Ciencias de la Computación II

Máquinas de Turing

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

23 de noviembre de 2016

1. Máquinas de Turing

2. Aceptación de Lenguajes

3. Computabilidad

Introducción

Al introducir el autómata de pila, extendimos el alcance de aceptación de los autómatas finitos debido a la consideración de la pila que entrega la posibilidad de recordar características de las cadenas. La desventaja de la pila es que muy restrictiva en cuanto al acceso de la información ya que sólo se acota a la cima de la pila. Si queremos acceder a datos que se encuentran por debajo de la cima, debemos borrar lo que está por encima. Éste no es un problema de memoria, sino de organización.
Ante estos hechos, se introduce un tercer dispositivo de reconocimiento de lenguajes que permite recorrer la pila, es decir, consultar los datos por debajo de la cima sin necesidad de borrar los otros.

Máquinas de Turing

La organización de memoria de este tipo de Máquinas consiste en una colección de celdas de almacenamiento que se extiende infinitamente en ambas direcciones (esencialmente en una cinta infinita). Estas celdas almacenan un único símbolo. A los contenidos de las celdas se puede acceder en cualquier orden, mediante una cabeza de lectura/escritura que puede moverse sobre la cinta y por cada movimiento leerá o escribirá un símbolo.

Máquinas de Turing

Una **Máquinas de Turing** es una 7-upla, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, \bar{b}, F, \delta)$ donde

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un alfabeto de entrada.
- Γ es un alfabeto llamado alfabeto de la cinta.
- $s \in Q$ es el estado inicial o de partida.
- $\bar{b} \in \Gamma$ es el símbolo blanco (y no está en Σ).
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales o de aceptación.
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ es una *función parcial* que se llama función de transición.

Observaciones

- La definición de una Máquina de Turing requiere que $\bar{b} \notin \Sigma$.
- Se permite que $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\bar{b}\}$.
- δ transforma pares (q, σ) formados por el estado actual y los símbolos de la cinta en ternas de la forma (p, t, X) donde p es el estado siguiente, t es el símbolo escrito en la cinta y X es un movimiento de lectura/escritura que puede ser L o R, según que el movimiento sea hacia la izquierda o hacia la derecha.
- Una función parcial no está necesariamente definida para todo elemento del conjunto de que se realiza la transformación.

Sobre el criterio de paro

- Si $\delta(q, a)$ está indefinido y la configuración de la máquina de Turing es $(q, w_1\underline{a}w_2)$, es imposible que pase a otra. En este caso, se dice que la máquina está *parada*.
- Por convención, no se define ninguna transición para cualquier estado $q \in F$, de modo que la máquina de Turing se parará siempre que llegue a un estado final.
- La secuencia de todos los movimientos que conducen a una configuración de parada se llama **computación**.
- Hay máquinas de Turing que se desplazarán sobre la cinta por tiempo indefinido con la cabeza de lectura/escritura. Se dice que la máquina se encuentra en un "bucle infinito".

Notaciones

El movimiento sobre la cinta de se representa a través de dos tipos de notaciones.

1. Se representa la configuración como un par $(q_i, w_1\underline{\Sigma}w_2)$, donde q_i es el estado actual, w_1 es la cadena de la cinta que precede a la celda sobre la que se encuentra la cabeza de entrada/salida y $\underline{\sigma}$ es el símbolo de la cinta sobre el que se encuentra la cabeza de entrada/salida y w_2 es la cadena que hay a continuación de la cabeza de entrada/salida.
2. Se representa la configuración $(q_i, wa_k u)$ con una cadena del tipo $a_1 a_2 ... a_{k-1} q_i a_k ... a_n$; es decir, la cabeza de entrada/salida se coloca sobre la celda que contiene a_k y el estado actual es q_i.

Las configuraciones de una Máquina de Turing se conoce como *descripciones instantáneas* (DIS).

Aceptación de Lenguajes

La forma en que una Máquina de Turing acepta una palabra es colocando tal cadena w en la cinta y posteriormente situando la cabeza de lectura/escritura sobre el símbolo del extremo izquierdo de la cadena y se pone en marcha la máquina a partir de su estado inicial. De esta forma, w es aceptada si, después de una secuencia de movimientos, la máquina de Turing llega a un estado final y para.

Lenguajes Aceptado

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, s = q_1, \bar{b}, F, \delta)$ una máquina de Turing. Entonces el *lenguaje aceptado* por M es

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* | q_1 w \rightarrow^* w_1 p w_2 \quad para \quad p \in F \quad y \quad w_1, w_2 \in \Sigma^*\}$$

Para rechazar una cadena que no es aceptable, se debe evitar que la máquina se detenga en un estado que no es de aceptación. Obsérvese también que si la Máquina de Turing entra en un bucle infinito, no se puede llegar a un estado final, de modo que otra manera de rechazar una cadena es entrar en un bucle infinito.

Un lenguaje que es aceptado por una máquina de Turing se conoce como *lenguaje recursivamente enumerable*. El término enumerable proviene de que dichos lenguajes son aquellos cuyas cadenas pueden ser listadas (enumeradas) por una máquina de Turing. Esta clase de lenguajes es bastante grande, incluyendo los lenguajes independientes del contexto.

Computabilidad

- Como una Máquina de Turing puede leer y escribir sobre su cinta, entonces puede convertir la cadena de entrada en una cadena de salida.
- Se supone que la entrada para la máquina de Turing está formada por todos los símbolos de la cinta que no son blancos.
- La salida está formada por cualquiera de los símbolos que queden en la cinta cuando la computación termina.
- Las máquinas de Turing pueden ser consideradas como la implementación de una función de f definida mediante $f(w) = u$ cuando se cumple $q_s w \rightarrow^* q_f u$ donde q_s es el estado inicial y q_f es un estado final.