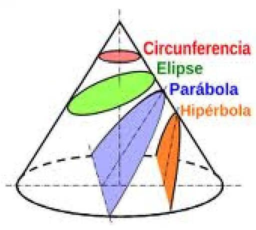
Bitácora
GEOMETRÍA ANALÍTICA



1. Introducción

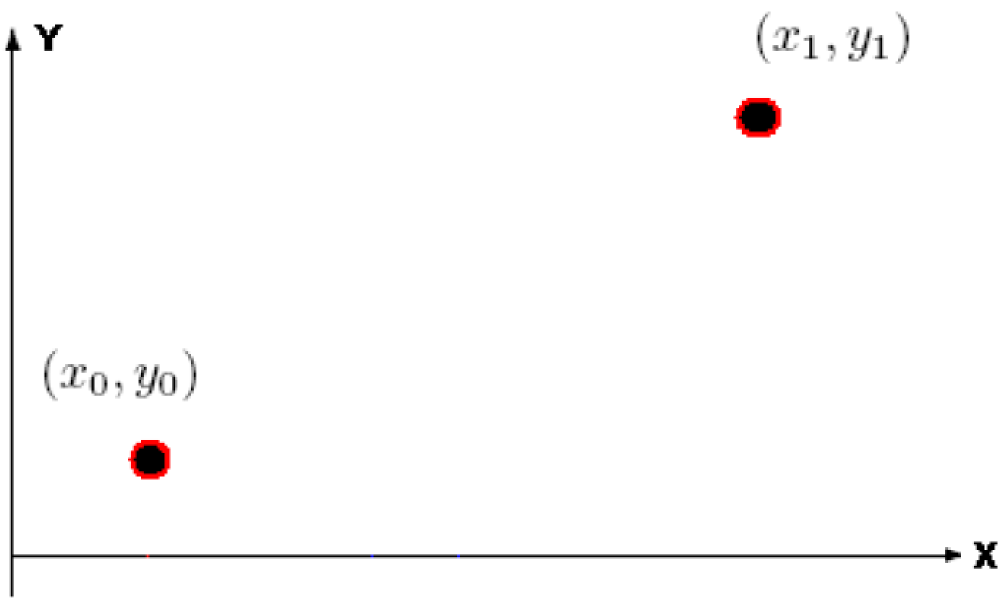
La Geometría Analítica es un puente entre el álgebra y la geometría que hace posible resolver algebraicamente o analíticamente problemas geométricos, como también resolver geométricamente problemas algebraicos.

Objetivos Generales

- Dada una gráfica en el plano de coordenadas, encontrar la expresión algebraica correspondiente
- Dada la expresión algebraica, determinar la gráfica que le corresponde.

2. Distancia entre dos puntos

En la figura se distinguen 2 puntos de coordenadas $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ en el primer cuadrante. Une ambos puntos con un segmento de recta y calcula la distancia $d(A, B)$. Pitágoras tiene algo que decir.



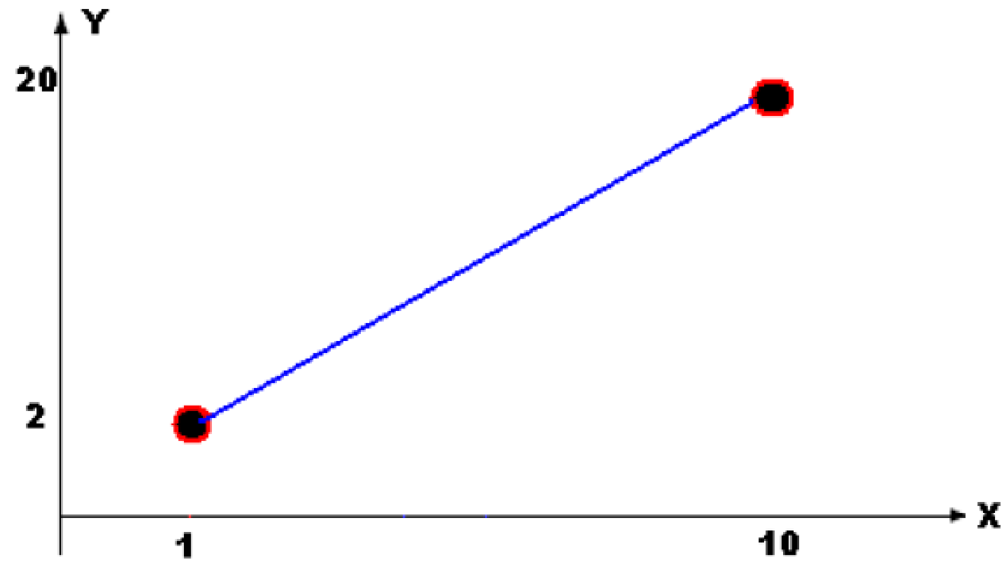
Actividad 1 *La distancia entre los puntos* $P(-3, y)$ *y* $Q(9, 2)$ *es* $d(P, Q) = 13$*. Hallar el valor de* y*.*

3. Lugares Geométricos

Un Lugar geométrico (LG) es un conjunto de puntos del plano cartesiano que satisface cierta condición expresada por una ecuación del tipo $F(x, y) = 0$. Este conjunto de puntos se representa mediante una curva en el plano.
Ejemplos de lugares geométricos:

- **La Recta**

1. Traza el segmento de recta que une los puntos $(1, 2)$ y $(10, 20)$.
2. Escribe la **razón**, m entre la **diferencia** de ordenadas versus el de abscisas.



3. El punto $(5, 10)$ también está en el segmento de recta así que escribe el **cociente** de diferencia de ordenadas versus el de abscisas entre el punto $(1, 2)$ y el $(5, 10)$
4. Escribe el **cociente** de diferencia de ordenadas versus el de abscisas entre los puntos $(5, 10)$ y el $(10, 20)$

Definición 3.1 *El Lugar geométrico de todos los puntos cuya razón entre la diferencia de ordenadas versus la diferencia de abscisas, respecto de un punto fijo es constante se llama* **línea recta**

De esta descripción vemos que surge otro concepto que ya nos resulta familiar, el de **razón** o **pendiente**, que se denota por m, y que nos lleva a considerar la inclinación que tiene una recta.

- La ecuación de esta recta

1. Los puntos (x, y) y $(1, 2)$ pertenecen a la misma recta. Halla la pendiente m.
2. Elimina denominadores.
3. Los puntos (x, y) y (x_0, y_0) pertenecen a la misma recta. Halla la pendiente m.
4. Elimina denominadores.

Has descubierto que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y tiene pendiente m es:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

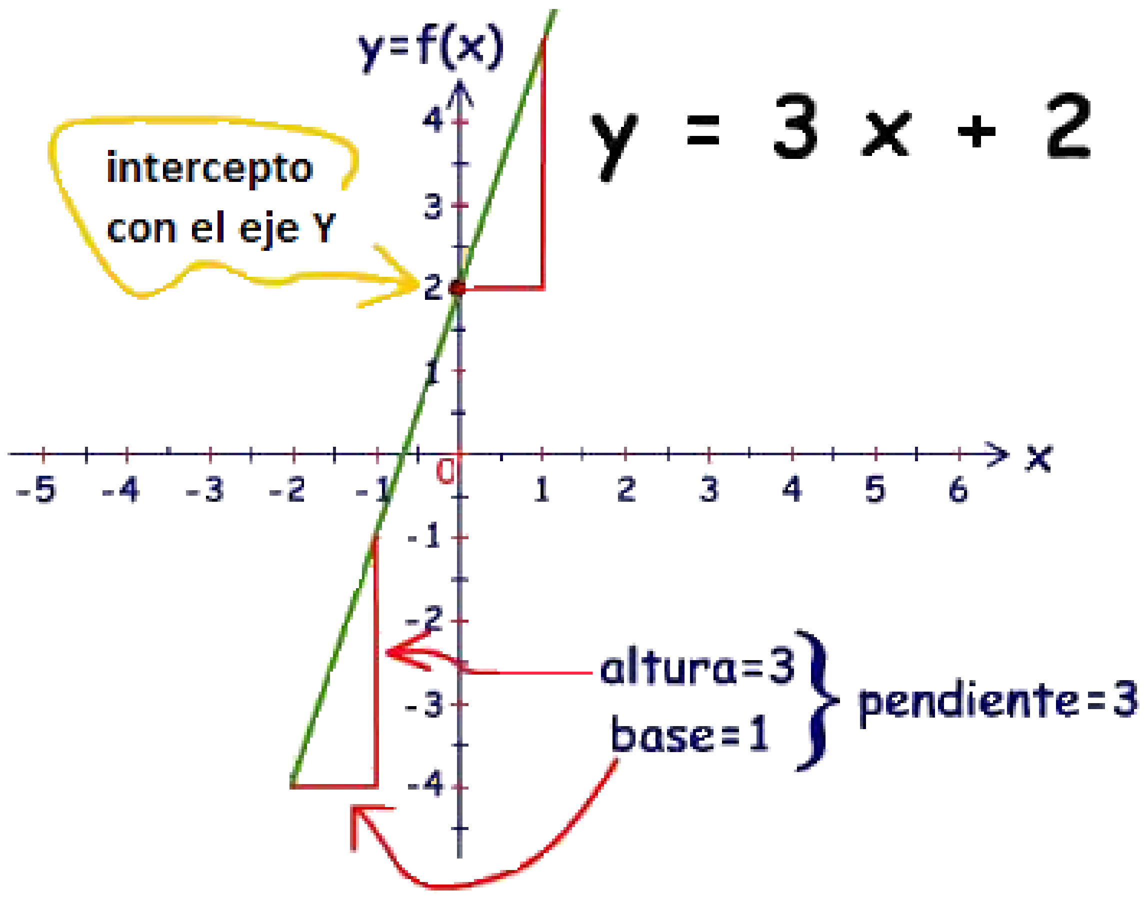
A partir de ésta se halla que

$$y = mx + (y_0 - mx_0)$$

Si hacemos $(y_0 - mx_0) = n$, entonces se obtiene la conocida relación funcional de la forma

$$y = mx + n$$

en donde el número real m se llama **pendiente** o **tasa de cambio** de la recta y es la relación entre la altura y la base. El número real n es el punto donde esta función se intersecta con el eje de ordenadas, se denomina **coeficiente de posición**.



La figura muestra la gráfica de la función lineal $y = 3x+2$. Se observa que $m = 3$ y $n = 2$, y vemos que por cada unidad recorrida en x la recta sube 3 unidades en y por lo que la pendiente es $m = 3$.

Actividad 2

1. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (10, 20)$.*
2. *La pendiente de cierta recta es 3 y pasa por el punto $(1, 2)$, hallar su ecuación.*
3. *Una recta pasa por el punto $A = (x_0, y_0)$ y con pendiente m. Halla su ecuación.*
4. *Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, 5)$ y $(-7, 2)$, y escribirla de tres formas:*
   a) $y - y_0 = m(x - x_0)$
   b) $y = mx + n$
   c) $ax + by + c = 0$

Forma General de la recta: $ax + by + c = 0$, con a y b no son cero simultáneamente.

- **Graficando la recta**

Actividad 3 *Graficar las rectas:*

1. $2x - 3y - 6 = 0.$
2. $x + 2y + 4 = 0$

3.1 Tipos de rectas

Calculando la pendiente se puede establecer que:

1. Toda recta paralela al eje x tiene ecuación $y = b$
2. Toda recta paralela al eje y tiene ecuación $x = a$

Actividad 4 *Determina cual o cuales de las siguientes rectas son paralelas a uno de los ejes. Si lo es, indica a cual eje.*

1. $2x - 3y = 5$
2. $5y - 2 = 0$
3. $8x + 1 = 0$
4. $y - x = 0$
5. $2x - y = 4$
6. $x = 0$

Actividad 5 *Determina la abscisa y la ordenada en el origen de las siguientes rectas (Ayuda: coordenadas donde la recta corta a los ejes):*

1. $2x - 3y = 6$
2. $5y - 2 = 0$
3. $2x + 1 = 0$
4. $y - x = 0$
5. $2x - y = 4$
6. $x = 0$

Actividad 6 *Considera los siguientes pares de rectas:*

1. $x + 2y = 8,$ y $x + 2y = 12,$
2. $x + 2y = 2,$ y $2x - y = 1$
3. $x + 2y = 4,$ y $2x - y = 8$

Determina si ellas son paralelas o perpendiculares. Puedes mirar las pendientes

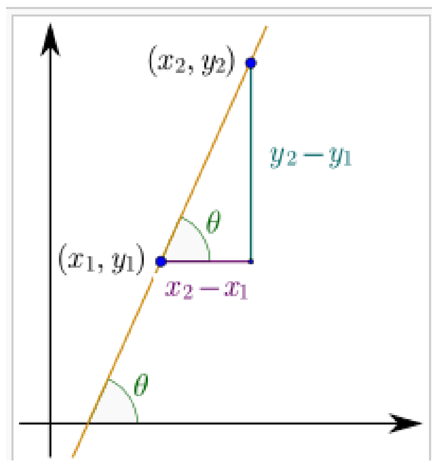
Dos grandes descubrimientos:

- Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen igual pendiente
- Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1

Tarea 1 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta $4x - 3y + 6 = 0$*

3.2 Angulo de inclinación

La idea es determinar el ángulo θ que forma una recta con la parte positiva del eje x, midiendo el ángulo desde el eje x a la recta. Este ángulo que forma la recta con el eje x se llama **ángulo de inclinación** de la recta. Consideremos la figura



La medida del ángulo se toma en sentido contrario a las agujas del reloj. La pendiente o tangente de un ángulo determina el ángulo de inclinación de la recta. En efecto, en el triángulo de la figura, el ángulo de inclinación, θ, de la recta L viene dado por la tangente de θ, esto es

$$tg\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Actividad 7 *Halla el ángulo de inclinación de la rectas:*

1. $y = x + 2$
2. $y = x - 2$
3. $y = x\sqrt{3}$
4. $y = x\sqrt{3} + 1$
5. $y = x + \frac{1}{2}$
6. $y = x + 500$
7. $y = 2$
8. $x = 1$
9. $y = -x$

---

4. Distancia punto - recta

´No vamos a deducir la fórmula, vamos a aplicarla.

Definición 4.1 *La distancia d entre el punto de coordenadas (x_0, y_0) y la recta L de ecuación $ax + by + c = 0$ viene dada por*

$$d[\,(x_0, y_0), ax + by + c = 0\,] = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Actividad 8 *Hallar la distancia del punto*

1. $(4,3)$ *a la recta* $x+y-3=0$
2. $(-2,3)$ *a la recta* $2x+y-4=0$.

Tarea 2 *1. Grafica las siguientes rectas indicando abscisa en el origen y la ordenada en el origen:*

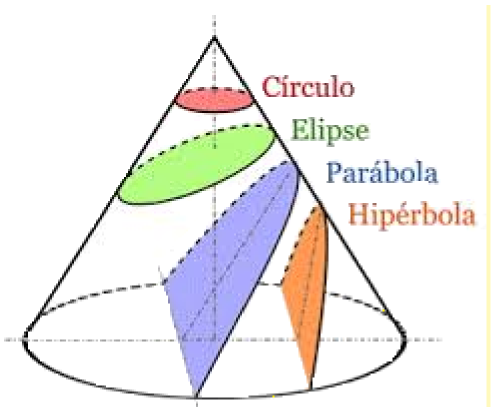
$$(a)\ 2x-y=4, \quad (b)\ 3x+4y=12, \quad (c)\ y-2x+3=0$$

2. *Determina la ecuación de la recta que pasa por* $(3,-4)$ *y* $(8,6)$
3. *Escribe la ecuación de la recta de pendiente -3, y que pasa por* $(2,5)$
4. *Halla el valor de* m *en la recta* $y=mx+5$ *para que sea paralela con* $x+2y=8$
5. *Halla el valor de* m *en la recta* $y=mx-3$ *para que sea perpendicular con* $x-2y=8$

---

5. Las cónicas

Las curvas; circunferencia, parábola, elipse, e hipérbola, son conocidas con el nombre genérico de *cónicas*, pues todas ellas se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano.



El estudio de las cónicas tiene su origen en el libro **Cónicas**, de *Apolonio de Perga* (262-190 A.C), en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos. La circunferencia se puede considerar como caso particular de elipse.

- Las elipses son las curvas que se forman cortando un cono con un plano que solo toca uno de los mantos del cono y no es paralelo a una de sus aristas.
- Las hipérbolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano que toca los dos mantos del cono.
- Las parábolas son las curvas que se forman al cortar un cono con un plano paralelo a una de sus aristas.

Vamos a estudiar estas curvas en el plano, en donde se definen como lugar geométrico.

5.1 La circunferencia

Definición 5.1 *La circunferencia es el Lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia (radio) a un punto fijo (centro) es siempre la misma.*

Actividad 9 *La figura muestra el centro de la circunferencia, punto que denotamos por* (h,k)*, y un punto* $P=(x,y)$ *cualquiera que pertenece a la circunferencia. Usa la definición para graficar todos los puntos que tienen la misma propiedad.*

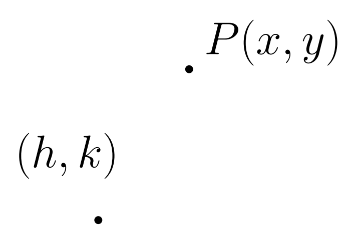


figura 1

Con esos dos puntos de seguro que encuentras la ecuación de la circunferencia. Llama r *a la distancia, otra cosa, la ecuación que vas a encontrar se llama canónica o estándar de la circunferencia.*

Actividad 10
Hallar la forma canónica de la circunferencia, completando cuadrados.

1. $x^2+y^2-6x+8y=0$
2. $x^2+y^2+6x-14y-64=0$
3. $9x^2+9y^2-6x-12y-11=0$

Tarea 3

1. *Halla la ecuación de la circunferencia de centro en* $(-3,2)$ *y radio 6.*
2. *Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas* $x-2y-1=0$ *y* $x+3y-6=0$
3. *Encuentra la ecuación de la circunferencia uno de cuyos diámetros es el segmento de extremos* $(-1,-3)$ *y* $(7,-1)$.
4. *Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen, por el punto* $(4,8)$ *y que tiene su centro en la recta* $y=3$.
5. *Halla la ecuación de la circunferencia tiene su centro sobre la recta* $x-2y+4=0$ *y pasa por los puntos* $(1,5)$ *y* $(9,1)$.
6. *Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta* $3x-4y+30=0$*, y centro en el punto* $(-4,-3)$
7. *En cada uno de los casos siguientes la ecuación representa una circunferencia. Encuentra las coordenadas del centro y el radio. Dibuja la curva.*

a) $x^2+y^2+4x-8y=0$	e) $x^2+y^2-12x-16y=0$
b) $x^2+y^2-10y=0$	f) $3x^2+3y^2-4x+8y=0$
c) $x^2+y^2-25=0$	g) $x^2+y^2-4x-2y-5=0$
d) $x^2+y^2-8x=0$	h) $x^2+y^2+5x+6y-9=0$

8. *En cada uno de los ejercicios que siguen, halla la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas. Acostumbrate a hacer un dibujo que ilustre la situación.*
   a) *tangente a los ejes coordenados y centro en* $(-3,3)$
   b) *tangente al eje* x *y centro en* $(-3,3)$

c) *tangente a la recta $3x-4y+30=0$, y centro en $(-4,-3)$*

d) *tangente a la recta $5x+12y-13=0$, y centro en $(1,-1)$*

e) *tangente a los ejes y centro sobre la recta $2x-3y+5=0$*

f) *tangente al eje y, pasa por el punto $(7,9)$ y tiene su centro sobre la recta $x-y+1=0$.*

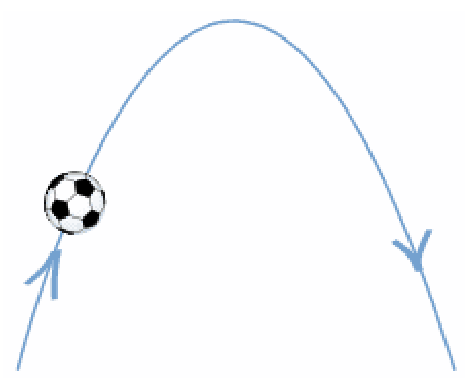
9. *Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene radio 5, centro en la recta $x=3$ y es tangente a la recta $3x-4y+31=0$*

10. *Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(2,5)$ y es tangente a la recta $5x-12y=0$ en el punto $(12,5)$*

11. *Una circunferencia con centro en el origen es tangente a la recta $12x+5y+52=0$. Halla la ecuación y el punto de contacto.*

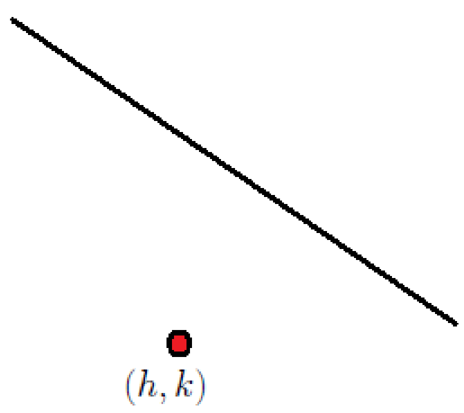
---

6. La Parábola



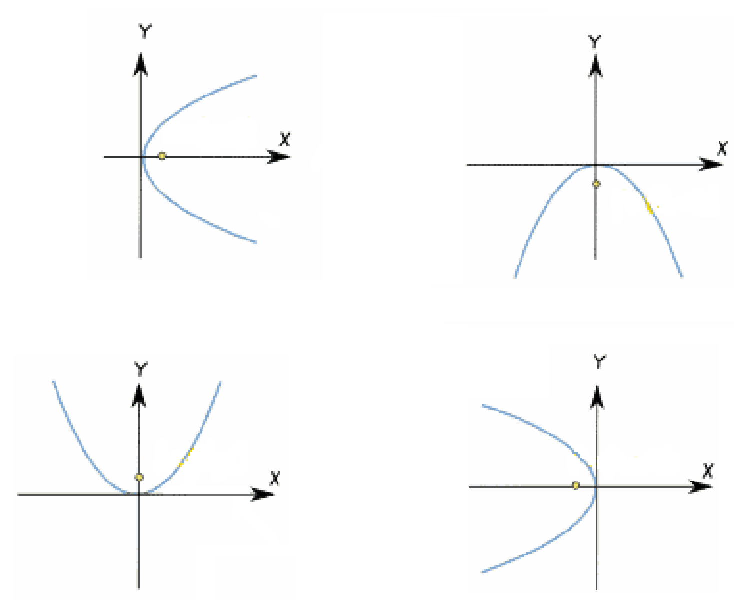
Definición 6.1 *La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo (foco) es la misma que a una recta fija directriz*

Actividad 11 *Te doy el punto fijo y la recta fija. Mira la figura.*



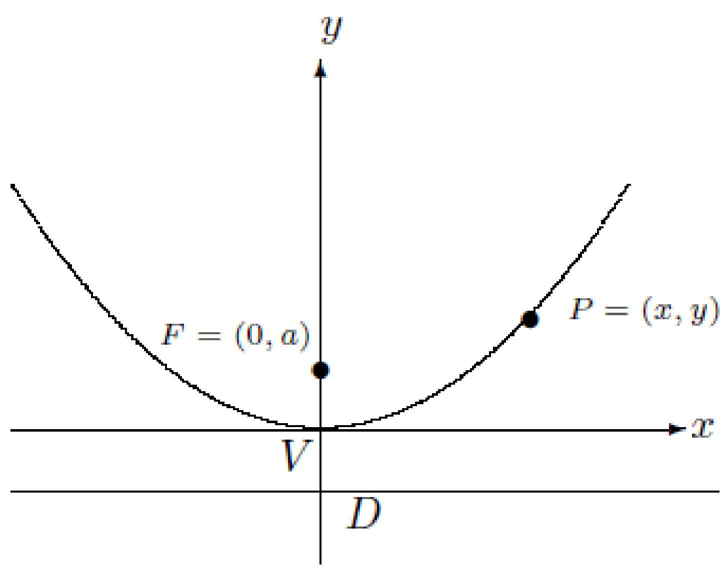
1. *Identifica, en la figura, tres puntos del plano que sean parte de la parábola.*

Son cuatro los tipos de parábolas que trabajaremos:



6.1 Parábola que se abre hacia arriba

Actividad 12 *En la figura, $V(0,0)$ es el **vértice** de la parábola, $F(0,a)$ es el **Foco**, y D la **directriz** o recta fija.*



1. *Usa lápiz de color para establecer, en el gráfico, la condición que cumple la parábola como lugar geométrico (distancias que deben ser iguales)*
2. *Establece, algebraicamente, la igualdad de estos segmentos.*
3. *Desarrolla la igualdad para obtener la ecuación de la parábola.*

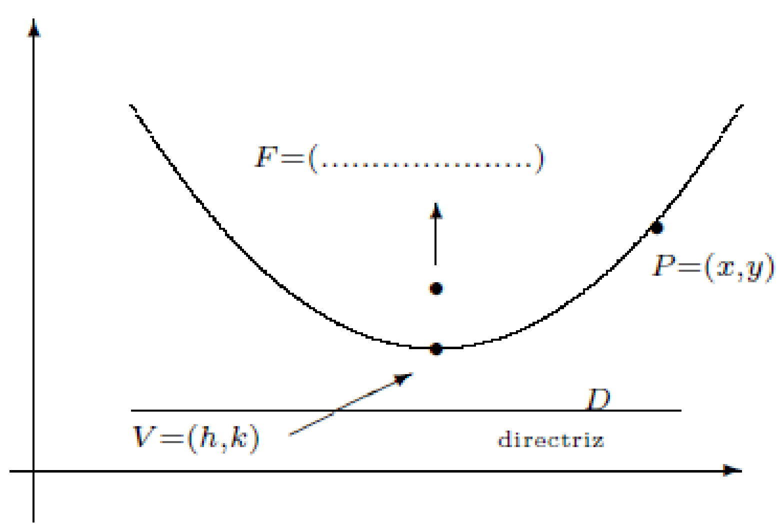
Actividad 13 *Una parábola tiene por foco el punto $(0,6)$ y por directriz la recta $y=-6$. Halla su ecuación. Resp. $x^2=24y$*

6.2 Parábola hacia arriba y vértice (h,k)

Piensa que la parábola es la misma y que la vamos a *trasladar* manteniendo el hecho que se abre hacia arriba, es decir, el o los movimientos que podemos hacer son rígidos, hacia la derecha o izquierda y también hacia arriba o hacia abajo.

Actividad 14
Usa la figura para responder.

1. *Usa lápiz de color para ilustrar en la figura la condición que cumple una parábola.*



2. *Identifica a de la parábola en la figura.*

3. *Anota las coordenadas del Foco*

4. *Escribe la ecuación de la directriz*

5. *Establece, en coordenadas, la ecuación de la parábola (distancias que deben ser iguales) y desarrolla para obtener la ecuación*

Actividad 15 1. *Halla la ecuación de la parábola y de su directriz, si tiene foco en $(0,5)$ y vértice $(0,2)$. Resp. $x^2 = 12(y-2)$*

2. *Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(0,0)$ y vértice en $(0,-2)$. Bosqueja la parábola. Resp $x^2 = 4(y+2)$*

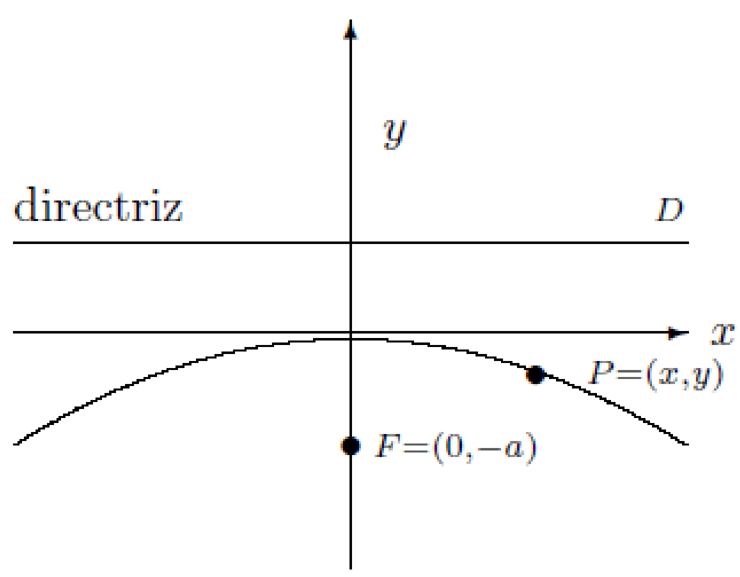
3. *Hallar la ecuación de la parábola que tiene vértice en $(-4,3)$ y foco en $(-4,6)$. Determina también la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola. Resp. $(x+4)^2 = 8(y-3)$*

Tarea 4 1. *La ecuación de una parábola es $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$. Determina, el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola. Resp. $a = \frac{1}{2}$, $F(2, \frac{7}{2})$*

2. *La ecuación de una parábola es $x^2 - 9y - 6x = 0$. Determina, el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola.*

3. *La ecuación de una parábola es $3x^2 - y - 3x + 3 = 0$. Determina, el vértice, el foco, la ecuación de la directriz y bosqueja esta parábola. Mira bien antes de completar cuadrados.*

6.3 Parábola que se abre hacia abajo



Si hacemos una reflexión sobre el eje x de la parábola con vértice en el origen y que se abre hacia arriba, entonces queda, con el mismo vértice, pero "mirando" hacia abajo.

Actividad 16 *La condición que cumple la parábola como lugar geométrico es $d(P,F) = d(P, directriz)$. Escribe esto en coordenadas, desarrolla las expresiones y escribe la ecuación.*

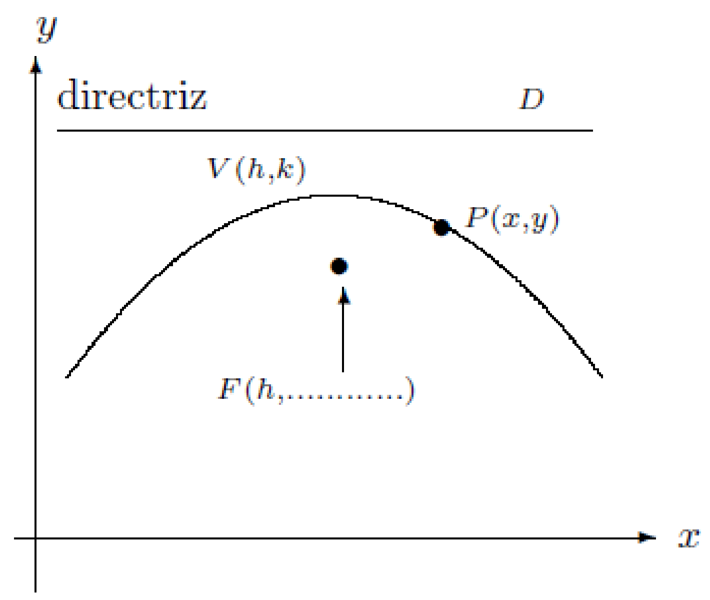
Actividad 17

1) *Una parábola tiene por foco el punto $(0,6)$ y por directriz la recta $y = 10$. Halla su ecuación, el valor de la constante a, y haz la gráfica. Resp. $x^2 = -8(y-8)$*

2) *Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(0,0)$ y vértice en $(0,2)$. Indica la ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola. Resp. $x^2 = -8(y-2)$*

6.4 Parábola hacia abajo y vértice (h,k)

Se traslada el origen de coordenadas al punto (h,k).



Actividad 18

1. *Marca en la figura la condición que cumple la parábola como lugar geométrico.*

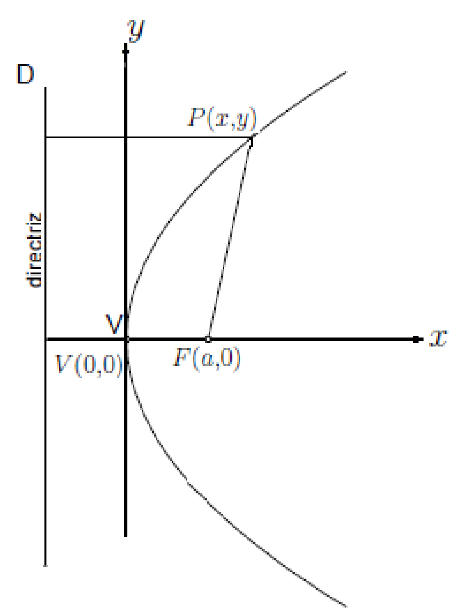
2. *Si la distancia Foco - Vértice es a, anota la ordenada del foco*

3. *Escribe en coordenadas la condición que cumple la parábola y deduce la ecuación*

Actividad 19 *Una parábola tiene ecuación $x^2 - 8x + 3y + 16 = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola.Resp. $(x-4)^2 = -3y$*

6.5 Parábola que se abre hacia la derecha

Actividad 20 *Partimos con el caso más simple, el vértice está en el origen se abre a la derecha. Como consecuencia, el foco está a la derecha del vértice y la directriz a la izquierda. La figura muestra esta parábola.*



En la figura se muestra la condición que cumple la parábola. Tradúcela a coordenadas y halla su ecuación. Generaliza la ecuación si el vértice se traslada al punto (h,k)

Actividad 21

1. *Una parábola tiene por foco el punto $(2,0)$ y por directriz la recta $x+2=0$. Halla el vértice, la constante a, su ecuación, y haz la gráfica. Resp. $y^2 = 8(x-2)$*

2. *Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(3,0)$ y vértice en $(0,0)$. Indica la ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola. Resp. $y^2 = 12x$*

3. *Una parábola tiene ecuación $y^2 - 8y - 4x + 16 = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola. Resp.* $(y-4)^2 = 4x$

6.6 Parábola que se abre hacia la izquierda

Actividad 22 *El vértice de la parábola está en el origen, el foco a la izquierda del vértice y la directriz a la derecha, así, esta parábola se abre a la izquierda. La figura muestra esta parábola.*

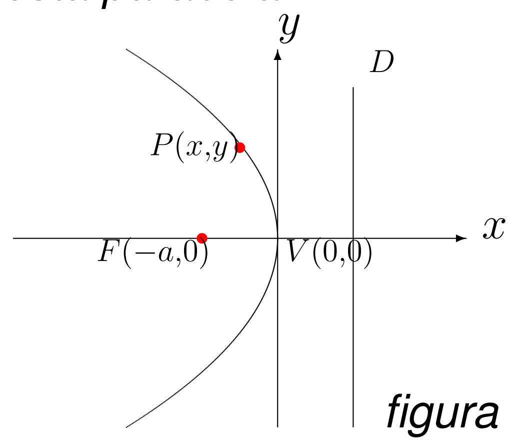


figura 20

1. *Marca en la figura la condición que cumple la parábola (¡distancias iguales!)*
2. *Anota lo anterior en coordenadas y escribe la ecuación simplificada*
3. *Generaliza la ecuación si el vértice se traslada al punto (h,k)*

Actividad 23

1. *Una parábola tiene por foco el punto $(2,4)$ y por directriz la recta $x = 6$. Halla el vértice, la constante a, la ecuación, y dibuja la parábola. Resp.* $(y-4)^2 = -8(x-4)$
2. *Halla la ecuación de la parábola que tiene foco en $(-2,0)$ y vértice en $(0,0)$. Indica ecuación de la directriz y haz la gráfica de la parábola. Resp.* $y^2 = -8x$
3. *Una parábola tiene ecuación $y^2 - 8y + 4x = 0$. Indicar: posición, coordenadas del vértice y foco, la ecuación de la directriz y bosquejar la parábola. Resp.* $(y-4)^2 = -4\,(x-4)$

Tarea 5 *Las curvas siguientes son parábolas. Identifica, posición, vértice, foco, directriz y haz la grafica*

1. $x^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
2. $4y^2 - 40x - 28y + 29 = 0$
3. $2x^2 + 12x + 7y + 32 = 0$
4. $9y^2 + 48x - 80 = 0$

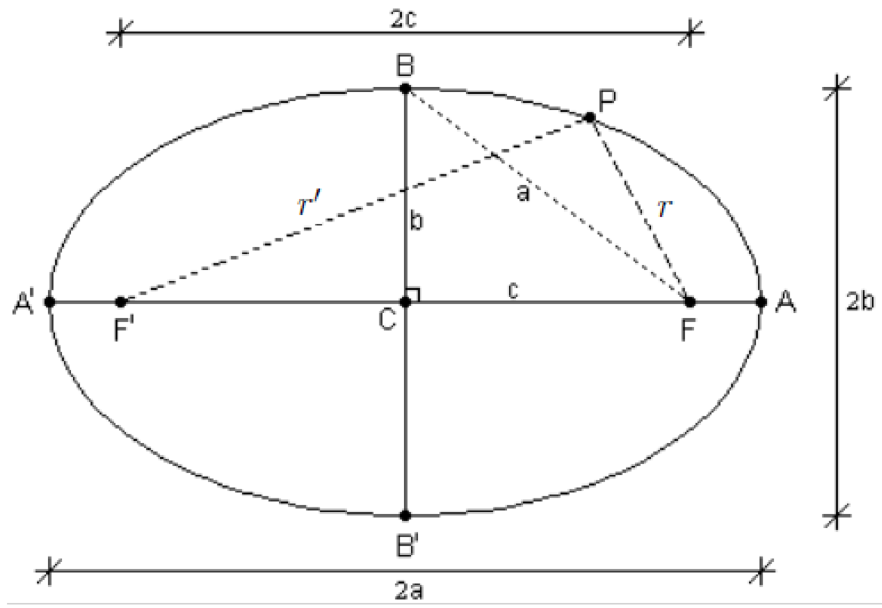
---

7. La Elipse

Definición 7.1 *La elipse es una curva cerrada y plana, que se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias $r + r'$, a dos puntos fijos F y F', denominados* **focos***, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje mayor $A'A$ de la elipse.*

La elipse tiene dos ejes, el eje mayor $A'A$ y el eje menor $B'B$, ambos se cruzan perpendicularmente en el centro O de la elipse.

La longitud del eje mayor es $2a$, la del eje menor $2b$ y la distancia focal $2c$, y se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$.
La elipse es simétrica respecto a los dos ejes.
Las rectas que unen un punto cualquiera de la elipse P, con los focos, se denominan radios vectores r y r', y por definición se cumple que $r + r' = 2a$.



7.0.1. Elementos de la elipse

- La *distancia focal*: Es la distancia entre ambos focos, que se designa con $2c$, siendo c la distancia de cada foco al centro de la elipse.
- El *eje mayor*: El segmento de recta que pasa por los focos de longitud $2a$. Sus extremos son dos puntos llamados *vértices* de la elipse.
- El *eje menor*: El segmento de recta perpendicular al eje mayor de longitud $2b$. Sus extremos son dos puntos, que también son vértices de la elipse.
- El *lado recto*: Conocido también como *Latus Rectum* de la elipse, es la magnitud del segmento de recta, que une dos puntos de la elipse, perpendicular al eje mayor y que pasa por los focos. Su longitud es $\frac{2b^2}{a}$
- La *excentricidad* de la elipse: Corresponde a la razón entre a y c, esto es, $e = \frac{c}{a}$.

Este es un concepto del cual depende la mayor o menor deformación que pueda experimentar una circunferencia para producir una elipse. En efecto, como c es menor que a, la excentricidad de la elipse satisface que $0 < e < 1$. De esta forma, cuando los focos se confunden con el centro, es decir, cuando $c = 0$, entonces la excentricidad es $e = 0$, teniéndose que la elipse es una circunferencia. ¿Qué te parece verlo algebraicamente? Bien, considera la elipse y elige como punto de la elipse el $(0,b)$. Al aplicar la definición de elipse se tiene que

$$d[(c,0),(0,b)] + d[(-c,0),(0,b)] = 2a \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

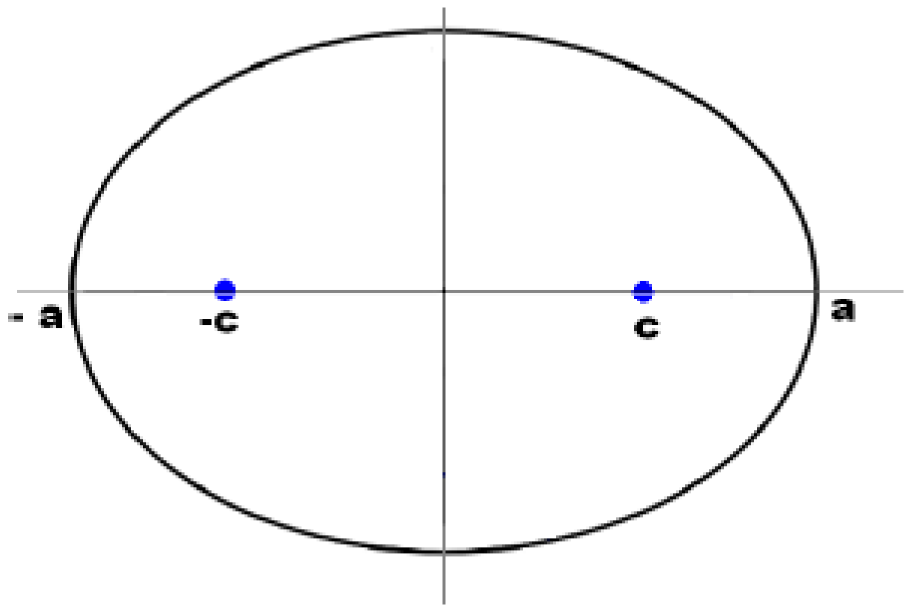
Si la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0$, entonces debe ser $c = 0$. Como $a^2 - c^2 = b^2$, se sigue que $a = b$, en cuyo caso la curva es una circunferencia. De esto se sigue que la circunferencia puede ser considerada como un caso particular de elipse para excentricidad nula.

Por otra parte, si $e = 1$, entonces es evidente que $a = c$, lo que reemplazar en $a^2 - c^2 = b^2$, produce $b = 0$, en cuyo caso la deformación ha sido total, de tal manera que la curva se ha convertido en una recta. Esto confirma que $0 < e < 1$.

Nos dedicamos ahora a encontrar las ecuaciones de dos tipos de elipse, una en la cual los focos se hallen en una recta paralela al eje x y la otra en una paralela al eje y. Nada más que eso. Se observa, que a diferencia de la parábola, ahora las elipses que nos interesan son sólo de dos clases.

7.1 Elipse con eje mayor paralelo al eje x

Actividad 24 *La idea es que establezcas la ecuación de la elipse que muestra la figura.*



1. *Si $2a$ es la distancia constante en la definición de elipse, escribe las coordenadas de los vértices*
2. *El valor de a ¿qué distancia representa?*
3. *Transforma a coordenadas la propiedad que cumple la elipse $d(P, F_1) + dP, F_2) = 2a$*
4. *Traslada una raíz y eleva al cuadrado. Simplifica, usa el hecho que $a^2 - c^2 = b^2$, y escribe la ecuación de la elipse.*

Actividad 25 *Una elipse tiene centro en el origen, un vértice en $(13, 0)$ y un foco en $(5, 0)$. Bosquejar esta situación y posteriormente hacer la gráfica.*

1. *Anota el valor de a en esta elipse*
2. *El otro vértice de la elipse está en*
3. *El otro foco tiene coordenadas*
4. *La longitud del eje mayor ($2a$) es*
5. *La longitud del eje menor ($2b$) es*
6. *Anota el valor del lado recto (L_r)*
7. *La excentricidad de esta elipse ($e = \frac{c}{a}$)*
8. *Verifica que la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$*
9. *Haz la gráfica de esta elipse.*

Tarea 6 *Verifica que la longitud del **lado recto** de una elipse es $L_r = \dfrac{2b^2}{a}$.*

7.2 Elipse con eje mayor paralelo al eje y

Tenemos dos alternativas para conocer la ecuación de esta clase de elipse. La primera es un procedimiento análogo al empleado en la búsqueda de la primera elipse, y el otro hacer un giro de $90°$.

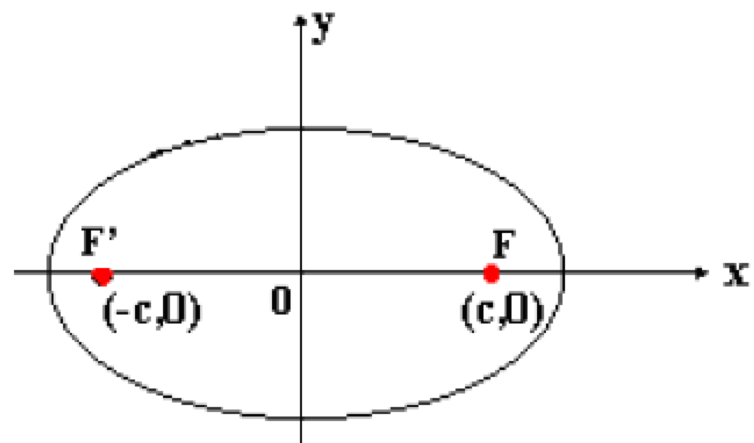


figura 1

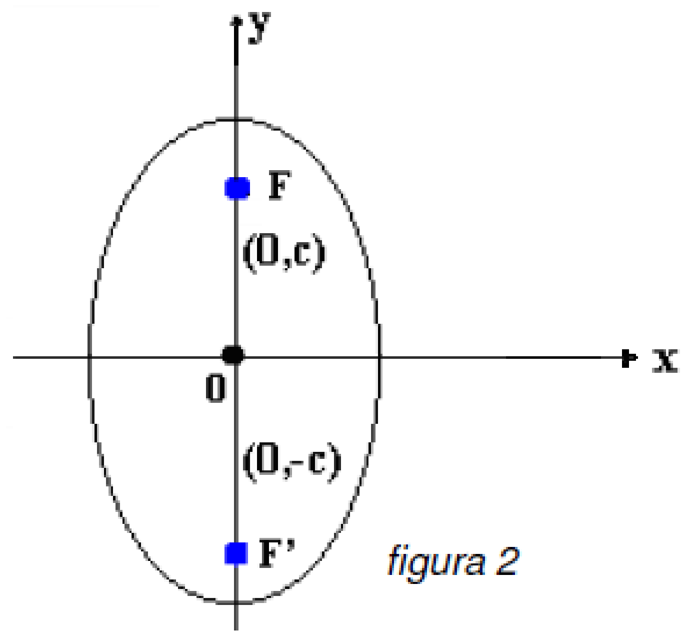
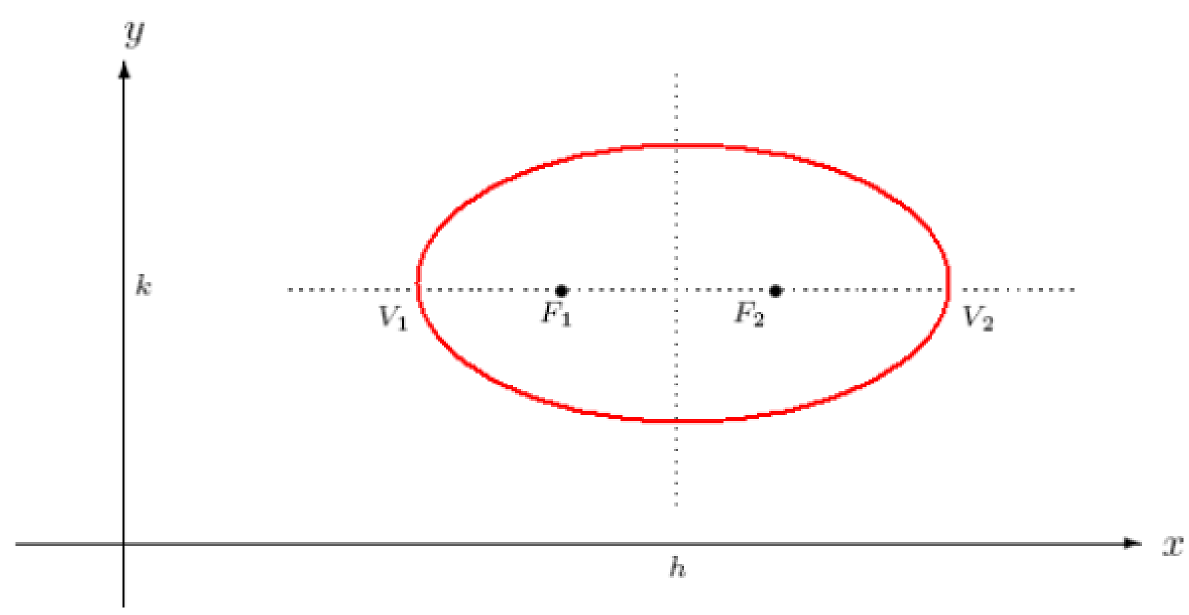


figura 2

Actividad 26 *La elipse de la figura 1 tiene ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se sabe que el efecto de hacer un giro de $90°$ en sentido positivo en una curva corresponde a reemplazar, en su ecuación, los x por y y los y por $-x$. La figura 2 muestra las nuevas coordenadas de los focos al girar la elipse en $90°$ en torno al origen, y que corresponden a $(0, c)$ y $(0, -c)$.*

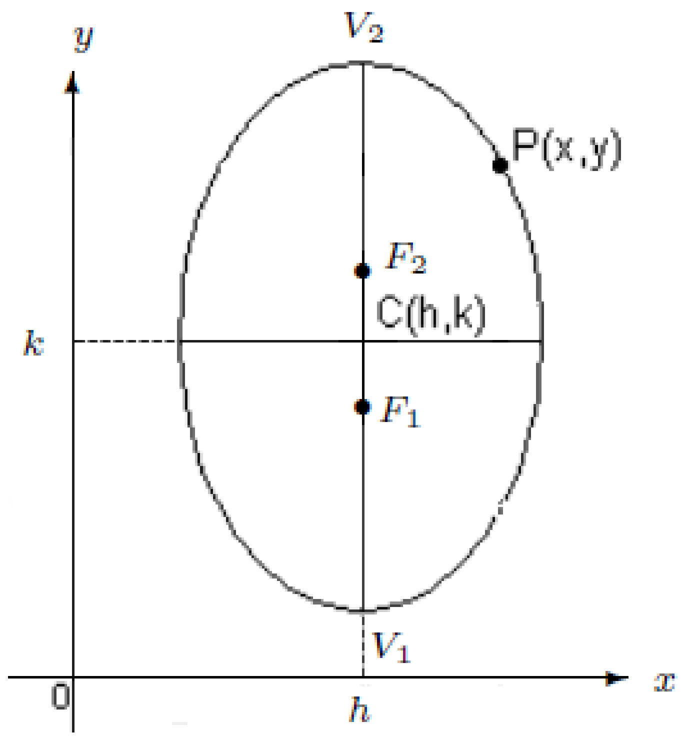
1. *Escribe las nuevas coordenadas de los vértices*
2. *Anota la nueva ecuación de la elipse*

Actividad 27 *Queremos obtener la elipse de centro (h, k), cuyo eje mayor mida $2a$ y, paralelo al eje x. La figura te va a servir para ir poniendo los datos que obtengas como respuesta a las situaciones que se plantean.*



1. *La distancia del centro al foco es c. Escribe las coordenadas de los focos*
2. *La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k las coordenadas de los vértices*
3. *Como ya sabes trasladar, escribe la ecuación de esta elipse*

Actividad 28 *Ahora abordamos la generalización para una elipse de centro (h, k), con eje mayor de longitud $2a$, y paralelo al eje y. La figura sirve para este efecto.*



1. La distancia del centro al foco es c. Escribe las coordenadas de los focos

2. La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k las coordenadas de los vértices

3. Como ya sabes trasladar, escribe la ecuación de esta elipse

Actividad 29 *Identifica; posición, centro, vértice, foco y hacer la gráfica de las elipses que se indican:*

1. $9x^2 + 25y^2 + 18x + 150y + 9 = 0$

2. $x^2 + 4y^2 + 4x - 24y + 24 = 0$

3. $16x^2 + 36y^2 + 24x - 36y + 9 = 0$

4. $16x^2 + 7y^2 - 64x + 28y = 20$

---

8. La Hipérbola

Definición 8.1 *La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias no dirigidas a dos puntos dados (focos) es constante*

Una hipérbola está formada por dos **ramas**, ya que si P es un punto del lugar geométrico y F_1 y F_2 son los focos, entonces las diferencias son:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) \qquad \text{o bien} \qquad d(P, F_2) - d(P, F_1)$$

lo que da lugar a las dos ramas. La figura te puede servir como elemento de comprensión.

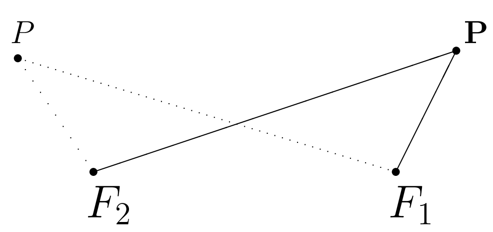
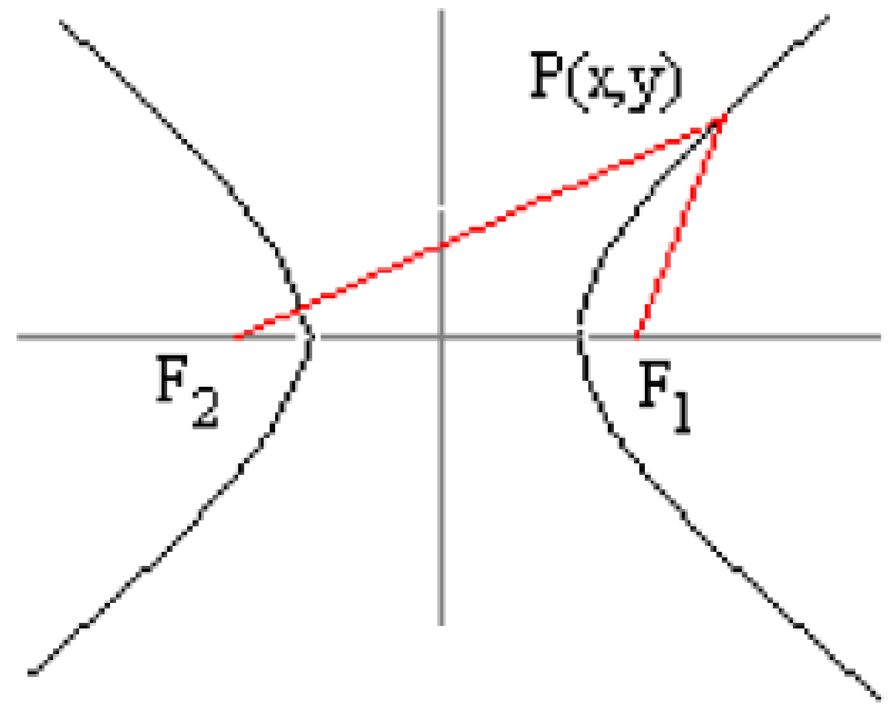


Figura 1

8.0.1. Elementos de la Hipérbola



1. La recta que pasa por ambos focos se llama **eje real** o **eje focal** de la hipérbola y la mediatriz se llama **eje imaginario**.

2. El punto donde se cortan ambos ejes (el punto medio de los focos) se llama centro de la hipérbola.

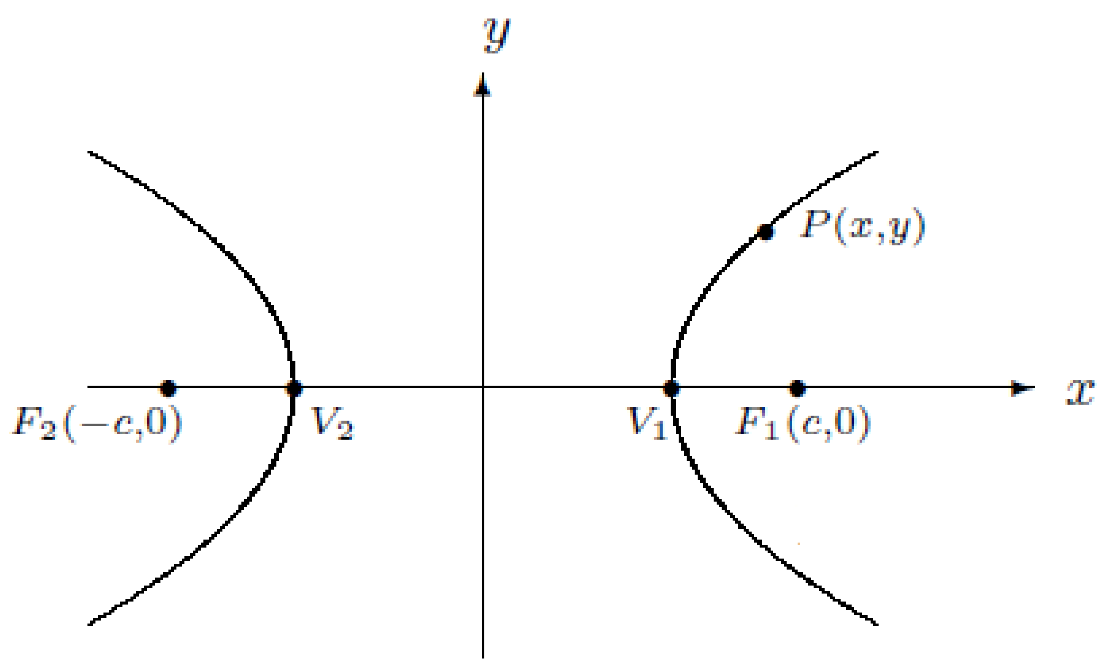
3. Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes se llaman **vértices** de la hipérbola, y su longitud es $2a$

4. La distancia entre los dos focos se llama **distancia focal** y tiene longitud $2c$.

5. En la hipérbola, y a diferencia de la elipse, se tiene $2c > 2a$, de donde $c > a$, y por tanto, $c^2 - a^2 = b^2$.

8.1 Hipérbola de eje real paralelo al eje x

La figura muestra una hipérbola cuyo eje real es el eje x. Como siempre, la tarea es obtener la ecuación de este lugar geométrico



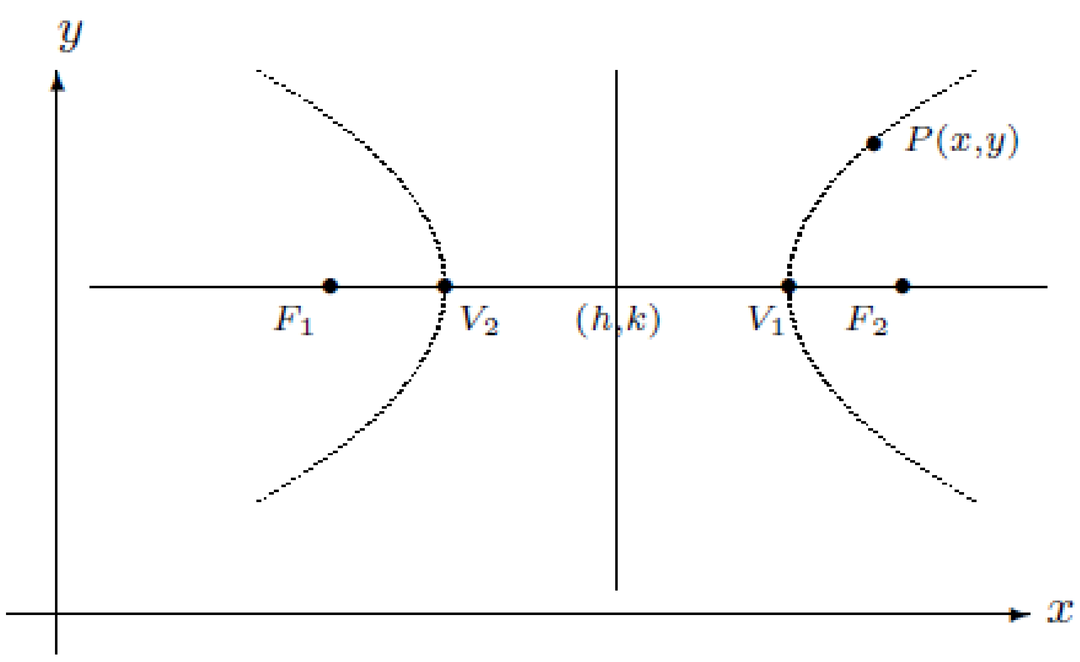
Actividad 30 *Responde usando como base la figura*

1. La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe las coordenadas de los vértices

2. Usando P, F_1 y F_2 anota la expresión que define la hipérbola como lugar geométrico

3. Usando las coordenadas de P, F_1 y F_2 escribe la expresión anterior

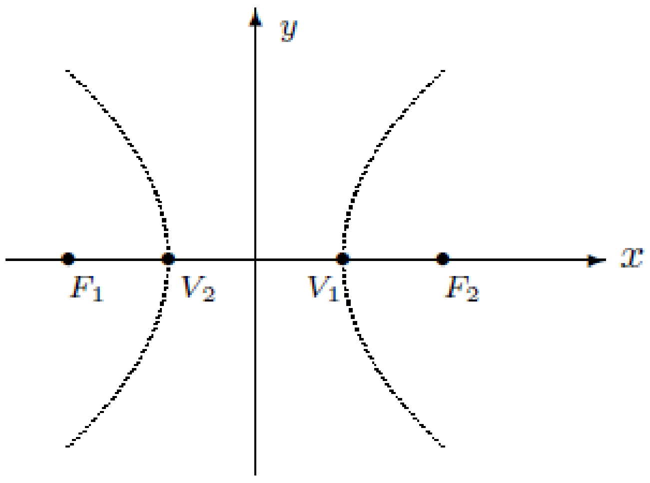
Actividad 31 *Vamos a encontrar la ecuación de la hipérbola de centro (h, k), y que muestra la figura.*

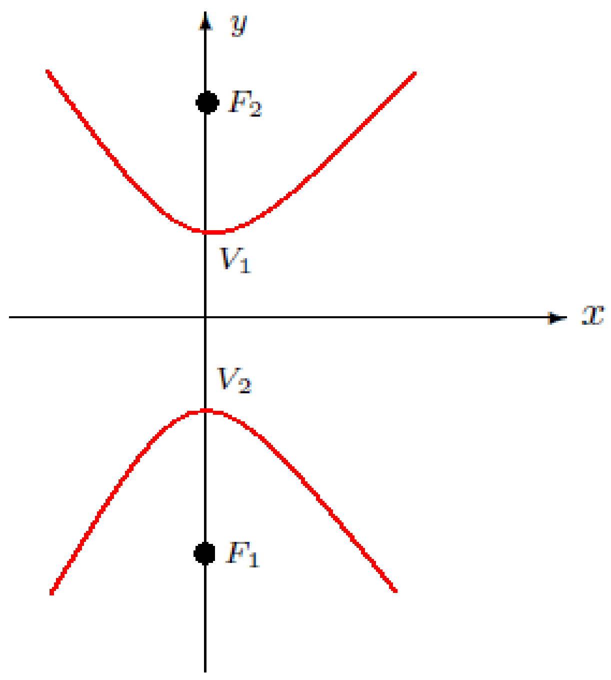


1. La distancia del centro al foco es c. Escribe las coordenadas de los focos
2. La distancia $d(V_1, V_2) = 2a$. Escribe, en función de h y k las coordenadas de los vértices
3. Como sabes trasladar, escribe la ecuación de la hipérbola

Actividad 32 *Halla la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en* $(6,0)$ *y un vértice en* $(4,0)$. *Resp* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

8.2 Hipérbola de eje real paralelo al eje y





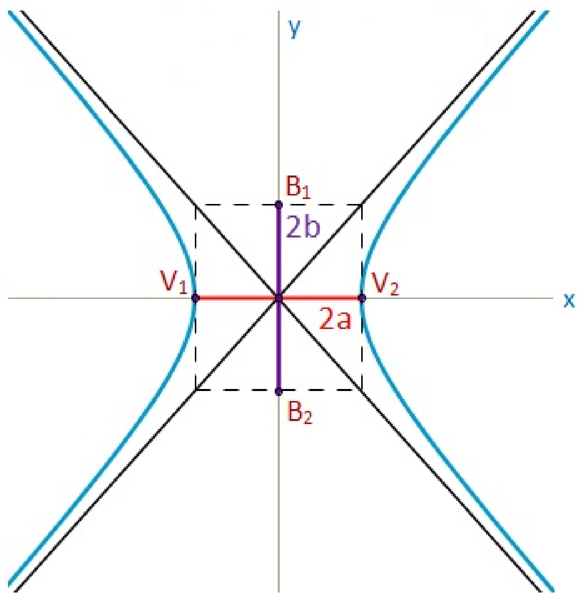
Actividad 33 *Si la hipérbola de centro en* $(0,0)$ *se hace girar* $90°$ *en sentido positivo, de tal modo que sus focos queden sobre el eje* y (*sobre una palalela al eje* y) *entonces tenemos nuevas ecuaciones.*

1. En la figura, la distancia entre vértices es $2a$ y la distancia del centro al foco es c. Escribe las coordenadas de los focos y vértices
2. Gira en $90°$ la hipérbola de la figura. Anota las nuevas coordenadas de los focos y de los vértices
3. Escribe la nueva ecuación de la hipérbola obtenida por rotación en torno al origen de coordenadas.

Actividad 34 *Halla la ecuación de la hipérbola de centro en el origen un vértice en* $(0,6)$ *y con excentricidad* $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. *Haz un esquema de esta hipérbola. Resp.* $\frac{y^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

8.3 Asíntotas

Las asíntotas de la hipérbola son las dos líneas rectas que se aproximan cada vez más a la hipérbola pero no llegan a intersectarla. En el infinito las asíntotas estarán a una distancia 0 de ella.



8.3.1. Ecuaciones de las Asíntotas

Si la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entonces la ecuación de las asíntotas se obtienen a partir de la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

En efecto, esto es una suma por diferencia

$$(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0$$

Se sigue que las ecuaciones son:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

Actividad 35 *Considera la hipérbola* $x^2+2x-y^2+2y = 1$. *Completa cuadrado y escribe la ecuación general, anota las ecuaciones de las asíntotas. Resp. Las asíntotas son;* $y = x+2, \quad y = -x$

Actividad 36 *Halla las asíntotas de la hipérbola*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Tarea 7 *Resolver los siguientes problemas sobre hipérbolas, identificando centro, vértice, foco, asíntotas, y gráficar.*

1. $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y = 4$
2. $4x^2 - 4y^2 + 20x - 16y + 25 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 8y = 4$
4. $16x^2 - 9y^2 + 96x + 72y + 144 = 0$