Teorema de Gauss, Stokes

8. Sea S la superficie del cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ con la cara correspondiente a $x = 1$ removida. Use Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$

9. Sean $R = \{(x, y, z) \ / \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq a, \ 0 \leq z \leq a\}$ región de $\mathbb{R}^3$, S frontera y $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$.
   a) Compruebe que R, S y $\overrightarrow{f}$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Gauss.
   b) Use Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$.
   c) ¿Qué interpretación física tiene el valor de la integral de superficie propuesta en b)?

10. Sean $R = \big\{(x, y, z) \ / \ 9x^2 + 9y^2 \leq 4z^2, \ 0 \leq z \leq z\big\}$. Sea S la superficie frontera de R. $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$

    a) Use Teorema de Gauss para expresar I como integral iterada triple en coordenadas cilíndricas.

    b) ¿Qué interpretación física tiene el valor de I?

11. Verificar el Teorema de la divergencia si:

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

donde S es la cara exterior de la frontera del cubo. $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

12. Sea $I = \iint_S z dx dy$, donde S es la superficie frontera de la región $R \subset \mathbb{R}^3$, acotada por $y = 1$, $x^2 + z^2 + y - 5 = 0$.

   a) Calcule I, directamente.

   b) Calcule I, usando Teorema de Gauss.

   c) ¿Qué interpretación física puede dar al valor de I?

13. Usar el teorema de Stokes para hallar $\oint_C 3y dx xz dy + yz^2 dz$, donde C es el borde (Considere C orientada antihorario mirando desde el origen).

14. Sea $C : \left.\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ x + z & = 1 \end{array}\right\}$ orientada en sentido horario al mirar desde el origen.

   a) Parametrice y grafique C.

   b) Use Stokes para calcular $\oint_C y dx + z dy + x dz$.

   c) Sea C' la parte de C contenida en el primer octante y $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$. Muestre que $\int_{C'} \vec{F} \cdot \vec{dr}$ es independiente de la trayectoria y halle su valor.

15. Sea C la curva: $\left.\begin{array}{rl} x + z & = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 16 \end{array}\right\}$ orientada en sentido antihorario al mirar desde el origen.

   a) Parametrice la curva.

   b) Calcule $\int_C dL$ a partir del gráfico.

   c) Sea $I = \int_C y dx + z dy + x dz$.

i) ¿Es independiente de la trayectoria?

ii) Calcule I directamente.

iii) Calcule I, usando el Teorema de Stokes.

16. Sea S la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 25$, $1 \leq x \leq 4$.
a) Calcule la masa de una lámina que tiene la forma de S, si la densidad en cada punto es la distancia al eje x.
b) Sea S' la superficie S anterior, a la que se agrega como tapa el plano $x = 1$. Use Teorema de Stokes para calcular: $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{N}dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y^3, z, x)$.

---

17. Sean $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, con C el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 3)$ (orientada en ese orden), $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

a) Parametrice la curva C.

b) Calcule I, directamente.

c) ¿Qué interpretación física tiene I?

d) Transforme I en una integral de superficie, usando Teorema de Stokes y calcule.

e) ¿Qué interpretación física tiene el resultado obtenido en d)?

18. Sea S la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$; $z \geq 0$. Si $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, verifique el Teorema de Stokes para $\vec{F}$ y S.

19. Sea S la superficie del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$.
a) Use Teorema de Gauss para calcular: $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}dS$, si $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y, -x^2y)$.