PROBLEMA RESUELTO 3

Un cilindro hueco largo tiene radio interior a y radio exterior b, como muestra la figura 28. Este cilindro tiene una densidad de carga por unidad de volumen dada por $\rho = k/r$, donde k es una constante y r es la distancia al eje. Hallar el campo eléctrico y el potencial en las tres regiones: **a)** r < a; **b)** a < r < b; **c)** r > b

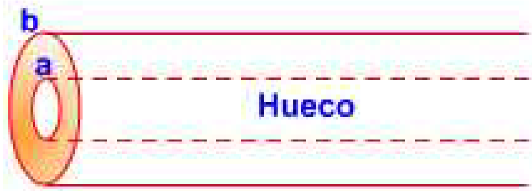

Fig. 28

Solución

Tomamos como superficie gaussiana un cilindro concéntrico de radio r y longitud L. como el $\vec{E}$ es radial, entonces el flujo de $\vec{E}$ a través de la superficie gaussiana es $E2\pi rL$ y la ley de Gauss dice:

$$E2\pi rL = \frac{carga\,libre\,dentro}{\varepsilon_0}$$, de donde

$$E = \frac{carga\,libre\,dentro}{2\pi L\varepsilon_0 r}$$, (1)

De otro lado $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$, es decir:

$$\int dV = -\int E\,dr$$, (2)

a) Para r < a la carga encerrada por la superficie gaussiana es cero y (1) da $E = 0$. Este resultado se introduce en (2) y obtenemos V= constante

b) Para a < r < b la carga encerrada por la superficie gaussiana es $\int_a^r \frac{k}{r} L2\pi\, r dr$ y la ecuación (1) da: $E = \frac{k(r-a)}{\varepsilon_0 r}$. Este resultado se introduce en (2) así:

$\int_{v(a)}^{v(r)} dV = -\int \frac{K(r-a)}{\varepsilon_0 r} dr$, de donde:

$$V(r) - V(a) = -\frac{K}{\varepsilon_0}(r-a) + \frac{Ka}{\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}$$

c) Para r > b la carga encerrada es $\int_a^b \frac{K}{r} L2\pi\, r\, dr = L2\pi K(b-a)$ y la ecuación (1) da: $E = \frac{K(b-a)}{\varepsilon_0 r}$. Este resultado se introduce en (2) así:

$\int_{v(b)}^{v(r)} dV = -\int_b^r \frac{K(b-a)}{\varepsilon_0 r} dr$, de donde:

$$V(r) - V(b) = -\frac{K(b-a)}{\varepsilon_0}\ln\frac{r}{b}$$