Ley de Gauss y Potencial Eléctrico

Material de Apoyo para el Curso de Física II (ICF-190)

Ley de Gauss

PROBLEMA RESUELTO 1

Un cascarón esférico de radio a tiene carga total $+Q$ distribuída uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico dentro y fuera del cascarón

Solución

La distribución de carga es de simetría esférica y la densidad de carga está dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{1}$$

donde A es el área del cascarón esférico.

Debido a la geometría del cascarón, campo eléctrico $\vec{E}$ tiene dirección radial y hacia fuera, como muestra la Fig. 1

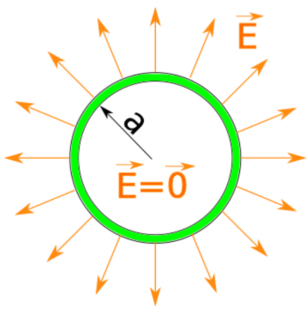


Fig. 1: *Campo eléctrico de un cascarón esférico de radio* a.

Para resolver, dividiremos el problema en dos regiones $r \leqslant a$ y $r \geqslant a$, y utilizaremos la ley de Gauss dada por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \tag{2}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie gaussiana que estemos considerando.

Caso 1: $r \leqslant a$

Como superficie gaussiana escogemos una esfera de radio $r \leqslant a$

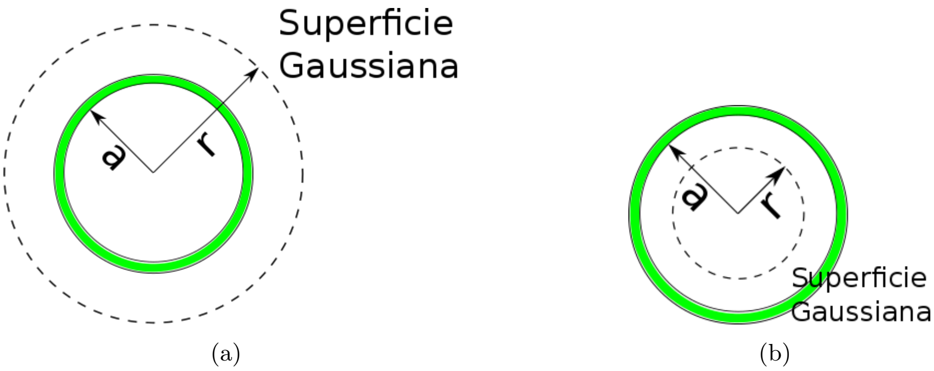


Fig. 2: *Superficies Gaussianas para calcular el campo eléctrico del cascarón de radio a*

La carga encerrada por la superficie gaussiana es $Q_{enc} = 0$, porque la carga se encuentra sobre la superficie del cascarón esférico. Así, la ecuación de la ley de Gauss nos queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{0}{\epsilon_0} \tag{3}$$

De esto, concluimos que

$$\vec{E} = \vec{0}, \qquad r \leqslant a \tag{4}$$

Caso 2: $r \geqslant a$.

Para este caso, escogemos una superficie gaussiana que encierre la superficie de carga, como muestra la Fig.**??**. En este caso, la carga encerrada por la superficie gaussiana es toda la carga del cascarón, es decir

$$q_{enc} = Q \tag{5}$$

Como el campo eléctrico va en la misma dirección que el vector normal a la superficie gaussiana, dentro de la integral de la ley de Gauss sólo nos quedan las magnitudes de estas cantidades vectoriales. Además, el campo eléctrico es constante en la superficie, por lo que puede salir de la integral.

Entonces

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} && (6)\\
E \oint dS &= \frac{Q}{\epsilon_0} && (7)\\
E(4\pi r^2) &= \frac{Q}{\epsilon_0} && (8)\\
E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} && (9)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad r \geqslant a \tag{10}$$

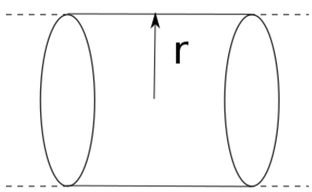
Para comprobar que nuestra solución es correcta, recordemos que el campo eléctrico es una función vectorial continua, por lo que el valor $r = a$ debe ser el mismo ya sea con el campo calculado en la caso 1 o en el caso 2.

Así

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \leqslant R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1

Considere un cilindro infinito cargado de radio R, como muestra la figura. La densidad de carga del cilindro está dada por $\rho(r) = br \;\; r < R$, donde r es la distancia desde el eje del cilindro y b es una constante. Encuentre el campo eléctrico debido a esta distribución en todo punto del espacio.



Solución

Como la distribución define dos regiones del espacio, utilizamos en cada una de estas regiones la Ley de Gauss.

Para la región $r \leqslant R$, escogemos un cilindro de radio r y largo l. Con esto, calculamos el flujo que atraviesa a nuestra sección gaussiana. En este caso, sólo tendremos flujo por el manto del cilindro y no en las tapas, debido a que en estas últimas, el vector campo eléctrico es perpendicular al vector normal a la superficie gaussiana. Entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(2\pi r l) \tag{11}$$

Como la densidad de carga no es uniforme, se debe calcular la carga encerrada por la superficie gaussiana.

$$Q_{enc} = \int_0^r \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dz dr = \frac{2\pi l b r^3}{3} \tag{12}$$

Así, con y , la ley de Gauss nos queda

$$E(2\pi r l) = \frac{2\pi l b r^3}{3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{br^2}{3\epsilon_0}\hat{r} \qquad r \leqslant R \tag{13}$$

Para la región $r \geqslant R$, escogemos un cilindro de radio r y longitud l. Nuevamente, sólo el manto del cilindro aportará en la ley de Gauss, entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(2\pi r l) \tag{14}$$

Ahora, la carga encerrada por la superficie gaussiana es toda la contenida en el cilindro de radio r y largo l, así

$$Q_{enc} = \int_0^R \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dz dr = \frac{2\pi l b R^3}{3} \tag{15}$$

Así, con y , la ley de Gauss nos queda

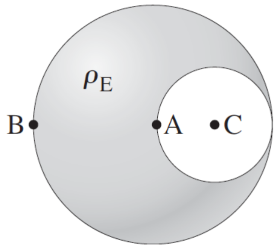
$$E(2\pi r l) = \frac{2\pi l b R^3}{3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{bR^3}{3\epsilon_0 r}\hat{r} \qquad r \geqslant R \tag{16}$$

Finalmente, tenemos

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{br^2}{3\epsilon_0}\hat{r} & \text{si } r \leqslant R \\ \frac{bR^3}{3\epsilon_0 r}\hat{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

PROBLEMA DESAFIO 1.1

Una esfera de radio r_0 tiene una densidad de carga volumétrica . Dentro de la esfera se perfora una cavidad esférica de radio $r_0/2$ y se deja hueca, como se muestra en la figura. Los puntos A y C están en el centro de sus respectivas esferas. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos A y B. Considere que la densidad de carga de la cavidad es $-\rho$.



PROBLEMA DESAFIO 1.2

Dos largas placas planas de metal están separadas una distancia que es muy pequeña comparada con su largo y su ancho. A los conductores se les imparten cargas opuestas con densidad de carga uniforme $\pm\sigma$. Ignore los efectos de borde y con base en la ley de Gauss demuestre

a) que para puntos lejanos de los bordes el campo eléctrico entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0$

b) que en cualquier lado afuera de las placas el campo eléctrico es cero.

c) ¿Cómo cambiarían sus resultados si las dos placas fueran no conductoras?

Potencial eléctrico

PROBLEMA RESUELTO 2

Un cáscarón esférico grueso de radio interno a y radio externo b, tiene una densidad volumétrica de carga $\rho(r) = C/r^2$, donde $C > 0$ es una constante. Si se considera que $V(\infty) = 0$, determine el potencial en el centro del cascarón.

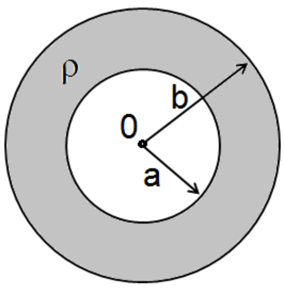


Fig. 3: *Cascarón esférico con densidad de carga* $\rho(r) = C/r^2$.

Solución

Para resolver este problema primero debemos obtener el campo eléctrico en cada región determinada por el cascarón. Para obtener el campo utilizaremos la Ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \tag{17}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie gaussiana que estemos considerando.

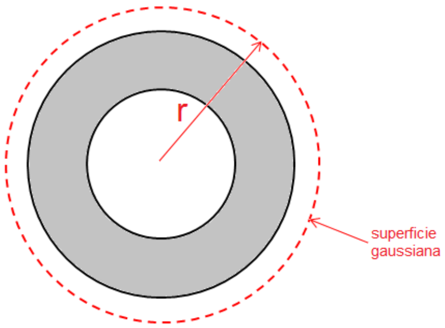


Fig. 4: *Superficie gaussiana de radio $r > b$, que encierra toda la carga del cascarón.*

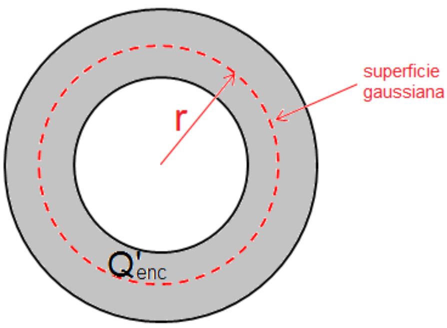


Fig. 5: *Superficie gaussiana de radio $r < b$, que encierra una carga Q'_{enc}.*

Región I, donde $r \geqslant b$:

$$Q_{enc} = 4\pi \int_a^b \rho(r) r^2 dr = 4\pi \int_a^b \frac{C}{\cancel{r^2}} \cancel{r^2} dr = 4\pi C(b-a) \tag{18}$$

(note que, en este caso, la superficie gaussiana encierra toda la carga del cascarón).

Por otro lado

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint dS = E 4\pi r^2, \tag{19}$$

donde $\oint dS$ es el área de la superficie gaussiana y r su radio.

Reemplazando (18) y (19) en (17) obtenemos

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}(b-a), \tag{20}$$

es decir el módulo del campo eléctrico es

$$E(r) = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}, \tag{21}$$

y como su dirección es radial, lo escribimos como vector y usamos el subíndice I para indicar la región

$$\vec{E}_I(r) = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}\ \hat{r}, \tag{22}$$

Región II, $a \leqslant r \leqslant b$:

$$Q'_{enc} = 4\pi \int_a^r \rho(r) r'^2 dr' = 4\pi \int_a^r \frac{C}{\cancel{r'^2}} \cancel{r'^2} dr' = 4\pi\rho(r-a). \tag{23}$$

(note que utilizamos r' para no confundirla con r que es el radio de la superficie gaussiana).

Por lo tanto obtenemos que

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}(r-a), \tag{24}$$

es decir

$$\vec{E}_{II}(r) = \frac{C(r-a)}{\epsilon_0\, r^2}\ \hat{r}, \tag{25}$$

Región III, $r \leqslant a$:

$Q_{enc} = 0$

Por lo tanto el campo eléctrico $\vec{E}_{III}(r)$ en esta región es cero.

Para obtener el potencial en el punto 0, utilizamos la expresión

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot dr\hat{r}, \tag{26}$$

es decir,

$$V(0) = -\int_\infty^0 \vec{E} \cdot dr\hat{r} = -\int_\infty^b \vec{E_I} \cdot dr\hat{r} - \int_b^a \vec{E_{II}} \cdot dr\hat{r} - \int_a^0 \vec{E_{III}} \cdot dr\hat{r}. \tag{27}$$

Ahora resolvemos cada una de las integrales

$$V(0) = -\int_\infty^b \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2} dr - \int_b^a \frac{C(r-a)}{\epsilon_0\, r^2} dr - \int_a^0 0\, dr. \tag{28}$$

Resolviendo

$$V(0) = \left[\frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, b}\right] - \left[\frac{C}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, b}\right] - [0] \tag{29}$$

Por lo tanto

$$V(0) = \frac{C}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{30}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 2

Una varilla cargada uniformemente, tiene una carga Q y ha sido doblada de modo que forma un semicírculo de radio R. Encuentre el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta el centro del semicírculo.

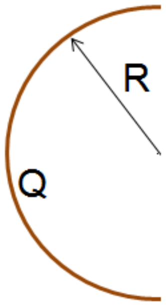


Fig. 6: *Semicírculo de radio R y carga Q.*

Solución

Para obtener trabajo que hace un agente externo para traer una carga q desde infinito al centro del semicírculo debemos utilizar:

$$W_{\infty \to centro} = \Delta U = q\Delta V = q(V_{centro} - V(\infty)) \tag{31}$$

Obtenemos el potencial en el centro integrando sobre el semicírculo:

$$V_{centro} = \int K_e \frac{dq}{R} = K_e \int_0^{\pi} \left(\frac{Q}{\pi R}\right) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} d\theta = K_e \frac{Q}{R} \tag{32}$$

donde

$$dq = \lambda dl = \left(\frac{Q}{\pi R}\right) R d\theta. \tag{33}$$

Por lo tanto

$$W_{\infty \to centro} = K_e \frac{q\,Q}{R} \tag{34}$$

PROBLEMA DESAFIO 2.1

Un aro cargado uniformemente de radio R, tiene una carga Q. Encuentre el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta el centro del aro. Compare este resultado con el obtenido en el Problema semi-resuelto 2, también compare con el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta una distacia R de una carga Q.

PROBLEMA DESAFIO 2.2

Un cilindro sólido de longitud infinita tiene un radio y una densidad volumétrica de carga $\rho = Ar$, donde $A > 0$ es una constante. Encuentre el trabajo que hace el campo eléctrico producido por el cilindro, para llevar una carga q desde una distancia $2R$ hasta una distancia $4R$, ambas respecto del centro de cilindro .