y = 0$.
- La relación $x^2 + y^2 = C^2$ es una solución implícita de la ecuación $yy' + x = 0$ en el intervalo $(-C, C)$.
- La relación $xy = \ln y + C$ es una solución implícita de la ecuación $y' = \dfrac{y^2}{1 - xy}$.

Ejemplo

- La función $\begin{cases} y = e^p(p-1) \\ x = e^p \end{cases}$ es una solución paramétrica de la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.

Ejemplo

- La función $\begin{cases} y = e^p(p-1) \\ x = e^p \end{cases}$ es una solución paramétrica de la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.
- Conviene recordar que en este último caso $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dp}{dx/dp}$

Ejemplo

- La función $\begin{cases} y = e^p(p-1) \\ x = e^p \end{cases}$ es una solución paramétrica de la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.
- Conviene recordar que en este último caso $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dp}{dx/dp}$
- y entonces, reemplazando,

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dp} & = & p\,e^p \\ \dfrac{dx}{dp} & = & e^p \end{array}\right\} \dfrac{dy}{dx} = p$$

Ejemplo

- La función $\begin{cases} y = e^p(p-1) \\ x = e^p \end{cases}$ es una solución paramétrica de la ecuación $y = xy' - e^{y'}$.
- Conviene recordar que en este último caso $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dp}{dx/dp}$
- y entonces, reemplazando,

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dp} & = & p\,e^p \\ \dfrac{dx}{dp} & = & e^p \end{array}\right\} \dfrac{dy}{dx} = p$$

- $xy' - e^{y'} = e^p p - e^p = e^p(p-1) = y$

Definición

- La gráfica de una solución se denomina curva integral.

Definición

- La gráfica de una solución se denomina curva integral.
- La solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, a lo más tantas como el orden de la ecuación.

Definición

- La gráfica de una solución se denomina curva integral.
- La solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, a lo más tantas como el orden de la ecuación.
- Al resolver una ecuación ordinaria de orden n se busca una familia n-paramétrica

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

de soluciones.

Definición

- La gráfica de una solución se denomina curva integral.
- La solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, a lo más tantas como el orden de la ecuación.
- Al resolver una ecuación ordinaria de orden n se busca una familia n-paramétrica

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

de soluciones.

- Tal familia se denomina solución general de la ecuación. Cuando damos valores a los parámetros, obtenemos una solución particular.

Definición

- La gráfica de una solución se denomina curva integral.
- La solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, a lo más tantas como el orden de la ecuación.
- Al resolver una ecuación ordinaria de orden n se busca una familia n-paramétrica

$$G(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

de soluciones.
- Tal familia se denomina solución general de la ecuación. Cuando damos valores a los parámetros, obtenemos una solución particular.
- Además, hay soluciones "extrañas" que no se obtienen de la solución general y que llamamos soluciones singulares.

Ejemplo

En nuestro ejemplo anterior

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

es la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo anterior

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

es la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

mientras que

$$y(x) = e^{x} - 2e^{-x}$$

es una solución particular que se obtuvo dando los valores

$$C_1 = 1, \;\; C_2 = -2$$

Ejemplo

Por otra parte, es fácil ver que la familia de rectas

$$y = Cx - e^C$$

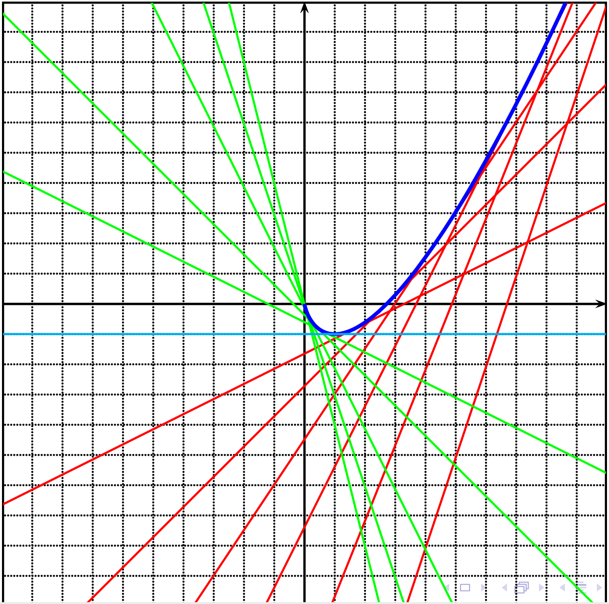
es la solución general de

$$y = xy' - e^{y'}$$

y la solución paramétrica

$$\begin{cases} y = e^p(p-1) \\ x = e^p \end{cases}$$

no se obtiene de ella (en realidad, la ecuación cartesiana correspondiente es $y = x(\ln x - 1)$). Esta es una solución singular de la ecuación.



Problemas de valor inicial y de contorno

Definición

Un problema de valor inicial (P.V.I.) es una ecuación diferencial para la cual se especifican los valores de la función y algunas de sus derivadas en cierto punto llamado punto inicial.

Definición

Un problema de valor inicial (P.V.I.) es una ecuación diferencial para la cual se especifican los valores de la función y algunas de sus derivadas en cierto punto llamado punto inicial.
Un problema de contorno o de frontera es una ecuación diferencial en la cual se dan valores por lo menos para dos puntos de la función o alguna de sus derivadas.

Ejemplo

$$y'' + 2y' + 1 = x + 1, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1$$

es un problema de valor inicial,

Ejemplo

$$y'' + 2y' + 1 = x + 1,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$$

es un problema de valor inicial,
y en cambio

$$y'' + 2y' + 1 = x + 1,\ \ y(0) = 1,\ \ y(1) = -1$$

es un problema de contorno.

Ejemplo

- Ya comprobamos que

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

es solución general de la ecuación $y'' - y = 0$.

Ejemplo

- Ya comprobamos que

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

es solución general de la ecuación $y'' - y = 0$.

- Para resolver el problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1$$

Ejemplo

- Ya comprobamos que

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

es solución general de la ecuación $y'' - y = 0$.

- Para resolver el problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1$$

debemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} y(0) & = & 1 & = & C_1 + C_2 \\ y'(0) & = & -1 & = & C_1 - C_2 \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo

- Ya comprobamos que

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

es solución general de la ecuación $y'' - y = 0$.

- Para resolver el problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1$$

debemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} y(0) & = & 1 & = & C_1 + C_2 \\ y'(0) & = & -1 & = & C_1 - C_2 \\ \hline \end{array}$$

- Luego, $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, y la solución del problema de valor inicial es $y(x) = e^{-x}$.

Nota

No siempre se obtiene una única solución al reemplazar los parámetros en la solución general, pero veremos más adelante que los problemas de valor inicial de ecuaciones lineales tales que $a_n(x) \neq 0$ tienen siempre solución única.

Ejemplos

Ejemplo

- Es fácil comprobar que la familia $y = Cx^4$ es solución de la ecuación

$$xy' - 4y = 0$$

Ejemplo

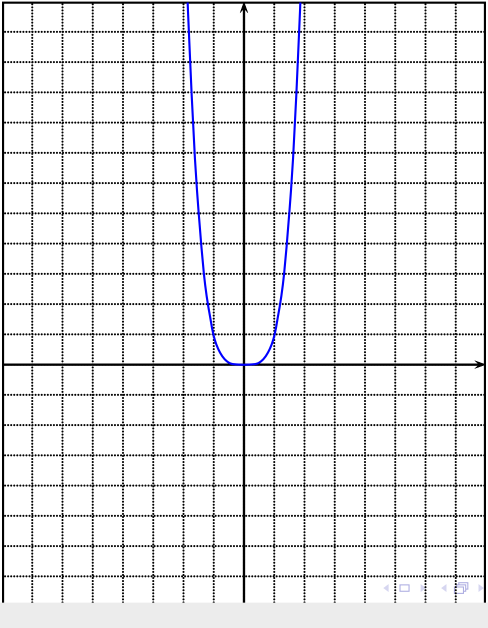
- Es fácil comprobar que la familia $y = Cx^4$ es solución de la ecuación

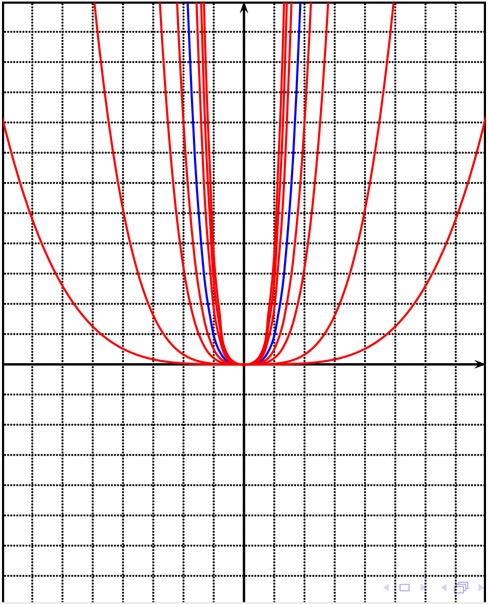
$$xy' - 4y = 0$$

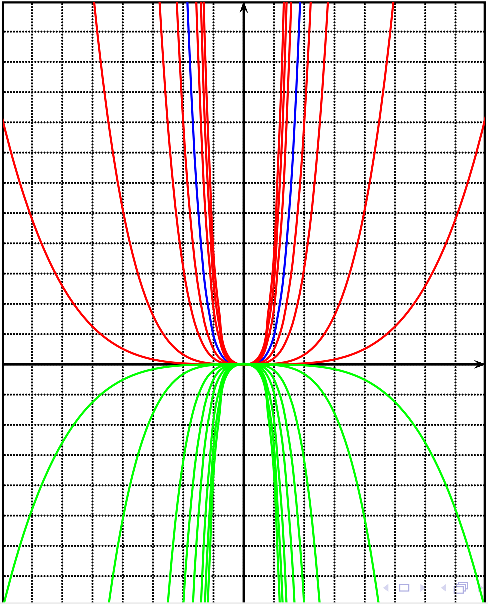
- Se trata de la familia de parábolas que se obtiene a partir de la curva $y = x^4$, dando distintos valores reales al parámetro C.

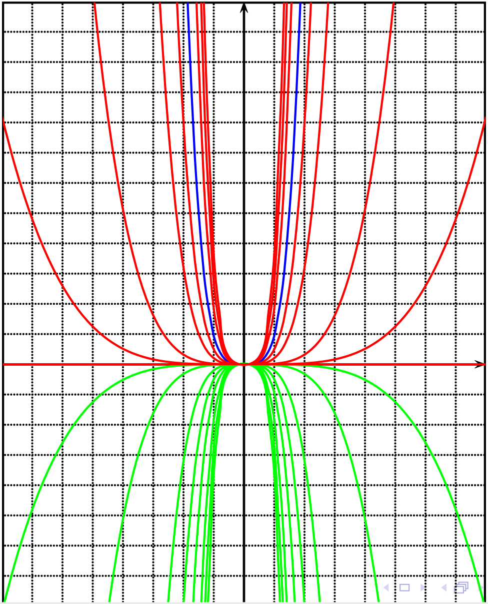
Ejemplo

- Es fácil comprobar que la familia $y = Cx^4$ es solución de la ecuación
$$xy' - 4y = 0$$
- Se trata de la familia de parábolas que se obtiene a partir de la curva $y = x^4$, dando distintos valores reales al parámetro C.
- Debemos considerar valores positivos y negativos, además de 0.









De la gráfica podemos deducir que toda función definida por tramos

$$y = \begin{cases} ax^4 & \text{si} \quad x < 0 \\ bx^4 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

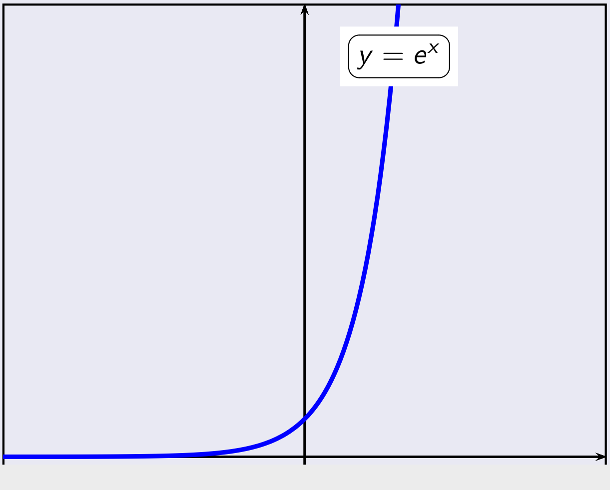
es también solución, luego el problema de valor inicial $xy' - 4y = 0, \; y(0) = 0$ tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

Repasemos la gráfica de las funciones exponenciales, $y = e^{ax}$:

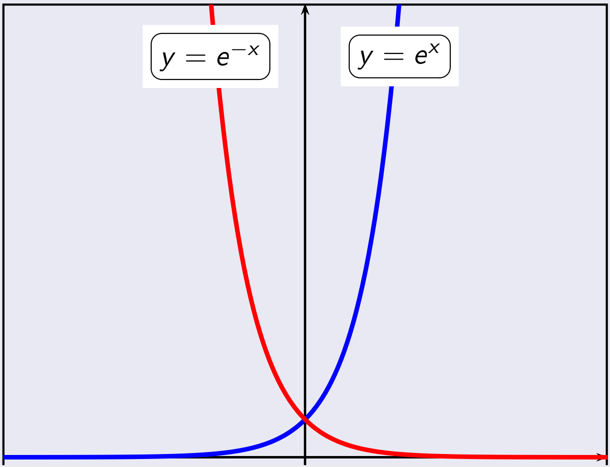
Ejemplo

Repasemos la gráfica de las funciones exponenciales, $y = e^{ax}$:



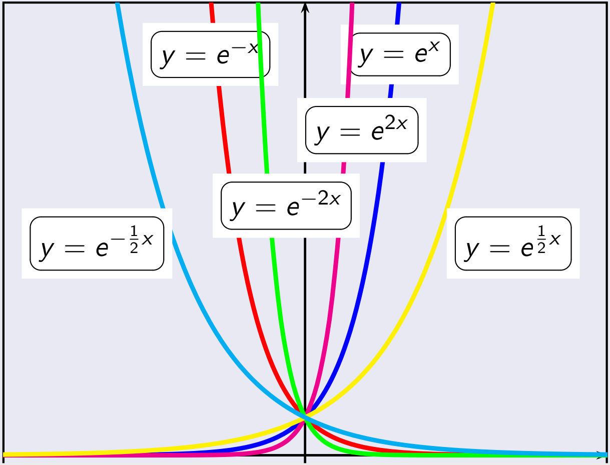
Ejemplo

Repasemos la gráfica de las funciones exponenciales, $y = e^{ax}$:



Ejemplo

Repasemos la gráfica de las funciones exponenciales, $y = e^{ax}$:

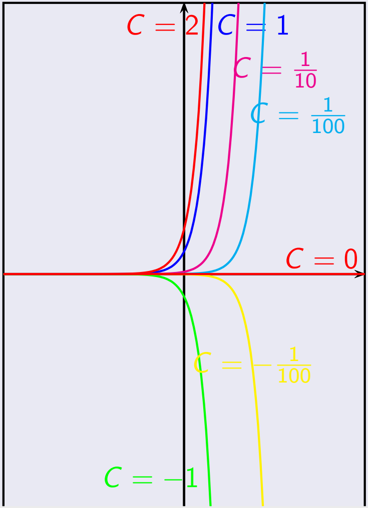


Ejemplo

Bosquejemos la familia $y = Ce^{2x}$, solución de la ecuación $y' - 2y = 0$.

Ejemplo

Bosquejemos la familia $y = Ce^{2x}$, solución de la ecuación $y' - 2y = 0$.



Ejemplo

- La familia $y = \left(\frac{x^2}{4} + C^2\right)^2$ es solución de la ecuación $y' = x\sqrt{y}$.

Ejemplo

- La familia $y = \left(\dfrac{x^2}{4} + C^2\right)^2$ es solución de la ecuación $y' = x\sqrt{y}$.
- La solución trivial $y \equiv 0$ es claramente solución de la ecuación, pero ella no se obtiene para ningún valor de C.

Ejemplo

- La familia $y = \left(\dfrac{x^2}{4} + C^2\right)^2$ es solución de la ecuación $y' = x\sqrt{y}$.
- La solución trivial $y \equiv 0$ es claramente solución de la ecuación, pero ella no se obtiene para ningún valor de C.
- En este caso, la solución trivial es una solución singular de la ecuación.