# TEOREMA DE GREEN.

1. Calcular $\int_\sigma y\,dx - x\,dy$, donde $\sigma$ es la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Solución**

Por el teorema de Green, si llamamos $D$ al interior del cuadrado, entonces

$$\int_\sigma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy.$$

Como $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = -x$, resulta en este caso,

$$I = \iint_D -2\,dxdy = -2\cdot \text{área } (D) = -8.$$

---

2. Usar el teorema de Green para calcular $\int_\sigma (y^2+x^3)\,dx + x^4\,dy$, donde $\sigma$ es el perímetro de $[0,1]\times[0,1]$ en sentido positivo.

**Solución**

Como $P(x,y) = y^2+x^3$, $Q(x,y) = x^4$, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 - 2y$. De este modo, si $D$ es el interior del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, por el teorema de Green,

$$I = \iint_D (4x^3-2y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 (4x^3-2y)\,dy = \int_0^1 (4x^3-1)\,dx = 0.$$

---

3. Sea $\overrightarrow{F} = (2x^3-y^3, x^3+y^3)$.

a) Calcular $\int_\sigma \overrightarrow{F}\,ds$, donde $\sigma$ es la circunferencia unidad recorrida en sentido antihorario.

b) Verificar el teorema de Green cuando $\sigma$ es la frontera de la región anular descrita por $a \le x^2+y^2 \le b$ orientada en sentido positivo.

**Solución**

a) Si llamamos $P(x,y) = 2x^3 - y^3$, $Q(x,y) = x^3 + y^3$, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$. Por el teorema de Green, $I = \displaystyle\iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dxdy$, donde $D$ es el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Mediante un cambio a coordenadas polares, la integral queda de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 3u^2 \cdot u\,du = \frac{3\pi}{2}.$$

b) Si aplicamos el teorema de Green, la situación es análoga a la del apartado (a), donde ahora la región $D$ es la corona circular $a \leq x^2 + y^2 \leq b$.

El cambio a coordenadas polares en este caso nos conduce a

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b 3u^2 \cdot u\,du = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{3\pi(b^4 - a^4)}{2}.$$

Si queremos resolver la integral de forma directa, debemos descomponer la trayectoria en dos curvas: $C_1$ es la circunferencia exterior $x^2 + y^2 = b^2$ recorrida en sentido antihorario, y $C_2$ la circunferencia interior $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido horario. Si parametrizamos ambas curvas como:

$$C_1 : \begin{cases} x = b\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \qquad C_2 : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = -a\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

resulta,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{C_1} \overrightarrow{F}\,ds + \int_{C_2} \overrightarrow{F}\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} [(2b^3\cos^3 t - b^3\,\mathrm{sen}^3\,t)(-b\,\mathrm{sen}\,t) + (b^3\cos^3 t + b^3\,\mathrm{sen}^3\,t)(b\cos t)]\,dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} [(2a^3\cos^3 t + a^3\,\mathrm{sen}^3\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t) + (a^3\cos^3 t - a^3\,\mathrm{sen}^3\,t)(-a\cos t)]\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} [(b^4 + a^4)(-2\,\mathrm{sen}\,t\cos^3 t + \mathrm{sen}^3\,t\cos t) + (b^4 - a^4)(\mathrm{sen}^4\,t + \cos^4 t)]\,dt \\
&= \frac{3\pi(b^4 - a^4)}{2}.
\end{aligned}$$

---

4. *Si $C$ es una curva cerrada que limita una región $D$ a la que se puede aplicar el teorema de Green, probar que área $(D) = \displaystyle\int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx$.*

**Solución**

Por definición, área $(D) = \iint_D dxdy$. Si elegimos $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ y, por el teorema de Green,

$$\text{área } (D) = \iint_D dxdy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy = \int_{\partial D} x\, dy.$$

Por otra parte, la elección $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, también conduce a la igualdad $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ y, aplicando nuevamente el teorema de Green, resulta que

$$\text{área } (D) = -\int_{\partial D} y\, dx.$$

**Observación.** Sumando los dos resultados obtenidos, llegamos también a la fórmula conocida área $(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx$.

---

5. Calcular el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**Solución**

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, podemos aplicar la fórmula $A = \int_{\partial D} x\, dy$. Para ello, parametrizamos la frontera de la elipse por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

De este modo,

$$A = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\, dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab.$$

---

6. Bajo las condiciones del teorema de Green, probar

(a) $$\int_{\partial D} PQ\, dx + PQ\, dy = \iint_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dxdy.$$

(b) $$\int_{\partial D} \left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = 2\iint_D \left(P\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\right) dxdy.$$

**Solución**

(a) Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(PQ)}{\partial x} &= P\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial P}{\partial x},\\ \frac{\partial(PQ)}{\partial y} &= P\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\cdot\frac{\partial P}{\partial y},\end{aligned}$$

al aplicar el teorema de Green, resulta:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} PQ\,dx+PQ\,dy &= \iint_D\Big(P\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial P}{\partial x}-P\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy\\ &= \iint_D\left[P\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right]+Q\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy.\end{aligned}$$

(b) A partir de las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) &= P\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(Q\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial x}\right) &= Q\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}-P\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}$$

basta aplicar el teorema de Green y obtener el resultado propuesto.

---

7. Sea $f$ una función armónica, es decir, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

   Probar que $\displaystyle\int_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx-\frac{\partial f}{\partial x}\,dy=0$, donde $D$ es una región a la que se aplica el teorema de Green.

**Solución**

Si llamamos $P(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $Q(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. De este modo, al aplicar el teorema de Green, obtenemos:

$$\int_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx-\frac{\partial f}{\partial x}\,dy=\iint_D\Big(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\,dxdy=0.$$

---

8. Calcular, tanto directamente como aplicando el teorema de Green, la integral $\displaystyle\int_\Gamma(xy+x+y)\,dx-(xy+x-y)\,dy$, siendo $\Gamma$

   (a) la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$;

   (b) la circunferencia $x^2+y^2=ax$.

**Solución**

(a) Para calcular la integral directamente, parametrizamos la elipse mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t, \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (ab\operatorname{sen} t\cos t + a\cos t + b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\,dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (ab\operatorname{sen} t\cos t + a\cos t - b\operatorname{sen} t) b\cos t\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 b\operatorname{sen}^2 t\cos t - ab^2\operatorname{sen} t\cos^2 t - (a^2 - b^2)\operatorname{sen} t\cos t - ab)\,dt \\ &= -2\pi ab. \end{aligned}$$

Al resolver la integral utilizando el teorema de Green, resulta:

$$I = \iint_D [-(y+1) - (x+1)]\,dxdy = \iint_D (-x - y - 2)\,dxdy,$$

donde $D$ es el interior de la elipse dada.

Para resolver la integral doble, hacemos el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\operatorname{sen} v \end{cases}, \ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi,$$

cuyo jacobiano es $J = abu$. La integral queda entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (-au\cos v - bu\operatorname{sen} v - 2)\cdot abu\,dv \\ &= \int_0^1 (-2abu \cdot 2\pi\,du = -2ab\pi. \end{aligned}$$

(b) La curva dada es la circunferencia de ecuación $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$, que podemos parametrizar como

$$\begin{cases} x = a/2 + (a/2)\cos t \\ y = (a/2)\operatorname{sen} t, \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \Big[\frac{a^2}{4}(1+\cos t)\operatorname{sen} t + \frac{a}{2}(1+\cos t) + \frac{a}{2}\operatorname{sen} t\Big]\cdot\Big(-\frac{a}{2}\operatorname{sen} t\Big)\,dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \Big[\frac{a^2}{4}(1+\cos t)\operatorname{sen} t + \frac{a}{2}(1+\cos t) - \frac{a}{2}\operatorname{sen} t\Big]\cdot\Big(\frac{a}{2}\cos t\Big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{a^3}{8}(1+\cos t)\cdot\operatorname{sen}^2 t - \frac{a^2}{4}(1+\cos t)\cdot\operatorname{sen} t - \frac{a^2}{4}\operatorname{sen}^2 t \\ &\quad -\frac{a^3}{8}(1+\cos t)\cdot\operatorname{sen} t\cos t - \frac{a^2}{4}(1+\cos t)\cdot\cos t + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} t\cos t\Big]dt \\ &= -\frac{\pi a^2}{8}(a+4). \end{aligned}$$

Si queremos aplicar el teorema de Green, llamamos $D$ al interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$. Tenemos así,

$$I = \iint_D [-(y+1) - (x+1)]\, dxdy = \iint_D (-x - y - 2)\, dxdy.$$

Para resolver la integral, hacemos el cambio a coordenadas polares, $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, con lo que:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_0^{a\cos v} u(-u\cos v - u \operatorname{sen} v - 2)\, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[ -\frac{a^3}{3}\cos^4 v - \frac{a^3}{3}\cos^3 v \operatorname{sen} v - a^2\cos^2 v \Big]\, dv = -\frac{\pi a^2}{8}(a+4). \end{aligned}$$

---

9. Calcular $\displaystyle\int_\Gamma y^2\, dx + (x+y)^2\, dy$, siendo $\Gamma$ el triángulo $ABC$ de vértices $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$, con $a > 0$. ¿Se cumple la fórmula de Green?

**Solución**

Como la curva $\Gamma$ es regular a trozos y la función $F(x,y) = (y^2, (x+y)^2)$ es diferenciable, puede aplicarse el teorema de Green. Así pues,

$$I = \iint_D (2(x+y) - 2y)\, dxdy,$$

donde $D$ es el interior del triángulo dado. Por tanto,

$$I = \int_0^a dx \int_{a-x}^a 2x\, dy = \int_0^a 2x(a - a + x)\, dx = \frac{2a^3}{3}.$$