Ejercicio Resuelto de Fórmula de Abel y Variación de Parámetros

Profesor: Jorge Olivares Funes

Problema

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = x^2-1.$$

Sabiendo que $y_1(x) = x$

Es una solución de la correspondiente ecuación homogénea.

SOLUCIÓN.

Para encontrar una segunda solución de la ecuación homogénea usamos la fórmula de Abel

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1(x))^2}\,dx,$$

Con

$$p(x) = \frac{-2x}{x^2-1}.$$

Reemplazando obtenemos

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{-\int \frac{-2x}{x^2-1}\,dx}}{x^2}\,dx = x \int \frac{e^{\ln(x^2-1)}}{x^2}\,dx = x \int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$$

$$= x \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 1 .$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1\, x + c_2\,(x^2+1)\,, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no-homogénea usamos el método de variación de parámetros

$$y(x) = c_1(x)\, x + c_2(x)\,(x^2+1)\,,$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\,x \;+\; c_2'(x)\,(x^2+1) & = \; 0 \\ c_1'(x)\,1 \;+\; c_2'(x)\,2\,x & = \; x^2-1\,. \end{cases}$$

Se obtiene

$$c_1'(x) \;=\; -x^2-1 \quad \text{y} \quad c_2'(x) \;=\; x\,,$$

luego integrando y simplificando se tiene que la solución general es

$$y(x) \;=\; c_1\,x \;+\; c_2\,(x^2+1) \;+\; \left(\frac{x^4}{6} \;-\; \frac{x^2}{2}\right)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$