# Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias Segundo Semestre 2013

Departamento de Matemática y Estadística

## Guía N°4: Integrales Impropias y Series
## Cálculo de una Variable (IME050)

**Carreras: Ingenierías Civiles**

**Profesores: H. Burgos, M. Choquehuanca, E. Henríquez, A. Parra, A. Sepúlveda, H. Soto, P. Valenzuela.**

1. Determine si las siguientes integrales convergen o divergen.

   *a*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}dx$

   *b*) ) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x\ dx}{(x^2+1)^2}$

   *c*) ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}dx$

   *d*) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

   *e*) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

   *f*) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{(x+3)dx}{(x^2-1)^2}$

   *g*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

   *h*) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

   *i*) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x dx$

   *j*) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

   *k*) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

   *l*) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

   *m*) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   *n*) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^2}$

   *ñ*) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{1}{5}}}$

2. Pruebe que si $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_{-c}^{\infty} f(-x)dx$ también converge y tiene el mismo valor.

3. Determine el valor de $p$ para los cuales la integral $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge.

4. ¿Para qué valores de $c$ la siguiente integral converge? Calcule la integral para dicho valor de $c$.

   *a*) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$

   *b*) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \left(\frac{cx}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+c}\right)dx$

5. Determine el valor de $n$ para el cual se cumple que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-nx}dx = 3$

6. Aplique los criterios para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

   *a*) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(2+\operatorname{sen} x)dx}{\sqrt{x}+1}$

   *b*) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(4-x)dx}{2x^2\sqrt{x}}$

   *c*) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^3}$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{1+\operatorname{sen} x+e^x}$

h) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)(x-2)^2}}$

i) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^x \operatorname{sen} x dx$

l) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^3(x-1)}}$

m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$

n) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{e^x dx}{x}$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x} dx}{x+\operatorname{sen} x}$

o) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{(x^2+1)dx}{x^2-1}$

p) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$

q) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{x^2+1}dx$

r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+x+1)^5}}dx$

s) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{x}dx$

t) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)dx$

u) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x^2-4)}}$

v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[n]{\cos x}}$

w) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x}}$

x) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

y) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{27-x^3}}$

z) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$

7. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$, calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}dx$

8. Calcule el área acotada por la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-8)^2}}$, el eje $x$ y las rectas $x = 0,\ x = 8$. Grafique.

9. Encuentre el área en el primer cuadrante que está entre las rectas $x = 3, x = 5$ y bajo la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x-6}}$.

10. Determine si es posible asignar un número finito al volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje $x$, la región a la derecha de la recta $x = 1$ y acotada por la curva $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ y el eje $x$.

11. Encuentre el área de la región sobre el eje $x$, acotada por la curva $y = \sqrt{\dfrac{2x^2}{4-x^2}}$ , sus asíntotas verticales y el eje $x$.

12. Calcule:

a) $\dfrac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}$

b) $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}$

c) $\dfrac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$

d) $\beta(3,5)$

e) $\beta(\frac{3}{2},2)$

f) $\beta(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

13. Use la función Gamma o Beta para calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx$

d) $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$

e) $\int_0^{\infty} \sqrt[4]{x} e^{-\sqrt{x}} dx$

f) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-2x^5} dx$

g) $\int_0^{1} x^2(1-x)^3 dx$

h) $\int_0^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$

i) $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$

j) $\int_0^{2} \sqrt{(4-x^2)^3} dx$

k) $\int_0^{4} \sqrt{x^3}\sqrt{(4-x)^5} dx$

l) $\int_0^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

14. Calcule:

a) $\int_0^{1} (x \ln x)^3 dx$

b) $\int_0^{1} \sqrt[3]{\ln(x^{-1})} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^4 \theta d\theta$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^5 \theta d\theta$

e) $\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} \theta} d\theta$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \theta \cos^7 \theta d\theta$

h) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^7 \theta d\theta$

15. Demuestre que:

a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

b) $\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$

c) $\int_0^{1} t^{p-1} \left[\ln(t^{-1})\right]^{q-1} dt = \frac{\Gamma(q)}{p^q}$

d) $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 e^x}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

e) $\int_0^{1} x^m \left[\ln x\right]^n dt = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

f) $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_0^{1} \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{(-\ln x)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

g) $\int_0^{1} \sqrt{1-t^4} dt = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{4})\right)^2}{6\sqrt{2\pi}}$

h) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx = \frac{5\pi}{16}$

i) $\int_2^{5} \sqrt{\frac{(5-x)^3}{x-2}} dx = \frac{27\pi}{8}$

j) $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \pi$

k) $\int_0^{\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

l) $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{x-4}} dx = \frac{27\pi}{8}$

m) $\int_0^{1} t^m \left[1-t^p\right]^n dt = \frac{1}{p}\beta\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right)$, $m, n > -1$, $p > 0$

n) $\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = \beta(q, 1-q)$, $q > 0$, $\left(\text{Ind. } t = \frac{x}{1+x}\right)$