Ciencias de la Computación II

Lenguajes Regulares y Construcción de Autómatas

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

14 de septiembre de 2016

Unión de Lenguajes

Supongamos que $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, F_1, \Delta_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, F_2, \Delta_2)$ son AFN. Podemos unir M_1 y M_2 en un nuevo AFN que acepte $L(M_1) \cup L(M_2)$, añadiendo un nuevo estado inicial s y dos ϵ-transiciones, una de s a s_1 y otra de s a s_2. Formalmente el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ viene dado por $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $F = F_1 \cup F_2$ y $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$, donde s es el nuevo estado inicial y Δ se define de forma que se incluyan todas las transiciones de Δ_1, Δ_2 y las dos nuevas ϵ-transiciones de s a s_1 y s_2. De esta manera tenemos

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s_2)\}$$

Concatenación de Lenguajes

Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, F_1, \Delta_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, F_2, \Delta_2)$ dos AFN. Podemos unirlos para formar un AFN que acepte $L(M_1)L_(M_2)$. Se necesita un AFN que reconozca una cadena de $L(M_1)$ y después reconozca una de $L(M_2)$. Es decir, un recorrido hasta un estado de aceptación para admitir la cadena en su totalidad, primero debe pasar por un estado de aceptación M_1 y después pasar (y terminar) en un estado de aceptación de M_2. Esto se realiza mediante una ϵ-transición desde un estado final de M_1 al estado inicial de M_2. Formalmente tenemos que el nuevo AFN es $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ está dado por $Q = Q_1 \cup Q_2$, $s = s_1$, $F = F_2$ y

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup (F_1 \times \{\epsilon\} \times \{s_2\})$$

Cerradura estrella de Lenguajes

Un procedimiento para construir un AFN que acepte $L(M)^*$ para el AFN $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta$ como sigue. Primero se añade un nuevo estado inicial s'; se hará que este estado sea además un estado de aceptación con el fin de que ϵ sea aceptada. Entonces, se permite una ϵ-transición desde s' al antiguo estado inicial s. Por tanto, M comenzará una vez que M' se encuentre en s'. Se tendrá además una ϵ-transición desde todos los estados de aceptación hasta el estado inicial s'. Una vez que la cadena de $L(M)$ ha sido agotada, el análisis puede continuar a partir del estado inicial de M o terminar en s'. El AFN $M' = (Q', \Sigma, s', F', \Delta'$ resultante queda $Q' = Q \cup \{s'\}$, $F' = \{s'\}$ y

$$\Delta = \Delta \cup \{(s', \epsilon, s)\} \cup (F \times \{\epsilon\} \times \{s'\})$$

Lema del Bombeo

Lema del Bombeo

Sea L un lenguaje regular infinito. Entonces hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual que n, se tiene $w = uvx$, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$.

Supongamos que un lenguaje es regular y que, por tanto, es aceptado por un AFD $M = (Q, \Sigma, s, F, \delta$, donde Q contiene n estados. Si $L(M)$ es infinito, podemos encontrar cadenas cuya longitud sea mayor que n. Supongamos $w = a_1a_2...a_{n+1}$ una cadena de longitud $n+1$ que pertenece a $L(M)$. Si tuvieramos que $q_1 = \delta(q_0, a_1)$,$q_2 = \delta(q_1, a_2)$,..., y así sucesivamente, obtedríamos $n+1$ estados de Q, pero como Q tiene sólo n, entonces no todos son distintos. En consecuencia, para algunos índices j y k con $1 \leq j < k \leq n+1$, se tiene que $q_j = q_k$. Adempas, se puede dar vueltas en el ciclo tantas veces como se quiera.

Ejemplo

Sea el lenguaje $L = \{a^m b^m | m \geq 0\}$. Probemos que L no es regular.

El lema anterior nos provee del siguiente teorema para determinar si un lenguaje regular es vacío, finito o infinito.

Teorema

Sea M un autómata finito con k estados.

1. $L(M) \neq \emptyset$ si y sólo si M acepta una cadena de longitud menor que k.
2. $L(M)$ es infinito si y sólo si M acepta una cadena de longitud n, donde $k \leq n < 2k$.

Existen además otras técnicas basadas en teoría de conjuntos para probar que un lenguaje es regular.

Proposición

1. El complemento de un lenguaje regular es también regular.
2. La intersección de lenguajes regulares es también regular.