UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
Departamento de Matemática

Ph Valenzuela

Ecuaciones diferenciales

Directory

Last Revision Date: March 24, 2006 Version 1.0

Table of Contents

1. Introducción

Sean $I = (a, b)$ intervalo de la recta real y A un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se denomina **ecuación diferencial** a una aplicación

$$F : I \times A \to \mathbb{R}^n, \quad F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in I$$

Ejemplo 1

1. $x' - x + 1 = 0$
2. $x'' + 9x = 8\, sen(t)$
3. $y'^2 - 2y' + y - 3x = 0$

Es sencillo darse cuenta que la relación funcional en la tercera ecuación es de la forma $F(x, y(x), y'(x)) = 0$

El método cuantitativo y Cualitativo

En el estudio de las ecuaciones diferenciales uno de los problemas fundamentales es el de *determinar* **todas** *las soluciones* de la ecuación diferencial dada (Método cuantitativo), en este caso, el problema una vez resuelto permite obtener conclusiones en cuanto a estabilidad de las soluciones, en cuanto a la existencia de soluciones periódicas, y a un largo etcétera, etcétera. Sin embargo, como la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no puede ser resuelta en forma "cerrada", esto es, dar la solución en forma explícita, entonces el problema se ataca directamente, es decir, se estudian las propiedades de las soluciones sin necesidad de resolver la ecuación diferencial. Este proceso da origen a un segundo problema fundamental, el cual consiste en *determinar propiedades* de las soluciones de la ecuación diferencial (método cualitativo). En este caso podemos señalar que en base a los trabajos de Poincaré y Liapunov se han desarrollado métodos directos para el estudio de por ejemplo: Existencia y cantidad de puntos de reposo de un sistema físico, existencia y cantidad de soluciones periódicas, estabilidad de los puntos de reposo y muchos otros problemas de gran importancia.

En lo que sigue trataremos de analizar ambos problemas, procurando obtener expresiones explícitas de la solución cuando sea posible, incluyendo series infinitas, y deduciendo propiedades de las soluciones, tales como, valores numéricos y gráficas directamente de la ecuación diferencial.

En este estudio, distinguimos dos tipos de ecuaciones diferenciales: **ordinarias**, cuando hay sólo una variable independiente involucrada, y **parciales**, cuando están involucradas más de una variable independiente.

Ejemplo 2

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 + 5$

2. $(x^2 + y^2)\,dx - 3y\,dy = 0$

3. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = xy$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0$

Las dos primeras son ecuaciones ordinarias y las dos restantes parciales.

- El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada.
- El **grado** de una ecuación diferencial es el exponente de la derivada de más alto orden.

Ejemplo 3

1. $x\,x' - t^3 + 1 = 0,$ *primer orden y primer grado.*

2. $x'^2 - tx = 0,$ *primer orden y segundo grado.*

3. $\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 x}\right)^3 + \dfrac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \cdot \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^4 - x^7 y = sen\,x,$ *segundo orden y tercer grado*

4. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2b\,\dfrac{dy}{dx} + y = 0,$ *segundo orden y primer grado*

Definición 1.1 *Una función $\phi : J \subset I \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y tal que:*

1. $(t, \phi(t)) \in I \times A, \quad \forall\, t \in J$

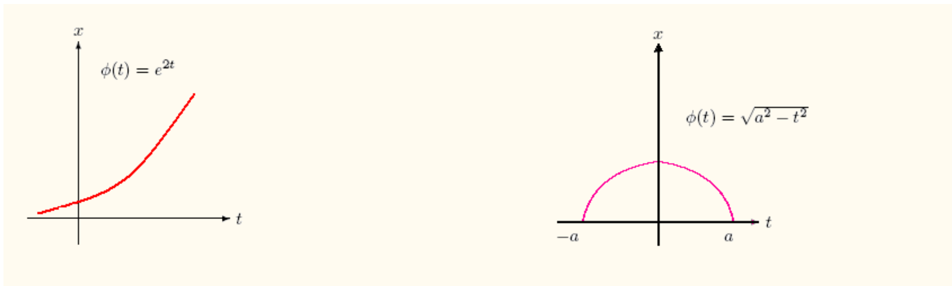
2. $F(t, \phi(t), \phi'(t), \cdots, \phi^{(n)}(t)) = 0$

se llama **solución** *de la ecuación diferencial $F(t, x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)) = 0$*

Ejemplo 4 *La ecuación $x'' - 4x = 0$ para $J = I = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ tiene a la función $\phi(t) = e^{2t}$ como solución. En efecto, verificamos la definición.*

1. $(t, \phi(t)) = (t, e^{2t}) \in I \times A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Observa el gráfico.*

2. $\phi''(t) - 4\,\phi(t) = 4\,e^{2t} - 4\,e^{2t} = 0$



Ejemplo 5 *La ecuación $x\,dx + t\,dt = 0$ para $J = (-a, a) = I$, $A = \mathbb{R}$ tiene a la función $\phi(t) = \sqrt{a^2 - t^2}$ como solución. En efecto,*

1. *$(t, \phi(t)) = (t, \sqrt{a^2 - t^2}) \in I \times A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Observa el gráfico.*

2. *La ecuación diferencial se puede escribir en la forma $x\,\frac{dx}{dt} + t = 0$, con lo cual la verificación de la segunda propiedad resulta como sigue:*

$$\phi(t)\,\phi'(t) + t = \sqrt{a^2 - t^2} \;\cdot\; \frac{-2t}{2\sqrt{a^2 - t^2}} + t = 0$$

con lo cual se ha probado que ϕ es solución.

Frecuentemente estamos interesados en hallar soluciones de una ecuación diferencial que satisfagan ciertas condiciones en lugar de aspirar a encontrar todas. Por lo general, estas condiciones pueden ser de dos tipos: **condiciones iniciales** y **condiciones de frontera**, las cuales pasan a ser soluciones particulares.

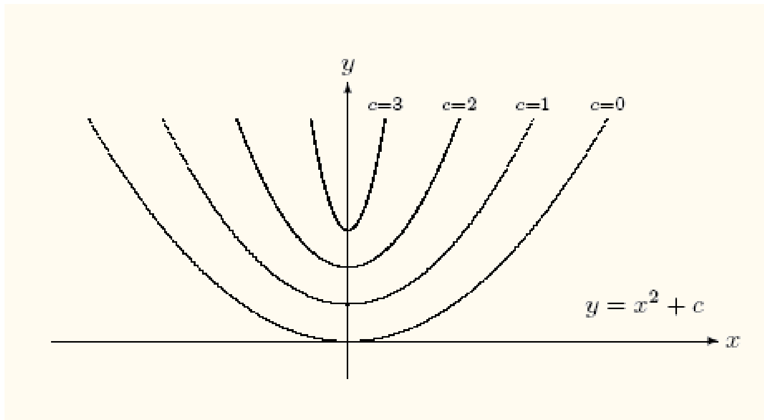
Definición 1.2 *Condición inicial es cierto requisito que debe cumplir la solución de una ecuación diferencial (cuando existe) en un punto determinado. Esta condición se anota en la forma $x_0 = x(t_0)$, y significa que en $t = t_0$ la variable x toma el valor x_0.*

Ejemplo 6 *Se desea que la ecuación diferencial $y' = 2x$, cuya solución más general es de la forma $y = x^2 + c$, tenga una solución que pase por el punto $(1, 4)$.*

Dado que tenemos la solución general $y = x^2 + c$, y se quiere que se satisfaga la condición inicial, que simbolizamos por $y(1) = 4$, entonces hacemos lo que sigue

$$y(x) = x^2 + c \Longrightarrow y(1) = 1 + c = 4 \Longrightarrow c = 3$$

de donde se obtiene que $y = x^2 + 3$ es la solución deseada. Podemos agregar una interpretación gráfica como la que muestra la figura, y que da cuenta que la constante c juega un papel de parámetro, ya que asignándole distintos valores se halla la solución que se desee.



En general, las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales del tipo

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

son de la forma

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Ejemplo 7 *La solución de la ecuación diferencial* $y'' + y = 0$*, que satisface las condiciones* $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ *es*

$$y(x) = cos\, x + 2\, sen\, x$$

Definición 1.3 *Condición de* **frontera** *es el requisito que debe cumplir la solución de la ecuación diferencial en los extremos del intervalo* J*.*

Ejemplo 8 *La solución de la ecuación diferencial* $y'' = sen\, x$*, con condiciones de frontera* $y(0) = y_1,\ y(\pi) = y_2$ *viene dada por*

$$y(x) = -sen\, x + \frac{y_2 - y_1}{\pi} + y_1$$

Al igual que lo que sucede con las funciones, las ecuaciones diferencial pueden darse en forma implícita, que es lo que hemos hecho, o bien, en forma explícita. Dejando de lado las dificultades algebraicas, el problema de la ecuación diferencial implícita puede reducirse al de una ecuación diferencial explícita si puede despejarse la derivada de orden máxima, quedando:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots x^{(n-1)}(t))$$

Sistema de Ecuaciones

Cuando se da el caso que existen n funciones incógnitas $x(t), y(t), \cdots$ para cuya determinación se dan ecuaciones diferenciales del tipo

$$F_i\,(t, x(t), x'(t), \cdots x^{(n)}(t), y(t), y'(t), \cdots) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

se dice que tenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales.

Una solución de tal sistema consiste en un conjunto de n funciones $x(t), y(t), \cdots$ que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones des sistema. En particular, un sistema de n - ecuaciones diferenciales de primer orden tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ x_2^{'} &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ &\vdots \\ x_n^{'} &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \end{aligned}$$

Esto hace que podamos mirar las x_i como componentes de un vector $\vec{x}$, y tener

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \Longrightarrow \vec{x}\,' = (x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots x_n^{'})$$

y, si además, $\vec{f} = f_i$, entonces el sistema adquiere la notación

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x})$$

Esta forma vectorial proporciona una interpretación conceptual más clara, pues permite tratar los sistemas de ecuaciones diferenciales en forma completamente análoga a la ecuación de primer orden $x\,' = f(t, x)$. Mas aún, toda la teoría sobre ecuaciones de orden superior puede reducirse al caso de primer orden tomando como base los sistemas de ecuaciones diferenciales. En efecto, sea

$$F(t, x, x\,', x\,'', \cdots x^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

si hacemos,

$$x = x_1, x\,' = x_2, x\,'' = x_3, \cdots x^{(n-1)} = x_n, x^{(n)} = x_n^{'}$$

entonces la ecuación (1) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x\,' = x_2 \\ \quad \vdots \\ x^{(n-1)} = x_n \\ x_n^{'} = x^{(n)} \\ F(t, x_1, x_2, \cdots x_n, x_n^{'}) = 0 \end{cases}$$

Si $x_n^{'}$ puede despejarse, entonces tenemos el sistema en forma **normal**

$$\begin{cases} x_1' &=& f_1(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ x_2' &=& f_2(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ &\vdots& \\ x_n' &=& f_n(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \end{cases}$$

Resulta entonces, que la ecuación diferencial $F(t, x, x', \cdots x^{(n)}) = 0$, de orden superior, ha sido transformada en un sistema $\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x})$, así entonces, lo que debemos estudiar en detalles es la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$, y señalar las diferencias que corresponden cuando se estudien las de orden superior.

2. Ecuaciones de primer orden

2.1. Campo de direcciones

Una ecuación diferencial de primer orden en forma implícita tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

y cuando es resoluble respecto de y' se escribe en la llamada forma explícita

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

en donde f es una ecuación definida en una determinada región del plano xy. Geométricamente la ecuación (2) establece una dependencia entre las coordinadas de un punto de la región y la pendiente y' a la gráfica de la solución, esto significa que en cada punto de la región está determinada una dirección, esto es, una recta de pendiente $f(x, y)$ de manera tal que las soluciones $y(x)$ deben ser tangentes en cada uno de sus puntos a la correspondiente recta. Se dice entonces, que la ecuación (2) determina un "**campo de direcciones**" en la región considerada, pudiendo visualizarse este campo dibujando por cada punto un trozo de recta de la correspondiente solución. Este método de resolución gráfica de la ecuación diferencial (2) no posee exactitud matemática, y su utilidad se presenta en casos excepcionales, dándonos una idea de las soluciones.

Ejemplo 9 *Dibujamos el campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial* $y' = -\dfrac{x}{y}$

Partimos por considerar un conjunto de 10 puntos del plano xy

$$\{(1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), , (-1, 1), (-2, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$$

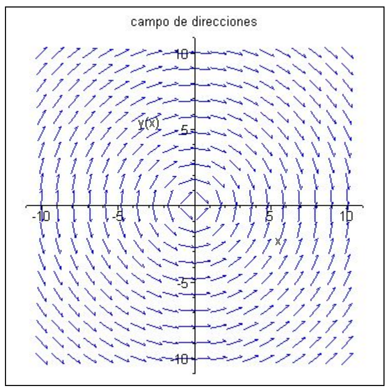
entonces la siguiente tabla, hecha "a mano" nos muestra el valor del coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada.

x	1	2	0	1	2	-1	-2	0	1
y	0	0	1	1	1	1	1	2	2
y'	∞	∞	0	-1	-2	1	2	0	$-\frac{1}{2}$

Si hacemos uso del programa **MAPLE**, con las ordenes

- $> eq := D(y)(x) = -(x/y)$; seguido de
- $> dfieldplot(eq, [y(x)], x = -10..10, y = -10..10, color = blue)$;

todo aparece como por arte de magia y da como resultado el siguiente gráfico



La figura muestra que las curvas $x^2 + y^2 = c$ satisfacen la condición de tangencia, siendo las soluciones del problema. Estas curvas son sólo aproximaciones a las soluciones, por lo que debe verificarse que satisfacen la ecuación diferencial. Por otra parte, ocasionalmente las isoclinas pueden coincidir con las curvas solución (**isoclinas** son rectas de pendiente constante que se calculan a partir de $f(x, y) = k$).
Observaciones

- Si en un punto (x, y) la derivada y' tiene valor infinito, ello no implica necesariamente un comportamiento extraño de la solución, si no simplemente que la tangente es vertical.

- Si en un punto (x, y) la función f resulta indeterminada, la ecuación diferencial no está definida, pero lo importante es estudiar el comportamiento de las soluciones en un entorno de dicho punto.

- En general, siempre que se cumpla ciertas condiciones que estudiamos más adelante, existen infinitas soluciones $y(x)$ de la ecuación diferencial, de tal manera que por cada punto del plano xy (en la región que se considere) pasa una solución y solamente una. Estas curvas forman entonces una familia infinita o un **haz de curvas**, que se presenta bajo la forma $\phi(x, y, c) = 0$, donde c es una constante arbitraria. Cabe agregar que a cada valor de c corresponde una curva del haz, y que tales curvas suelen llamarse **curvas integrales**.

- Para determinar una solución particular no basta dar la ecuación diferencial, sino que es necesario dar una condición adicional, por ejemplo, una condición inicial, una condición de frontera, etc.

3. Métodos de resolución de ecuaciones

En la practica, es común que interesen soluciones particulares de una ecuación diferencial en lugar de una solución general. Desde este punto de vista trataremos de dar a conocer ciertos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que no requieren de mucho esfuerzo, dado que en la actualidad, los sistemas computacionales, tales como Maple realizan todo tipo de cálculo de ecuaciones, incluyendo métodos numéricos, tales como como los de Euler, Runge-Kutta y otros, que no serán vistos acá. Los métodos analíticos que emplearemos son los siguientes:

3.1. Ecuaciones de variables separables

Dentro de este grupo nos encontramos con cuatro tipos de ecuaciones:

$$\boxed{\text{Ecuación: } \frac{dy}{dx} = f(x)}$$

El primer paso para resolverla consiste en escribirla con notación de diferenciales

$$dy = f(x)\,dx$$

ahora que, las variables están "separadas" se integra

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

y el resultado de esta integración es la solución general de la ecuación diferencial dada. la solución particular se obtiene en base a alguna condición inicial, lo que da lugar a determinar el valor de la constante de integración, y como consecuencia hallar la solución particular.

$$\boxed{\text{Ecuación: } \frac{dy}{dx} = g(y)}$$

Escribiendo esta ecuación en diferenciales tenemos que

$$dy = g(y)\,dx$$

considerando $g(y) \neq 0$, y asociando diferenciales se tiene

$$dx = \frac{dy}{g(y)}$$

cuya solución se obtiene por integración inmediata

$$x = \int \frac{dy}{g(y)} + C$$

Ecuación: $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Considerando $g(y)$ no nula esta ecuación equivale a

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

la cual, tomando integrales en ambos miembros, conduce a

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C$$

Ecuación: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$

Esta ecuación es un caso particular de la anterior. Al separar variables se tiene

$$g(y)\, dy - f(x)\, dx = 0$$

y al integral, la solución general queda escrita en la forma

$$\int g(y)\, dy - \int f(x)\, dx = C$$

Toda esta familia de ecuaciones de variables separables se puede reducir a escribirlas en la forma

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C$$

Ejemplo 10 *La ecuación diferencial $x\, dx + y\, dy = 0$ tiene como integral general*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

tomando $C = \frac{r^2}{2}$ se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$, de modo que la solución de la ecuación dada es una familia de círculos concéntricos.

Ejemplo 11 *Resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$.*

Al separar variables se tiene la ecuación escrita en la forma

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx + C$$

al realizar la integración se obtiene

$$\ln\, y - \ln(1-y) = x + C \Longrightarrow \ln \frac{y}{1-y} = x + C$$

expresión que al reducir se transforma en

$$\frac{y}{1-y} = k \cdot e^x$$

y finalmente, la solución general resulta ser

$$y = \frac{k\, e^x}{1 + k\, e^x}$$

Si se quiere saber algo sobre el comportamiento de esta solución, es sencillo verificar que si $x \to \infty$, entonces $y \to 1$, y que si $x \to -\infty$, entonces $y \to 0$. Teniéndose que tanto $y = 1$ como $y = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial considerada.

Ejemplo 12 *Resolvemos la ecuación* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

Al separar variables se llega a que

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

de donde, al integrar

$$\ln\, y + \ln\, x = \ln\, C \Longrightarrow y = \frac{C}{x}$$

es la solución general de la ecuación

3.2. Ecuaciones Homogéneas

Se dice que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado n, respecto de las variables x e y, si para todo λ se verifica

$$f(\lambda\, x, \lambda\, y) = \lambda^n f(x, y)$$

Por ejemplo, la función $f(x, y) = xy - y^2$ es homogénea de segundo grado ya que

$$f(\lambda\, x, \lambda\, y) = \lambda\, x\, \lambda\, y - \lambda^2\, y^2 = \lambda^2 (xy - y^2) = \lambda^2 f(x, y)$$

Definición 3.1 *La ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$ *se dice homogénea respecto de las variables* x *e* y *si* $f(x, y)$ *es homogénea de grado cero respecto de* x *e* y.

Por ejemplo, la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea puesto que

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} \Longrightarrow f(\lambda\, x, \lambda\, y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\lambda\, x \cdot \lambda\, y} = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$$

¿Cómo se resuelven las homogéneas?

La ecuación diferencial homogénea $y' = f(x,y)$ se transforma en una ecuación de **variables separadas** mediante la sustitución $y = ux$. En efecto, como la ecuación es homogénea, entonces

$$f(\lambda\, x, \lambda\, y) = f(x,y)$$

haciendo $\lambda = \dfrac{1}{x}$ se tiene

$$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x})$$

de manera que la ecuación diferencial toma la forma

$$y' = f(1, \frac{y}{x})$$

al tomar derivada con respecto de x en $y = ux$ se tiene

$$y' = u' \cdot x + u$$

reemplazando en la ecuación diferencial el resultado es

$$u + xu' = f(1,u)$$

en la cual, separando variables

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

que era lo que se tenía que probar. Si se quiere la solución general, sólo basta hacer la integración.

Ejemplo 13 *Resolvemos la ecuación homogénea* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

Es claro que es homogénea (grado 2 arriba y grado 2 abajo queda grado cero). Hacemos $y = ux$ para tener $y' = u' \cdot x + u$. Reemplazamos esto en la ecuación dada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2} \Longrightarrow u' \cdot x + u = \frac{ux^2}{x^2 - u^2x^2}$$

al simplificar queda

$$u' \cdot x + u = \frac{u}{1 - u^2}$$

al asociar se tiene

$$u' \cdot x = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

al separar variables y usando diferenciales

$$\frac{1-u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x}$$

al integrar

$$\int \frac{1-u^2}{u^3}du = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

de aquí que

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln\, u = \ln\, x - \ln\, C \Longrightarrow \ln(\frac{ux}{C}) = -\frac{1}{2u^2}$$

y finalmente, como $y = ux$, entonces

$$y = C\, e^{-x^2/2y^2}$$

4. Ecuación reducible a homogénea

Las ecuaciones del tipo

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{4}$$

se reducen a una ecuación homogénea trasladando el origen de coordenadas al punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1$, $a_2x + b_2y + c_2$

Para verificar esto, suponemos que (x_1, y_1) es el punto de intersección de las rectas. Usando las ecuaciones de traslación se tiene

$$u = x - x_1, \quad v = y - y_1 \Longrightarrow \frac{du}{dv} = \frac{dy}{dx}$$

reemplazando en (1) esa ecuación se transforma en

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

al dividir por u, dentro del paréntesis, tenemos que

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{v}{u}}{a_2 + b_2\frac{u}{v}}\right) = f\left(\frac{v}{u}\right)$$

lo que prueba que la ecuación es homogénea.

OJO Si las rectas en cuestión son paralelas, este método no puede aplicarse, pero como este caso las coeficientes de las coordenadas son proporcionales, es decir,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

la ecuación (1) se escribe

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y) \tag{5}$$

usando ahora la sustitución $z=a_1x+b_1y$ se tiene que

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

lo cual nos conduce a tener que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\,\frac{dz}{dx}-a_1=F(z)$$

despejando la derivada respecto de z se tiene

$$\frac{dz}{dx}=a_1+b_1\,F(z)$$

resultando, claramente, una ecuación de variables separadas.

No hay nada más gratificante que un buen ejemplo

Ejemplo 14 *Resolvemos la ecuación* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-3}{x-y-1}$

Tienes que observar que sobra un -3 arriba y un -1 abajo, así que hay que trasladar el origen de coordenadas, que se logra al resolver

$$x+y-3=0,\quad x-y-1=0\Longrightarrow x=2,\ y=1$$

luego, las ecuaciones de traslación son

$$u=x-2,\quad v=y-1$$

Esto hace que acortemos camino, pues debe quedar

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v},\qquad \text{¡¡homogénea!!}$$

Todo el mundo sabe que en las sustituciones las variables son "mudas", así que para no confundir el trabajo, cambiemos la última ecuación a variables x e y.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

esto permite darse cuenta que lo único diferente con la ecuación original es haber eliminado las constante que "molestaban" en el numerador y denominador. Esto siempre es así, sólo que tienes que tener las coordenadas del punto al cual trasladas el origen. Una vez dicho lo anterior, retomamos nuestra última ecuación, que es homogénea, y hacemos $y = ux$ de donde $y' = u'x + u$, para tener que

$$u'x + u = \frac{x + ux}{x - ux}$$

después de cancelar la x asociamos las u y separamos variables

$$\frac{1+u}{1+u^2}\, du = \frac{dx}{x}$$

al integrar y llamando $\ln C$ a la constante, se llega a

$$\ln Cx \cdot \sqrt{1+u^2} = arctg\, u$$

y en las variables originales se tiene

$$C\,\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{arctg\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}$$

5. Ecuaciones Lineales

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x) \tag{6}$$

O bien de la forma

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q(y)$$

con P y Q funciones continuas, se llama ecuación diferencial **lineal** de primer orden.

Esta ecuación lineal tiene un caso particular, $Q = 0$, con lo cual se tiene que

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0$$

es una ecuación de variables separables. En efecto,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0 \Longrightarrow y = C\ e^{-\int P(x)\, dx}$$

La ecuación $y' + P(x)\, y = 0$ recibe el nombre de ecuación **homogénea asociada** de (3)

$$\boxed{\text{¿Cómo se resuelven las lineales?}}$$

El mejor y más sencillo método es considerar que la solución es el producto de dos funciones, esto es, $y(u(x)\, v(x)$, con lo cual se tiene que

$$y = u(x) \cdot v(x) \Longrightarrow y' = u'v + v'u$$

al reemplazar en (3), esa ecuación toma la forma

$$u'v + v'u + P(x)\, u\, v = Q(x) \Longrightarrow (\, u + P(x)\, u)v + v'u = Q(x)$$

si u es una función que satisface, $u' + P(x)\, u = 0$, entonces queda por resolver

$$v'\, u = Q(x) \tag{7}$$

por simple integración, pues $u' + P(x)\, u$ es la ecuación homogénea asociada de (3) que, como sabemos, tiene por solución

$$u = C\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

Por tanto, reemplazando en (4) tenemos que

$$v' = \frac{1}{C}\, e^{\int P(x)\, dx} \cdot Q(x)$$

de modo que,

$$v = \frac{1}{C} \int e^{\int P(x)\, dx} \cdot Q(x) + C_1$$

O bien, como $y = uv$,

$$y = \int e^{-\int P(x)\, dx} \left[\int e^{\int P(x)\, dx} \cdot Q(x) + C \right]$$

Ejemplo 15 *Resolvemos* $xy' - y = x^3\sqrt{1 - x^2}$

Así como la ves, la ecuación no se puede identificar. Hagamos una operación mágica que haga a nuestros ojos ver quién es ella

$$xy' - y = x^3\sqrt{1 - x^2} \Longrightarrow y' - y \cdot \frac{1}{x} = x^2\sqrt{1 - x^2}$$

Como dice esa canción "... al mirarla de Playa Ancha lindo puerto...", por supuesto,

¡es lineal!

con $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$. Bueno, ahora sólo resta ponerse a trabajar, y para empezar debemos hacer $y = uv$, de lo cual ya sabes que $y' = u'v + v'u$. Por tanto,

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2\sqrt{1-x^2}$$

al arreglar esta ecuación tenemos que

$$\left(u' - \frac{1}{x}\,u\right)v + v'\,u = x^2\sqrt{1-x^2}$$

como debemos hacer que

$$u' - \frac{1}{x}\,u = 0$$

al resover se tiene

$$u' = \frac{1}{x}\,u \Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow u = C\,x$$

Por lo tanto, nos queda por resolver

$$v' \cdot Cx = x^2\sqrt{1-x^2}$$

que al simplificar y separar variables conduce a

$$v = \frac{1}{C}\left[\int x\sqrt{1-x^2}\,dx + C_1\right]$$

Todavía me acuerdo que eras un "balazo" para integrar, ¿qué tal $x = cos\,t$?. Eso es, con esto la situación se transforma en

$$v = -\frac{1}{C}\left[\int cos\,t\ sen^2 t\ dt + C_1\right] = -\frac{sen^3 t}{3} + C$$

y al volver a la variable $x$tenemos que

$$v = -\frac{C}{3}\,(1-x^2)^{3/2} + C_1$$

Finalmente, una vez determinadas las funciones u y v obtenemos la solución

$$y = \left[\frac{C}{3}\,(1-x^2)^{3/2} + C_1\right]Cx$$

6. Ecuación de Bernoulli

Una ecuación de la forma $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \quad n \geq 1$ se llama ecuación de **Bernouilli**. Esta ecuación es reducible a una lineal mediante mediante la sustitución $z = y^{1-n}$, en efecto,

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\,\frac{dz}{dx}$$

reemplazando en la ecuación de Bernouilli tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{y^n}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,y &= Q(x)\,y^n \;\Big/ \cdot y^{-n} \\
\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,y^{1-n} &= Q(x) \\
\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + P(x)\,z &= Q(x) \\
\frac{1}{1-n}\,z' + P(x)\,z &= Q(x) \quad \text{¡lineal!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Resolvemos la ecuación* $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$

A esta ecuación hay que darle un nuevo "look" para que se parezca a alguna que hayamos visto.

$$y' - \frac{1}{2x}\cdot y = \frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$$

ahora vemos que tiene la forma

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \quad n = -1,\; P(x) = -\frac{1}{x^2},\; Q(x) = \frac{x^2}{2}$$

¡la pillé, era una de Bernouilli!. Hacemos $z = y^2$ para tener

$$\frac{dz}{dx} = 2y\,\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}\,\frac{dz}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación dada

$$\frac{1}{2y}\,\frac{dz}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2}\cdot y^{-1}$$

al multiplicar por $2y$ se tiene

$$\frac{dz}{dx} - \frac{y^2}{x} = x^2$$

y en términos de la variable z

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^2$$

Como siempre, $z = uv \Longrightarrow z' = u'v + v'u$, para tener

$$\left(u' - \frac{u}{x}\right) v + v'u = x^2$$

para anular u se tiene

$$u' - \frac{u}{x} = 0 \Longrightarrow u = C_1\, x$$

reemplazamos para hallar v

$$v'C_1\, x = x^2 \Longrightarrow v\, C_1 = \frac{x^2}{2} + C$$

de donde

$$z = u \cdot v = C_1\, x \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \left[x^2 + C\right] = x^3 + Cx$$

es la solución general.

7. Ecuación Exacta

Una ecuación de la forma $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ se llama **exacta** si se satisface

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Como alternativa se tiene que, la ecuación es exacta si existe una función $\mu(x, y)$ tal que

$$d(\mu(x, y)) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

Ejemplo 17 *Resolvemos la ecuación* $\dfrac{2x}{y^3}\, dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$

Debería ser exacta, veamos si lo es

$$M = \frac{2x}{y^3} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

Hasta aquí todo es como se esperaba. ¿Cómo se halla la solución?. Te lo digo de inmediato. Si es exacta es por que existe la función $\mu(x, y)$ tal que

$$d(\mu(x, y)) = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y}\, dy = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy =$$

de donde debe tenerse que

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

Al resolver la primera de estas igualdades se tiene

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \Longrightarrow \mu(x,y) = \int \frac{2x}{y^3}\,dx + k(y) \Longrightarrow \mu(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + k(y)$$

La constante de integración $k(y)$ puede depender sólo de y, pues al derivarla respecto de x es cero. Vamos a calcular esta función, y para ello derivamos esta última ecuación respecto, precisamente, de y

$$\mu(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + k(y) \Longrightarrow \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + k'(y)$$

pero $\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}$ es conocida, por tanto,

$$\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + k'(y) \Longrightarrow k'(y) = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow k(y) = -\frac{1}{y} + C$$

Una vez calculada esta función la reemplazamos para tener que

$$\mu(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$$

se concluye que la solución general es

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

8. Ecuación de Ricatti

Una ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^2 = R(x)$$

se denomina de Ricatti.

Lo que se debe tener claro es que esta ecuación no se puede resolver, a menos que se conozca una solución, y en tal caso existe una sustitución que la transforma en una ecuación de Bernouilli. Vamos a ver esto.

Sea y_1 una solución conocida. hacemos la sustitución $y = y_1 + z$, de la cual $y' = {y_1}' + z'$. Se reemplaza en la ecuación de Ricatti

$${y_1}' + z' + P(x)\,(y_1 + z) + Q(x)\,(y_1^2 + z^2 + 2y_1 z) = R(x)$$

arreglando algunas cositas

$$(y_1{}' + P(x)\, y_1 + Q(x)\, y_1^2) + z' + P(x)\, z + Q(x)\, z^2 + 2y_1 z\, Q(x) = R(x)$$

pero y_1 solución, de modo que $y_1{}' + P(x)\, y_1 + Q(x)\, y_1^2 = R(x)$, por tanto,

$$z' + P(x)\, z + Q(x)\, z^2 + 2y_1 z\, Q(x) = 0$$

otro arreglo permite tener

$$z' + (\, P(x) + 2y_1\, Q(x)\,)\; z = -Q(x)\, z^2$$

como el buen ojo no te falla, te das cuenta que hemos llegado a una ecuación de Bernouilli en z. Pero te voy a agregar algo más, es posible transformar una ecuación de Ricatti directamente en ecuación Lineal haciendo la sustitución $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, esto es lo que se usa en la práctica, para que dar tantos rodeos.

Ejemplo 18 *Se sabe que* $y_1 = \dfrac{1}{x}$ *es solución de la ecuación* $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$*. Hallar la solución general de esta ecuación.*

Basta mirar la ecuación para saber que tiene una pinta de Ricatti que no se la puede, veamos si la pasamos a lineal.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\, z'$$

reemplazando en la ecuación dada

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\, z' = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

un arreglo más

$$z' + \frac{2}{x}\, z = -1, \qquad \text{¡lineal!}$$

Aquí se puede usar la fórmula de la lineal, pero voy a insistir en tomar $z = uv$, con lo cual $z' = u'v + v'u$. se tiene

$$u'v + v'u + \frac{2uv}{x} = -1 \Longrightarrow u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) + u'v = -1$$

Al resolver para v

$$v' + \frac{2v}{x} = 0 \Longrightarrow v = \frac{C_1}{x^2}$$

reemplazando

$$u' = -\frac{x^2}{C_1} \Longrightarrow u = -\frac{x^3}{3C_1} + C_2$$

Ahora estamos casi listos

$$z = uv = \frac{C_1}{x^2}\left[-\frac{x^3}{3C_1} + C_2\right] = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$$

En consecuencia, la solución de la ecuación de Ricatti es

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3C - x^3}$$

9. Factores Integrantes

Sirven para transformar ecuaciones diferenciales no exactas en exactas. No es un problema sencillo, pero tiene su gracia hallar estos factores integrantes.

Una función $\mu(x, y)$ tal que

$$M(x, y)\,\mu(x, y)\,dx + N(x, y)\,\mu(x, y)\,dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta, se llama **factor integrante** (F.I.)

Búsqueda de factores integrantes

Partimos con la idea de que la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

no es diferencial exacta. Pero como somos porfiados, esperamos que exista una función $\mu(x, y)$ que al multiplicarla la haga exacta, esto es,

$$M(x, y)\,\mu(x, y)\,dx + N(x, y)\,\mu(x, y)\,dy = 0$$

Ahora que estamos metidos en este embrollo, usemos la definición de exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\, M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu\, N)$$

sacando las derivadas de estos productos tenemos

$$\mu\,\frac{\partial M}{\partial y} + M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial N}{\partial x}$$

al asociar

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

y al dividir por μ

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left[N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\,\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

todavía podemos mejorar esto si nos percatamos que tenemos una derivada de logaritmo.

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\,\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} - M\,\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y}}$$

A esta ecuación hay que ponerle ojo, en los ejemplos que se muestran más adelante te darás cuenta de su importancia.

Caso I: *El F.I. depende sólo de x*

Siendo dependiente sólo de x la derivada respecto de y es cero, es decir,

$$\frac{\partial \ln\,\mu}{\partial y} = 0$$

luego, se tiene que

$$\frac{\partial \ln\,\mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\,\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

en caso de tener continuidad respecto de x en esta ecuación, podemos hacer integración, y tener

$$\ln\,\mu = \int \frac{1}{N}\,\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\,dx + \ln\,C$$

de donde se obtiene que

$$\mu = C\,e^{\displaystyle\frac{1}{N}\int\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\,dx}$$

es la forma que tiene este factor integrante.

Hay algunos alumnos que les gusta que pongan el ejemplo "al tiro", pero me imagino que tú me darás tiempo para mostrarte dos casos más, y luego practicar.

Caso II: *El F.I. depende sólo de y*

Siendo el F.I: dependiente sólo de y, la derivada respecto de x es cero, es decir,

$$\frac{\partial \ln\,\mu}{\partial x} = 0$$

luego, se tiene que

$$\frac{\partial \ln\,\mu}{\partial y} = -\frac{1}{M}\,\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

en caso de tener continuidad respecto de y en esta ecuación, podemos hacer integración, y tener

$$\ln\,\mu = -\int \frac{1}{M}\,\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\,dy + \ln\,C$$

de donde se obtiene que

$$\mu = C\,e^{\displaystyle\frac{1}{M}\int\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\,dy}$$

es la forma que tiene este factor integrante.

Caso III: *El F.I. depende de x e y*

Si existe factor integrante, y es de cierta forma función de un argumento del tipo xy, $x \pm y$, $x^2 + y^2$, $\frac{x}{y}$, etc, tenemos un "truco" infalible, hacer $z = f(x, y)$, y aplicar la regla de la cadena para hallar el $\mu(x, y)$. Te anoto con zoom el siguiente recordatorio

$$\boxed{\frac{\partial \ln\,\mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln\,\mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}$$

Ejemplo 19 *Hallemos solución general de la ecuación* $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$

Lo primero que uno mira es si la ecuación es de variables separables, lamentablemente, no es el caso, si sigues en la onda de buscar las "cinco patas" del gato, tampoco es homogénea. Si la escribe de otra forma, por ejemplo

$$y\,' - \frac{1}{x}\,y = y^2$$

no es lineal. Te pregunto en forma inocente ¿es de Bernouilli?, pues claro que si, pero esas ya las sabes resolver, déjame indicarte otra forma de cálculo de la solución. Veamos si es exacta

$$M = y + xy^2 \implies \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$$

$$N = -x \implies \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

se concluye que la ecuación no es exacta por tener estas derivadas distintas. Tu orgullo de ingeniero está intacto, no podemos dejarnos vencer, y le buscamos un factor integrante

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(1 + xy)$$

Estamos entre dos alternativas, como dijo el padre de la patria: " o vivir con honor o morir con gloria". Así es, en este caso, dividimos por N o dividimos por M. Si dividimos por M se tiene que

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = -\frac{1}{y(1 + xy)} \cdot 2(1 + xy) = -\frac{2}{y} = F(y)$$

¡¡Bingo!!, el factor integrante depende sólo de y ¡Viste que valía la pena esperar para hacer un ejemplo! Este F.I. es

$$\mu = C\,e^{-\int \frac{2}{y}\,dy} = \frac{C}{y^2}$$

tomando $C = 1$, el F.I: es $\mu(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$. Con este F.I ya calculado nos vamos a la ecuación que no era exacta, multiplicamos y tenemos

$$\frac{y + xy^2}{y^2}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy = 0, \qquad\qquad \text{¡Exacta!}$$

Ejemplo 20 *Resolvemos la ecuación* $(2y + 3x^2y^3)\, dx + (3x + 5x^3y^2)\, dy = 0$ *sabiendo que admite un factor integrante de la forma* $x^m y^n$

Del enunciado se deduce que al multiplicar la ecuación por dicho factor integrante resulta una ecuación exacta. Vamos por eso entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}((2y + 3x^2y^3)x^m y^n) = \frac{\partial}{\partial x}((3x + 5x^3y^2)x^m y^n)$$

al hacer esta derivada parcial se encuentra que

$$nx^m y^{n-1}(2y + 3x^2y^3) + x^m y^n(2 + 9x^2y^2) = mx^{m-1}y^n(3xy + 5x^3y^2) + x^m y^n(3 + 15x^2y^2)$$

al factorizar por $x^m y^n$ se tiene

$$x^m y^n \left[\, 2n + (3n + 9)x^2y^2 + 2 \,\right] = x^m y^n(\left[\, 3m + 3 + x^2y^2(5m + 15) \right]$$

de donde,

$$2n + 2 + (3n + 9)x^2y^2 = 3m + 3 + x^2y^2(5m + 15)$$

traspasando e igualando a cero

$$x^2y^2(3n + 9 - 5m - 15) + (2n + 2 - 3m - 3) = 0$$

lo que nos lleva a que

$$3n - 5m = 6, \qquad \text{y} \qquad 2n - 3m = 1$$

de lo cual se obtiene $m = -9$, $n = -13$, con lo cual, el factor integrante es $x^{-9}y^{-13}$. Resolvemos ahora la ecuación exacta

$$(2y + 3x^2y^2)\, x^{-9}y^{-13}\, dx + (3x + 5x^3y^2)\, x^{-9}y^{-13}\, dy = 0$$

Para ello tenemos que

$$\mu = \int (2y + 3x^2y^2)\, x^{-9}y^{-13}\, dx + K(y) = \int \frac{2y + 3x^2y^2}{x^9y^{13}}\, dx + K(y)$$

la integral es sencilla

$$\mu = -\frac{1}{4x^8y^{12}} - \frac{1}{2x^6y^{10}} + K(y)$$

Para determinar el valor de la función $K(y)$ derivamos respecto de y para tener

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{3}{x^8 y^{13}} + \frac{5}{x^6 y^{11}} + K'(y)$$

como $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ es conocida, entonces

$$\frac{3}{x^8 y^{11}} + \frac{5}{x^6 y^{11}} = \frac{3}{x^8 y^{13}} + \frac{5}{x^6 y^{11}} + K'(y)$$

deduciendo que $K(y)$ es una función constante, que denominamos C. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{4x^8 y^{12}} + \frac{1}{2x^6 y^{10}} = C$$

10. Aplicaciones Elementales

Mostramos una parte de la gran cantidad de aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales.

¡ Problemas Geométricos !

En primer lugar, es preciso recordar que una familia de curvas planas viene definida por una ecuación de la forma

$$F(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$$

en donde los c_i son parámetros independientes o bien satisfacen cierto número de relaciones entre ellos.

Se está interesado en obtener la ecuación de una familia de curvas que satisfacen cierta propiedad, para ,lo cual, tenemos dos caminos:

1. La propiedad establecida es tal que por nuestros conocimientos de geometría analítica, de la misma ecuación obtenemos la ecuación de la familia

2. La propiedad es tal que, cuando está expresada analíticamente, resulta una ecuación diferencial cuya solución produce la familia de curvas buscada.

Un par de ejemplos puede servir para mejor comprensión de las "borrosas" ideas dadas

Ejemplo 21 *Escribimos la ecuación de todos los círculos que pasan por el origen y tienen sus centros en el eje x*

La ecuación general de un círculo es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Usando la hipótesis de que pasan por el origen se tiene

$$h^2 + k^2 = r^2$$

y sabiendo que el centro está en el eje x, se obtiene, $k = 0$. Por tanto,

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de la familia

Ejemplo 22 *Hallemos la familia de curvas cuya distancia de la perpendicular desde cada tangente al origen es igual al valor de x en el punto de contacto.*

A primera vista la lectura es medio enredada, no obstante, te cuento que, la distancia del origen a la tangente viene dada por la fórmula

$$\frac{x\,y' - y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Ahora está casi armada la ecuación para resolver, en efecto, como por hipótesis es igual al valor de x en el punto, entonces se tiene

$$\frac{x\,y' - y}{\sqrt{1+y'^2}} = x$$

de donde

$$x\,y' - y = x\sqrt{(1+y'^2)}$$

al elevar al cuadrado

$$x^2\,y'^2 - 2xy\,y' + y^2 = x^2 + x^2\,y'^2$$

al reducir

$$2xy\,y' + x^2 - y^2 = 0$$

La solución de esta ecuación proporciona la familia buscada

$$2xy\,y' + x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

como no es exacta, buscamos un factor integrante

$$\left.\begin{array}{lll} M = x^2 - y^2 & \Longrightarrow & \dfrac{\partial\mu}{\partial y} = -2y \\[2ex] N = 2xy & \Longrightarrow & \dfrac{\partial\mu}{\partial x} = 2y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial x} = -4y$$

Al dividir este resultado por N se obtiene un F.I. que depende sólo de x. En efecto,

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial x}\right] = \frac{1}{2xy}\cdot(-4y) = -\frac{2}{x}$$

Este F.I. es

$$\mu = C\, e^{-\int \frac{dx}{x}} \Longrightarrow \mu = x^{-2}$$

Ahora tenemos que multiplicar la ecuación por este factor para hacerla exacta

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2}\, dx + \frac{2xy}{x^2}\, dy = 0$$

Su solución viene dada por

$$\int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{2x_0 y}{x_0^2}\, dy = C$$

de donde se obtiene

$$x + \frac{y^2}{x} = C$$

lo cual equivale a

$$(x - \frac{C}{2})^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$$

que corresponde a una familia de círculos.

¡ Trayectorias Ortogonales !

Sea $f(x, y, c) = 0$ una familia de curvas. Se quiere saber qué curvas, de otra familia, tienen la propiedad de que cualquiera de ellas corte en ángulo recto a algunas curvas de la familia dada. Para tratar de llegar a formular una expresión matemática (modelar el problema) que de respuesta a este problema, lo que se quiere es determinar una familia de curvas (na' que ver con Morandé con compañía) de la forma

$$g(x, y, k) = 0$$

tal que en cualquier intersección de las curvas de las dos familias, las **tangentes** sean perpendiculares. A estas familias se les conoce con el nombre de **Trayectorias ortogonales**.

El hecho de que las curvas sean ortogonales significa que en cada punto de intersección las pendientes de las curvas son recíprocas y de signo contrario, de aquí que para encontrar las trayectorias ortogonales es suficiente hallar la ecuacún diferencial de la familia dada y reemplazar la pendiente y' por $\frac{1}{y'}$ en esa ecuación y resolverla.

Ejemplo 23 *Hallar las trayectorias ortogonales de la familia* $x - 4y = C$

la ecuación diferencial de la familia es

$$dx - 4\, dy = 0$$

por tanto, las trayectorias ortogonales de esta familia deben satisfacer la ecuación

$$1 - 4\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0 \Longrightarrow 1 + 2\,\frac{dy}{dx} = 0$$

de donde se obtiene que $4x + y = K$ es la familia cuyas curvas intersectan ortogonalmete a las de la familia dada. Puedes hacer un gráfico para darte cuenta, vamos, no seas flojo(a) son sólo rectas.

¡ Problemas Químicos !

Las sustancias radiactivas poseen la propiedad de que la velocidad de descomposición en cada instante es proporcional a la cantidad de sustancia existente en ese instante. Matemáticamente este hecho lo expresamos como sigue:

Sea $y = f(t)$ la cantidad de sustancia radiactiva existente en el instante t. Se sigue que $y' = f'(t)$ es la velocidad de cambio de y en el instante t. Aplicando las hipótesis se tiene que

$$y' = -k\,y, \qquad k \text{ constante positiva}$$

representa la ley de descomposición. El signo menos se debe a que y decrece cuando t crece y por tanto y' es siempre negativo.

La solución de esta ecuación diferencial es $y = C\,e^{-kt}$, expresión que no se anula para ningún valor finito de t. Este hecho no permite que se pueda hablar de "tiempo total de vida" de una sustancia radiactiva, sin embargo, podemos determinar el tiempo necesario para que se desintegre una fracción de la muestra. Usualmente se elige la fración $\frac{1}{2}$, llamada **vida media** de la sustancia. Una expresión matemática de ella se encuentra como sigue: Si t representa el tiempo y $f(0)$ es la cantidad de sustancia presente en el tiempo $t = 0$, entonces la vida media la expresamos en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2}\,f(0)$$

Ejemplo 24 *La vida media del radio es de 1590 años. ¿Qué tanto por ciento desaparece en un año?*

Suponemos que la cantidad de radio presente en el tiempo $t = 0$ es $R = R_0$. Por tanto, la ecuación que modela la situación es

$$\frac{dR}{dt} = -k\,R \Longrightarrow R = R_0\,e^{-t\,\frac{\ln 2}{1590}}$$

lo cual representa la cantidad de radio en cualquier tiempo t. Para $t = 1590$ se tiene que $R = \frac{1}{2}\,R_0$ (la vida media). Hemos reemplazado el valor de la constante usando el hecho que

$$k = \frac{\ln 2}{\text{vida media}}$$

Es probable que alguien se esté preguntando ¿dónde la viste?. Bueno, te explico como sacar k

$$\frac{1}{2}\,R_0 = R_0\,e^{-1590k} \Longrightarrow k = \frac{\ln\,2}{1590}$$

con $t = 1$ determinamos la cantidad al cabo de un año

$$R = R_0\,e^{-\frac{\ln\,2}{1590}} = R_0\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1590}}$$

Si eso es lo que queda, entonces la cantidad que se perdió es

$$R_0 - R_0\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1590}}$$

de modo que el porcentaje x correspondiente es

$$\frac{R_0}{100} = \frac{R_0 - R_0\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1590}}}{x} \Longrightarrow x = 0,04358\%$$

¡ Ley de enfriamiento de Newton !

Esta ley expresa que: " *El coeficiente de variaci'on de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente*". En términos matemtícos esto se traduce como sigue: Sea $y = f(t)$ la temperatura del cuerpo en el tiempo t, y sea $A(t)$ la temperatura del medio ambiente, entonces la ley de Newton se expresa en la forma

$$y' = -k\,(\,y - A(t)\,), \qquad k > 0$$

con k constante. Al resolver esta ecuación encontraremos la temperatura del cuerpo en cualquier intante de tiempo t

Ejemplo 25 *Se calienta un alambre hasta* $100°$*, a continuación se sumerge en agua que se mantiene a* $30°$*, despues de 3 minutos la temperatura del alambre se ha reducido a* $70°$*. Hallar el tiempo necesario para que la temperatura del alambre sea de* $13°$*.*

Vamos a resolver el problema aplicando la ley de Newton e integrando inmediatamente. También se puede hacer por integración indefinida y calculando las constantes, pero el procedimiento que te muestro es "más mejor", y te va a gustar.

$$\begin{aligned} y' = -k\,(\,y - A(t)\,) \quad &\Longrightarrow \quad \int_{100}^{70} \frac{dy}{y-30} = -k\,\int_0^3 dt \\ &\Longrightarrow \quad \ln(40) - \ln(70) = -3k \\ &\Longrightarrow \quad k = \frac{1}{3}\,\ln(\frac{7}{4}) = 0,1865383 \end{aligned}$$

Con la constante k ya calculada, finiquitamos el problema como sigue

$$\int_{100}^{31} \frac{dy}{y-30} = -0,1865383 \implies \ln(70) = 0,1865383\ t$$

Al despejar se obtiene

$$t = \frac{\ln(70)}{0,1865383} = 22,7754, \text{ minutos}$$

¡ **Problemas de disolución** !

Un recipiente de V litros de capacidad está lleno con una solución de m gramos de sal. Por una llave entra una solución de concentración c, a razón de a litros por segundo, y por otra llave están saliendo a litros por segundo de la mezcla, que se supone homogénea en cada instante. Se trata de calcular la cantidad de sal que existe en el recipiente en cualquier instante de tiempo t.

Te cuento como hacer el planteamiento, no olvides que los problemas que tengas resolver a futuro serán de un esquema parecido, y por tanto, resuelto por métodos similares.

La llamada ecuación de **continuidad** establece que

$$\text{Aumento} = \text{Entradas - Salidas}$$

En este caso representa la cantidad de sal. Escrita de esta forma, esta ecuación no sirve ni de “torpedo”. Pero bueno, ¿Para qué está la matemática?, espero que por fin comprendas su utilidad.

Sean $y = f(t)$ los gramos de sal que hay en el recipiente t minutos después de haber comenzado la mezcla. Existen dos facpores que producen la variación de y:

1. La disolución, que agrega a litros de concentración c por segundo
2. La mezcla que sale y que disminuye la cantidad de sal, a razón de $a \cdot \frac{y}{V}$ gramos por segundo. Aprovecho de contarte que $\frac{y}{V}$ representa la concentración en el tiempo t

Con esto estamos listos, la ecuación de continuidad toma la forma

$$y' = a \cdot c - a \cdot \frac{y}{V}$$

Ahora si puedes respirar tranquilo(a), una vez más, la matemática vuelve a ser tu “chapulin colorado”.

Ejemplo 26 *En un estanque de 378,5 litros de capacidad va entrando salmuera, que contiene 240 gramos de sal por litro, a razón de 11,35 litros por minuto, mezclándose con el agua limpia que contiene el estanque. Al mismo tiempo, va saliendo una cantidad igual de la mezcla por minuto. Hallar la cantidad de sal que hay en el estanque al cabo de una hora.*

Al mirar la ecuación de continuidad en su forma algebraica, debes darte cuenta que necesitas tener a mano a, c y V. Slo por que me caes bien y tienes cara de "eterno campeón" te hago el problema con "manzanitas".

En 11,35 litros hay 2724 gramos de sal ¿cachaste?. Esto lo pasas a kilos, son 2,724 kilos de sal, y de acuerdo con los datos del problema, corresponde a la cantidad de sal que está entrando. El problema dice que también sale cierta cantidad de mezcla, obvio que tiene que ser un poco menos salada. Necesitamos la concentración, que es la cantidad de sal en la unidad de volumen de solución. Esto es

$$c = \frac{y}{V} = \frac{11,35\, y}{378,5}$$

Tenemos todos los datos, por tanto, la ecuación de continuidad es

$$y' = 2,724 - \frac{11,35\, y}{378,5}$$

que en diferenciales es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1031,0,34 - 11,35\, y}{378,5}$$

se separan variables, ponemos "al tirante" los límites de integración, y tenemos

$$378,5 \int_0^y \frac{dy}{1031,0,34 - 11,35\, y} = \int_0^{60} dt$$

la primera integral es un logarítmo, al evaluar, usando calculadora por supuesto, debes tener

$$y = 75,81234185 \text{ kgs de sal}$$

¡ Problemas de Economía !

Ejemplo 27 *El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye durante un peirodo de 10 años a una razón que depende de la edad de la máquina. Cuando la máquina tiene x años, la razón a la cual está cambiando su valor es $220(x-10)$ pesos por año.*

1. *Expresar el valor de la máquina como función de su edad y su valor inicial*
2. *Si la máquina costaba originalmente \$12000 hallar su valor al cabo de 10 años*

Para dar respuesta a la primera pregunta, sea $y = f(x)$ el valor de la máquina a los x años. La formulación matemática del problema es

$$\frac{dy}{dx} = 220\,(x - 10)$$

una sencilla ecuación de variables separables, que en un “abrir y cerrar de ojos” resuelves para tener

$$y = 220\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right) + C = 110x^2 - 2200x + C$$

donde $C = y_0$ es el valor inicial.

La respuesta a la segunda “custión” es la siguiente. Si $C = y_0 = 12000$ es el precio inicial, entonces

$$y = 11000 - 22000 + 12000 = 1000$$

Ejemplo 28 *Una unidad de control de costos ha encontrado que a medida que la unidad se amplía, el costo promedio mensual* y *de los elementos de oficina se relacionaba con el número de empleados* x*, por medio de la ecuación*

$$y' + 2y = y^2\, e^{-x}$$

Hallar el costo promedio , si para $x = 0$ *es* $y = 3$.

A estas alturas del partido, mirar la ecuación y “cachar” de que tipo se trata, ya debe ser “pan comido” para tí ¿me equivoco?. Si, es de la Marlen Olivarí, perdón, ¿en que estaba pensando?, es de ¡Bernouilli!.

La pasamos a lineal, sabiendo que $n = 2$, y que $z = y^{-1}$. Tenemos

$$-y^2\,\frac{dz}{dx} + 2y = y^2\, e^{-x} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} - 2y^{-1} = -e^{-x} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} - 2z = -e^{-x}$$

ahora que se ha transformado en un linda y hermosa lineal, hacemos $z = uv$, de la cual, $z' = u'v + v'u$. Al reemplazar obtenemos

$$u'v + v'u - 2uv = -e^{-x} \Longrightarrow (u' - 2u)\,v + u\,v' = -e^{-x}$$

Para anular la variable u resolvemos el paréntesis

$$u' - 2u = 0 \Longrightarrow u = e^{2x}$$

Con esto volvemos para hallar v

$$u\,v' = -e^{-x} \Longrightarrow v' = -e^{-3x} \Longrightarrow v = \frac{1}{3}\,e^{-3x} + C$$

Se concluye que

$$z = e^{2x}\,\left[\frac{1}{3}\,e^{-3x} + C\right]$$

como $z = y^{-1}$, entonces

$$y^{-1} = e^{2x} \left[\frac{1}{3}\, e^{-3x} + C \right]$$

De la condición inicial $y(0) = 3$ se tiene $C = 0$, con lo cual, la respuesta al problema es

$$y^{-1} = \frac{1}{3}\, e^{-x}$$

O en forma más elegante

$$y = 3\, e^{x}$$

¡ Problemas de Electricidad !

Dada la función potencial o la familia de curvas equipotenciales para un campo eleéctrico, determinaremos las correpondientes líneas de flujo. Salvo el problema de lenguaje, este problema es equivalente al de encontrar las trayectorias orogonales.

Ejemplo 29 *Se tienen dos alambres perpendiculares al plano* xy*, que lo cortan en los puntos* $(1, 0)$ *y* $(-1,)$*, llevando cada uno de ellos una carga eléctrica estática de igual intensidad, pero de signos opuestos. Las líneas equipotenciales son los círculos*

$$x^2 + y^2 - 2cx + 1 = 0$$

las ecuaciones de las líneas de flujo y determinar su naturaleza.

Hay que obtener la ecuación diferencial de la famila de curvas equipontenciales, ¿cómo?, eliminando c por derivación

$$x^2 + y^2 - 2cx + 1 = 0 \Longrightarrow c = -\frac{x^2 + y^2 + 1}{2x}$$

al derivar respecto de x se tiene

$$0 = -\frac{(2x + 2yy\,')(2x) - (2)(x^2 + y^2 + 1)}{4x^2}$$

que al reducir se transforma en

$$2xyy\,' + x^2 - y^2 - 1 = 0$$

O bien, en diferenciales

$$2xy\, dy + (x^2 - y^2 - 1)\, dx = 0$$

Ahora usamos el hecho de que las líneas de flujo deben ser ortogonales a las soluciones de esta última ecuación. Por tanto, la familia de líneas de flujo es

$$2xy\left(-\frac{dx}{dy}\right)+(x^2-y^2-1)\,dx=0$$

que en diferenciales toma la forma

$$2xy\,dx+(1-x^2+y^2)\,dy=0$$

Resolvemos esta ecuación pensando en las exactas.

$$M=2xy \qquad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=2x$$

$$N=1-x^2-y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2x$$

¡falló por un pelo! dijo el pelao Acosta. Pero, la solución es inmediata

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{4x}{2xy}=\frac{2}{y}$$

O sea, ¡¡ el factor integrante depende de y!!. ¡Qué maravilla!. Esto es,

$$\mu=e^{-\int \frac{2}{y}\,dy}=\frac{1}{y^2}$$

Con esto, tenemos la ecuación exacta

$$\frac{2xy}{y^2}\,dx+\frac{1-x^2+y^2}{y^2}\,dy=0$$

cuya solución es de la forma

$$\int_{x_0}^{x}\frac{2xy}{y^2}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{1-x^2+y^2}{y^2}\,dy=C$$

Si integras, evalúas y reduces, no tengo dudas, que sacas

$$x^2+y^2-1=ky$$

en donde k es una constante que resulta de juntar todos los x_0, y_0 y la misma C. Al final de cuentas tenemos que las líneas de flujo son

$$x^2+(y-k)^2=1+k^2$$

que nos indica las íneas de flujo son círculos con centro sobre el eje x que pasan por los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$.

11. Ecuaciones Implícitas

Si la ecuación diferencial de primer orden viene dada en forma implícita

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

entonces para cada par (x, y) queda determinado un conjunto de valores de y' que satisface a la ecuación. Este conjunto de valores puede ser vacío, finito o infinito. El caso común es que exista un número finito de valores de y' que satisfacen la ecuación (1).

Si la ecuación (1) puede ser resuelta con respecto de y' (teorema de la función implíta) entonces se obtienen una o varias ecuaciones de la forma

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \cdots$$

Integrando estas ecuaciones se hallan las soluciones de la ecuación diferencial (1).

Ejemplo 30 *Resolvemos la ecuación* $y'^2 - (x + y)\, y' + xy = 0$

Se observa que tenemos una ecuación cuadrática en y', luego,

$$y' = \frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = \frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

al simplificar se tiene

$$y' = \begin{cases} x \\ y \end{cases}$$

Integrando, por separado, cada una de estas ecuaciones hallamos que

$$y_1 = \frac{x^2}{2} + C, \quad y_2 = C\, e^x$$

son familias de soluciones

En general, las ecuaciones diferenciales implícitas no son sencillas de resolver. Los casos que resultan simples los mostramos a continuación.

¡ Ecuación $F(y') = 0$!

Si la ecuación (1) tiene la forma $F(y') = 0$, y existe al menos una raíz real $y' = k_1$, entonces $y = k_1\, x + C$, de donde $k_i = \dfrac{y - C}{x}$. Se tiene entonces, que como k_1 es raíz de $F(y') = 0$, la función $F(\dfrac{y - C}{x})$ es la solución de la ecuación considerada.

Ejemplo 31 *Resolvemos* $y'^2 - y' - 2 = 0$

Al mirar la ecuación se observa que es cuadrática en y'. veamos si se pueden hallar sus raíces.

$$y'^2 - y' - 2 = 0 \Longrightarrow (y' - 2)(y' + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y' = 2 \\ y' = -1 \end{cases}$$

al resolver se hallan dos familias

$$y = 2x + C, \qquad \text{y} \qquad y = -x + C$$

¡ Ecuación $F(x, y') = 0$!

Si resulta difícil de resolver respecto de y', conviene introducir el parámetro t, y sustituir la ecuación $F(x, y') = 0$ por las ecuaciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

luego se usa el hecho que, $dy = y'\,dx$ para tener, $dy = g(t)\,f'(t)\,dt$, de donde

$$y = \int g(t)\,f'(t)\,dt + C$$

Como dice el profesor Salomón ¡ Ojo ojo, oreja, esternón ! Si la ecuación $F(x, y') = 0$ se puede resolver respecto de x, entonces es más cómodo hacer $y' = t$, esto vale ¡around de world!

Ejemplo 32 *Resolvemos* $y'^3 - y' - 1 = x$

Ni se te ocurra despejar la y'. ¿Cómo que porqué?, no me vas a decir que no viste que es cúbica. La alternativa es hacer $y' = t$, con lo cual $x = t^3 - t - 1$. Con esto,

$$dy = y'\,dx \Longrightarrow dy = t\,(3t^2 - 1)\,dt \Longrightarrow y = \int (3t^3 - t)\,dt$$

al resolver,

$$y = \frac{3}{4}\,t^4 - \frac{1}{2}\,t^2 + C$$

El problema termina escribiendo la familia de curvas parametrizada.

$$x = t^3 - t - 1, \qquad y = \frac{3}{4}\,t^4 - \frac{1}{2}\,t^2 + C$$

Siempre que sea posible, eliminando el parámetro t puedes hallar la familia cartesiana.

Ejemplo 33 *Resolvemos* $y' = x\,\sqrt{1 + y'^2}$

Aquí tienes más alternativas para hallar la solución. Si se te ocurre poner $x = t$, entonces

$$y' = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \Longrightarrow (y-C)^2 + x^2 = 1$$

y tienes la familia paramétrica que es solución. Algún amigo o amiga, pudo hacer $y' = tg\, t$, de donde $x = sen\, t$. Luego,

$$dy = y'\, dx \Longrightarrow dy = tg\, t \cdot cos\, t\, dt \Longrightarrow y = -cos\, t + C$$

De manera que la familia de curvas integrales (solución general) es

$$x = sen\, t, \qquad y = C - cos\, t$$

Al eliminar el parámetro tienes que la familia cartesiana es

$$(y-C)^2 + x^2 = 1$$

¡ Ecuación $F(y, y') = 0$!

Si la ecuación puede resolverse respecto de y', entonces se introduce un parámetro t como sigue:

$$y = f(t), \qquad y' = g(t)$$

Al usar el hecho que $dy = y'\, dx$ se tiene

$$dx = \frac{1}{y'}\, dy = \frac{f'(t)\, dt}{g(t)}$$

Al integrar,

$$x = \int \frac{f'(t)\, dt}{g(t)} + C$$

con lo cual, las curvas integrales buscadas son la familia paramétrica

$$x = \int \frac{f'(t)\, dt}{g(t)} + C, \qquad y = g(t)$$

Haciéndome eco de "tutu tutu" cuando afirma que "los quiero mucho". Te aconsejo que, si es posible despejar y en la ecuación $F(y, y') = 0$, entonces te conviene tomar $y' = t$.

Ejemplo 34 *Resolvemos* $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1$

De algo sirve la trigonometría

$$y' = tg\, t, \qquad y = sec\, t$$

Ahora trabajamos el dx.

$$dx = \frac{1}{y'}\, dy \Longrightarrow dx = \frac{sec\, t\ tg\, t\ dt}{tg\, t} = sec\, t\ dt$$

Un poco de memoria "ram" y tienes,

$$x = \ln(sec\, t + tg\, t) + \ln\, C$$

con lo cual, las curvas integrales buscadas tienen a forma

$$x = \ln(sec\, t + tg\, t) + \ln\, C, \qquad y = sec\, t$$

Haciendo uso de algunos de tus momentos de "ocio", puedes verificar que al eliminar el parámetro llegas a la familia cartesiana

$$y = \frac{1 + C\, e^{2x}}{2C}$$

¡ Ecuación $F(x, y, y') = 0$!

Esta es la más "cototа", pero no para que "te cortes las venas" o vayas a enconderte en la "polleras" de mamá. Se considera una parametrización de la forma

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad y' = f_3(u, v)$$

donde u y v son los parámetros, y se emplea el hecho que, $dy = y'\, dx$, para obtener:

$$\begin{aligned}
dy = y'\, dx \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial u}\, du + \frac{\partial f_2}{\partial v}\, dv = f_3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial f_1}{\partial v}\, dv \right) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\, \frac{dv}{du} = f_3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\, \frac{dv}{du} \right) \\
&\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} - f_3 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial v} \right) \frac{dv}{du} = f_3 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial u} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{f_3 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial u} - \dfrac{\partial f_2}{\partial u}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial v} - f_3 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial v}}
\end{aligned}$$

¡No me lo vas a creer!. Esta última ecuación raras veces se puede resolver en forma directa. Sin embargo, existen los siguientes casos simples:

Caso I Si $F(x,y,y')=0$ se puede reducir a una ecuación de la forma

$$y=f(x,y')$$

entonces se considera que x e $y'=p$ son los parámetros u y v (los que aparecen en la última expresión "mos - truosa"). En tal caso

$$y=f(x,p)$$

de donde

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial p}\,dp$$

O bien,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}$$

lo cual significa que

$$y'=p\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dx}$$

Integrando esta ecuación se obtiene la familia $\phi(x,p,C)=0$, de lo cual se deduce que la familia de curvas integrales es

$$\phi(x,p,C)=0,\qquad y=f(x,p)$$

Caso II Si $F(x,y,y')=0$ se puede reducir a una ecuación de la forma

$$x=f(y,y')$$

entonces se considera que y e $y'=p$ son los parámetros u y v, y se usa el hecho que $dy=y'\,dx$, de donde, $x=f(y,p)$, para tener que

$$dy=y'\,dx\Longrightarrow dy=p\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial p}\,dp\right)$$

de donde

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{dp}{dy}$$

Al integrar se obtiene una familia $\phi(y,p,C)=0$, de la cual se halla que la familia de curvas integrales es

$$\phi(y,p,C)=0,\qquad x=f(y,p)$$

Ejemplo 35 *Resolvemos la ecuación de Lagrange* $y=x\,f(y')+g(y')$

Yo creo que a mitad del problema se te van a poner los ojos como circunferencias concéntricas, si pasa eso, no te creas Napoleón, ¡eres Napoleón!. A algunos profes les encanta que sus alumnos y alumnas se "cabecéen" con este tipo de problemas, por eso es que conviene echarle una miradita al desarrollo.

Hacemos $y\,' = p$ para tener que nuestra ecuación toma la forma

$$y = x\,f(p) + g(p)$$

harto más decente que la anterior. Derivamos respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = f(p) + x\,f\,'(p)\,\frac{dp}{dx} + g\,'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

pero $\dfrac{dy}{dx} = p$, por tanto,

$$p = f(p) + x\,f\,'(p)\,\frac{dp}{dx} + g\,'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

tenemos una ecuación con p y con x. ¡Vamos bien!. Un arreglo para tener

$$p\,\frac{dx}{dp} = f(p)\,\frac{dx}{dp} + x\,f\,'(p) + g\,'(p)$$

así se ve mejor todavía. Pero hay un par de $\dfrac{dx}{dp}$ que están sueltos, mejor los juntamos.

$$(\,p - f(p)\,)\,\frac{dx}{dp} = x\,f\,'(p) + g\,'(p)$$

Te hago otro arreglo

$$\frac{dx}{dp} - x\,\left(\frac{f\,'(p)}{p - f(p)}\right) = \frac{g\,'(p)}{p - f(p)}$$

Para que adivines, buen adivinador, si escribo

$$P = \frac{f\,'(p)}{p - f(p)}, \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{g\,'(t)}{p - f(p)}$$

la ecuación toma la forma

$$\frac{dx}{dp} - x\,P(p) = Q(p)$$

Estoy haciendo memoria y me acordé que el ramo de Algebra Lineal es súper fome. ¿Qué tipo de ecuación ves? Exactamente, se nota que has estudiado, es lineal. Una vez resuelta esta ecuación lineal se halla una familia $\phi(x, p, C) = 0$, de donde

$$\phi(x, p, C) = 0, \qquad y = x\,f(p) + g(p)$$

son las curvas integrales buscadas.
Observaciones a Ecuación de Lagrange

1. Al dividir por $\dfrac{dp}{dx}$ se pierden las soluciones $\dfrac{dp}{dx} = 0$ (si es que existen), lo que significa tener $p = k$ (k = constante). Al considerar $p = k$ la ecuación se satisface si y sólo si $f(p) - p = 0$. Ahora bien, si esta úkltima ecuación en p tiene raíces reales $p = p_i$, entonces a las soluciones halladas hay que agregar

$$y = x\, f(p) + g(p), \qquad p = p_i$$

   O bien, eliminando p, agregar solamente la familia de rectas

$$y = x\, f(p_i) + g(p_i)$$

2. Si $f(p) - p = 0$, entonces al dividir por $\dfrac{dp}{dx}$ se pierde la solución $p = k$, de modo que, en este caso, $f(y\,') = y\,'$, pues

$$f(p) - p = 0 \Longrightarrow f(p) = p \Longrightarrow f(y\,') = y\,', \quad \text{pues } y\,' = p$$

   En consecuencia, la ecuación de Lagrange toma la forma

$$y = x\, y\,' + g(y\,')$$

   que se conoce como ecuación de **Clairaut**. Para resolverla se toma $y\,' = p$, con lo cual

$$y = x\, y\,' + g(y\,') \Longrightarrow y = x\, p + g(p)$$

   se deriva respecto de x

$$p = \frac{dy}{dx} = p + x\,\frac{dp}{dx} + g(y\,')\,\frac{dp}{dx}$$

   de la cual

$$(x + g(y\,'))\,\frac{dp}{dx} = 0$$

   de donde, el primer caso es

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow p = C$$

   al reemplazar $y\,' = p$, se obtiene la familia $y = C\,x + g(C)$.

   El segundo caso es

$$x + g\,'(p) = 0$$

   cuya solución se determina de

$$x + g\,'(t) = 0, \qquad \text{y} \qquad y = px + g(p)$$

12. Ecuaciones de orden mayor que uno

Una ecuación de n - ésimo orden tiene la forma

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

para la cual señalamos los siguientes casos habituales:

- **Ecuación**: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$

El "viejo truco" es hacer $y^{(k)} = p$

Ejemplo 36 *Resolvemos* $y^{(5)} - \dfrac{1}{x}\, y^{(4)} = 0$

Apelando a la indicación,

$$y^{(4)} = p \Longrightarrow p' - \frac{1}{x}\, p = 0 \Longrightarrow p = C_1\, x$$

Ahora que tenemos el p listo, recordamos esos viejos tiempos de cálculo de integrales

$$\begin{aligned}
y^{(4)} = p = C_1\, x \quad &\Longrightarrow \quad y^{(3)} = C_1\, \tfrac{x^2}{2} + C_2 \\
&\Longrightarrow \quad y'' = C_1\, \tfrac{x^3}{6} + C_2\, x + C_3 \\
&\Longrightarrow \quad y' = C_1\, \tfrac{x^4}{24} + C_2\, \tfrac{x^2}{2} + C_3\, x + C_4 \\
&\Longrightarrow \quad y = C_1\, \tfrac{x^5}{120} + C_2\, \tfrac{x^3}{6} + C_3\, \tfrac{x^2}{2} + C_4\, x + C_5
\end{aligned}$$

- **Ecuación**: $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

Otra vez, el famoso "truco" del $y' = p$, pero teniendo presente que p es función de y, lo cual lleva a tener que expresar en términos de p las derivadas $\dfrac{d^k y}{dx^k}$. Te recuerdo lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = p \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\, \frac{dp}{dy}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} \quad &= \quad \frac{d}{dx}\left(p\, \frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\, \frac{dp}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} \\
&= \quad \frac{dp}{dy} \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{d^2p}{dy^2}\, p^2 \\
&= \quad p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\, \frac{d^2p}{dy^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 37 *Resolvemos* $y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = p \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación dada

$$y\,p\,\frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Longrightarrow p\left(y\,\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$$

Obtenemos la solución trivial, $p = 0$, y de la ecuación $y\,\dfrac{dp}{dy} - p = 0$, que es de variables separables, la solución $p = C_1\,y$. Para eliminar el parámetro, recordemos que

$$\frac{dy}{dx} = p \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = C_1\,y \Longrightarrow y = C_2\,e^{C_1\,x}$$

- **Ecuación**: $F(x, y, y\,', y\,'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

Si esta ecuación es homogénea respecto de los argumentos $y, y\,', \cdots, y^{(n)}$. Es decir,

$$F(x, ky, ky\,', ky\,'', \cdots, ky^{(n)}) = k^p\,F(x, y, y\,', y\,'', \cdots, y^{(n)})$$

entonces es posible reducirle el orden, en una unidad, mediante la sustitución $y = e^{\int z\,dx}$, siendo z variable desconocida y por calcular.

Ejemplo 38 *Resolvemos* $y\,y\,'' - (y\,')^2 = 6xy^2$

Es claro que la ecuación es de la forma $F(x, y, y\,', y\,'') = 0$. Además, tiene una “pinta” de homogénea que no se la puede

$$F(x, ky, ky\,', ky\,'') = k^2\,F(x, y, y\,', y\,'')$$

Hacemos la sustitución que se indicó

$$y = e^{\int z\,dx} \Longrightarrow y\,' = z\,e^{\int z\,dx} \Longrightarrow y\,'' = (z\,' + z^2)\,e^{\int z\,dx}$$

Reemplazamos en la ecuación dada

$$(z\,' + z^2)\,e^{\int z\,dx} \cdot e^{\int z\,dx} - z^2\,e^{2\int z\,dx} = 6x\,e^{2\int z\,dx}$$

al simplificar queda

$$z\,' + z^2 - z^2 = 6x \Longrightarrow z\,' = 6x \Longrightarrow z = 3x^2 + C_1$$

Con esto, se llega a establecer, que la solución general es

$$y = e^{\int (3x^2 + C_1)\, dx} = e^{x^3 + C_1\, x + C_2}$$

Finalizamos, mencionando que las ecuaciones de segundo orden tienen tres casos particulares sencillos de resolver:

Ecuación $F(x, y'') = 0$

Se debe hacer $y' = p$ para reducirla al tipo $F(x, p') = 0$ ya conocida

Ecuación $F(y', y'') = 0$

Se debe hacer $y' = p$ para reducirla al tipo $F(p, p') = 0$ ya conocida

Ecuación $F(y, y'') = 0$

Se debe hacer $y' = p$ para reducirla a la forma $y'' = p\, \frac{dp}{dy}$ ya conocida

Veamos que tal te va con una ecuación de esta clase.

Ejemplo 39 *Resolvemos* $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Como lo indica la constitución y la biblia, hacemos $\dfrac{dy}{dx} = p$, con lo cual $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$, teniéndose que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}$$

separamos variables

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a} \Longrightarrow \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

se hizo $p = tg\, t$ para sacar la integral. Al tomar exponencial

$$p + \sqrt{1 + p^2} = C_1\, e^{x/a} \Longrightarrow \sqrt{1 + p^2} = C_1\, e^{x/a} - p$$

Elevando al cuadrado y despejando p, tienes que llegar a

$$p = \frac{1}{2C_1}\, \left(C_1\, e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$

como $\frac{dy}{dx} = p$, entonces al integrar

$$y = \frac{a}{2C_1}\, \left(C_1\, e^{x/a} + e^{-x/a}\right) + C_2$$

Te invito a que hagamos uno más.

Ejemplo 40 *Resolvemos* $3y'' = y^{-5/3}$

Como siempre, $y' = p \Longrightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$. Te darás cuenta que la x no aparece en la ecuación que hay que resolver, ya que es del tipo $F(y, y'') = 0$, por tanto las derivadas deben ponerse en función de y. Esto se hace como sigue.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

Luego, nuestra ecuación

$$3p\,\frac{dp}{dy} = y^{-5/3} \Longrightarrow 3p\,dp = y^{-5/3}\,dy$$

integrando,

$$p^2 = -y^{-2/3} + C_1 \Longrightarrow p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}$$

Ahora, cambiamos de p a la variable y para tener

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2/3}} \Longrightarrow x = \pm\int (C_1 - y^{-2/3})^{-1/2}\,dy$$

Haciendo $y^{-1/3} = C_1^{1/2}\,sen\,t$ y despejando y se llega a

$$y = C_1^{-3/2}\,sen^{-3}t \Longrightarrow dy = -3C_1^{-3/2}\,sen^{-4}t\,cos\,t\,dt$$

Reemplazando en la integral

$$x = \pm\int C_1^{-1/2} \cdot \frac{-3}{cos\,t}\,C_1^{-3/2}\,sen^{-4}t\,cos\,t\,dt$$

un arreglo para que se vea mejor,

$$x = \pm\int C_1^{-2}\,sen^{-4}t\,dt \Longrightarrow x = \pm C_1^{-2}\int csc^4t\,dt$$

Si no recuerdas los trucos de integración, en esta se hace

$$x = \pm\frac{1}{C_1^2}\int csc^2t\,(1 + ctg^2t)\,dt \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{C_1^2}\left(-ctg\,t - \frac{1}{3}\,ctg^3t\right) + C_2$$

Para estar de vuelta en la variable y, la sustitución que hicimos, nos lleva a un triángulo rectángulo de catetos $y^{-1/3}$, $\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}$ e hipotenusa $C_1^{1/2}$, del cual obtenemos la cotangente. Se llega a:

$$x = \pm\frac{1}{C_1^2}\left(-\frac{\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}}{y^{-1/3}} - \frac{1}{3}\,\frac{(C_1 - y^{-2/3})^{3/2}}{y^{-1}}\right) + C_2$$

13. Teoremas de Existencia y Unicidad

Interesa conocer de una ecuación diferencial explícita de primer orden

$$x' = f(t, x)$$

con la condición inicial $x(t_0) = x_0$

si existe una solución $x(t)$ y si ésta es única. Lo cual no siempre es cierto, a menos que se impogan determinadas condiciones. Además de estos dos problemas fundamentales, de existencia y unicidad de la solución, quedan por considerar; la extensión del intervalo de existencia, el estudio del comportamiento de la solución al acercarse a los extremos de dicho intervalo, y el problema de la dependencia, de la solución de las condiciones iniciales. Esto último consiste en, que si designamos por

$$F(t, t_0, x_0)$$

la solución del problema de valor inical, entonces aparece, explícitamente, la dependencia de las condiciones iniciales. Más aún, bajo ciertas condiciones de $f(t, x)$ la solución $F(t, t_0, x_0)$ puede ser una función continua de sus variables y también, bajo otras condiciones, $F(t, t_0, x_0)$ puede ser diferenciable o analítica. Todo esto no es otra cosa que preguntarse “ Si las condiciones iniciales se cambian levemente ¿cómo varía la solución, leve o fuertemente?.

Definición 13.1 *Una función $f(t, x)$ es Lipschitziana en la segunda variable, en un dominio D, si existe una constante $k \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|, \quad (t, x_1), (t, x_2) \in D^1$$

Proposición 13.2

1. *Si f Lipschitziana, entonces f es continua*
2. *Si f es continua, entonces no necesariamente f es Lipschitziana*

Demostración

1) Vamos a demostrar que $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - F(x_0)\| < \epsilon$

De la hipótesis de que f es Lipschitziana se deduce que

$$\|f(t, x) - f(t, x_0)\| \leq \ \|x - x_0\|$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ se tiene que

$$\|f(t, x) - f(t, x_0)\| < \epsilon$$

así, f es continua.

[1] la doble barra es valor absoluto, el procesador no acepta el alt 124

2) Para probar esto, basta un contrajemplo. Sea $f(t,x) = \sqrt{x}$ en $D = [0,1] \times [0,1]$. No hay drama para ver que es f continua en D. Pero,

$$\|f(t,x) - f(t,x_0)\| = \|\sqrt{x} - 0\| = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\|x - 0\|, \quad \forall x \in (0,1)$$

Dado que $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ si $x \to 0$, resulta imposible hallar la constante k de Lipschitz.

Proposición 13.3 *Sea $D = [a,b] \times [c,d]$*

1. *Si $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ existe y está acotada en D, entonces $f(t,x)$ es Lipschitziana.*
2. *Si $f(t,x)$ y $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ son continuas en D, entonces $f(t,x)$ es Lipschitziana*

Demostración

1) Aplicando el T.V.M a la función $f(tx,x)$ en la variable x, se tiene

$$\frac{\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} = \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(t,c) \right\|$$

de donde

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| = \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(t,c) \right\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

se sigue que f es Lipschitziana en la segunda variable.

2) Sabemos que $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ es continua es D, lo que implica que es acotada en D. De modo que satisface la parte 1). Se concluye que es Lipschitziana.

Proposición 13.4 *El problema de valor inicial $x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$ es equivalente a la ecuación integral*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt$$

Demostración

i) Partimos del PVI para establecer la ecuación integral

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt$$

de lo cual

$$x - x_0 = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt \Longrightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt$$

2i) Ahora, partiendo de la ecuación integral tenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt \Longrightarrow dx = f(t,x)\,dt \Longrightarrow x' = f(t,x)$$

Además,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt \Longrightarrow x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(t,x)\,dt = x_0$$

con lo cual se completa la demostración.

Teorema de existencia y unicidad

Sea $f(t,x)$ continua y Lipschitziana en el rectángulo

$$D = \{(t,x)/\ t_0 - a \le t \le t_0 + a,\ x_0 - b \le x \le x_0 + b\}$$

Entonces, existe una solución única $x = x(t)$ en

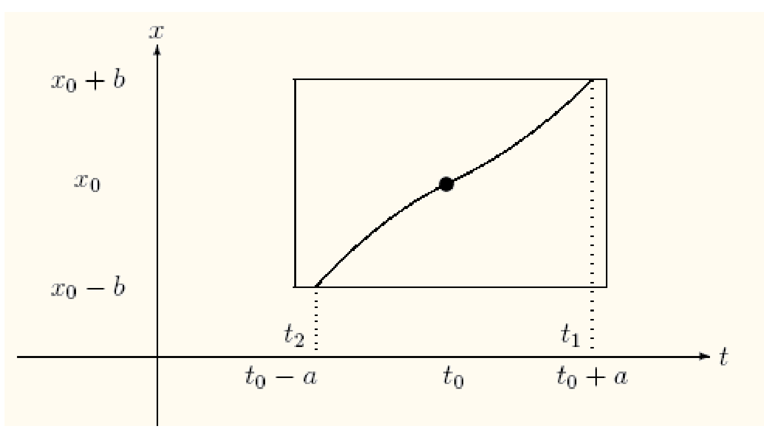
$$t_0 - H \le t \le t_0 + H$$

del problema de valor inicial

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

En donde

$$H < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\}, \quad M = \max_D \{f(t,x)\}, \quad N = \text{ constante de Lipschitz}$$



Te voy a dar una idea de que se trata esto, la demostración es super larga, no aporta mucho, salvo que seas estudiante de altas matemáticas, pero igual la hago por si la necesitaras.

Observaciones

No puede asegurarse que la solución $x = x(t)$ del problema de valor inicial dado exista en todo el intervalo $\{t_0 - a \le t \le t_0 + a\}$, ya que ella podría salirse del rectángulo D a través de

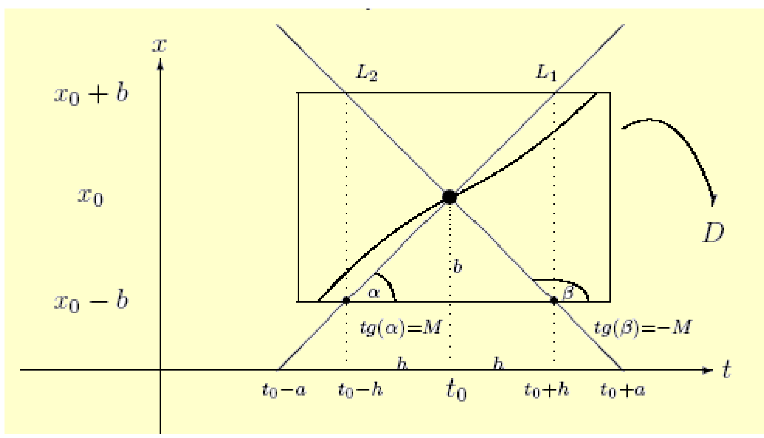
$x = x_0 \pm b$ (en la figura lo hace a través de las abscisas t_1 y t_2). Lo que si podemos asegurar es que la curva integral $x = x(t)$ no se va a salir de los limites de D cuando t varíe en

$$t_0 - H \leq t \leq t_0 + H, \quad H = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

ya que en este caso, si trazamos las rectas L_1 y L_2 por los puntos (t_0, x_0), $(t_0 - h, x_0 - b)$ y (t_0, x_0), $(t_0 + h, x_0 - b)$ se tiene que el coeficiente angular de la curva integral buscada se encuentra entre los coeficientes angulares de estas dos rectas, a saber

$$m(L_1) = \frac{b}{h} = M, \qquad m(L_2) = -\frac{b}{h} = -M$$

la figura siguiente ilustra este hecho.



Si las rectas salen de los límites del rectángulo D, las abscisas de los puntos de corte serán $t_0 \pm \frac{b}{M}$. Por lo tanto, la abscisa del punto de salida de la curva integral puede ser solamente menor o igual que $t_0 + \frac{b}{M}$, y mayor o igual que $t_0 - \frac{b}{M}$. En consecuencia, se puede demostrar existencia de la solución en

$$t_0 - H \leq t \leq t_0 + H, \qquad M = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

Pero, es mas sencillo demostrar antes la existencia de la solución en

$$t_0 - H \leq t \leq t_0 + H, \qquad M < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\}$$

La solución del problema de valor inicial planteado, se puede continuar más allá del intervalo $t_0 - H \leq t \leq t_0 + H$, siempre que en un entorno del nuevo punto inicial se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad. De este modo, en ciertos casos se puede continuar la solución en todo el eje t, pero es posible también que la curva integral no pueda ser continuada debido al acercamiento a un punto donde no se cumplan las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, o bien, que la curva integral se aproxima a una asíntota paralela al eje x.

La esencia de estos resultados teóricos sobre existencia, unicidad, prolongación de la solución, y dependencia de las condiciones iniciales, los ilustramos como debe ser, ¡con examples!

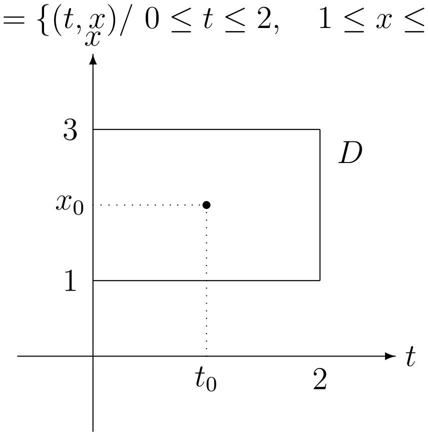
Ejemplo 1 Considerar el problema de valor inicial $x'(t) = x^2, \ x(1) = 2$.

Veamos que sucede, en cuanto a existencia y unicidad en

$$D = \{(t,x)/\ t_0 - 1 \leq t \leq t_0 + 1, \quad x_0 - 1 \leq x \leq x_0 + 1\}$$

Es sencillo deducir, del problema de valor inicial dado, que $t_0 = 1$ y que $x_0 = 2$. De modo que D tiene la forma

$$D = \{(t,x)/\ 0 \leq t \leq 2, \quad 1 \leq x \leq 3\}$$



Hacemos los siguientes cálculos:

- $\max_D\{f(t,x) = x^2\} = 9 = M$
- $\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| = \|x_1^2 - x_2^2\| = \|x_1 - x_2\| \ \|x_1 + x_2\|$.

  Pero como

$$\|x_1 + x_2\| \leq 6 \Longrightarrow \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq 6\,\|x_1 - x_2\| \Longrightarrow N = 6$$

- $H < \min\{1, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{6}\} \Longrightarrow H < \dfrac{1}{9}$

En consecuencia, existe solución única en el intervalo

$$\|t - 1\| < \frac{1}{9}$$

garantizando por el teorema de existencia y unidad. Más aún,si resolvemos la ecuación diferencial hallamos que la solución es

$$x(t) = \frac{2}{3 - 2t}, \qquad t \neq \frac{3}{2}$$

El ”it intervalo máximo” de existencia es

$$\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}$$

que hallamos resolviendo la desigualdad

$$\|x-2\| < 1$$

reemplazando aquí, el valor de $x(t)$, en efecto

$$\begin{aligned} \|x-2\| < 1 \Longrightarrow -1 < x-2 < 1 &\Longrightarrow 1 < x < 3 \\ &\Longrightarrow 1 < \frac{2}{3-2t} < 3 \end{aligned}$$

Si $3-2t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \|x-2\| < 1 &\Longrightarrow 1 > \frac{3-2t}{2} > \frac{1}{3} \Longrightarrow 2 > 3-2t > \frac{2}{3} \\ &\Longrightarrow \frac{7}{6} > t > \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{7}{6} \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se concluye que el intervalo máximo es

$$\|t-1\| < \frac{1}{2}$$

cabe indicar que, se arma el $(t-1)$ pues allí, en ese punto, está la condición inicial.

Ejemplo 41 *Considerar el problema de valor inicial* $x'(t) = \sqrt{x},\ x(0) = 0$

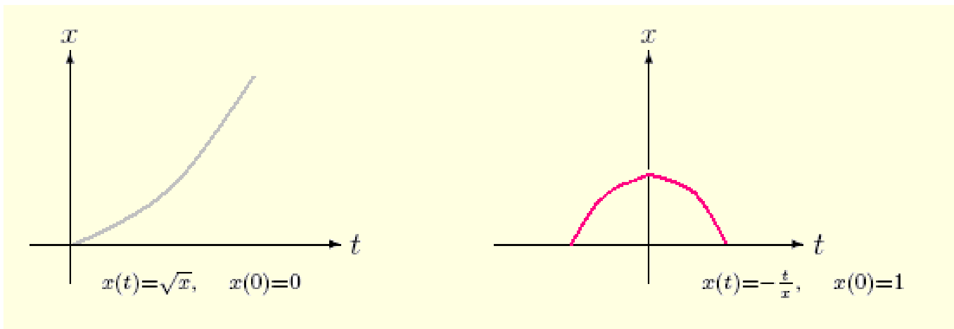
Es claro que $f(t,x) = \sqrt{x}$ es continua en el primer cuadrante, pero no Lipschitziana allí si se incluye el $(0,0)$ (el problema de la derivada acotada). Si se resuelve este problema de valor inicial, se tiene que su solución es

$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

Pero, ¡atención!, la función $x(t) = 0$ es también solución. Consecuencia, no hay solución única. ¡falló Lipschitz!, es super importante tener que se cumpla la condición, ya que ella permite asegurar, que existiendo solución, ésta sea única.

Ejemplo 42 *Considerar el problema de valor inicial* $x'(t) = -\frac{t}{x},\ x(0) = 1$

Ahora, este problema tiene la solución $x = \sqrt{1-t^2}$, y la gráfica de esta solución, nos muestra que ella no se puede continuar fuera del intervalo $(-1,1)$, pues en $(\pm 1, 0)$ la $f(t,x)$ no es continua.



Ejemplo 43 *Consideramos el problema de valor inicial* $x'(t) = x^2,\ x(1) = 1$

Su solución es $x(t) = \frac{1}{t-2}$. La recta $t = 2$ es asíntota. Por tanto, la solución sólo puede continuarse hasta la asíntota $t = 2$

Optativo

Demostración del Teorema ∃!

Construimos la poligonal de Euler $x = x_n(t)$ que parte de (t_0, x_0) con paso $h_n = \frac{H}{n}$ en el segmento $t_0 \le t \le t_0 + H$ (Análogamente se demuestra existencia en $t_0 - H \le t \le t_0$). Esta poligonal de Euler, que parte en (t_0, x_0)), no puede salirse del rectángulo D en todo $t_0 \le t \le t_0 + H$ ya que el coeficiente angular de cada segmento de la poligonal es menor que M en valor absoluto. La demostración requiere de tres etapas:

1. Probar que $x_n(t)$ converge uniformemente a una función $\overline{x}(t)$
2. Probar que la función $\overline{x}(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es la solución del problema de valor inicial
3. Probar que esta solución es única.

Prueba de 1 Por definición de poligonal de Euler se tiene

$$x_n'(t) = f(t_k, x_k), \quad t_k \le t \le t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

de donde

$$x_n'(t) = f(t_k, x_n(t)) + [f(t_k, x_k) - f(t, x_n(t)] \tag{9}$$

Hacemos

$$[f(t_k, x_k) - f(t, x_n(t)] = \alpha_n(t)$$

.

Por hipótesis, $f(t,x)$ es continua en D, por tanto, es también uniformemente continua en D, de tal manera que, dad $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|t - t_k\| < \delta, \quad \|x_k - x_n(t)\| < \delta \Longrightarrow \|f(t_k, x_k) - f(t, x_n(t)\| = \alpha_n(t) < \epsilon$$

Pero para tener que

$$\|t - t_k\| \leq \delta, \qquad \text{y} \qquad \|x_k - x_n(t)\| \leq \delta$$

se usa el hecho que, $\|f(t,x)\| < M$, y se elige $0 < h \leq min\{\delta, \frac{\delta}{M}\}$, con lo cual

$$\|t - t_k\| \leq h, \quad \|x_k - x_n(t)\| \leq M \cdot h \Longrightarrow \|f(t_k, x_k) - f(t, x_n(t)\| = \alpha_n(t) < \epsilon_n$$

Integrando la ecuación (1) tenemos

$$\int_{x_0}^{x} dx_n = \int_{x_0}^{x} f(t, x_n(t))\, dt + \int_{x_0}^{x} \alpha_n(t)\, dt$$

de esto,

$$x_n = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, x_n(t))\, dt + \int_{x_0}^{x} \alpha_n(t)\, dt \tag{10}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, elegimos $n = n + m$ con $m \in \mathbb{N}$, para tener

$$x_{n+m}(t) = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, x_{n+m}(t))\, dt + \int_{x_0}^{x} \alpha_{n+m}(t)\, dt \tag{11}$$

Al restar esta ecuación de la anterior

$$x_{n+m}(t) - x_n(t) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, x_{n+m}(t)) - f(t, x_n(t))\right]\, dt + \int_{x_0}^{x} \left[\alpha_{n+m}(t) - \alpha_n(t)\right]\, dt$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m}(t) - x_n(t)\| \;&\leq\; \int_{x_0}^{x} \|f(t, x_{n+m}(t)) - f(t, x_n(t))\|\, dt + \int_{x_0}^{x} \|\alpha_{n+m}(t)\|\, dt \\
&\quad + \int_{x_0}^{x} \|\alpha_n(t)\|\, dt
\end{aligned}$$

Dado que la función f es Lipschitziana,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m}(t) - x_n(t)\| \;&\leq\; N \int_{x_0}^{x} \|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\|\, dt + (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) \int_{x_0}^{x} dt \\
&\leq\; N \int_{x_0}^{x} \|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\|\, dt + (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n)\, H \\
&\qquad\qquad H = t - t_0
\end{aligned}$$

tomando max en, $t_0 \leq t \leq t_0 + H$, se tiene

$$\begin{aligned}
\max \|x_{n+m}(t) - x_n(t)\| &\leq N \max \int_{x_0}^{x} \|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\| \, dt + (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) H \\
&\leq N \int_{x_0}^{x} \max \|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\| \, dt + (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) H \\
&\leq N \max \|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\| \frac{\|x - x_0\|}{H} + \\
&\quad (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) H,
\end{aligned}$$

se debe tener en cuenta que, max $\|x_{n+m}(t)) - x_n(t))\|$ es un número, queda la integral de una constante. Un último arreglo para tener

$$\max \|x_{n+m}(t) - x_n(t)\| (1 - NH) \leq (\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) H$$

O bien

$$\max \|x_{n+m}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{(\epsilon_{n+m} + \epsilon_n) H}{1 - NH} < \epsilon$$

válido para todo $\epsilon > 0$ y para un número suficientemente grande $n > N_1(\epsilon)$. Esto quiere decir que la sucesión de funciones continuas $x_n(t)$ converge uniformemente en $t_0 \leq t \leq t_0+H$. Esto es, $x_n(t) \to \overline{x}_n(t)$, uniformemente, con $\overline{x}_n(t)$ es una función continua.

Prueba de 2 Por demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \overline{x}(t)$ es la solución del PVI. Al respecto, sabemos que

$$x_n = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, x_n(t)) \, dt + \int_{x_0}^{x} \alpha_n(t) \, dt$$

al tomar límite con $n \to \infty$ tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, x_n(t)) \, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \alpha_n(t) \, dt \tag{12}$$

Pero, como $x_n(t)$ tiende a $\overline{x}(t)$ uniformemente, y además, $f(t, x)$ es uniformemente continua en D, entonces $f(t, x_n(t)) \to f(t, \overline{x}(t))$ uniformemente. En efecto, hay que probar que

$$\|f(t, \overline{x}(t)) - f(t, x_n(t))\| < \epsilon, \text{ si } n > N, \text{ y que } N \text{ no depende de } x$$

Veamos que datos tenemos para acercarnos a la demostración

1. Dado que f es Lipschitziana, entonces

$$\|f(t, \overline{x}(t)) - f(t, x_n(t))\| < K \|\overline{x}(t) - x_n(t)\|$$

2. Como $x_n(t) \to \overline{x}(t)$ uniformemente, entonces

$$n > N_1 \Longrightarrow \|\overline{x}(t) - x_n(t)\| < \delta$$

   con el N_1 no dependiendo de x, pues la convergencia es uniforme.

3. Por el hecho de tener que $f(t,x)$ es uniformemente continua se tiene

$$\|f(t,\overline{x}(t)) - f(t,x_n(t))\| < \epsilon, \text{ siempre que } \|\overline{x}(t) - x_n(t)\| < \delta(\epsilon)$$

Con toda esta batería, elegimos $\delta(\epsilon) = \dfrac{\epsilon}{K}$, para tener

$$n > N_1(\delta(\epsilon)) \Longrightarrow \|f(t,\overline{x}(t)) - f(t,x_n(t))\| < \epsilon$$

y el N_1 no depende de x. Por lo tanto, $f(t,x_n(t)) \to f(t,\overline{x}(t))$ uniformemente.

Volvemos ahora a la ecuación (4). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= x_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t,x_n(t))\,dt + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} \alpha_n(t)\,dt \\
&= x_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lim_{n\to\infty} x_n(t))\,dt + 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\overline{x}(t) = x_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\overline{x}(t))\,dt$$

En consecuencia, $\overline{x}(t)$ satisface la ecuación diferencial.

Prueba de 3 Para probar la unicidad, suponemos que existen dos soluciones x_1 y x_2, que cumplen la condición

$$\max \|x_1 - x_2\| \neq 0$$

Dado que ellas son soluciones, deben satisfacer:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1(t) &= x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(t,x_1(t))\,dt \\
\overline{x}_2(t) &= x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(t,x_2(t))\,dt
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$x_1 - x_2 = \int_{t_0}^{t} \left[f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t))\right]\,dt$$

al tomar máximo

$$\max \|x_1 - x_2\| = \max \left\| \int_{t_0}^{t} \left[f(t,x_1(t)) - f(t,x_2(t))\right]\,dt \right\|$$

Podemos acotar usando la propiedad que el valor absoluto de la integral es menor o igual que la integral de valor absoluto.

$$\max \|x_1 - x_2\| \leq \max \left[\int_{t_0}^{t} \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \; dt \right]$$

Como f es Lipschitziana,

$$\begin{aligned} \max \|x_1 - x_2\| &\leq N \cdot \max \left[\int_{t_0}^{t} \|x_1(t) - x_2(t)\| \; dt \right] \\ &\leq N \cdot \max \|x_1(t) - x_2(t)\| \max \left\| \int_{t_0}^{t} dt \right\| \\ &\leq N \cdot \max \|x_1(t) - x_2(t)\| \max \|t - t_0\| \\ &\leq N \cdot H \cdot \max \|x_1(t) - x_2(t)\| \end{aligned}$$

Cabe hacer notar que el máximo se está tomando sobre $t_0 \leq t \leq t_0 + H$, por tanto, aquí es max $\|t - t_0\| = H$. Por otra parte, se sabe del teorema de existencia y unicidad que $H < \frac{1}{N}$, pero de la última desigualdad se obtuvo que

$$NH \geq 1 \Longrightarrow H \geq \frac{1}{N}$$

Esto es una ¡Contradicción!, a menos que

$$\max \|x_1(t) - x_2(t)\| = 0$$

para concluir con que $x_1 = x_2$ ¡¡unicidad!!.

14. continuación de la solución

Si en un dominio acotado D del plano tx la función $f(t, x)$ es continua y la ecuación diferencial $x' = f(x, t)$ posee la solución $x(t)$ definida en el intervalo abierto (a, b), entonces existen los límites laterales $x(a^+)$ y $x(a^-)$. Si además, estos corresponden a puntos interiores del dominio D, entonces la solución $x(t)$ puede continuarse más allá de los valores $t = a$ y $t = b$.

La importancia de este teorema está, en que de acuerdo con él, la solución $x(t)$ es continuable hasta la frontera de D, y que, en consecuencia, no puede desaparecer en el interior de D, ni tener el comportamiento que indica la figura.

Si D no es acotado, puede sucederque la solución $x(t)$ definida en (a, b) tenga límite infinito para $t \to b^-$ o para $t \to a^+$, y en consecuencia, no sea continuable hasta $t = b$ o $t = a$

Definición 14.1 *Se llama Intervalo de existencia de la solución al intervalo máximo en que ésta es continuable. Supuesto que $f(t,x)$ está definida en todo el plano, el intervalo de existencia es siempre un conjunto abierto.*

Veamos como funciona esto en la práctica

Ejemplo 44

1. *El problema $x'(t) = x, \quad x(0) = 1$ tiene por solución la función $x = e^t$. Su intervalo de existencia es $(-\infty, \infty)$.*
2. *El problema $x'(t) = x^2, \quad x(0) = 1$ tiene por solución la función $x = \dfrac{1}{1-t}$. Su intervalo de existencia es $(-\infty, 1)$.*
3. *El problema $x'(t) = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$ tiene por solución la función $x = tg\, t$. Su intervalo de existencia es $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$*

15. Dependencia de los datos iniciales y parámetros

Para el problema de valor inicial $x'(t) = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$, es conocido que la solución general depende, además de la variable t, de los datos iniciales. Por esta razón, es conveniente escribir explícitamente esta dependencia, utilizando la notación

$$x = F(t, t_0, x_0)$$

para la solución general.

Cuando la ecuación diferencial depende de uno o más parámetros, la solución, naturalmente, también depende de esos parámetros, de este modo, para una ecuación diferencial

$$x' = f(t,x,p), \qquad x(t_0) = x_0$$

la solución general se escribe bajo la forma

$$x = F(t, t_0, x_0, p)$$

Teorema 15.1 *Si en el dominio acotado D, la función $f(t,x,p)$ es continua en sus tres argumentos y Lipschitziana en x, entonces la solución general es una función continua de (t, t_0, x_0, p)*

Teorema 15.2 *Si en el dominio acotado D, la función $f(t,x)$ es continua en sus dos argumentos, y de clase ζ^1 en x, entonces la solución general $F(t, t_0, x_0)$ es diferenciable en x_0*

Teorema 15.3 Teorema de $\exists!$ para $F(x, y, y') = 0$

Dado el problema de valor inicial

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

existe solución $y = y(x)$ en $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, si en un entorno del punto (x_0, y_0, y_0') la función $F(x, y, y')$ satisface las tres siguientes condiciones:

1. *$F(x, y, y')$ es continua en sus tres argumentos*
2. *$\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ existe y $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$.*
3. *$\left\| \dfrac{\partial F}{\partial y} \right\| \leq N$*

Demostración

Te recuerdo el teorema de la función implícita. " Si la función $F(x, y, z) = 0$ satisface:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ para algún (x_0, y_0, z_0) en el dominio de F
2. $F_x, \quad F_y, \quad F_z$ son continuas en un vecindad de (x_0, y_0, z_0)
3. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

entonces existe una única función diferenciable $z = f(x, y)$ tal que

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Las primeras dos hipótesis del teorema garantizan la existencia de una única función

$$y' = f(x, y)$$

en un entorno del punto (x_0, y_0) y que satisface la condición

$$y' = f(x_0, y_0)$$

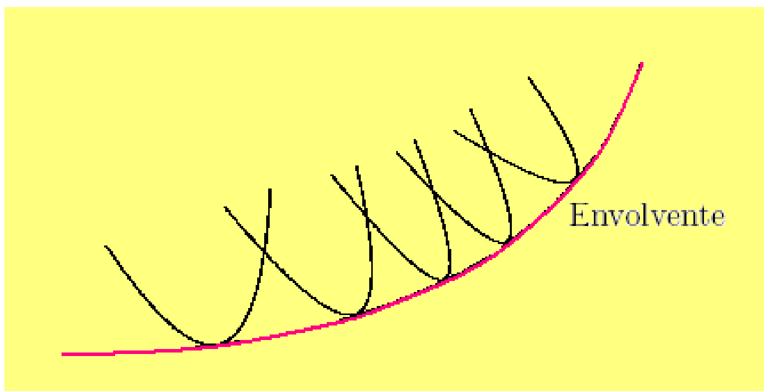
Falta por demostrar que $f(x, y)$ satisface la condición de Lipschitz o de la derivada acotada $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial y} \right\| \leq N$ en un entorno de (x_0, y_0). Esto se hace como sigue.

$$\begin{aligned} F(x, y, y') = 0 \implies & F(x, y, f(x, y)) = 0 / \frac{\partial}{\partial y} \\ \implies & \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \implies & \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial f}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}, \quad y' = f \\ \implies & \frac{\partial f}{\partial y} \leq K \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ por hipótesis, y $\left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \leq N$, el cociente puede acotarse por $K = NM$, lo cual prueba el Teorema.

16. La envolvente y Soluciones Singulares

A no pensar mal, no se trata de una mujer que a uno lo envuelva con sus encantos y todas esas cosas, ¡no!, todo lo contrario, se trata de un concepto matemático que vemos a continuación, y que aparece al estudiar la naturaleza de los puntos (x_0, y_0) en cuyo entorno no existe solución, o bien si existe, ésta no es única, tanto en el caso de la ecuación explícita como para la implícita.



Definición 16.1 *Se llama envolvente de la familia $\phi(x, y, C) = 0$ a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a cierta curva de la familia.*

Observar la figura anterior que muestra la idea de envolvente de una family.

Ecuación de la Envolvente

Sea

$$\phi(x, y, C) = 0 \tag{13}$$

el haz de curvas, y supongamos que ésta tiene a $y = \varphi(x)$ como envolvente, con φ una función derivable. Sea $M(x, y)$ un punto sobre la envolvente, que por definición, también pertenece a cierta curva del haz, correspondiendo a esta cierta curva un valor determinado del parámetro C, dado por la ecuación $C = C(x, y)$, por tanto, para todos los puntos de la envolvente se verifica que

$$\phi(x, y, C(x, y)) = 0 \tag{14}$$

Si además, suponemos que $C(x, y)$ es derivable, entonces se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

que se puede escribir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

Para simplificar notación usemos subíndices

$$\phi_x + \phi_C \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \phi_y \cdot y' + \phi_C \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot y' = 0$$

O bien,

$$\phi_x + \phi_C \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x} + y' \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \phi_y \cdot y' = 0 \tag{15}$$

usando el hecho que C es constante una vez determinada la curva del haz, se tiene

$$\phi_x + \phi_y \cdot y' = 0 \tag{16}$$

ecuación que representa el coeficiente angular de la tangente a la curva del haz en $M(x, y)$. Pero, como el coeficiente angular de la envolvente es igual al de esa "cierta curva" del haz, entonces de (3) y (4) se tiene

$$\phi_C \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \cdot y' \right) = 0$$

Como en la envolvente es $C(x, y)$ no es constante, entonces debe tenerse necesariamente

$$\phi_C = 0 \tag{17}$$

Se tiene así, que para determinar la ecuación de la envolvente debe eliminarse C de las ecuaciones

$$\phi(x, y, C) = 0, \qquad \phi_C(x, y, C) = 0 \tag{18}$$

Pero por otro lado, los puntos en los cuales $\phi_x = 0$ y $\phi_y = 0$ también satisfacen la ecuación (6). En efecto, se expresan las coordenadas x e y en función del parámetro C como sigue

$$x = \lambda(C), \qquad y = \mu(C)$$

luego, el haz de curvas (1) se expresa como

$$\phi(\lambda(C), \mu(C), C) = 0$$

al cual, derivado respecto del parámetro C es tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial C} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial C} + \frac{\partial \phi}{\partial C} = 0$$

O bien,

$$\phi_x \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial C} + \phi_y \cdot \frac{\partial \mu}{\partial C} + \phi_C = 0$$

Dado que $\phi_x = 0$ y $\phi_y = 0$, entonces

$$\phi_C = 0$$

Definición 16.2 *El lugar geométrico de los puntos para los cuales* $\phi_x = 0$ *y* $\phi_y = 0$*, se llaman* **puntos singulares** *del haz.*

¡Ojo, ojo, oreja, esternón, huachalomo!

Como conclusión final: La ecuación (6) define la envolvente o bien los puntos singulares del haz o la combinación de ambas cosas. Por consiguiente, al obtener una curva que satisface la ecuación (6) hay que realizar un estudio con el objeto de determinar si esta curva es envolvente o lugar geométrico de los puntos singulares.

Ejemplo 45 *Dado el haz* $(y-C)^2 - \dfrac{2}{3}(x-C)^2 = 0$*, determinar la ecuación de la envolvente y/o el lugar geométrico de los puntos singulares.*

Derivemos respecto de C la ecuación del haz

$$\frac{\partial}{\partial C}\left((y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^2 = 0\right) \Longrightarrow y - C - (x-C)^2 = 0$$

De la ecuación del haz y de la recién hallada eliminamos el parámetro C.

$$\begin{aligned}(y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^2 &= 0\\ y - C - (x-C)^2 &= 0\end{aligned}$$

Se encuentra que $C = x$, o bien $C = x - \frac{2}{3}$, de aquí que

$$y = x, \qquad \vee \qquad y = x - \frac{2}{3}$$

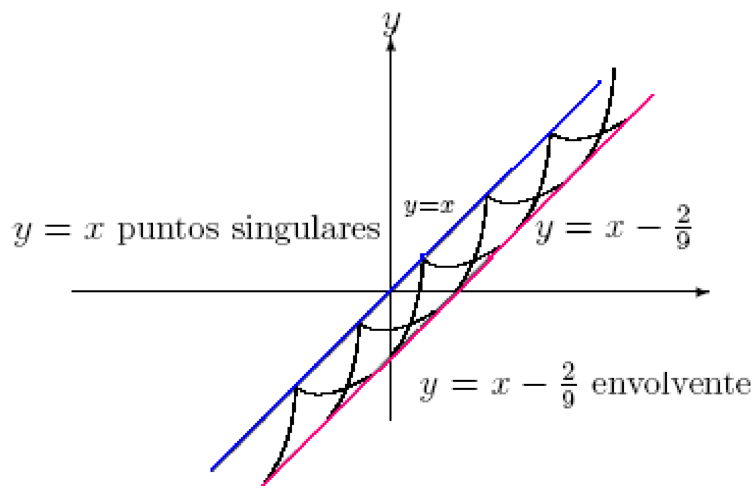
Análisis de $y = x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^2 = 0\right) \Longrightarrow -2(x-C) = 0 \Longrightarrow x = C$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^2 = 0\right) \Longrightarrow 2(y-C) = 0 \Longrightarrow y = C$$

Esto conduce a establecer que el punto (C, C) es singular, pues

$$\phi_x = 0, \quad \text{y} \quad \phi_y = 0$$



Definición 16.3 *Dada la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$*

1. *Los puntos (x_0, y_0) en cuyo entorno no existe la solución de $y' = f(x, y)$ para la cual $y(x_0) = y_0$, o bien, existe pero no es única, se llaman* **puntos singulares**.

2. *La solución enteramente formada por puntos singulares se llama solución* **singular** *de la ecuación*

   Para encontrar los puntos singulares o las curvas singulares, en primer lugar hay que hallar el conjunto de los puntos en los cuales no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, ya que sólo entre dichos puntos puede haber singulares.

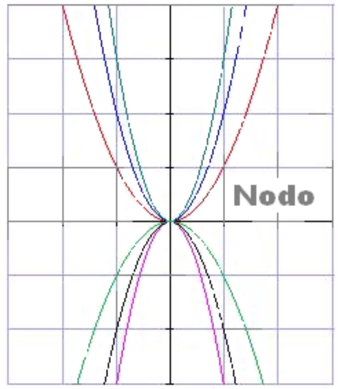
3. *Para ecuaciones de la forma $y' = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, con M y N funciones continuas, los únicos puntos singulares se dan en los puntos (x_0, y_0) que cumplen la condición*

$$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0)$$

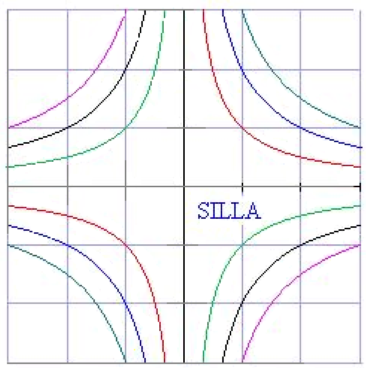
   ya que sólo allí $\dfrac{M}{N}$ y $\dfrac{N}{M}$ son simultáneamente discontinuas. Estas ecuaciones pueden tener cuatro tipos de puntos singulares: Nodo, silla, foco, y centro.

Ejemplo 46 *Mira lo que pasa en la ecuación $y' = \dfrac{2y}{x}$*

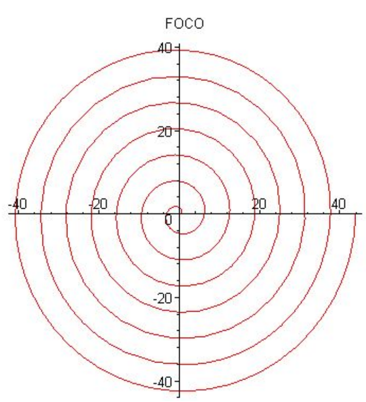
Al mismo tiempo, $x = y = 0$ es el único punto en que el numerador y denominador son discontinuos. La solución de la ecuación diferencial es $y = C\,x^2$. La figura te muestra el comportamiento de la solución



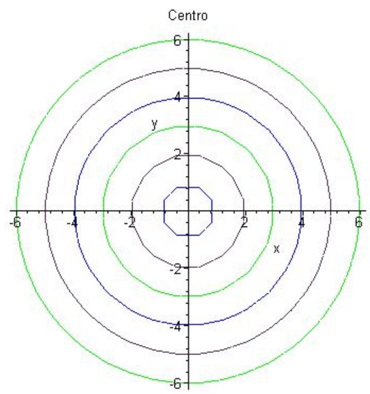
Ejemplo 47 *Para la ecuación* $y' = -\dfrac{y}{x}$, *se tiene que* $(0,0)$ *es un punto singular. La solución de la ecuación es* $y = \frac{C}{x}$. *Este punto singular es conocido como* **silla**



Ejemplo 48 *Para la ecuación* $y' = -\dfrac{x+y}{x-y}$, *se tiene que* $(0,0)$ *es un punto singular. La solución de la ecuación es* $x^2 + y^2 = C\, e^{arctg\, y/x}$. *Este punto singular se llama* **Foco**



Ejemplo 49 *Para la ecuación* $y' = -\dfrac{x}{y}$, *se tiene que* $(0,0)$ *es un punto singular. La solución de la ecuación es* $x^2 + y^2 = C^2$. *Este punto singular se llama* **centro**



Soluciones Singulares

I) La condición de Lipschitz o de la derivada acotada no se verifica en los puntos en los cuales $\frac{\partial}{\partial y}$ crece indefinidamente al aproximarse a ellos. Esto equivale a tener la ecuación

$$\frac{1}{\frac{\partial}{\partial y}}$$

la cual define una curva en cuyos puntos puede no tener lugar la unicidad, si es así, entonces la curva será singular, si además, esta curva es curva integral, entonces será curva integral singular.

Ejemplo 50 *Determinar si existe solución singular para* $y' = x^2 + y^2$

Es claro que $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una función continua, por tanto, puntos singulares no hay. Veamos que sucede con la derivada respecto de y

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$$

Tomando inversa de esta fracción tenemos que

$$\frac{1}{2y} = 0 \Longrightarrow \text{no existe } y$$

Por tanto, no hay soluciones singulares.

Ejemplo 51 *Determinar si existe solución singular para* $y' = 5 + \sqrt[3]{(y-x)^2}$.

La función $f(x, y) = 5 + \sqrt[3]{(y-x)^2}$ es, evidentemente, continua. Analizamos la derivada

$$\frac{\partial}{\partial y}(5 + \sqrt[3]{(y-x)^2}) = \frac{2}{3}\,(y-x)^{-1/3}$$

Tomando inversa de esta fracción tenemos que

$$\frac{3}{2}\,(y-x)^{1/3}=0 \Longrightarrow y=x$$

Hemos sacado la curva $y=x$ como candidata, pero hay que ver si es solución de la ecuación. Sin embargo, no es solución, luego, no hay solución singular.

Ejemplo 52 *Determinar si existe solución singular para* $y\,'=1+\sqrt[3]{(y-x)^2}$.

Es claro que $y=x$ si es solución (lo sacas con un sólo ojo). Veamos si hay otra solución para lo de la unicidad.

$$y-x=z \Longrightarrow y\,'=1+z\,'$$

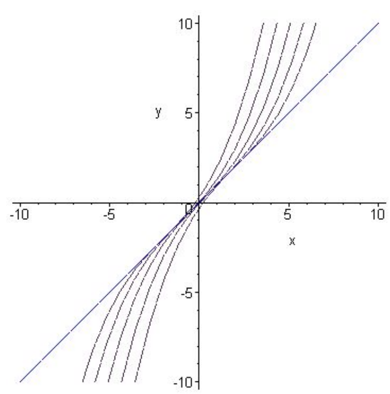
reemplazando en al ecuación

$$z\,'=z^{1/3} \Longrightarrow z=\frac{1}{27}\,(x+C)^3$$

de donde

$$y-x=\frac{1}{27}\,(x+C)^3$$

es solución de la ecuación diferencial, y distinta de $y=x$. Por consiguiente, $y=x$ es solución singular. Mira lo que hace Maple.



$>f1:=implicitplot(y-x=0,x=-10..10,y=-10..10,color=blue):$
$f2:=implicitplot(y-x-(1/27)*(x+1)^3=0,x=-10..10,y=-10..10,color=violet):$
$f3:=implicitplot(y-x-(1/27)*(x+2)^3=0,x=-10..10,y=-10..10,color=violet):$
$f4:=implicitplot(y-x-(1/27)*(x-1)^3=0,x=-10..10,y=-10..10,color=violet):$
$f5:=implicitplot(y-x-(1/27)*(x-2)^3=0,x=-10..10,y=-10..10,color=violet):$
$f6:=implicitplot(y-x-(1/27)*(x)^3=0,x=-10..10,y=-10..10,color=violet):$
$>display(f1,f2,f3,f4,f5,f6);$
II) Para determinar la solución singular de $F(x,y,y\,')=0$ se elimina $y\,'$ del sistema

$$F(x,y,y\,')=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y\,'}=0 \tag{19}$$

ya que por lo general, la condición $\frac{\partial F}{\partial y'}$ del teorema de existencia y unicidad de $F(x,y,y')=0$ es la que no se cumple.

De la ecuación (1) se obtiene una $\phi(x,y)=0$ llamada curva p **discriminante**, ya que se reemplaza $y'=p$ para tener

$$\Delta_p \;:\; \begin{cases} F(x,y,p) &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} &= 0 \end{cases}$$

después se aclara por sustitución directa si entre las ramas de esta curva Δ_p hay curvas integrales

Ejemplo 53 *Para la ecuación $y=2xy'-y'^2$ se tiene*

$$\Delta_p \;:\; \begin{cases} y &= 2xp-p^2 \\ 2x-2p &= 0 \end{cases}$$

de aquí, $y=x^2$, pero un simple y mental cálculo nos dice que ésta curva no es solución de la ecuación diferencial, por tanto, no existe solución singular.

III) En el caso más general, se puede hallar la solución singular de $F(x,y,y')=0$ conociendo la envolvente de la familia de curvas integrales, ya que ésta es siempre curva integral. La envolvente se halla en la llamada curva C **discriminante**, que corresponde a

$$\Delta_C \;:\; \begin{cases} \phi(x,y,C) &= 0 \\ \phi_C(x,y,C) &= 0 \end{cases}$$

pero hay que tener ojo, por que aquí pueden coexistir otros puntos. Por esta razón se le exige a la envolvente, como condición suficiente, que cumpla

1. $\|\phi_x\| \le N_1, \quad \|\phi_y\| \le N_2$
2. $\phi_x \neq 0, \quad \vee \quad \phi_y \neq 0$

Estas condiciones son sólo suficientes, por lo cual, pueden ser envolvente también las ramas de la Δ_C en las que no se cumple alguna de estas condiciones.

A partir de Δ_p y del Δ_C obtenemos un método para determinar la envolvente y la solución singular. Sigue las siguientes indicaciones:

- El Δ_p contiene:

$$\begin{cases} \text{1) La envolvente } (E) \\ \text{2) El lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado } (C^2) \\ \text{3) El lugar geométrico de los puntos cuspidales o retroceso } (R) \end{cases}$$

Para recordar

$$¡\ \Delta_p = E \cdot C^2 \cdot R\ !$$

- El Δ_C contiene:

$$\begin{cases} 1) \text{ La envolvente } (E) \\ 2) \text{ El lugar geométrico de los puntos anocdales al cuadrado } (A^2) \\ 3) \text{ El lugar geométrico de los puntos cuspidales al cubo } (R^3) \end{cases}$$

Para recordar

$$¡\ \Delta_C = E \cdot A^2 \cdot R^3\ !$$

Finalmente, cabe agregar que, de todos los lugares geométricos, solamente la envolvente es solución singular de la ecuación diferencial. Ella figura tanto en la p discriminante como en la C discriminante, con exponente cero.

17. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Definición Una transformación lineal

$$L\ :\ \zeta^n(I) \to \zeta(I)$$

se dice que es un **operador diferencial lineal** de orden n sobre el intervalo I, si puede escribirse en la forma

$$L = a_n(x)\, D^n + a_{n-1}(x)\, D^{n-1} + \cdots + a_1(x)\, D + a_0(x)$$

en donde, los coeficientes a_i son continuos en I, y $a_n(x) \neq 0$ en I. Adeemás, para quienes no le recuerdan, D es el operador diferenciación.

De la definición se tiene que, si $y \in \zeta^n(I)$, entonces

$$L[y] = a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y\,' + a_0(x)\, y$$

no olvides que $D^{(0)} = y$.

Ejemplo 54 *Si $L = D^2 + D - 2$, entonces*

$$L[y] = (D^2 + D - 2)(y) = D^2(y) + D(y) - 2(y) = y\,'' + y\,' - 2y$$

En este caso, $L\ :\ \zeta^2(I) \to \zeta(I)$

Ejemplo 55 *Veamos que sucede con el producto de operadores. Para ello, sean*

$$L_1\ :\ \zeta^\infty(I) \to \zeta^\infty(I), \quad L_1 = x\, D + 1$$

$$L_2\ :\ \zeta^\infty(I) \to \zeta^\infty(I), \quad L_2 = D - 1$$

dos transformaciones lineales. Si $y \in \zeta^{\infty}(I)$, entonces

$$\begin{aligned}
L_1 \cdot L_2(y) &= (x\,D+1)(D-x)(y) = (x\,D+1)(y\,' - xy) \\
&= x\,D\,(y\,' - xy) + (y\,' - xy) = x\,(y\,'' - y - xy\,') + y\,' - y \\
&= x\,y\,'' - xy - x^2 y\,' + y\,' - xy = x\,y\,'' + (1-x^2)\,y\,' - 2xy \\
&= (\,x\,D^2 + (1-x^2)\,D - 2x)\,y
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
L_2 \cdot L_1(y) &= (D-x)(x\,D+1)(y) = (D-x)(x\,y\,' + y) \\
&= D\,(x\,y\,' + y) - x\,(x\,y\,' + y) = y\,' + x\,y\,'' + y\,' - x^2\,y\,' - x\,y\,' \\
&= x\,y\,'' + (2-x^2)\,y\,' - xy \\
&= (x\,D^2 + (2-x^2)\,D - x)\,y
\end{aligned}$$

Se concluye que los operadores **no conmutan**.

Definición 17.1 *Una ecuación diferencial lineal de orden n en un intervalo I se escribe, en operadores, en la forma*

$$L[y] = h(x)$$

siendo h una función continua sobre I, y L un operador diferencial lineal de orden n definido en I. Además:

1. *Si $h = 0$ en I, entonces la ecuación se llama* **lineal homogénea**
2. *Si $h \neq 0$ en I, la ecuación se llama* **no homogénea**

Así, una ecuación diferencial lineal de orden n, es una ecuación de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\,y\,' + p_0(x)\,y = h(x)$$

si $a_n(x) \neq 0$, esta ecuación recibe el nombre de **forma normal**

Ejemplo 56 *La ecuación $y\,'' + y = 0 \Longleftrightarrow (D^2+1)\,(y) = 0$, es lineal, homogénea, de orden 2 en $(-\infty, \infty)$, y escrita en forma normal.*

Ejemplo 57 *La ecuación $x^3\,y\,''' + x\,y\,' = 0 \Longleftrightarrow (x^3 D^3 + x\,D)\,(y) = 0$, es lineal, no homogénea, de orden 3 en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. No es normal en cualquier intervalo que contenga el origen.*

18. Ecuaciones Homogéneas

Sea $L[y] = 0$ una ecuación diferencial lineal normal y homogénea de orden n en un intervalo I. El conjunto solución de la ecuación es el **espacio nulo** de L (no olvidar que L es una transformación lineal), y en consecuencia, es un subespacio de $\zeta^n(I)$. Este subespacio se llama el **espacio solución** de la ecuación, así que, la tarea de resolver $L[y] = 0$ puede reemplazarse por la de encontrar una **base** para el espacio solución, siempre que este espacio solución tenga dimensión finita, que en tal caso resuelve el siguiente resultado.

Teorema 18.1 *El espacio solución de cualquier ecuación diferencial homogénea de orden* n*,* $L[y] = 0$*, definida en un intervalo* I *es un subespacio* n *dimensional de* $\zeta^n(I)$*.*

Tomando como fuente de apoyo este resultado, y considerando que

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, \; y_n(x)$$

son soluciones **linealmente independientes** de $L[y] = 0$, entonces toda solución de $L[y] = 0$ es de la forma

$$y(x) = c_1\, y_1(x), c_2\, y_2(x), \cdots, \; c_n\, y_n(x)$$

siendo las c_i constantes reales. Esta recibe el nombre de **solución general** de $L[y] = 0$. Cuando se dan determinados valores a los c_i se obtiene una función $y_p(x)$, conocida como **solución particular**.

Teorema 18.2 *Si* $L[y] = 0$ *tiene solución compleja* $y(x) = u(x) + i\, v(x)$*, entonces la parte real* $u(x)$ *y su parte imaginaria* $v(x)$ *son, por separado, soluciones de dicha ecuación homogénea.*

Demostración Se sabe que $L[u(x) + i\, v(x)] = 0$, por ser solución. Como, L es lineal, entonces cumple

$$L[u(x) + i\, v(x)] = 0 \Longrightarrow L[u(x)] + i\, L[v(x)] = 0$$

de donde, $L[u(x)] = 0$ y $L[v(x)] = 0$.

Ejemplo 58 *La ecuación* $y'' - y = 0$ *es lineal y normal en* $(-\infty, \infty)$*. Su espacio solución es un subespacio de dimensión 2 de* $\zeta(-\infty, \infty)$*. Se puede verificar que*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\, x \\ y_2(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\, x \end{aligned}$$

son dos soluciones L.I. En efecto,

$$y_1(0) = 1, \quad {y_1}'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad {y_2}'(0) = 1$$

y es "archiconocido" que los vectores $(1, 0)$ *y* $(0, 1)$ *son L.I. Se sigue que las soluciones* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *lo son. En consecuencia, la solución general es*

$$y = c_1\, cosh\, x + c_2\, senh\, x$$

Siguiendo con el mismo ejemplo, es sencillo verificar que el par de funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ son también solución de $y'' - y = 0$. En este caso,

$$y_1(0) = 1, \quad {y_1}'(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad {y_2}'(0) = -1$$

y como los vectores $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son L.I, se sigue que $\{e^x, e^{-x}\}$ forman también una base para el espacio solución de la ecuación diferencial. Por tanto,

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$$

es la solución general. De seguro estás pensando ¿Qué es esto, las soluciones andan al lote?. ¡Calma!, ... modera tu lenguaje, calma tu espíritu, no te dejes llevar por un "arranque de locura". Esta solución y la anterior que encontramos son la misma cosa. Sigue mi idea, la primera solución la descompones en e^x y e^{-x}, factorizas, las constantes son constantes (un "pelo de la cola"), y llegas a establecer la última solución general, en resumidas cuentas, ¡lo mismo! "around de world".

Establecer la independencia lineal, ha sido algo sencillo. Te muestro otra forma, algunas veces resulta muy útil, y tiene que ver con el llamado **Wronkiano** ¿Que te pareció el nombrecito?, suena algo así como de Rusia, de Ucrania, de Stalin. Pero vamos a lo nuestro.

Definición 18.3 *Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ funciones arbitrarias en $\zeta^{n-1}(I)$, y sea $x \in I$, entonces la función*

$$W \;:\; \zeta^{n-1}(I) \to \zeta(I), \quad W[y_1, y_2, \cdots y_n] = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{Vmatrix} (x)$$

se llama **Wronkiano** *de las funciones $y_1, y_2, \cdots y_n$.*

Ejemplo 59 *Calcular un Wronkiano es muy sencillo*

$$W[x, sen\, x] = \begin{Vmatrix} x & sen\, x \\ 1 & cos\, x \end{Vmatrix} = x\, cos\, x - sen\, x$$

Teorema 18.4 *Sean $y_1, y_2, \cdots, y_n$ soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, en forma normal*

$$L[y] = 0$$

en un intervalo I. Si $W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = 0$, entonces $\{y_i\}$ son Linealmente dependientes.

Sea x_0 punto cualquiera en I, entonces del sistema

$$\begin{aligned} c_1\, y_1(x_0) + c_2\, y_2(x_0) + \cdots c_n\, y_n(x_0) &= 0 \\ c_1\, {y_1}'(x_0) + c_2\, {y_2}'(x_0) + \cdots c_n\, {y_n}'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1\, y_1^{n-1}(x_0) + c_2\, y_2^{n-1}(x_0) + \cdots c_n\, y_n^{n-1}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

se tiene que, como el Wronkiano es nulo, entonces el determinante de este sistema es cero, de aquí que éset tenga una solución no trivial, $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \cdots, \overline{c}_n$. Luego,

$$y(x) = \overline{c}_1\, y_1(x) + \overline{c}_2\, y_2(x) + \cdots \overline{c}_n\, y_n(x)$$

sería solución del problema de valor inicial $L[y] = 0$, de condiciones iniciales

$$y(x_0) = 0, \quad +y\,'(x_0) = 0, \quad \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Pero, dado que $y(x) = 0$ es también solución, y sabemos que ésta debe ser **única**, lo que debe pasar es que

$$\overline{c}_1\, y_1(x) + \overline{c}_2\, y_2(x) + \cdots \overline{c}_n\, y_n(x) = 0, \quad \forall\ x \in I$$

Como además, las c_i no son todas cero, las $\{y_i\}$ son linealmente dependientes.

Ejemplo 60 *Las funciones* $y_1(x) = sen^3 x$ *y* $y_2(x) = sen\, x - \frac{1}{3}\, sen\, 3x$ *son soluciones de la ecuación*

$$y\,'' + (tg\, x - 2\, ctg\, x\,)\, y\,' = 0$$

en cualquier intervalo I en el que la tangente y cotangente estén definidas.

Veamos que sucede con su Wronkiano

$$W[y_1, y_2] = \left\| \begin{matrix} sen^3 x & sen\, x - \dfrac{1}{3}\, sen\, 3x \\ 3sen^2 x\, cos\, x & cos\, x - cos\, 3x \end{matrix} \right\|$$

Al calcular este determinante se tiene

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= sen^3 x\, (cos\, x - cos\, 3x) - 3sen^2 x\, cos\, x\, (sen\, x - \tfrac{1}{3}\, sen\, 3x\,) \\ &= sen^3 x\, cos\, x - sen^3 x\, cos\, 3x - 3sen^3 x\, cos\, x + sen^2 x\, cos\, x\, sen\, 3x \\ &= -2sen^3 x\, cos\, x + sen^2 x\, (-sen\, x\, cos\, 3x + cos\, x\, sen\, 3x) \\ &= -sen^2 x\, sen\, 2x + sen^2 x\, sen\, 2x = 0 \end{aligned}$$

Se concluye que $\{y_1, y_2\}$ son linealmente dependientes en $\zeta(I)$, y no son base del espacio solución de la ecuación dada.

Fórmula de Abel Sirve para conocer una segunda solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, siempre que sea dada una solución.

Teorema 18.5 *Sean* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *soluciones sobre I de*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)\, y = 0$$

entonces

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = C\, e^{-\int p_{n-1}(x)\, dx}$$

Corolario 18.6 *Si* $y_1 \neq 0$ *es solución de la ecuación*

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0$$

entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{(y_1(x))^2}\, dx$$

Demostración

Según la fórmula de Abel se debe cumplir que

$$W[y_1, y_2] = C\, e^{-\int p_1(x)\,dx}$$

lo cual significa que

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{matrix} \right\| = C\, e^{-\int p_1(x)\,dx}$$

al calcular el determinante,

$$y_1\, y_2' - y_2\, y_1' = C\, e^{-\int p_1(x)\,dx}$$

la ecuación la escribimos en diferenciales para y_2

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_1'\, y_2 = C\, e^{-\int p_1(x)\,dx}, \quad \text{¡Lineal!}$$

Un arreglo

$$\frac{dy_2}{dx} - \left(\frac{y_1'}{y_1}\right) y_2 = \frac{C}{y_1}\, e^{-\int p_1(x)\,dx}$$

Por la fórmula de la lineal, la solución tiene la forma

$$y_2 = y_1 \left(\int \frac{C}{y_1^2}\; e^{-\int p_1(x)\,dx}\, dx + K \right)$$

O bien,

$$y_2 = C\, y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\; e^{-\int p_1(x)\,dx}\, dx + K\, y_1$$

para $K = 0$, $C = 1$, se tiene

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p_1(x)\,dx}\, dx$$

es una solución particular.

Ejemplo 61 *Se sabe que* $y_1 = e^{2x}$ *es solución de* $y'' - 4y' + 4y = 0$. *Una segunda solución se obtiene de*

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{1}{e^{4x}}\, e^{\int 4\,dx}\, dx = x\, e^{2x}$$

Es sencillo verificar que y_1 con y_2 son L.I. (el cociente de ellas no es constante). Por tanto, la solución general es

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, x\, e^{2x}$$

19. Ecuación Homogénea con coeficientes constantes

Esta ecuación es de la forma

$$L[y] = (D^n + p_{n-1}\, D^{n-1} + \cdots + p_0)\, y = 0$$

con los p_i constantes.

Proposición 19.1 *Si $L_1, L_2, \cdots, L_n$ son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, entonces el espacio nulo de cada uno de ellos está incluido en el espacio nulo de su producto.*

Demostración Por demostrar que $L_i[y] = 0 \Longrightarrow (L_1, L_2, \cdots, L_n)[y] = 0$.

$$\begin{aligned}
(L_1, L_2, \cdots, L_n)[y] &= (L_1, L_2, \cdots, L_{i-1}, L_{i+1}, \cdots L_n, L_i)[y] \\
&= (L_1, L_2, \cdots, L_{i-1}, L_{i+1}, \cdots L_n)(L_i[y]) \\
&= (L_1, L_2, \cdots, L_{i-1}, L_{i+1}, \cdots L_n)[0] = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 62 *La ecuación en operadores $(D^2 - 4)y = 0$, se puede expresar como producto de operadores*

$$(D^2 - 4)y = (D - 2)(D + 2)y$$

El espacio nulo de los operadores

$$L_1 = D - 2, \qquad L_2 = D + 2$$

está formado por las funciones

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-2x}$$

de esta forma, el espacio nulo del producto $D^2-4)$ lo está por $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$, y dado que estas funciones son L.I, entonces son base del espacio solución de la ecuación diferencial. Por tanto,

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x}$$

es la solución general.

¡ **Atención**, *atención*, atención !

Se observa, de este ejemplo, que el problema de resolver una ecuación diferencial homogénea de la forma

$$(D^n + p_{n-1}\, D^{n-1} + \cdots + p_0)\, y = 0$$

con p_i constantes, está resuelto si se descompone (según proposición anterior) el operador dado en factores lineales y cuadráticos. Los factores lineales están determinados por las raíces reales de la llamada **Ecuación característica**

$$K^n + p_{n-1}\, K^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$$

y los factores cuadráticos por las raíces complejas de esta ecuación.

Se tiene así, que para factores lineales y cuadráticos diferentes, las soluciones son de la forma $y = e^{kx}$. El único problema se presenta para los factores lineales del tipo $(D - \alpha)^m$ correspondiente a la raíz α de multiplicidad m, y para los factores de la forma $(D^2-2aD+(a^2+b^2))^m$ correspondientes al par de raíces complejas $a \pm b\,i$. Afortunadamente, ¡siempre! la bendita matemática, tiene algo que aportarnos, un truquito aquí, otro más allá. En este caso un teorema que resuelve el problema.

Teorema 19.2 *Si $y(x)$ pertenece al espacio nulo de un operador diferencial lineal L con coeficientes constantes, entonces $x^{m-1}y(x)$ pertenece al espacio nulo de L^m*

No vale la pena que te haga la demostración, pero si te puedo decir que, la consecuencia más importante de este resultado es que se puede afirmar que el espacio nulo del operador $(D-\alpha)^m$ contiene las funciones

$$e^{\alpha x},\; x\,e^{\alpha x},\; x^2\,e^{\alpha x},\; \cdots, x^{m-1}\,e^{\alpha x}$$

y que el espacio nulo del operador $(D^2-2aD+(a^2+b^2))^m)$ contiene a las funciones

$$\begin{array}{l} e^{ax}\,sen\,bx,\; x\,e^{ax}\,sen\,bx,\; \cdots, x^{m-1}\,e^{ax}\,sen\,bx, \\ e^{ax}\cos bx,\; x\,e^{ax}\cos bx,\; \cdots, x^{m-1}\,e^{ax}\cos bx, \end{array}$$

y es con tales funciones con las que se construye la solución general de **TODA** ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Ejemplo 63 *Resolver la ecuación $y''-3y'+2y=0$ equivale a resolver la ecuación en operadores $(D^2-3D+2)y=0$. De esto, se tiene que*

$$(D^2-3D+2)y=(D-1)(D-2)y=0$$

de lo cual

$$\begin{array}{lcl} (D-1)y=0 & \Longrightarrow & y_1=e^x \\ (D-2)y=0 & \Longrightarrow & y_1=e^{2x} \end{array}$$

concluyéndose que la solución general es

$$y=C_1\,e^x+C_2\,e^{2x}$$

Ejemplo 64 *Resolver la ecuación $y'''-y'=0$ equivale a resolver la ecuación en operadores $(D^3-D)y=0$. De donde,*

$$(D^3-D)y=D\,(D+1)(D-1)y=0$$

de lo cual

$$\begin{array}{lcl} D\,y=0 & \Longrightarrow & y_1=C \\ (D+1)y=0 & \Longrightarrow & y_1=e^{-x} \\ (D-1)y=0 & \Longrightarrow & y_1=e^x \end{array}$$

Luego, la solución general es

$$y=C_1+C_2\,e^{-x}+C_3\,e^x$$

Ejemplo 65 *Resolver la ecuación* $y'' + 4y' + 5y = 0$ *equivale a resolver la ecuación en operadores* $(D^2 + 4D + 5)y = 0$*. De donde,* $b^2 - 4ac = 16 - 20 < 0$ *indica que estamos en presencia de un operador irreductible en* $\mathbb{R}$*. Le hacemos un "cara a cara" a los complejos mediante la ecuación característica*

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Longrightarrow k = -2 \pm i$$

Usando la consecuencia del teorema 4 tenemos que la solución general es

$$y = C_1\, e^{-2x}\, sen\, x + C_2\, e^{-2x}\, cos\, x$$

Dado que siempre existen aquellos seres medios "incrédulos", y que desconfían de los teoremas, por que piensan que son un invento más de los matemáticos, a ellos les muestro que se puede llegar al mismo resultado por un camino similar al empleado en los ejemplos anteriores. Miren bien

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Longrightarrow k = -2 \pm i$$

con esto

$$\begin{array}{lcl} (D + 2 - i)y = 0 & \Longrightarrow & y_1 = e^{(-2+i)x} \\ (D + 2 + i)y = 0 & \Longrightarrow & y_2 = e^{(-2-i)x} \end{array}$$

La solución general es

$$y = \left(C_1\, e^{ix} + C_2\, e^{-ix} \right)\, e^{-2x}$$

Según Euler

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x, \qquad e^{-ix} == cos\, x - i\, sen\, x$$

por tanto, la solución general equivale a

$$y = [\, (\ C_1 + C_2\ )\, cos\, x + (\ C_1 - C_2\ )\, i\, sen\, x\,]\ e^{-2x}$$

Ahora se eligen las constantes, adecuadamente

$$C_1 = \frac{A - Bi}{2}, \qquad C_2 = \frac{A + Bi}{2}, \quad A \text{ y } B \text{ reales}$$

con ello,

$$C_1 + C_2 = A, \qquad i\,(C_1 - C_2) = B$$

Reemplazando en la solución general, ella toma la forma

$$y = (\, A\, cos\, x + B\, sen\, x\,)\ e^{-2x}$$

que es semejante a la hallado directamente, ¡tú eliges, la libertad es tuya Ok!

Ejemplo 66 *Hallar una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes que tenga como soluciones a* e^{2x} *y a* $x\, e^{-3x}$*.*

De las hipótesis se tiene

$$L[e^{2x}] = 0, \qquad L[x\, e^{3x}] = 0$$

Aprovecho de comunicarte, decirte o informarte, que un operador que hace esto se llama **Aniquilador**, algo así como "Terminator". Seguimos.

$$L[e^{2x}] = 0 \Longrightarrow L = D - 2, \qquad L[x\, e^{3x}] = 0 \Longrightarrow L = (D + 3)^2$$

¡estamos listos!, la ecuación pedida es

$$(D - 2)(D + 3)^2 y = 0$$

20. Ecuación de Euler

Las ecuaciones de la forma:

1. $a_0\, x^n\, y^{(n)} + a_1\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, x\, y' + a_n\, y = 0$

2. $a_0\,(ax+b)^n\, y^{(n)} + a_1\,(ax+b)^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\,(ax+b)\, y' + a_n\, y = 0$ con a_i, a y b constantes, se llaman Ecuaciones de Euler. La segunda de ellas se reduce a la primera mediante la sustitución $ax+b=z$.

Forma de Resolverlas

La primera forma se reduce a lineal homogénea con coeficientes constantes mediante la sustitución $x = e^t$, o bien, $y = x^k$. Hay dos alternativas, que te haga la demostración o que, a través de un par de ejemplos, veas como se traduce una ecuación de Euler a homogénea. Me imagino tu elección, y esta vez estoy de acuerdo contigo. Como dijo el Dermatólogo vayamos al "grano".

Ejemplo 67 *Resolvemos la ecuación* $x^2\, y'' + \frac{5}{2}\, xy' - y = 0$

Esta ecuación es del tipo Euler, nuestra tarea es cambiarle de "morena" a "rubia", haciendo $y = x^k$, de lo cual

$$y = x^k \Longrightarrow y' = k\, x^{k-1} \Longrightarrow y'' = k(k-1)\, x^{k-2}$$

al reemplazar en la ecuación original tenemos

$$x^2 k(k-1)x^{k-2} + \frac{5}{2}\, xk\, x^{k-1} - x^k = 0$$

que al simplificar y reunir elementos semejantes tiene la forma

$$2k^2 + 3k - 2 = 0 \Longleftrightarrow (k - \frac{1}{2})(k+2) = 0$$

hallando que, $k = \frac{1}{2},\ k = -2$. Por tanto, la solución general es

$$y = C_1\, x^{\frac{1}{2}} + C_2\, x^{-2}$$

Tarea 1 Resolver $x^2\, y'' - xy' + y = 0$. Tu respuesta debe ser

$$y = C_1\, x + C_2\, x\, \ln\, x$$

Tarea 2(Optativa) Si te interesa, puedes ver que con $x = e^t$ se llega a los mismos resultados, quizás con un poco más de trabajo.

21. Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas

Una ecuación diferencial lineal de la forma

$$L[y] = f(x)$$

se llama **no homogénea**

Proposición 21.1 *Si $\overline{y}$ es una solución de la ecuación no homogénea*

$$L[y] = f(x)$$

y si y_1 es una solución de la ecuación homogénea

$$L[y] = 0$$

entonces $\overline{y} + y_1$ es solución de la ecuación no homogénea

$$L[y] = f(x)$$

Demostración Hay que probar que $L[\overline{y} + y_1] = f(x)$. En efecto,

$$L[\overline{y} + y_1] = L[\overline{y}] + L[y_1] = f(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

Teorema 21.2 *Cualquier solución en $[a, b]$ de la ecuación*

$$L[y] = f(x)$$

con coeficientes $p_i(x)$ continuamos y f continua, es igual a la suma de la solución general $\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ de la ecuación homogénea asociada y de cualquier solución particular $\overline{y}$ de la ecuación no homogénea.

Demostración Hay que demostrar que

$$y = \overline{y} + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$$

En primer lugar, verifiquemos que y es solución de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}
L[y] &= L[\overline{y} + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i] = L[\overline{y}] + L[\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i] \\
&= L[\overline{y}] + \sum_{i=1}^{n} C_i\, L[y_i] \\
&= f(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot 0 = f(x)
\end{aligned}$$

En consecuencia, y es solución.

Si z fuera otra solución de $L[y] = f(x)$, entonces

$$L[z - \overline{y}] = L[z] - L[\overline{y}] = 0$$

de manera que, $z-\overline{y}$ es solución de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Por tanto, ella puede escribirse como combinación líneal de la y_i. Es decir,

$$z - \overline{y} = \sum_{1}^{n} b_i\, y_i$$

de donde

$$z = \overline{y} + \sum_{1}^{n} b_i\, y_i$$

y dado que, la solución con condición inicial es única, entonces

$$y = \overline{y} + \sum_{1}^{n} b_i\, y_i$$

Este teorema nos está diciendo que para determinar la solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$L[y] = f(x)$$

es suficiente:

1. Hallar la solución general de $L[y] = 0$
2. Hallar una $\overline{y}$ que satisfaga $L[y] = f(x)$

Con esto se tiene que la solución general es

$$y = \overline{y} + \sum_{1}^{n} C_i\, y_i$$

Un método sencillo para hallar $\overline{y}$ se conoce con el nombre de **coeficientes indeterminados**, que funciona cuando $f(x)$ tiene la forma

$$x^2,\ e^{ax},\ x^n\, e^{ax},\ sen\, bx,\ cos\, bx,\ x^n\, e^{ax}\, cos\, bx,\ n\, e^{ax}\, sen\, bx \cdots ,$$

o cualquier combinación de estas formas.

La idea es determinar un operador L_1 con coeficientes reales tales que

$$L_1[f] = 0$$

El operador L_1 de orden mínimo con coeficientes reales y constantes tal que $L_1[f] = 0$ se denomina **aniquilador** de f.

Se tiene así que toda solución de $L[y] = f(x)$ es tambien solución de la ecuación homogénea $L_1[L[y]] = 0$, de donde, determinando las constantes apropiadas podemos obtener una solución particular de $L[y] = f(x)$.

Ejemplo 68 *Resolver la ecuación diferencial* $(D^2+1)y = 3x^2 + 4$

Claramente, la ecuación diferencial es lineal no homogénea. El operador $L = D^3$ "aniquila" $f(x)$ (Humbertito sacó la primera derivada de $3x^2$ y le dió $6x$, la segunda 6 y la **tercera** 0). Luego un solución particular de la ecuación diferencial dada puede hallarse entre las soluciones de la ecuación homogénea.

$$D^3(D^2+1)y = 0$$

Tenemos ahora una ecuación homogénea, que sabemos trabajar. Su solución es

$$\overline{y} = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + C_2\,sen\,x + C_5\,cos\,x \tag{20}$$

Luego, ésta $\overline{y}$ con la determinación adecuada de las C_i es la candidata a **solución particular** (Volvemos luego por ella).

Por otra parte, resolviendo la ecuación homogénea

$$(D^2+1)y = 0$$

se encuentra que, su solución general es

$$y = C_4\,sen\,x + C_5\,cos\,x \tag{21}$$

Al comparar ambas ecuaciones, vemos que y está contenida en $\overline{y}$. Por tanto, al reemplazar $\overline{y}$ en la ecuación dada, no es necesario considerar la solución y pues se anulan. De esta manera, interesa reemplazar en la ecuación diferencial dada $\overline{y} - y$. Se tiene

$$(D^2+1)(\overline{y}) = (D^2+1)(C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + C_2\,sen\,x + C_5\,cos\,x) = 3x^2 + 4$$

al igualar coeficientes se llega a establecer el sistema

$$\begin{array}{rcl} C_1 + 2C_3 & = & 4 \\ C_2 & = & 0 \Longrightarrow C_1 = -2, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 3 \\ C_3 & = & 3 \end{array}$$

Luego, la solución particular buscada es

$$\overline{y} = 3x^2 - 2$$

En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = C_4\,sen\,x + C_5\,cos\,x + 3x^2 - 2$$

Ejemplo 69 *Determianr un operador lineal con coeficientes constantes que aniquile el segundo miembro de la ecuación*

$$(D^2+1)(D-1)y = e^x + 2 - 7x\,sen\,x$$

Si llamamos L al aniquilador, entonces empezamos a razonar, primero, que debe aniquilar e^x. Siendo así, debe estar presnete factor $(D-1)$. En segundo lugar, para "despacharse" al 2, es suficiente con el factor D. Finalmente, para "echarse" $7x\, sen\, x$ tiene que ser cuadrático, esto es, $(D^2+1)^2$. Por tanto, el "Terminator" de las derivadas es

$$L = (D-1)(D^2+1)^2 D$$

Con la gente que a uno le cae bien, siempre hay buena onda, eso me pasa contigo, te regalo una tabla de aniquiladores, con ella serás un "sheriff" del Clculo.

FUNCION	**ANIQUILADOR**
$y = x^{m-1}$	D^m
$x^{m-1}\, e^{\alpha\, x}$	$(D-\alpha)^m$
$x^{m-1}\, cos\, \beta$	$(D^2+\beta^2)^m$
$x^{m-1}\, sen\, \beta$	$(D^2+\beta^2)^m$
$x^{m-1}\, e^{\alpha\, x}\, cos\, \beta$	$(D^2-2\alpha\, D+(\alpha^2+\beta^2))^m$
$x^{m-1}\, e^{\alpha\, x}\, sen\, \beta$	$(D^2-2\alpha\, D+(\alpha^2+\beta^2))^m$

22. Método de variación de parámetros

Si creiste que los aniquiladores lo eran todo, ¡te equivocaste!, hay algunos casos, en loc cuales falla, como por ejemplo, con la ecuación

$$y'' + y = tg\, x$$

Al igual que en película " Duro de matar", no hay como darle a la tangente para aniquilarla. Pero, como siempre, hay un método alternativo para resolver este problema, y es el ideado por Bernouillí, que llamó "*Variación de Parámetros*". Se basa en la suposición de que la solución particular es obtenida de la parte complementaria de la solución sustituyendo las constantes arbitrarias por funciones apropiadas de x. El método es como sigue:

Se considera la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x) = h(x) \tag{22}$$

Suponemos que los parámetros $c_1, c_2, \cdots, C_n$ que intervienen en la solución de la ecuación homogénea asociada con (3) estén en funciones de x. Esto es,

$$y_H = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n$$

Todo esto se hace con la esperanza de encontrar una solución particular y_p de la ecuación (3) de la forma

$$Yp = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \cdots + C_n(x)\, y_n$$

Para lograr esto, se imponen las siguientes condiciones a las $C_i(x)$:

$$\begin{array}{rcl}
C_1{}'(x)\, y_1 + C_2{}'(x)\, y_2 + \cdots + C_n{}'(x)\, y_n & = & 0 \\
C_1{}'(x)\, y_1{}' + C_2{}'(x)\, y_2{}' + \cdots + C_n{}'(x)\, y_n{}' & = & 0 \\
 & \vdots & \\
C_1{}'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2{}'(x)\, y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n{}'(x)\, y_n^{(n-2)} & = & 0 \\
C_1{}'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2{}'(x)\, y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n{}'(x)\, y_n^{(n-1)} & = & h(x)
\end{array}$$

En este sistema hay que determinar las C_i. El determinante del este sistema es el Wronkiano $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$. Si denotamos por $V_k(x)$ el determinante obtenido de $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$, entonces al reemplazar la k - ésima columna por $(0, 0, 0, \cdots, 1)$, la Regla de Cramer afirma que

$$C_k{}'(x) = \frac{V_k(x)\, h(x)}{W[y_1, y_2, \cdots, y_n]}$$

Luego,

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)\, V_k(t)}{W(t)}\, dt$$

Es probable que no te haya llamado mucho la atención este método, ya que lo encuentras medio enredado. ¡Sale y vale!, estoy de acuerdo, pero veamos como funciona en "vivo y en directo".

Ejemplo 70 *Resolver por método de variación de parámetros la ecuación*

$$y'' - y = e^x$$

¡Manos a la obra!. La ecuación, en operadores, equivale a

$$(D^2 - 1)\, y = 0 \Longleftrightarrow y_H = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}$$

Buscamos la solución particular en la forma

$$y_p = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-x}$$

¡Exigimos, demandamos, imponemos! que

$$\begin{array}{rcl}
C_1{}'(x)\, e^x + C_2{}'(x)\, e^{-x} & = & 0 \\
C_1{}'(x)\, e^x - C_2{}'(x)\, e^{-x} & = & e^x
\end{array}$$

Al sumar, se obtiene

$$C_1{}'(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1$$

Si reemplazas este C_1 en cualquiera de las dos ecuaciones tienes que

$$C_2{}'(x) = -\frac{1}{2}\, e^{2x} \Longrightarrow C_2(x) = -\frac{1}{4}\, e^{2x} + C_2$$

Estamos "casi" listos

$$y_p = \left(\frac{x}{2} + C_1\right)\, e^x + \left(C_2 - \frac{1}{4}\, e^{2x}\right)\, e^{-x}$$

Ojo, que la C_1 y la C_2 son constantes, pero constantes de verdad, no confundas con $C_1(x)$ y $C_2(x)$. Si tienes la gentileza de hacer un par de cálculos, y teniendo presente que dentro de la solución y_p se encuentra la y_H, llegas a

$$y_p = \frac{x}{2}\, e^x - \frac{1}{4}\, e^x$$

Ahora viene el golpe de gracia

$$y = y_p + y_H = \frac{x}{2}\, e^x - \frac{1}{4}\, e^x + C_1\, e^x + k_2\, e^{-x}$$

Ejemplo 71 *Resolvemos por variación de parámetros la ecuación*

$$y''' + 3y'' + 2y' = -e^{-x}$$

Pasamos la homogénea a operadores para tener clara la película

$$(D^3 + 3D^2 + 2D)\, y = 0 \Longleftrightarrow D\,(D+1)(D+2)\, y = 0$$

de esto,

$$y_H = C_1 + C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{-2x}$$

de modo que,

$$y_p = C_1(x) + C_2(x)\, e^{-x} + C_3(x)\, e^{-2x}$$

Ahora vienen las exigencias

$$\begin{array}{rcl} C_1{}'(x) + C_2{}'(x)\, e^{-x} + C_3{}'(x)\, e^{-2x} & = & 0 \\ 0 - C_2{}'(x)\, e^{-x} - 2C_3{}'(x)\, e^{-2x} & = & 0 \\ 0 + C_2{}'(x)\, e^{-x} + 4C_3{}'(x)\, e^{-2x} & = & -e^{-x} \end{array}$$

Al sumar la segunda con la tercera de estas ecuaciones se tiene

$$2\, C_3{}'(x)\, e^{-2x} = -e^{-x} \Longrightarrow C_3{}'(x) = -\frac{1}{2}\, e^x + C_3$$

con esto nos vamos a la tercera ecuación para obtener que,

$$C_3{}'(x) = -\frac{1}{2}\, e^x + C_3 \Longrightarrow C_2{}'(x) = 1 \Longrightarrow C_2(x) = x + C_2$$

Ponemos todo en la primera ecuación, después de algunos cálculo algebraicos que enseñan en el Kinder, tenemos que,

$$C_1{}'(x) = \frac{1}{2}\, e^x + C_1$$

Vamos a la y_p a reemplazar.

$$y_p = \frac{1}{2}\, e^x + C_1 + (x + C_2)\, e^{-x} + (C_3 - \frac{1}{2}\, e^x)\, e^{-2x}$$

Sin olvidar que dentro de ésta se encuentra la y_H, nos queda

$$y_p = x\, e^{-x}$$

En consecuencia,

$$y = C_1 + C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{-2x} + x\, e^{-x}$$

Ejemplo 3 Resolvermos $xy'' + y' = x$ por variación de parámetros.

Ya te sabes el camino. Primero nos vemos las caras con la ecuación

$$xy'' + y' = 0$$

La alternativa para hallar su solución es

$$y' = p \Longrightarrow y'' = p' \Longrightarrow x\,p' + p = 0$$

Al separar variables e integrar se encuentra que

$$p = \frac{C_1}{x} \Longrightarrow y' = \frac{C_1}{x} \Longrightarrow y = C_1\,\ln\,x + C_2$$

Esto significa que

$$y_H = C_1\,\ln\,x + C_2$$

Buscamos a continuación la solución de la ecuación no homogénea, en la forma

$$y = C_1(x)\,\ln\,x + C_2(x)$$

por el método de variación de parámetros, haciendo la exigencia acostumbrada.

$$\begin{aligned} C'_1(x)\,\ln\,x + C'_2(x) &= 0 \\ C'_1(x) \cdot \frac{1}{x} + C'_2(x) \cdot 0 &= x \end{aligned}$$

Nos vamos de cabeza a la segunda ecuación

$$C'_1(x) \cdot \frac{1}{x} = x \Longrightarrow C_1(x) = \frac{x^3}{3} + C_1$$

Con esto en la primera ecuación

$$C'_2(x) = -C'_1(x)\,\ln\,x \Longrightarrow C'_2(x) = -x^2\,\ln\,x \Longrightarrow C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\,\ln\,x + \frac{x^3}{9} + C_2$$

En consecuencia,

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\ln\,x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^3}{3}\,\ln\,x + C_2$$

al simplificar

$$y = C_1\,\ln\,x + \frac{x^3}{9} + C_2$$

Se debe tener en cuenta que $y_p = \dfrac{x^3}{9}$

23. Sistemas de Ecuaciones

Trataremos sistemas de primer orden, especialmente lineales, y algunos ejemplos de orden superior. Lo primero es recordar que, toda ecuación diferencial de orden n de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$$

es equivalente a un sistema de n ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y & = & y_1 \\ y'_1 & = & y_2 \\ y'_2 & = & y_3 \\ & \vdots & \\ y'_{n-1} & = & y_n \\ \\ y'_n & = & f(x, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \end{cases}$$

Ejemplo 72 *Escribir como un sistema la ecuación* $y''' - 2y'' + y' = x^2$

Miramos bien, y escribimos

$$y = y_1,\ y'_1 = y_2,\ y'_2 = y_3,\ y'_3 = x^2 + 2y_3 - y_2$$

Esto permite escribir como sistema

$$\begin{cases} y & = & y_1 \\ y'_1 & = & y_2 \\ y'_2 & = & y_3 \\ y'_3 & = & x^2 + 2y_3 - y_2 \end{cases}$$

O bien

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, un sistema más general de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \\ & \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{23}$$

que satisface las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, en forma vectorial se escribe

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = F(t, \vec{X}), \qquad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) \tag{24}$$

Con esta notación es sencillo ver que las condiciones suficientes para existencia y unicidad de la solución de este sistema, con las condiciones iniciales dadas son:

1. Continuidad de las funciones f_i en una vecindad de las condiciones iniciales
2. Cumplimiento de la condición de Lipschitz para cada f_i en todos sus argumentos a partir del segundo, o en su defecto, existencia de las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ acotadas.

La solución

$$\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$$

del sistema (1) determina en el espacio euclidiano de coordenadas $t, x_1, x_2, \cdots, x_n$ una curva llamada **curva integral**, y en el espacio euclidiano de coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ determina la ley de movimiento de cierta trayectoria según la variación del parámetro t, el cual, casi siempre, corresponde al tiempo. De esta forma, la derivada $\dfrac{d\vec{X}}{dt}$ será la velocidad de movimiento del punto $\vec{X}$, y $\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, , \cdots, \dfrac{dx_n}{dt}$ las coordenadas de la velocidad de este punto. bajo esta interpretación el sistema (1) se llama **dinámico**, el espacio de coordenadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se llama **espacio de fases**, y la curva $\vec{X} = \vec{X}(t)$ se llama **trayectoria de fase**.

Un sistema tal como (2) se llama **autónomo** si F no depende de t, y **no autónomo** en caso contrario.

Ejemplo 73 *Dado el sistema siguiente, averiguar si es autónomo, escribirlo en notación vectorial y también como ecuación diferencial, y hallar su solución general.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} & = & -x \end{cases}$$

No hay duda que es autónomo, no se ve t por ninguna parte. En notación vectorial queda

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}, \qquad \vec{X} = (x, y)$$

Para escribirlo como ecuación diferencial, $x' = y$ implica $x'' = y'$. Pero, $y' = -x$, luego,

$$x'' + x = 0$$

Ahora que lo tenemos en forma de ecuación podemos escribirlo en operadores

$$(D^2 + 1)\, x = 0 \Longrightarrow x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

La solución $x(t)$ se puede mejorar si consideramos, $C_1 = cos\, C_2$ y $C_2 = sen\, C_2$. Se tiene

$$x(t) = C_1\, cos(t - C_2)$$

de esto,

$$y(t) = -C_1\, sen(t - C_2)$$

con lo cual la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x(t) &= C_1\, cos(t - C_2) \\ \\ y(t) &= -C_1\, sen(t - C_2) \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado y sumar se obtiene en el plano de fase xy la familia de círculos concéntricos

$$x^2 + y^2 = C_1^2$$

Una vez más, es interesante recalcar que las trayectorias no se cortan, en virtud de que el segundo miembro del sistema satisface las condiciones del teorema de existencia única. Cuando $C_1 = 0$, la trayectoria de fases se compone de un punto, el $(0, 0)$, llamado punto de reposo del sistema.

24. Método de resolución de sistemas

Te mostraré varios, con ello te harás una y usarás el que mejor se acomode a “tu estilo”.

24.1. Por integración

El método consiste en que, dado el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \\ &\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

se debe hallar la ecuación diferencial equivalente mediante operaciones de derivación, que es lo que se te mostró en el ejemplo anterior.

Ejemplo 74 *Resolvemos el sistema siguiente ($\dot{x}$ indica derivada respecto de t)*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x \end{cases}$$

Como punto de partida consideremos la segunda ecuación

$$\overset{\bullet}{y} = x \implies \overset{\bullet\bullet}{y} = \overset{\bullet}{x} \implies \overset{\bullet\bullet}{y} - y = 0$$

El operadores

$$(D^2 - 1)\, y = 0 \Longrightarrow y = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t}$$

Para hallar x derivamos esta última ecuación

$$y = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t} \Longrightarrow \overset{\bullet}{y} = x = C_1\, e^t - C_2\, e^{-t}$$

en consecuencia,

$$\begin{cases} x &= C_1\, e^t - C_2\, e^{-t} \\ \\ y &= C_1\, e^t + C_2\, e^{-t} \end{cases}$$

es la famila de soluciones.

Ejemplo 75 *Resolvemos el sistema*

$$\begin{cases} \overset{\bullet}{x} &= 3x - 2y \\ \overset{\bullet}{y} &= 2x - y \end{cases}$$

El punto de parida que elegimos es el siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = 2x - y \Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

hacemos los reemplazos pertinentes para tener

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= 2(3x - 2y) - (2x - y) = 4x - 3y \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{2}\left(y + \tfrac{dy}{dt}\right) - 3y \\ &= 2\,\tfrac{dy}{dt} - y \end{aligned}$$

Escribiendo en operadores esta ecuación,

$$(D^2 - 2D + 1)\, y = 0 \Longleftrightarrow (D - 1)^2\, y = 0$$

de donde,

$$y = C_1\, e^t + C_2\, t\, e^t$$

Ahora vamos con esto a reemplazar en la segunda ecuación del sistema original.

$$x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(C_1\, e^t + C_2\, t\, e^t + C_1\, e^t + C_2\, e^t + C_1\, e^t + C_2\, t\, e^t\right)$$

de donde

$$x = \frac{1}{2}\, e^t \left(2C_1 + C_2 + 2C_2 t\right)$$

En consecuencia, la familia solución es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\, e^t \left(2C_1 + C_2 + 2C_2 t\right) \\ y &= \left(C_1 + t\, C_2\right) e^t \end{aligned}$$

24.2. Por Combinaciones Integrables

Por lo general, la integración de un sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{25}$$

se realiza escogiendo las llamadas **combinaciones integrables**.

Definición 24.1 *Se llama* **combinación integrable** *a una ecuación diferencial que es consecuencia de las ecuaciones (3) (que se integra con facilidad), y que es de la forma*

$$d\phi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

O reducible a una ecuación integrable

Ejemplo 76 *Resolvemos*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y \\ \dfrac{dy}{dt} &= x \end{cases}$$

Al sumar miembro a miembro se halla la combinación integrable

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y$$

lo cual equivale a

$$\frac{d}{dt}\,(x + y) = x + y \Longrightarrow \frac{d(x+y)}{(x+y)} = dt$$

Al tener las variables separadas, sólo resta integrar

$$\ln(x + y) = t - \ln\, C_1 \Longrightarrow x + y = C_1\, e^t$$

24.3. Valores propios

El método más adecuado para resolver sistemas lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = A\,\vec{X}$$

para una matriz A con n valores propios distintos es el llamado método de los *valores propios*, que a continuación detallamos.

Este método tiene su origen en el intento de resolver ecuaciones con operadores de la forma

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \tag{26}$$

en donde A es una transformación lineal, λ un escalar, y $\vec{x}$ un vector.

Definición 24.2 *Los valores de λ para los cuales la ecuación (4) tiene soluciones distintas de cero se llaman valores propios de A, y para cada valor propio λ_0, los vectores $\vec{x}$ no nulos que satisfacen la ecuación*

$$A\,\vec{x} = \lambda_0\,\vec{x}$$

se llaman vectores propios de A, asociados a λ_0.

Teorema 24.3 *Cualquier conjunto de vectores propios pertenecientes a distintos valores propios de una transformación lineal es linealmente independiente.*

Cálculo de los valores propios

La ecuación

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$$

se puede escribir

$$(A - \lambda\,I)\,\vec{x} = 0$$

siendo I la transformación identidad. Se considera la representación matricial, en la base que se eliga, de A siguiente

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Con esto, es posible escribir la expresión matricial

$$A - \lambda\,I = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A se calculan resolviendo la ecuación de determinante

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} = 0$$

El polinomio que aparece al resolver este deternminante se llama *polinomio característico* de la transformación lineal A, y la ecuación misma se llama *ecuación característica*

Teorema 24.4 *Para el valor propio real λ de A, y cada vector propio E_λ correspondiente a λ, la función*

$$\vec{x}_\lambda = E_\lambda \, e^{\lambda t} \tag{27}$$

es una solución de la ecuación $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$. Además, las soluciones construidas de esta forma con valores propios distintos son linealmente independientes.

Demostración

1) Por demostrar que $\vec{x}_\lambda$ es solución.

Si E_λ es el vector propio asociado a λ, entonces

$$A\,E_\lambda = \lambda\,E_\lambda \tag{28}$$

Por otro lado,

$$\vec{x}_\lambda = E_\lambda \, e^{\lambda t} \Longrightarrow A\,\vec{x}_\lambda = A\,E_\lambda\,e^{\lambda t}$$

usando la ecuación (5) tenemos

$$A\,\vec{x}_\lambda = \lambda\,E_\lambda\,e^{\lambda t} \Longrightarrow A\,\vec{x}_\lambda = \lambda\,\vec{x}_\lambda$$

Además,

$$\begin{aligned} \vec{x}_\lambda = E_\lambda\,e^{\lambda t} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \lambda\,E_\lambda\,e^{\lambda t} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \lambda\,\vec{x}_\lambda \\ &\Longrightarrow \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}_\lambda \end{aligned}$$

lo cual prueba que es solución

2) Por demostrar que es L.I.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ valores propios distintos de A, con vectores propios asociados $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \cdots, E_{\lambda_k}$ respectivamente, y supongamos que

$$C_1\,E_{\lambda_1}\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,E_{\lambda_2}\,e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_k\,E_{\lambda_k}\,e^{\lambda_k t} = 0$$

Para $t = 0$ se tiene

$$C_1\,E_{\lambda_1} + C_2\,E_{\lambda_2} + \cdots + C_k\,E_{\lambda_k} = 0$$

como los E_{λ_i} son, por hipótesis, L.I, entonces $C_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. Se tiene así, que la familia $\{E_{\lambda_i}\, e^{\lambda_i\, t}\}$, con $i = 1, 2, \cdots, k$ es linealmente independiente.

Super - corolario Si A tiene n valores propios reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, y si $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \cdots, E_{\lambda_n}$ son sus vectores propios asociados a cada uno de ellos, entonces la solución general del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$$

viene dada por

$$\vec{x}(t) = C_1\, E_{\lambda_1}\, e^{\lambda_1\, t} + C_2\, E_{\lambda_2}\, e^{\lambda_2\, t} + \cdots + C_n\, E_{\lambda_n}\, e^{\lambda_n\, t} = 0$$

con C_i constantes arbitrarias.

Ejemplo 77 *El sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & x_1 + 3x_2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & x_1 - x_2 \end{cases}$$

escrito matricialmente tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Para tener la ecuación característica formamos el determinante

$$\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$$

del cual obtenemos

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2$$

tenemos entonces, valores propios distintos. Sus vectores propios asociados son:

$$\lambda = 2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = & 2x_1 \\ x_1 - x_2 & = & 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 3x_2$$

considerando $x_1 = 3$, entonces $x_2 = 1$, con lo cual, el vector propio asociado es

$$E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con un poco de paciencia, debieras poder calcular E_{-2} y tener que

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con esto tenemos la solución general

$$\vec{x}(t) = C_1\, E_2\, e^{2t} + C_2\, E_{-2}\, e^{-2t}$$

lo que equivale a

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

O bien,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-2t} \\ C_1\, e^{2t} - C_2\, e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Teorema 24.5 *Si λ_0 es un valor propio real de multiplicidad k, es decir, $(\lambda - \lambda_0)^k$ es un factor de la ecuación característica, y si E_{λ_0} es el vector propio para λ_0, entonces*

$$E_{\lambda_0}\, e^{\lambda_0\, t}, E_{\lambda_0}\, t\, e^{\lambda_0\, t}, \cdots , E_{\lambda_0}\, t^{k-1}\, e^{\lambda_0\, t}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$

Teorema 24.6 *Sea A matriz $n \times n$ real, y supongamos que E_λ es un vector propio correspondiente al valor propio complejo $\lambda = a + i\, b$ de A, entonces*

$$E_\lambda\, e^{\lambda\, t}, \qquad \overline{E}_{\overline{\lambda}}\, e^{\overline{\lambda}\, t}$$

son soluciones del sistema $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$

Teorema 24.7 *Sean $G_\lambda = \dfrac{E_\lambda + \overline{E}_\lambda}{2}$ y $H_\lambda = \dfrac{i\,(E_\lambda - \overline{E}_\lambda)}{2}$ vectores propios reales. Si $\lambda = a + i\, b$ es un valor propio complejo para la matriz real A de orden $n \times n$, y si E_λ es un vector propio asociado a λ, entonces las funciones*

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{at}\, (G_\lambda\, cos\, bt + H_\lambda\, sen\, bt) \\ \vec{x}_2(t) &= e^{at}\, (H_\lambda\, cos\, bt - G_\lambda\, sen\, bt) \end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$.

Ejemplo 78 *El sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= x \end{cases}$$

escrito matricialmente tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con ecuación característica

$$\begin{Vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0$$

de donde $\lambda = \pm i$*, y de lo cual* $a = 0,\ b = \pm 1$*. Buscamos los vectores propios asociados:*

$$\lambda = i \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} -y & = & i\,x \\ x & = & i\,y \end{cases} \Longrightarrow y = 1,\ x = i$$

entonces el vector propio asociado es

$$E_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el otro vector propio asociado, usamdo el teorema 4, que afirma que,

$$E_{-i} = \overline{E}_i = \overline{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

La idea es tener vectores propios reales, luego usamos

$$G_\lambda = \frac{E_i + \overline{E}_i}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y \qquad H_\lambda = \frac{i}{2}\,(E_i - \overline{E}_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de esto, por el teorema 5, las soluciones linealmente independientes del sistema son

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ \vec{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general la podemos escribir en la forma

$$\vec{x}(t) = C_1\,\vec{x_1}(t) + C_2\,\vec{x_2}(t) = \begin{pmatrix} -C_1 \operatorname{sen} t & -C_2 \cos t \\ \\ C_1 \cos t & -C_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Teorema 24.8 *Si* λ_0 *es un valor propio complejo de multiplicidad* k*, es decir,* $(\lambda - \lambda_0)^k$ *es factor de la ecuación característica, y si* E_{λ_0} *es el vector propio asociado a* λ_0*, entonces las funciones*

$$E_{\lambda_0}\, e^{at} \cos bt, E_{\lambda_0}\, t\, e^{at} \cos bt, \cdots, E_{\lambda_0}\, t^{k-1}\, e^{at} \cos bt$$

$$E_{\lambda_0}\, e^{at} \operatorname{sen} bt, E_{\lambda_0}\, t\, e^{at} \operatorname{sen} bt, \cdots, E_{\lambda_0}\, t^{k-1}\, e^{at} \operatorname{sen} bt$$

son soluciones linealmente independientes del sistema $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}$*.*

24.4. Reducción a forma triangular

Este método consiste en la aplicación de operaciones elementales entre filas para escribir el sistema dado en forma triangular, obteniendo así un par de sistemas equivalentes. Esta técnica es aplicable a todos los sistemas lineales en el cual el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones, y todos los operadores que aparecen en el sistema tienen coeficientes constantes.

Ejemplo 79 *Resolvemos el sistema*

$$\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ (D^2-1)\,x_1 + 5Dx_2 &= e^t \end{aligned}$$

Se cumplen todas las condiciones (sistema 2×2, operadores con coeficientes constantes). Al multiplicar la primera ecuación por $-\frac{1}{2}\,D$ y sumarla con la segunda, se tiene el siguiente sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ -D^2x_1 + \frac{D}{2}(D^2-4)\,x_2 \;+ (D^2-1)\,x_1 + 5Dx_2 &= e^t \end{aligned}\right\}$$

en colores está indicada la cantidad que se suma. Al simplificar queda

$$\left\{\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ -x_1 + (\frac{D^3}{2} + 3D)\,x_2 &= e^t \end{aligned}\right.$$

Ahora se multiplica la segunda ecuación por $2D$, y sumamos con la primera.

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ 2D\left(\frac{D^3}{2} + 3D\right)\,x_2 - 2Dx_1 \;+ 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

O bien,

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ (D^4+5D^2+4)x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

que también se puede mejorar, escribiendo como producto de operadores

$$\left.\begin{aligned} 2Dx_1 - (D^2-4)\,x_2 &= 0 \\ (D^2+4)(D^2+1)x_2 &= 2e^t \end{aligned}\right\}$$

¡estamos en forma triangular!. Con la segunda ecuación se calcula x_2. Se tiene

$$(x_2)_H(t) = C_1\cos t + C_2\,sen\,t + C_3\,sen\,2t + C_4\cos 2t$$

es la solución de la homogénea, y usando aniquiladores se tiene que

$$(D-1)(D^2+4)(D^2+1)x_2 = 0$$

como la solución de $(D-1)x_2$ es $x_2 = C_5\,e^t$, entonces

$$(D^2+4)(D^2+1)\,C_5\,e^t = 2\,e^t \Longrightarrow C_5 = \frac{1}{5}$$

En consecuencia,

$$x_2(t) = C_1\, cos\, t + C_2\, sen\, t + C_3\, sen\, 2t + C_4\, cos\, 2t + \frac{1}{5}\, e^t$$

En el último sistema, con la primera ecuación, determinamos el x_1

$$2Dx_1 - (D^2 - 4)\,(C_1\, cos\, t + C_2\, sen\, t + C_3\, sen\, 2t + C_4\, cos\, 2t + \frac{1}{5}\, e^t) = 0$$

de donde,

$$x_1(t) = -\frac{5}{2}\, C_1\, sen\, t + \frac{5}{2}\, cos\, t + 2C_3\, cos\, 2t - 2C_4\, sen\, 2t - \frac{3}{10}\, e^t$$

25. Soluciones en Series de Potencia

Una de las mejores técnicas para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables (excepto ecuaciones de Euler) está basado en el uso de las series de potencia. Para empezar, hay que recordar algunos conceptos básicos:

1. Una función f puede representarse por una serie de Taylor en un punto x_0, a condición de que todas las derivadas existan en x_0. En tal caso

$$f(t) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0) + f\,''(x_0)\frac{(x - x_0)}{2!} + \cdots$$

2. Una función f se dice **analítica** en x_0 si ella puede desarrollarse en serie de potencia en x_0

3. Una expresión de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (x - x_0)^k$$

con k y x_0 constantes se llama **serie de potencias** en $(x - x_0)$, o serie de potencias alrededor de $x = x_0$

4. Una serie de potencias se dice convergente en x_1 si y sólo si, la serie obtenida de ella haciendo $x = x_1$ es una serie convergente.

5. Toda serie de potencias con radio de convergencia R define una función f en el intervalo $\|x - x_0\| < R$. esto es,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (x - x_0)^k$$

además, tal función es infinitamente diferenciable en $\|x - x_0\| < R$, y se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, (x-x_0)^{k-1} \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k\, (x-x_0)^{k-2} \\ &\vdots \\ f^k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{n+k}\, x^n \end{aligned}$$

se arregló el punto de partida de la serie derivada para tener una notación más compacta.

Teorema 25.1 *(Existencia)*
Se considera la ecuación diferencial lineal normal de orden n cuyos coeficientes $a_i(x)$ y $h(x)$ son analíticos en un intervalo abierto I

$$D^n y + a_{n-1}(x)\, D^{n-1}\, y + \cdots + a_0(x)\, y = h(x) \tag{29}$$

Sea $x_0 \in I$ y supongamos que los desarrollos en series de potencia de $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), h(x)$ convergen todos en el mismo intervalo $\|x - x_0\| < R$, $R > 0$. Entonces toda solución de (1) que esté definida en el punto x_0 es analítica en ese punto, y su desarrollo en serie de potencias alrededor de x_0 converge también en el intervalo $\|x - x_0\| < R$.

Puntos Ordinarios y Singulares

Nos dedicamos a trabajar ecuaciones de segundo orden de la forma

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

1. x_0 es un punto ordinario si $p(x_0)$ y $q(x_0)$ son finitos.
2. x_0 es un punto singular si $p(x)$ y/o $q(x)$ divergen cuando $x \to x_0$.
3. x_0 es un punto singular regular, si además de singular, $(x - x_0)p(x)$ y $(x - x_0)^2\, q(x)$ son finitos cuando $x \to x_0$.

Ejemplo 80 *Se considera la ecuación $x^2(x+1)^3(x-1)y'' + x\, y' - 2y = 0$.*

Veamos quienes son p y q para poder decidir el tipo de punto

$$p(x) = \frac{1}{x\,(x+1)^3(x-1)}, \qquad q(x) = -\frac{2}{x^2(x+1)^3(x-1)}$$

p no es finito en $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$, así que no son ordinarios (cualquier otro punto lo es). Además, tanto p como q divergen para $x \to 0$, $x \to 1$, y $x \to -1$, por tanto, estos puntos son singulares. Veamos si se les puede agregar el apellido "regular".

$$x \cdot p(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x-1)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)^3(x-1)} = -1 \quad \text{finito}$$

$$x^2 \cdot q(x) = \frac{-2}{(x+1)^3(x-1)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-2}{(x+1)^3(x-1)} = 2 \quad \text{finito}$$

Con el interés que te caracteriza, puedes verificar que $x = 1$ es singular regular, y que $x = -1$ no lo es.

25.1. Puntos ordinarios

Teorema 25.2 *Sea x_0 punto ordinario de*

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

sean α y β constantes, entonces existe una única solución $y(x)$ analítica en x_0 que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$. Tal solución se puede hallar en la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

Ejemplo 81 *Hallar la solución general, en $(-\infty, \infty)$, de la ecuación*

$$y'' + x\, y' + y = 0$$

A ojo de buen observador, no tenemos puntos singulares, por tanto, todos los puntos son ordinarios. Además, los coeficientes x y 1 son analíticos, luego existe solución y cada una de las soluciones de esta ecuación tiene desarrollo en serie alrededor de $x = x_0$. Elegimos $x_0 = 0$ para hacer los desarrollos.

El método a emplear es el de los *coeficientes indeterminados*. Si la solución existe, entonces es de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$$

Hay que derivar dos veces.

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k\, x^{k-2}$$

con esto vamos a reemplazar en la ecuación diferencial dada.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k\, x^{k-2} + x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = 0$$

Luego de "entrar" el x en la segunda sumatoria, hacemos $k = k + 2$ en la primera sumatoria, teniéndose,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\,a_{k+2}\,x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k = 0$$

y nuestra hermosa ecuación de sumatorias, tienen **TODAS** x^k. Aún tenemos un "drama", la primera y tercera sumatoria parten de cero, si sacamos este primer término, tendremos, como dijo el hípico "todos los caballos en el mismo punto de partida". Factorizando por x^k:

$$(2a_2 + a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} x^k\left((k+2)(k+1)\,a_{k+2} + k\,a_k + a_k\,\right) = 0$$

al factorizar a_k,

$$(2a_2 + a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} x^k\,(k+1)\;[(k+2)\,a_{k+2} + a_k\,] = 0$$

para que esta expresión sea cero, se debe cumplir que

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 & = & 0 \\ (k+2)\,a_{k+2} + a_k & = & 0 \end{cases}$$

si la sumatoria parte de $k = 1$, es obvio que el sistema vale para $k \geq 1$. De la primera ecuación $a_2 = -\frac{1}{2}\,a_0$. Reemplazando esto en la segunda ecuación, se tiene para $k = 2$, que

$$a_2 + 4a_4 = 0 \Longrightarrow a_4 = -\frac{1}{4}\,a_2 = \frac{1}{8}\,a_0$$

para $k = 4$

$$a_6 = -\frac{1}{6}\,a_4 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

En general, los pares tienen la forma

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\,a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)(2k)}$$

Para los impares, el cuento es como sigue: Con $k = 1$ en la segunda ecuación

$$a_1 + 3a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{1}{3}\,a_1$$

Con $k = 3$, se tiene

$$a_3 + 5a_5 = 0 \Longrightarrow a_5 = -\frac{1}{5}\,a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 5}$$

En general,

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k\,a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k-1)(2k+1)}$$

Al sustituir estos valores

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
&= (a_0 + a_2 x^2 + \cdots) + (a_1 x + a_3 x^3 + \cdots) \\
&= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

con a_0 y a_1 constantes arbitrarias. Falta probar que esta última es la solución general. Para ello, sea

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \\
y_1(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{3\cdot 5\cdot\cdots(2+1k)}
\end{aligned}
$$

Por el criterio de la razón se observa que tanto y_0 como y_1 son convergentes para todo x. De esta forma, la solución general es

$$y(x) = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x)$$

y son linealmente independiente, pues,

$$y_0(0) = 1,\ y_0^{'}(0) = 0, \qquad y_1(0) = 0,\ y_1^{'}(0) = 1$$

esto significa que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, con lo que, efectivamente, y_0 e y_1 son L.I.

Ejemplo 82 *Encontrar la solución en serie de la ecuación*

$$x\, y'' + x^3\, y' - 3\, y = 0$$

que satisface $y(1) = 0,\ y^{'}(1) = 2$.

Dado que las condiciones iniciales están en $x = 1$, el desarrollo se hace en ese punto. Esta vez, te muestro el método de la *diferenciación sucesiva*, que consiste en despejar la máxima derivada, derivar, y establecer la serie.

$$
\begin{aligned}
y'' &= -x^2\, y' + 3\, x^{-1}\, y \\
y''' &= -x^2\, y'' - 2xy' + 3\, x^{-1}\, y' - 3x^{-2}\, y = -x^2\, y'' - (2x - 3\, x^{-1})\, y' - 3x^{-2}\, y \\
y^{(4)} &= -x^2\, y''' - (4x - 3x^{-1})\, y'' - (2 + 6\, x^{-2})\, y' + 6x^{-3}\, y
\end{aligned}
$$

con la condición inicial, la cosa es

$$y''(1) = -2, \quad y'''(1) = 4, \quad y^{(4)}(1) = -18$$

En consecuencia, la solución es

$$y(x) = 0 + 2(x-1) - 2\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4\cdot\frac{1}{6}(x-1)^3 - 18\cdot\frac{1}{24}(x-1)^4 + \cdots$$

O bien,

$$y(x) = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{3}{4}(x-1)^4 + \cdots$$

25.2. Puntos Regulares

El método de los coeficientes indeterminados con una ligera modificación puede ser usado para obtener una base del espacio solución de cualquier ecuación diferencial homogénea de segundo orden alrededor de un punto singular regular. Se le conoce como método de Frobenius.

Cuando el punto es singular irregular, el asunto se complica por que existen ecuaciones que no tienen soluciones en serie alrededor de un punto, por tal razón, nada más puede decirse de los puntos singulares irregulares.

Sea x_0 punto singular regular de

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

se buscan soluciones de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{r+n},\;\; c_0 = 1,\;\; x > 0$$

se encuentra la primera y segunda derivada de esta serie.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\, c_n\, x^{r+n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)\, c_n\, x^{r+n-2} \end{aligned}$$

se reemplaza en la ecuación diferencial de segundo orden.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-2)\, c_n\, x^{r+n-2} + p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\, c_n\, x^{r+n-1} + q(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{r+n} = 0$$

ecuación que, igualando potencias, se escribe

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-2)\, c_n\, x^{r+n-2} + x\, p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)\, c_n\, x^{r+n-2} & \\ + q(x)\, x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{r+n-2} &= 0 \end{aligned}$$

en una sola sumatoria esto equivale a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{r+n-2} \left[(r+n)(r+n-2) + x\,p(x)\,(r+n) + q(x)\,x^2\right]\, c_n = 0 \tag{30}$$

como x_0 es singular regular, $x\,p(x)$ y $x^2 q(x)$ se pueden desarrollar en serie de potencias

$$\begin{aligned} x\,p(x) &= p_0 + p_1\,x + p_2\,x^2 + \cdots \\ x^2\,q(x) &= q_0 + q_1\,x + q_2\,x^2 + \cdots \end{aligned} \tag{31}$$

Además, como $n \geq 0$, entonces x^{r-2} es la mínima potencia de x en la ecuación (2), los coeficientes de x^{r-2} deben anularse para todo n. Tomando $n = 0$ tenemos,

$$r\,(r-1) + x\,p(x)\,r + q(x)\,x^2 = 0$$

usando los desarrollos

$$\begin{aligned} x\,p(x) &= p_0 + p_1\,x + p_2\,x^2 \\ x^2\,q(x) &= q_0 + q_1\,x + q_2\,x^2 \end{aligned}$$

se tiene la ecuación

$$r\,(r-1) + r[p_0 + p_1\,x + p_2\,x^2 + \cdots] + [q_0 + q_1\,x + q_2\,x^2 + \cdots] = 0$$

que podemos escribir en la forma

$$[r\,(r-1) + r\,p_0 + q_0] + x\,[r\,p_1 + q_1] + x^2\,[r\,p_2 + q_2] + \cdots] = 0$$

La ecuación

$$r\,(r-1) + r\,p_0 + q_0 = 0$$

se llama ecuación *indicial.* Para estos puntos singulares regulares se tienen las siguientes alternativas:

Teorema 25.3 *Se considera la ecuación diferencial lineal homogéna de segundo orden*

$$x^{2\,\prime\prime} + x\,q(x)\,y' + r(x)\,y = 0$$

cuyos coeficientes son analíticos en $\|x\| < R$, $R > 0$. Si k_1 y k_2 son las raíces de la ecuación indicial

$$k(k-1) + q(0)\,k + r(0) = 0$$

entonces la ecuación dada tiene dos soluciones linealmente independientes, y_1 e y_2 válidas en $0 < \|x\| < R$, y cuya forma depende de k_1 y k_2 como sigue:

- $k_1 - k_2$ **NO ENTERO**

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \|x\|^{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n, \quad a_0 = 1 \\ y_2(x) &= \|x\|^{k_2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,x^n, \quad b_0 = 1 \end{aligned}$$

- $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \|x\|^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \quad a_0 = 1 \\ y_2(x) &= \|x\|^k \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^n + y_1(x)\, \ln \|x\| \end{aligned}$$

- $k_1 - k_2$ **ENTERO POSITIVO**

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \|x\|^{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \quad a_0 = 1 \\ y_2(x) &= \|x\|^{k_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n + C\, y_1(x)\, \ln \|x\|, \quad b_0 = 1,\ C = \mathit{constante} \end{aligned}$$

Ejemplo 83 *Clasificar los puntos de la ecuación* $x^2(x+1)^3(x-1)y'' + x\,y' - 2y = 0.$

Determinamos quien son p y q para poder decidir el tipo de punto

$$p(x) = \frac{1}{x\,(x+1)^3(x-1)}, \qquad q(x) = -\frac{2}{x^2(x+1)^3(x-1)}$$

p no es finito en $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$, así que no son ordinarios (cualquier otro punto lo es). Además, tanto p como q divergen para $x \to 0$, $x \to 1$, y $x \to -1$, por tanto, estos puntos son singulares. Veamos si se les puede agregar el apellido "regular".

$$x \cdot p(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x-1)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)^3(x-1)} = -1 \quad \text{finito}$$

$$x^2 \cdot q(x) = \frac{-2}{(x+1)^3(x-1)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-2}{(x+1)^3(x-1)} = 2 \quad \text{finito}$$

Con el interés que te caracteriza, puedes verificar que $x = 1$ es singular regular, y que $x = -1$ no lo es.

Ejemplo 84 *Sea* $x^2\,y'' + x(x - \frac{1}{2})\,y' + \frac{1}{2}\,y = 0$ *ecuación definida en el intervalo* $(0, \infty)$ *o* $(-\infty, 0)$.

Es claro que, $x = 0$ es punto singular regular, por tanto, se busca solución en la forma

$$y(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+k}$$

con $a_0 \neq 0$ y k constante arbitraria. Este es el método de Frobenius, y se usa para cualquier ecuación lineal homogénea de segundo orden. Se sacan las derivadas.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\,a_n\,x^{k+n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\,a_n\,x^{k+n-2} \end{aligned}$$

Se sustituye en la ecuación diferencial dada.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\,a_n\,x^{k+n} \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\,a_n\,x^{k+n+1} \quad - \\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\,a_n\,x^{k+n} \quad &+ \quad \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^{k+n} \qquad = \quad 0 \qquad \star \end{aligned}$$

Conviene transformar la segunda de estas series para tener factores x^{k+n}. Para ello, hacemos $n = n-1$, para tener

$$\sum_{n=0}^{\infty}(k+n)\,a_n\,x^{k+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(k+n-1)\,a_{n-1}\,x^{k+n}$$

Luego, la expresión $(\star)$ se escribe, tomando sumatoria desde $n=1$ como

$$k(k-1)a_0\,x^k + \sum_{n=1}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\,a_n\,x^{k+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(k+n-1)\,a_{n-1}\,x^{k+n} -$$

$$\frac{1}{2}ka_0x^k - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(k+n)\,a_n\,x^{k+n} + \frac{1}{2}a_0x^k + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^{k+n} = 0$$

Esto es,

$$a_0\,x^k\,(\,k(k-1) - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\,) + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\,x^{k+n}\left[(k+n)(k+n-1) - \frac{k+n}{2} + \frac{1}{2}\right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k+n-1)\,a_{n-1}\,x^{k+n} = 0$$

En consecuencia, debe tenerse

$$\left\{ \begin{aligned} k(k-1) - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \quad &= \quad 0 \\ \left[(k+n)(k+n-1) - \frac{k+n}{2} + \frac{1}{2}\right]a_n + (k+n-1)\,a_{n-1} \quad &= \quad 0, \quad n \geq 1 \end{aligned} \right.$$

de la primera ecuación se obtienen los valores permisibles de k, que son $k=1$ y $k=\frac{1}{2}$. Esta ecuación recibe el nombre de *indicial*, se denota por $I(k)$. Esto es,

$$I(k) = k(k-1) - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Con esta notación las ecuaciones anteriores quedan como sigue:

$$\begin{cases} I(k) = 0 \\ (k+n)\,a_n + (k+n-1)\,a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Veamos lo que sucede con los valores de k.

¡ $k = \frac{1}{2}$!

$$\begin{aligned} I(\frac{1}{2}+n)\,a_n + (n-\frac{1}{2})\,a_{n-1} &= 0 \\ \left[(\frac{1}{2}+n)(n-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-n) + \frac{1}{2}\right]a_n + (n-\frac{1}{2})\,a_{n-1} &= 0 \\ n\,(n-\frac{1}{2})a_n + (n-\frac{1}{2})\,a_{n-1} &= 0 \\ (n-\frac{1}{2})(n\,a_n + a_{n-1}) &= 0 \\ a_n &= -\frac{1}{n}\,a_{n-1}) \end{aligned}$$

de donde,

$$a_1 = -a_0,\ a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = \frac{a_0}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 3}\cdots, a_n = (-1)^n\,\frac{a_0}{n!}$$

¡ $k = 1$!

En este caso, $a_n = -\dfrac{2}{2n+1}\,a_{n-1}$. Luego,

$$a_1 = -\frac{2}{3}\,a_0,\ a_2 = \frac{2^2}{3\cdot 5}\,a_0,\ a_3 = -\frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}\,a_0, \cdots, a_n = \frac{(-1)^n\,2^n\,a_0}{3\cdot 5\cdot 7\cdot (2n+1)}$$

Tomando $a_0 = 1$, y reemplazando en la serie solución se tiene

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!} \\ y_2(x) &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2x)^n}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)} \end{aligned}$$

Estas funciones son L.I. y convergentes. En consecuencia, la solución general es de la forma

$$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$$

que en este caso, equivale a

$$y(x) = C_1\,\|x\|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{n!} + C_2\,\|x\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2x)^n}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

A lo mejor te gusta más el siguiente camino:

$$x^2\, y'' + x(x - \frac{1}{2})\, y' + \frac{1}{2}\, y = 0$$

es la ecuación diferencial dada. Te muestro como llegar a la ecuación indicial en forma rápida y sencilla

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{x}\,(x - \frac{1}{2}) \Longrightarrow x\, p(x) = x - \frac{1}{2} \\ q(x) &= \frac{1}{2x^2} \Longrightarrow x^2\, q(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Debe tenerse presente que estos son desarrollos en serie de Taylor, por tanto, se deduce que

$$p_0 = -\frac{1}{2} \qquad q_0 = \frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación indicial es

$$I(r) = r(r-1) - \frac{r}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

A partir de esto, se tiene que $r = 1$ o bien $r = \frac{1}{2}$. Se reemplaza cada uno de estos valores en la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{r+n-2}\left[(r+n)(r+n-2) + x\, p(x)\,(r+n) + q(x)\, x^2\right]\, c_n = 0$$

Si $r = \frac{1}{2}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{1}{2}+n-2}\left[(\frac{1}{2}+n)(\frac{1}{2}+n-2) + (\frac{1}{2}+n)(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\right]\, c_n = 0$$

Ahora hay que ver el asunto de los exponentes, para ello se debe separar en dos sumatorias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n-\frac{3}{2}}\,[n^2 - \frac{n}{2})]\, c_n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-\frac{1}{2}}[\frac{1}{2}+n]\, c_n = 0$$

En la primera suma, $n = 0$ hace que el primer término de ella sea 0. En la segunda suma se hace $n = n - 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-\frac{3}{2}}\,[n^2 - \frac{n}{2})]\, c_n + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-\frac{3}{2}}[n - \frac{1}{2}]\, c_{n-1} = 0$$

Ahora tenemos el mismo exponente e índice de partida. Una sola suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-\frac{3}{2}}\left[c_n\,(n - \frac{1}{2})n + c_{n-1}\,(n - \frac{1}{2})\right] = 0$$

Para que esta suma sea cero, la única alternativa es que la cantidad dentro del corchete se anule. Es decir,

$$c_n\,(n - \frac{1}{2})n + c_{n-1}\,(n - \frac{1}{2}) = 0$$

de donde,

$$c_n = -\frac{1}{n}\, c_{n-1}$$

se obtienen los siguientes valores:

$$c_1 = -c_0,\ c_2 = -\frac{1}{2}\, c_1 = \frac{1}{2}\, c_0,\ c_3 = -\frac{1}{3}\, c_2 = -\frac{1}{6}\, c_0$$

lo que da a lugar a

$$c_n = \frac{(-1)^n\, c_0}{n!}$$

Un trabajo similar con $r = 1$ produce

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \left[c_n\, (n + \frac{1}{2}) n + n\, c_{n-1} \right] = 0$$

de donde,

$$c_n = -\frac{2c_{n-1}}{1+2n}$$

se obtienen los siguientes valores:

$$c_1 = -\frac{2}{3}\, c_0,\ c_2 = -\frac{2}{5}\, c_1 = \frac{4c_0}{3\cdot 5},\ c_3 = -\frac{2}{7}\, c_2 = -\frac{2\cdot 4\, c_0}{3\cdot 5\cdot 7}$$

lo que da a lugar a

$$c_n = \frac{(-1)^n\, c_0\, 2^n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)}$$

Tomando $c_0 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n!} \\ y_2(x) &= x^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, (2x)^n}{3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n+1)} \end{aligned}$$

como estas funciones son L.I. y convergentes, la solución general es de la forma

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$$

Ejemplo 85 *(Ecuación de Bessel):* $x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - n^2)\, y = 0$

En 1703 investigó esta ecuación Bernouilli, en relación con el movimiento oscilatorio de una cadena colgante, posteriormente Bessel (1784 - 1846) la analizó en sus estudios del movimiento planetario. Estas funciones de Bessel se han usado para estudiar, problemas de elsticidad, movimiento de fluídos, teoría del potencial, difusión y propagación de ondas, etc. Vamos a resolver esta ecuación en torno de $x = 0$ que es punto singular. Una solución no trivial puede hallarse en la forma

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, x^{p+k}$$

Veamos que sucede con esto. Derivamos y reemplazamos

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(p+k)(p+k-1)\,x^{p+k-2} + x \sum_{p=0}^{\infty}(p+k)a_p\,x^{p+k-1} + (x^2-n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,x^{p+k} = 0$$

que equivale a

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p\,\left[(p+k)(p+k-1)+(p+k)a_p - n^2\,a_p\right]\,x^{p+k} + \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,x^{p+k+2} = 0$$

y que a su vez, simplificando, es igual a

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left[(p+k)^2-n^2\right]\,a_p\,x^{p+k} + \sum_{p=2}^{\infty} a_{p-2}\,x^{p+k} = 0$$

en la segunda sumatoria se usó, $p = p-2$. Ahora le sacamos $p = 0$ y $p = 1$ a la primera serie, y asociamos, lo que queda, en una serie que parte de $p = 2$

$$(k^2-n^2)\,a_0\,x^k + [(k+1)^2-n^2]\,a_1\,x^{k+1} + \sum_{p=2}^{\infty}\left[(p+k)^2-n^2)\,a_p + a_{p-2}\right]\,x^{p+k} = 0$$

A partir de esto establecemos la ecuación característica

$$\begin{aligned}
(k^2-n^2)\,a_0 &= 0\\
[(k+1)^2-n^2]\,a_1 &= 0\\
(p+k)^2-n^2)\,a_p + a_{p-2} &= 0, \qquad p \geq 2
\end{aligned}$$

Tomando $a \neq 0$ (en caso contrario se toma $a_1 \neq 0$, y si fuera $a_i = 0$ para todo i tendríamos la solución trivial), se tiene $k = \pm n$.

Caso $k = n > 0$ En la segunda ecuación $k = n$ da lugar a que

$$(1+2n)\,a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0,\ \text{pues } 1+2n \neq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

En general, $a_{2p+1} = 0$.

Para los pares se tiene:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{4(n+1)} = -\frac{a_0}{2^2\,(n+1)}\\
a_4 &= -\frac{a_2}{(n+4)^2-n^2} = -\frac{a_2}{8(n+2)} = -\frac{a_2}{2^4\,(n+1)(n+2)\cdot 2}
\end{aligned}$$

En general,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\,p!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

Caso $k = -n$ Esto es análogo, de modo que

$$\begin{aligned}
a_{2p+1} &= 0\\
a_{2p} &= \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\,p!\,(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+p)}
\end{aligned}$$

Soluciones:

(1) $k = n$, significa que la solución es

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p}\, p!\, (n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

Si se elige

$$a_0 = \frac{1}{2^n\, \Gamma(n+1)}$$

siendo Γ la función gamma de Euler, entonces

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\, \Gamma(n+p+1)}$$

pues,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \qquad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{p-1}\, dx, \quad p > 0$$

Esta solución se denota por $J_n(x)$. Es decir,

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\, \Gamma(n+p+1)}$$

llamada *función de Bessel de primera especie de orden* n

(2) $k = -n$. Este caso es análogo. Se tiene

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{x}{2})^{2p-n}}{p!\, \Gamma(-n+p+1)}$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n}\, \Gamma(-n+1)}$$

y se llama *función de Bessel de primera especie de orden* $-n$.

Se tiene así, que tanto $J_n(x)$ como $J_{-n}(x)$, por ser convergentes (radio $R = \infty$) y derivables, son soluciones de la ecuación de Bessel. El único pero, son los casos n entero y no entero

- Si n **no es entero**, la solución general es

$$y = C_1\, J_n(x) + C_2\, J_{-n}(x)$$

- Si n **es entero**, entonces $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ tienen la dependencia

$$J_{-n}(x) = (-1)^n\, J_n(x)$$

Luego, una segunda solución L.I. con $J_n(x)$ es

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\, cos\, n\pi - J_{-n}(x)}{sen\, n\pi}$$

y se tiene la solución general

$$y = C_1\, J_n(x) + C_2\, Y_n(x)$$

Y_n se llama función de Bessel de segunda clase de orden p o función de Newmann de orden p.

Ejemplo 86 *Hallar solución de la ecuación diferencial*

$$x^2\, y'' + x\, y' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right)\, y = 0$$

Basta “un ojo” para darse cuenta que esta ecuación es de Bessel. Como ya conocemos sus soluciones, sólo es necesario descubrir que el $n = \frac{3}{5}$, y que $4x^2 = (2x)^2$. Por tanto, la solución general es

$$y = C_1\, J_{3/5}(2x) + C_2\, J_{-3/5}(2x)$$

Ejemplo 87 *Hallar solución de la ecuación diferencial*

$$x^2\, y'' + x\, y' + \left(3x^2 - 4\right)\, y = 0$$

No es necesario que te dé explicaciones, ya te diste cuenta que la solución general es

$$y = C_1\, J_2(x\sqrt{3}) + C_2\, Y_2(x\sqrt{3})$$

Otras ecuaciones clásicas de la física son:

Ecuación de Laguerre $\quad x\, y'' + (1-x)\, y' + n\, y = 0$

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, su solución es un polinomio de la forma

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k\, x^k}{(k!)^2}$$

llamado *polinomio de Laguerre*, y que se anota como $L_n(x)$. Además,

$$(-n)_k = \frac{(-1)^k\, n!}{(n-k)!}$$

con lo cual

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k\, x^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, n!\, x^k}{(n-k)!\, (k!)^2}$$

La solución y_2 es logarítmica y no tiene mayor importancia.

Ecuación de Hermite $\quad y'' - 2x\, y' + 2n\, y = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Su solución en serie es de la forma

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k\, n!\, (2x)^{n-2k}}{k!\, (n-2k)!}$$

en la cual, $[\frac{n}{2}]$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$. $H_n(x)$ se llama *polinomio de Hermite*.

Ecuación de Legendre $\quad (1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + p(p+1)\,y = 0$, $p \in \mathbb{N}_0$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]} \frac{(-1)^k\,(2p-2k)\,x^{p-2k}}{k!\,2^p\,(p-k)!\,(p-2k)!}$$

$[\frac{p}{2}]$ es la parte entera de $\frac{p}{2}$.

26. Transformada de Laplace

Una de las herramientas que más ayuda presta a la hora de resolver ecuaciones y sistemas diferenciales con condiciones iniciales, es la llamada *Transformada de Laplace*.

Un *operador integrable* se define como

$$T[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\,f(t)\,dt = F(s)$$

donde K recibe el nombre de *núcleo* de la transformación. Si

$$K(s,t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-st}, & t \geq 0 \end{cases}$$

tenemos la llamada **Transformada de Laplace**, que se anota

$$L[f(t)] = \int_{\infty}^{\infty} e^{-st}\,f(t)\,dt = F(s)$$

Importa describir el dominio del operador L, esto es, determinar las condiciones que debe satisfacer la función f.

Definición 26.1 *Una función f es continua por tramos en $[a,b]$ si y sólo si:*

1. *f está definida y es continua en todos, salvo un número finito de puntos de $[a,b]$*

2. *Existen los límites laterales*
$$\begin{aligned} f(x_0^+) &= \lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) \\ f(x_0^-) &= \lim_{h\to 0^-} f(x_0-h) \end{aligned}$$
en cada punto $x_0 \in [a,b]$

Definición 26.2 *Una función f es de orden exponencial, si existe una constante real positiva c tal que $\|f(t)\| \leq c\;e^{\alpha t}$, para todo $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Estas dos condiciones: continuidad por tramos y orden exponencial, garantizan la existencia de la transformada de Laplace. Es decir,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt$$

existe para todo $s > \alpha$, en donde α es un número real por determinar

La mayoría de las funciones con las que se trabaja son de órden exponencial, sin embargo debe tenerse cuidado con aquellas que no lo son, tal como $f(t) = e^{t^2}$, y que por tanto no tienen transformada de Laplace. Para las funciones de órden exponencial se tiene el siguiente resultado interesante.

Teorema 26.3 *Si f es una función de orden exponencial entonces*

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Demostración Como f es de orden exponencial, $\|f(t)\| \leq c\ e^{\alpha t},\ \ c > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ t > 0$. Luego

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|f(t)\|\ e^{-st}\ dt &\leq \int_0^\infty c\ e^{\alpha t}\ e^{-st}\ dt \leq c\int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}\ dt \\ &\leq -\frac{c}{s-\alpha}\, e^{-t(s-\alpha)}\Big]_0^\infty \leq \frac{c}{s-\alpha}\end{aligned}$$

A partir de esto, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f) = 0$.

Importancia de este resultado: Permite saber en forma inmediata que funciones no tienen inversas. Por ejemplo, $F(s) = 1,\ s,\ sen\ s,\ \dfrac{s}{s+1}$ no poseen inversas pues $\lim\limits_{s\to\infty} \mathcal{L}(f) \neq 0$.

Ejemplo 88 *Las siguientes funciones son de orden exponencial*

$$\begin{aligned}&f(t) = 1,\ f(t) = t^n,\ f(t) = e^{at},\ f(t) = sen\, bt,\ f(t) = cos\, bt \\ &f(t) = t^n\, e^{at} sen\, bt,\quad f(t) = t^n\, e^{at}\, cos\, bt\end{aligned}$$

Es probable que tengas interés en ver como funciona alguna de éstas. Te hago la más "truculenta"

Caso $a > 0$

$$f(t) = t^n\, e^{at}\, cos\, bt \implies \left\|\tfrac{t^n\, e^{at}\, cos\, bt}{e^{2at}}\right\| \leq \tfrac{t^n\, e^{at}}{e^{2at}} = \tfrac{t^n}{e^{at}}$$

como $\frac{t^n}{e^{at}} \to 0$ si $n \to \infty$, y en particular

$$\left\|\frac{t^n\, e^{at}\, cos\, bt}{e^{2at}}\right\| \leq 1$$

entonces

$$\left\| t^n\, e^{at}\, cos\, bt \right\| \leq e^{2at}$$

por tanto, en este caso, la función es de orden exponencial.

Caso $a < 0$)

$$\left\| t^n\, e^{at}\, cos\, bt \right\| \leq t^n \leq e^t$$

de modo que, en este caso, también es de orden exponencial.

Me imagino que estás impaciente por empezar a calcular transformadas. Calmate un poco, algunos resultados previos son necesarios para tener la película más o menos clara, y saber que se está haciendo.

Teorema 26.4 *Si f es continua por tramos y de orden exponencial, entonces existe un número real α tal que*

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

es **convergente**, *para todo $s > \alpha$*

Demostración Por hipótesis, $\|f(t)\| \leq e^{\alpha\, t},\ c > 0,\ \forall t > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt &\leq \int_0^\infty \left(C\, e^{\alpha\, t} \right)\, e^{-st}\, dt \\
&\leq C \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t}\, dt \\
&\leq \frac{C}{\alpha - s} \lim_{\epsilon \to \infty} \left(e^{(\alpha - s)\, t} \right)_0^\epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt &\leq \frac{C}{\alpha - s} \lim_{\epsilon \to \infty} \left(e^{(\alpha - s)\, \epsilon} - 1 \right) \\
&\leq \frac{C}{\alpha - s}\, (-1), \quad \text{si } (\alpha - s) < 0 \\
&\leq \frac{C}{s - \alpha}, \quad s > \alpha
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ converge

Ejemplo 89 *Usar la definición para calcular $L[1]$*

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left(-\frac{1}{s}\, e^{-st} \right)_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Ejemplo 90 *Calcular* $L[e^{at}]$

$$L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \left(\frac{1}{a-s}\, e^{(a-s)t} \right)_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

Ejemplo 91 *De la transformada anterior se deducen*

$$\begin{aligned} a)\ L[e^{-at}] &= \frac{1}{s+a} \\ b)\ L[e^{-ati}] &= \frac{1}{s+ai} \\ c)\ L[e^{ati}] &= \frac{1}{s-ai} \end{aligned}$$

Tener que calcular siempre con la definición es algo que no está en los planes de ningún matemático o ingeniero. ¿Para que están las proposiciones y teoremas?

27. Propiedades de la Transformada

El uso de las siguientes propiedades facilita el cálculo de la transformada de Laplace. La demostración de ellas no presenta grandes dificultades, por lo que queda al interés del lector.

Linealidad Si $\mathcal{L}[f(t)]$ y $\mathcal{L}[g(t)]$ existen, entonces

$$\mathcal{L}\left[k_1\ f(t) + k_2\ g(t)\right] = k_1\ \mathcal{L}[f(t)] + k_2\ \mathcal{L}[f(t)]$$

Este resultado es muy bueno, sólo cabe preguntarse, si L es inyectiva, esto es,

$$L(f) = L(g) \overset{?}{\Longrightarrow} f = g$$

que en lenguaje de operadores equivale a preguntarse, si la ecuación de operadores $L(y) = \phi(s)$ puede resolverse en forma única para y cuando se conoce ϕ. Para no dejarte metido, la respuesta es

Teorema 27.1 *(Lerch)*
Sean f y g funciones continuas por tramos y de orden exponencial, y sea s_0 número real tal que

$$L(f)(s) = L(g)(s), \quad \forall\ s > s_0$$

entonces, con la posible excepción de los puntos de discontinuidad,

$$f(x) = g(x), \quad \forall x > 0$$

De este modo, siempre que la ecuación

$$L(y) = \phi(s)$$

pueda resolverse para y, la solución es única, siempre que se considere como idénticas a dos funciones cualesquiera que coinciden en todos sus puntos, salvo en sus puntos de discontinuidad.

A esta solución se le llama **Transformada inversa** de Laplace de la función ϕ y su característica es que

$$L^{-1}(\phi) = y \Longleftrightarrow L(y) = \phi$$

¡La última pregunta!, ¿Es L sobreyectiva?, lo que en términos de operadores equivale a preguntarse si $L(y) = \phi(s)$ tiene solución para toda función ϕ. Es decir,

$$\text{¿Para toda } \phi \text{ existe } f \text{ tal que } L(y) = \phi?$$

La respuesta es ¡¡NO!!, un resultado y el ejemplo que "mata"

Teorema 27.2 *Si f es de orden exponencial, entonces*

$$\lim_{s\to\infty} L(f) = 0$$

Demostración Si f es de orden exponencial, entonces $\|f(t)\| \leq C\, e^{\alpha\, t}$, de modo que por teorema 2 se tiene

$$\|L(f)\| \leq \frac{C}{s-\alpha}, \quad \forall\, s > \alpha$$

de donde

$$\lim_{s\to\infty} \|L(f)\| = \|\lim_{s\to\infty} L(f)\| \leq = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{s\to\infty} L(f) = 0$$

Ejemplo 92 *Las funciones $\phi(s) = 1$, $\phi(s) = s$, $\phi(s) = sen\, s$, $\phi(s) = \frac{s}{s+1}$ no tienen transformada inversa, pues no tienden a cero cuando s va al infinito.*

Ejemplo 93 *Para determinar $L[sen\, at]$ hacemos uso de la exponencial compleja y de la propiedad de linealidad para escribir*

$$\begin{aligned} L[sen\, at] &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{ati} - e^{-ati}\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{ati}] - \mathcal{L}[e^{-ati}]\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai}\right) = \frac{a}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

Derivadas

Teorema 27.3 *Si $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ son continuas para todo $t > 0$, y si $f^{(n)}$ es continua por tramos y de orden exponencial en $[0, \infty)$, entonces*

$$\begin{aligned}
L[f'] &= s\,L[f] - f(0^+), \qquad f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t) \\
L[f''] &= s^2\,L[f] - s\,f(0^+) - f'(0^+) \\
&\vdots \\
L[f^{(n)}] &= s^n L[f] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) \cdots - f^{(n-1)}(0^+)
\end{aligned}$$

Dado el interés que tienes por esta asignatura, verificaré el caso de la primera derivada

$$\begin{aligned}
L[f'] &= \int_0^\infty f'(t)\,e^{-st}\,dt, \quad u = e^{-st}, dv = f'(t)\,dt \\
&= \big(f(t)\,e^{-st}\big)_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt, \quad du = -s\,e^{-st},\ v = f(t) \\
&= s\,L[f] + \big(f(t)\,e^{-st}\big)_0^\infty \\
&= s\,L[f] + 0 - 1 \cdot f(0^+) = s\,L[f] - f(0^+)
\end{aligned}$$

Ejemplo 94 *Verificar que* $L[\cos at] = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$

Tu sabes, él sabe, y nosotros sabemos que $f(t) = sen\,at \Longrightarrow f'(t) = a\cos at$. Veamos el uso de la transformada de la derivada.

$$L[f'] = L[a\cos at] = s\,L[f] - f(0^+)$$

sabemos que,

$$L[f] = L[sen\,at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad f(0^+) = 0$$

Por tanto,

$$L[a\cos at] = s\,\frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{a\,s}{s^2 + a^2}$$

por propiedad de linealidad sacamos el a de L parea concluir que

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Ejemplo 95 *La transformada de $L[t^n]$ se halla como sigue*

De acuerdo con la derivada tenemos

$$f(t) = t^n \Longrightarrow f^{(n)} = n!$$

Aplicamos a esta igualdad la transformada en ambos miembros

$$L[f^{(n)}(t)] = \mathcal{L}[n!] = n!\ \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s}$$

Por la propiedad de la derivada, el primer miembro es tal que

$$L[f^{(n)}] = s^n\ \mathcal{L}[f] - s^{n-1}\ f(0^+) - s^{n-2}\ f'(0^+) - \cdots$$

Al evaluar, los límites tienen el valor cero, por lo que $s^n\ \mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s}$. De esto se obtiene

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Multiplicación por t^n

$$L[f(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}[t^n\ f(t)] = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ F(s) = (-1)^n\ F^{(n)}(s)$$

O bien

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F^n(s)] = L^{-1}\ [\frac{d^n}{ds^n}\ F(s)] = (-1)^n\ t^n\ f(t)$$

Ejemplo 96 *La transformada de $L[t^n]$ se obtiene de la propiedad de la multiplicación como sigue.*

$$L[t^n\ f(t)] = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Se considera $f(t) = 1$, con lo que $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s}$.

Ahora

$$\begin{aligned} L[(t^n] &= (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ \left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ \left(s^{-1}\right) \\ &= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot s^{-(n+1)} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

Integrales

Sea f de orden exponencial en $[0, \infty)$, y sea $a \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$L\left[\int_a^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f] - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$L\left[\int_a^t f(x)\,dx\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right)\,dt$$

Integrando por partes, con

$$u = \int_a^t f(x)\,dx,\ du = f(t)\,dt,\ dv = e^{-st}\,dt,\ v = -\frac{1}{s}\,e^{-st}$$

se llega a que

$$L\left[\int_a^t f(x)\,dx\right] = \left(-\frac{1}{s}\,e^{-st}\int_a^t f(x)\,dx\right)_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt$$

la evaluación en ∞ es cero pues la f es de orden exponencial, y por consiguiente acotada, al evaluar en cero y teniendo en cuenta que la integral que "sobrevive" es la transformada de f, se tiene

$$L\left[\int_a^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}\,L[f] - \frac{1}{s}\,\int_0^a f(x)\,dx$$

Como caso particular se tiene

$$L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}\,L[f]$$

Ejemplo 97 *Hallar $L[t\,e^t]$, usando propiedad de integración.*

$$\int_0^t x\ e^x\ dx = t\ e^t - e^t + 1$$

Luego

$$\begin{aligned}
L\left[\int_0^t x\ e^x\ dx\right] &= \mathcal{L}[te^t] - L[e^t] + \mathcal{L}[1] \\
\frac{1}{s}\,L[te^t] &= L[te^t] + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \\
L[te^t] &= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right) \cdot \frac{s}{1-s} \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}
\end{aligned}$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}[f(t)\ e^{at}] = F(s-a)$$

O bien

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \Longrightarrow f(t)\ e^{at} = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$$

Ejemplo 98 *Hallar $L[e^{-2t}\,cos\,3t]$*

La presencia de la exponencial indica el desplazamiento ($a = -2$), por tanto, interesa la función que multiplica a la exponencial ($f(t) = cos\,3t$), cuya transformada es

$$L[cos\,3t] = \frac{s}{s^2+9}$$

En consecuencia,

$$L[e^{-2t}\,cos\,3t] = F(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

Ejemplo 99 *Probemos que $L[t\,e^t] = \dfrac{1}{(s-1)^2}$, usando propiedad de desplazamiento.*

En este caso, $a = 1$, $f(t) = t$, de modo que

$$L[t\, e^t] = F(s-1)$$

Ahora, con la determinación de $F(s)$ el problema está resuelto. Para ello observamos que $f(t) = t$. Luego

$$F(s) = L[t] = \frac{n!}{s^{n+1}}\bigg]_{n=1} = \frac{1}{s^2}$$

En consecuencia

$$L[t\, e^t] = F(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Desplazamiento en tiempo

$$f(t) = \mu(t-a)\ g(t-a),\ a \geq 0 \Longrightarrow L[f(t)] = e^{-as}\, L[g(t)]$$

O bien

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) \Longrightarrow L^{-1}[e^{-as}\ F(s)] = f(t-a)\,\mu(t-a)$$

Ejemplo 100 *La transformada del* **Escalón unitario** $L[\mu(t)]$ *definido como*

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

se calcula por la definición

$$L[\mu(t)] = \int_0^\infty \mu(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}, s > 0$$

Ejemplo 101 *Hallar* $L[\mu(t-a)\, sen\, t]$.

Hacemos uso de la propiedad de desplazamiento.

$$f(t) = \mu(t-a)\, g(t-a) \Longrightarrow L[f(t)] = e^{-as}\, L[g(t)]$$

Ahora, $g(t-a) = sen((t+a)-a) \Longrightarrow g(t) = sen(t+a)$ En consecuencia,

$$\begin{aligned} L[\mu(t-a)\, sen\, t] &= e^{-as}\, L[sen(t+a)] \\ &= e^{-as}\, \frac{1}{2i}\, L\left[e^{(t+a)i} - e^{-(t+a)i}\right] \\ &= e^{-as}\, \frac{1}{2i}\, \left(\frac{1}{s-i} \cdot e^{ai} - \frac{1}{s+i} \cdot e^{-ai}\right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2i}\, \left(\frac{(s+i)\ e^{ai} - (s-i)\ e^{-ai}}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[\mu(t-a)\, sen\, t] &= \frac{e^{-as}}{2i}\left(\frac{s(e^{ai}-e^{-ai})+i(e^{ai}-e^{-ai})}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{e^{-as}}{2i}\left(\frac{2is\ sen\ a+2i\ cos\, a}{s^2+1}\right) \\ &= e^{-as}\left(\frac{s\, sen\, a+cos\, a}{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 102 *Hallar la función $f(t)$ tal que* $L[f(t)] = \dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$

Observemos que esto significa que se pide determinar la transformada inversa de $\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}$. Esto es, $L^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2-4s+20}\right]$.

Escribimos lo siguiente

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+16} + \frac{7}{(s-2)^2+16}$$

Con ello nos damos cuenta que aparecen las transformadas de las funciones seno y coseno, desplazadas. En consecuencia

$$L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\right] = 2e^{2t}\, cos\, 4t + \frac{7}{4}\, e^{2t}\, sen\, 4t = f(t)$$

Cambio de escala

$$L[f(t)] = F(s) \Longrightarrow L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

División por t

$$L[f(t)] = F(s) \Longrightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty\ F(z)\ dz$$

siempre que $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$ exista. O bien

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \Longrightarrow \frac{f(t)}{t} = L^{-1}\left[\int_s^\infty\ F(z)\, dz\right]$$

En particular, $\displaystyle\int_0^\infty\ \frac{f(t)}{t}\ dt = \int_s^\infty\ F(z)\, dz$

Periódicas

$$f \text{ de periodo } T \Longrightarrow L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Convolución

1. Sean $\mathcal{L}[f(t)] = F_1,\ \mathcal{L}[g(t)] = F_2$, entonces
$$\mathcal{L}[f * g] = F_1(s) \cdot F_2(s) \Longrightarrow f * g = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\ F_2(s)]$$

2. Sean $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)],\ g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$, entonces
$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) * F_2(s)] = f(t)\ g(t) \Longrightarrow F_1(s) * F_2(s) = \mathcal{L}[f(t)\ g(t)]$$

Ahora ejemplificamos todas las propiedades, principalmente aquelllas que tienen que ver con la Transformada Inversa.

Ejemplo 103 *Resolver la ecuación diferencial* $y'' - y = 1$, *con condiciones iniciales* $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación para tener

$$\begin{aligned} L[y''] - L[y] &= L[1] \\ s^2\, L[y] - s\, f(0^+) - f'(0^+) - L[y] &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2\, L[y] - L[y] &= 1 + \frac{1}{s} = \frac{1+s}{s(s^2-1)} \\ &= \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Ahora, aplicando transformada inversa obtenemos

$$y(t) = L^{-1}[\frac{1}{s-1}] - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] \Longrightarrow y(t) = e^t - 1$$

Ejemplo 104 *Te muestro dos formas de hallar* $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$.

1. **Fracciones parciales**

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \\ L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \\ L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= 1 - cos\, t \end{aligned}$$

2. **Convolución** Para usar la convolución escribimos lo que sigue

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} F_1(s) = \frac{1}{s} &\implies f(t) = 1 \\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+1} &\implies g(t) = sen\, t \end{aligned}$$

En consecuencia

$$L[f(t) * g(t)] = \frac{1}{s(s^2+1)} \Longrightarrow f(t) * g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

Esto significa que la transformada inversa la podemos hallar por convolución. Tenemos.

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] &= \int_0^t 1 \cdot sen(t-x)\ dx = cos(t-x)\,\Big]_0^t \\ &= 1 - cos\, t \end{aligned}$$

Ejemplo 105 *Resolverla ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = h(t)$, con $y(0) = y'(0) = 0$, con $h(t)$ función de órden exponencial*

Se aplica transformada en ambos miembros de la ecuación.

$$\begin{aligned} L[y''] + L[y'] - 6L[y] &= L[h(t)] \\ s^2\, L[y] - s\ f(0^+) - f'(0^+) + s\mathcal{L}[y] - f(0^+) - 6L[y] &= L[h(t)] \\ s^2\, L[y] + s\, L[y] - 6\, L[y] &= L[h(t)] \\ L[y] &= \frac{L[h(t)]}{s^2+s-6} \end{aligned}$$

Ahora, sea

$$L[g(t)] = \frac{1}{s^2+s-6} = \frac{1}{(s+3)(s-2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}\right)$$

Al aplicar transformada inversa

$$g(t) = \frac{1}{5}\ e^{2t} - \frac{1}{5}\ e^{-3t}$$

En consecuencia, se tiene la ecuación en transformadas

$$L[y(t)] = L[h(t)] \cdot L[g(t)]$$

Al aplicar transformada inversa esta ecuación toma la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * g(t) = \int_0^\infty h(x) g(t-x)\ dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^\infty h(x)\left(e^{2(t-x)} - e^{-3(t-x)}\right)\ dx \end{aligned}$$

Con esto se tiene el problema resuelto, para cualquier $h(t)$ de orden exponencial.

28. Problemas resueltos

Ejemplo Para hallar la transformada de Laplace de *senh at*, se puede usar la definición o bien la alternativa de las funciones exponenciales. Veamos esto último

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[senh\ at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2}\ \mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\ \mathcal{L}[e^{-at}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

Ejemplo Para el cálculo de la transformada de Laplace de $f(t) = t^2\ e^t$ se puede emplear la propiedad de traslación, ya que aparece un producto entre la función exponencial y otra función cualquiera. La transformada de t^2 es

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}[t^2\ e^t] = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Como alternativa está el hecho de que la función exponencial está multiplicada por una potencia de t. En este caso se sabe que

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

Luego,

$$\mathcal{L}[t^2\ e^t] = (-1)^2\ \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{(s-1)^2}\right) = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Ejemplo Para demostrar que $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $n > -1,\ s > 0$, vamos a emplear la definición.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n] &= \int_0^\infty t^n\ e^{-st}\ dt = \int_0^\infty \left(\frac{z}{s}\right)^n\ e^{-z}\ \frac{dz}{s}, \quad z = st \\ &= \frac{1}{s^{n+1}}\ \int_0^\infty z^n\ e^{-z}\ dz = \frac{1}{s^{n+1}}\ \Gamma(n+1)\end{aligned}$$

En particular, $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \dfrac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$.

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}\left[\int_0^t sen\ 2u\ du\right]$

De acuerdo con la propiedad de la transformada de Laplace para integrales se tiene que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\ du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Como $\mathcal{L}[sen\ 2t] = \dfrac{2}{s^2+4}$, tenemos que

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t sen\ 2u\ du\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}\left[\dfrac{sen\ t}{t}\right]$

Usemos la propiedad de división por t. Esto es

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)\ du$$

Con la condición de que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ exista. Para este caso tenemos,

$$\mathcal{L}[sen\ t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{sen\ t}{t} = 1$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}\left[\frac{sen\ t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1}\ du = \frac{\pi}{2} - arctg\ s = arctg\ (\frac{1}{s})$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}\left[\dfrac{sen\ at}{t}\right]$

Usemos la propiedad del cambio de escala. Esto es

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Longrightarrow \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\ F(\frac{s}{a})$$

Además, tenemos que

$$\mathcal{L}[\frac{sen\ t}{t}] = arctg\ (\frac{1}{s}) = F(s), \quad f(t) = \frac{sen\ t}{t} \Longrightarrow f(at) = \frac{sen\ at}{at}$$

se sigue que

$$\mathcal{L}[\frac{sen\ at}{at}] = \frac{1}{a}\ \mathcal{L}\left[\frac{sen\, at}{t}\right]$$

Como $\mathcal{L}[sen\ at] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{sen\ at}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{a}{u^2+a^2}\ du = arctg\ (\frac{a}{s})$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t-a)\right]$

Se puede hacer uso de la definición, o bien de la propiedad de traslación. En este último caso se tiene que

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)\ y\ g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{L}[g(t)] = e^{-as}\ F(s)$$

Como $f(t) = 1$ y $\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{s}$, entonces

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t-a)\right] = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo Evaluar $\displaystyle\int_0^\infty t\ e^{-3t}\ sen\ t\ dt$

Usemos el hecho que

$$\mathcal{L}[t\ sen\ t] = \int_0^\infty t\ e^{-st}\ sen\ t\ dt$$

Esto es una primera aproximación al problema. Además,

$$\mathcal{L}[t\ sen\ t] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Luego

$$\int_0^\infty t\ e^{-st}\ sen\ t\ dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

En consecuencia, con $s = 3$, tenemos

$$\int_0^\infty t\ e^{-st}\ sen\ t\ dt = \frac{3}{50}$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right] \\
&= 4\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] - 4\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2}\right] \\
&= 4e^{-4t} - 4te^{-4t} = 4e^{-4t}(1-t)
\end{aligned}$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right]$

Vamos a usar convolución

$$\frac{1}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}$$

Para usar el teorema de convolución tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t = f(t), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = t\ e^{-t} = g(t)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right] &= f * g = \int_0^t x\ e^{-x}\ (t-x)\ dx \\
&= \int_0^t (xt-x^2)\ e^{-x}\ dx \\
&= \Big((xt-x^2)(-e^{-x}) - (t-2x)e^{-x} + 2\ e^{-x}\Big)_0^t \\
&= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2
\end{aligned}$$

Ejemplo Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right]$
Esta vez usemos fracciones parciales

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

Se aplica inversa en ambos miembros

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right]=4\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=4e^{3t}-e^{-t}$$

Ejemplo Resolver la ecuación diferencial $y\,''+y=t,\ y(0)=1,\ y\,'(0)=-2$
Se toma transformada de Laplace en ambos miembros

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[t] &= s^2\mathcal{L}[y]-sy(0)-y'(0)+\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s^2}\\
s^2\mathcal{L}[y]-s+2+\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s^2}\\
(1+s^2)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2}+s-2\\
\mathcal{L}[y] &= \frac{1+s^3-2s^2}{s^2(1+s^2)}\\
&= \frac{1}{s^2}+\frac{s}{1+s^2}-\frac{3}{1+s^2}\\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{s}{1+s^2}-\frac{3}{1+s^2}\right]\\
&= t+cos\ t-3sen\ t
\end{aligned}$$

Ejemplo Resolver el sistema $\begin{cases} x\,'= & 2x-3y\\ y\,'= & -2x+y\end{cases},\quad x(0)=8,\ y(0)=3$
Se toma transformada de Laplace en ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}
s\ \mathcal{L}[x]-8 &= 2\mathcal{L}[x]-3\mathcal{L}[y]\\
s\ \mathcal{L}[y]-3 &= \mathcal{L}[y]-2\mathcal{L}[x]
\end{aligned}$$

Este sistema de transformadas se escribe en la forma

$$\begin{aligned}
(s-2)\ \mathcal{L}[x]+3\mathcal{L}[y] &= 8\\
2\ \mathcal{L}[x]+(s-1)\mathcal{L}[y] &= 3
\end{aligned}$$

Al sumar, la multiplicación de la primera ecuación por (-2) y la segunda por $(s-2)$, se obtiene

$$\mathcal{L}[y]=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}$$

Para hallar $\mathcal{L}[x]$ se multiplica la primera ecuación por $(s-1)$ y la segunda por (-3). Al sumarlas

$$\mathcal{L}[x]=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}$$

A estas dos ecuaciones obtenidas se aplica transformada inversa

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8s-17}{s^2-3s-4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-4}\right] \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-22}{s^2-3s-4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-4}\right] \end{aligned}$$

Al calcular estas transformadas inversas se encuentra

$$\begin{aligned} x(t) &= 5e^{t} + 3e^{4t} \\ y(t) &= 5e^{t} - 2e^{4t} \end{aligned}$$