Factorización de matrices

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez

Conferencia 13

Conferencia 13

1. Recordatorio
2. Matrices de permutaciones y factorización PLU
3. Matrices con diagonal estrictamente dominante
4. Matrices definidas positivas
5. Matrices tridiagonales

Definiciones

Triangular inferior

Una matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular inferior si: $l_{ij} = 0, \forall i < j$.

Triangular superior

Una matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior si $u_{ij} = 0, \forall i > j$.

Ejemplos

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- El resultado de la Eliminación es triangular superior.
- Las matriz correspondiente a la operación elemental $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ es triangular inferior.

Factorización *LU*

Menos operaciones

Si una matriz se factoriza como $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces el sistema

$$Ax = b$$

puede resolverse haciendo una sustitución hacia adelante

$$Ly = b$$

y luego una hacia atrás:

$$Ux = y$$

utilizando en total $O(n^2)$ operaciones.

Método de Doolittle

Teorema

Si el algoritmo de Eliminación aplicado a $Ax = b$ culmina sin intercambio de filas, entonces A puede factorizarse $A = LU$, donde U es triangular superior y L es triangular inferior y:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Aspectos básicos

Definición

Una matriz de permutaciones se obtiene permutando las filas de una matriz identidad. Ejemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea P una matriz de permutaciones:

- Cada fila y columna de P está formada por un uno y el resto ceros.
- El producto PA realiza sobre la matriz A las mismas permutaciones de filas que definen a P.
- P^{-1} siempre existe y $P^{-1} = P^T$.

Factorización *PLU*

Observación

- Si la matriz A es inversible, el algoritmo de eliminación aplicado a $Ax = b$ termina, eventualmente cambiando filas.
- Si todos los intercambios de filas necesarios se resumen en la matriz de permutaciones P^T, entonces $P^T A$ posee una factorización LU, o sea: $P^T A = LU$

Proposición 5

Toda matriz regular posee una factorización de la forma

$$A = PLU$$

donde P es una matriz de permutaciones, L es triangular inferior y U es triangular superior.

Ejemplo de Factorización PLU

$(E_2) \leftrightarrow (E_1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(E_3 - (-1)E_1) \to (E_3)$; $(E_4 - E_1) \to (E_4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(E_4) \leftrightarrow (E_3)$; $(E_3 - E_2) \to (E_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Factorización PLU

Matriz de Permutaciones: $(E_2) \leftrightarrow (E_1)$; $(E_4) \leftrightarrow (E_3)$

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Factorización LU: $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$; $(E_4 - (-1)E_1) \rightarrow (E_4)$; $(E_3 - E_2) \rightarrow (E_3)$

$$P^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Factorización PLU de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Factorización LU con picoteo parcial

Ejemplo $E_1 \leftrightarrow E_2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$(E_2-(1/3)E_1) \to (E_2)$; $(E_3-(2/3)E_1) \to (E_3)$; $(E_4-(1/3)E_1) \to (E_4)$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$(E_3) \leftrightarrow (E_2)$; $(E_3) \leftrightarrow (E_4)$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de Factorización PLU con pivoteo

Matriz de Permutaciones: $(E_2) \leftrightarrow (E_1);\ (E_2) \leftrightarrow (E_3);\ (E_3) \leftrightarrow (E_4)$

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^T A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Factorización LU: $(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3);\ (E_4 - (-1)E_1) \rightarrow (E_4);\ (E_3 - E_2) \rightarrow (E_3)$

$$P^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Factorización PLU de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aspectos básicos

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice que tiene una diagonal estrictamente dominante si para cada $i = 1 \ldots n$ se cumple que:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Teorema

Si la matriz A posee una diagonal estrictamente dominante, entonces A tiene también las siguientes propiedades:

- Es regular
- El algoritmo de Eliminación de Gauss puede realizarse sin intercambio de filas para cualquier sistema $Ax = b$
- Posee una factorización LU.

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A posee una diagonal estrictamente dominante, pero B no.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Observación

Tener una diagonal estrictamente dominante es **solo** una condición **suficiente** para la existencia de una factorización LU.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

Aspectos básicos

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si es simétrica y cumple que

$$d^T A d > 0, \forall d \in \mathbb{R}^n,\ d \neq 0,$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d^T A d &= 2d_1^2 - 2d_1 d_2 + 2d_2^2 - 2d_2 d_3 + 2d_3^2 \\ &= d_1^2 + (d_1 - d_2)^2 + (d_2 - d_3)^2 + d_3^2 > 0 \end{aligned}$$

Conclusión: A es definida positiva.

Propiedades de las matrices definida positiva

Proposición (Condiciones necesarias)

Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. A posee una inversa.
2. $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$
3. $\max_{1\leq k,j\leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|$
4. $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$, para cada $i \neq j$.

Proposición (Caracterización mediante valores propios)

Una matriz simétrica es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son estrictamente positivos.

Propiedades de las matrices definida positiva

Definición (Menores principales)

El menor principal de orden k de una $n \times n-$matriz A se define como el determinante de la submatriz de A que se forma de la intersección de las primeras k filas y columnas.

Los n menores principales de la $n \times n-$matriz A se denotan por:

$$A_k = det([A]_{i,j=1,2,\ldots,k}), \quad k = 1, 2, ..., n$$

Proposición (Criterio basado en los menores principales)

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si y solo si todos sus menores principales son positivos.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad M_1 = 2;\ M_2 = 3;\ M_3 = 4$$

Resultados principales

Teorema

Una matriz simétrica A es definida positiva si y solo si el algoritmo de eliminación de Gauss puede realizarse sobre un sistema $Ax = b$ sin necesidad de intercambiar filas y con todos los pivotes estrictamente positivos.

Ejemplo (pivote $2 > 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (pivote $\frac{3}{2} > 0$)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{3}{2}} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Resultados principales

Consecuencia 1 (Factorización LDL^T)

Una matriz A es definida positiva si y solo si puede ser factorizada como $A = LDL^T$, donde L es triangular inferior con valor uno en la diagonal y D es una matriz diagonal con valores positivos en la diagonal.

Ejemplo (Factorización LU)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo (Factorización LDL^T)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultados principales

Consecuencia 2 (Factorización LL^T)

Una matriz A es definida positiva si y solo si puede ser factorizada como $A = LL^T$, donde L es triangular inferior con valores estrictamente positivos en la diagonal.

Ejemplo (Factorización LDL^T)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo (Factorización LL^T)

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Factorización LDL^T

Pseudocódigo

DATOS: $A = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$: Matriz
RESULT: $l_{ij}, 1 \leq j < i \leq n$, $d_i, 1 \leq i \leq n$

PASO 1: Para $i = 1 : n$ hacer los pasos 2-4

PASO 2: Para $j = 1 : i - 1$, tomar $v_i = l_{ij} d_j$

PASO 3: Definir $d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} v_j$

PASO 4: Para $j = i + 1 : n$, tomar
$l_{ji} = [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} v_k] / d_i$

PASO 5: STOP($l_{ij}, 1 \leq j < i \geq n$, $d_i, 1 \leq i \leq n$)

Algoritmo de Cholesky (Factorización LL^T)

Pseudocódigo

DATOS: $A = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$: Matriz
RESULT: $l_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq n$

PASO 1: Tomar $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
PASO 2: Para $j = 2 : n$, tomar $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$
PASO 3: Para $i = 2 : n-1$ hacer los pasos 4 y 5

PASO 4: Tomar $l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$
PASO 5: Para $j = i+1 : n$, tomar
$l_{ji} = [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}]/l_{ii}$

PASO 6: Tomar $l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

PASO 7: STOP($l_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq n$)

Aspectos básicos

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es tridiagonal si cumple que:

$$a_{ij} = 0, \ \forall 1 + i < j \vee i > j + 1$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Motivación

Aprovechar la estructura para disminuir el monto de operaciones al factorizar o resolver sistemas.

Factorización de Crout para matrices tridiagonales

Hipótesis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

puede descomponerse como el producto $A = LU$ con:

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculos necesarios: $(3n-2)$ ecuaciones e incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1};\ \forall i = 2 \ldots n \\ a_{i,i} &= l_{i,i-1} u_{i-1,i} + l_{ii};\ \forall i = 2 \ldots n \\ a_{i,i+1} &= l_{i,i} u_{i,i+1};\ \forall i = 1 \ldots n-1 \end{aligned}$$

Ejercicio

- Usando la descomposición *PLU* con estrategia de pivoteo parcial resuelva el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Considere el sistema de ecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - Determine para cuáles valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la matriz A siguiente es definida positiva:
  - Para $\alpha = -1$, compruebe que A es definida positiva y calcule la descomposición LDL^{T} de la matriz A.
  - Si $b^{\mathsf{T}} = (4, -5, -3)$ resuelva el sistema $Ax = b$, usando la descomposición LDL^{T} de A obtenida en el inciso anterior.