

Bitácora de aula:

Límite de funciones

1. Introducción

Fecha

Objetivo: El estudio de los límites de las funciones permitirá conocer el comportamiento, la forma y gráfica de una función cuando la variable se “dirige” hacia un número determinado o hacia el más o menos infinito.

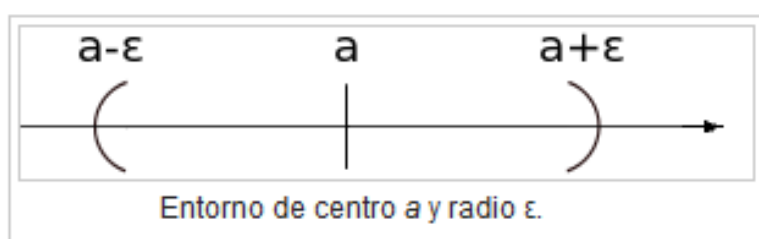
Una vez desarrollados los conceptos y significados del límite de una función, pueden construirse otros que son pilares fundamentales del Cálculo y Análisis Matemático, tales como “continuidad”, “derivación” e “integración”, que veremos más adelante.

En matemática, la idea de **límite** está referida a una función y guarda relación con los valores que toma la función en lugares cercanos a un punto que nos interese. Por tanto, cuando se diga “límite de una función en algún punto”, se deberá entender que interesa saber el comportamiento de la función en una zona muy cercana al punto y no necesariamente en el punto.

1.0.1. Entorno-Punto de acumulación

La definición clásica de entorno se refiere al espacio que nos rodea, y con el que interactuamos (entorno familiar, entorno cultural, etc.).

En términos matemáticos intuitivamente hablando, un entorno de un punto es un conjunto que contiene al punto en dónde uno puede separarse un poco del punto en cuestión sin abandonar el conjunto.



Observando la figura podemos pensar en un entorno como aquél conjunto de puntos en la recta que queda cuando con un compás hacemos centro en un punto determinado y luego marcamos los puntos donde este compás corta a la recta real a izquierda y derecha.

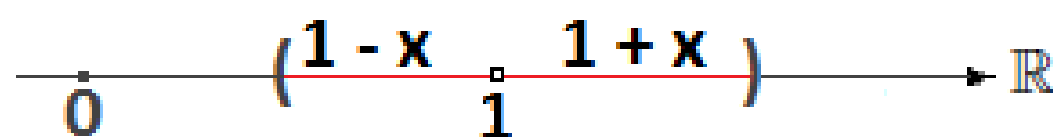
Definición 1.1 Un entorno o vecindad de un punto a , de radio $\epsilon > 0$, es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x - a| < \epsilon$. Esto es

$$V(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} / a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

Actividad 1

1. Identificar sobre la recta real, el entorno del 2 con radio $\frac{1}{2}$
2. Identificar de quien es entorno el intervalo $(-1, 1)$ y cual es el radio
3. Escribir como conjunto el entorno $V(1, \frac{1}{2})$ y representarla en la recta real

■ Punto de acumulación



Dado el conjunto $A = [0, 1)$, es claro que el 1 no pertenece a él, pero, tiene la característica de que cualquier entorno del 1, que tiene la forma $(1-x, 1+x)$ con $x > 0$, contiene puntos del conjunto A . ¡De hecho cualquier punto de $(1-x, 1)$ pertenece a A !

De acuerdo a lo anterior, un punto de acumulación referente a un conjunto de puntos, es aquel que (perteneciendo o no perteneciendo al conjunto en cuestión) cumple que cualquier entorno de él tiene algún punto perteneciente al conjunto. Formalmente

Definición 1.2 Sea $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A si para cada vecindad V de a se tiene

$$V(a) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

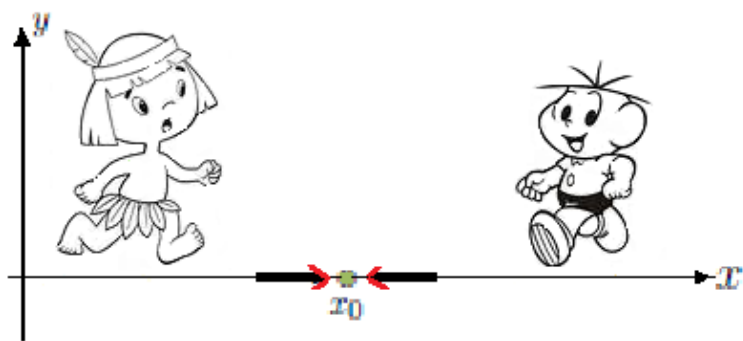
El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama el derivado de A .

Actividad 2 Hallar puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

- | | | |
|-----------------|--|---|
| 1. \mathbb{R} | | 3. $A = \{x = \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$ |
| 2. \mathbb{Z} | | 4. $A = [0, 3] \cup \{5\}$ |

1.0.2. Acercándose a un punto

Hay que tener claro que estamos trabajando funciones en el plano cartesiano, y que cuando decimos que “ x se acerca a un punto x_0 ”, este x lo puede hacer avanzando por izquierda hacia el x_0 o bien viniendo por la derecha de x_0 .



Actividad 3


Para la función $f(x) = x^2$ encontrar a que valor se “aproxima” $f(x)$ cuando el x se “acerca” al 2.


1. Completa la siguiente tabla:

x	1,9	1,95	1,99	1,999	2,001	2,01	2,05
$f(x)$							

2. Si x se acerca a 2, anota a que valor se acerca $f(x)$

Lo anterior lo escribimos simbólicamente como



$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$


y se lee “El límite de x^2 , cuando x tiende a 2 es igual a 4. Como siempre, en matemática, debemos tener claro que **NO** podemos decir que el límite es un cierto valor sólo porque parezca que vamos hacia él. Para tener la certeza, nos hace falta una definición formal.

1.1 caminando hacia el limite

En lo siguiente vamos a usar un lenguaje equivalente para explicar la primera actividad.

Aproximarse al 2 significa que tenemos que considerar aquellos valores de x “cercanos” al 2, lo que, en otras palabras, equivale a decir que los x han de considerarse en una “vecindad” o entorno del 2. Se anota

$$x \in V(2, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / 2 - \delta < x < 2 + \delta\}$$

que se lee “ x pertenece a la vecindad o entorno del 2 de radio delta”.

Otro hecho interesante es que hemos descubierto es que

- $f(x)$ está “cerca” del 4.

Esto nos dice que existe otra vecindad, la de $f(x)$, a la que ponemos radio $\epsilon > 0$. Esto se escribe

$$f(x) \in V(4, \epsilon) = \{f(x) \in \mathbb{R} / 4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon\}$$

De este modo, establecemos que

$$x \in V(2, \delta) \implies f(x) \in V(4, \epsilon)$$

Esta es la idea principal y la formalizamos

Definición 1.3 La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $L = 4$, en el punto $a = 2$, si y sólo si dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff x \in V(a, \delta) \implies f(x) \in V(L, \epsilon)$$

Usando valor absoluto, esta última expresión equivale a:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

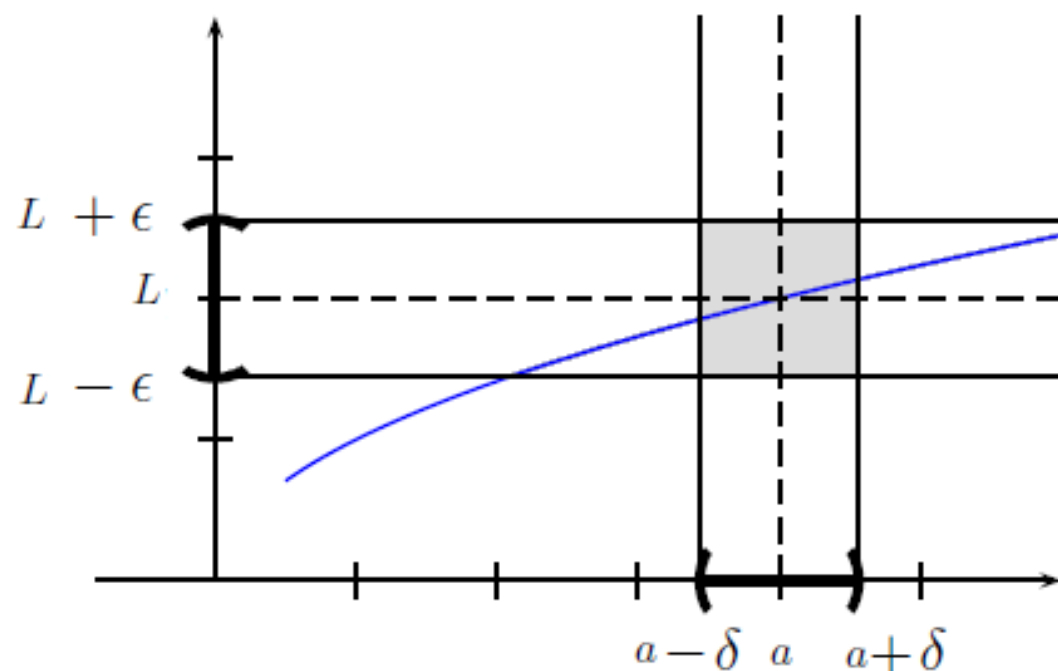
La expresión $0 < |x - a|$ afirma que $x \neq a$

1.1.1. Interpretación geométrica

Se ha establecido la existencia de dos vecindades:

- Una vecindad en el eje de las x , a la que ponemos radio δ , y
- Una vecindad en el eje de las y , a la que ponemos radio ϵ .

La siguiente figura ilustra gráficamente el significado de δ y de ϵ .



La GRAN conclusión es:

“ Si el límite de la función es L , entonces cualquiera sea el x que se tome en la vecindad del $x = a$ las imágenes deben estar en el rectángulo que muestra la figura”

Para concluir con la primera actividad.

Ejercicio 1.4 Probar, usando la definición $\delta - \epsilon$, que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Hallar δ para $\epsilon = 0,1$. Ilustrar gráficamente.

1.1.2. Límite-Entorno- Punto de acumulación

Vamos a descubrir la importancia de entorno y punto de acumulación en el proceso de límite.

Actividad 4 Sea $f(x) = \frac{3x^2 - 18x + 27}{2x^2 - 18}$

1. Determina si existe imagen para $x = 3$
2. Comprueba, mediante una tabla de valores, que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 es 0.

x	2,9	2,95	2,99	3,001	3,01	3,05	3,1
$f(x)$							

3. La recta $x = 3$ ¿qué tipo de asíntota es de la gráfica?
4. Realiza un gráfico de $f(x)$, señalando su comportamiento cerca de $x = 3$.
5. ¿Es $x = 3$ punto un de acumulación del intervalo $(2,4)$



Si el punto al que tiende un límite no fuera punto de acumulación, existiría algún entorno de dicho punto donde la función no toma valores, esto implica que **NO** podría ser el límite.

Otro hecho interesante y que podemos observar de las actividades realizadas es que

“El límite depende únicamente del comportamiento de la función en las proximidades de a , no de cual sea el valor de la función en el punto a ; de hecho, a puede no pertenecer al dominio de definición de la función. Sí es necesario, que a sea punto de acumulación del dominio de definición de la función”.

Actividad 5 Para la función $f(x) = (x-1)^2 + 2$, si $x \rightarrow 3$, entonces el límite de f es $L = 6$. Determinar cuál es el valor de δ en la vecindad $V(3, \delta)$ para que las imágenes de la función queden todas en la vecindad $V(6, \frac{1}{4})$.

En la práctica uno no anda haciendo gráficos de este tipo. Lo que se pide es el manejo algebraico de la situación. Es decir, si se da un ϵ , que representa el ancho de banda del L , se pide hallar el δ , el ancho de banda del x_0 .

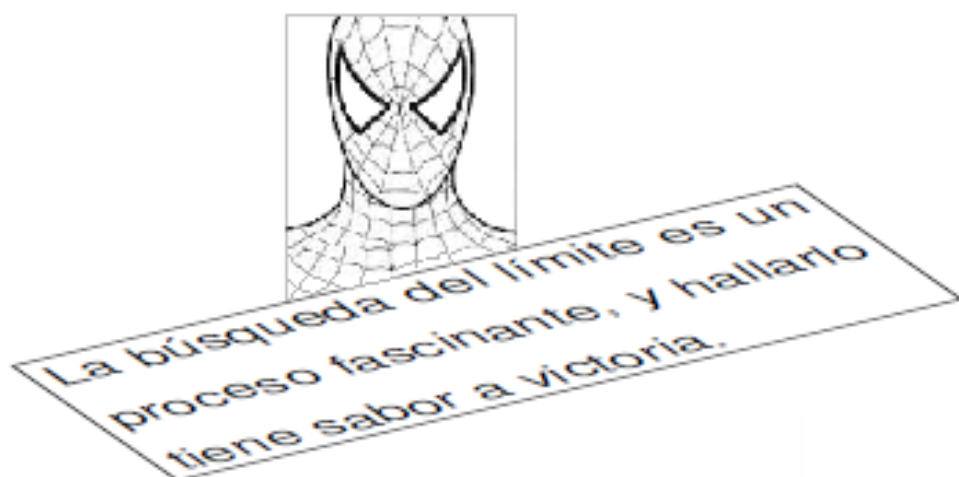
Actividad 6 Probar usando δ, ϵ :

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 & 3. \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x + 1) = 1 \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1) = 1 & 4. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) = 7 \end{array}$$

Tarea 1 Probar que el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es $L = 2$ para valores cercanos a $x_0 = 1$. Para $\epsilon = 0,1$ halla el δ necesario para que **TODAS** las imágenes de f queden en el interior del rectángulo $(1-\delta, 1+\delta) \times (2-\epsilon, 2+\epsilon)$

1.2 Calculando límites

Llamaremos **máscara** en los cálculos de límites a la expresión resultante de reemplazar el valor al cual tiende la variable en la función a la que estamos sacando límite.



Si el resultado de esta máscara da como resultado un número real, entonces ¡ese es el límite!, en cualquier otro caso, la máscara resultante nos dará información de como abordar el problema. El símbolo \sim lo emplearemos para indicar que “procesando” el límite hemos llegado a una determinada **máscara**. Estas máscaras se trabajan con herramientas matemáticas ad hoc.

Actividad 7 Halla la máscara del límite y su valor en cada expresión siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+1} = \dots & 3. \lim_{x \rightarrow -1} 4x^3 - 2x^2 = \dots \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x^2} = \dots & 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \dots \end{array}$$

1.3 Límites laterales en un punto

Al iniciar el estudio del límite se mencionó que la aproximación a un punto x_0 de la recta real se puede hacer por izquierda o por derecha de éste.

x_0^+ significa aproximarse por derecha

x_0^- significa aproximarse por izquierda

El cálculo denomina “límites laterales” a este proceso, y puede ocurrir que el punto x_0 pertenezca o no al dominio de f , por tal razón, es posible que ocurra que: sólo uno de ellos exista, que ninguno de ellos exista, o bien que ambos límites existan, pero en este último caso puede ocurrir que sean iguales o que sean distintos.

Teorema 1.5 la función f tiene límite en un punto x_0 si y sólo si los límites laterales son iguales. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

Actividad 8 Hallar límite de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{l} 1. f(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ si } x \rightarrow 0. \\ 2. \text{ Si } f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & x \leq 2 \\ e^{x-2}, & x > 2 \end{cases}, \text{ si } x \rightarrow 2. \end{array}$$

2. Propiedades de los límites

En esta sección se establecen las propiedades básicas de los límites de funciones con el fin de emplearlas para el cálculo de éstos sin necesidad de recurrir a la definición formal epsilon-delta.

Teorema 2.1 Si una función f tiene límite cuando x tiende a x_0 , ese límite es único.

Proposición 2.2 Sea k una constante y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, con $L, M \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} k = k \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kL \\ 4. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L + M \\ 5. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L - M \\ 6. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \cdot M \\ 7. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0 \end{array}$$

3. Calculando Límites

Ahora nos dedicamos a ver técnicas de cálculo de límites.

3.0.1. Límites de Polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio, su límite se halla reemplazando directamente el valor al cual tiende la variable x en el polinomio y ese resultado es el límite.

Ejemplo 3.1 $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + x + 1) \sim 5^2 + 5 + 1 = 31$. Luego, este es el límite

3.0.2. Límite de funciones racionales

Una función racional es un cociente de polinomios. Esto es,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ con } p \text{ y } q \text{ polinomios}$$

Se dan los siguientes casos:

■ Numerador y denominador no cero

Actividad 9 Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1}$

■ Numerador no cero y denominador cero

Actividad 10 Estudiar el comportamiento de límites laterales y determinan existencia de los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \left| \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \right.$$

■ Numerador cero y denominador cero

Actividad 11 Hallar:

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} & 4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} & 5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} & 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} \end{array}$$

Tarea 2 Estudia los siguientes límites:

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-21x+20}{x^3-5x^2-2x+24} \\ 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+5x^2+7x+3} \end{array}$$

3.0.3. Límite de función elevada a función

Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real. Sea x_0 un número real. Supongamos que:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = k$ (k cualquier real).

Si $h(x) = f(x)^{g(x)}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = L^k$$

Que se lee “El límite de la función $f(x)$ elevada a $g(x)$ es igual al límite de la función $f(x)$ elevado al límite de la función $g(x)$, cuando x tiende a x_0 ”

Actividad 12 Hallar el límite de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \left[\frac{x^2-4}{x-2} \right]^3, x \rightarrow 2$$

$$2. f(x) = (4x^2 + x - 9)^{-5}, x \rightarrow 0$$

$$3. f(x) = \sqrt[4]{\left[\frac{x^2-4}{x-2} \right]^3}, x \rightarrow 2$$

$$4. f(x) = \left[\frac{x^2+5x}{x} \right]^{\frac{x}{x^2+x}}, x \rightarrow 0$$

3.0.4. Límite de la exponencial

Sea $f(x)$ una función y x_0 un número real. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Sea b un número real positivo. Para la función exponencial $g(x) = b^{f(x)}$ se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (b)^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = b^L$$

Actividad 13 Hallar:

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 1} 2^{x^3+1} & 3. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{2x}{x+1}} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{2}{2-x}} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + e^{-x} \end{array}$$

3.0.5. Límite del logaritmo

Sea $f(x)$ una función y x_0 un número real. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Sea $g(x) = \log_b f(x)$. Esta función transforma a cada número x en el logaritmo en base b de $f(x)$, siempre que ese logaritmo exista. Se puede demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] = \log_b L$$

Podemos enunciar que:

El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite

Actividad 14 Hallar $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\log \frac{x^2-9}{x-3} \right]$

Un par de límites que involucran logaritmo natural y que debes recordar son:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \left| \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x = \infty \right.$$

3.0.6. Límite de cocientes Irracionales

Por lo general, esto es “casi siempre” así, mediante una sustitución adecuada se pasa de un límite de cociente irracional a un límite de cociente racional.

Actividad 15 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 49}}{x - 7}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$

5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

6. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{1 - \sqrt{x - 1}}$

3.1 Límites notables

Bajo esta categoría se hallan los dos siguientes:

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$

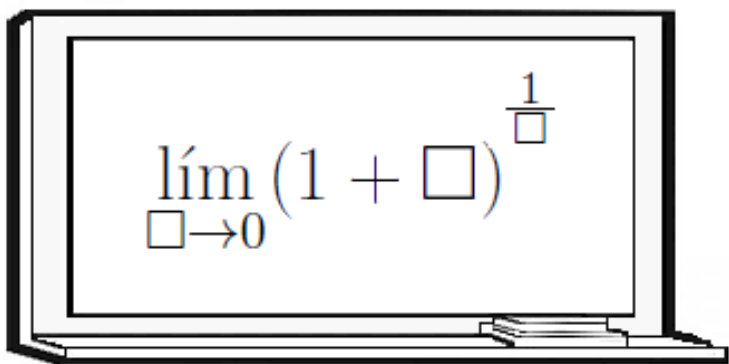
y

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Observa que ambos límites tienen máscaras bien definidas, la exponencial 1^∞ y el seno de la forma $\frac{0}{0}$. Estos son la base para probar otros límites que involucren funciones exponenciales y trigonométricas.

3.1.1. Límite notable: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$

Este es el modelo al que se deben asimilar todos los problemas de este tipo. Más aún, lo puedes recordar mejor en la forma



En donde “la cajita” es la que tiende a cero.

Actividad 16 Calcula:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$

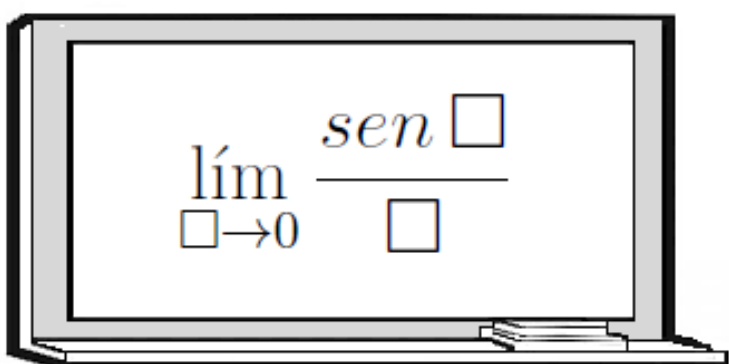
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{2/x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{1/x}$

3.1.2. Límite notable: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Cada vez que tengamos un límite trigonométrico cuya máscara no sea real, deberemos tener en cuenta este límite y tratar de hacerlo aparecer mediante procedimientos algebraicos. Para que lo recuerdes mejor:



En su demostración se emplea el llamado “teorema del sandwich”

Teorema 3.2 Sea I un intervalo de \mathbb{R} que contiene al punto x_0 y sean f , g y h funciones definidas en I , exceptuando quizás el mismo punto x_0 . Supongamos que para todo $x \in I$ diferente de x_0 tenemos:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

y supongamos también que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Resulta clara la razón por la cual se denomina así a este teorema.

Actividad 17 Calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen } 2}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + 1)}{x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen } x}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\text{sen } 2x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3}$

3.2 Infinitésimo en un punto

Estudiaremos, brevemente, este concepto como una forma alternativa de cálculo y principalmente poniendo atención en un punto de la recta real. Más adelante veremos como éstos (los infinitésimos) están conectados con las reglas de L'Hopital, que en verdad si son el instrumento más rápido, simple y eficaz para calcular límites con ciertas indeterminaciones.

Una función $f(x)$ se dice que es un infinitésimo en el punto $x = a$, si se verifica que su límite cuando x tiende a a es igual a 0. Es decir:

$$f \text{ es un infinitésimo en } x = a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Ejemplo 3.3

1. La función $f(x) = \text{sen } x$ es un infinitésimo en el punto $x = 0$. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = \text{sen}(\lim_{x \rightarrow 0} x) = \text{sen } 0 = 0$$

2. La función $g(x) = 1 - \cos x$ es un infinitésimo en $x = 0$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

3.2.1. Infinitésimos equivalentes

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos en el punto $x = a$, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes en el punto $x = a$ si ocurre que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

La siguiente es una lista de los infinitésimos más usados para $x \rightarrow 0$:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| ■ $\operatorname{sen} x \sim x$ | ■ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ |
| ■ $(1 + ax)^{\frac{1}{x}} \sim e^a$ | ■ $\operatorname{arctg} x \sim x$ |
| ■ $\operatorname{tg} x \sim x$ | ■ $a^x - 1 \sim x \ln a$ |
| ■ $(1 + x)^k - 1 \sim kx$ | ■ $\ln(1 + x) \sim x$ |
| ■ $\operatorname{arcsen} x \sim x$ | |

Ejemplo 3.4 Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ son infinitésimos en $x = 0$.

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Además, son equivalentes pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejemplo 3.5 Las funciones $f(x) = \operatorname{tg} x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ son infinitésimos equivalentes en el punto $x = 0$.

En efecto, ya sabemos que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es un infinitésimo en $x = 0$. Para $g(x) = \operatorname{tg} x$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Y son equivalentes pues,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Actividad 18 Hallar los siguientes límites:

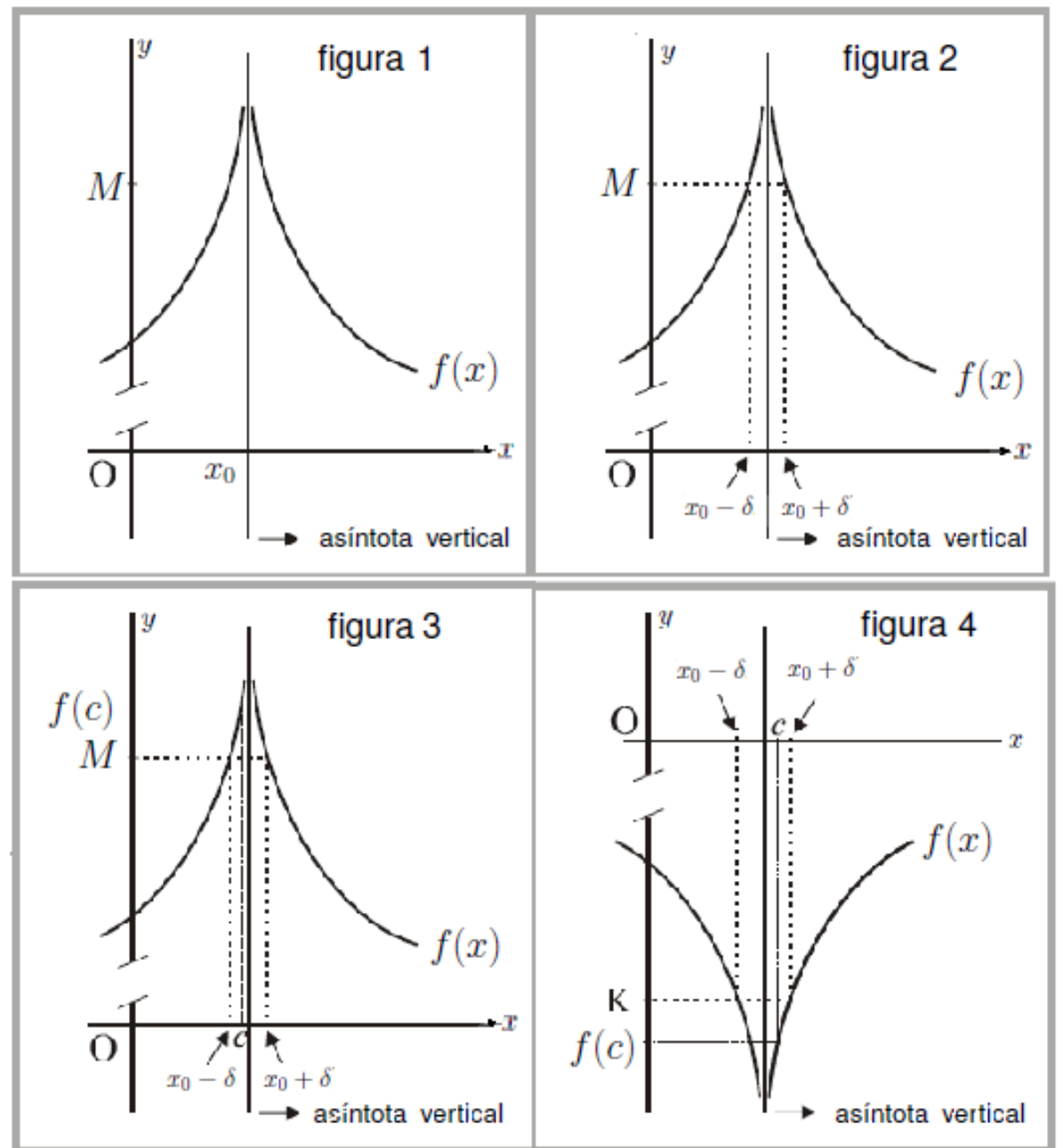
- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{1 - e^x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{2 - 2x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 9)}{\operatorname{sen}(x - 3)}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{tg} 4x}$ |

4. Límites infinitos en un punto

Sea $f(x)$ una función real de variable real. Sea x_0 un número real. Puede ocurrir que x_0 pertenezca al dominio de $f(x)$ o que no pertenezca. Vamos a estudiar y definir los siguientes conceptos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Esto significa que para valores de x infinitamente próximos a x_0 , tanto por su izquierda como por su derecha, las imágenes $f(x)$ son infinitamente grandes positivas, de tal modo que cuánto más próximo esté x de x_0 (sin llegar a ser $x = x_0$), más infinitamente grande es $f(x)$.



Vamos a expresarlo gráficamente. En la figura 1 se observa que $f(x_0)$ **no** existe. Además, si $x \rightarrow x_0$ (tanto por derecha como por izquierda) entonces $f(x)$ es grande positiva y cuanto más próximo está x de x_0 , mayor es la imagen de x , de tal modo que esta se hace infinita positiva. Aunque en la figura la gráfica de f aparece cortada, debe entenderse que se aproxima cada vez más a la recta vertical $x = x_0$. La recta $x = x_0$ se denomina **asíntota vertical** de la función f . La gráfica de la función se aproxima a la recta vertical $x = x_0$ tanto como podamos imaginar, pero nunca llega a tocarla.

En la figura 1 hemos representado una función f cuyo límite cuando x tiende a x_0 es $+\infty$ y hemos tomado un número $M > 0$ (supuestamente grande) en el eje de ordenadas.

En la figura 2 puede apreciarse como, a partir de M , obtenemos una vecindad o entorno de centro x_0 y radio δ , es decir, $V(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Si al trazar las verticales x_0 no quedase en el centro, tomaríamos un subentorno o subvecindad.

En la figura 3 es fácil observar que para cualquier número c que se encuentre en $V(x_0, \delta)$, su imagen es mayor que M , es decir, $f(c) > M$. Apreciese que para cada M obtendremos una $V(x_0, \delta)$ distinta.

La formalización es la siguiente:

Definición 4.1 Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $+\infty$ si para cualquier valor M positivo, existe un entorno de centro x_0 tal que si x está en ese entorno, su imagen es mayor que M . Matemáti-

camente: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si y solo si

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Este caso es análogo al recién visto. El significado de esto es que “para valores de x infinitamente próximos a x_0 , tanto por su izquierda como por su derecha, las imágenes $f(x)$ son infinitamente grandes negativas, de tal modo que cuanto más próximo esté x de x_0 (sin llegar a ser $x = x_0$), más infinitamente grande negativa es $f(x)$ ”. En la figura 4 se observa que para cualquier número c que se encuentre en $V(x_0, \delta)$, su imagen es menor que K , es decir, $f(c) < K$. Es claro que para cada K obtendremos una $V(x_0, \delta)$ distinta. Formalmente:

Definición 4.2 Se dice que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es $-\infty$ si para cualquier valor K negativo, existe un entorno o vecindad de centro x_0 tal que si x está en ese entorno, su imagen es menor que K . $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si y solo si:

$$\forall K < 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < K$$

Actividad 19 Se considera la función $f(x) = \frac{2x + 10}{x^2 - 25}$.

1. Estudiar su comportamiento en $x = 5$ y sus proximidades.
2. Representa de un modo gráfico lo que ocurre en una vecindad de $x = 5$.

Tarea 3 Dadas las funciones:

$$(a) f(x) = \frac{x}{(x-4)^2} \quad \left| \quad (b) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \right.$$

1. Determina la existencia de asíntotas y su comportamiento cerca de ellas. Grafica.

4.1 Límites con variable al infinito

En este caso la variable x tiende al infinito. Se espera determinar el comportamiento de la función. Si la variable tiende al menos infinito, el cambio de variable $x = -z$ hace que $z \rightarrow \infty$.

Actividad 20 Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x^2 - 1} & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{2x + 5} \\ 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 1} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{2x^2 + 2x - 4} \end{array}$$

Tarea 4 Calcular el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de:

$$\begin{array}{l|l} 1. f(x) = 2^x & 3. f(x) = x \\ 2. f(x) = x^2 - 1 & 4. f(x) = \ln x \end{array}$$

Utiliza un programa informático para graficar, en un mismo plano, las cuatro funciones y establece cual de ellas crece más rápido.

La máscara $\infty - \infty$

Cuando aparece esta máscara, todo depende de las expresiones presentes. Si hay una diferencia de polinomios lo primero es reducir a una sola expresión. Si la diferencia es de expresiones irracionales, entonces conviene hacer una “des-racionalización” (el “conjugado” es el arma secreta).

Actividad 21 Calcula:

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 1000x^2) \\ 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x+2} - \sqrt{x-5} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x) \end{array}$$

Tarea 5 Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 9x - 5} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$

4.1.1. Un notable con dos caras

El límite notable $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$, por el cambio de variables $z = \frac{1}{x}$ se transforma en

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

Actividad 22 Calcular:

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x & 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+100} \\ 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-4} \\ 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{5x+7} & 8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x+6}\right)^x \\ 6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+8}{4x+9}\right)^{-4x-9} & 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x-9}\right)^{4x-9} \\ 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+6}\right)^x & 10. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x+7}{5x+2}\right)^{2x^2-5} \end{array}$$

Tarea 6 Explicar porqué los siguientes límites no existen:

$$\begin{array}{l|l|l} \blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x & \blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \tan x & \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x & \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} & \blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x} \end{array}$$

4.2 Límite de la función compuesta

Proposición 4.3 Si f y g son funciones tales que

$$\begin{array}{l} \blacksquare \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L) \end{array}$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f(L)$$

Actividad 23 Hallar

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln[\sin(x)] \\ 2. \lim_{x \rightarrow 3} \sin \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - x - 6} \right) \end{array}$$

Tarea 7 Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 4$. Determina que pasa con $\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x))$.

5. Continuidad

Desde un punto de vista geométrico la **continuidad** de una función se observa a partir de su gráfica, la que no debe presentar cortes ni saltos. Si una función no es continua se dice que es **discontinua**.

Actividad 24 Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & , -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 & , 1 < x \leq 3 \\ 9 & , 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

1. Graficar esta función
2. Hallar límites laterales
3. Determinar puntos de continuidad y discontinuidad

Definición 5.1 La función f es continua en el punto

$$x_0 \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = f(x_0)$$

Esta definición da lugar al proceso que permite estudiar continuidad.

paso 1 Sacar el límite L de la función en el punto x_0

paso 2 Sacar el valor $f(x_0)$ y comparar con L

- Si son iguales la función es continua
- en caso contrario discontinua

Actividad 25 Determinar continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Definición 5.2 Se dice que f es continua en un conjunto A , si f es continua en todo punto de A .

5.0.1. Propiedades básicas de las funciones continuas

Sean f y g ambas funciones continuas en $x_0 = c$. Entonces las siguientes funciones son también continuas en $x_0 = c$.

- | | | |
|------------|--|-------------------------------------|
| 1. $f + g$ | | 3. $f \cdot g$ |
| 2. $k f$ | | 4. $\frac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$ |

- Continuidad de una función compuesta

Sea f una función continua en c y g continua en $f(c)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también continua en c .

Actividad 26 Probar que $\lim_{x \rightarrow 1} \arctg \left(\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 3x} \right) = \frac{\pi}{4}$

5.0.2. Discontinuidad evitable

Una función puede ser discontinua en un punto, pero esa discontinuidad, a lo mejor, se puede reparar. Veamos esto.

Actividad 27 Estudiar continuidad de las funciones:

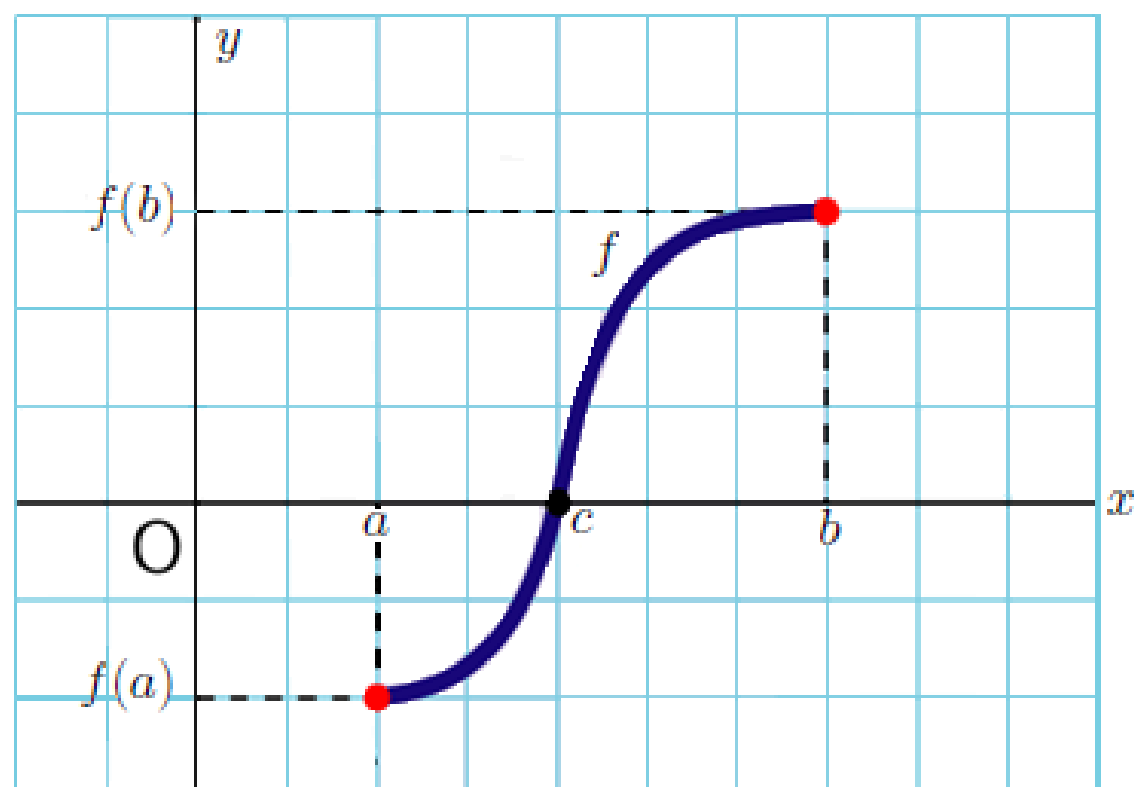
1. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
2. $f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \leq x < 0 \\ 5, & x \geq 0 \end{cases}$

5.0.3. Continuidad en intervalos cerrados

Hasta aquí nos hemos centrado en hacer un estudio local de las funciones ya que las definiciones y resultados obtenidos dependen de lo que ocurre en un entorno del punto. Ahora vamos a ver que exigiendo continuidad a todos los puntos del intervalo $[a, b]$ se pueden obtener resultados globales, que afectan el comportamiento de la función en todos los puntos del intervalo.

Teorema 5.3 (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua que toma valores con signos opuestos en los extremos del intervalo ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



El punto c tal que $f(c) = 0$ se llama cero o raíz de f .

Actividad 28

1. Demostrar que la ecuación: $x^3 + x - 5$ tiene al menos una solución $x = a$ tal que $1 < a < 2$.
2. Demostrar que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

El teorema de Bolzano proporciona una herramienta útil para probar que ciertas ecuaciones tienen solución. Consideremos el siguiente problema. Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$, o dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

!! ESTRATEGIA !!



- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I . Algunas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I , que es lo que queríamos probar.

Actividad 29

1. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real.
2. Demostrar que existe algún número real x tal que $\operatorname{sen} x = x$.
3. Demostrar que existe un punto del intervalo abierto $(2, 4)$ en el que la función f dada toma el valor 1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7 - (16)^{\frac{1}{x}}}{1 + (16)^{\frac{1}{x}}} & , x \neq 0 \\ 7 & , x = 0 \end{cases}$$

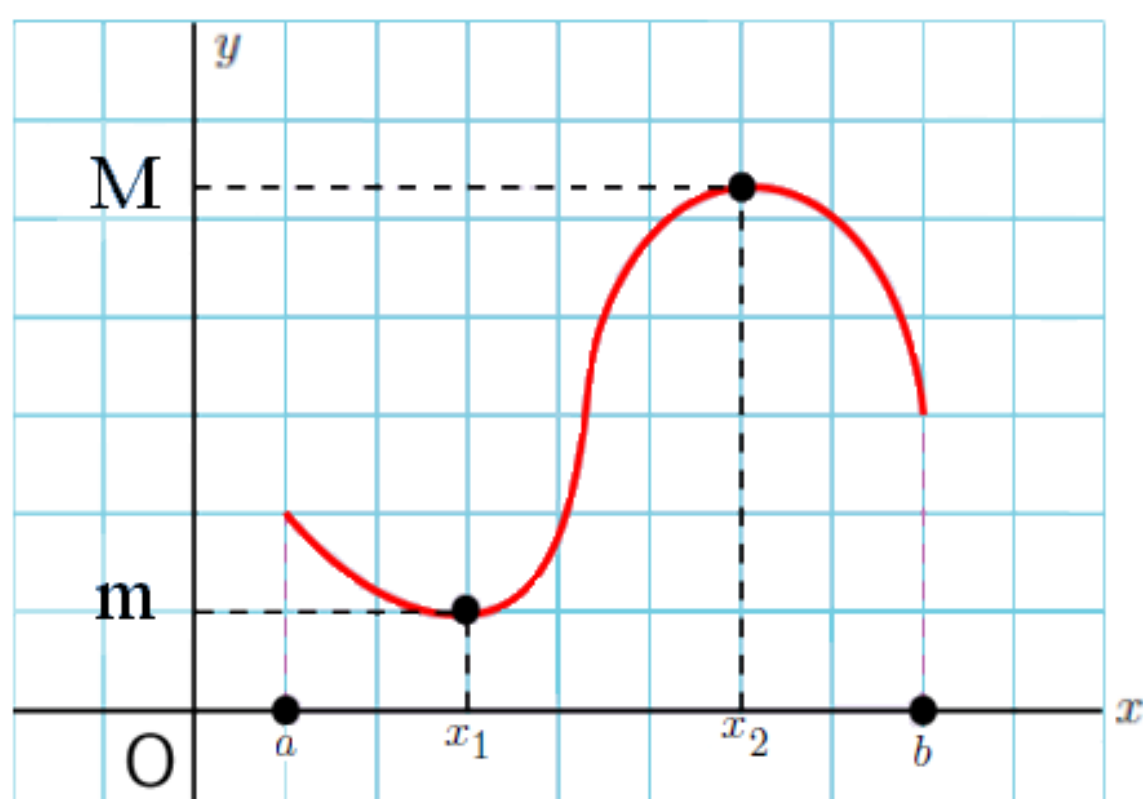
Teorema 5.4 La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo

Actividad 30

1. Sea $f(x) = x^2$. Halla $f([-1, 1))$ y $f((-1, 1])$
2. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Halla $f((0, 1])$, $f([1, \infty))$
3. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Halla $f((-\pi, \pi))$

Teorema 5.5 (Weierstrass)

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, alcanza en dicho intervalo al menos un máximo absoluto y un mínimo absoluto.



En la gráfica se observa una función continua en $[a, b]$ que presenta en x_2 un máximo absoluto de valor M y en x_1 un mínimo absoluto de valor m .

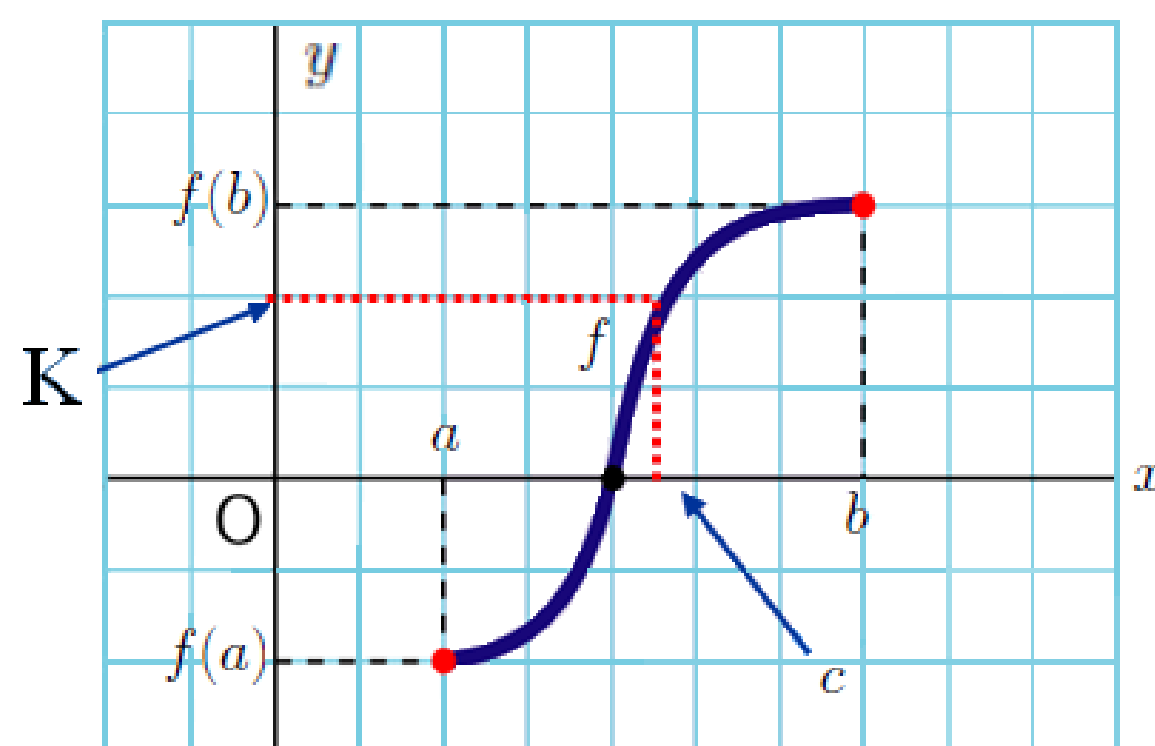
Actividad 31 Verificar que la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo cerrado $[-1, 2]$ alcanza máximo y mínimo global en dicho intervalo.

Teorema 5.6 (del valor intermedio)

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea K un número real tal que:

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{o} \quad f(b) < K < f(a)$$

entonces existe al menos un punto c en el intervalo tal que $f(c) = K$.



Actividad 32

1. Determinar si es posible aplicar el teorema del valor intermedio, en su dominio de definición, a la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , -1 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2} + 5 & , 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Graficar la función.

2. Hallar el valor de p para que la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ tome el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo $[1, 2]$. Resp $p = 5$