CAPÍTULO 3

LEY DE GAUSS

1.1 Flujo del Campo Eléctrico

$$\boxed{\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}}$$

1.2 Ley de Gauss

La ley de Gauss, que se aplica a cualquier superficie hipotética cerrada, llamada también "Superficie Gaussiana" (S.G .), establece una relación entre Φ_E para la superficie y carga encerrada por la superficie gaussiana. El vector $d\bar{s}$ es perpendicular a la superficie.

$$\boxed{\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q_{Neta}}$$

1.3 Algunas recomendaciones para la aplicación de la Ley de Gauss:

- Al escoger la superficie gaussiana se debe tener en cuenta la simetría de la distribución de carga, para poder evaluar fácilmente la integral de superficie.
- Se puede establecer el ángulo formado por $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ dibujando dichos vectores.
- La carga neta encerrada se considera con su respectivo signo.
- En un conductor la carga se encuentra localizada en su superficie; lo cual quiere decir que dentro del conductor la carga neta (q_{neta}) es CERO, por lo tanto $E = 0$

1.4 Densidad de Carga:

1.4.1 En un alambre, la densidad de carga lineal es:

$$\boxed{\lambda = \frac{q}{\ell}} \quad ; \quad \lambda : \frac{C}{m}$$

1.4.2 En una lámina, la densidad de carga superficial es:

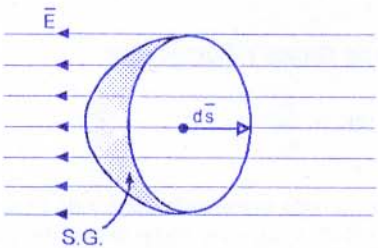
$$\boxed{\sigma = \frac{q}{A}} \quad ; \quad \sigma : \frac{C}{m^2}$$

1.4.3 En un material no conductor, la densidad de carga volumétrica es:

$$\boxed{\rho = \frac{q}{\text{volumen}}} \quad ; \quad \rho : \frac{C}{m^3}$$

1. Calcular Φ_E a través de un hemisferio de radio R. El campo E es uniforme y paralelo al eje de la semiesfera.

Solución:



Tomando nuestra superficie gaussiana al mismo hemisferio más la tapa de la base y considerando que Φ_E en una superficie cerrada es cero cuando no existen fuentes ni sumideros dentro de la superficie cerrada (S.G).

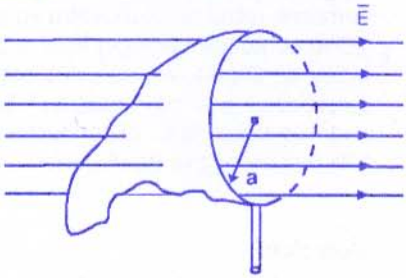
Entonces el flujo eléctrico a través de la superficie del hemisferio es numéricamente igual al flujo eléctrico a través de la tapa de la base (círculo de radio R).

Luego en: $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$ . . . . . (1)

Tenemos que: $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ tienen la misma dirección

Por lo tanto en (1): $\boxed{\Phi_E = E \oint d\bar{s} = E\,(\pi R^2)}$

2. Una red para cazar mariposas se encuentra en un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura. El aro de la red, que es un círculo de radio "a", es perpendicular al campo. Determinar el flujo eléctrico a través de la red.



Solución:

Sabemos que el flujo eléctrico en una superficie cerrada es igual a cero cuando no hay fuentes ni sumideros.

Entonces el flujo eléctrico a través de la red es numéricamente igual al flujo en el aro de la red. Por lo tanto:

$$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

Pero: $d\bar{s}$ es paralela a $\bar{E}$

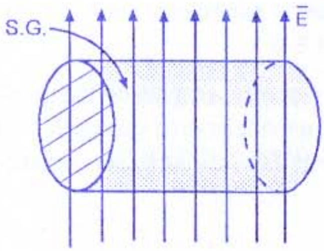
Luego: $\Phi_E = \oint \bar{E}\, d\bar{s}$

Además E es uniforme y sale de la integral: $\Phi_E = E \oint d\bar{s} = E(\pi a^2)$

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = \pi a^2 E}$$

3. Calcular Φ_E en un cilindro de tal forma que su eje sea perpendicular al campo eléctrico, $\bar{E}$.

Solución:



Aplicando la ley de Gauss sabemos que:

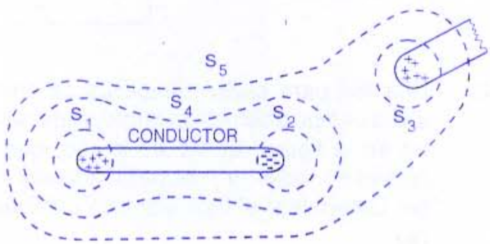
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

donde q es la carga neta encerrada dentro de la superficie gaussiana (S.G.); en este caso no existe, por lo tanto:

$$\boxed{\Phi_E = 0}$$

NOTA: La superficie gaussiana es la superficie misma del cilindro.

4. En un conductor aislado, descargado desde el origen se produce una separación de carga acercando una barra cargada positivamente, tal como se muestra en la figura. ¿Qué se puede decir del flujo, a partir de la ley de Gauss, en las cinco superficies gaussianas que se muestran? La carga negativa inducida en el conductor es igual a la carga positiva de la barra.



Solución:

De la figura:

La carga neta de la barra es +q y la carga neta del conductor es cero.

* Para S_1 la carga neta encerrada es +q.

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = q/\varepsilon_o}$$

* Para S_2 la carga neta encerrada es -q.

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = -q/\varepsilon_o}$$

* Para S_3 la carga neta encerrada es +q.

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = q/\varepsilon_o}$$

* Para S_4 la carga neta encerrada es +q - q = 0

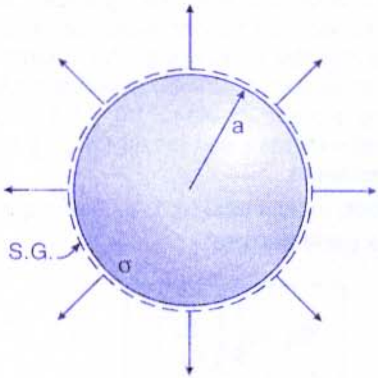
$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = 0}$$

* Para S_5 la carga neta encerrada es +q -q + q = +q

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = q/\varepsilon_o}$$

5. Una esfera conductora cargada uniformemente y de 1,0 m de diámetro tiene una densidad de carga superficial de 8,0 C/m². ¿Cuál es el flujo total que sale de la superficie de la esfera?

Solución:



Aplicando la ecuación: $\Phi_E = \dfrac{Q_{Neta}}{\varepsilon_o}$

Tenemos: $\Phi_E = \dfrac{\sigma(A)}{\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma(4\pi a^2)}{\varepsilon_o}$

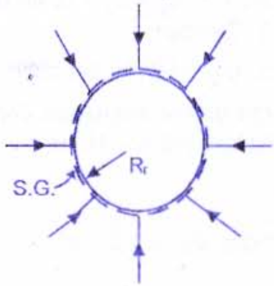
Reemplazando valores tenemos:

$$\Phi_E = \frac{8{,}0\left[4\pi(0{,}5)^2\right]}{8{,}85.10^{-12}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Phi_E = 2{,}84.10^{12}\,\frac{N.m^2}{C}}$$

6. La intensidad del campo eléctrico terrestre cerca de su superficie es aproximadamente 130 N/C y apunta hacia abajo. ¿Cuál es la carga de la Tierra, suponiendo que este campo sea causado por tal carga?

Solución:



Sabemos que:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots(1)$$

También: $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$ ..... (2)

Igualando (1) y (2): $\dfrac{Q}{\varepsilon_o} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$ ..... (3)

Como $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ forman un ángulo de 180° (vectores opuestos) tenemos en (3):

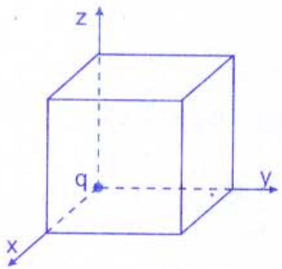
$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = -E\,(4\,\pi\,R^2_T) \;\Rightarrow\; Q = -\,\varepsilon_o\,E\,(4\,\pi\,R^2_T)$$

Reemplazando valores: $Q = -(8{,}85.10^{-12})\,(130)\,[4\,\pi\,(6{,}37.10^6)^2]$

$$\therefore \quad \boxed{Q = -6.10^5\ C}$$

7. En uno de los vértices de un cubo de arista "a" se coloca una carga puntual "q". ¿Cuál es el flujo Φ_E a través de las caras del cubo? (Sugerencia: utilizar la ley de Gauss y argumentos de simetría).

Solución:



En primer lugar debemos observar que el flujo de la carga "q" se distribuye en tres cargas del cubo. Además imaginemos que la carga "q" mostrada, debe quedar en el centro de un cubo más grande, para lograr ésto tendríamos que dibujar siete cubos más aparte del que se muestra en la figura. Por lo tanto la carga "q" estaría en el centro de ocho cubos como los de la figura puesto que con los ejes x (+), y (+) y z (+) se construyen cuatro cubos y con los ejes x (-), y (-) y z (-) los cuatro restantes.

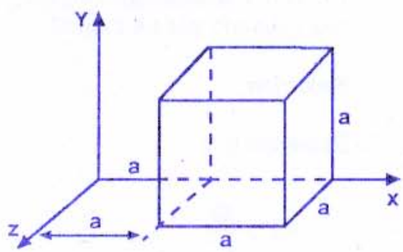
En conclusión al estar en el centro de los OCHO cubos, el flujo total es "q/ε_o" pero como queremos el flujo sobre un cubo, éste será la octava parte del total.

$\therefore$ El flujo sobre el cubo de la figura será: $\boxed{\Phi_E = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{q}{\varepsilon_o}\right)}$

8. Las componentes del campo eléctrico en la figura son $E_x = b\,.\,x^{1/2}$, $E_y = E_z = 0$, en donde $b = 800$ N/(C.m$^{1/2}$). Calcular:

a) El flujo Φ_E a través del cubo.

b) La carga que se encuentra dentro del cubo. Supongase que a = 10 cm.



Solución:

a) Sabemos: $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$ ..... (1)

Tenemos: $\bar{E} = (E_x; E_y ; E_z) = (bx^{1/2}; 0; 0)$ y

$$\nabla \cdot \bar{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot (bx^{1/2} ; 0 ; 0)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{b}{2} x^{-1/2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \iiint_v \nabla \cdot \bar{E}\, dv \qquad \ldots\ldots (3)$$

Reemplazando (2) en (3) tenemos: $\Phi_E = \frac{b}{2} \int_o^a \int_o^a \int_o^{2a} x^{-1/2}\, dx\, dy\, dz$

Resolviendo: $\Phi_E = \frac{b}{2} \int_o^a \int_o^a \left[2\, x^{1/2} \right]_a^{2a} dy\, dz$

$$= \frac{b}{2} \int_o^a \int_o^a (2\sqrt{2a} - 2\sqrt{a})\, dy\, dz$$

$$= \frac{b}{2} (2\sqrt{2a} - 2\sqrt{a})\, a^2$$

$$\Phi_E = \frac{b}{2} (2\sqrt{2} - 2) a^{5/2}$$

Reemplazando datos obtenemos: $\boxed{\Phi_E = 1{,}047\ \frac{N.m^2}{C}}$

b) De: $q_{neta} = \varepsilon_o . \Phi_E$

Obtenemos:

$$q_{neta} = 8{,}85.10^{-12}\ \frac{C^2}{N.m^2} \cdot 1{,}047\ \frac{N.m^2}{C}$$

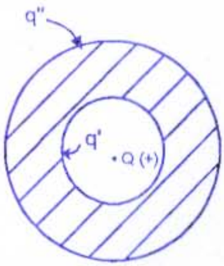
$$\therefore \qquad \boxed{q_{neta} = 9{,}266.10^{-12}\, C}$$

9. Un conductor aislado tiene una carga total de $+10.10^{-6}$ C. Dentro del conductor hay una cavidad en la cual se encuentra una carga puntual Q de $+3{,}0.10^{-6}$ C. ¿Cuál es la carga?

a) En la pared de la cavidad.

b) En la superficie externa del conductor.

Solución:



La carga total de $+10.10^{-6}$ C está distribuída en su superficie externa. La carga puntual colocada en el interior de la cavidad de $Q = +3,0.10^{-6}$ C induce en la pared de la cavidad una carga de $q' = -3,0.10^{-6}$ C de tal forma que la carga en la superficie externa del conductor es: $q'' = +13.10^{-6}$ C puesto que siempre:

$$q' + q'' = +10.10^{-6}\,C$$

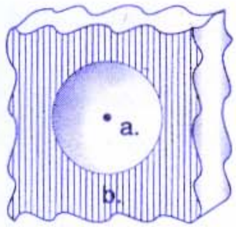
Por lo tanto la respuesta en: a) $\boxed{-3,0.10^{-6}\,C}$

b) $\boxed{+13.10^{-6}\,C}$

10. La figura muestra una carga puntual de $1,0.10^{-7}$C, en el centro de una cavidad esférica de 3,0 cm de radio en una pieza metálica. Utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico.

a) En el punto "a", que se encuentra a la mitad de la distancia del centro de la superficie.

b) En el punto "b".



Solución:

De la ley de Gauss sabemos:

$$\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q_{NETA\ ENCERRADA} \quad \ldots\ldots (1)$$

Además, como $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ forman 0°

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = E(s) = E(4\pi r^2)$$

donde $\bar{E}$ es uniforme y S es la superficie gaussiana esférica de radio r.

Luego en (1):

$$\varepsilon_o E(4\pi r^2) = q \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

a) Para el punto "a" : $r_a = r/2$, entonces

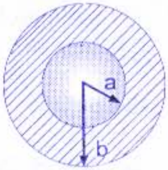
En (2): $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

Reemplazando valores: $E = 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2} \cdot \frac{1.10^{-7}\,C}{(1,5.10^{-2})^2\,m^2} \Rightarrow \boxed{E = 4.10^6\ N/C}$

b) Para el punto "b": la carga "q" induce la superficie de la cavidad esférica "-q" por lo tanto $q_{NETA\ ENCERRADA} = 0$.

Luego de (2) concluimos que: $\boxed{E_b = 0}$

11. La figura muestra un casquete esférico no conductor cargado con una densidad de carga uniforme ρ (C/m^3). Trazar una gráfica de E como función de la distancia r, medida desde el centro de la esfera, cuando su valor varía desde 0 hasta 30 cm. Supóngase que:



$\rho = 1{,}0.10^{-6}\ C/m^3$, a = 10 cm y b = 20 cm

Solución:

Determinamos los valores de "E" para las diversas distancias del centro sabiendo que:

$$\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q_{Neta\ Encerrada} \qquad \ldots\ldots (1)$$

* Para r < a:

Tomando la superficie gaussiana esférica de radio menor que "a" tenemos:

$$q_{Neta\ Encerrada} = 0 \Rightarrow \boxed{E = 0}$$

* Para a < r < b:

Tomando la S.G. de radio "r" tenemos que:

$$q = \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)\rho = q_{N.E.} \quad y \quad S = 4\pi r^2$$

En (1): $\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right)}$

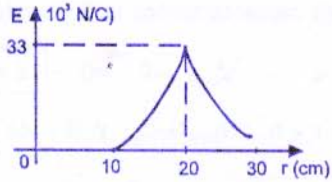
* Para b < r:

En forma análoga tenemos:

$$q = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho \quad y \quad S = 4\pi r^2$$

En (1): $\boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\frac{b^3 - a^3}{r^2}\right)}$

Luego la gráfica es la siguiente:

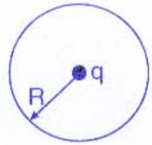


12. Una esfera hueca, metálica, de paredes delgadas, descargada, tiene una carga puntual "q" en su centro. Obtener las expresiones del campo eléctrico, utilizando la ley de Gauss:

a) En el interior de la esfera y,
b) En el exterior de la esfera.
c) ¿Altera en algo la esfera el campo debido a "q"?
d) ¿Produce la carga "q" algún efecto en la esfera?
e) Si se coloca una segunda carga en el exterior de la esfera, ¿experimenta esta carga externa alguna fuerza?
f) ¿Siente la carga interna alguna fuerza?
g) ¿Existe, en este caso, alguna contradicción con la tercera ley de Newton?

Solución:

a) Por la ley de Gauss: $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_o} =$, entonces:



$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r^2}}$$

Con $r < R$ obtenemos lo mismo que en (a) ya que $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ forman un ángulo de 0°.

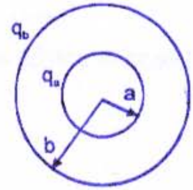
b) Para $r > R$ obtenemos lo mismo que en (a) ya que "q" (carga neta encerrada) es la misma.
c) No, porque no posee carga.
d) Si, se inducen cargas en las superficies.
e) Si, debido a "q".
f) No, porque no interactúa con otras cargas.
g) No, porque no existe ninguna fuerza.

13. Una esfera metálica hueca de paredes delgadas y de radio "a" tiene una carga q_a. Concéntrica con ella hay otra esfera metálica hueca de paredes delgadas de radio b (b > a), con una carga q_b. Utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en puntos que se encuentran a una distancia "r" del centro de las esferas cuando:

a) $r < a$
b) $a < r < b$
c) $r > b$
d) ¿Cómo se distribuye la carga de cada esfera entre su superficie interna y externa?

Solución:

Para todos los casos tomamos la S.G. esférica de radio r.



a) Para $r < a$: $q_{N.E.} = 0 \implies \boxed{E = 0}$

b) Para $a < r < b$: $q_{N.E} = q_a$ y $S = 4\pi r^2$

Luego en: $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \dfrac{q_a}{\varepsilon_o}$ obtenemos:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{q_a}{r^2}}$$

c) Para $r > b$: $q_{N.E.} = q_a + q_b$ y $S = 4\pi r^2$

Luego: $\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{q_a + q_b}{\varepsilon_o}$ obtenemos:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_a + q_b}{r^2}\right)}$$

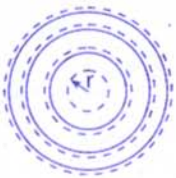
d) Esfera de radio "a" :
superficie externa: q_a

Esfera de radio b:
Superficie interna: $-q_a$
Superficie externa: $q_a + q_b$ $\Big\}$ $\boxed{\text{Carga neta} = q_b}$

14. Una esfera no conductora de radio "a" está colocada en el centro de una esfera conductora hueca cuyo radio interno es "b" y cuyo radio externo es "c", tal como se muestra en la figura. En la esfera interna está distribuida uniformemente una carga +Q (con una densidad de carga " ρ " en C/m³). La carga de la esfera externa es -Q. Determinar $E_{(r)}$:

a) dentro de la esfera interna ($r < a$),
b) entre la esfera interna y la externa ($a < r < b$),
c) entre las superficies de la esfera hueca ($b < r < c$) y
d) fuera de las esferas externa ($r > c$)
e) ¿Cuáles son las cargas sobre las superficies interna y externa de la esfera hueca?

Solución:



a) Aplicando la ley de Gauss para $r < a$:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q_{\text{Neta Encerrada}}}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots (1)$$

Pero: $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \dfrac{3Q}{4\pi a^3}$

Como es uniforme. Entonces $\bar{E}$ tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana y es paralelo a $d\bar{s}$.

Luego en (1):

$$\oint E.ds = \frac{\rho\,(\text{volumen})}{\varepsilon_o} = \frac{\rho\,(4/3\,\pi r^3)}{\varepsilon_o}$$

$$\oint E.ds = \left(\frac{3\,Q}{4\,\pi\,a^3} \right) \left(\frac{4\,\pi\,r^3}{3\,\varepsilon_o} \right)$$

$$E(\,4\,\pi\,r^2\,) = \frac{Q\,r^3}{\varepsilon_o\,a^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,d^3} \cdot r}$$

b) Para $a < r < b$ se tiene:

$$\oint E.ds = \frac{Q_{\text{Neta encerrada}}}{\varepsilon_o}$$

$$E\,(\,4\,\pi\,r^2\,) = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,r^2}}$$

c) Para $b < r < c$:

$$\oint E.ds = \frac{Q_{\text{Neta Encerrada}}}{\varepsilon_o}$$

Pero $Q_{\text{Neta Encerrada}}$ es cero, porque en $r = b$ se tiene $-Q$.

Entonces: $E = 0$

d) Para $r > c$:

$$\oint E.ds = \frac{Q_{\text{Neta Encerrada}}}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

e) La carga en la superficie interna en la esfera hueca es $-Q$ inducida por $+Q$ y en la superficie externa es cero para que así la carga neta sea $-Q$ en la esfera hueca.

15. Un conductor de forma irregular tiene una cavidad irregular. El conductor se carga con $+q$, pero dentro de la cavidad no hay carga. Demostrar que:

a) dentro de la cavidad $E = 0$
b) no hay carga en la pared de la cavidad.

Solución:

Graficando el conductor:

Sabemos que en todo conductor cargado, la carga se distribuye en la superficie externa.

a) Para S.G. esférica de radio r tenemos:

$$q_{N.E.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

b) Suponiendo que existe una carga q_1 en la superficie de la cavidad.

I) Si q_1 es positivo $\Rightarrow$ la carga total del conductor será $q + q_1$.

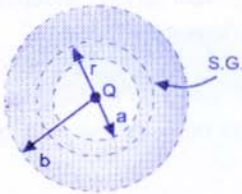
II) Si q_1 es negativo $\Rightarrow$ la carga total del conductor será $q - q_1$.

De (I) y (II) concluimos que q_1 debe ser cero ya que la carga total del conductor es q.

16. La región esférica caracterizada por $a < r < b$ tiene una carga por unidad de volumen $\rho = A/r$, en donde A es una constante. En el centro de la cavidad ($r = 0$) hay una carga puntual Q. ¿Cuál debe ser el valor de A para que el campo eléctrico en la región $a < r < b$ tenga una magnitud constante?

Solución:

Aplicando la ley de Gauss:



$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q_{Neta}}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots (1)$$

$\bar{E}$ es radial puesto que la distribución de carga también es radial luego $\bar{E}$ y $d\bar{s}$ tienen el mismo sentido; además $\bar{E}$ tiene el mismo valor a una distancia "r" por depender sólo de "r".

En segundo lugar la carga neta encerrada por la superficie gaussiana es:

$$Q_{Neta} = Q + \int_{r=a}^{r=r} \rho\, dv$$

donde : $\rho = \frac{A}{r}$, $dv = 4\pi r^2 dr$ y Q carga ubicada en el centro ($r = 0$).

Luego en (1): $$E(4\pi r^2) = \frac{Q + \int_{r=a}^{r=r} (A/r)(4\pi r^2)\, dr}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q + 4\pi A \int_{r=a}^{r=r} r\, dr}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q + 4\pi A\left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Ahora como E debe ser constante en toda región donde ($a < r < b$) entonces se debe cumplir que $E_{(r=a)} = E_{(r=b)}$, de donde se tiene que:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^2} = \frac{Q + 4\pi A\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_o b^2}$$

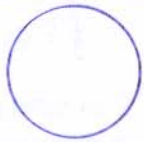
Operando tenemos que:

$$\boxed{A = \frac{Q}{2\pi a^2}}$$

17. Una esfera sólida, no conductora, tiene una carga por unidad de volumen uniforme Sea r el vector que va del centro de la esfera a un punto arbitrario P dentro de la misma.

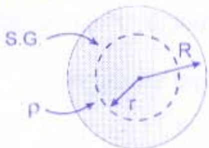
a) Demostrar que el campo eléctrico en P está dado por $E = \rho\, r/(3\,\varepsilon_o)$.

b) En la esfera se practica una "cavidad" esférica como se muestra en la figura. Demostrar utilizando los conceptos de superposición, que el campo eléctrico en todos los puntos de la cavidad es:
$E = \rho\, a/(3\,\varepsilon_o)$ (un campo uniforme), en donde a es el vector que va del centro de la esfera al centro de la cavidad. Nótese que los dos resultados son independientes de los radios de la esfera y de la cavidad.



Solución:

a)



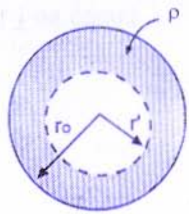
Aplicando la ley de Gaus se tiene:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{Q_{Neta}}{\varepsilon_o}$$

Pero como ρ es uniforme, $\bar{E}$ también lo es en todos los puntos de la superficie gaussiana y paralelo a $d\bar{s}$, luego:

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o} r}$$

b) Al practicar una cavidad esférica de radio r_o. Podemos determinar la contribución al campo eléctrico de la esfera de radio r_o y densidad volumétrica uniforme ρ.



Aplicando la Ley de Gauss idéntico al caso (a) se obtiene:

$$E' = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o}\cdot r'$$

Luego por superposición el campo en la cavidad esférica practicada es:

$$E_0 = E - E' = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o}(r - r')$$

pero: $r - r' = a$ distancia del centro de la esfera al centro de la cavidad.

Finalmente: $$\boxed{E_o = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o}\cdot a}$$

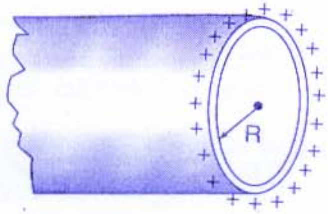
Como a es constante, entonces E_o es uniforme.

18. La figura muestra la sección de un tubo metálico largo, de paredes delgadas y de radio R, que en su superficie una carga por unidad de longitud λ. Encontrar una expresión de E para diferentes distancias r medidas desde el eje, considerando tanto que:

a) $r > R$ como,

b) $r < R$

Representar gráficamente los resultados en el intervalo que va de $r = 0$ hasta $r = 5$ cm, suponiendo que: $\lambda = 2{,}0.10^{-8}$ C/m y que $R = 3{,}0$ cm.



Solución:

Tomamos la S.G. cilíndrica de radio r concéntrica al tubo y aplicando:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \frac{q_{N.E.}}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots (1)$$

a) $r > R$:

En (1): $\varepsilon_o \oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = q_{N.E.} = \lambda L$

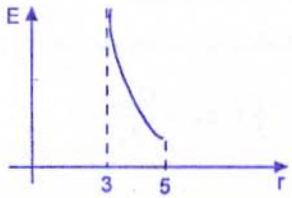
$$\varepsilon_o E(2\pi r)L = \lambda L \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}}$$

b) $r < R$:

$q_{N.E.} = 0$

Entonces en (1): $\boxed{E = 0}$

Graficando:

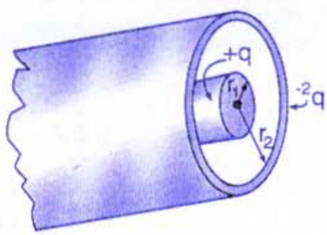


19. En la figura se muestra la sección transversal de un cilindro conductor largo con una carga total +q, rodeado por un tubo cilíndrico con una carga total -2q. Utilizar la ley de Gauss para encontrar:

a) el campo eléctrico en aquellos puntos fuera del tubo cilíndrico,

b) la distribución de carga en el tubo cilíndrico y

c) el campo eléctrico en la región intermedia entre los cilindros.



Solución:

Suponiendo la longitud de los conductores ℓ, tomamos la S.G. cilíndrica de radio "r" y longitud ℓ concéntrica a ambos conductores.

a) $r > r_2$:

$$q_{N.E.} = q - 2q = -q$$

Luego: $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = -q \Rightarrow \varepsilon_o (2 \pi r \ell) = -q$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{q}{2 \pi \varepsilon_o r \ell}}$$ (-): radialmente hacia adentro.

b) En la superficie interior es inducida: -q, en la superficie exterior es: -q, ya que la carga neta del tubo cilíndrico es -2q.

c) $r_1 < r < r_2$:

$$q_{N.E.} = +q$$

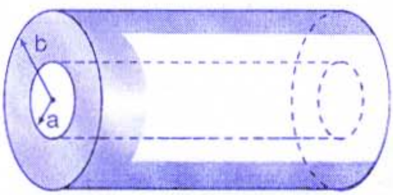
Luego: $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = +q \Rightarrow \varepsilon_o (2 \pi r \ell) = +q$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{q}{2 \pi \varepsilon_o r \ell}}$$

20. Los radios de dos cilindros concéntricos cargados son 3,0 y 6,0 cm. La carga por unidad de longitud del cilindro interno es de $5{,}0.10^{-6}$ C/m y la del cilindro externo es de $-7{,}0.10^{-6}$ c/m Encontrar el campo eléctrico en:

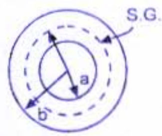
a) r = 4,0 cm y
b) r = 8,0 cm.

Solución:



a) Aplicando la ley de Gauss para: a < r < b

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q_{Neta}}{\varepsilon_o}$$



Pero: $Q_{Neta} = \lambda_a (\ell)$ y $\bar{E}$ es uniforme y paralelo a $d\bar{s}$ por ser λ_a constante.

Entonces: $$E \oint 2 \pi r \, d\ell = \frac{\lambda_a (\ell)}{\varepsilon_o}$$

$$E (2 \pi r \ell) = \frac{\lambda_a (\ell)}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{\lambda_a}{2 \pi r \varepsilon_o}$$

Reemplazando valores para r = 4 cm, se tiene:

$$E = \frac{5{,}0.10^{-6}}{2 \pi (4.10^{-2})(8{,}85.10^{-12})}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = 22{,}48.10^5 \text{ N/C}}$$

b) Aplicando la ley de Gauss para (r > b):

$$E\,(2\,\pi\, r\,\ell) = \frac{|(\lambda_a + \lambda_b)|.\ell}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{|(\lambda_a + \lambda_b)|}{2\,\pi\,\varepsilon_o\, r}$$

Reemplazando valores para r = 8 cm se tiene:

$$E = \frac{|(5.10^{-6} - 7.10^{-6})|}{2\,\pi\,\varepsilon_o\,(8.10^{-2})}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = 4{,}5.10^5 \text{ N/C}}$$

21. La figura muestra la sección de dos cilindros concéntricos largos de radios a y b. Los cilindros tienen cargas por unidad de longitud λ , iguales y opuestas. Utilizando la ley de Gauss demostrar:

a) que E = 0 si r > b y si r < a y
b) que el valor de E entre los cilindros está dado por:

$$E = \frac{1}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\cdot\frac{\lambda}{r}$$

Solución:

Sabemos que por la ley de Gauss: $\varepsilon_o \oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = q_{Neta}$

a) * Para r > b:

Como: $\lambda_a = -\lambda_b \Rightarrow \dfrac{q_a}{\ell} = -\dfrac{q_b}{\ell}$

De donde: $q_a = -q_b$

Luego la carga neta encerrada es: $q_a + q_b = 0$

$$\therefore \quad \boxed{E = 0}$$

* Para r < a:

La carga neta encerrada es cero: $\therefore \quad \boxed{E = 0}$

b) Para $a < r < b$:

La carga neta es $q_a = \lambda\,\ell$

Además: $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \lambda \ell$; $\varepsilon_o E(2\pi r \ell) = \lambda \ell$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{\lambda}{r}}$$

22. A lo largo de un cilindro infinito de radio R se distribuye uniformemente una carga.

a) Demostrar que E, para distancias r medidas desde el eje del cilindro ($r < R$), está dada por:

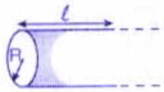
$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}$$

en donde ρ es la densidad de carga.

b) ¿Cuál sería el resultado esperado para $r > R$?

Solución:

Graficando el cilindro:



Superficie Gaussiana: cilindro concéntrico de radio r.

a) Sabemos que: $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q_{Neta}$ . . . . . (1)

Además: $\rho = \dfrac{q}{\pi r^2 \ell} \Rightarrow q = \rho \pi r^2 \ell \quad (r \langle R)$

En (1): $\varepsilon_o E(2\pi r \ell) = \rho \pi r^2 \ell$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}}$$

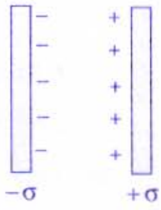
b) Para $r > R$ la carga neta es: $q = \rho \pi R^2 \ell$

Luego en (1): $\varepsilon_o E(2\pi r \ell) = \rho \pi R^2 \ell \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}}$

23. Dos grandes láminas metálicas están colocadas como se muestra en la figura y sus superficies internas están cargadas con una densidad de carga superficial $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente. ¿Cuál es el valor de E en los puntos que se encuentran:

a) A la izquierda de las láminas,
b) entre ellas y
c) a la derecha de las láminas.

No se consideran los puntos cercanos a las orillas de las láminas, sólo aquellos cuya distancia a la lámina es pequeña en comparación con las dimensiones de ésta.



Solución:

a) Por la ley de Gauss: $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q_{Neta} = \sigma . s$ . . . . . (1)

Pero $\sigma = 0$ en las superficies exteriores de las placas.

Luego en (1): $\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$

E_o y $d\bar{s}$ no pueden ser cero, entonces concluimos que:

$$\boxed{E = 0}$$

b) Como $\bar{E}$ es uniforme, tenemos que:

$$\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \sigma . s \quad ; \quad \varepsilon_o E.S = \sigma . s$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}} \quad \text{hacia la izquierda.}$$

24. Dos grandes láminas no conductoras con carga positiva están colocadas como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de E en los puntos que se encuentra:

a) a la izquierda de las láminas,
b) entre las láminas y
c) a la derecha de las láminas?

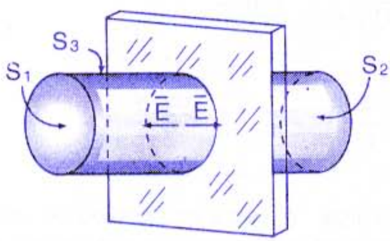
Supóngase que las dos láminas tienen la misma densidad superficial de carga σ. No se consideren puntos que se encuentren cerca de las orillas de las láminas y sólo aquellos cuya distancia a la lámina es pequeña en comparación con las dimensiones de ésta. (Sugerencia: E en un punto cualquiera es la suma vectorial de los campos eléctricos individuales debidos a cada una de las láminas).

Solución:

Analicemos una de las láminas, considerando la S.G. un cilindro para aprovechar su simetría.

De: $$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

podemos expresarlo así: $$\oint_{s_1} \bar{E} \cdot d\bar{s}_1 + \oint_{s_2} \bar{E} \cdot d\bar{s}_2 + \oint_{s_3} \bar{E} \cdot d\bar{s}_3 = \frac{\sigma\, s_1}{\varepsilon_o} \quad . \quad \ldots . (1)$$



de la figura: $S_1 = S_2 =$ área de la base del cilindro.

S_3 = área lateral del cilindro.

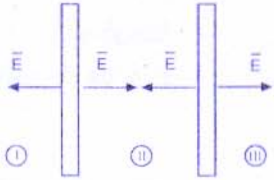
Entonces: $\bar{E} \cdot d\bar{s} = o$

Luego en (1):

$$E.S_1 + ES_1 = \frac{\sigma . s_1}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}}$$

Juntando las dos láminas, tendremos:

$$E_I = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} + \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad \text{hacia la izquierda}$$



$$E_{II} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} - \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} = o$$

$$E_{III} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} + \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad \text{hacia la derecha.}$$

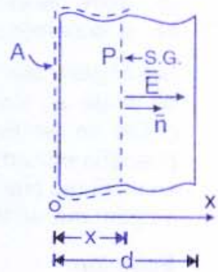
25. Una placa no conductora de espesor "d" tiene una densidad de carga volumétrica ρ uniforme. Determinar la magnitud del campo eléctrico:

a) dentro,
b) fuera de la placa.

Solución:

a) Graficando la placa:

Aplicamos la ley de Gauss para el interior de la placa:



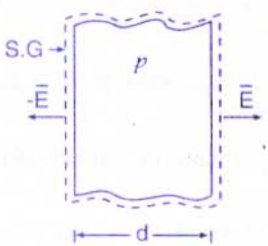
$$\oint \bar{E}\cdot\bar{n}\, ds = \frac{\oint_0^x \rho A dx}{\varepsilon_o}$$

$$E \oint ds = \frac{\rho . A . x}{\varepsilon_o}$$

$$E(s) = \frac{\rho . A . x}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{\rho . x}{\varepsilon_o}$$

Notar que para x = d: $\boxed{E = \frac{\rho . d}{\varepsilon_o}}$

b)



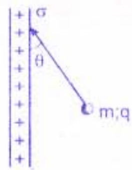
Aplicamos la ley de Gauss para puntos exteriores a la placa:

$$\oint \bar{E}\cdot\bar{n}\, ds + \oint \bar{E}\cdot\bar{n}\, ds = \frac{\rho . d . A}{\varepsilon_o}$$

$$E.A + E.A = \frac{\rho . d . A}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho . d}{2\,\varepsilon_o}}$$

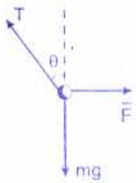
26. Una pequeña esfera cargada de masa "m" y carga "q" está suspendido de un hilo de seda que forma un ángulo "θ" con respecto de una gran superficie conductora, plana y

cargada, tal como se muestra en la figura. Determinar la densidad superficial de carga σ de la lámina.



Solución:

D.C.L. de la esfera:



Sabemos que de la placa:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \quad \ldots\ldots (1)$$

Y para la esfera:

$$F = q \cdot E \quad \ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2):

$$\sigma = F\,\frac{\varepsilon_o}{q} \quad \ldots\ldots (3)$$

Del D.C.L.:

$$\text{Tg}\,\theta = \frac{F}{mg} \implies F = mg\,.\,\text{Tg}\,\theta \quad \ldots\ldots (4)$$

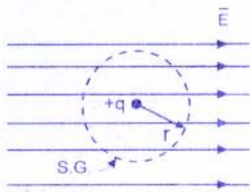
Reemplazando (4) en (3):

$$\boxed{\sigma = \frac{mg\,\varepsilon_o\,\text{Tg}\,\theta}{q}}$$

27. Demostrar que es imposible lograr el equilibrio estable por la acción única de fuerzas electrostáticas. (Sugerencia: Supóngase que al colocar una carga +q en cierto punto P en un campo E, ésta queda en equilibrio estable -lo cual ocurre-. Trace una superficie gaussiana esférica en torno a P; imagínese el sentido en el que debe apuntar E sobre esta superficie y aplíquese la ley de Gauss).

Solución:

Recordemos el concepto de equilibrio estable: "Cuando un cuerpo en equilibrio es desplazado ligeramente, los valores, sentidos y líneas de acción de las fuerzas que actúan sobre él pueden cambiar.
Si las fuerzas en la posición desplazadas son tales que hacen volver al cuerpo a su posición inicial, el equilibrio es estable".



Ahora al colocar la carga +q en el punto P del campo $\bar{E}$, inicialmente, ésta queda en equilibrio estable, luego al aplicar la ley de Gauss a ésta carga, hallamos que:

$$\varepsilon_o \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = q \implies E = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,r^2}$$

Entonces, debe existir un campo "restituyente" lo cual es imposible crear, por lo que es imposible lograr el equilibrio estable por la acción única de fuerzas electrostáticas.