Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Bitácora de aula: La Integral

1. Introducción

En el Cálculo Diferencial se aborda el problema de hallar la derivada o la diferencial de una función dada. En el cálculo integral el problema que se plantea es precisamente el **inverso**, es decir, partiendo del conocimiento de la derivada o de la diferencial de una función se determina dicha función.

1.0.1. Incremento de una función

Actividad 1 *Dada $y = x^2$ se quiere saber qué relación existe entre el cambio de la variable independiente x y el cambio en la variable dependiente y.*

1. Si $x = 3$, entonces $y =$
2. Si $x = 4$, entonces $y =$
3. De este modo, si x cambia en una unidad (de 3 a 4), entonces y cambia unidades.
4. Si x cambia de 4 a 5, entonces y cambia unidades.

Vamos a encontrar una especie de fórmula que muestre esa relación de cambios.

Definición 1.1 *Al cambio que sufre la variable independiente x se llama* **incremento** *de x, se anota Δx. El respectivo cambio que sufre la variable dependiente y se llama* **incremento** *de y, se escribe Δy.*

Estamos trabajando $y = x^2$.

Al principio, cuando $x = 3$ es $y = 9$. Al final, cuando $x = 4$ es $y = 16$. El cambio que sufre la función es

$$(3+1)^2 - 3^2 = 7 = \Delta y$$

Análogamente, cuando $x = 4$ es $y = 16$, y cuando $x = 5$ es $y = 25$. El cambio que sufre la función es

$$(4+1)^2 - 4^2 = 9 = \Delta y$$

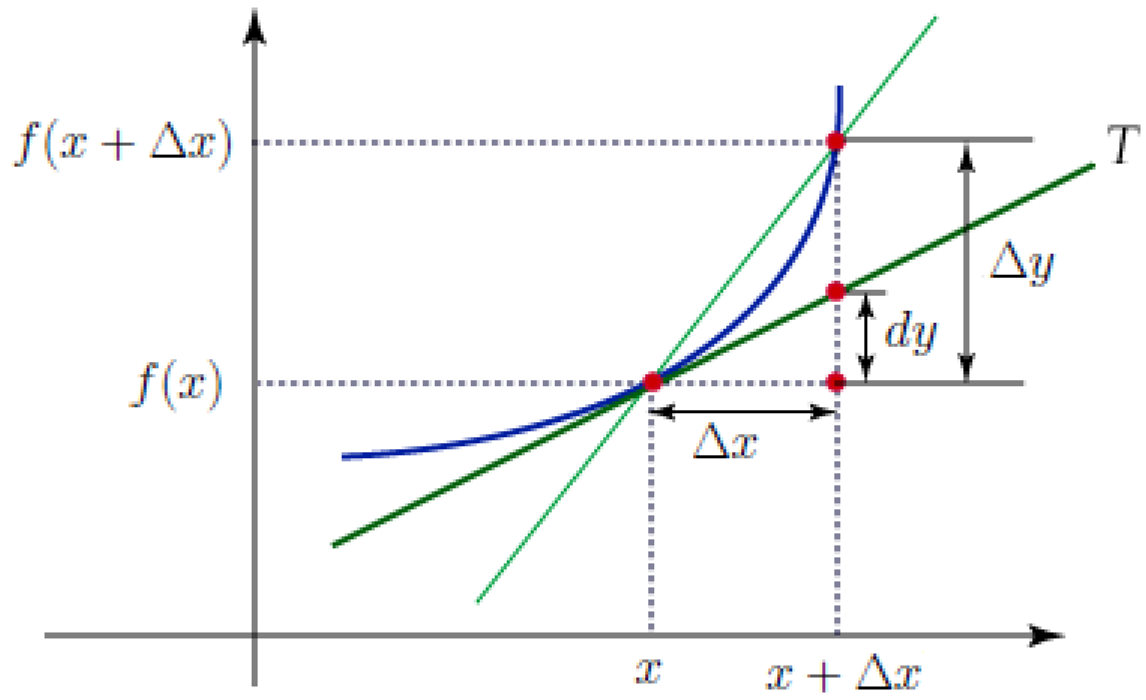
Al generalizar;

$$(x+\Delta x)^2 - x^2 = \Delta y$$

de modo que

$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

Δy representa el cambio en la altura de la curva $y = f(x)$. Ver figura.



Si la curva que representa f es creciente, Δy es positivo. Si f es decreciente Δy es negativo ¿en que caso $\Delta y = 0$?

1.0.2. Diferencial de una función

Si f es una función derivable en un punto cualquiera x, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Si Δx es suficientemente pequeño, podemos escribir

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \sim f'(x)$$

de lo cual

$$f(x+\Delta x) - f(x) \sim f'(x)\,\Delta x$$

O bien,

$$f(x+\Delta x) \sim f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

Con esto estamos diciendo que, en un entorno de x, podemos calcular de forma aproximada el valor de $f(x+\Delta x)$ utilizando el valor de f en el punto x, la derivada en x y un pequeño incremento Δx de la variable x.
La expresión

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

recibe el nombre de **diferencial** de la función f en el punto x. Si hacemos $\Delta x = dx$, la diferencial de la función se denota como

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

dx recibe el nombre de diferencial de x y corresponde al incremento que sufre la variable independiente.

La diferencial dy representa la variación en y a lo largo de la recta tangente cuando x varía en una cantidad Δx. La figura anterior muestra df y Δf.

Actividad 2 *Sea $f(x)=x^2$, si el argumento x varía de 3 a 3,1, entonces la variación exacta que experimenta la función es*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

lo que para $f(x)=x^2$ equivale a

$$f(3,1) - f(3) = 0,61$$

Un valor aproximado lo hallamos usando la fórmula recién establecida. Se tiene

$$f(3+0,1) \sim f(3) + f\,'(3)\cdot 0,1 = 0{,}6$$

se observa que el error en la aproximación es $0,01$.

Actividad 3 *Aproxima $\sqrt{5}$ considerando la función $f(x)=\sqrt{x}$.*

Observación 1.2 *Si bien, en el contexto de la derivada, la expresión $\frac{dy}{dx}$ no fue pensada como un cociente, con la noción de diferencial es posible dar sentido a dy y a dx en forma separada, teniéndose que la derivada de la función f en el punto x es igual a la razón de la diferencial de la función respecto a la diferencial del argumento en el punto. Esto, de paso, permite justificar la conocida notación de Leibnitz para derivadas*

$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x)$$

y su generalización a la derivada $n-$ ésima

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

***Actividad** **4** Verifica que la diferencial d^4y de la función $y = sen 2x$ es $d^4y = 16 sen 2x\, d^4x$*

El proceso de hallar $f\,'(x)$ a partir de $f(x)$ se conoce con el nombre de derivación. La integración consiste en que dada una función $f(x)$ se deben buscar las funciones $F(x)$ tales que $F\,'(x) = f(x)$. Este es el problema que pasamos a estudiar.

***Definición 2.1** Una función F se llama **primitiva** o **antiderivada** de la función f, si $F\,'(x) = f(x)$*

*Una función con derivada x^2 es $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Es claro que una función primitiva **no es única**, ya que por ejemplo*

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - 7, \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$$

también son primitivas de $f(x) = x^2$. Este hecho conduce a un primer resultado interesante

***Teorema 2.2** Si F_1 y F_2 son primitivas de f, entonces su diferencia es una constante*

Para probar esto, suponemos que la diferencia de las primitivas es

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$$

siendo $\varphi(x)$ una función. Al derivar, respecto de x, se tiene que

$$F\,'_1(x) - F\,'_2(x) = \varphi\,'(x) = 0$$

pues, F_1 y F_2 son primitivas de f, esto es, satisfacen que

$$F\,'_1(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F\,'_2(x) = f(x)$$

Por tanto, se sigue que $\varphi(x) = c$, una constante. En consecuencia

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

***Definición 2.3** Si F es primitiva de la función f, entonces $F(x)+c$ se llama **integral indefinida** de f. Se anota*

$$F(x) + c = \int f(x)\, dx$$

*$f(x)$ se denomina **integrando**, $f(x)\cdot dx$ **elemento de integración** y $\int$ es el **signo de integración**.*

2. Integral indefinida

2.0.3. Integrales Inmediatas

Se verifican de inmediato, por un proceso de derivación, las siguientes integrales:

- $\int dx = x + c$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\, x + c$
- $\int sen\, x\, dx = -cos\, x + c$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int cos\, x\, dx = sen\, x + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln\, a} + c$
- $\int tg\, x\, dx = -\ln\, cos\, x + c$
- $\int sec^2\, x\, dx = tg\, x + c$
- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\, \frac{x}{a} + c$
- $\int csc^2\, x\, dx = -ctg\, x + c$
- $\int sec\, x\, dx = \ln(sec\, x + tg\, x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen\, \frac{x}{a} + c$
- $\int csc\, x\, dx = -\ln(csc\, x + ctg\, x) + c$

2.0.4. Propiedades de la integral

La siguiente proposición da a conocer como se relacionan la integral indefinida con la diferencial.

Proposición 2.4 *Sea F función primitiva de f, entonces*

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right) = f(x)$
2. $\displaystyle\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int (\,f(x)+g(x)\,)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2.0.5. Técnicas de integración

Para el cálculo de integrales no inmediatas se usan métodos, tales como los siguientes:

2.1 Método de sustitución

Este método de cálculo sirve para "simplificar" integrandos, en el sentido de que una sustitución de variable haga la integral que se está calculando semejante a una integral básica.
En la práctica este método opera facilmente. Sólo se debe tener presente que el integrando corresponda a una función compuesta, y que al tomar una sustitución, la diferencial de ella esté presente en el integrando, salvo el producto por una constante.

Actividad 5 *Para hallar* $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+5}$. *Sea* $z = 3x+5$, $dz = 3dx$.

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\ln\,z = \frac{1}{3}\,\ln(3x+5)+c$$

Actividad 6 *Hallar:*

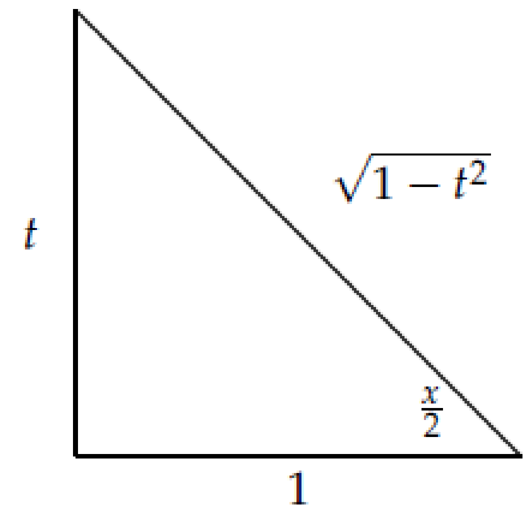
1. $\displaystyle\int (2x-3)^{1/2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+2x^2}}$
4. $\displaystyle\int cos\,5x\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{sen^2 3x}$
6. $\displaystyle\int x\,sen\,(5x^2)\,dx$
7. $\displaystyle\int sen^3\,x\cdot cos\,x\,dx$
8. $\displaystyle\int x\,\ln(x^2+1)\,dx$

2.1.1. Integrales trigonométricas

Se consideran ahora ciertas integrales, cuyos integrandos son funciones trigonométricas, los cuales requieren de sustituciones ad - hoc. Dentro de este grupo se encuentran:

Integral de la forma: $\boxed{\int R(sen\,x, cos\,x)\,dx}$

En este caso R es una función racional que contiene expresiones senos y cosenos. La sustitución $tg\,\dfrac{x}{2} = t$, transforma el integrando en una función racional en la variable t. Para determinar la equivalencia en la nueva variable t, de las funciones seno y coseno del ángulo, se utiliza un triángulo como el que indica la figura



Actividad 7 *A partir de* $tg\,\dfrac{x}{2} = t$, *halla* $\operatorname{sen} x, \cos x$ *y* dx.

Actividad 8 *Calcular:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+sen\,x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-sen^2 x}$

NOTA ▷: Si $R(sen\,x, cos\,x) = R(-sen\,x, -cos\,x)$, es decir, si el integrando es par, entonces la sustitución $tg\,x = t$ conduce a

$$sen\,x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad cos\,x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Integral de la forma: $\boxed{\int sen^m x\, cos^n x\,dx \quad m,n \text{ enteros}}$

En este tipo de integrales se debe tener en cuenta la paridad o imparidad de m y n.

- **Caso impar**

La función que sea impar, se descompone en factor de grado 1 por el factor restante.

Actividad 9 *Hallar* $\displaystyle\int cos^3 x\, sen^{-4} x\,dx$.

La función coseno tiene exponente impar $n = 3$. Luego,

$$\begin{aligned}\int cos^3 x\, sen^{-4}x\,dx &= \int cos^2 x\, cos\,x\, sen^{-4}x\,dx\\ &= \int (1-sen^2 x)\,cos\,x\,sen^{-4}x\,dx\end{aligned}$$

Ahora usas $sen\,x = t \Longrightarrow dt = cos\,x\,dx$ y resuelves.

Actividad 10 *Hallar:*

- $\displaystyle\int sen^3 x\, cos^2 x\,dx$
- $\displaystyle\int sen^3 x\, cos^3 x\,dx$
- $\displaystyle\int sen^2 x\, cos^5 x\,dx$
- $\displaystyle\int sen^5 x\, cos^5 x\,dx$

- **Caso par**

En este caso se usan las identidades:

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\,(1-\cos\,2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1+\cos\,2x)$

Actividad 11 *Calcular* $\int cos^4 x\,dx$

- **caso** m y n **enteros pares** (uno de ellos negativo)

Este caso lleva a usar sustitución trigonométrica.

Actividad 12 *Para hallar* $\int \frac{cos^2 x}{sen^6 x}\, dx$*, la sustitución* $tg\, x = t$ *es tal que*

$$sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\ ;\ cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Después de hacer los reemplazos pertinentes debes hallar que:

$$\int \frac{cos^2 x}{sen^6 x}\, dx = -\frac{1}{3tg^5 x} - \frac{1}{3tg^3\, x} + c$$

Integrales:

$$\boxed{\int cos\, mx\, cos\, nx\, dx,\ \int sen\, mx\, cos\, nx\, dx,\ \int sen\, mx\, sen\, nx\, dx}$$

Para calcular estas integrales, se utilizan las identidades

$$\begin{aligned} cos\, mx\, cos\, nx &= \frac{1}{2}\left(cos\,(m+n)x + cos\,(m-n)x\right) \\ sen\, mx\, cos\, nx &= \frac{1}{2}\left(sen\,(m+n)x + sen\,(m-n)x\right) \\ sen\, mx\, sen\, nx &= \frac{1}{2}\left(-cos\,(m+n)x + cos\,(m-n)x\right) \end{aligned}$$

Actividad 13 *Hallar* $\int sen\, 2x\, sen\, 3x\, dx$

Integrales:

$$\boxed{\int tg^m x\, dx,\ \int sec^m x\, dx,\ \int csc^m x\, dx,\ \int ctg^m x\, dx}$$

Para calcular este tipo de integrales, se recurre, en primer lugar, a la paridad o imparidad de m, ya que si $m = 2k+1$, se descompone la función f del integrando en la forma $f^{2k} \cdot f^1$. En caso de ser $m = 2k$, se usan las identidades $1 + tg^2 x = sec^2 x$, $1 + ctg^2 x = csc^2 x$, según corresponda.

Actividad 14 *Hallar*

1. $\int sec^4 x\, dx$
2. $\int tg^4 x\, dx$
3. $\int tg^3 x\, dx$
4. $\int ctg^3 x\, dx$

2.1.2. Sustituciones trigonométricas

Cuando el integrando presenta formas tales como

$$(a^2 \pm b^2x^2)^{m/n},\quad (b^2x^2 - a^2)^{m/n},\quad n \neq 0,\ m \neq n\ \in \mathbb{Z}$$

se usan identidad trigonométrica del tipo siguiente:

$x = \frac{a}{b}\, sen\, \theta$ para la expresión $(a^2 - b^2x^2)^{m/n}$

$x = \frac{a}{b}\, cos\, \theta$ para la expresión $(a^2 - b^2x^2)^{m/n}$

$x = \frac{a}{b}\, sec\, \theta$ para la expresión $(b^2x^2 - a^2)^{m/n}$

$x = \frac{a}{b}\, tg\, \theta$ para la expresión $(b^2x^2 + a^2)^{m/n}$

Actividad 15 *Hallar las siguientes integrales:*

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$
2. $\int \frac{x^2\, dx}{(4+x^2)^{3/2}}$
3. $\int \frac{cos\, x\, dx}{\sqrt{2 - sen^2\, x}}$
4. $\int \frac{dx}{5+x^2}$

2.1.3. Integración por partes

Este método funciona cuando se tiene un integrando que es el producto de dos o más funciones reales de clase ζ^1 (derivada continua). Tiene su origen en la diferencial de un producto de funciones.

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv\ +\ v\cdot du \Longrightarrow u\cdot dv = d(u\cdot v)\ -\ v\cdot du$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\int u\ \cdot dv = u\cdot v\ -\ \int v\cdot du}$$

Esta expresión es la que ilustra el método. El trabajo consiste ahora en la elección de la función u adecuada, la que se puede hacer de acuerdo a la sigla **LIATE**. Esto es, el mejor orden es elegir en primer lugar, funciones **L**ogaritmo, luego funciones **I**nversas trigonométricas, después funciones **A**lgebraicas, posteriormente funciones **T**rigonométricas, y finalmente, funciones **E**xponenciales. Esto, en la medida en que ellas aparezcan como parte del integrando. Se muestran algunos ejemplos para ilustrar la forma en que se eligen las funciones u y dv.

Actividad 16 *El integrando de* $\int x\, cos\, x\, dx$ *es un producto entre una función algebraica y otra trigonométrica. Por ello, y de acuerdo con la sigla* **LIATE**, *consideramos* $u = x,\ du = dx,\ dv = cos\, x\ dx,\ v = sen\, x$, *para tener*

$$\begin{aligned} \int x\, cos\, x\, dx &= x\, sen\, x\ -\ \int sen\, x\, dx \\ &= x\, sen\, x\ +\ cos\, x\ +\ c \end{aligned}$$

Actividad 17 *Hallar:*

1. $\int x^2\, e^x\, dx$
2. $\int arcsen\, x\, dx$
3. $\int e^{ax}\, sen\, bx\, dx$
4. $\int sec^3 x\, dx$ *tenemos*

2.1.4. Fracciones parciales

Sean $f(x)$, $g(x)$ polinomios, estudiamos como resolver integrales de la forma

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

Lo primero es determinar si el grado del numerador es menor que el del denominador. Si no es así, el camino que se sigue es:

1. Al dividir $f(x)$ por $g(x)$ se obtiene
$$\frac{f(x)}{g(x)} = E(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$
El polinomio $E(x)$ es de integración inmediata y el polinomio $h(x)$ es de grado menor que $g(x)$.

2. Para hallar la integral de $\frac{h(x)}{g(x)}$ se efectúa la descomposición de $g(x)$ en factores irreductibles. Estos factores pueden ser de las formas:
$$(x-\alpha)^m \quad \text{o bien} \quad (x^2+bx+c)^n,\ b^2-4ac<0$$
Es claro que α es raíz de multiplicidad m. Si existen otras raíces reales, tal como β, entonces aparece

el factor $(x-\beta)^k$. Si existen otros factores cuadráticos con raíces complejas, entonces aparece el factor $(x^2+dx+f)^r$. Por simplicidad consideremos que el polinomio $g(x)$ viene en la forma

$$g(x) = (x-\alpha)^m \cdot (x^2+bx+c)^n$$

entonces

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-\alpha)^m} +$$

$$\frac{b_1+c_1x}{x^2+bx+c} + \frac{b_2+c_2x}{[x^2+bx+c]^2} + \cdots + \frac{b_n+c_nx}{[x^2+bx+c]^n}$$

Para determinar las constantes, se halla el común denominador, luego se multiplica, iguala y resuelve.

Actividad 18 *Hallar:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$
2. $\displaystyle\int \frac{2x+1\,dx}{(x^2+2)(x-1)}$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

2.1.5. Integral de funciones irracionales

En algunos casos, la integral de una función irracional, se puede reducir mediante una sustitución adecuada a una integral de función racional.

Integrales de la forma: $\boxed{\int R\left(x^{m/n},\ x^{p/q}, \cdots, x^{r/s}\right)\ dx}$

La función R es racional, con los argumentos que se indican. La sustitución $x = z^k$, con k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}, \cdots,$ $\frac{r}{s}$, transforma esta integral en una de integrando racional en z.

Actividad 19 *Hallar* $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\,dx$

Integrales: $\boxed{\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_j/n_j}\right] dx}$

La sustitución es $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$, con k el común denominador de los números $n_1, n_2, \cdots, n_j$

Actividad 20 *Hallar* $I = \displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$

Para comparar con el tipo de integral que estamos considerando, los valores de las constantes son: $c = 0$, $d = 1$, $a = 1$, $b = 1$. Luego, la sustitución adecuada es $1+x = t^2$, con lo cual $dx = 2tdt$. Resolver.

Integrales de la forma: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

En este caso, la sustitución $z = \frac{1}{mx+n}$ reduce la integral a una que le es aplicable alguna sustitución trigonométrica.

Actividad 21 *Hallar* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$. *Usar* $z = \dfrac{1}{x+1}$

Tarea 1 *Elige el método adecuado para resolver las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int \frac{sen(3x+5)}{1+cos(3x+5)}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos^3x}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^3+3\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos^2x}\,dx$
8. $\displaystyle\int cos^5x\ sen^3\,x\,dx$
9. $\displaystyle\int 3x^6\ \sqrt{2-x^7}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$
11. $\displaystyle\int x\,\sqrt{1-x^4}\,dx$
12. $\displaystyle\int x^3\,\sqrt{1-x^4}\,dx$
13. $\displaystyle\int x^5\,\sqrt{1-x^4}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{sen\,x\ sen\,2x}$
15. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$
16. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$
17. $\displaystyle\int \frac{2^x\,dx}{1-4^x}$
18. $\displaystyle\int \frac{(8x^3+7)\,dx}{(x+1)(2x+1)^3}$
19. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$

Esto pone punto final al proceso de cálculo de integrales indefinidas. Es conveniente advertir que existen muchas y variadas integrales de gran complejidad y de difícil determinación de la función primitiva. Más aún, de las siguientes integrales, a pesar de saber con certeza que la primitiva existe, es imposible determinarla mediante un número finito de funciones elementales (con excepción de la tercera de ellas, llamada integral elíptica, cuya primitiva es calculable luego de un laborioso proceso).

$$\int e^{-x^2}\,dx\ ;\ \int \frac{sen\,x\,dx}{x}\ ;\ \int \sqrt{1-k^2\,sen^2x}\,dx\ ;\ \int \frac{dx}{\ln\,x}$$

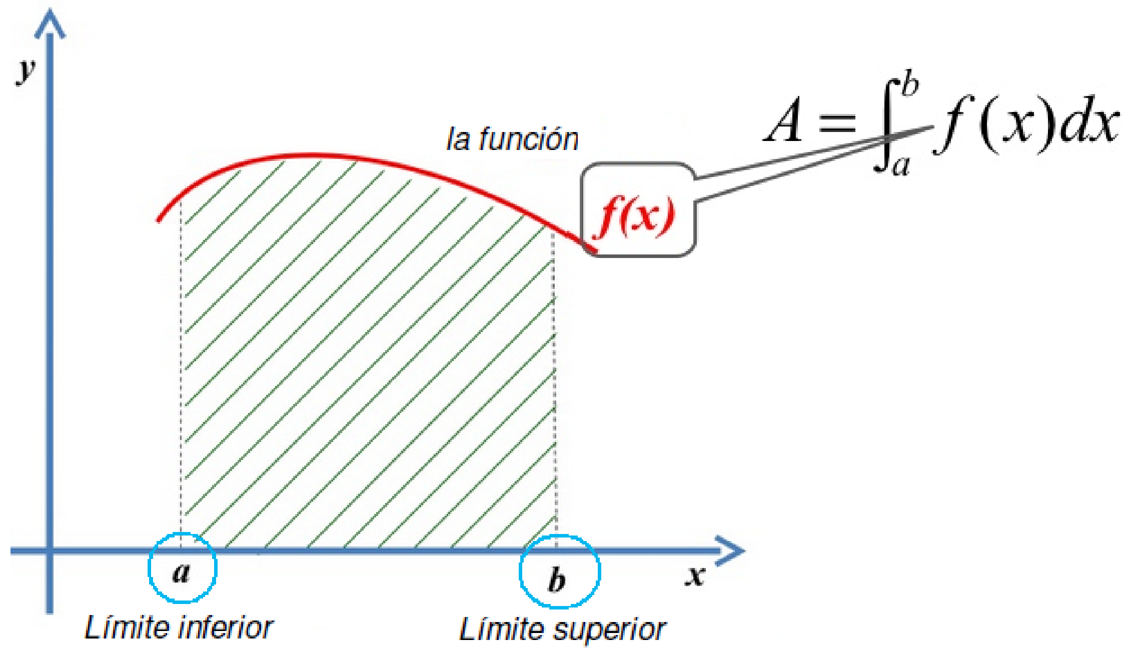
Es importante señalar que el uso actual de programas computacionales facilitan el proceso de calcular integrales, y en particular, la Internet nos ofrece el **Integrator** con el cual puedes verificar "on line" si tus cálculos de integrales están correctos. La página indicada tiene la dirección `http://integrals.wolfram.com`.

---

3. Concepto de integral definida

El área, es un concepto familiar para todos nosotros, por el estudio de figuras geométricas sencillas como el triángulo, el cuadrado, el círculo y el rectángulo. La idea o el concepto que manejamos de área, es la magnitud que mide de algún modo el tamaño de una región acotada, es decir, cuanto mide una superficie. Ciertamente, para hallar el área de las figuras geométricas sencillas que ya conocemos, disponemos de formulas matemáticas que facilitan este cálculo. Ahora, nuestro problema consiste en encontrar un método, que nos permita calcular el área de cualquier región, sin importar la forma que esta tenga.
La integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas.

Dado el intervalo $[a, b]$ en el que, para cada uno de sus puntos x, se define una función $f(x)$ que es mayor o igual que 0 en $[a, b]$, se llama integral definida de la función entre los puntos a y b al área de la porción del plano que está limitada por la función, el eje horizontal x y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.



La integral definida de la función entre los extremos del intervalo $[a, b]$ se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

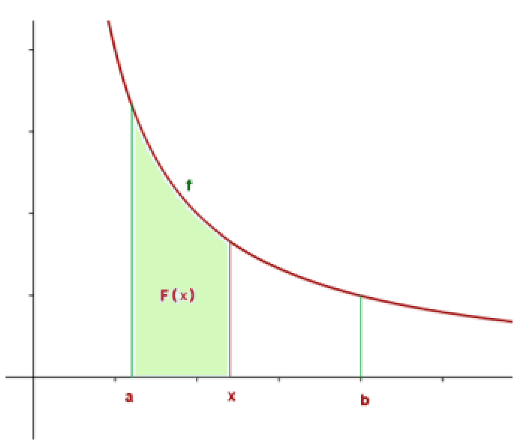
Podemos observar, sin mayores inconvenientes, que:

1. el área de una región plana es un número (real) no negativo.
2. regiones congruentes tienen áreas iguales.
3. el área de la unión de dos regiones que se superponen sólo por un segmento es la suma de las áreas de las dos regiones y
4. si una región está contenida en una segunda el área de la primera es menor o igual que el área de la segunda.

Tarea 2 *En no más de una página anota un resumen histórico del desarrollo del concepto de integral. Indica un problema que lo origina, quienes fueron importantes en su teoría. Indica la o las páginas de las cuales sacaste la información (eventualmente un libro). Debes indicar la fuente para no ser acusado de plagio.*

3.0.6. La integral definida como función

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Definimos una nueva función F dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, donde $a \leq x \leq b$. Se observa que F sólo depende de x, variable que aparece como límite superior en el cálculo de la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral es un número definido. Si hacemos que x varíe, el número también varía y define una función que depende de x.



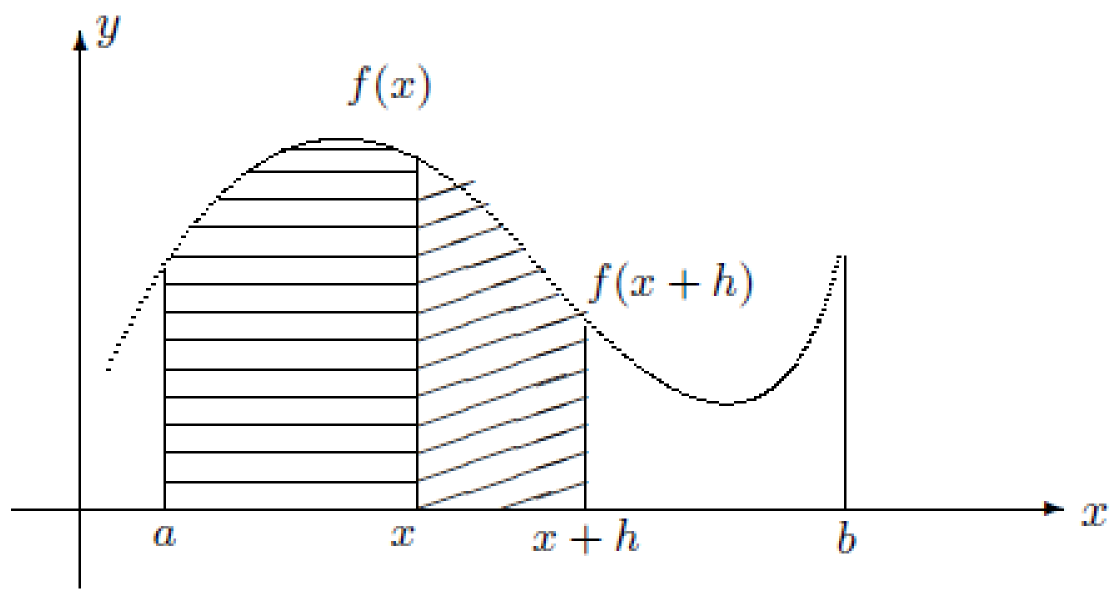
Geométricamente la función integral, $F(x)$, representa el área del recinto limitado por la curva $y = f(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = x$.

3.0.7. El teorema fundamental del cálculo

Este resultado dice que la derivación y la integración son procesos inversos. Pero además nos da una manera de calcular integrales definidas. El Teorema Fundamental del cálculo (TFC) se suele dividir en dos resultados distintos: el primer TFC y el segundo TFC.

Teorema 3.1 *(Primer TFC)*
Si f es una función continua sobre el intervalo $I = [a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, donde $a \leq x \leq b$, es derivable sobre $[a, b]$ y verifica

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in [a, b]$$



Si miras la figura, entonces le encuentras sentido a las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} F(x) &= \text{área desde } a \text{ hasta } x \\ F(x+h) &= \text{área desde } a \text{ hasta } x+h \\ F(x+h) - F(x) &= \text{área desde } x \text{ hasta } x+h \\ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\text{área desde } x \text{ hasta } x+h}{h} \end{aligned}$$

De modo que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ se puede interpretar como el área debajo de la gráfica de f desde a hasta x, donde x puede variar desde a hasta b (se debe pensar en F como la función "el área hasta").

Queremos probar que $F'(x) = f(x)$, lo que, de acuerdo a la definición de derivada, equivale a probar que

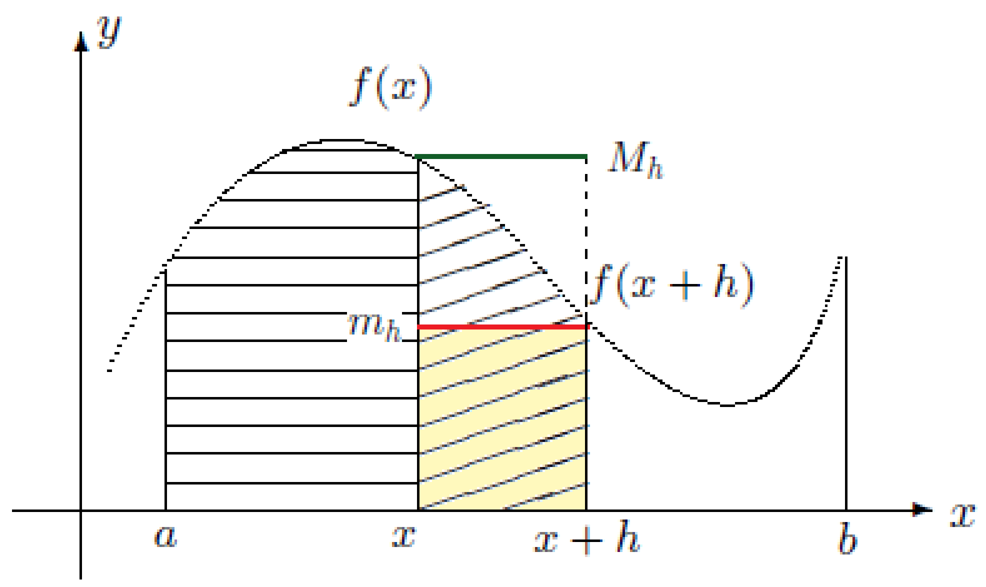
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Empezamos por traducir al lenguaje de integrales el numerador de la derivada. Se tiene

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo y un valor mínimo. Esto hace que miremos con atención el intervalo $[x, x+h]$ pues allí f es una función continua. Siendo así, decimos que M_h y m_h son este valor máximo y mínimo, respectivamente. Luego, el área bajo este intervalo satisface

$$h \cdot m_h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq h \cdot M_h$$



lo que equivale a

$$m_h \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_h$$

Usando de nuevo la continuidad de f en $[x, x+h]$, se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0} M_h = \lim_{h\to 0} m_h = f(x)$$

Ahora, por el teorema del sandwich,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

Cambiando notación se tiene:

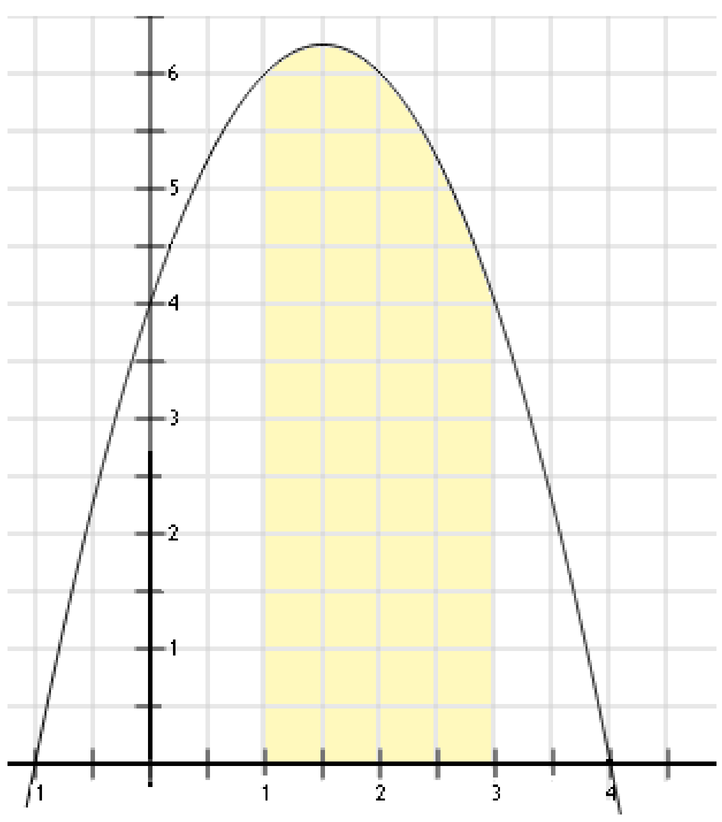
$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$$

Teorema 3.2 *(Segundo TFC)(Regla de Barrow)*
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F una primitiva cualquiera, entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Este segundo TFC nos da una manera de calcular la integral de una función en un intervalo: calculamos $F(x)$ (una primitiva de $f(x)$) y restamos los valores de F en los extremos del intervalo.

Antes de hacer la demostración abordamos el cálculo de la integral definida desde una perspectiva didáctica, con base en el concepto histórico que dió origen al concepto de la integral definida.

Actividad 22 *Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y su gráfico, calcular en forma aproximada el área sombreada.*



Anota tu valor:

Ahora vamos en la búsqueda del valor exacto. Para ello te recuerdo el Teorema del valor medio (Lagrange)

Hipótesis: $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Tesis: Existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

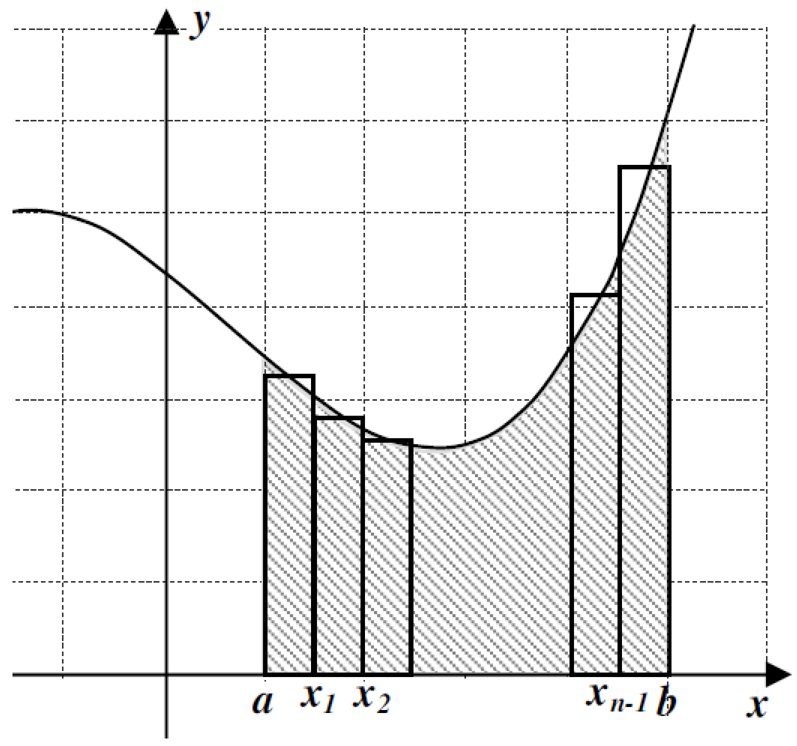
Apliquemos este teorema para una función $F(x)$ que cumpla las hipótesis de ser continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces:

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Transponiendo, la expresión anterior equivale a:

$$F'(c)(b-a) = F(b) - F(a)$$

Demostración. Regla de Barrow



Usando el primer TFC la demostración resulta sencilla, optamos por una demostración alternativa que involucra el concepto de límite de sumas de Riemann.

Queremos calcular el área de la figura limitada por la curva de ecuación $f(x)$, el eje x y las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$. Comenzamos dividiendo el intervalo $[a,b]$ en n intervalos iguales:

$$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, b]$$

La función $f(x)$ es continua y derivable en cada uno de dichos intervalos por lo que podemos aplicar el Teorema de Lagrange en cada uno de ellos. Tener en cuenta que:

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_{n-1} - x_{n-2} = b - x_{n-1}$$

Para simplificar, a cada uno de estos intervalos los llamaremos Δx.
Aplicando Lagrange, y sumamos miembro a miembro, tenemos:

$$\begin{aligned}
f(c_1)\cdot\Delta x &= F(x_1) - F(a)\\
f(c_2)\cdot\Delta x &= F(x_2) - F(x_1)\\
f(c_3)\cdot\Delta x &= F(x_3) - F(x_2)\\
&\vdots\\
f(c_{n-1})\cdot\Delta x &= F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\\
f(c_n)\cdot\Delta x &= F(b) - F(x_{n-1})\\
\hline
\sum f(c_i)\cdot\Delta x &= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Observar que se simplifican los $F(x_i)$. Además, $f(c_i)\cdot\Delta x$ es el área de un rectangulito de base Δx y altura $f(c_i)$, y por tanto, $\sum f(c_i)\cdot\Delta x$ es la suma del área de todos los rectangulitos, lo cual es una aproximación del área que deseamos calcular.
A medida que aumentamos el número de rectangulitos, nos aproximamos más al área buscada, la que obtendremos como el límite de dicha expresión.
Efectuamos por lo tanto, el límite de ambas expresiones cuando el número de intervalos tiende a infinito o lo que es lo mismo cuando $\Delta x \to 0$. Se tiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum f(c_i)\cdot\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}(F(b)-F(a))$$

El miembro de la derecha es constante, por lo que permanece invariante al límite.
Escribimos $\Delta x = dx$ para tener la diferencial de x. Además, $f(c_i)$ al tomar c_i infinitos valores, se transforma simplemente en $f(x)$, y el símbolo de una suma finita $\sum$ se lo sustituye por $\int$, símbolo de una suma infinita.
Por tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Esta fórmula es la llamada **Fórmula de Barrow**. A la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ se la llama integral definida, y los valores a y b son los límites de integración. Tenemos así una fórmula para calcular en forma exacta el área bajo una curva:

Ilustramos la regla de Barrow a continuación:

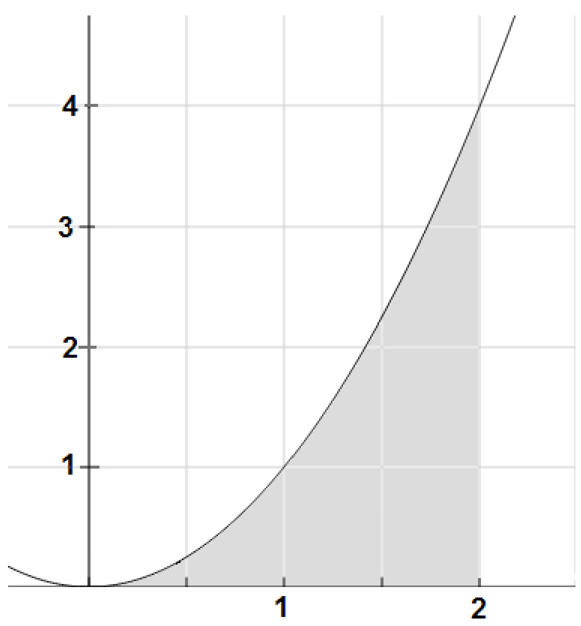
Actividad 23 *Dada la función $f(x) = -x^2+3x+4$ y su gráfico, calcular el valor exacto del área sombreada.*

Si alguien obtuvo 11,3 como valor aproximado, está bastante próximo al valor exacto que se obtiene así:

$$A = \int_1^3 (-x^2+3x+4)\,dx = 11,333$$

Actividad 24 *Hallar $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$*

La función a integrar es $f(x) = x^2$, los límites de integración son; 0 el inferior y 2 el superior. El área que estamos calculando es la que se encuentra bajo la función, sobre el eje x y entre $x = 0$ y $x = 2$, tal como lo muestra la figura siguiente:



Debemos hallar una **antiderivada** para $f(x) = x^2$. La más simple es $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Luego

$$\int_0^2 x^2\,dx = F(2)-F(0) = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{8}{3}$$

Actividad 25 *Encuentre el valor de a si se sabe que $\displaystyle\int_{-1}^1 (ax^2+(a+1)x+4)\,dx = \frac{28}{3}$. Resp. $a = 2$*

Tarea 3 *Determine el área acotada entre la curva $y = f(x) = x^2-6x+10$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$. Tu respuesta debiera ser $\frac{28}{3}$*

Ahora vemos un par de ejemplos para el teorema fundamental del cálculo (TFC).

Actividad 26 *Hallar la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^6\,dt$*

Hay dos formas de hacerlo, te muestro ambas.

usando cálculo directo Se calcula la integral

$$F(x) = \int_0^x t^6\,dt = \left(\frac{t^7}{7}\right)_0^x = \frac{x^7}{7}$$

Al derivar

$$F'(x) = x^6$$

usando el Teorema Fundamental De la lectura de este teorema de deduce que, al derivar respecto de x queda el integrando evaluado en x. Por tanto,

$$F(x) = \int_0^x t^6\,dt = x^6$$

Actividad 27 *Halla la derivada de $F(x)$ en cada caso:*

1. $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2. $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$
3. $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt$
4. $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Buscaremos la respuesta mediante el TFC. Para la primera expresión tenemos:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \Longrightarrow F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Para la segunda expresión:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt \Longrightarrow F'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Para las dos restantes tú tienes la conclusión.

Tarea 4 *Halla la derivada de $F(x)$ en cada caso:*

1. $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2. $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

3.0.8. Propiedades de la integral definida

Seguimos conectados con el área de una región y su correspondiente cálculo por integral definida. Lo que hacemos es hallar propiedades interesantes que cumple la integral definida, deducidas, varias de ellas, del hecho de corresponder al concepto de área. Se considera que las funciones f y g son integrables sobre el intervalo $[a,b]$

- Si $c \in [a,b]$ entonces $\int_c^c f(x)\,dx = 0$

  El área de un rectángulo de base cero y altura $f(x)$ es cero

- Si $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

  El área de una región sobre el eje x es un número positivo

- Si k es una constante, entonces las funciones $f+g$, $k \cdot f$ son integrables sobre $[a,b]$, y se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ \int_a^b k \cdot f(x)\,dx &= k \cdot \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

  El área de una suma es la suma de las áreas

- Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

  El área bajo la curva f es menor que el área bajo g

- Si $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

  El área del todo es la suma de las áreas de las partes

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$

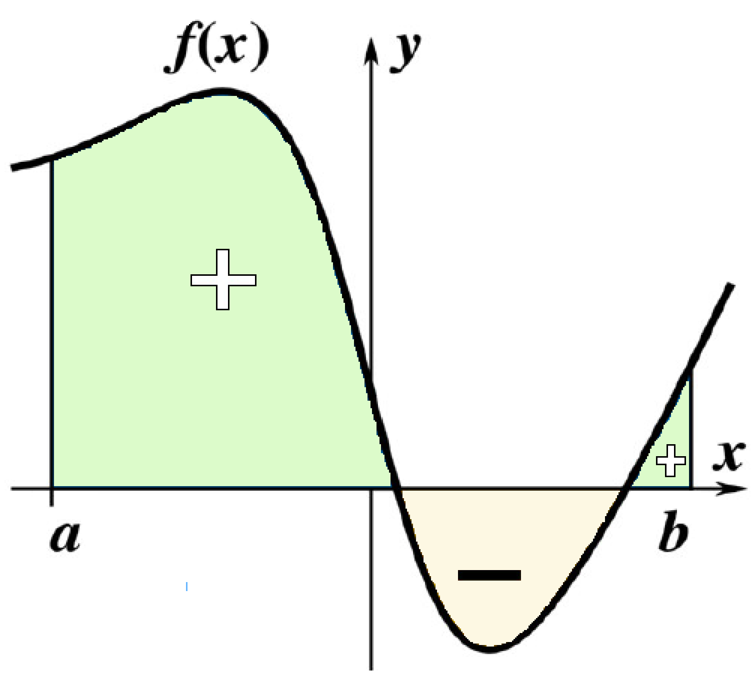
  De esto se deduce que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

  Al restar el todo de un área no queda nada

áreas negativas

Si consideramos que los recintos situados debajo del eje x tienen área negativa, entonces el proceso seguido hasta aquí es válido para funciones cualesquiera, sin imponerles la condición de que $f \geq 0$.



3.0.9. Área entre dos curvas

Por lo visto, se sabe que, si una región R está acotada por una función real positiva f, el eje x, y las rectas $x=a$, $x=b$, el área viene dada por la integral definida

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Extendemos este proceso al cálculo del área de un recinto R acotado por dos o más curvas.

- **Integración en recintos R_x**

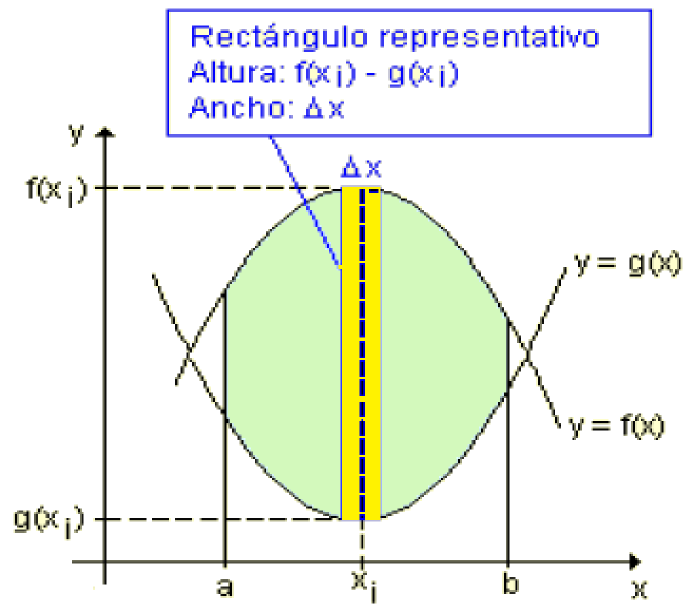
Se denomina recinto R_x a áquel en que la variable x varía entre constantes y la variable y no lo hace. Esto es,

$$R_x = \{(x,y)/\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ (recinto R_x), entonces el área A de la región R limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es

$$A(R_x) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La figura siguiente ilustra la situación



En este caso la variable de integración es x, por tanto, un rectángulo genérico dibujado en la región R tiene altura $f(x) - g(x)$ y base $\Delta x = dx$. Su "diferencial de área" es entonces, $dA = (f(x) - g(x))\,dx$. Se observa que al sumar todas estas diferenciales se obtiene el área de R. Esto es,

$$dA = (f(x) - g(x))\,dx \Longrightarrow A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Una forma fácil de recordar es la siguiente:

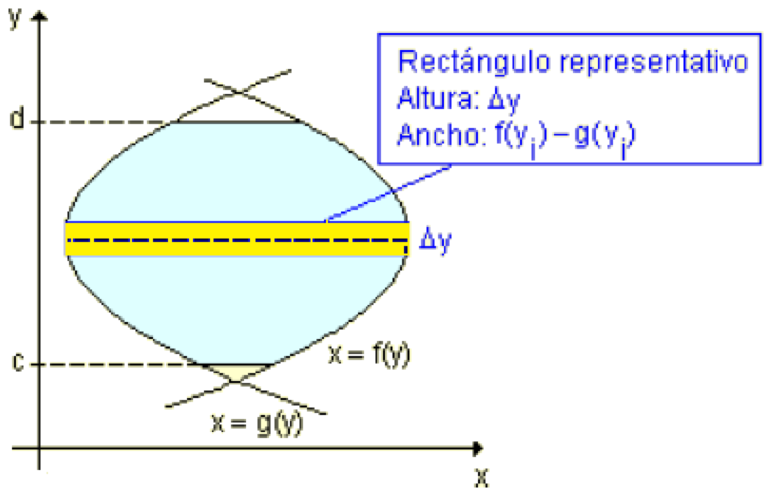
$$\text{Área} = \int_a^b [\text{ curva de arriba - curva de abajo}]$$

- **Integración en recintos R_y**

Si algunas regiones están acotadas por curvas que son funciones de y o bien se pueden trabajar mejor considerando x como función de y los rectángulos representativos para la aproximación se consideran horizontales en lugar de verticales. De esta manera, si una región está limitada por las curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas horizontales $y = c$ e $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geq g(y)$ para cada $y \in [c,d]$ (estamos sobre un recinto R_y), entonces su área resulta ser

$$A(R_y) = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

La figura siguiente ilustra la situación



Que es sencillo de recordar si anotamos:

$$\text{Área} = \int_c^d [\text{ curva derecha - curva izquierda}]$$

Un consejo, a partir de este momento, las integrales definidas que tengas que calcular son simples. Tu principal escollo es poner los límites de integración a la integral, pero, si me haces caso, te puede ir bien. Lo primero es leer el problema, hacer un bosquejo de la región, de aquí es seguro ya tienes los límites de integración.

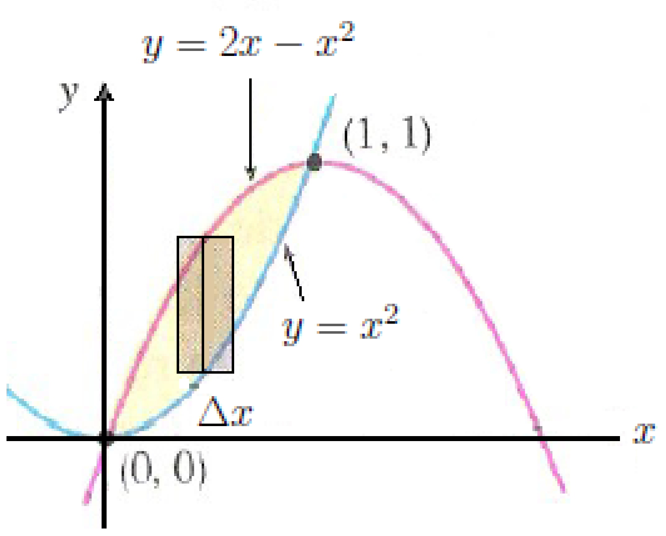
En el caso del área, no te preocupes si la región está sobre o bajo el eje x, mira solamente cual es la curva que **acota** superiormente y cual **acota** inferiormente, o bien, entre la que **acota** por la derecha y la que **acota** por la izquierda. La diferencia entre las curvas que acotan te proporciona de diferencial del área.

En algunos problemas es necesario usar una mezcla de diferenciales debido a que una curva f puede ser mayor que otra curva g en una parte del intervalo de integración y menor en otra parte de dicho intervalo. Así que ojo con esto. Otro drama común que se tiene a la hora de calcular área u otras aplicaciones tiene que ver con hallar los límites de integración. ¡**no olvidar que hay que hacer un esquema gráfico**!

Actividad 28 *Encuentra el área de la región encerrada por las parábolas* $y = x^2$ *y* $y = 2x - x^2$

Paso 1: Hallar los puntos de intersección entre las dos funciones, resolviendo sus ecuaciones simultáneamente. Se hallan que los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

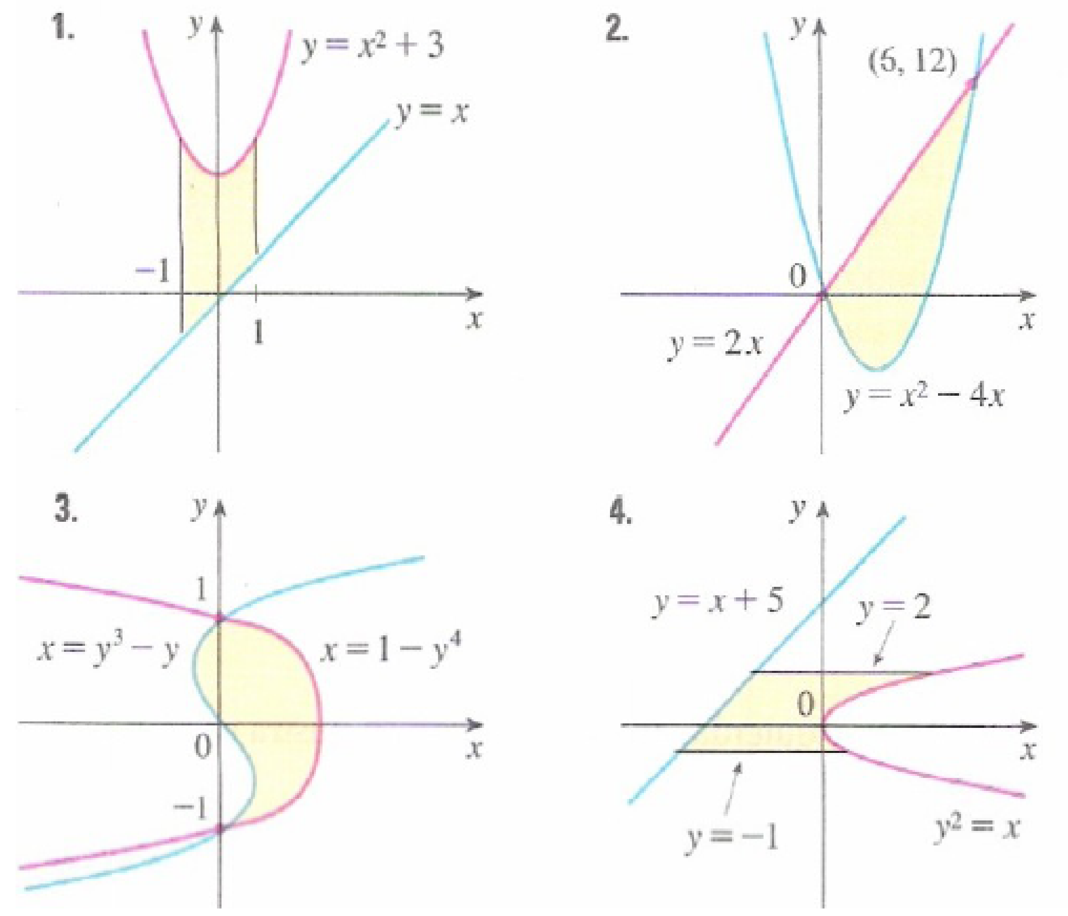
Paso 2: Gráficamos:



Paso 3: Como se observa en la figura, la función que está por encima es $f(x) = 2x - x^2$ y la que está por debajo es $g(x) = x^2$. Esto es sencillo, traza una recta vertical y muévela sobre el recinto de integración, si ella corta SIEMPRE la misma curva superior e inferior, entonces necesitas sólo UNA integral para calcular el área (lo mismo, con recta horizontal, es válido para la otra clase de recintos). Esta recta puede jugar el rol del rectángulo genérico. Luego, el área del recinto es:

$$A = \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] \, dx = \frac{1}{3}$$

Actividad 29 *Determina el o los mejores recintos* R_x *y/o* R_y *para hallar el área de la región.*



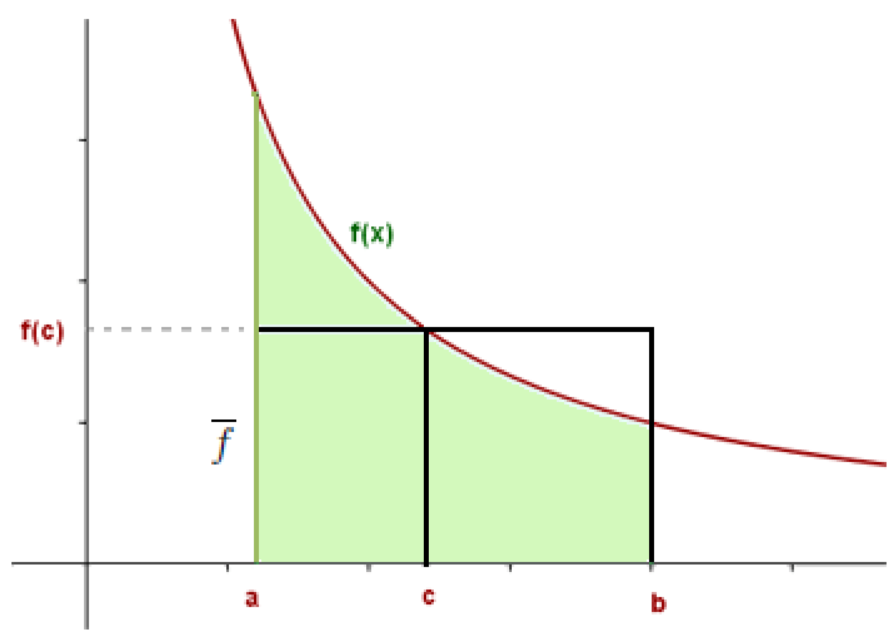
Tarea 5 *Hallar el área de la región* R *que acotan las funciones:*

1. $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$. *Resp* $\frac{8}{3}$
2. $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$. *Resp 18*

3.0.10. El Teorema del Valor Medio

En muchos problemas no se requiere tener un valor exacto del área de una región sino más bien un valor promedio ($\overline{f}$). En este caso este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto.

La idea es la siguiente. Sabemos que la integral representa el área bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x, y entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Tal como muestra la figura



Podemos aproximar el área bajo la curva por el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $\overline{f}$. Como sabemos que el área es la integral definida, entonces se tiene la igualdad:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Actividad 30 *Hallar el valor de* c*, del teorema del valor medio si la región está acotada por:*

1. $f(x) = 3x^2$*, el eje* x*, y* $x \in [-4, -1]$*. Resp* $c = -\sqrt{7}$*.*

2. $y = x^2$*,* $y = 0,\ x = 1$*.*

Actividad 31 *Hallar el valor promedio de la función* $f(x) = 3x^2 - 2x$ *en el intervalo* $[1, 4]$*. Resp. 16*

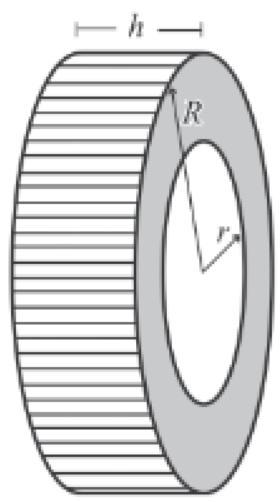
3.1 Volúmenes de sólidos de revolución

Tenemos una región R en el plano xy, una recta L que no intersecta el interior de R. Si esta región se rota alrededor de la recta L, entonces da origen a un sólido llamado de **revolución**, cuyo volumen calculamos por una integral definida. Mostramos dos métodos de cálculo: **Disco** y **Corteza**.

3.1.1. Método del disco

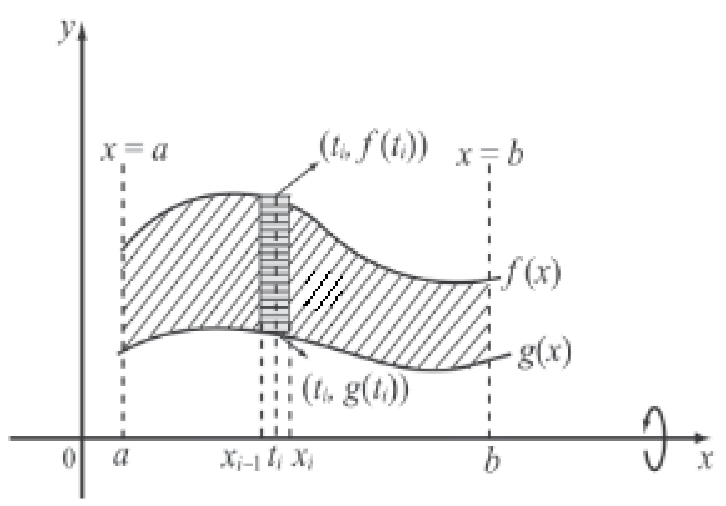
Para poder definir el volumen V de un sólido de revolución debemos, en primer lugar, conocer que la medida del volumen de un **disco** o cilindro circular recto es $\pi r^2 h$, en donde r es la medida del radio y h la de la altura.
Si el cilindro es hueco (una arandela), R y r son los radios externo e interno, respectivamente, y h es la medida de la altura (figura), aceptaremos como medida del volumen de la arandela el siguiente producto:

$$\pi\,(R^2 - r^2)\,h$$



- **Rotación sobre el eje x**

Supongamos ahora que se va a rotar alrededor del eje x la región del plano encerrada por las curvas $f(x)$ y g(x), que supondremos continuas en el intervalo $[a, b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$. (figura)



Hacemos una partición P del intervalo $[a, b]$ de n subintervalos de igual longitud

$$P = \{a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

La longitud del $i-$ ésimo intervalo es $\Delta x_i = x_1 - x_{i-1}$
Se elige un punto cualquiera $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Al girar la región alrededor del eje x, el $i-$ésimo rectángulo forma una arandela o cilindro hueco con radio exterior $R = f(t_i)$, con radio interior $r = g(t_i)$, y $h = \Delta x_i$. El volumen ΔV_i de este disco está dado por

$$\Delta V_i = \pi\,[f^2(t_i) - g^2(t_i)]\Delta x_i$$

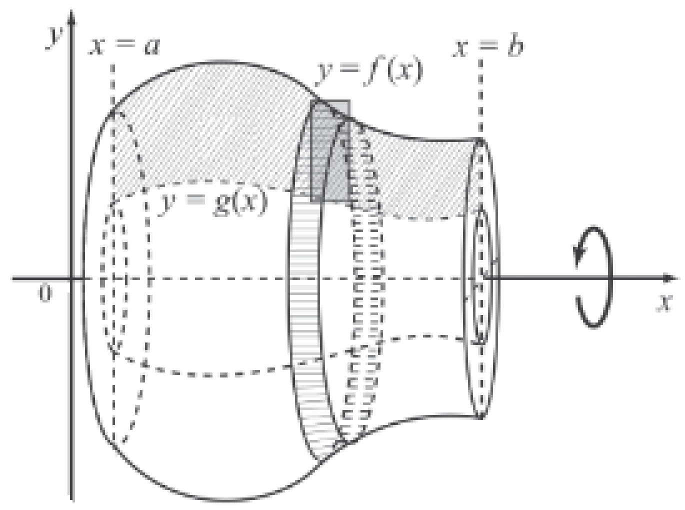
La suma de los volúmenes de los n discos huecos que resultan será entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f^2(t_i) - g^2(t_i)]\Delta x_i$$

El volumen V del sólido resultante lo podemos definir como el límite de esta suma cuando $||P||$ se aproxima a cero (equivalente a decir que $n \to \infty$). Este límite existe ya que las funciones f y g son continuas en $[a, b$. Así

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f^2(t_i) - g^2(t_i)]\Delta x_i \\ &= \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx \end{aligned}$$

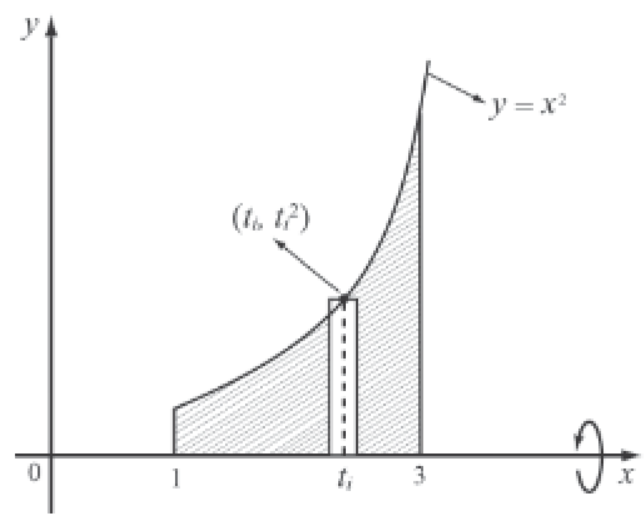
El sólido resultante lo muestra la siguiente figura



¿Cómo recordar el tipo de rectángulos que se toma en el método del disco?

Perpendiculares al eje de rotación

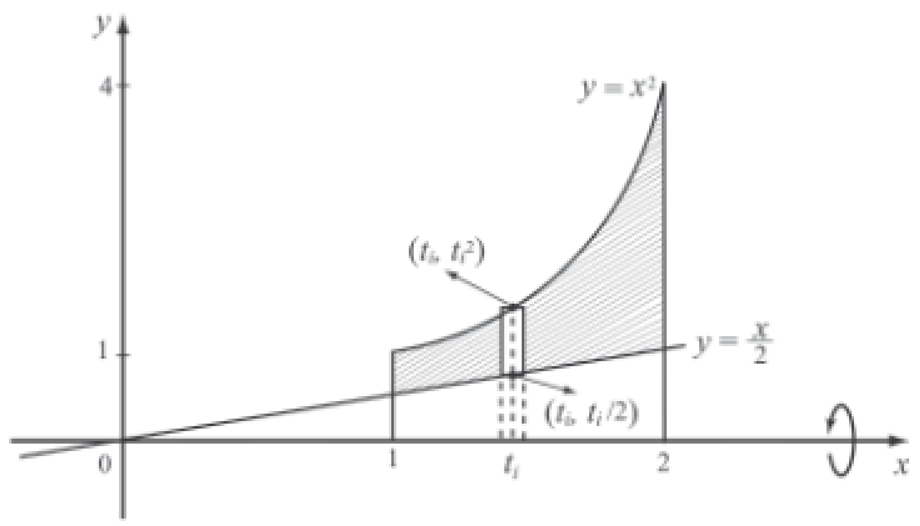
Actividad 32 *Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje* x *la región comprendida por la parábola* $y = x^2$*, el eje* x *y las rectas* $x = 1$ *y* $x = 3$



La figura muestra un rectángulo genérico, su base es $\Delta x = dx$ y su altura $h = x^2 - 0$. Por tanto:

$$V = \pi \int_1^3 [(x^2)^2 - 0^2)\,dx = \frac{242}{5}\pi$$

Actividad 33 *Hallar el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar sobre el eje* x *la región limitada por la curva* $y = x^2$ *y las rectas* $x = 1$*,* $x = 2$*, e* $y = \frac{x}{2}$



Dibujado un rectángulo genérico como el que muestra la figura, a continuación debemos determinar la curva que cierra el rectángulo superiormente (tomarla al cuadrado) y restar aquella que lo cierra (y también elevar al cuadrado). Agregar los límites de integración y establecer la integral, que en este caso es:

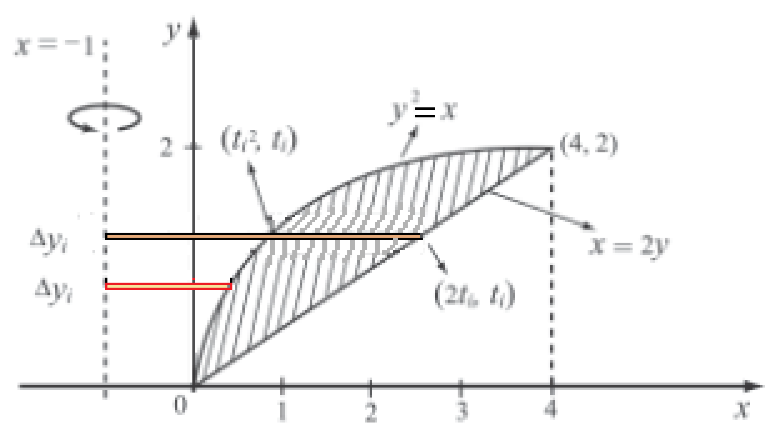
$$V = \pi \int [(x^2)^2 - (\frac{x}{2})^2]\, dx = \frac{337}{60}$$

Tarea 6 *Hallar el volumen del sólido generado al rotar sobre el eje x la región encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 2y$.*

- **rotación sobre el eje y**

La idea básica es esencialmente la misma, la vemos a través de un ejemplo.

Actividad 34 *Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por la parábola $x = y^2$ y la recta $x = 2y$ en torno de la recta $x = -1$.*



Actividad 35 *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar en torno al eje x la región que acotan la recta $y = x$ y la curva $x = y^2$.*

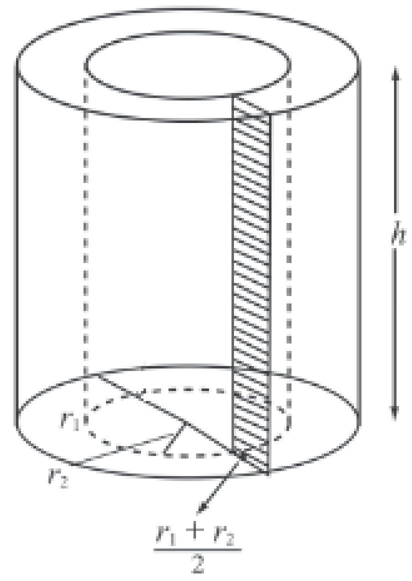
Es cierto que con un sólo rectángulo genérico es suficiente para establecer la integral del volumen, usaremos dos rectángulos genéricos como método alternativo. Dibujamos un rectángulo genérico PERPENDICULAR el eje de rotación (que llegue hasta él), que en este caso es $x = -1$. Ahora lo medimos en base y altura, es claro que la base es $\Delta y = dy$ y su altura $h = x + 1$ (con x en la curva $x = 2y$), pero está sobrando volumen, se debe restar otro rectángulo genérico de base $\Delta y = dy$ y altura $h = x + 1$ (con x en la curva $x = y^2$) que también debe llegar al eje de rotación. El volumen es entonces:

$$V = \pi \int_0^2 [(1 + 2y)^2 - (1 + y^2)^2]\, dy = \frac{104}{15}\pi$$

Tarea 7 *Hallar el volumen del sólido que se genera al rotar la región acotada por el eje x, las rectas $x = 2$, $x = 4$, y la curva $y = \sqrt{x}$, alrededor del eje x, y alrededor del eje y.*

3.1.2. Método de la corteza

Por corteza cilíndrica se entiende al sólido comprendido entre dos cilindros concéntricos. La figura 21 muestra la corteza formada por dos cilindros de radios r_1 y r_2. El volumen de una corteza cilíndrica depende, obviamente, de los radios de los cilindros que la contienen.



Si r_1 es el radio interior, r_2 el exterior, y h es la altura, entonces el volumen de la corteza es $V = \pi\, r_2^2\, h \; - \; \pi\, r_1^2\, h$. Expresión que escribimos

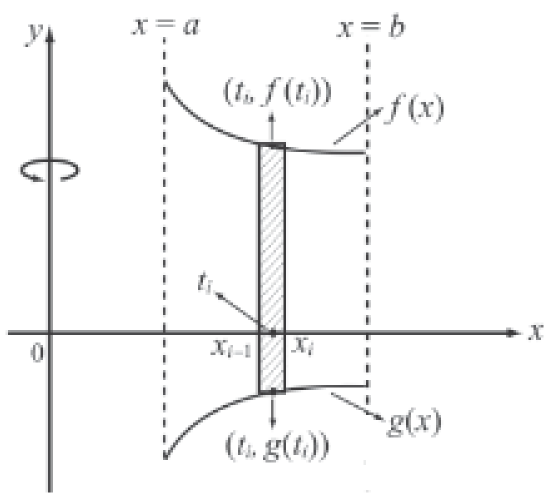
$$V = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\ (r_2 \; - \; r_1)\, h$$

Si hacemos $\overline{r} = \dfrac{(r_1 + r_2)}{2}$, $\quad \triangle r = r_2 - r_1$, entonces la fórmula para calcular la corteza cilíndrica es

$$\boxed{V = 2\pi \cdot \overline{r} \cdot h \cdot \triangle r}$$

- **Rotación sobre el eje y**

Sea R es la región limitada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$. Al rotar R en torno al eje y se forma un sólido cuyo volumen vamos a calcular mediante una integral



La figura te da una idea de la situación. Haces una partición del intervalo $[a, b]$ y dibujas el $i-$ ésimo rectángulo genérico PARALELO al eje de rotación, (el rayado en la figura), que corresponde al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ girando en torno del eje y. No olvides que x_{i-1} representa uno de los radios de la corteza y que x_i es el otro. Ahora, si llamamos $\overline{t_i}$ al promedio de estos radios. Esto es,

$$\overline{t_i} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

y sabiendo que $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, entonces

$$V_i = 2\pi\ \overline{t_i} \cdot [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

Si hacemos esto con todas las cortezas tenemos una sumatoria

$$V \sim \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, \overline{t_i} \cdot [f(t_i) - g(t_i)] \cdot \Delta x_i$$

Al tomar límite cuando $n \to \infty$, aparece la integral que calcula el volumen de revolución por corteza.

$$V = V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

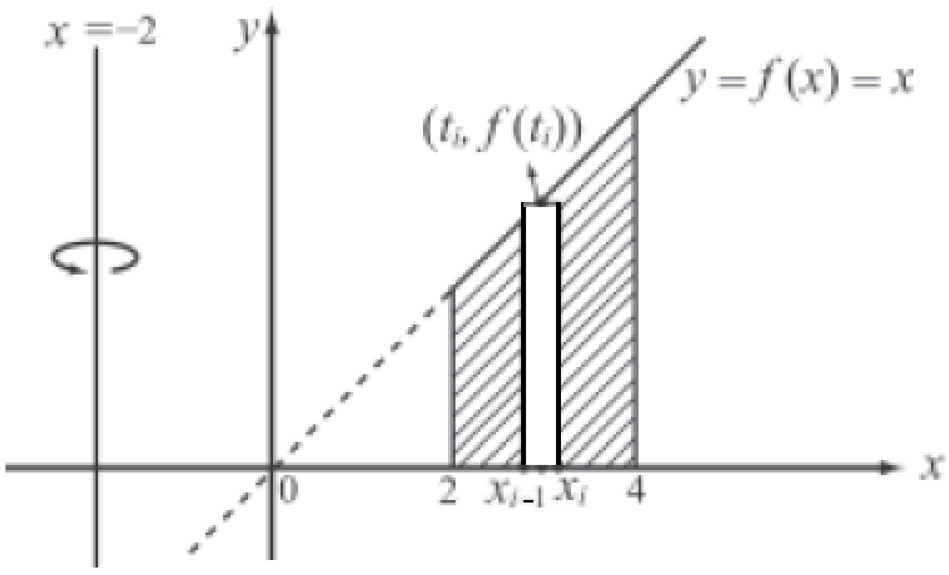
Te hago notar que el x que aparece en el integrando de la fórmula de la corteza es "*la distancia al eje de rotación*" y que los rectángulos genéricos son

paralelos al eje de rotación

distancia al eje de rotación

$$V = V_y = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)] \cdot dx$$

Actividad 36 *La región acotada por la recta $y = x$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ es rotada alrededor de la recta $x = -2$. Hallar el volumen de revolución mediante cortezas.*



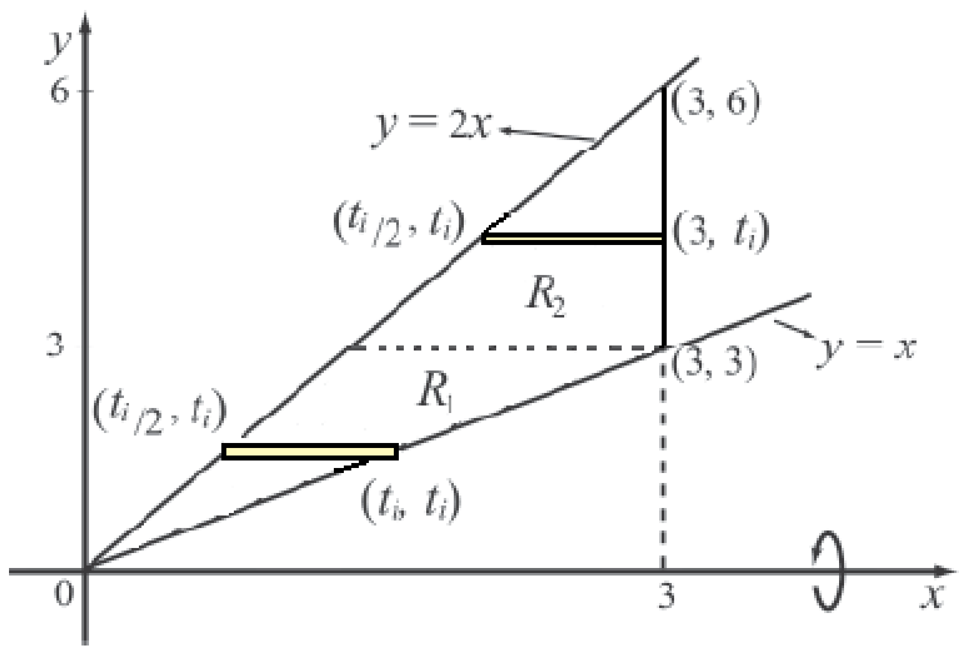
La figura indica la región que genera al sólido y el elemento rectangular de área. Nos situamos en un punto (x, y) en el rectángulo genérico, medimos la distancia al eje de rotación, que en este caso es $x + 2$ con x en la recta $y = x$. La base del rectángulo es $\Delta x = dx$ y su altura $h = y = x$. Por tanto, el volumen de rotación está dado por:

$$V_{x=-2} = 2\pi \int_2^4 (x + 2) \cdot x\,dx = \frac{184}{3}\pi$$

- **Rotación en torno al eje x**

El proceso es similar, lo vemos con un ejemplo

Actividad 37 *La región comprendida por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y $x = 3$ gira alrededor del eje x. Hallar el volumen del sólido generado por cortezas.*



La figura muestra que debemos separar la región de integración en dos partes para poder usar el método de la corteza.
La región R_1 tiene volumen de revolución:

$$V_{R_1} = 2\pi \int_0^3 y \cdot \left(y - \frac{y}{2}\right) dy = 9\pi$$

La región R_2 tiene volumen de revolución:

$$V_{R_2} = 2\pi \int_3^6 y \cdot \left(3 - \frac{y}{2}\right) dy = 18\pi$$

En consecuencia, el volumen de revolución total es.

$$V(R) = 9\pi + 18\pi = 27\pi$$

Actividad 38 *Considera la región R, en el primer cuadrante, acotada por la parábola $y^2 = 12 - 4x$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$. Escribe el volumen del sólido generado por disco y corteza, cuando se gira: alrededor de los ejes coordenados, y de las rectas, $x = 4$, $y = 4$, $y = -2$, $x = -1$.*

Tarea 8 *La región R, en el primer cuadrante, acotada por la parábola $y = x^2$, las rectas $x = 0$, $y = 3$ gira alrededor al eje y. Hallar el volumen del sólido generado por los métodos del disco y corteza.*

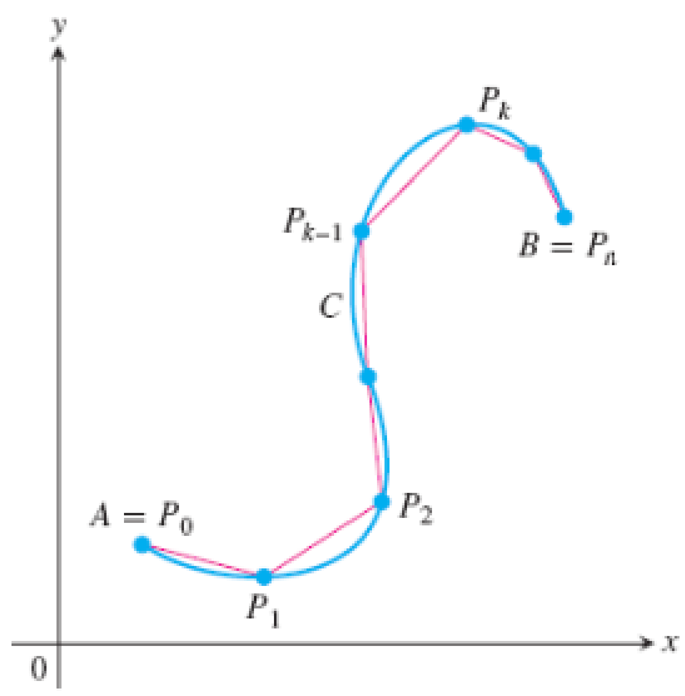
3.1.3. Longitud de una curva

Si la curva fuese una recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, entonces su longuitud es ni más ni menos que

$$L = \sqrt{(f(b) - f(a))^2 + (b - a)^2}$$

Este hecho nos dice que parece razonable tratar de obtener la longitud de una curva considerando pequeños segmentos rectilíneos sobre la curva, sumarlos y considerar algún tipo de límite, tal como lo sugiere la figura siguiente:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$



Sea $y = f(x)$ una función que tiene derivada continua en $[a, b]$ (una curva suave C) que une el punto $A(a, f(a))$ con el punto $B(b, f(b))$. Entonces, la longitud L del arco de curva C viene dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Si hacemos $b = x$, es decir, b toma un valor variable, entonces aplicando diferencial se tiene

$$L = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \Longrightarrow dL = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Observación.

- Para muchos autores es usual simbolizar con la letra s la longitud de arco de una curva. Aquí usaremos, indistintamente, una u otra.
- En el caso de un arco de curva suave determinado por la ecuación $x = g(y)$ con y en el intervalo $[c, d]$, entonces

$$dL = ds = \sqrt{1 + [\frac{dx}{dy}]^2}\, dy = \sqrt{1 + [x']^2}\, dy$$

con lo cual

$$L = s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy$$

Las fórmulas para la longitud de arco, a pesar de ser simples, se pueden calcular en forma exacta sólo para muy pocas funciones. Por esta razón se pide generalmente únicamente escribir, sin calcular, la integral que representa la longitud de arco.

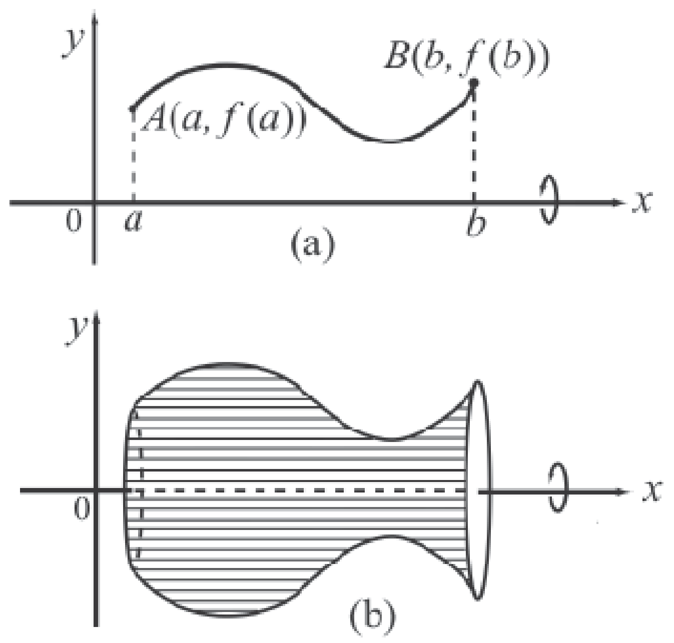
Actividad 39 *Halla la longitud de la curva* $y = \dfrac{2}{3}(x - 5)^{3/2}$, $x \in [4, 8]$. *Resp.* $\frac{16}{3}$

3.1.4. Area de superficie de revolución

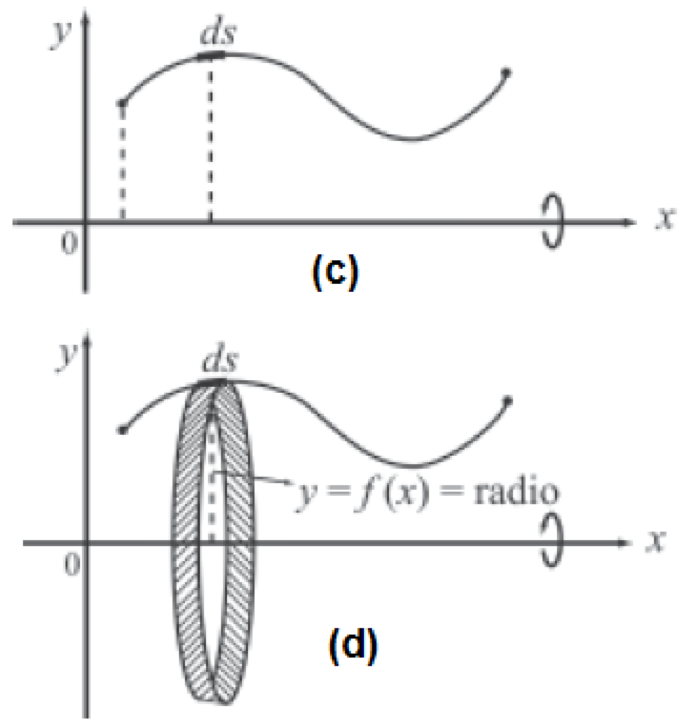
Por lo que hemos visto, una región del plano, al girar en torno a una recta, genera un sólido de revolución. Ahora nos ocupamos de hacer girar un **arco** del plano y calcular el área de la superficie de revolución.

- Área de superficie alrededor del eje x

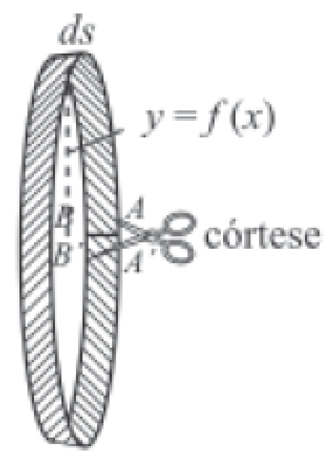
Supóngase que $y = f(x)$ es una función con primera derivada continua en $[a, b]$ y que además $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.



Cuando el arco de curva plana del punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ gira alrededor del eje x, genera una superficie (área lateral) como la que aparece sombreada en la figura (a).
Usemos entonces la forma diferencial para expresar el área de superficie como una integral definida. Para ello considere una pequeña sección (casi recta) del gráfico de $f(x)$ en la figura (b) que corresponde al diferencial de longitud ds.
Al girar ds alrededor del eje x genera la franja de área sombreada que aparece en la figura (c). Esta franja corresponde al diferencial de área de superficie que denotaremos dS.



Supóngase que la franja se corta con tijeras por los puntos AA' y BB' y se despliega como aparece en la figura a continuación



El diferencial de área de superficie dS puede considerarse ahora como el área de un rectángulo cuya base BB' = AA' = $2\pi y$ (longitud de la circunferencia de radio y) y cuya altura es ds (diferencial de longitud). Esto es:

$$dS = 2\pi y ds$$

Ahora se tienen dos posibilidades de escoger la ds:

- Con diferencial dx, con lo cual

$$A(S_x) = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

- Con diferencial de arco dy

$$A(S_x) = 2\pi \int_c^d y\, \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = 2\pi \int_c^d y\, ds$$

- Área de superficie alrededor del eje y

Si el arco C viene dado en al forma $y = f(x)$ y el giro se hace en torno del eje y, entonces el área $A(S)$ generada está dada por

$$A(S_y) = 2\pi \int_a^b x\, \sqrt{1 + [y']^2}\, dx = 2\pi \int_a^b x\, ds$$

Con diferencial de arco dy se tiene

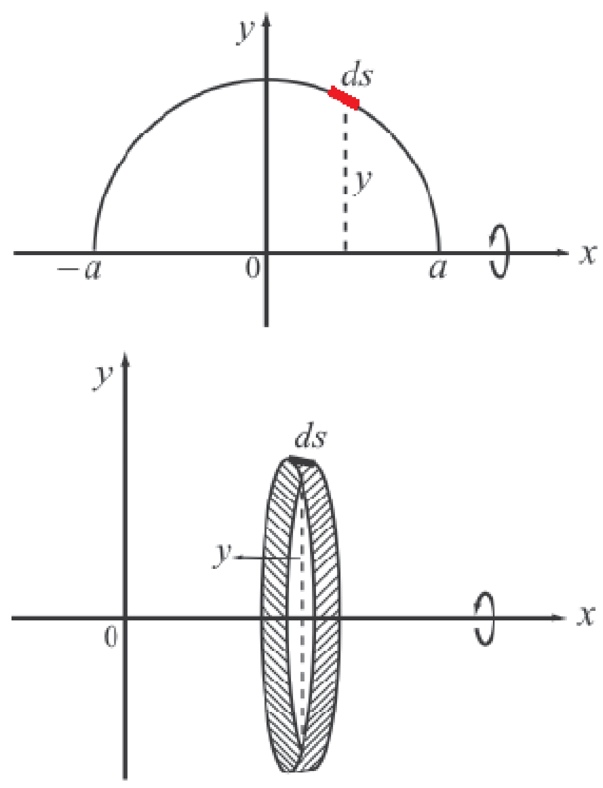
$$A(S_y) = 2\pi \int_c^d x\,\sqrt{1+[x']^2}\,dy = 2\pi \int_c^d x\,ds$$

Observación. La variable x o la variable y que aparece en la integral de la longitud de arco acompañando al ds corresponde a la distancia al eje de rotación

$$2\pi \int_a^b \overset{\text{distancia}}{x}\,ds \qquad\qquad 2\pi \int_c^d \overset{\text{distancia}}{y}\,ds$$

Actividad 40 *Hallar el área de la superficie de una esfera de radio a, mediante integración.*

Elegimos la función $y=\sqrt{a^2-x^2}$, ya que de esta forma la superficie de la esfera se genera por rotación alrededor del eje x. Observar la figura siguiente



La distancia de un punto (x,y) sobre la curva al eje de rotación x es $y=\sqrt{a^2-x^2}$. La derivada de $y=\sqrt{a^2-x^2}$ es $y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Reemplazando en la fórmula del área de revolución se tiene:

$$A_{(y=0)} = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx$$

Al calcular se obtiene

$$A_{(y=0)} = 4\pi\,a^2$$

Actividad 41 *Escribir la integral del área de la superficie de revolución generada al rotar la curva $y=x^2$, para $1\le x\le 2$, en torno de:*

- *el eje x.*
- *el eje y.*

Cuaderno 3.3 *Hallar el área de la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje x, la curva $y=4-x^2$, $0\le x\le 1$.*

Observación. Existe otra forma de calcular volúmenes y áreas de revolución y es a través de los teoremas de Pappus, para aplicarlos se necesita de los conceptos de masa y centro de masa. No los abordaremos en esta oportunidad por tener otras prioridades. El interesado puede consultar cualquier libro de cálculo mencionado en la bibliografía.