Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Est.

FUNCIONES REALES

I.- Sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$. Calcular:

1. $f(1)$	2. $f(0)$	3. $f(-x)$	4. $-f(x)$	5. $f(x^2)$	6. $[f(x)]^2$

II.- Hallar $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h \neq 0$ para las funciones:

1. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$	3. $f(x) = \ln x$	4. $f(x) = senx$	5. $f(x) = x^2$

III.- Para cada una de las siguientes funciones determine su dominio:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 24$	3. $y = \frac{x+2}{2x-4}$	5. $y = \frac{x+3}{x^2+5x+4}$	7. $y = \ln(x^2 - 25)$
2. $y = \frac{x-6}{x+1}$	4. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$	6. $y = \frac{2}{\sqrt{3x-1}}$	8. $y = \frac{1}{x^2+1}$

IV.- Para cada una de las siguientes funciones determine su recorrido.

1. $y = \frac{3x-1}{x+4}$	2. $y = \sqrt{1-x^2}$	3. $y = \frac{x+7}{x}$	4. $y = \lvert x \rvert + 3$	5. $y = x^5 + 2x^3 - 5$

V.- Determine cuales de las siguientes funciones son inyectivas. Cuando una función no lo sea de un contraejemplo, cuando si sea inyectiva demostrar.

1. $y = x^3 - 1$	2. $y = \sqrt{x} + 3$	3. $y = \lvert x \rvert + 5$	4. $y = 3x + 2$	5. $y = \frac{1}{x}$

VI.- Encuentre una formula explicita para la inversa f^{-1} de:

1. $y = 7x - 3$	2. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	3. $y = \frac{2x+1}{2-x}$	4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	5. $f(x) = \frac{x+3}{2x-5}$

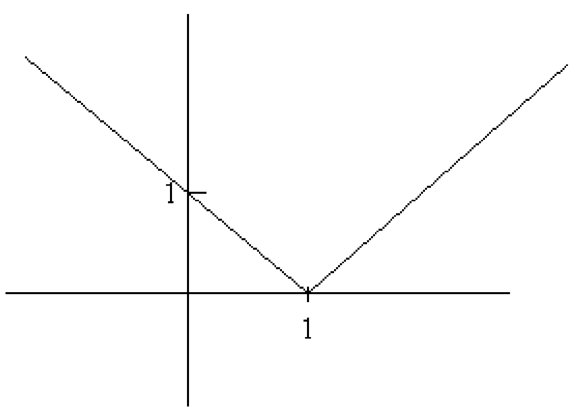
VII.- A partir de la gráfica original realice movimientos en el plano para obtener la gráfica de:

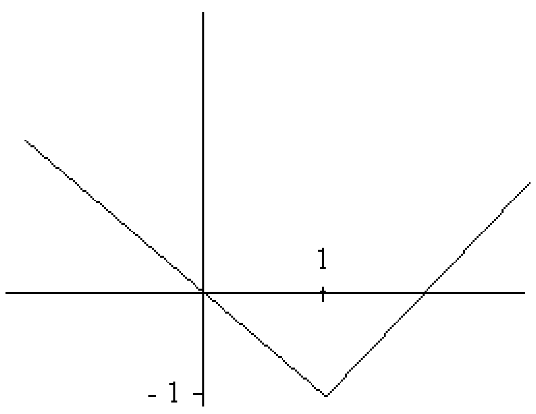
1. $f(x) = (x-4)^2$	2. $f(x) = x^2 + 3$	3. $f(x) = 4 - x^2$	4. $f(x) = 2 + \ln(x-1)$	5. $f(x) = 3 + \frac{1}{x-1}$

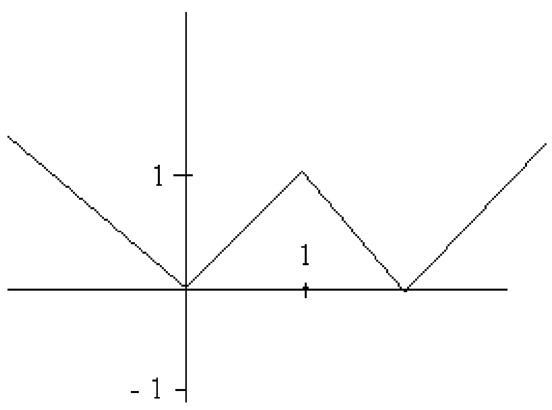
VIII.- Sea $f(x) = 3x - 2$. Graficar $f(x)$ y cada una de las siguientes funciones:

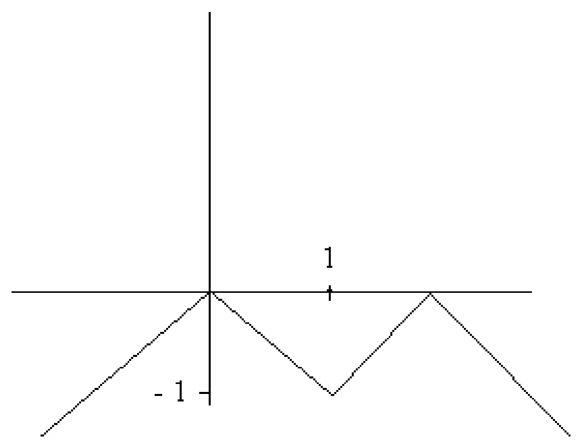
1. $f_1(x) = f(x) + 2$	2. $f_2(x) = f(x+2)$	3. $f_3(x) = 2f(x)$	4. $f_4(x) = -f(x)$	5. $f_5(x) = \lvert f(x) \rvert$

IX.- A la función $y = \lvert x \rvert$ se le han aplicado movimientos en el plano cartesiano. Escriba debajo de cada gráfica la ecuación correspondiente:

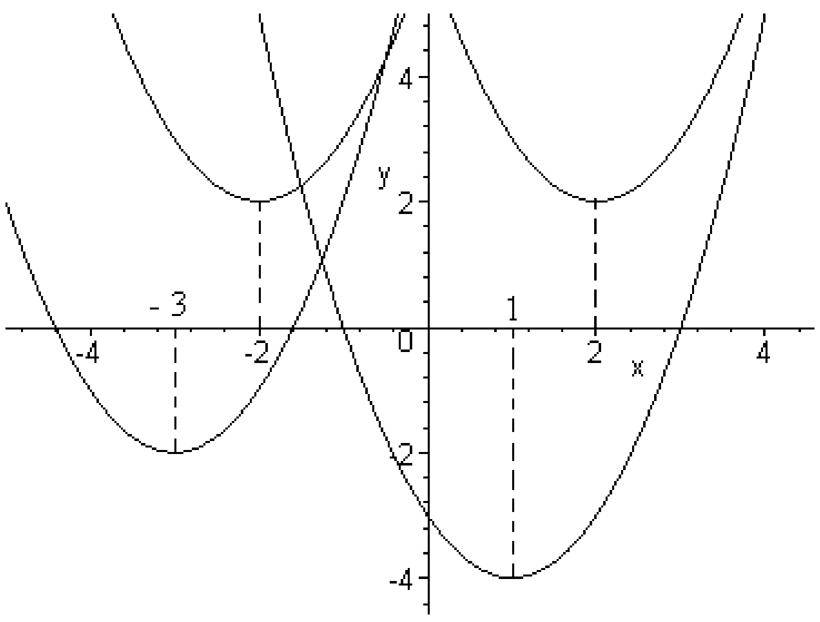








X.- Suponga que la función $y = x^2$ se ha desplazado en el plano originando las funciones dadas, conectar las gráficas con las ecuaciones dadas:



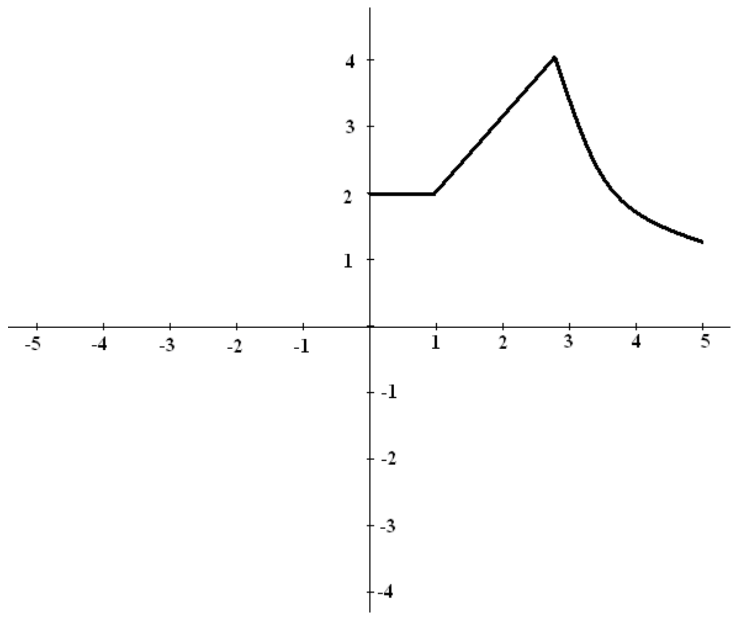
1. $y = (x+3)^2 - 2$

2. $y = (x-2)^2 + 2$

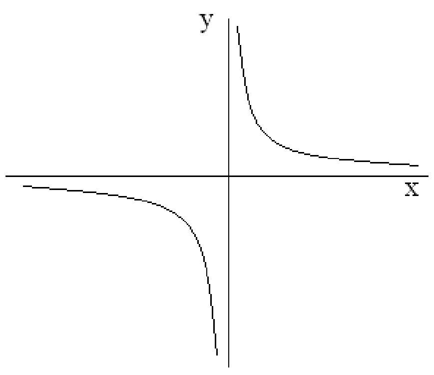
3. $y = (x+2)^2 + 2$

4. $y = (x-1)^2 - 4$

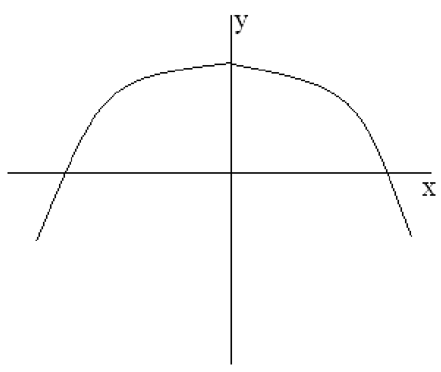
XI.- Sea f una función impar, cuyo dominio es $[-5, 5]$. Complete su gráfica:



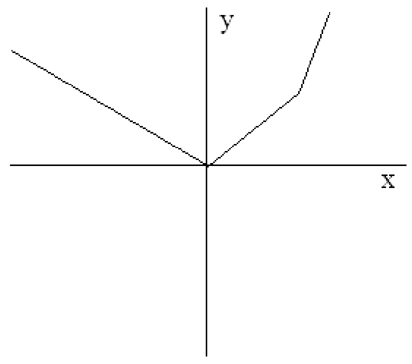
XII.- Señale cuál de las siguientes gráficas representa una función impar. (justifique la respuesta)



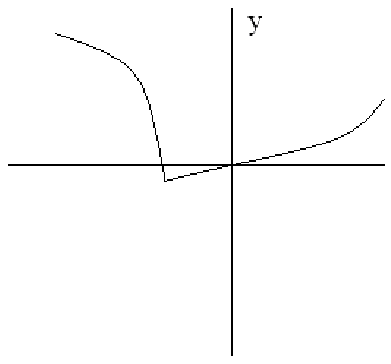
Grafica a



Grafica b



Grafica c



Grafica d

XIII.- Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos.

1. $f(x) = sen\, x\, tg\, x$
2. $g(x) = \sqrt{1-x}$
3. $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$
4. $i(x) = |x| + |x-1|$
5. $j(x) = \frac{2-x}{x}$
6. $k(x) = \frac{x+senx}{1+cosx}$
7. $l(x) = \frac{xsenx}{x^2+cos2x}$
8. $m(x) = \frac{1+x^2}{1+senx}$

XIV.- Trace la gráfica de la función y determine su dominio y su rango (recorrido)

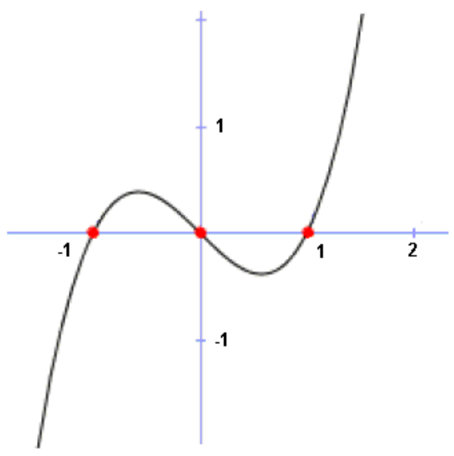
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x-3, & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

XV.- Sea $y = 3 + \sqrt{x-2}$ halle su dominio, compruebe que es uno a uno, halle su inversa y el dominio de la inversa

XVI.- Relacione las funciones de la columna de la izquierda con sus inversas de la derecha, colocando el número correspondiente.

1	$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$m(x) = x^2,\ x > 0$	
2	$g(x) = \ln(x-5)$		$n(x) = \dfrac{1-2x}{x-1}$	
3	$h(x) = x^3$		$s(x) = \dfrac{1}{x}$	
4	$i(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$		$t(x) = e^x + 5$	
5	$j(x) = \sqrt{x}$		$v(x) = \sqrt[3]{x}$	

XVII.- Busca una ecuación de la función polinómica que tiene por gráfica:



XVIII.- Sea $f(x) = (2x^2+3x-2)(x-k)$, si $f(1) = 18$, halla el valor de k y luego calcula ceros y determina los intervalos de positividad y de negatividad de $f(x)$. Traza un bosquejo de la gráfica.

XIX.- Halla la expresión y los intervalos de positividad y de negatividad de la función polinómica $f(x)$ de grado 3 que corta al eje x en los puntos $(-1, 0)$, $(-5, 0)$ y $(1, 0)$ y en la cual $f(0) = 2$.

XX.- Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus respectivos dominios para:

1. $f(x) = x + 1$, y $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$ y $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
3. $f(x) = 5x - 4$ y $g(x) = x^2 + 3x - 1$
4. $f(x) = \frac{1}{2x+4}$, y $g(x) = \sqrt{x}$

XXI.- Calcular la función inversa y dibújala junto con f e $y = x$ en un mismo plano.

1. $f(x) = 3x - 5$
2. $f(x) = x^2,\ x \geq 0$
3. $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5},\ x \geq 0$
5. $y = 3 + 2^{x-1}$.
6. $f(x) = \sqrt{x + 5}$
7. $f(x) = 3 + \log_2(x - 1)$

XXII.- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$. Halla su dominio, ecuaciones de las asíntotas. Halla su inversa y grafica la función, su inversa y la recta $y = x$.
XXIII.- Grafica las siguientes funciones, indica periodo, amplitud, desfase, desplazamiento

XXIV.- Problemas de aplicación.

1. Un árbol crece durante los tres primeros años, según la función $y = 2^x - 1$. Representa dicha función en los tres primeros años de vida del árbol.
2. El número y de bacterias en millones, en un cultivo, t horas después de iniciado el experimento viene dado por $y = f(t) = 20e^{t/3}$. Hallar:
   a) El número de bacterias al principio del experimento.
   b) El número de bacterias después de una hora y de dos horas.
   c) Graficar la función.
3. Si la demanda d se relaciona con el precio p de acuerdo con
$$d = 5p^2 - 2000p + 200000$$
   y la oferta f con el precio p de acuerdo con
$$f = 3p^2 + 200p$$
   determinar el precio para el cual la demanda se iguala con la oferta.
4. En las plantas de cierta especie A, el número de frutos por planta esta relacionado con el crecimiento vegetativo según la relación:
$$F = 20 - \frac{10}{c - 9}$$
   en donde, F es el número de frutos, c el crecimiento vegetativo expresado en cm y $10 \leq c < 89$. Determine:
   a) Dominio y recorrido de F
   b) Gráfico de F
   c) El máximo número de frutos obtenibles
5. De acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Si cierto objeto pasa de $125°$ a $100°$ en 30 minutos, cuando se encuentra rodeado por aire que tiene una temperatura de $75°$, entonces puede mostrarse que su temperatura $f(t)$ después de t horas está dada por $f(t) = 50 \cdot 2^{-2t} + 75$. Si $t = 0$ corresponde a la 1 pm, aproxime la temperatura a las:
   a) 2 pm. Resp. 87,5.
   b) 3 pm. Resp. 78,13.
   c) 4 pm. Resp. 75.78
   d) Trace la gráfica de f desde $t = 0$ hasta $t = 5$.

XXV.- Trigonometría.

1. Dibujar, indicando periodo, desfase, amplitud, frecuencia y desplazamiento vertical de
   a) $x_1(t) = 2sen(3t - \frac{\pi}{6})$
   b) $x_2(t) = 4sen(3t + \frac{\pi}{4})$
   c) $x_3(t) = 3sen(4t + \pi)$
2. Sabiendo que $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que α está en el $4°$ cuadrante, hallar el $sen\alpha$. Resp. $-\frac{1}{2}$
3. Sabiendo que $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y que α está en el $2°$ cuadrante, halla los valores de seno y coseno. Resp. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{3}{2}$
4. Resuelve la ecuación $cos2x = senx$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Resp. $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$
5. Resuelve la ecuación $3sen2x\, cosx = 6sen^3x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Resp.0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$

6. Resuelve en $[0, 2\pi]$ la ecuación $cos2x - cos6x = sen5x + sen3x$. Resp. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{2}$
7. Resolver $sen2x = senx$. Resp. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$
8. Resolver $\dfrac{2}{senx} = \dfrac{3}{cos^2x}$. Resp. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

XXVI.- Problemas varios

1. Un estudiante esta aprendiendo un idioma extranjero, después de t horas de estudio continuo es capaz de aprender

$$N(T) = 200(1 - 2^{-0,5t})$$

   a) ¿Cuántas palabras aprende en 4 horas de estudio continuo?
   b) ¿Cuánto tiempo debe estudiar para aprender 100 palabras?

2. El contenido y en miligramos de cierto medicamento en el organismo humano, después de t horas de ingerido se modela de acuerdo con la función:

$$y = 100 \cdot 5^{-0,5t}$$

   De acuerdo con este enunciado, desarrolle las siguientes preguntas:

   a) ¿Después de cuántas horas de ingerido el medicamento quedan 20 miligramos de él en el organismo?
   b) ¿Cuántos miligramos de medicamentos quedan en el organismo después de 4 horas de ingerido?

3. Un joven aprende a escribir en teclado y después de t semanas es capaz de digitar

$$N(t) = 80 \cdot (1 - 10^{-0,04t})$$

   palabras por minutos. Determinar $N(t)$ para $t = 4, 5$ y esbozar el gráfico

4. En un pueblo con 15000 habitantes se propaga una epidemia de influenza. Después de t días el número de residentes infectados es:

$$N(t) = \frac{2900}{(1 + 14999 \cdot 10^{-0,13t})}$$

   a) Determine el número de personas infectadas después de 5, 10 y 20 días
   b) Determine cuántos días, después del inicio, las $\frac{3}{4}$ partes de la población está infectada.

5. Dibujar, indicando periodo, desfase, amplitud, frecuencia y desplazamiento vertical de

   a) $x_1(t) = 2sen(3t - \frac{\pi}{6})$
   b) $x_2(t) = 4sen(3t + \frac{\pi}{4})$
   c) $x_3(t) = 3sen(4t + \pi)$

6. Representa gráficamente las siguientes funciones.

   a) $y = \log 3x$
   b) $y = 4\log x$
   c) $y = \log \frac{x}{2}$
   d) $y = \log(x + 3)$
   e) $y = \log\left(\frac{x+2}{3}\right)$
   f) $y = \log_2(-x)$