CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

Guía de Trabajo curso 2016

---

1. Integrales Dobles y Triples

1. Sea $I_{yx} = \int_{-1}^{1} \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dydx$
   a) Exprese I_{yx} como integral doble.
   b) Calcule I_{yx}.

2. Exprese la suma de integrales iteradas:
$$\int_1^2 \int_1^y \frac{\ln x}{x} dxdy \; + \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{\ln x}{x} dxdy$$
como una sola integral iterada del tipo I_{yx} y calcular.

3. Sea $I_{yx} = \int_2^{\sqrt{2}/2} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} xydydx$
   a) Exprese I_{yx} como integral doble I y grafique la región de integración.
   b) Invierta el orden de integración.
   c) Calcule I en coordenadas rectangulares.
   d) Calcule I en coordenadas polares.

4. Calcule la integral iterada: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4} dxdy$ (Invierta el orden de integración si es necesario).

5. Calcule $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, donde D es el triángulo determiando por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados.

6. Sea $I_{xy} = \int_0^4 \int_{y/4}^{\sqrt{y}} (x+y)\, dxdy$.
   a) Invierta el orden de integración.
   b) Exprese I_{xy} como una integral tiple I. Grafique el dominio de integración de I.
   c) Calcule I y dé dos interpretaciones al resultado.

7. Sea $I_{xy} = \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{2y+4}}^{0} \left(-\frac{y}{2}\right) dxdy$
   a) Invierta el orden de integración.
   b) Exprese I_{yx} como una integral triple I. Grafique el dominio de integración.
   c) Exprese I en coordenadas cilíndricas.
   d) ¿Qué representa el valor de I?

8. Calcular $I = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2+x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\, dydx$

9. Sea D la región del 3^{er} octante del espacio, dentro de: $x^2 + y^2 = 4$ y fuera de $25\left(x^2+y^2\right) = z^2$.
   a) Exprese D en coordenadas cilíndricas.
   b) Exprese D en coordenadas esféricas.
   c) Calcule: $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

10. Sea R la región acotada del espacio, dentro de la superficie: $16x^2 + 16y^2 - z^2 = 0$ y bajo la superficie $x^2 + y^2 - z + 3 = 0$.
    a) Grafique R.
    b) Exprese R en coordenadas cilíndricas.
    c) Exprese R en coordenadas esféricas.

11. Sea $I = \iiint\limits_S zdxdydz$, en donde S es la región dentro del cilindro $x^2 - 4x + y^2 = 0$, sobre el plano xy y bajo el cono $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$.
    a) Exprese I como integral iterada en coordenadas cilíndricas y esféricas.
    b) Indique dos interpretaciones físicas para el valor de I.

12. Sea W la región en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ acotada por los planos $x = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 6$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
    a) Grafique W.
    b) Exprese $\iiint\limits_W f(x,y,z)\, dxdydz$ como integral iterada, de dos formas diferentes.

13. Sea $I = \iiint\limits_S x^2 ydxdydz$, y S la región de $\mathbb{R}^3$ acotada inferiormente por $z^2 = 16\left(x^2+y^2\right)$ y superiormente por $z - 3 = x^2 + y^2$. Exprese I como integral iterada en coordenadas cilíndricas.

14. Sea $I = \iiint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, D la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $8x^2 + 8y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z - 6 = 0$.
    a) Grafique D.
    b) Exprese I como integral iterada en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.
    c) Dar dos interpretaciones físicas del valor de I.

15. Sea D la región del plano, sobre el eje x, acotada por las curvas $x^2 + y^2 - 3x = 0$, $x^2 + y^2 - 3x = 3\sqrt{x^2+y^2}$
    a) Exprese las curvas en coordenadas polares y grafique D en el plano xy.
    b) Calcule el área de D.

16. Considere la integral iterada
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \int_0^{-y} f(x,y,z)\, dzdydx$$
    a) Exprésela como integral triple y grafique la región de integración.
    b) Transfórmela en otra integral iterada cambiando el orden de integración.

17. Calcule $\iint\limits_R (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$ donde R es la región acotada por $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=1$.

18. Considere la región de $\mathbb{R}^3$

$$D = \left\{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2},\ 0 \leq z \leq 2\right\}$$

a) Determine D^*, la región que es preimagen de D por la transformación a coordenadas cilíndricas.

b) Calcule $\iiint\limits_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$.

c) Indique dos interpretaciones físicas que se puede dar al resultado de b).

19. Considere la integral iterada

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dzdydx,\ a > 0$$

a) Exprese I como integral triple.

b) Dado que I se puede expresar como integral iterada de otras 5 formas intercambiando el orden de integración, exprese I como alguna de estas otras integrales iteradas.

c) Calcule I, usando coordenadas cilíndricas.

d) Interprete fisicamente el resultado de I.

20. Halle la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2=2x$ y el cono $z^2=x^2+y^2$, si la densidad en cada punto es igual a la distancia al origen.

---

2. Integrales de Línea

1. Sea C la curva determinada por la intersección de las superficies : $\left.\begin{aligned} x^2+y+z^2-1 &= 0 \\ 2x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$; parametrice y grafique C.

2. Sea C la parte de la curva: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$ que está sobre el plano xy, orientada de modo que el punto inicial está en el primer cuadrante del plano.

   a) Grafique C

   b) Parametrice C, indicando punto inicial y punto final.

3. Sea $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ función vectorial y C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ x+z &= 1 \end{aligned}\right\}$ recorrida en sentido antihorario al mirar desde el origen. Calcule $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

4. Calcule $\int_C |x|\, ds$ si C es la curva: $x^2+y^2-4y+3=0$

5. Calcule $\int_C xydx + xdy$, donde C es el arco de la parábola $y=x^2$, desde el punto $(2,4)$ al punto $(1,1)$.

6. Sea C la curva definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$

   a) Parametrice y grafique C.

   b) Sea $f(x,y,z) = \sqrt{2y^2+z^2}$, calcule $\oint_C f ds$

   c) Dé una interpretación física al valor obtenido en b.

7. Sea $\overrightarrow{F}(x,y) = (\sin(y), x\cos(y)+3)$

   a) Pruebe que $\overrightarrow{F}$ es campo gradiente.

   b) Halle potencial de $\overrightarrow{F}$

   c) Calcule, usando a) y b), el valor de $I = \int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ donde C es la curva $\left.\begin{aligned} x &= t^3-2t \\ y &= 5t+3 \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$

8. Sea $I = \int_C (e^x\cos y - e^y \sin x)\, dx + (e^y \cos x - e^x \sin y)\, dy$ donde C es la parte de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ contenida en el primer cuadrante, orientada en sentido antihorario. Muestre que I es independiente de la trayectoria y calcule I.

9. Sea $I = \int_C (2x-3y)\, dx + (3x-2y)dy$, donde C es la parte de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, que está en el primer cuadrante, que va desde $(2,0)$ a $(0,3)$.

   a) Calcule I, directamente.

   b) Pruebe que I es independiente de la trayectoria.

   c) Calcule I, usando b.

10. Sea C la parte de la curva $\left.\begin{aligned} 9x^2+4y^2-36 &= 0 \\ \sqrt{5}x-2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ contenida en el primer octante orientada de modo que la abscisa crece.

   a) Parametrice y grafique C.

   b) Sea $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+2y+az, 2bx-z, cy-z^2)$. Determine valores de a, b, c de modo que $\overrightarrow{F}$ sea campo gradiente.

   c) Calcule el trabajo necesario para que $\overrightarrow{F}$ traslade una partícula a lo largo de C, haciendo uso de la parte b).

11. Sean $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{y-3}, \frac{-x^2}{(y-3)^2}, z\right)$ y C el menor arco de la curva: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$, que va desde el punto $A(1,0,0)$ al punto $B(0,1,0)$.

   a) Pruebe que $\overrightarrow{F}$ es campo gradiente en algún conjunto de $\mathbb{R}^3$ (Indique cual).

   b) Halle potencial de $\overrightarrow{F}$.

   c) ¿Es $I = \int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ independiente de la trayectoria?

d) Calcule el trabajo realizado por el campo $\overrightarrow{F}$ al trasladar una partícula desde A a B a lo largo de C.

12. Considere el campo en $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \dfrac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|^3}$ Campo de tipo gravitacional.

    a) Muestre que $\overrightarrow{F}$ es campo gradiente.

    b) ¿Qué se puede concluir, a partir de $a)$, respecto al valor de una integral $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, donde C_1 es una curva seccionalmente suave que une los puntos P_1 y P_2?, ¿ Y para una integral $\displaystyle\int_{C_2} \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dr}$, donde C_2 es una curva cerrada seccionalmente suave?

    c) Calcule $\displaystyle\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, donde C_1 es la curva $\left.\begin{aligned} x &= t^2+1 \\ y &= 2t^3-3 \\ z &= t+5 \end{aligned}\right\}, t \in [0,1]$

    d) Calcule $\displaystyle\oint \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{dr}$, donde C_2 es la curva $\left.\begin{aligned} x^{2/3}+y^{2/3} &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}$

13. Evalúe $\displaystyle\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

14. Sea C el triángulo en $\mathbb{R}^3$ de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,3)$ (orientada en ese orden) y $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$.

    a) Parametrice y grafique C.

    b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\overrightarrow{F}$ al trasladar una partícula a lo largo de C.

15. Sea C la curva $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x-z &= 0 \end{aligned}\right\}$. Si un alambre tiene la forma de la curva C, y su densidad en el punto (x,y,z) está dada por $\delta(x,y,z) = \sqrt{2x^2+y^2}$. Determine la masa del alambre.

16. Sea C una curva suave definida por $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$. Calcule la longitud del arco de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = abt$, desde el punto $(a,0,0)$ hasta el punto $(-a,0,ab\pi)$.

17. Sea C la curva definida por $\overrightarrow{r} : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, t, \sin t)$. Un alambre tiene la forma de la curva C y en cada punto (x,y,z) su densidad es $\delta(x,y,z) = 1+y$. Calcule la masa del alambre.

18. Sea C la curva definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x &= y \end{aligned}\right\}$

    a) Parametrice y grafique C.

    b) Si un alambre tiene la forma de la curva C y la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al origen, calcule el momento de inercia del alambre respecto al eje x.

19. La base de una cerca es la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, para $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. La altura de la cerca sobre el punto (x,y) es $\dfrac{1}{x^2+1}$ (las distancias se expresan en metros).

    a) Grafique la cerca.

    b) Calcule el área de la cerca.

20. Sea C la curva definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x-y &= 0 \end{aligned}\right\}$

    a) Parametrice y grafique la curva C.

    b) Considere un alambre con la forma de la curva C, y tal que la densidad en cada punto es igual a su distancia al origen. Calcule el momento de inercia del alambre respecto al eje x.

    c) Si C' es la parte de C contenida en el primer octante (orientada partiendo desde el plano XY) y $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x\cos y, -e^x\sin y, 2)$, muestre que $\displaystyle\int_{C'} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ es independiente de la trayectoria y calcule usando este hecho.

21. Sobre una partícula en el punto (x,y,z) actúa la fuerza: $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$

    a) Halle el trabajo efectuado al mover una partícula desde el punto $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,0)$ a lo largo de la mitad superior de la circunferencia unitaria de centro el origen en el plano xy.

    b) Hallar el trabajo al mover una partícula desde $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,0)$ a lo largo del eje x.

    c) Los resultados $a)$ y $b)$ son diferentes. ¿Cómo podría haberse supuesto esto, sin calcular las integrales?

22. Sea C la curva definida por: $\overrightarrow{r} : [0,6\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$

    a) Un alambre A tiene la forma de la curva C y en cada punto (x,y,z) la densidad está dada por $\delta(x,y,z) = 1+z$. Calcule la masa de A.

    b) Sean $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (e^x\cos y, -e^x\sin y, 2)$ e $I = \displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

    i) Pruebe que I es independiente de la trayectoria.

    ii) Calcule el potencial de $\overrightarrow{F}$

    iii) Calcule I, usando i) e ii.

    iv) ¿Qué interpretación física tiene el resultado de iii?

Respuestas Integrales de línea

[3] 4π, [4] 4, [5] $\dfrac{-101}{12}$, [6] 8π, [7b] $x\sin y + 3y$, [7c] $15 - \sin 8$, [8b] 0, [9a] -13, [10b] $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$, [10c] $\left(6 - 5\sqrt{5}\right)/3$, [11b] $\dfrac{x^2}{y^{-3}} + \dfrac{z^2}{2}$, [11c] Si, [11d] $\dfrac{1}{3}$, [12c] $\dfrac{1}{\sqrt{35}} - \dfrac{1}{\sqrt{41}}$, [12d] 0, [13] 7, [14b] $-\dfrac{11}{2}$, [15] $2\pi a^2$, [16] $a\sqrt{1+b^2}\pi$, [17] $\sqrt{2}\left(4\pi + 8\pi^2\right)$, [18] $\dfrac{3ka^4\pi^2}{2}$, [19b] $2\ln(2+\sqrt{3})m^2$, [20b] $24\pi^2$, [21c] $5 - e^{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}$, [22a] $-\pi$, [22b] 0

3. Integrales de Superficie

1. Sea S una superficie definida por $\overrightarrow{r} : [0,9] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}(u,v) = \left(u\cos v, u\sin v, u^2\right)$

   a) Exprese S en forma implícita.

   b) Grafique S.

2. Sea S la superficie definida por $\overrightarrow{r} : [0,2]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}(u,v) = (u\cos v, u, u\sin v)$

   a) Determine si $(1,2,1) \in S$.

   b) Exprese S en forma implícita y grafiquela.

3. Calcule $\iint\limits_S \sqrt{x^2+z^2}dS$, donde S es la superficie lateral del cilindro: $x^2+z^2=16$, $-1 \le y \le 2$

4. Sea S la superficie $z = x^2+y^2$, $1 \le z \le 4$

   a) Parametrice y grafique S.

   b) Calcule $\iint\limits_S \frac{z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}d\sigma$

5. Sea S la superficie definida por $\left.\begin{aligned} x &= \frac{2v\cos u}{3} \\ y &= \frac{2v\sin u}{3} \\ z &= v \end{aligned}\right\} (u,v) \in$ $[0,2\pi]\times[0,3]$. Calcule $\iint\limits_S xdydz + ydzdx - zdxdy$

6. Sea la región $R = \left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2 \le a^2, z \ge 0\right\}$ y S la superficie frontera de R.

   a) Calcule $\iint\limits_S \left(z^2+2\right)dxdy$

   b)¿Qué Interpretación física tiene el resultado obtenido en $a)$?

7. Sea S la parte de la superficie $x^2+y^2+z^2=5$ cortada por el plano $y=1$

   a) Calcule $\iint\limits_S zdxdy$

   b) Interprete físicamente el resultado obtenido en $a)$.

8. La esfera $x^2+y^2+z^2=25$ se corta por el plano $z=3$. Sea S la parte menor resultante. Calcule $\iint\limits_S xzdydz + yzdzdx + dxdy$

9. Sea S la parte del cono $x^2+y^2-z^2+4z-4=0$ que está dentro del cilindro $x^2+y^2-2y=0$ con $0 \le z \le 2$. Calcule el área de S.

10. Calcule el área de la parte del cono $x^2+y^2=(z-1)^2$, contenida en el primer octante y bajo $z=1$, usando integral de superficie.

Respuestas Capítulo 4

[3] 96π, [4] $\frac{15\pi}{2}$, [5] 16π, [6] $\frac{-a^4\pi}{2}$, [7a] 8π. [8] 144π, [9] $\sqrt{2}\pi$, [10] $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.