Ayudantía Cálculo Avanzado

Rodrigo J. Tranamil Vidal[1]
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de La Frontera
Av. Francisco Salazar 01145, Temuco
Rtran001@pinhue.ufro.cl

Marzo 5, 2008

[1]Alumno 4^{to} año de Ingenieria Civil Industrial mención Informática

Índice

1. Geometría de $\mathbb{R}^n$

Se ha tenido la oportunidad de trabajar con el conjunto de los números reales y establecer una correspondencia biunívoca con los puntos de una recta que llamamos **recta real**, con lo cual, un número real lo podemos representar como un punto de tal recta. De igual manera, una pareja de números reales puede ser representada por un punto en el plano xy. Al extender esta idea, una terna de números reales puede ser representada por un punto en el espacio tridimensional (Fig. 1).

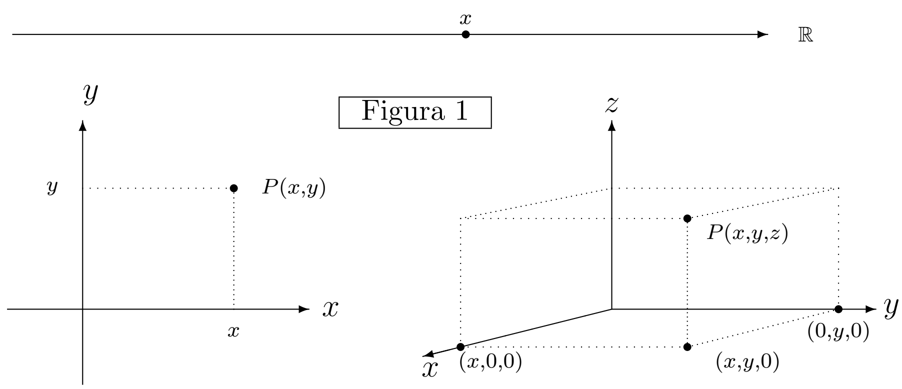


Figura 1

1.1. El espacio tridimensional

Una terna que indica un punto en el espacio se escribe $P(x, y, z)$, en donde x, y, z son las coordenadas del punto, y representan las distancias del punto P a los planos coordenados yz, xz y xy, respectivamente. Con ello se obtiene un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. Los ejes coordenados, eje x, eje y, eje z, determinan tres planos, llamados **planos coordenados** xy, xz, yz. Estos planos coordenados dividen al espacio en ocho partes, llamadas **octantes**. El **primer octante** corresponde a la parte en la cual las tres coordenadas son positivas. (Fig. 2)

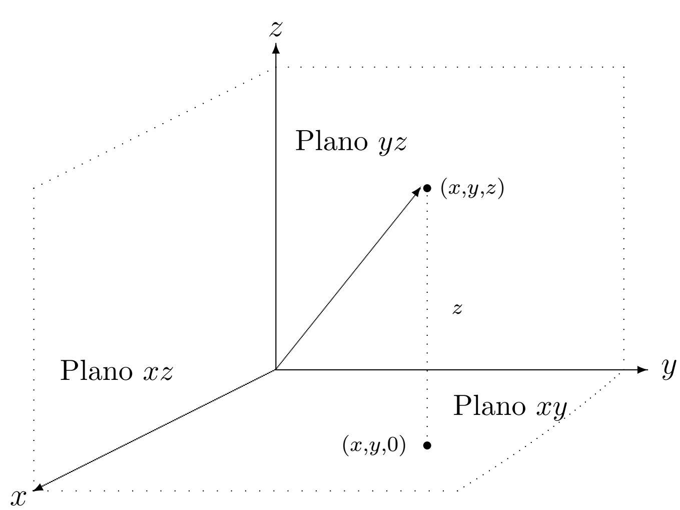


Figura 2

En la geometría analítica del plano y también del espacio, los dos problemas fundamentales a resolver son:

- Dada una ecuación matemática hallar su lugar geométrico, y
- Dado un lugar geométrico hallar su ecuación matemática.

1.2. Superficies cuadráticas

Por **superficie** se entiende la gráfica de una ecuación de tres variables de la forma $F(x, y, z) = 0$. En particular, la ecuación lineal del plano $ax + by + cz + d = 0$ es una superficie. Se denomina **superficie cuadrática** cuando $F(x, y, z) = 0$ es el lugar geométrico de un polinomio de segundo grado en las variables x, y, z. Esto es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

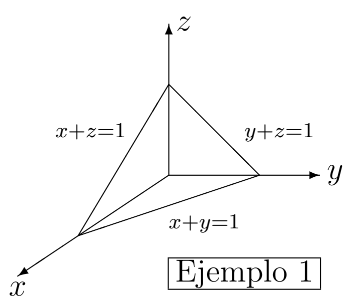
Un problema recurrente en el cálculo de varias variables (campos escalares), es el de graficar o al menos intentar un bosquejo de algunas superficies, mostramos a continuación como bosquejar y reconocer una superficie cuadrática recurriendo a algunas técnicas básicas.

1.2.1. Planos

Para trazar la gráfica de un plano es conveniente hallar la denominada **traza** de la gráfica en los planos coordenados, esto es, la recta de intersección de la gráfica del plano con cada uno de los planos coordenados. Se entiende por plano coordenado a cada uno de los planos xy, xz, yz. Por ejemplo, si la ecuación del plano es $ax+by+cz+d = 0$, entonces con $z = 0$ se obtiene $ax+by+d = 0$ ecuación que resulta ser la traza de la gráfica del plano en el plano xy. Análogamente, se encuentran las dos trazas restantes.

Ejemplo 1 Trazar la gráfica de la ecuación $x + y + z = 1$

Si $z = 0$, entonces la traza en el plano xy es la recta $x + y = 1$, la que tiene como puntos de intersección con los ejes los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. De manera análoga, se encuentra que las rectas $x + z = 1$, $y + z = 1$ son las trazas en los planos xz e yz respectivamente.



Ejemplo 1

Con estos datos se obtiene que la gráfica de la ecuación $x + y + z = 1$, al menos en el primer octante, tiene la representación que muestra la figura del ejemplo 1.

1.2.2. Cilindros

Un cilindro está generado por una curva plana llamada directriz y una recta, llamada generatriz, que se mueve paralelamente a si misma, apoyándose en la directriz.
Como lugar geométrico, el cilindro es el conjunto de puntos que satisface relaciones del tipo

$$f(x,y)=0, \quad f(x,z)=0, \quad f(y,z)=0$$

En el primer caso, el cilindro tiene eje paralelo al eje z, en el segundo paralelo al eje y, y en el tercero, paralelo al eje x.
En la forma general de la ecuación cuadrática, el cilindro se caracteriza por tener omitida una de sus variables x, y ó z.

Por ejemplo, $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$, $y^2+z^2=1$, son ecuaciones de cilindros en $\mathbb{R}^3$. Es evidente que estas ecuaciones carecen de una de las variables.

Por ejemplo, en la primera de ellas no está la variable z, y se considera que ella es "libre" para variar en el espacio, con lo su generatriz es **paralela** al eje z. La curva plana $x^2+y^2=1$ es la **directriz** del cilindro. Para las ecuaciones restantes se obtienen consideraciones análogas.

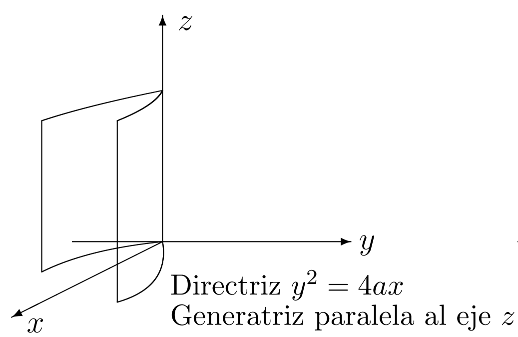


Figura (a)

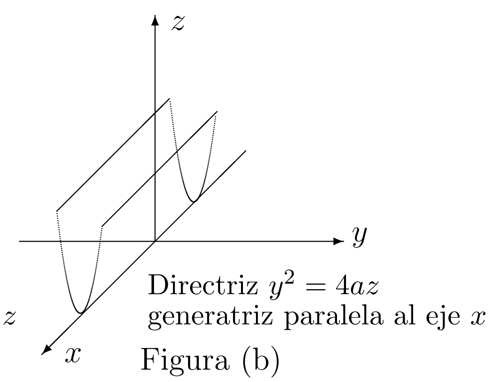


Figura (b)

Como norma general, para intentar la gráfica de una superficie se puede hallar, en primer lugar, la curva de intersección de la superficie con los planos coordenados o con planos paralelos a los coordenados, y examinar esta curva (**trazas**).

Por ejemplo, las superficies $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $b^2x^2+a^2z^2=a^2b^2$, $b^2y^2+a^2z^2=a^2b^2$, son cilindros elípticos, al intersectárseles con el plano coordenado faltante, la curva de intersección es una **elipse**.

De igual modo, las ecuaciones $z^2=4ax$, $z^2=4ay$, $x^2=4ay$, $x^2=4az$, $y^2=4ax$, $y^2=4az$, son cilindros parabólicos. Es sencillo ver que al intersectarlos con el plano coordenado faltante, la curva de intersección es una **parábola**. (figuras a y b).

1.2.3. Esferas

La esfera es el lugar geométrico de todos los puntos que mantienen una distancia constante a un punto fijo. La distancia constante se denomina **radio** y el punto fijo **centro**. Si el centro es el punto (h, k, j) y el radio es r, entonces un punto cualquiera en la esfera de coordenadas (x, y, z) satisface la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-j)^2 = r^2$$

En el caso particular de que que el centro sea el punto $(0, 0, 0)$, entonces la ecuación de la esfera toma la forma

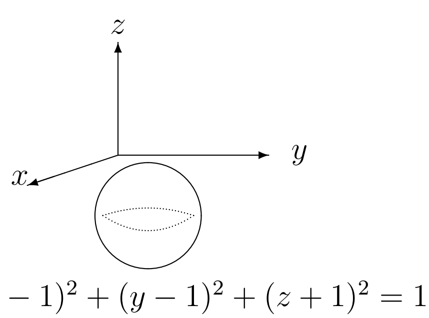
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

La traza de la esfera en el plano xy se obtiene haciendo $z = 0$. Se obtiene la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Las trazas en los planos restantes son también circunferencias.

La ecuación general de la esfera en el espacio tiene la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + k = 0$$

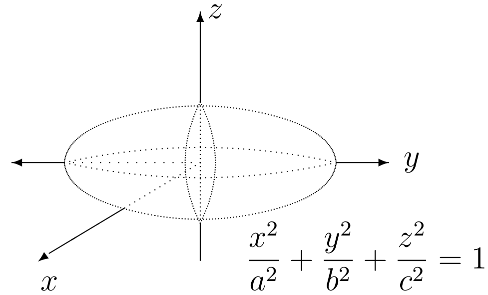
Ejemplo La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$ representa una esfera centrada en el punto $(1, 1, -1)$ y de radio 1.



Ejemplo

1.2.4. Elipsoides

El elipsoide es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen la relación



La ecuación general del elipsoide en el espacio tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$$

En la forma general de la ecuación cuadrática, el elipsoide tiene ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + k = 0$$

con A, B, C diferentes de cero, diferentes en magnitud, y de igual signo.

Se puede verificar fácilmente, que las trazas, es decir, la intersección con planos paralelos a los planos coordenados son elipses.

Si $a = b$ ó $a = c$, ó $b = c$, se obtiene una **superficie de revolución**, en el cual la generatriz es una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes. En particular, si la elipse es una circunferencia, $a = b = c$, se obtiene la esfera.

Ejemplo La ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0$ es un elipsoide de centro en el punto $(2, -1, 1)$ y semiejes $a = c = 4,\ b = 2$.

1.2.5. Conos

El cono es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

La ecuación general del cono en el espacio tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-j)^2}{c^2} = 0$$

Este tipo de cono es elíptico si $a \neq b$. Si $a = b$ el cono es circular recto. Las trazas de un cono sobre los planos coordenados son **rectas** o **puntos**.

En la forma general de la ecuación cuadrática, el cono se caracteriza por tener constantes A, B, C diferentes de cero, dos de ellas de igual signo, y $K = 0$. En un cono de revolución la generatriz es una recta que corta al eje de revolución en el vértice.

Ejemplo La ecuación $z^2 = x^2 + 4y^2$ representa un cono elíptico con elipses como traza para $z \neq 0$. Si $z = 0$, entonces $x = y = 0$, lo que significa que la traza es un punto.

1.2.6. Paraboloide Eliptico

El Paraboloide elíptico es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 z, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = b^2 y, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = a^2 x$$

La ecuación general del Paraboloide elíptico en el espacio tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = c^2\ (z-j)$$

La traza en el plano xy es un punto, las otras trazas son parábolas. Si $a = b$, se tiene un **paraboloide de revolución**, que se obtiene haciendo girar la traza xz alrededor del eje z.

En la forma general de la ecuación cuadrática, el paraboloide elíptico se caracteriza por una constante A, B, C igual cero, y las restantes del mismo signo.

Ejemplo La ecuación $z - 1 = x^2 + 4y^2$ es de un paraboloide, cuya traza en el plano yz es $z = 1 + y^2$, una parábola. Del mismo modo, su traza en el plano xz es la parábola $z = 1 + x^2$. Para ver la traza en el plano xy se observa que si $z < 1$ no existen valores de x e y cuya suma de cuadrados sea negativa. Si $z \geq 0$, entonces las trazas son elipses.

1.2.7. Paraboloide Hiperbólico

El Paraboloide Hiperbólico es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c^2 z, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = b^2 y, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = a^2 x$$

La ecuación general del Paraboloide Hiperbólico en el espacio tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = c^2\ (z-j)$$

La traza en el plano xy son rectas. En los otros planos es una parábola. Esta superficie no es de revolución. Cuando se trata de un hiperboloide de revolución la generatriz es una hipérbola que gira alrededor de uno de sus ejes de simetría.

En la forma general de la ecuación cuadrática, el Paraboloide Hiperbólico se caracteriza por una constante A, B, C igual cero, y las restantes de distinto signo.

Ejemplo La ecuación $x^2 - y^2 = z$ representa un paraboloide hiperbólico de centro el origen. Sus trazas son una parábola y dos hipérbolas.

1.2.8. Hiperboloide de una Hoja

El Hiperboloide de una Hoja es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La ecuación general del Hiperboloide de una Hoja en el espacio es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$$

En la forma general de la ecuación cuadrática, el Hiperboloide de una Hoja se caracteriza por tener sus constante A, B, C diferentes de cero, y una de ellas tiene signo negativo.

Sus trazas son elipses o hipérbolas. Si $a = b$ se tiene una superficie de revolución, haciendo girar la traza xz alrededor del eje z.

Ejemplo La ecuación $36x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ representa un Hiperboloide de una hoja, de semiejes $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$. Sus trazas son; en el plano xy elipse, en los planos yz y xz hipérbolas.

1.2.9. Hiperboloide de dos Hojas

El Hiperboloide de dos Hojas es el lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen una relación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La ecuación general del Hiperboloide de una Hoja en el espacio es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-j)^2}{c^2} = 1$$

Esta expresión carece de traza yz, ya que con $z = 0$ se obtiene una suma de cuadrados igual a un número negativo. Las trazas restantes son hipérbolas. Si $b = c$, se tiene una superficie de revolución, que se obtiene haciendo girar la traza xz alrededor del eje z.

En la forma general de la ecuación cuadrática, el Hiperboloide de dos Hojas se caracteriza por tener sus constante A, B, C diferentes de cero, y dos de ellas son de signo negativo.

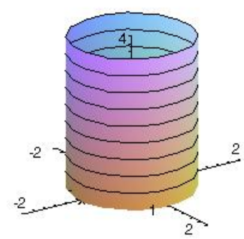
Ejemplo La ecuación $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 16 = 0$ representa un Hiperboloide de dos hojas. Su traza en los planos xy e yz son hipérbolas. Su traza en el plano xz es el conjunto vacío.

1.3. Gráficas

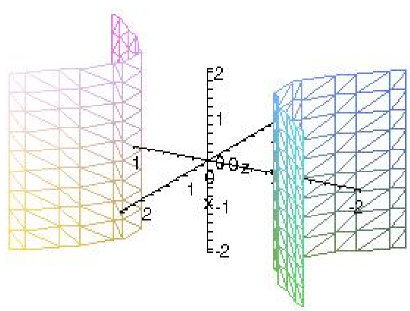
En esta sección se presentarán las diferentes y variadas ecuaciones con sus respectivas gráficas, usando el programa **Maple 9**.

Las cónicas en el espacio

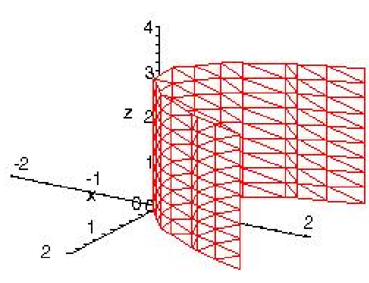
1. La ecuación del una **circunferencia** es $x^2 + y^2 = a^2$. Esta se proyecta en todo el eje Z, debido a que carece de esta variable, es decir, esta puede tomar infinitos valores. Para el caso $a = 1$, se tiene el siguiente gráfico:



2. La ecuación de una **hiperbole** es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. En particular si $a = 1/2$ y $b = 1$, se tiene el siguiente gráfico:

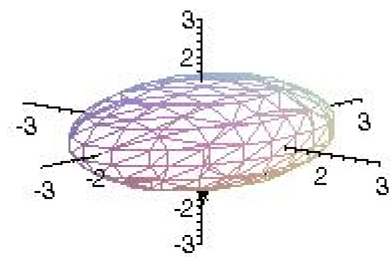


3. La ecuación de una **parábola** es $y = x^2$. Al igual que los casos anteriores esta se proyecta en todo el eje Z. Se tiene el siguiente gráfico:



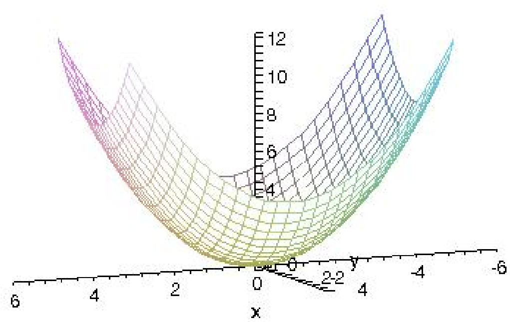
Elipsoide

La ecuación de un **elipsoide** es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. De esta ecuación, se obtiene el siguiente gráfico:

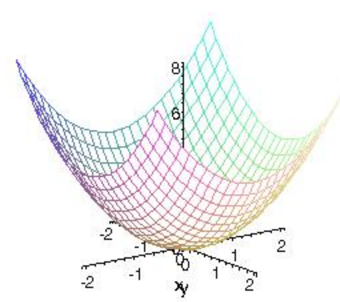


Paraboloide

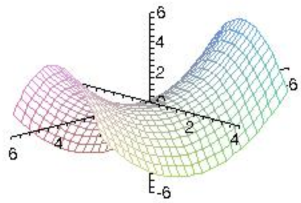
1. Se tiene el caso del **Paraboloide elíptico** el cual es $ax^2 + by^2 = z$, cuyo gráfico es:



2. Otro caso es **Paraboloide circular** el cual tiene por ecuación a $x^2 + y^2 = z$, el cual posee la siguiente gráfica:

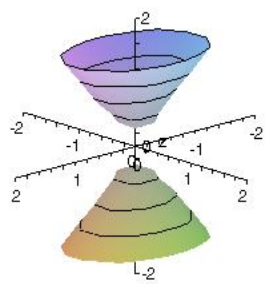


3. Por último se tiene la ecuación del **Paraboloide hiperbolico** que es $ax^2 - by^2 = z$. Su gráfica se asemeja a una silla de montar:

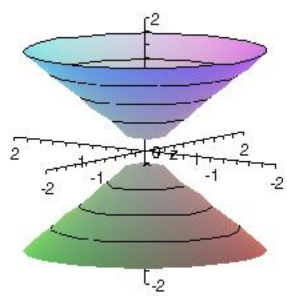


Conos

1. Se tiene el caso del **Cono elíptico** el cual es $ax^2 + by^2 = z^2$, cuyo gráfico es:

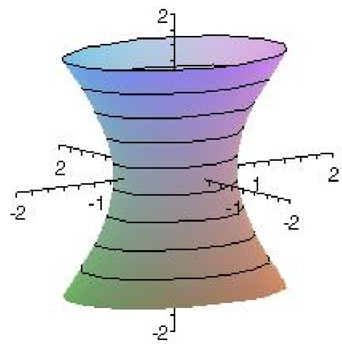


2. Otro caso es el **Cono circular** el cual tiene por ecuación a $x^2 + y^2 = z^2$, el gráfico es el siguiente:



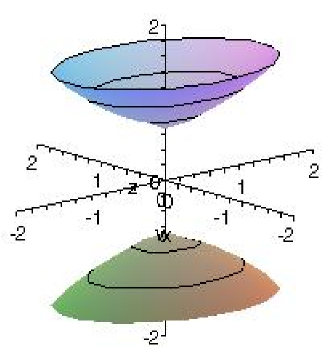
Hiperboloide de una hoja

Esta posee la siguiente ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Cabe mencionar que las dos variables con signos positivos representan una elipse, las combinaciones de las variables positivas con negativas forman hiperboles. De acuerdo a ciertos valores que se le pueden dar a las constantes, se tiene la siguiente gráfica:



Hiperboloide de dos hoja

Esta posee la siguiente ecuación $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Esta gráfica posee dos variables negativas que forman una elipse, respecto la variable positiva su constante define donde parte la gráfica. En particular se tiene la siguiente gráfica:



2. Álgebra vectorial

2.1. Elementos básicos

- Hay que recordar los conceptos involucrados con el **vector** como módulo, dirección y sentido (vistos en cursos anteriores de física y álgebra lineal). Entre otros, aparecen el vector director, vector normal.

  El vector se puede definir **analíticamente** como sigue:

  Consideremos como punto inicial el origen del sistema de coordenadas $(0,0,0)$ y el punto final las coordenadas (a,b,c), entonces se tiene que $\vec{A} = (a,b,c) - (0,0,0) = (a,b,c)$ es un vector, cuya magnitud o norma es $\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

  Además, este forma ángulos con los planos coordenados llamados **ángulos directores**, los cuales quedan expresados como:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\left\|\vec{A}\right\|},\ \cos\beta = \frac{b}{\left\|\vec{A}\right\|},\ \cos\gamma = \frac{c}{\left\|\vec{A}\right\|},$$

  se cumple que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

- El **producto punto o escalar** entre dos vectores corresponde a multiplicar componente a componente y luego sumar los resultados, es decir

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

  o bien se puede calcular geométricamente como $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

- Por otro lado, **el producto cruz o vectorial** entres dos vectores corresponde a resolver el siguiente determiante

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)\hat{i} - (a_1b_3 - b_1a_3)\hat{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{k}$$

  o bien se puede calcular geométricamente como $\vec{A}\times\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\operatorname{sen}\theta$.

  Observaciones:

  1. El producto cruz o producto vectorial da como resultado un **vector** y el producto punto o producto escalar da un **escalar** como resultado.
  2. Otra observación es que el vector resultante del producto vectorial, es perpendicular al plano que definen los dos vectores.

2.2. Ecuaciones de la recta

Los elementos que hay que tener siempre presente para encontrar la ecuación de una recta, no importando la forma de la ecuación solicitada, son un punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ que pertenezca a la recta y un vector director $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ que este contenido en ella, además de un punto variable $X = (x, y, z)$ perteneciente a la recta.

En resumen tenemos las siguientes formas de escribir la ecuación de una recta:

- $\vec{X} = A + t\vec{d}$ (vectorial)

- $\begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \\ z = a_3 + td_3 \end{cases}$ (Paramétrica)

- $\dfrac{x - x_1}{d_1} = \dfrac{x - x_2}{d_2} = \dfrac{x - x_3}{d_3}$ (cartesiana)

- $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (General)

2.3. Ecuaciones del plano

Para hallar estas ecuaciones debemos encontrar un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y una normal $\vec{n} = (a, b, c)$ que pertenezcan al plano. Posteriormente nos damos un punto variable $P = (x, y, z)$ que sea del plano, y finalmente aplicamos la condición $p\vec{p}_1 \cdot \vec{n} = 0$ llegando a las siguientes formas:

- $(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$ (Vectorial)

- $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ (Punto-normal)

- $Ax + By + Cz + D = 0$ (General)

- $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} + \dfrac{z}{r} = 1$, con p, q y r intersecciones con los ejes coordenados. (Reducida)

2.4. Ecuaciones distancias

- Sean los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ ubicados en el espacio, su distancia queda definida como:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

- Sea el punto P y la recta en su forma vectorial $R : \vec{X} = A + t\vec{d}$
  Para hallar la distancia entre estos dos elementos geometricos se recurre a la siguiente ecuación:

$$d = \frac{\left\| \vec{d} \times \vec{AP} \right\|}{\left\| \vec{d} \right\|}$$

  Donde $\vec{AP}$ es un vector formado por el punto A que pertenece a la recta y el punto P donde queremos medir al distancia; y $\vec{d}$ es el vector director de la recta R.

- Sea el punto Q y el plano en su forma vectorial $\pi : (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot \vec{n} = 0$
  La distancia entre estos dos elementos, queda definida de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$d = \frac{\left| \vec{PQ} \cdot \vec{n} \right|}{\|\vec{n}\|}$$

  Donde $\vec{PQ}$ es un vector formado por el punto P que pertenece al plano y el punto Q que es donde queremos medir respecto el plano; $\vec{n}$ es el vector normal del plano.

Observación: Notar que para hallar la distancia entre dos planos, se halla un punto que pertenezca a uno de ellos (ya que al menos una de la dos ecuaciones es conocida) y el problema se reduce al encontrar la distancia entre un punto y un plano el cual ya tiene solución usando la ecuación mostrada anteriormente punto-plano. Asi, todos los problemas de encontrar distancia entre los diferentes elementos geométricos se reducen a los dos casos anteriores.

2.5. Posiciones relativas de rectas y planos

2.5.1. Posiciones de dos planos

Sean P_1 y P_2 los planos de ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ Caben las siguientes posibilidades:

- Los planos coinciden, si
  $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$
- Los planos son paralelos, y distintos, si
  $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$
- En cualquier otro caso, el rango del sistema es 2, y entonces los planos definen una recta.

2.5.2. Posiciones de dos rectas

Se considera un par de rectas dadas en la forma

- $\begin{cases} a_1x + +b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + +b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$
- $\begin{cases} m_1x + +n_1y + p_1z = q_1 \\ m_2x + +n_2y + p_2z = q_2 \end{cases}$

Sea A la matriz del sistema formado por estas cuatro ecuaciones, y A' la ampliada. Esto es:

- $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}$
- $A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix}$

Existen las siguientes alternativas:

1. $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A') = 2 \Rightarrow$ son dos rectas coincidentes.
2. $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A') = 3 \Rightarrow$ son dos rectas paralelas, distintas.
3. $\text{rang}(A) = 3$, $\text{rang}(A') = 3 \Rightarrow$ son dos rectas secantes; su punto de corte es la solucion del sistema.
4. $\text{rang}(A') = 4$, es decir, $\det(A') = 0 \Rightarrow$ las rectas se cruzan.

2.5.3. Posiciones de recta y plano

Se considera la recta y el plano en la forma

- $\begin{cases} a_1x + +b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + +b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$
- $ax + +by + cz = d$

Sea A la matriz del sistema formado por estas tres ecuaciones, y A' la ampliada. Esto es:

- $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$
- $A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

Existen las siguientes alternativas:

1. $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A') = 2 \Rightarrow$ la recta esta contenida en el plano.
2. $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A') = 3 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano, y no contenida en él.
3. $\text{rang}(A) = 3$, $\text{rang}(A') = 3 \Rightarrow$ la recta es secante al plano. El punto de corte es la solucion del sistema.

Es interesante destacar que el paralelismo entre una recta y un plano se da si $\det(A) = 0$.

2.6. Problemas

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

   $\rightarrow$ Como se conoce las intersecciones con los ejes $a=1$, $b=2$, $c=3$, se puede ocupar la ecuación reducida del plano, esto es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow \boxed{6x+3y+2z-6=0}$$

2. Comprobar si los planos que pasan por los puntos $a(2,0,0)$, $b(0,-1,0)$ y $c(0,0,3)$; y por los puntos $p(-4,0,0)$, $q(0,2,0)$ y $r(0,0,-6)$ tienen el mismo vector normal.

   $\rightarrow$ Consideremos que los puntos a, b, c pertenecen al plano P_1 y que los puntos p, q, r pertenecen al plano P_2. Con los puntos a y b se forma el vector $\vec{ab}=(-2,-1,0)$ y con los puntos a y c se forma el vector $\vec{ac}=(-2,0,3)$, luego hacemos el producto cruz entre estos dos vectores y se obtiene un vector perpendicular a los dos vectores anteriores que por estar contenidos en el plano P_1 vendria siendo la normal $\vec{n}_1$, esto es:

$$\vec{n}_1=\vec{ab}\times\vec{ac}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(-3,6,-2)$$

   El mismo procedimiento se realiza para el plano P_2 con los puntos p, q y r, lo cual sería:

$$\vec{n}_2=\vec{pq}\times\vec{pr}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \end{vmatrix}=(-12,24,-8)=4(-3,6,-2)\Rightarrow \boxed{\vec{n}_1=\vec{n}_2}$$

   $\rightarrow$ Otra forma de resolver este problema es utilizando la ecuación reducida del plano ya que se conoce las intersenciones con los ejes coodenados de cada plano. Entonces se tiene que para cada plano ocurre lo siguiente:

   - P_1: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow \boxed{3x-6y+2z-6=0} \Rightarrow \vec{n_1}=(3,-6,2)$
   - P_2: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-6}=1 \Rightarrow \boxed{6x-12y+4z+24=0} \Rightarrow \vec{n_2}=2(3,-6,2)$

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $R:\{x=t,\ y=2-t,\ z=2+t\}$ y por el punto $a(1,0,-1)$.

   $\rightarrow$ El vector director de la recta R es $\vec{d}=(1,-1,1)$. Por otro lado, todos los puntos que satisfacen la ecuación de la recta pertenecen al plano porque la recta esta contenida en el plano, en particular se tiene el punto $b(0,2,2)$. Entonces, con el punto $a(1,0,-1)$ y el punto $b(0,2,2)$ formamos el vector $\vec{ab}=(-1,2,3)$ el cual pertenece al plano que buscamos. Ahora, aplicamos el producto cruz entre el vector director y el vector anterior dando como resultado un vector perpendicular que es el vector normal del plano $\vec{n}$, esto es:

$$\vec{n}=\vec{d}\times\vec{ab}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(-5,-4,1)$$

   Con $\vec{n}$ y el punto b formamos la ec. del plano: $\boxed{(-5,-4,1)\cdot(x-0,y-2,z-2)=0}$

4. Hallar al ecuación del plano que corta a los ejes coordenados en puntos situados a distancia 2 del origen de coordenadas.

   $\rightarrow$ Los puntos son $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,2)$. Luego, la ecuación del plano es

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1 \Rightarrow \boxed{x+y+z-2=0}$$

5. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros a, b, c para que los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(2,1,0)$ y $D(a,b,c)$ sean coplanarios (esten el mismo plano)?

   $\rightarrow$ Formemos vectores con los puntos anteriores $\vec{AB}=(0,2,-1)-(1,1,1)=(-1,1,-2)$ $\vec{CD}=(2,1,0)-(a,b,c)=(2-a,1-b,-c)$. Como estos vectores estan contenidos en un mismo plano el coseno del ángulo que forman es cero, por lo tanto el producto punto entre ellos es cero. Con este hecho tenemos que $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0 \Rightarrow (-1,1,-2)\cdot(2-a,1-b,-c)=0$, desarrollando el lado izquierdo de la idualdad se tiene que $-2+a+1-b+2c=0$ entonces la relación que deben cumplir los parámatros es $\boxed{a-b+2c-1=0}$

6. Dada la recta $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ y el plano $x+y+z=0$. Determinar:

   - El punto de corte de la recta y el plano.

     $\rightarrow$ Sea el punto de corte (a,b,c) entre la recta y el plano, este debe cumplir que $a-1=b=-c-2$ y además $a+b+c=0$. Con la primera relación se tiene que $a=b+1$ y que $b=-c-1$, reemplazando en la segunda relación se tiene que $-c-1-c-2+c=0$ con lo cual se llega a que $c=1$, $a=2$ y $b=1$. Entonces el punto de corte es $(2,1,1)$

   - Los puntos de la recta que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano.

     $\rightarrow$ Consideremos el punto $p=(1,1,-2)$ y la normal $\vec{n}=(1,1,1)$ pertenecientes al plano, el punto $q=(a,b,c)$ perteneciente a la recta que esta ubicado a $\sqrt{3}$ unidades del plano. Recordando la ecuación de distancia entre un punto y un plano se tiene que:

     $$d=\frac{|\vec{pq}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{|(a-1,b-1,c+2)\cdot(1,1,1)|}{\|(1,1,1)\|}=\frac{|a-1+b-1+c+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$
     $$\Rightarrow 3=|a+b+c|$$

     Pero a,b,c pertenecen a la recta por lo tanto se cumple que $\begin{cases} a=t+1 \\ b=t \\ c=-t-2 \end{cases}$

     Con esto se tiene que $3=|a+b+c|=|t+1+t-t-2|=|t-1|$ con lo cual se llega a que $t=-2$ y $t=4$.
     Finalmente los puntos de la recta que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano son $(-1,-2,0)$ y $(5,4,-6)$.

7. Determinar la posición relativa entre la recta $R : \{x + 2y - 5 = 0,\, 3y - z - 6 = 0\}$ y el plano $2x - y + 2z + 7 = 0$. Si se cortan hallar el punto de intersección.

   Formemos la matriz A y su apliada A':

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

   Escalonemos las matrices para ver cual es su rango y de acuerdo a esto decidir cual es la posición relativa:

   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$

     $\Rightarrow$ Como rango$(A) = 3$ y rango(A')=3, entonces la recta es secante al plano.

   $\rightarrow$ Para encontrar el punto de intersección escribiremos la ecuación de la recta en su forma parámetrica, la reemplazaremos en la ecuación del plano y encontraremos el valor del parametro para el cual se intersectan la recta y el plano, con esto obtenemos el punto de intersección.
   Se tiene que la recta es de la forma $\{x + 2y - 5 = 0,\, 3y - z - 6 = 0\}$ que es lo mismo que $\{x = 1 + 2t,\, 2 - t,\, -3t\}$. Luego, reemplazando en la ecuación del plano se tiene que $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(-3t) + 7 = 0 \Rightarrow t = 7 \Rightarrow$ punto de intersección $(15, -5, -21)$.

8. Estudiar la posición relativa del plano $3x-y+az = 0$ y la recta $x - y + 2z - 3 = 0,\, x + z = -1$, según el valor de a.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   Si $a = 4 \Rightarrow$ rang$(A) = 2$ y rang$(A') = 3$, entonces son paralelos.

   Si $a = -4 \Rightarrow$ rang$(A) = 3$ y rang$(A') = 3$, entonces se cortan.

9. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

   a) $\{x = 1 - 2t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + t\}$ respecto la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

   Se tiene que

   $\vec{d_1 = (-2}, -1, 1)$ y $P_1 = (1, 2, 3)$

   $\vec{d_2 = (2}, 1, -1)$ y $P_2 = (1, -2, 0)$

   $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

   Como $\text{rang}(A) = 1$ y $\text{rang}(A') = 2$, entonces son paralelas.

   b) $\{x = 0,\ y = 1,\ z = t\}$ respecto la recta $\{x = 2 + t,\ -t,\ 1 + t\}$.

   Se tiene que

   $\vec{d_1 = (0}, 0, 1)$ y $P_1 = (1, -1, 1)$

   $\vec{d_2 = (0}, 1, 0)$ y $P_2 = (2, 0, 1)$

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   Como $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}(A') = 3$, entonces se cruzan sin cortarse.

   c) $\{x = t,\ y = 2 + t,\ z = -t\}$ respecto la recta $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$.

   Se tiene que

   $\vec{d_1 = (1}, 1, -1)$ y $P_1 = (1, 2, 1)$

   $\vec{d_2 = (0}, 2, 0)$ y $P_2 = (0, 1, -2)$

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

   Como $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}(A') = 2$, entonces son secantes (se cortan).

10. Determinar la recta que definen el plano $x - y + z = 2$, con el plano $2x - 3y + 4z = 7$.

    Como los planos se cortan, el producto cruz entre los vectores normales da un vector perpendicular que vendría siendo el vector director de la recta buscada. Esto es:

    $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ y $\vec{n_2} = (2, -3, 4) \Rightarrow \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1) = \vec{d}$

    Mirando, se puede hallar un punto que satisfaga ambas ecuaciones de los planos, es decir, que pertenezca a la recta. En particular se tiene el punto $(1, 1, 2)$.

    Entonces la ecuación de la recta, en su forma vectorial, es:

    $$\vec{X} = (1, 1, 2) + t(-1, -2, -1)$$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $a(3,2,-1)$ y $b(4,0,2)$. Siendo perpendicular al plano $P_1 : x - 5y - 2z = 6$.

Con los puntos a y b formamos el vector $\vec{ab}$, luego hacemos el producto cruz con la normal del plano P_1 y nos da como resultado la normal del plano buscado. Si consideramos que el plano que buscamos posee la normal $\vec{n}$, tenemos que:

$$\vec{ab} = (1,-2,3) \Rightarrow \vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{ab} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-19,-5,3)$$

Entonces la ec. vectorial del plano es $\boxed{(-19,-5,3) \cdot (x-3, y-2, z+1) = 0}$

12. Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas $R_1 : x = y = \dfrac{4-z}{4}$, y $R_2 : 2x = 2 - y = z$.

$$\vec{n} = \vec{d_1} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-6,-6,-3)$$

De la recta R_1 se obtiene el punto $(1,1,0)$ que además pertenece al plano que buscamos. Luego la ecuación vectorial del plano es:

$$(-6,-6,-3) \cdot (x-1, y-1, z) = 0$$

13. Hallar la distancia del origen al plano que pasa por el punto $(3,4,2)$ y es perpendicular a la recta que une $(1,2,3)$ con $(3,5,9)$.

La ecuación de la recta es $\vec{X} = (1,2,3) + t(2,3,6)$, el vector director es igual a la normal del plano, o sea tenemos que el plano tiene por ecuación a $(2,3,6) \cdot (x-3, y-4, z-2) = 0$. Ocupemos que la ecuación distancia punto-plano la cual es

$$d = \frac{\left|\vec{PQ} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Donde P es un punto del plano, Q es el punto donde queremos medir la distancia, $\vec{PQ}$ es el vector formado por P y Q, $\vec{n}$ es la normal del plano. En nuestro caso $P(3,4,2)$, $Q(0,0,0)$ entonces $\vec{PQ} = (-3,-4,-2)$. Luego tenemos que:

$$d = \frac{|(-3,-4,-2) \cdot (2,3,6)|}{\|(2,3,6)\|} = \frac{|-30|}{\sqrt{49}} = \frac{30}{7}$$

14. Un plano P_1 tiene como intersecciones con los ejes coordenados a los puntos $(4,0,0)$, $(0,6,0)$ y $(0,0,12)$. Hallar la ecuación del plano P que pasa por el punto $(6,-2,4)$ y es paralelo al anterior.

    Tenemos que $p_1 : \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1 \Rightarrow \vec{n} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}) \cong (3,2,1)$

    Luego, la ecuación del plano solicitado es $P : (3,2,1) \cdot (x-6, y+2, z-4) = 0$

15. Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $\{x - y + 1 = 0,\ y - 2z = 3\}$ y distan 3 unidades del punto $(1,1,1)$. Además calcular el seno del ángulo que forma la recta y el plano coordenado **OXY**.

    a) Notemos que el director de la recta es igual a las normales de los planos, entonces ocurre que $\vec{n_1} = \vec{n_2} = \vec{d} = (2,2,1)$.
    Consideremos el punto $P(x,y,z)$ perteneciente al plano, y el punto $Q(1,1,1)$ que esta a 3 unidades del plano; con esto, tenemos que:

    $$d = \frac{\left|\vec{PQ} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} \Rightarrow 3 = \frac{|(1-x, 1-y, 1-z) \cdot (2,2,1)|}{\|(2,2,1)\|} = \frac{|5 - 2x - 2y - z|}{\sqrt{9}}$$

    $$\Rightarrow 9 = |5 - 2x - 2y - z| \Longrightarrow \boxed{2x + 2y + z - 4 = 0} \wedge \boxed{2x + 2y + z - 14 = 0}.$$

    b) Para encontrar el ángulo ocuparemos el director de la recta $\vec{d} = (2,2,1)$ y el vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$ del plano OXY. Con esto tenemos que:

    $$\left\|\vec{d} \times \vec{n}\right\| = \left\|\vec{d}\right\| \|\vec{n}\| \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \|(2,2,1)\| \cdot \|(0,0,1)\| \operatorname{sen}\theta$$

    $$\|(2,-2,0)\| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1} \cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

    <u>Otra forma</u>
    Usemos la definición geométrica del producto punto:

    $$\left|\vec{d} \cdot \vec{n}\right| = \left\|\vec{d}\right\| \|\vec{n}\| \cos\theta \Rightarrow |(2,2,1) \cdot (0,0,1)| = \|(2,2,1)\| \cdot \|(0,0,1)\| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

    $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $P_1 : x + y - z = 2$ y $P_2 : 2 - y + 3z = 1$, y que además, pasa por el punto $a(-1, 2, 1)$.

    Los planos P_1 y P_2 definen una recta la cual tiene por ecuación paramétrica

    $$\left\{x = t,\, y = \frac{7-5t}{2},\, z = \frac{3-3t}{2}\right\}$$

    Con $t = 0$ y $t = 1$ se obtienen los puntos $(0, 7/2, 3/2)$ y $(1, 1, 0)$ que pertenecen a la recta, es decir, pertenecen al plano.
    Ahora, utilizando los puntos encontrados anteriormente más el punto $a(-1, 2, 1)$ formamos los vectores $\vec{q}$ y $\vec{p}$ que están en el plano buscado, luego aplicamos el producto cruz y obtenemos la normal del plano, esto es:

    $$(0, 7/2, 3/2) - (-1, 2, 1) = \vec{q} = (1, 3/2, 1/2)$$

    $$(1, 1, 0) - (-1, 2, 1) = \vec{p} = (2, -1, -1)$$

    $$\vec{q} \times \vec{p} = \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -4)$$

    Finalmente, ocupando la ecuación vectorial del plano y desarrollando los terminos tenemos que:

    $$(x+1, y-2, z-1)\cdot(-1, 2, -4) = 0 \Rightarrow -x-1+2y-4-4z+4 = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y + 4z + 1 = 0}$$

17. Determinar la posición relativa de los planos $P_1 : x + 2y - 3z = 1$ y $P_2 : 3x + 6y - 9z = 4$. Si no se intersectan halla la distancia mas corta entre ellos.

    Ocurre que la normal del plano P_1 es $\vec{n_2} = (1, 2, -3)$, y la normal del plano P_2 es $\vec{n_1} = (3, 6, -9) = 3(1, 2, -3)$, como son las mimas los planos son paralelos.

    Para hallar la distancia entre ellos, nos daremos el punto $p(2, 2, 5/3) \in P_1$ y el punto $q(1, 1, -5/9) \in P_2$ esto para formar el vector $\vec{pq} = (1, 1, 10/9)$. Ahora haremos uso de la formula distancia entre un punto y un plano, esto es:

    $$d = \left|\frac{\vec{pq}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| = \left|\frac{(1, 1, 10/9)\cdot(1, 2, -3)}{\|(1, 2, -3)\|}\right| = \left|\frac{1 + 2 - \frac{10}{3}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{\frac{-1}{3}}{\sqrt{14}}\right|$$

    $$\boxed{d = \frac{1}{3\sqrt{14}}} \approx 0,089$$

18. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, que es perpendicular a la recta $\{R : x = 1 + t,\, y = 1 - t,\, z = 2t\}$ y que además, intersecta a la recta.

    La recta R posee el vector director $\vec{d} = (1, -1, 2)$; además, los puntos que pertenecen a ella tiene la forma $q(t) = (1-t, t, 2-2t)$. Con este punto mas el punto $(0, 1, 2)$ formamos el vector $\vec{pq}(t) = (-1 - t, t, 2 - 2t)$ que está contenido en la recta que buscamos.

Ahora aplicamos la condición $\vec{pq(t)} \cdot \vec{d} = 0$ para encontrar el valor del parametro t para el cual la recta se intersectan, es decir, el punto de intersección.

$$\vec{pq}(t) \cdot \vec{d} = 0 \Rightarrow (-1-t, t, 2-2t) \cdot (1, -1, 2) = 0 \Rightarrow -1-t-t+4-4t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\vec{pq}(t = \frac{1}{2}) = \vec{d}_{recta} = (-1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$\boxed{\vec{X} = (0,1,2) + t(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)}$$

19. Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(5, 1, 0)$ y que es perpendicular al plano $2x - y + z = 1$.

    Se tiene que la nomal del plano es el director de la recta:

    $$\vec{n} = \vec{d} = (2, -1, 1) \Rightarrow \boxed{\vec{X} = (5,1,0) + t(2,-1,1)}$$

20. Determinar el punto en que la recta del ejercicio anterior intersecta al plano que contiene al punto $(1, 2, -1)$ y al eje X.

    Tenemos que debido a que el eje X esta contenido en el plano, y este tiene la forma vectorial $\vec{X} = t(1, 0, 0)$, obtenemos los puntos $(1, 0, 0)$ y $(2, 0, 0)$ que junto al punto $(1, 2, -1)$ pertenecen al plano.
    Con estos puntos formamos los vectores $(0, -2, 1)$ y $(1, -1, 1)$, aplicamos el producto cruz y obtenemos la normal del plano, esto es:

    $$\vec{n} = (0, -2, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 1, 2)$$

    Con esto la ecuación del plano es:

    $$P : (0, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 2, z + 1) = 0 \Rightarrow y + 2z = 0$$

    Recordemos que la recta del ejercicio anterior tiene la forma
    $\vec{X}(t) = (5+2t, 1-t, t) = (x, y, z)$ que reemplazado en el plano encontrado anteriormente se tiene que:

    $$1 - t + 2t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \vec{X}(t = -1) = (5 + 2 \cdot -1, 1 - -1, -1)$$

    Punto de intersección $\boxed{(3, 2, -1)}$

21. Los puntos $(1, -1, 3)$, $(2, 1, 7)$ y $(4, 2, 6)$ son vértices de un triángulo rectángulo, ya que si consideramos los vectores

    $$\mathbf{A} = (1, 2, 4),\ \mathbf{B} = (3, 3, 3),\ \mathbf{C} = (2, 1, -1)$$

    obtenidos al restar las coordenadas de los puntos dados, se tiene

    $$\angle\mathbf{AB} = \frac{21}{\sqrt{21}\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{7}{9}}, \quad \angle\mathbf{BC} = \frac{6}{\sqrt{27}\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{9}}, \quad \angle\mathbf{AC} = 0$$

    Se concluye de $\angle\mathbf{AC} = 0$, que el triángulo es rectángulo.

22. Los puntos $(-3,2,4)$, $(6,1,2)$ y $(-12,3,6)$ son colineales puesto que usando la función distancia se encuentra que

$$\begin{array}{lclcl} d((-3,2,4),(6,1,2)) & = & \sqrt{81+1+4} & = & \sqrt{86} \\ d((-3,2,4),(-12,3,6)) & = & \sqrt{81+1+4} & = & \sqrt{86} \\ d((6,1,2),(-12,3,6)) & = & \sqrt{324+4+16} & = & \sqrt{344} \end{array}$$

Ahora se observa que $\sqrt{86}+\sqrt{86} = 2\sqrt{86} = \sqrt{344}$. Esto demuestra que los puntos son colineales.

23. Los puntos medios de un triángulo son los puntos $(3,2,3)$, $(-1,1,5)$ y $(0,3,4)$. Vamos a encontrar los vértices del triángulo.

Vamos a considerar que los vértices tienen coordenadas (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3), (z_1,z_2,z_3) Se tiene que

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (3,2,3) \\ \frac{1}{2}(x_1+z_1, x_2+z_2, x_3+z_3) = (-1,1,5) \\ \frac{1}{2}(y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3) = (0,3,4) \end{array}$$

Este sistema en coordenadas, se transforma en los siguientes

$$\begin{array}{rclrclrcl} x_1+y_1 & = & 6, & x_2+y_2 & = & 4, & x_3+y_3 & = & 6 \\ x_1+z_1 & = & -2, & x_2+z_2 & = & 2, & x_3+z_3 & = & 10 \\ y_1+z_1 & = & 0, & y_2+z_2 & = & 6, & y_3+z_3 & = & 8 \end{array}$$

Al resolver se encuentra $z_1=-4$; $y_1=4$; $x_1=2$; $z_2=2$; $y_2=4$; $x_2=0$; $z_3=6$; $y_3=2$; $x_3=4$. Con ello se tiene que los vértices tienen coordenadas $(2,0,4)$, $(4,4,2)$ y $(-4,2,6)$.

24. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(4,-5,0)$ y es perpendicular al plano $x+3y-6z-8=0$ es

$$\mathbf{X} = (4,-5,0) + t\,(1,3,-6)$$

25. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a las rectas de directores $(4,2,1)$ y $(-3,-2,1)$ se puede hallar como sigue.

Sea (d_1,d_2,d_3) el vector director de la recta que se busca. Entonces se satisface que

$$\left.\begin{array}{rcl} (d_1,d_2,d_3)\cdot(4,2,1) & = & 0 \\ (d_1,d_2,d_3)\cdot(-3,-2,1) & = & 0 \end{array}\right|$$

Al resolver se encuentra; $d_1=-2d_3$, $d_2=\frac{7}{2}d_3$, $d_3=d_3$, de modo que, en particular se tiene que $\mathbf{d}=(4,-7,-2)$. Luego, la ecuación de la recta es,

$$\mathbf{X} = t(4,-7,-2)$$

26. La ecuación del plano que contiene los puntos $(3,4,1)$, $(1,7,1)$ y $(-1,-2,5)$ se encuentra como sigue:

Con los tres puntos dados se forman dos vectores del mismo origen

$$\mathbf{A} = (3,4,1)-(1,7,1) = (2,-3,0), \qquad \mathbf{B} = (3,4,1)-(-1,-2,5) = (4,6,-4)$$

Luego, el vector normal $\mathbf{n}$ que se necesita es

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = (12, 8, 24)$$

En consecuencia, la ecuación del plano es

$$(x-3, y-4, z-1) \cdot (12, 8, 24) = 0$$

que en forma general tiene la forma $\quad 3x + 2y + 6z - 23 = 0$.

27. La ecuación del plano que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(2, 2, -4)$ y $(7, -1, 3)$, y que contiene al punto $(4, 0, -2)$ se encuentra de la siguiente forma:

    Como el plano es perpendicular a la recta, el vector director de ésta sirve como vector normal del plano. Esto es, $\mathbf{n} = (5, -3, 7)$. Con el vector normal y el punto en el plano concluimos que

    $$(x-4, y, z+2) \cdot (5, -3, 7) = 0$$

    resultando como ecuación del plano, $5x - 3y + 7z - 6 = 0$.

28. Para hallar la ecuación del plano que es perpendicular a los planos $x - y + z = 0$ y $2x + y - 4z - 5 = 0$ y que contiene al punto $(4, 0, -2)$ se procede como sigue:

    Suponemos que el vector normal tiene la forma $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Se debe cumplir que

    $$\left.\begin{array}{c} (a,b,c) \cdot (1,-1,1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (2,1,-4) = 0 \end{array}\right|$$

    de lo cual, el vector normal tiene coordenadas, $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$, y en consecuencia,

    $$(x-4, y, z+2) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Longrightarrow x + 2y + z - 2 = 0$$

    es la ecuación del plano buscado.

29. Para hallar el trabajo que realiza la fuerza $\mathbf{F} = (5, 0, -3)$ para mover un objeto a lo largo de la recta que une los puntos $P = (4, 1, 3)$ y $Q = (-5, 6, 2)$, en donde la magnitud de la fuerza está medida en libras y la distancia en pies, se determina en primer lugar el vector desplazamiento $Q - P = (-9, 5, -1)$, pues $T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. Se debe recordar que si la fuerza $\mathbf{F}$ es constante y se desea mover un objeto una distancia d a lo largo de una recta actuando la fuerza en la misma dirección del movimiento, entonces $T = \mathbf{F} \cdot d$. Si la fuerza no está dirigida a lo largo de la recta del movimiento, entonces

    $$T = comp_{\mathbf{L}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

    siendo $\mathbf{d}$ el desplazamiento entre los puntos P y Q, con $\mathbf{PQ}$ representación del desplazamiento vectorial. En consecuencia

    $$T = (5, 0, -3) \cdot (-9, 5, -1) = -42 \ plb$$

30. Para probar que los vectores $(\mathbf{A} - c\ \mathbf{B})$ y $\mathbf{B}$, con la condición que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son distintos de cero y $c = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{||\mathbf{B}||^2}$, son perpendiculares se procede como sigue

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - c\ \mathbf{B})\cdot\mathbf{B} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - c\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{||\mathbf{B}||^2}\ (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0\end{aligned}$$

31. Las rectas $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{-5} = \dfrac{z-2}{3}$ y $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+14}{5} = \dfrac{z-8}{-3}$
son coincidentes, pues el producto cruz de sus vectores directores es cero. En efecto,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -5 & 3\\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

y además, el punto $(-1,-4,2)$ está en ambas rectas. Verificar este resultado por el rango de la matriz de los oeficientes y la aumentada.

32. La recta de ecuación $x+1 = \dfrac{y-6}{-2} = z$ se encuentra en el plano de ecuación $3x+y-z = 3$. En efecto, el punto $(0,4,1)$ pertenece tanto al plano como a la recta. La ecuación paramétrica de la recta tiene la forma

$$\mathbf{X} = (-1,6,0) + t\ (1,-2,1)$$

de la cual se obtiene que el punto $(-1,6,0)$ está en la recta y en el plano. Por otra parte, los vectores normal del plano y director de la recta satisfacen

$$(3,1,-1)\cdot(1,-2,1) = 0$$

lo que significa que la recta es paralela al plano, pero como ya se han encontrado dos puntos que pertenecen tanto al plano como a la recta, se deduce que la recta está en el plano.

33. Para determinar el menor ángulo entre las rectas de ecuaciones $\{x = 2y+4,\ z = -y+4\}$ y $\{x = y+7,\ 2z = y+2\}$, escribimos las ecuaciones en forma paramétrica

$$\{x = 2t+4, \quad y = t, \quad z = 4-t\}, \qquad \text{y} \qquad \{x = t+7, \quad y = t, \quad z = 1 + \frac{t}{2}\}$$

Los vectores directores son, respectivamente, $\mathbf{d}_1 = (2,1,-1)$ y $\mathbf{d}_2 = (1,1,\frac{1}{2})$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}\cdot cos\ \theta &= (2,1,-1)\cdot(2,2,1)\\ cos\ \theta = \frac{5}{3\sqrt{6}} &\Longrightarrow \theta = arc\ cos\ \frac{5}{3\sqrt{6}}\end{aligned}$$

34. Para hallar la ecuación del plano que contiene el punto $(6, 2, 4)$ y la recta $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{6} = \dfrac{z-3}{7}$ seguimos el siguiente camino:

De la ecuación de la recta parametrizada en la forma

$$\mathbf{X} = (1, -2, 3) + t\ (5, 6, 7)$$

obtenemos dos puntos, que por hipótesis, deben estar en el plano. Estos puntos son $(1, -2, 3)$ y $(6, 4, 10)$. Como está dado un tercer punto en el plano, entonces formamos dos vectores,

$$\mathbf{a} = (6, 2, 4) - (1, -2, 3) = (5, 4, 1), \quad \mathbf{b} = (6, 2, 4) - (6, 4, 10) = (0, -2, -6)$$

con los cuales encontramos el vector normal

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (11, -15, 5)$$

Luego, la ecuación del plano es $\quad 11x - 15y + 5z - 56 = 0$

35. Para hallar la ecuación del plano que contiene las rectas

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}, \qquad \{3x + 2y + z + 2 = 0,\ x - y + 2z - 1 = 0\}$$

que se **intersectan**, tenemos que la parametrización de la primera es

$$x = 2 + 4t, \quad y = -3 - t, \quad z = -2 + 3t$$

Para parametrizar la segunda recta, que es la intersección de dos planos, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z + 2 & = & 0 \\ x - y + 2z - 1 & = & 0 \end{array}\right|$$

al eliminar la variable z se obtiene $x + y = -1$. Con $x = s$ se obtienen $y = -1 - s$, $z = -s$, de donde la parametrización de la segunda recta es

$$x = s, \quad y = -1 - s, \quad z = -s$$

Los vectores directores de ambas rectas son $\mathbf{d}_1 = (4, -1, 3)$ y $\mathbf{d}_2 = (-1, 1, 1)$, con lo cual, un vector normal al plano es

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4, -7, 3)$$

Para hallar el punto de intersección de ambas rectas igualamos sus coordenadas usando las parametrizaciones.

$$2 + 4t = s, \quad -3 - t = -1 - s, \quad -2 + 3t = -s$$

de donde $t = 0$, $s = 2$. Esto significa, que para esos valores de los parámetros s y t se tiene el mismo punto, ¡ el de intersección !, que resulta ser $(2, -3, -2)$. En consecuencia

$$(x - 2, y + 3, z + 2) \cdot (4, 7, -3) = 0 \Longrightarrow 4x + 7y - 3z + 7 = 0$$

es la ecuación del plano.

36. Probemos que las rectas siguientes son paralelas, y hallemos el plano que determinan, $\{3x - y - z = 0,\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0\}$ y $\{x - 3y + z + 3 = 0,\ 3x - y - z + 5 = 0\}$
Haciendo $z = t$ tenemos las parametrizaciones

$$\{x = \frac{t-1}{2},\ y = \frac{t-3}{2},\ z = t\}, \quad \text{y} \quad \{x = \frac{t-3}{2},\ y = \frac{t+1}{2},\ z = t\}$$

siendo claro que los vectores directores de ambas rectas; $\mathbf{d}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ y $\mathbf{d}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ son paralelos. Esto prueba que las rectas son paralelas. Para hallar la ecuación del plano consideremos en la primera recta los puntos $(1, 0, 3)$ y $(2, 1, 5)$, y en la segunda recta el punto $(0, 2, 3)$. De esta manera, se tienen los vectores

$$\mathbf{a} = (1, 0, 3) - (2, 1, 5) = (-1, -1, -2), \qquad \mathbf{b} = (1, 0, 3) - (0, 2, 3) = (1, -2, 0)$$

con los cuales se determina el vector normal $\mathbf{n}$ al plano que se anda buscando

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, -2, 3)$$

Luego, la ecuación del plano es $(x - 1, y, z - 3) \cdot (-4, -2, 3) = 0$. Es decir

$$4x + 2y - 3z + 5 = 0$$

37. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $\frac{1}{4}(x - 10) = \frac{1}{3}y = \frac{1}{2}z$ en su intersección, se halla como sigue:

    Si (d_1, d_2, d_3) es el vector director de la recta, entonces la condición de perpendicularidad hace que se satisfaga $(d_1, d_2, d_3) \cdot (4, 3, 2) = 0$. Por otra parte, el punto de intersección se determina al resolver el par de ecuaciones

$$\{x = 10 + 4t,\ y = 3t,\ z = 2t\}, \qquad \{x = sd_1,\ y = sd_2,\ z = sd_3\}$$

de la segunda y tercera ecuación se obtiene $2d_2 = 3d_3$, de donde $s = t$. Siendo así, $d_2 = 3$, y $d_3 = 2$. Para hallar d_1 consideremos la condición de perpendicularidad, $4d_1 + 3d_2 + 2d_3 = 0$. Al reemplazar $d_2 = 3$, y $d_3 = 2$, se obtiene $d_1 = -\frac{13}{4}$. Con esto, un vector director es $\mathbf{d} = (13, -12, -8)$. En consecuencia, la ecuación buscada de la recta es

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$$

O bien

$$\mathbf{X} = t\ (13, -12, -8)$$

38. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(2, 0, -4)$ y es paralela a cada uno de los planos $2x + y - z = 0$ y $x + 3y + 5z = 0$, se halla como sigue:

Si (d_1, d_2, d_3) es el vector director de la recta, entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned} (d_1, d_2, d_3) \cdot (2, 1, -1) &= 0 \\ (d_1, d_2, d_3) \cdot (1, 3, 5) &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver se obtiene como vector director de la recta $\mathbf{d} = (8, -11, 5)$. De modo que la ecuación de la recta es

$$\mathbf{X} = (2, 0, -4) + t\ (8, -11, 5)$$

39. Determine si las siguientes rectas son paralelas

$$\{x = 4 - 2t,\ y = 1 + 4t,\ z = 3 + 10t\}, \quad \{x = s,\ y = 6 - 2s,\ z = 4 - 5s\}$$

La forma más simple de ver esto es por medio de los vectores directores.

$$d_1 = (-2, 4, 10) \qquad\qquad d_2 = (1, -2, -5)$$

dado que existe escalar $k = -2$ tal $kd_2 = d_1$, se sigue que las rectas son paralelas.

40. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -4, 5)$, que es *perpendicular* con la recta $\dfrac{x+8}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$, y es *paralela* al plano $3x + y - 2z = 5$

Sólo falta hallar el vector director de la recta y tenemos la respuesta. La recta pedida es L y tiene vector director $\vec{d} = (a, b, c)$. El plano tiene vector normal $\vec{n} = (3, 1, -2)$. La recta perpendicular a la recta L, es L_1 y tiene vector director $\vec{d_1} = (2, 3, -1)$. Es fácil darse cuenta que

$$\vec{d} \cdot \vec{d_1} = 0, \qquad \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$$

esto lleva a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a = \frac{5}{7}\,c, \quad b = -\frac{1}{7}\,c$$

En conscuencia, el vector director de la recta que andamos buscando es, con $c = 7$

$$\vec{d} = (5, -1, 1)$$

y la ecuación resulta ser

$$\mathbf{X} = (2, 3, -3) + t\ (5, -1, 1)$$

3. Funciones de Varias Variables

3.1. Campos Escalares

Un campo escalar es una función de la forma:

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto \; f(\vec{x}) = y \end{array}$$

Elementos básicos:

- Dom f: Son todos los puntos para los cuales f esta definida.
- Rec f: Es el conjunto de números que se obtiene al evaluar f en los puntos del dominio.
- La gráfica de $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es el conjunto de puntos $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ del espacio $n+1$ dimensional.

Observación: para graficar se recurre al concepto de Trazas en donde graficas por separado se unen para formar un fin, el cual es la gráfica de la superficie en cuestión.

3.2. Límites

Existen diferentes formas para calcular los límites, entres los cuales están:

- Por caminos: Trata de encontar funciones que pasen por el punto al cual tiende la variable y reempazarlo en el argumento del límite.
- Manipulación algebraica.
- Acotada por nula (Acotado$\cdot 0 = 0$)
- Uso de infinitésimos que se reemplazan en el límite. Ejemplos: $\ln x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, etc.
- Polares: El reemplazo es el siguiente: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad (x, y) \to 0 \Rightarrow r \to 0.$

3.3. Continuidad

Para decidir si una función es continua en el punto (x_0, y_0) existe tres condiciones, estas son:

- $f(x, y)$ esta definida en (x_0, y_0).
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \Rightarrow$ Existe.
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Basta que una de las condiciones anteriores no se cumpla para que la función no sea continua en (x_0, y_0).

3.4. Derivadas

- **Derivada direccional**: Para calcular esta derivada se debe considerar el siguiente límite:
$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x_0} + h\vec{u}) - f(\vec{x_0})}{h}$$
donde $\vec{x_0}$ es el punto de aplicación, el vector unitario $\vec{u}$ es la dirección donde se calcula la derivada.
- **Derivada Parcial**: Consiste en derivar en dirección de los vectores unitarios que poseen los ejes coordenados. Por ejemplo el eje X posee el vector $\vec{u} = (1, 0)$ con lo cual se tiene $D_{\vec{u}}f = D_1 f = f_x$, el eje Y posee el vector $\vec{u} = (0, 1)$ con lo cual se llega a que $D_{\vec{u}}f = D_2 f = f_y$.

3.5. Diferenciabilidad

Teorema 1: Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite todas sus derivadas parciales en $\vec{x_0}$ y, además, que estas derivadas sean funciones continuas en dicho punto entonces f es diferenciable.

Teorema 2: La función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in D$, si:

1. Existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0)
$$A = \frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0)), \qquad A = \frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0))$$
2. El siguiente límite vale cero:
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - \lambda(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$
donde, $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ y $\lambda(h, k) = Ah + Bk$

   `Observación`: Diferenciabilidad implica continuidad y existencia de derivadas parciales, existencia de derivadas direccionales en cualquier dirección.

3.6. La diferencial

Si la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$, entonces, para cada $\mathbf{x} = (x, y) \in D$, se llama diferencial de la función f en $\mathbf{x}$ y se denota por df, a la expresión:
$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

3.6.1. La diferencial como aproximación del incremento

Geométricamente se pueden dar las siguientes interpretaciones:

1. El valor aproximado de una función $f(x, y)$, en un punto (x, y), se puede obtener sustituyendo el valor de (x, y) en la ecuación del plano tangente, en un punto cercano (x_0, y_0). Es decir, para hallar el valor aproximado de una función en un punto, calculamos la ecuación del plano tangente, en un punto cercano, y sustituimos las coordenadas del punto sobre la ecuación de dicho plano.
2. Al pasar del punto $\mathbf{x} = (x, y)$ al punto cercano $(\mathbf{x} + h)$, el incremento que sufre la función:
$$\Delta f = f(\mathbf{x} + h) - f(\mathbf{x})$$
coincide, de manera aproximada, con el diferencial df. Es decir, la diferencial de una función es una buena aproximación del incremento.

Cálculo de valores aproximados

Supongamos que queremos calcular, aunque sea de manera aproximada, el valor de una función en un punto (x, y), pero no sabemos calcular el valor de la función en dicho punto, $f(x, y)$, o dicho cálculo resulta extremadamente complicado, y sin embargo, supongamos que sabemos calcular el valor de la función y el de sus derivadas parciales en un punto cercano (x_0, y_0). Pues bien, podemos utilizar el valor de la función y el de su derivadas parciales en este punto (x_0, y_0) para calcular el valor aproximado de la función en el punto desconocido (x, y).

Para hacer cálculos aproximados de operaciones podemos utilizar cualquiera de las dos opciones:

1. Para hallar el valor aproximado de una función en un punto, calculamos la ecuación del plano tangente, en un punto cercano, y sustituimos las coordenadas del punto sobre la ecuación de dicho plano.
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_x(x_0, y_0)(y - y_0)$$
2. Aproximar el incremento mediante la diferencial
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$
Hay que advertir que estas aproximaciones sólo serán validas para valores muy cercanos al punto conocido y para funciones diferenciables.

3.7. El Gradiente (∇f)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$. Se define el (vector) gradiente de la función f en el punto $(x, y) \in D$, como el vector de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\nabla f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ tal que } \nabla f(x,y) = (\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}).$$

Propiedades del gradiente:

- La derivada direccional de f apartir del punto (a, b) en dirección del vector $\vec{u}$ se puede definir a partir del gradiente:

  $$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$$

- El máximo ritmo de cambio (razón de cambio o simplemente derivada) de $f(x, y)$ en el punto (a, b) es $\|\nabla f(a, b)\|$ y ocurre en dirección del gradiente, esto es en dirección de $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|}$.
  El mínimo ocurre en sentido contrario al gradiente, se antepone un signo menos.

- Plano tangente a $f(x, y)$ en el punto $(a, b, c = f(a, b))$ esta dado por

  $$\nabla f(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

  Otra expresión es $\dfrac{x-a}{f_x(a,b)} = \dfrac{y-b}{f_y(a,b)} = \dfrac{z-c}{-1}$.

3.8. Derivadas Parciales de Orden Superior-Hessiana

- Notaciones
  - $f_{xx} = (f_x)_x = f_{11} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{11} f$
  - $f_{xy} = (f_x)_y = f_{21} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_2(D_1 f) = D_{21} f$

  Para evitar confusión con el orden de derivación ($f_{xy} = D_{21} f$), utilizaremos el siguiente criterio: se empieza derivando por la variable *más cercana* a la función.

- **Hessiana**: Dada una funcón $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definimos su matriz hessiana como la matriz que tiene como componentes las derivadas parciales de segundo orden, dispuestas de la siguiente forma:

  $$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

3.9. Regla de la Cadena y Derivación Implícita

Sea $z = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$, entonces:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Una observación es que si x e y son funciones de más de una variable, entonces se mantiene constante (al menos una se deja variable) todas las demás. Generalizando se tiene que:

$$\frac{du}{dt_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

$$\forall i = 1, 2, ..., m.$$

Ejemplo: sea $z = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ e $y = h(s, t)$, entonces

- $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial s}$
- $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial t}$

  Ojo! $\dfrac{\partial x}{\partial s}$ se deriva manteniendo constante t, y $\dfrac{\partial x}{\partial t}$ se deriva manteniendo constante s.

Ahora queda analizar la derivación implícita, la cual queda expresada así:

- Con $F(x, y) = 0$, el cual sale de $y = f(x)$, se tiene que $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$
- Si $F(x, y, z) = 0$, el cual nace de $z = f(x, y)$, entonces tenemos que $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{\frac{F}{F_x}}{\frac{F}{F_z}}$ y $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{\frac{F}{F_y}}{\frac{F}{F_z}}$

3.10. Extremos de funciones

3.10.1. Definiciones y Teoremas

1. **Definición de máximos y mínimos absolutos**: Los valores $f(x_0, y_0)$ y $f(x_1, y_1)$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ para todo (x, y) en D se conocen como mínimo absoluto y máximo absoluto de f en la región D.

2. **Teorema de existencia del máximo y del mínimo absoluto**: Toda función continua, definida en una región cerrada y acotada D, alcanza, en dicha región, un valor máximo absoluto y un mínimo absoluto.

3. **Definición de máximo y mínimo relativo**: (Extremo local) Sea f una función definida en el conjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$. Se dice que f tiene un máximo (mínimo) local o relativo en el punto $(x_0, y_0) \in D$ si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)\,(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ respectivamente) para todo (x, y) en una bola B de centro en (x_0, y_0).

4. **Teorema de los máximos y mínimos relativos**. Los extremos de una función continua se producen solamente en los puntos críticos. Es decir, en un máximo y en un mínimo relativo, las derivadas parciales o no existen o valen cero.

$$f(x_0, y_0) \text{ es mínimo relativo} \Leftrightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B_{x_0, y_0}$$
$$f(x_0, y_0) \text{ es máximo relativo} \Leftrightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in B_{x_0, y_0}$$

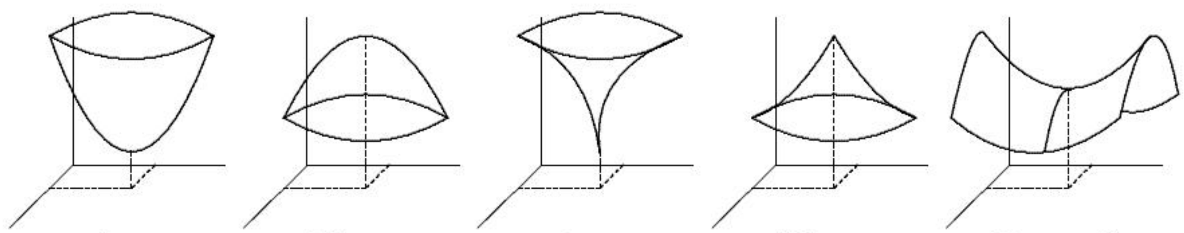
Es decir, la función f tendrá un máximo (mínimo) local en $(x_0, y_0) \in D$ si $f(x_0, y_0)$ es el valor más grande (más pequeño, respectivamente) de todos los valores de $f(x, y)$ para (x, y) en una bola de centro en (x_0, y_0).

3.10.2. Puntos críticos

Se llaman puntos críticos de una función a aquellos puntos en los que el gradiente vale cero o no está definido, es decir,

1. Puntos en los que todas las derivadas parciales valen cero (simultáneamente).
$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ y } f_y(x_0, y_0) = 0$$
2. Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida.
$$f_x(x_0, y_0) \text{ o } f_y(x_0, y_0) = 0 \text{ no existe}$$

3.10.3. Naturaleza de los puntos crítcos. Criterio del hessiano



Para estudiar la naturaleza de los puntos críticos, formamos la matriz hessiana en dichos puntos:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Y comparamos los signos de los dos determinantes principales:

$$D_1 = f_{xx}(a,b), \qquad |Hf(a,b)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Si $|H(a,b)| > 0 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 & \text{(a,b) es un Mínimo relativo} \\ f_{xx}(a,b) < 0 & \text{(a,b) es un Máximo relativo} \end{cases}$

- Si $|H(a,b)| < 0 \Rightarrow (a,b)$ es punto de silla.
- Si $|H(a,b)| = 0 \Rightarrow$ No hay información.

Nota: El criterio del hessiano puede fallar a la hora de estudiar la naturaleza de los extremos relativos de dos formas: Bien porque alguna de las derivadas parciales no esté definida, entonces no se puede aplicar el criterio; o bien, porque el hessiano sea cero, en cuyo caso el criterio no da información.

3.11. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Planteamiento del problema: En estos tipos de problemas se trata de hacer máxima o mínima una función $f(x, y)$ sujeta a una restricción $g(x, y) = 0$. Teóricamente el problema se puede resolver despejando la variable y en la ecuación $g(x, y) = 0$, y sustituyendo el valor obtenido, $y = \phi(x)$, en la en la función f, con lo cual el problema se reduce al cálculo de máximos y mínimos de una función de una sola variable.

$$f(x, y) = f(x, \phi(x)) = h(x)$$

El problema se presenta cuando no es posible o no es práctico despejar la variable y en la ecuación $g(x, y) = 0$.

Observación: El extremo de la función $f(x, y)$ condicionado por la ecuación $g(x, y) = 0$, no es extremo de la función $f(x, y)$, considerada aisladamente, sino de la intersección de ambas funciones.

3.11.1. Método de los multiplicadores de Lagrange.

Los extremos de la función $f(x, y)$, condicionados por la restricción $g(x, y) = 0$, se producen en los puntos críticos de la función:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Dichos puntos críticos vendrán determinados por las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array}\right\rfloor \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array}\right\rfloor$$

El procedimiento más cómodo para resolver el sistema consiste en eliminar λ entre las dos primeras ecuaciones y sustituir el resultado en la tercera. En el proceso de resolución del sistema hay que procurar evitar perder soluciones en las simplificaciones. Por ejemplo, de la ecuación $\lambda x = x$ se obtienen dos soluciones $x = 0$ y $\lambda = 1$, mientras que si *tachamos* la x perdemos la solución $x = 0$.

Para determinar su naturaleza estudiamos el signo del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{x\lambda} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} - \rightarrow \text{ mínimo} \\ + \rightarrow \text{ Máximo} \\ 0 \rightarrow \text{ Duda} \end{array}$$

Algunos ejemplos de problemas a resolver serían:

hallar el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ condicionado por la restricción $x + y - 1 = 0$, inscribir un rectángulo de área máxima, con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, en la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = 3 - x^2$ y los ejes de coordenadas.

3.12. Máximos y mínimos absolutos

Toda función continua definida en un recinto cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre dicho recinto. Para hallar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un recinto cerrado y acotado realizaremos el siguiente proceso:

1. Hallamos los puntos críticos en el interior del recinto. Para ello hallamos los puntos críticos de la función, ignorando el contorno del recinto, y una vez hallados los puntos críticos seleccionamos los situados en el interior del recinto.
2. Hallamos los puntos críticos en el contorno del recinto. Para ello estudiamos los extremos de la función condicionados por el contorno; bien aplicando los multiplicadores de Lagrange, o bien por sustitución de la variable.
3. Comparamos los valores de la función en los puntos críticos hallados. El mayor corresponde al máximo absoluto y el menor al mínimo absoluto.

3.13. Problemas

1. Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)}$

   Este límite apareció en una prueba, pero era bastante fácil de resolver. Recordando el infinitésimo $(1-\cos x) \sim x^2/2$, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-2)(y-1)(\frac{x^2}{2})}{x^2(y-1)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

2. Una ecuación de la superficie de una montaña es $z = 1200-3x^2-2y^2$, donde la distancia se mide en pies, el eje X apunta al Este y el eje Y apunta al norte. Un montañista está en el punto correspondiente a $(-10, 5, 950)$.

   a) ¿Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada?

   Es en la dirección del gradiente, es decir:

$$\Delta z(x,y) = (-6x, -4y) \overset{x=-10\, y=5}{\to} \Delta z(-10,5) = (60, -20)$$

   b) Si el montañista se mueve en dirección al Este. ¿Está ascendiendo o descendiendo?. ¿Cuál es su rapidez?

   En este caso la dirección es $\vec{\mu} = (1,0)$. Veamos como varía la altura en esa dirección (o derivada direccional):

$$D_{\vec{\mu}}\, z(-10,5) = \nabla z(-10,5)\cdot\vec{\mu} = (60,-20)\cdot(1,0) = 60$$

   El montañista esta ascendiendo, con una velocidad de $60\, pies/s$

   c) ¿En qué dirección la altura permanece constante?

   Que la altura permanezca constante significa que no varía la razón de cambio, es decir, la derivada vale cero. Esto ocurre en una cierta dirección $\vec{x} = (a,b)$ a partir del punto dado $(-10,5)$. Entonces se tiene que:

$$\Delta z = 0 \Rightarrow D_{\vec{x}}\, z(-10,5) = 0 \Rightarrow \nabla z(-10,5)\cdot\vec{x} = (60,-20)\cdot(a,b) = 0 \Rightarrow 3a = b$$

$$\vec{x} = (a,b) = (a,3a) = a(1,3) \Rightarrow \vec{x} = a(1,3) \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. Considerar el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Hallar $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

   Para el caso $(x,y) = (0,0)$ usamos la definición

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$D_2f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Para el caso $(x,y)\neq(0,0)$ derivamos directamente obteniendo:

$$D_1f(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(2x)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2f(x,y)=\frac{(x(x^2-y^2)(x^2+y^2))-(2y)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

Hasta el momento tenemos que

$$D_1f(x,y)=\begin{cases}\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(2x)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$D_2f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x(x^2-y^2)(x^2+y^2))-(2y)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ahora, caculamos $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ usando la definición pero ya no con $f(x,y)$ si no que con las funciones $D_1f(x,y)$ y $D_2f(x,y)$ respectivamente.

$$D_{12}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{D_2f(h,0)-D_2f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$D_{21}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{D_1f(0,h)-D_1f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

b) Decidir si f es diferenciable.

Veamos si sus derivadas parciales son continuas
Para f_x tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(2x)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}=0$$

Para f_y ocurre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x(x^2-y^2)(x^2+y^2))-(2y)(xy(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}=0$$

Si probamos con polares, caminos ($y=mx$, $y=x^2$, etc) el límite vale cero, o sea se cumple que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=f_x(0,0)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=f_y(0,0)$.

Como las derivadas parciales son continuas, la función $f(x,y)$ es diferenciable.

c) Calcular la ecuación del plano tangente en $(1,1,0)$.

Consideremos que $f(x,y)=z$. Ahora, reescribamos la función como $T(x,y,z)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-z$. Entonces, calculamos la normal del plano tangente en el punto $(1,1,0)$ y escribimos la ecuación del plano solicitado:

$$\nabla T(1,1,0)=(1,0,-1)\Rightarrow(1,0,-1)\cdot(x-1,y-1,z-0)=0\Rightarrow \boxed{x-z=1}$$

4. Hallar $\frac{\partial w}{\partial t}$ si $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x = \cos(st)$, $y = \operatorname{sen}(st)$, $z = s^2 t$.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \operatorname{sen}(st)s + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cos(st)s + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}s^2$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{-\cos(st)\operatorname{sen}(st)s + \operatorname{sen}(st)\cos(st)s + s^4 t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{s^4 t}{\sqrt{1+s^4t^2}}}$$

<u>Otra forma</u>

$$w = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{cos^2(st) + \operatorname{sen}^2(st) + s^4t^2} = \sqrt{1+s^4t^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{1+s^4t^2}} \cdot 2s^4 t = \frac{s^4 t}{\sqrt{1+s^4t^2}}$$

5. Dada la función $z = f(x,y)$. Se sabe que $D_{\vec{u}}f(1,2) = 2$, si $\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2)$, y que $D_{\vec{v}}f(1,2) = 2$, si $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Calcular $\nabla f(1,2)$.

Sea $\nabla f(1,2) = (a,b)$, entonces

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\vec{u} = (a,b)\cdot\frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow a+b = 2\sqrt{2} \qquad (1)$$
$$D_{\vec{v}}f(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\vec{v} = (a,b)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = -2 \Rightarrow a-b = -2\sqrt{2} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), se tiene que:

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\nabla f(1,2) = (a,b) = (0, 2\sqrt{2})}$$

6. Determinar continuidad de la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta}{r^3\cos^6\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

Si usamos el camino $y = x^3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{x^6+x^6} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Luego, el límite no existe. Por lo tanto la función no es continua.

7. La temperatura en grados celsius en la superficie de una placa metalica es $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se miden en centímetros. Hallar la dirección, a partir del punto $(2,-3)$, en qué aumenta más rápido la temperatura y hallar esa tasa o razón de crecimiento máxima.

$$\text{La dirección es } \nabla T = (-8x, -2y) \Rightarrow \nabla T(2,-3) = (-16, 6)$$
$$\text{TASA} = \|(-16,6)\| = \sqrt{256+36} = \sqrt{292} \approx 17{,}09^{\text{o}} \text{ por cm.}$$

8. Si f y g son funciones diferenciables de una variable, muestre que la función $u(x,t) = f(x+at)+g(x-at)$ es solución de la ecuación de onda que tiene la forma $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

   Debemos mostrar que $u(x,t) = f(x+at)+g(x-at)$ es solución de la ecuación de onda, es decir, satisface la ecuación.

   Sean $w = x + at$ y $v = x - at$. Luego $u(x,t) = f(w) + g(v)$.

$$u_t = \frac{\partial(f(w)+g(v))}{\partial t} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{df}{dw} - a\frac{dg}{dv} = af'(w) - ag'(v)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial(af'(w)-ag'(v))}{\partial t} = \frac{\partial u_t}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 f''(w) - a^2 g''(v) = a^2(f''(w) - g''(v))$$

   Por otro lado y de forma similar:

$$u_x = \frac{\partial(f(w)+g(v))}{\partial x} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{df}{dw} + \frac{dg}{dv} = f'(w) + g'(v)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial(f'(w)+g'(v))}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f''(w) + g''(v)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$$

9. Sea f una función homogenea de grado n, es decir

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y) \quad \forall\, t, n \text{ entero positivo.}$$

   Verifique que f satisface la ecuación $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$.

   $\rightarrow$ Se tiene que que f satisface

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y) \qquad (1)$$

   Sean $w = tx$ y $v = ty$.

   Derivando ambos lados de (1) con respecto a t:

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t} = \frac{\partial(t^n f(x,y))}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial f(w,v)}{\partial t} = \frac{\partial(t^n f(x,y))}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f(w,v)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = nt^{n-1} f(x,y) \Rightarrow x\frac{\partial f(w,v)}{\partial w} + y\frac{\partial f(w,v)}{\partial v} = nt^{n-1} f(x,y)$$

   La última igualdad es válida para todo t real, en particular para $t = 1$:

$$x\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial tx} + y\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial ty} = nt^{n-1} f(x,y) \overset{t=1}{\rightarrow} \boxed{x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = nf(x,y)}$$

10. Para la funcion $f(x,y) = x^2y + 2y^2x$, en el punto $P(1,3)$, hallar:

   a) La dirección de mayor crecimiento de f.

$$\nabla f(x,y) = (2xy + 2y^2, x^2 + 4xy) \Rightarrow \nabla f(1,3) = (24,13)$$

   b) La derivada de f en la direción de mayor crecimiento de f.

$$D_{\vec{u}}f(1,3) = \nabla f(1,2)\frac{(24,13)}{\|(24,13)\|} = \frac{(24,13)(24,13)}{\sqrt{24^2+13^2}} = \sqrt{745}$$

   c) Las direcciones en las que la derivada de f es cero.

   Sea $\vec{x} = (a,b)$ el vector que da la dirección en que la derivada es cero:

$$D_{\vec{x}}f(1,3) = 0 \Rightarrow (24,13)(a,b) = 0 \Rightarrow a = -\frac{13b}{24} \Rightarrow \vec{x} = (-\frac{13}{24}, 1)b \quad \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

   d) La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en $(1,3,21)$.

   Como $z = f(x,y)$, entonces definamos que

$$T(x,y,z) = x^2y + 2y^2x - z \Rightarrow \nabla T(1,3,21) = (24,13,-1)$$

   La ecuación del plano tangente en el punto $(1,3,21)$ es

$$(24,13,-1)\cdot(x-1, y-3, z-21) = 0$$

11. Una linda y hermosa función f, de dos variables, se desplaza por el plano cartesiano exhibiendo sus derivadas parciales continuas. Considerar los puntos $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$, $D(6,15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\vec{AB}$ es 5 y la derivada direccional de f en A en la dirreción del vector $\vec{AC}$ es 6. Calcular la derivada de f en la dirreción del vector $\vec{AD}$.

   Del enunciado se desprende que

$$\left.\begin{array}{r} D_{\vec{AB}}f(1,3) = 5 \\ D_{\vec{AC}}f(1,3) = 6 \\ D_{\vec{AD}}f(1,3) = x \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \vec{AB} = (2,0) \\ \vec{AC} = (0,4) \\ \vec{AD} = (5,12) \end{array}$$

   Sea $\nabla f(1,3) = (a,b)$, tenemos que

$$D_{\vec{AB}}f(1,3) = \nabla f(1,3)\frac{(2,0)}{\|(2,0)\|} = 5 \Rightarrow (a,b)(1,0) = 5 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$D_{\vec{AC}}f(1,3) = \nabla f(1,3)\frac{(0,4)}{\|(0,4)\|} = 6 \Rightarrow (a,b)(0,1) = 6 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

   Ahora conocemos el valor del gradiente $\nabla f(1,3) = (a,b) \overset{a=5,b=6}{\longrightarrow} \nabla f(1,3) = (5,6)$

$$D_{\vec{AD}}f(1,3) = x \Rightarrow \nabla f(1,3)\frac{(5,12)}{\|(5,12)\|} = x \Rightarrow \frac{(5,6)(5,12)}{\sqrt{169}} = x \Rightarrow \boxed{x = \frac{97}{13}}$$

   Entonces, se tiene que la derivada de f en la dirreción del vector $\vec{AD}$ vale $\dfrac{97}{13}$

12. La temperatura T en cualquier punto $P(x, y, z)$ de la superficie de una bola mecánica que tiene por centro el origen de coordenadas es inversamente proporcional a la distancia del punto P al centro de la bola. Se sabe que la temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es de 120^{o} . Hallar la tasa de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.

- La distancia entre el punto variable $P(x, y, z)$, que pertenece a la superficie de la bola mecánica, y el centro que esta en el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$ es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por otro lado, la temperatura y la distancia son inversamente proporcionales, esto es:

$$T(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow T(1, 2, 2) = 120 \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 120 \rightarrow k = 360$$

$$\text{La función temperatura: } \left[T(x, y, z) = \frac{360}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

- La dirección es $\vec{\nu} = (2, 1, 3) - (1, 2, 2) = (1, -1, 1)$
- $\nabla T(1, 2, 2) = 360 \left(\frac{-1}{2} \cdot (9)^{-3/2} \cdot (2, 4, 4) \right) = \frac{-40}{3} \cdot (1, 2, 2)$

$$\Rightarrow D_{\vec{\nu}} f(1, 2, 2) = \nabla T(1, 2, 2) \cdot \vec{\nu} = \frac{-40}{3} \cdot (1, 2, 2) \cdot (1, -1, 1) \Rightarrow \boxed{D_{\vec{\nu}} f(1, 2, 2) = \frac{-40}{3}}$$

13. La temperatura T de una placa de metal en el plano xy viene dada por:

$$T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Si la temperatura en el punto $(3, 4)$ es de 100^{o}:

a) Hallar la razón de cambio de la temperatura en dirección del vector $(1, 1)$.

Primero calculemos la constante K.

$$T(3, 4) = 100^{\text{o}} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 100 \Rightarrow \boxed{k = 500}$$

$$D_{\vec{u}} f(3, 4) = \nabla T(3, 4) \cdot \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{500}{\sqrt{2}} \left(\frac{-3}{5^3}, \frac{-4}{5^3} \right) = \frac{-28}{\sqrt{2}}$$

b) Hallar la dirreción en que se anula la tasa de cambio.

Definamos la dirección que buscamos como $\vec{x} = (a, b)$, entonces se tiene que

$$D_{\vec{x}} T(3, 4) = 0 \Rightarrow \nabla T(3, 4) \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow (-3, -4)(a, b) = 0 \Rightarrow a = \frac{-4a}{3}$$

$$\text{La dirección buscada es } \vec{x} = (a, b) = b \left(\frac{3}{4}, 1 \right) \text{; con } b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

14. El volcán Villarica puede ser representado mediante la ecuación $f(x,y) = 4000 - x^2 - y^2$. Un alpinista se halla en el punto $(20, 20, 3000)$. Si quiere llegar lo más rápido a la cumbre, hallar bajo que dirección o ángulo debe moverse.

$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y) \Rightarrow \text{Dirección: } \nabla f(20,20) = (-40,-40)$$
$$\text{Ángulo } \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{-40}{-40}\right) = \arctan(1) \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

15. Calcular los siguientes límites (indicar procedimientos):

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{\pi x^2 y}{x^2+y^2}$

Para calcular este límite usaremos polares, esto es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{\pi x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \cos\left[\frac{\pi r^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{r^2}\right] = 1$$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}$

Tambien usaremos polares, con el cambio $x = r\cos\theta$ e $y - 2 = r\operatorname{sen}\theta$, con lo cual $r \to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left[r\cos\theta(r\operatorname{sen}\theta+2)\right]}{r\cos\theta}\cdot\frac{(r\operatorname{sen}\theta+2)}{(r\operatorname{sen}\theta+2)} = 1\cdot\lim_{r\to 0}(r\operatorname{sen}\theta+2) = 2$$

<u>Otra forma</u>

Usando el infinitésimo $\operatorname{sen} x \sim x$, cuando $x \to 0$, que aplicado al ejercicio se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 2$$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y^2}$

Probemos por el camino $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Ahora, por el camino $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Como nos dio valores distintos para el mismo el límite, este no existe.

16. Dado el siguiente campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hallar $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

a) Determinar $D_1f(x,y)$ y $D_2f(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$D_1f(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2f(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

b) Determinar $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ si $(x,y) = (0,0)$. Como el punto $(0,0)$ es conflictivo, se utiliza la definición, esto es:

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

c) Entonces hasta el momento se tiene lo siguiente:

$$D_1f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_2f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d) Luego, para terminar se tiene que $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ son:

$$D_{12}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1$$

$$D_{21}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h) - D_1f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

17. Demuestre que el elipsoide $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24 = 0$ son tangentes en el punto $(1,1,2)$.

Calculemos las normales de los planos tangentes en el punto dado:

$\rightarrow f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 9 \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (6x, 4y, 2z) \Rightarrow \nabla f(1,1,2) = (6,4,4)$

El plano tangente del elipsoide en el punto $(1,1,2)$ es

$$(6,4,4)\cdot(x-1, y-1, z-2) = 0$$

$$\rightarrow g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 \Rightarrow \nabla g(1,1,2) = (-6,-4,-4)$$

El plano tangente de la esfera en el punto $(1,1,2)$ es

$$(-6,-4,-4)\cdot(x-1,y-1,z-2) = 0 \Rightarrow (6,4,4)\cdot(x-1,y-1,z-2) = 0$$

Como los planos tangentes en dicho punto son iguales, entonces son tangentes en el punto $(1,1,2)$.

18. Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^3 + 4xy + z^2 - 2yz$ en $(1,2,1)$ en la dirección de la normal a la superficie dada por $\{x = t,\ y = 2t^2,\ z = t^3\}$.

Tenemos que $z = t^3 = 2t^2 \cdot t \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{xy}{2}$. Entonces la superficie es

$$\left[T(x,y,z) = \frac{yx}{2} - z\right] \Rightarrow \text{Dirección: } \nabla T(x,y,z) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, -1) \Rightarrow \nabla T(1,2,1) = (1, \frac{1}{2}, -1)$$

$$D_{\vec{T}} f(1,2,1) = \nabla f(1,2,1) \cdot \frac{\nabla T(1,2,1)}{\|\nabla T(1,2,1)\|} = \frac{(11,6,-2)(1,\frac{1}{2},-1)}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{32}{3}$$

19. Calcule las derivadas parciales y muestre que no son continuas en el origen, para el campo:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Si $(x,y) = (0,0)$ se usa la definición, esto es

$$f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{|h|} \qquad (*)$$

$\rightarrow \displaystyle\lim_{h\to 0^+} h \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{-h} = -1$

$\rightarrow \displaystyle\lim_{h\to 0^-} h \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 1$

El límite no existe.

Por lo tanto, no existe la derivada parcial respecto x. Lo mismo ocurre con la derivada parcial respecto y.

b) La función no es continua en el origen, puesto que el límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \cdot \overbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{ACOTADO} = 0 \cdot \text{acotado} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r^2 \operatorname{sen}\frac{1}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} = 1$$

20. Si $w = f(x,y)$, $x = 2u + v$, $y = u - v$. Demuestre que

$$5\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$\rightarrow$ Se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2)$$

Derivando (1) respecto u y (2) respecto v, se tiene que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

Finalmente, sumando (3) y (4) se demuestra lo pedido

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \left[4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

21. Sean los vectores unitarios $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Sea f una función diferenciable en un punto (x_0, y_0) tal que la derivada parcial respecto y es $-\sqrt{2}$.

   a) Calcular la derivada direccional en dirección del vector $\vec{v}$ partir de (x_0, y_0).

   Sea $\nabla f(x_0, y_0) = (a, b)$, ocurre que

   $$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = (a, b)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \Rightarrow a + b = \sqrt{2}$$

   La derivada parcial respecto y evaluada en el punto (x_0, y_0) corresponde a la segunda componente del vector gradiente, esto es

   $$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -\sqrt{2} \wedge a = -2\sqrt{2}$$

   Entonces, $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\sqrt{2}$

   b) Hallar la dirección de mayor crecimiento y el valor máximo de f a partir de (x_0, y_0).

   Dirección de mayor crecimiento esta dado por el gradiente:

   $$\nabla f(x_0, y_0) = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

   Valor máximo de f es la norma del gradiente:

   $$\|f(x_0, y_0)\| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+2} = \sqrt{10}$$

   c) Por último, hallar la dirección en que se anula la tasa o razón de cambio de f considerando el mismo punto (x_0, y_0).

   Sea $\vec{x} = (n, m)$ la dirección en que se anula la derivada a partir del punto (x_0, y_0), entonces ocurre que

   $$D_{\vec{x}} f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})(n, m) = 0 \Rightarrow n = \frac{-m}{2}$$

   La dirección es: $\vec{x} = (n, m) = (\frac{-m}{2}, m) = m(\frac{-1}{2}, 1) \quad$ Con $m \in \mathbb{R} - \{0\}$

22. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + 2y^2$ paralelo al plano $x + 2y - z = 10$. (Pista: primero halle el punto de intersección)

Consideremos la función de la superficie como $T(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$
La normal del plano buscado es $(1, 2, -1)$ y se cumple que

$$\vec{n} = \nabla T(a, b, c) \Rightarrow (1, 2, -1) = (2a, 4b, -1) \Rightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{1}{2} \wedge c = -1 \Rightarrow$$

$$\text{Punto de intersección entre la superficie y el plano: } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

La ecuación del plano es

$$(1, 2, -1)(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z + 1) = 0$$

23. Determine el punto en el plano $2x - y + 2z = 16$ que este más cerca del origen.

Hay que minimizar la distancia entre el punto del plano (x, y, z) y el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$. Entonces, la función objetivo es $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y la restricción es la ecuación del plano.

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2x - y + 2z - 16)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x + 2\lambda = 0 \\ L_y = 2y - \lambda = 0 \\ L_z = 2z - 2\lambda = 0 \\ L_\lambda = 2x - y + 2z - 16 = 0 \end{array}\right|$$

Se tiene que $x = -\lambda$, $y = \lambda/2$, $z = -\lambda$; reemplazando en L_λ:

$$-2\lambda - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda = 16 \Rightarrow -8\lambda - \lambda = 32 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{-32}{9}}$$

Luego,el punto en el plano $2x-y+2z = 16$ que esta más cerca del origen es $\left(\frac{32}{9}, \frac{-16}{9}, \frac{32}{9}\right)$.

24. Hallar la función f que satisface $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$, y que cumple la condición $f(x, x^2) = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y \quad / \int$$

$$f(x, y) = \int (x^2 + 2y) dy = x^2 y + y^2 + k(x)$$

Como $f(x, x^2) = 1 \Rightarrow x^2 \cdot x^2 + x^4 + k(x) = 1 \Rightarrow k(x) = 1 - 2x^4$

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 1 - 2x^4$$

25. Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

b) Determine si f es continua en $(0,0)$.

Veamos que pasa con el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$:

- Por el camino $y=0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}0=0$
- Por el camino $y=x^3 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\to$ El límite no existe, entonces $f(x,y)$ no es continua en el $(0,0)$

26. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determinar la derivada direccional en $(0,0)$ en la dirección del vector $\vec{u}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

$\to$ Como $(x,y)=(0,0)$ es un punto conflictivo, usaremos la definición para calcular la derivada direccional, esto es:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left[(0,0)+h(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\right]-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{3}{5}h,\frac{4}{5}h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{3}{5}h\cdot\frac{4}{5}h\right|}{\sqrt{h}}\cdot\frac{1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{12}{25}\frac{|h^2|}{h\,|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{12\,|h|}{25h}\quad(*)\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{12}{25}\frac{-h}{h}=-\frac{12}{25}\\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{12}{25}\frac{h}{h}=\frac{12}{25}\end{cases}$$

Como el límite no existe, entonces la derivada direccional no existe.

27. Suponga que f tiene derivadas parciales continuas y tiene derivada direccional máxima igual a 50 en $P_0(1,2)$, que alcanza en la dirección de P_0 a $Q(3,-4)$. Utilizando esta información calcular $\nabla f(1,2)$.

Se tiene que la dirección unitaria de mayor crecimiento es

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|}=\frac{(2,-6)}{\sqrt{4+36}}=\frac{(1,-3)}{\sqrt{10}}\Rightarrow\nabla f(1,2)=\frac{(1,-3)}{\sqrt{10}}\,\|\nabla f(1,2)\|$$

Pero nos dicen que el máximo valor de la derivada direccional es 50, entonces

$$\|\nabla f(1,2)\|=50\Rightarrow\nabla f(1,2)=50\frac{(1,-3)}{\sqrt{10}}$$

Otra forma

$$\nabla f(1,2)\frac{(2,-6)}{\sqrt{40}} = 50 \Rightarrow (a,b)(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}) = 50$$

$$\frac{a}{\sqrt{10}} - \frac{3b}{\sqrt{10}} = 50 \Rightarrow a - 3b = 50\sqrt{10} \Rightarrow a = 50\sqrt{10} + 3b$$

$$\nabla f(1,2) = (a,b) = (50\sqrt{10} + 3b, b) \quad \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

28. Hallar máximo de $f(x,y) = 4xy$ sujeto a la restricción $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$L(x,y,\lambda) = 4xy - \lambda\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$

$$\left.\begin{array}{r} L_x = 4y - \frac{2x\lambda}{9} = 0 \\ L_y = 4x - \frac{y\lambda}{2} = 0 \\ L_\lambda = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{array}\right|$$

Multiplicando L_x por x y L_y por y, se tiene que:

$$\frac{-2\lambda x^2}{9} + \frac{\lambda y^2}{2} = 0 \Rightarrow \lambda(\frac{y^2}{2} - \frac{2x^2}{9}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee y = \pm\frac{2x}{3}$$

reemplazando en L_λ se tiene

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4}{9}\frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{9} - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{ De donde } y = \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$$

Los puntos críticos son $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$, $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$. Al reemplazar en $f(x,y) = 4xy$ se tiene

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 12 \Rightarrow \text{Máximo}$$

29. Hallar los puntos extremos de la siguiente curva $x^2 + y^2 + xy = 3x + 6y - 1$.

Hagamos $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y + 1$, entonces tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2y + x - 6 = 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema se llega a que $x = 0$ e $y = 3$, entonces el punto crítico es $(0,3)$. Veamos cual es el signo del determinante del hessiano

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |H(0,3)| > 0 \wedge f_{xx} > 0 \Rightarrow (0,3) \text{ es un Mínimo.}$$

30. Hallar extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $3x - 2y + 4z = 4$.

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(3x - 2y + 4z - 4)$$

$$\left.\begin{array}{c} L_x = 2x + 3\lambda = 0 \\ L_y = 2y - 2\lambda = 0 \\ L_z = 2z + \lambda = 0 \\ L_\lambda = 3x - 2y + 4z - 4 = 0 \end{array}\right|$$

Se tiene que $x = \dfrac{-3\lambda}{2}$, $y = \lambda$, $z = \dfrac{-\lambda}{2}$. Reemplazando en L_λ se tiene que

$$\frac{-9\lambda}{2} - 2\lambda - \frac{\lambda}{2} - 4 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$-9\lambda - 4\lambda - \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{-4}{7} \rightarrow \text{El punto crítico es } (\frac{6}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{2}{7})$$

El punto $(0,0,4)$ cumple la restricción y se tiene que $f(0,0,4) = 16$.

Por otro lado $f\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{-4}{7}, \dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{56}{49}$, entonces el punto crítico es un mínimo.

31. Hallar máximos y mínimos de la función $f(x,y) = (2x - y)^2$ sobre la región triangular del plano XY, con vértices $(2,0)$, $(0,1)$ y $(1,2)$.

Se trata de un problema de máximos y mínimos absolutos. Se debe analizar el interior olvidandose de la restricción y luego se analiza la frontera que en este caso corresponde a las ecuaciones de la recta de cada lado de la región triangular, estas son
$F_1 : y = \frac{-1}{2}(x - 2)$, $F_2 : y = -2(x - 2)$ y $F_3 : y = x + 1$.

Interior

$$f(x,y) = (2x - y)^2 \left\{ \begin{array}{c} D_1 f = 2(2x - y)2 = 0 \\ D_2 f = 2(2x - y) = 0 \end{array} \right.$$

Se tiene que $\forall (x,y)$ tal que $y = 2x$ es solución del sistema.
Entonces se a encontrado infinitos puntos críticos, que cumplen la condición $y = 2x$ y estan dentro la región triangular, y además la función evaluada es cero ($f(x,y) = f(x,2x) = 2x - 2x = 0$).

Frontera

a) Para $F_1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2;\ y = \frac{-1}{2}(x - 2)$

$$f(x, \frac{-1}{2}(x-2)) = (\frac{5}{2}x - 1)^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2(\frac{5}{2}x - 1)\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \wedge y = \frac{4}{5}$$

b) Para $F_2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2;\ y = -2(x - 2)$

$$f(x, -2(x-2)) = (4x - 4)^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2(4x - 4)4 = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 2$$

c) Para $F_3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1;\ y = x + 1$

$$f(x, x+1) = (x - 1)^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = 2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 2$$

Por último, evaluamos todos los punto encontrados tanto en el interior como en la frontera, esto es
$f(2,0) = 16$, $f(0,1) = 1$, $f(1,2) = f(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = f(1,2) = 0 \Rightarrow$ Máximo absoluto: $(2,0)$ y Mínimo absoluto: $(1,2)$, $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

32. Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x+2y+3z$ en la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

$L(x, y, z, \lambda, \nu) = x + 2y + 3z + \lambda(x - y + z - 1) + \nu(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 1 + \lambda + 2\nu x = 0 \\ L_y = 2 - \lambda + 2\nu y = 0 \\ L_z = 3 + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x - y + z - 1 = 0 \\ L_\nu = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right|$$

De L_z se obtiene que $\lambda = -3$. Reemplazando en L_x y L_y se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -2\nu x \\ 5 = -2\nu y \end{array}\right| \Rightarrow \frac{-2}{5} = \frac{x}{y}$$

Reemplazando en L_ν

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{25}{4}x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{2}{\sqrt{29}}} \quad \boxed{y = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}}$$

Ahora, reemplazamos los valores encontrados en L_z

$$\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}} + z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}}$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{29}} + z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}}$$

Por último, evaluamos lo puntos criticos en la función objetivo:

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = \frac{2}{\sqrt{29}} - \frac{10}{\sqrt{29}} + 3 - \frac{21}{\sqrt{29}} = 3 - \sqrt{29}$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{10}{\sqrt{29}} + 3 + \frac{21}{\sqrt{29}} = 3 + \sqrt{29}$$

Entonces, el valor máximo de f lo alcanza en $\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}\right)$ con un valor igual a $3 + \sqrt{29}$.

Observación: No importa el valor de ν.

33. La intersección del plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es una elipse. Derterminar los puntos en esta elipse que están más lejos y más cerca del origen.

La función objetivo corresponde a la distancia entre el origen $(0, 0, 0)$ y el punto variable de la elipse (x, y, z). La idea es encontrar los valores de (x, y, z) tal que minimiza y maximiza la funcion distancia y estan en el plano y el paraboloide.

Observación: minimizar o maximizar la función d es lo mismo que minimizar o maximizar la función d^2, esta última tiene involucradas derivadas mas amigables, por ello trabajamos con ella.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$L(x,y,z,\lambda,\nu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+2z-2)+\nu(x^2+y^2-z)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x+\lambda+2\nu x = 0 \\ L_y = 2y+\lambda+2\nu y = 0 \\ L_z = 2z+2\lambda-\nu = 0 \\ L_\lambda = x+y+2z-2 = 0 \\ L_\nu = x^2+y^2-z = 0 \end{array}\right|$$

Los pasos son

a) Ocupando L_x, L_y y L_z, dejar x, y y z en función de λ y ν.

b) Hallar, con las relaciones encontradas anteriormente, la relación entre λ y ν usando L_λ.

c) Reemplazar b) en las ecuaciones encontradas en a).

d) Ver cual de los puntos encontrados satisfacen la ecuación L_ν. Estos son los puntos criticos

e) Por último, evaluar en la función d encontrando que Cerca $= (1/2, 1/2, 1/2)$ y Lejos $= (-1,-1,2)$.

34. Hallar los puntos sobre la curva plana $x^2+xy+y^2=1$ más próximos y más alejados del origen.

Este es un problema de extremos condicionados, donde la función objetivo es:

$$d^2 = x^2+y^2$$

$$\Rightarrow L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x+2x\lambda+y\lambda = 0 \\ L_y = 2y+2y\lambda+x\lambda = 0 \\ L_\lambda = x^2+xy+y^2-1 = 0 \end{array}\right|$$

De la ecuación L_x tenemos que

$$2x(1+\lambda) = -y\lambda \Rightarrow x = \frac{-y\lambda}{2(1+\lambda)} \qquad (1)$$

De L_y tenemos que

$$x\lambda = -2y(1+\lambda) \Rightarrow x = \frac{-2y(1+\lambda)}{\lambda} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene

$$\frac{-2y(1+\lambda)}{\lambda} = \frac{-y\lambda}{2(1+\lambda)} \text{ Se puede simplificar } y \text{ porque no toma el valor cero}$$

$$4(1+2\lambda+\lambda^2) = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = y & (3) \\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow x = -y & (4) \end{cases}$$

Reemplazando (3) en L_λ

$$x^2+xy+y^2-1 = 0 \Rightarrow x^2+x^2+x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}} \wedge \boxed{y \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Ahora, reemplazando (4) en L_λ

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \wedge \boxed{y = \mp 1}$$

Evaluemos los puntos críticos en la función objetivo

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3}$$

$$f(1,-1) = f(-1,1) = 2$$

Máximos: $(1,-1)$ y $(-1,1)$

Mínimos: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

35. Sobre el recinto $M = \{(x,y)/y \geq 0,\, 4x^2 + y_2 \leq 4\}$. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$.

- Interior:

$$\left.\begin{array}{r} f_x = 8x - 4 = 0 \\ f_y = 2y - 3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{2} \\ \\ y = \frac{3}{2} \end{array}\right|$$

- Frontera:

$$F_1 : y = 0 \Rightarrow f(x,0) = f(x) = 4x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 8x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \wedge \boxed{y = 0}$$

$$F_2 : y = \sqrt{4 - 4x^2} \Rightarrow f(x, \sqrt{4-4x^2}) = f(x) = -4x - 3\sqrt{4-4x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = -4 + \frac{12x}{\sqrt{4-4x^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}} \wedge \boxed{y = \frac{6}{\sqrt{13}}}$$

Ahora evaluamos en la función

(x,y)	$f(x,y)$
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	-3,25
$(\frac{1}{2}, 0)$	-1,00
$(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}})$	-3,21
$(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}})$	1,23

$$\text{mínimo: } (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \qquad \text{máximo: } (\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}})$$

36. Hallar máximos y mínimos a la función $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5$ sobre la región dada por $R = \{(x,y)/0 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

   a) **Interior**

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x = 0 \end{array}\right| \Rightarrow x = 0,\ y = 0$$

   b) **Frontera**

$$F_1 : y = 0 \Rightarrow f(x,0) = x^2 + 5 \to f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$$

$$F_2 : x = 4 \Rightarrow f(4,y) = -16y + 13 \to f'(y) = -16 = 0 \Rightarrow\Leftarrow$$

$$F_3 : y = \sqrt{x} \Rightarrow f(x,\sqrt{x}) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 5 \to f'(x) = 2x - 6x\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0 \\ x = 9,\ y = 3 \end{array}\right.$$

   c) Por último agregamos lo vértices $(0,0)$, $(4,2)$, $(4,0)$; y evaluamos todos los puntos críticos en la fución objetivo:

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,0)$	5
$(9,3)$	-22
$(4,2)$	-10
$(4,0)$	21

mínimo: $(4,0)$ máximo: $(9,3)$

37. Estudiar continuidad del campo escalar:

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

- $f(0,0) = 0$, esta definida en $(0,0)$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta + r^2 \operatorname{sen}\theta} = 0$, existe el límite.
- $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = 0 \Rightarrow$ La función es continua.

38. Calcular la derivada direccional del campo $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^3$ en el punto $(1,-1,1)$ en dirección del vector $\vec{v} = (1,3,1)$.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x - 2y, -2x, 3z^2) \Rightarrow \nabla f(1,-1,1) = (4,-2,3) \quad \vec{v} = \frac{(1,3,1)}{\|(1,3,1)\|}$$

$$D_{\vec{v}} f(1,-1,1) = \nabla f(1,-1,1) \cdot \vec{v} = \frac{(4,-2,3)(1,3,1)}{\sqrt{11}} \frac{4-6+3}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

39. Si $z = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$, hallar $yz_x + xz_y$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

Hagamos la siguiente sustitución $u = x^2 - y^2$ y $v = y^2 - x^2$ con lo cual $z = f(u, v)$, entonces se tiene que:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} - 2x\frac{\partial z}{\partial v}$$

Multiplicando por y se obtiene

$$\left[yz_x = 2xy\frac{\partial z}{\partial u} - 2xy\frac{\partial z}{\partial v} \right] \quad (1)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\frac{\partial z}{\partial u} + 2y\frac{\partial z}{\partial v}$$

Multiplicando por x se obtiene

$$\left[xz_y = -2xy\frac{\partial z}{\partial u} + 2xy\frac{\partial z}{\partial v} \right] \quad (2)$$

Finalmente, sumando (1) y (2) nos queda

$$yz_x + xz_y = 2xy\frac{\partial z}{\partial u} - 2xy\frac{\partial z}{\partial v} + -2xy\frac{\partial z}{\partial u} + 2xy\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\boxed{yz_x + xz_y = 0}$$

40. Las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + 3xy - 2z = 0$ definen implícitamente las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$. Si $y(1) = -1$ y $z(1) = 1$, calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{z(x) + y(x)}{x - 1}$$

$\rightarrow$ Se tiene que las ecuaciones definen implicitamente las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

$$\begin{array}{l|} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + 3xy - 2z = 0 \\ \hline \end{array}$$

Derivando respecto x ambas ecuaciones

$$\begin{array}{l|} 2x + 2yy_x + 2zz_x = 0 \\ 2x + 3y + 3xyy_x - 2z_x = 0 \\ \hline \end{array}$$

Sumando ambas ecuaciones y reduciendo terminos semejantes, se obtiene

$$y_x(2y + 3xz) = -2xz - 2x - 3yz \Rightarrow y_x = \frac{-2xz - 2x - 3yz}{2y + 3xz} \Rightarrow \boxed{y_x(1) = -1}$$

Usando la primera ecuación del sistema

$$2zz_x = -2x - 2yy_x \Rightarrow 2z_x(1) = -2 + 2 \cdot (-1) = -4 \Rightarrow \boxed{z_x(1) = -2}$$

Luego, se tiene que

$$\lim_{x \to 1} \frac{z(x) + y(x)}{x - 1} \sim \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 1} z'(x) + y'(x) = z'(1) + y'(1) = -1 - 2 = -3$$

41. ¿Donde cruza al eje z el plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1,1,1)$?

Definamos la función $T(x,y,z) = e^{x-y} - z \Rightarrow \nabla T(x,y,z) = (e^{x-y}, -e^{x-y}, -1)$.
Ecuación del plano tangente en $(1,1,1)$:

$$\nabla T(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

Para ver donde cruza al eje z, debe ocurrir que $x = 0$ e $y = 0$, con lo cual se llega a que

$$x - y - z + 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \text{Cruza en el punto } (0,0,1)$$

42. Determinar si las ecuaciones $2x - y + u^3 - v^2 = 1$, $x + y + u^2 + v^3 = 4$ se pueden resolver para $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ en la vecindad $V(1,1)$, en la cual $u(1,1) = v(1,1) = 1$.
Si es así, hallar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en $(1,1)$.

Definamos $F = 2x - y + u^3 - v^2 - 1$ y $G = x + y + u^2 + v^3 - 4$. En primer lugar verificamos que el jacobiano del denominador es distinto de cero en el punto $(1,1)$.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & -2v \\ 2u & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2 + 4uv = 13 \neq 0$$

Luego, el sistema se puede resolver para u_x y v_x. Se tiene

$$\begin{array}{rl|l} 2 + 3u^2u_x - 2vv_x & = 0 & / \cdot 3v \\ 1 + 2uu_x + 3v^2v_x & = 0 & / \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

al sumar y factorizar, $u_x(1,1) = -\dfrac{2+6v}{4u + 9u^{2v}} = \dfrac{-8}{13}$ y $v_x(1,1) = \dfrac{-1}{3}$

43. La temperatura en un punto (x,y,z) del espacio viene dada por

$$T(x,y,z) = \frac{49}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

determinar la dirección en que aumenta más rápido la temperatura en el punto $(1,1,1)$ y cuál es el máximo incremento a partir de ese punto.

$\rightarrow$ La dirección en que aumenta más rápido la temperatura viene dado por el gradiente, esto es:

$\nabla T(1,1,1) = (-2,-4,-6) \Rightarrow$ Máximo incremento: $\|\nabla T(1,1,1)\| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$

44. Averiguar si es diferenciable la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Veamos si es continua

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0 = f(0,0) \Rightarrow \text{La función es continua}$$

- Si calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$, resultan que no son continuas. Segun el Teorema 1 **si una función admite todas sus derivadas parciales y son continuas, entonces es diferenciable**, pero no afirma nada si las derivadas parciales **no son continuas**.
  Por ello, usaremos el teorema 2 para decidir si es diferenciable la función $f(x,y)$, esto es:
  - Existen las derivadas parciales de f en $(x_0, y_0) = (0,0)$?

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

    Si existen
  - El siguiente límite vale cero?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Rightarrow \text{El límite no existe.}$$

  Luego, la función no es diferenciable en el $(0,0)$.

45. Sea el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    a) Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$.

    Se tiene que $(x_0, y_0) = (0,0)$ y además

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0)}{h} = 1$$

    Entonces, tenemos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - 0 - 1\cdot(h-0) - 1\cdot(k-0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk(h+k)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \neq 0$$

    Entonces la función no es diferenciable.

    b) Hallar plano tangente en un punto a su elección

    Ocupemos el punto $(1,1,1)$, y calculemos la normal del plano tangente

$$\vec{n} = \nabla f(1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \Rightarrow \text{Plano Tangente: } \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$$

46. Hallar máximos y mínimos absolutos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en el conjunto $R = \{(x,y)/y - x^2 + 1 \geq 0,\ y + x^2 \leq 1\}$

a) **Interior**

$$\left.\begin{array}{r} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow (0,0) \text{ punto crítico}$$

b) **Frontera**

$$F_1 :\ y = x^2 - 1 \Rightarrow f(y) = y + 1 + y^2 \Rightarrow f'(y) = 1 + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \wedge \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$F_2 :\ y = 1 - x^2 \Rightarrow z = 1 - y - y^2 \Rightarrow z'(y) = -1 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2}} \wedge \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Observación: ninguno de los puntos críticos obtenidos nos sirven, ya que en el interior $(0,0)$ es punto de silla, y las fronteras F_1 y F_2 arrojan puntos críticos que no están en la región R.

Pero, nos queda por considerar los vértices que son $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(0,1)$, y evaluando en la función, se tiene que

(x,y)	$f(x,y)$
$(1,0)$	1
$(-1,0)$	1
$(0,1)$	-1
$(0,-1)$	-1

Mínimo absolutos: $(0,1), (0,-1)$ Máximo absoluto: $(1,0), (-1,0)$

47. En relación a un sistema de coordenadas cartesiano, el centro de una plaza queda en el origen del sistema, y el contorno queda modelado por la ecuación $3y^2 + 4xy + 6x^2 = 140$. Si una persona esta en el centro de la plaza, cual será la distancia mínima que recorre, si se va por el camino más corto hacia el contorno.

$\rightarrow$ Se trata de un problema de extremos condicionados, donde la función objetivo es la distancia entre el origen $(0,0)$ y el punto del contorno de la plaza (x,y), es decir

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow f(x,y) = d^2 = x^2 + y^2$$

Además, el punto (x,y) debe satisfacer la ecuación $3y^2 + 4xy + 6x^2 = 140$. Con todo esto, se forma el langraniano

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3y^2 + 4xy + 6x^2 - 140)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x + 4y\lambda + 12x\lambda = 0 \\ L_y = 2y + 6y\lambda + 4x\lambda = 0 \\ L_\lambda = 3y^2 + 4xy + 6x^2 - 140 = 0 \end{array}\right|$$

$$x(1+6\lambda) = -2y\lambda \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2y\lambda}{(1+6\lambda)}} \quad (1)$$

$$x(2\lambda) = -(y+3y\lambda) \Rightarrow \boxed{x = \frac{-(y+3y\lambda)}{2\lambda}} \quad (2)$$

Igualando estas ecuaciones, se tiene que:

$$\frac{-2y\lambda}{(1+6\lambda)} = \frac{-(y+3y\lambda)}{2\lambda} \Rightarrow 4\lambda^2 = (1+6\lambda)(1+3\lambda)$$

$$1 + 9\lambda + 14\lambda^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{-1}{7}} \quad \boxed{\lambda_2 = \frac{-1}{2}}$$

Reemplazando $\lambda_1 = \frac{-1}{7}$ en (1) o en (2) (da lo mismo), se tiene que $x = 2y$.
Entonces, ocupando L_λ

$$3y^2 + 4 \cdot 2y + 4x \cdot -2x + 6x^2 - 140 = 0 \Rightarrow 35y^2 = 140 \Rightarrow \boxed{y = \pm 2} \quad \boxed{x = \pm 4}$$

Con $\lambda_1 = \frac{-1}{7}$ en (1) o en (2) (otra vez da lo mismo), se tiene que $y = -2x$.
Ahora ocupamos L_λ obteniendo que

$$3 \cdot 4x^2 + 4x \cdot -2x + 6x^2 - 140 = 0 \Rightarrow 10x^2 = 140 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{14}} \quad \boxed{y = \mp 2\sqrt{14}}$$

(x,y)	$f(x,y)$
$(\pm 2, \pm 4)$	20
$(\pm\sqrt{14}, \mp 2\sqrt{14})$	70

La distancia mínima que recorre, si se va por el camino más corto es $d = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

48. Hallar el valor máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Se trata de un problema de máximos absolutos. Entonces se analiza el interior y la frontera.

a) **Interior**
$f(x,y) = x^2y(4-x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = 0 \\ f_y = x^2(4-x-y) - x^2y = 0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow 2xy(4-x-y) - x^2(4-x-y) = 0 \Rightarrow x(4-x-y)(2y-x) = 0$$

$$\boxed{x+y=4} \quad \boxed{x=0} \quad \boxed{x=2y} \Rightarrow \text{Punto crítico: } (2y,y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

b) **Frontera**

$$F_1: \ y = 0 \Rightarrow f(x,0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in \ [0,6] \Rightarrow (0,0) \quad (6,0)$$

$$F_2: \ x = 0 \Rightarrow f(0,y) = 0 \Rightarrow f'(y) = 0 \quad \forall\, y \in \ [0,6] \Rightarrow (0,0) \quad (0,6)$$

$$F_3: \ y = 6 - x \Rightarrow f(x, 6-x) = f(x) = -12x^2 + 2x^3 \Rightarrow f'(x) = x(-24 + 6x) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \qquad x = 4 \Rightarrow y = 2$$

Los vertices son $(0,0)$, $(0,6)$ y $(6,0)$.
Evaluando en la función, se tiene que:

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,6)$	0
$(4,2)$	-64
$(0,0)$	0
$(6,0)$	0
$(0,4)$	0

El valor mínimo de la función es -64, mientras que el valor máximo es 0.

49. Un contenedor en forma de un sólido rectangular debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. Construir la base costará \$500 por pie cuadrado y construir los lados y la parte superior costará \$300. Determinar las dimensiones de un contenedor de ese tamaño que minimice el costo.

Se trata de un problema de máximos y mínimos condicionado. Definiendo la altura con la variable z y las dimensiones de la base con las variables x e y, la función costo (función objetivo), tiene la siguiente forma:

$$c(x,y,z) = \$500xy + \$2(300yz) + \$2(300xz) + \$300xy = \$(800xy + 600yz + 600xz)$$

Ahora, agregamos la condición que corresponde al volumen que debe de tener el contenedor, el cual es de 480 pies. Es decir $xyz = 480 \Rightarrow g(x,y,z) = 480 - xyz$.
Con esto formamos el langraniano y sus derivadas parciales para obtener los puntos críticos, esto es:

$$L(x,y,z,\lambda) = \$(800xy + 600yz + 600xz) + \lambda\,(480 - xyz)$$

$$\left.\begin{array}{r} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 800y + 600z - yz\lambda = 0 \\ 800x + 600z - xz\lambda = 0 \\ 600y + 600x - xy\lambda = 0 \\ 480 - xyz = 0 \end{array}\right|$$

Como los lados del contenedor no pueden ser cero, multipliquemos por x la primera ecuación, por y la segunda, y por z la tercera obteniendo las siguientes igualdades:

$$480\lambda = 800xy + 600xz = 800xy + 600yz = 600yz + 600xz$$

Consideremos el segundo y el tercer miembro de la igualdad:
$800xy + 600xz = 800xy + 600yz \Rightarrow x = y \qquad (1)$
Ahora consideremos el tercer y cuarto miemdro de la igualdad:
$800xy + 600yz = 600yz + 600xz \Rightarrow z = \dfrac{4}{3}y \qquad (2)$
Reemplazando (1) y (2) en la cuarta ecuación del sistema:

$$xyz = 480 \Rightarrow y \cdot y \cdot \frac{4}{3}y = 480 \Rightarrow y^3 = 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt[3]{45}}$$

Finalmente volviendo a ocupar (1) y (2) obtenemos $\boxed{x = 2\sqrt[3]{45}} \wedge \boxed{z = \dfrac{8}{3}\sqrt[3]{45}}$

Entonces, las dimensiones que debe tener el contenedor, cumpliendo todas las restricciones solicitadas, son de altura igual a $\frac{8}{3}\sqrt[3]{45}$ pies, y una base cuadrada con lado de $2\sqrt[3]{45}$ pies.

50. Hallar máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ sobre la región limitada por la ecuación $x^2 - 2x + y^2 = 3$.

    Respuesta

    Mínimos absolutos: $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{15}}{2}\right)$

    Máximo absoluto: $(0, 0)$

51. La temperatura en el espacio esta dado por $T(x, y) = x^2 + y^2$. Una espira, que esta ubicada en este espacio, tiene por ecuación $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$. Hallar los puntos de la espira que posee mayor y menor temperatura. ¿Cuales son estas temperaturas?

    Respuesta

    Máximos: $\left(-\sqrt{14}, \sqrt{14}\right)$, $\left(2\sqrt{14}, -\sqrt{14}\right)$

    Mínimos: $(2, 4)$, $(-2, -4)$

4. Integrales Múltiples

4.1. Integral de Riemann

Se tiene que la suma de riemann para el caso $n = 2$ es:

$$\int_E f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_E(x_i,y_j)A(R_{ij})$$

Siendo E el conjunto sobre el cual se esta integrando y $A(R_{ij})$ el área.

Para calcular la suma de riemann sobre el conjunto E= $[a,b]\times[c,d]$ se debe considerar que

1. La partición de x

$$P_1 = \left\{x_i = a + \frac{(b-a)}{n}i,\ 0 \leq i \leq n\right\}, \qquad \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

2. La partición de y

$$P_1 = \left\{y_j = c + \frac{(d-c)}{n}j,\ 0 \leq j \leq n\right\}, \qquad \Delta y_j = \frac{d-c}{n}$$

Con la definición anterior, el área es

$$A(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Observación: Existen otras formas de particionar los conjuntos P_1 y P_2, pero esta es más práctica, fácil de recordar y usar.

4.2. Integrales Dobles

4.2.1. Forma de las integrales dobles

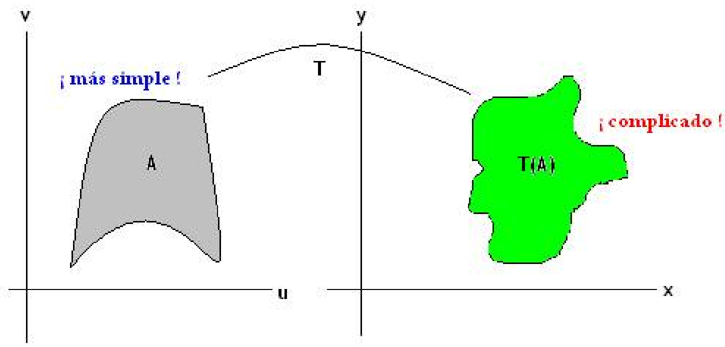
Las integrales dobles son de la forma $I = \displaystyle\iint f(x,y)\,dA$

Los recinto de integración son:

- $R_x = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a < x < b\ ,\ g(x) < y < h(x)\} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$
- $R_y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a < y < b\ ,\ g(y) < x < h(y)\} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

4.2.2. Cambio de variable en la integral doble

La idea es hacer un cambio de variables que simplifica, muchas veces, los cálculos.



Teorema: Sea $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $T : E^* \subset \mathbb{R}^2 \to E \subset \mathbb{R}^2$ una transformación inyectiva, de clase ζ^1, y con jacobiano $J(T)$ no nulo en todo punto de E^*, de tal modo que

$$T(u, v) = (\, x(u, v), y(u, v)\,)$$

El jacobiano tiene la siguiente forma:

$$J(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Entonces la fórmula del cambio de variables para la integral doble es

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{E^*} f(\, x(u, v), y(u, v)\,)\, J(T)\, du\, dv$$

4.2.3. Coordenadas polares

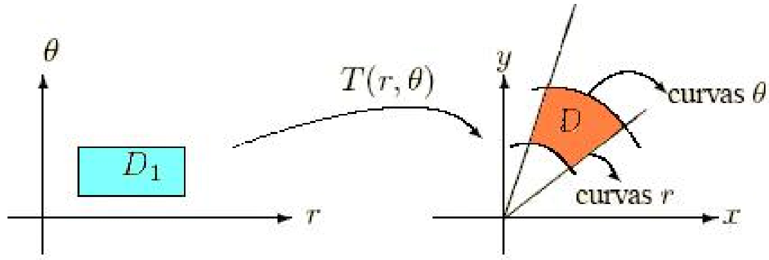
Si hay un transformación importante y de uso habitual en el cálculo de las integrales dobles, ese es el de coordenadas polares. Recordar que para ubicar un punto en ese sistema se usan r, el radio, que mide la distancia del punto al origen, y θ, el ángulo que forma el radio vector del punto con la parte positiva del eje x.

La transformación T dada por

$$x = r\ cos\ \theta, \quad y = r\ sen\ \theta$$

es inyectiva si consideramos $r > 0$, y el ángulo θ variando en un intervalo de la forma $0 < \theta \leq 2\pi, \quad \vee \quad 0 \leq \theta < 2\pi$. En tal caso, el Jacobiano de la transformación es

$$J(T) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} cos\ \theta & -r\ sen\ \theta \\ sen\ \theta & r\ cos\ \theta \end{vmatrix} = r$$

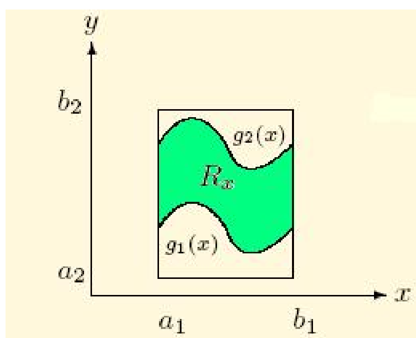


En términos geométricos las curvas r son rectas por el origen y las curvas θ son círculos concéntricos con el origen, siendo la imagen de un rectángulo en el plano $r\theta$ un "paralelógramo" en el plano de las xy, limitado por dos radios y dos arcos de círculo.

4.2.4. Aplicaciones de la integral doble

Vamos a ver como el cálculo de áreas, volumen de revolución, momentos y aún más, se hacen más fáciles con la integral doble.

1. Area de una región plana



Consideremos la función $f(x, y) = 1$. Al integrar esta función, que es continua y positiva, sobre una región E del plano xy, se obtiene el volumen del paralelepípedo de base E y altura 1. Ocurre que

$$\text{área} \times 1 = \text{área}$$

Por tanto, lo que se obtiene al tener $f(x, y) = 1$ es el área de la región E. Esto es

$$\text{Area de } E = \int\int_E dy\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$$

2. Volumen

Si la función $z = f(x, y)$ es continua y no negativa, entonces el volumen bajo la superficie de la gráfica de esta función sobre la región R, viene dado por

$$V = \int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$$

Más aún, si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son dos funciones tales que $f(x,y) \leq g(x,y)$ sobre la región R, entonces el volumen comprendido entre ambas gráficas está dado por

$$V = \int\int_R [\, g(x,y) - f(x,y)\,]\, dx\, dy$$

3. Centro de masa y momentos

   Este concepto ya ha sido estudiado en cursos previos de Cálculo, y para su determinación se utilizaron integrales simples. La idea es ahora utilizar integrales dobles.

   Un cuerpo plano ocupa una región R del plano xy. Si la densidad en cada punto es $\rho(x,y)$, entonces la masa total del cuerpo R es

$$M = \int\int_R \rho(x,y)\, dx\, dy$$

   Observa que el cuerpo es plano, pues se tomó $z = 1$ en la integral que define la masa.

   Los momentos respecto de los ejes coordenados vienen dados por

$$M_x = \int\int_R y\, \rho(x,y)\, dx\, dy, \quad M_y = \int\int_R x\, \rho(x,y)\, dx\, dy$$

   Se considera una región R del plano cartesiano, una recta con normal $\mathbf{n}$ dirigida hacia la región R, y un punto sobre esta recta. Si $\mathbf{x}$ es un punto de la región, entonces la distancia de ese punto $\mathbf{x}$ a la recta se puede calcular. De hecho, se construye el vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y se determina la magnitud de su proyección vectorial sobre el vector normal $\mathbf{n}$.

   Sea L una recta con normal $\mathbf{n}$, $\mathbf{x}_0$ un punto fijo de L. El **primer momento** (M_L), y el **segundo momento** o **momento de inercia** (I_L), de una región $R \subset \mathbb{R}^2$ con respecto a la recta L, vienen dados por la expresiones

$$\begin{aligned} M_L &= \int_R comp_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ dA,\ \mathbf{x} \in R,\ \mathbf{x}_0 \in L \\ I_L &= \int_R comp^2_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\ dA,\ \mathbf{x} \in R,\ \mathbf{x}_0 \in L \end{aligned}$$

   El número

$$comp_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{||\mathbf{n}||}$$

   es la medida de la distancia dirigida del punto $\mathbf{x}$ a la recta L. Como $comp_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ es la longitud dirigida de $proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, entonces en este caso es la distancia dirigida de $\mathbf{x}$ a la recta L.

   Si en las definiciones de M_L y de I_L, se considera a L como el eje x, entonces se elige el vector normal $\mathbf{n}$ en la dirección positiva del eje y. Esto significa que puede ser elegido el vector unitario $\mathbf{j} = (0,1)$, con lo cual

$$comp_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{j} \cdot ((x,y) - (x,0)) = y$$

   Se concluye entonces que

$$M_x = \int_R y\ dA \quad , \quad I_x = \int_R y^2\ dA$$

Cuando L es el eje y, elegimos $\mathbf{n}$ en la dirección positiva del eje x, con lo cual el vector unitario $\mathbf{i} = (1,0)$ es una buena elección. Se tiene que

$$comp_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{i} \cdot ((x,y) - (0,y)) = x$$

Luego,

$$M_y = \int_R x \, dA \quad , \quad I_y = \int_R x^2 \, dA$$

En términos físicos; El **momento** es la medida de la tendencia de la materia a girar alrededor de una recta. El **Momento de inercia** respecto a una recta es la tendencia de la materia a resistirse a un cambio del movimiento rotatorio.

Muy ligado con la masa se encuentra el centro de masa de una región del plano.

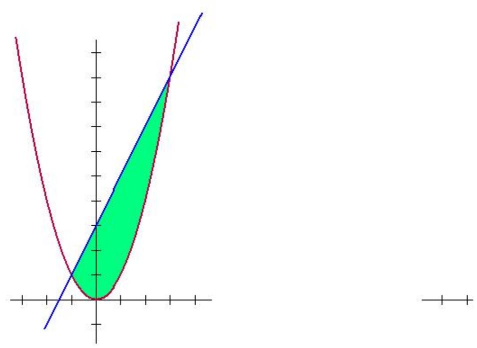
Se llama **centro de masa** de una región R, o **centroide** si la densidad es constante, al punto

$$P = (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{M(R)} \, (M_y, M_x)$$

en donde, $M(R)$ es la masa de la región.

Ejemplo: Hallar las coordenadas del centro de masa de la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x + 3$.

a) La gráfica del recinto es fundamental



b) Los puntos de intersección de las curvas son

$$(-1, 1) \qquad \text{y} \qquad (3, 9)$$

c) Escribimos el recinto R_x o R_y:

$$R_x = \{(x,y)/\ -1 \leq x \leq 3,\ x^2 \leq y \leq 2x + 3\}$$

d) Si no dan la densidad, considerar igual a 1, de modo que en este caso tenemos que

masa=área

e) Escribir la integral de la masa.

$$M = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy \, dx$$

f) Lo cual debe dar
$$M = \frac{32}{3}$$

g) Vamos por el momento en x. Anotamos la integral del M_x
$$M_x = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} y\,dy\,dx$$
lo cual da como resultado
$$M_x = \frac{1447}{60} \sim 24{,}1$$

h) Para el M_y la integral es
$$M_y = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} x\,dy\,dx$$
y su valor debe dar
$$M_y = \frac{32}{3}$$

i) El centro de masa lo tenemos casi listo.
$$\overline{x} = 1, \qquad \overline{y} = \frac{1447}{640} \sim 2{,}26$$

4. <u>Volumen de revolución</u>
Se considera la región acotada R del plano xy, y una recta L que no la intersecte (L puede ser frontera de R). Si R gira en un ángulo α alrededor de la recta L, entonces se tienen tres situaciones:

- **L es una recta paralela al eje x**
  Si la recta L tiene ecuación $y = c$, entonces el volumen que genera la región al rotar alrededor de L viene dado por
  $$V = \alpha \int_R |y - c|\; dA$$
- **L es una recta paralela al eje y**
  Si se rota R alrededor de la recta $x = c$, entonces el volumen de revolución está dado por
  $$V = \alpha \int_R |x - c|\; dA$$
- **L es una recta cualquiera**

Pappus

Si una región R gira alrededor de una recta L del plano, y si L no intersecta a R, entonces el volumen generado es igual a α veces el producto del área de R por la distancia recorrida por el centro de masa de R (α es el ángulo de rotación).
$$V = \alpha \cdot A(R) \cdot |(\bar{x}, \bar{y}) - L|$$
A partir de este resultado se tienen dos casos particulares

a) Si la recta L es $y = c$, entonces $V = \alpha\; |\overline{y} - c|\; A(R)$

b) Si la recta L es $x = c$, entonces $V = \alpha\; |\overline{x} - c| A(R)$.

$\alpha\; |\overline{y} - c|$ es la distancia recorrida por el centro de masa.

Si no se hace mención del ángulo de rotación, se toma $\alpha = 2\pi$.

4.3. Integrales Triples

4.3.1. Forma de las integrales triples

Las integrales triples tienes la siguiente forma $I = \int\int\int f(x,y,z)\,dV$

Los recinto de integración son 6, solo mostraré dos:

- $R_{xy} = \{(x,y,z) \in R^3 \mid a < x < b \ , \ g_1(x) < y < h_1(x) \ , \ g_2(x,y) < z < h_2(x,y)\}$

  $$\Rightarrow \int_a^b \int_{g_1(x)}^{h_1(x)} \int_{g_2(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- $R_{yx} = \{(x,y,z) \in R^3 \mid a < y < b \ , \ g_1(y) < x < h_1(y) \ , \ g_2(x,y) < z < h_2(x,y)\}$

  $$\Rightarrow \int_a^b \int_{g_1(x)}^{h_1(x)} \int_{g_2(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

4.3.2. Cambio de variable en la integral triple

La idea es muy parecida a la desarrollada en integrales dobles. El hacer un cambio de variables simplifica, muchas veces, los cálculos. En este caso de tres variables se considera una transformación

$$T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \to R \subset \mathbb{R}^3, \qquad T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

El jacobiano tiene la siguiente forma:

$$J(T) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

En estas condiciones, la fórmula del cambio de variables en integrales triples es

$$\int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{R^*} f(\,x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\,)\,J(T)\,du\,dv\,dw$$

4.3.3. Coordenadas cilíndricas

Este cambio de variables, no es otra cosa que una generalización de las polares vistas en integrales dobles. En efecto, si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación

$$T(r,\theta,z) = (r\,cos\,\theta, r\,sen\,\theta, z) = (x,y,z), \quad r > 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

entonces ella es inyectiva y de clase ζ^1, con Jacobiano

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} \cos\ \theta & sen\ \theta & 0 \\ -rsen\ \theta & rcos\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Esta aplicación T da origen a las denominadas **coordenadas cilíndricas**. La figura 1 ilustra la relación que existe entre coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas de un punto P de $\mathbb{R}^3$.

La transformación a coordenadas cilíndricas $T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \to R \subset \mathbb{R}^3$, para una función $f : R \to \mathbb{R}^3$ integrable es tal que

$$\int_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{R^*} f(r\,cos\,\theta, r\,sen\,\theta, z)\ r\, dr\, d\theta dz$$

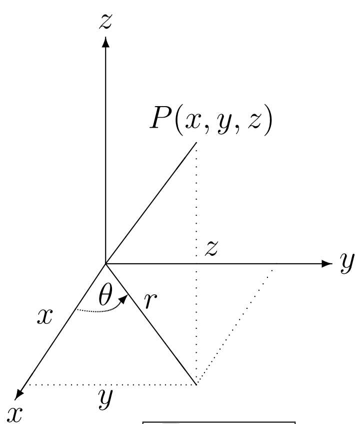


Figura 1

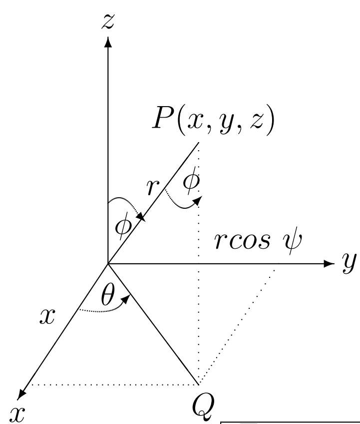


Figura 2

4.3.4. Coordenadas esféricas

Estas coordenadas presentan un mayor grado de dificultad que las cilíndricas.
Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación tal que

$$T(r, \theta, \phi) = (r\,cos\,\theta\,sen\,\phi, r\,sen\,\theta\,sen\,\phi, r\,cos\,\phi)$$

con $r > 0$; $\quad 0 < \theta \leq 2\pi$; $\quad 0 \leq \psi \leq \pi$, entonces esta transformación es inyectiva y de clase ζ^1, con Jacobiano dado por

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} cos\,\theta\,sen\,\phi & sen\,\theta\,sen\,\phi & cos\,\phi \\ -r\,sen\,\theta\,sen\,\phi & r\,cos\,\theta\,sen\,\phi & 0 \\ r\,cos\,\theta\,cos\,\phi & r\,sen\,\theta\,cos\,\phi & -r\,sen\,\phi \end{vmatrix} = -r^2\ sen\ \phi$$

Respecto de la integral, una transformación en coordenadas esféricas

$$T : R^* \subset \mathbb{R}^3 \to R \subset \mathbb{R}^3$$

para una función $f : R \to \mathbb{R}^3$ integrable, satisface

$$\int_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{R^*} f(r,\theta,\phi)\cdot r^2\,sen\,\phi\,d\theta\,dr\,d\phi$$

La figura 2 muestra la relación existente, para un punto P, entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas esféricas. La parte complicada es hallar el ángulo ϕ que se mide desde el eje z

4.3.5. Aplicaciones de la integral triple

Volumen

Si $f(x,y,z) = 1$, entonces el volumen V de una región R del espacio tridimensional queda determinado por la integral triple sobre R. Es decir,

$$V = \int\int\int_R dx\,dy\,dz$$

Masa - Momentos - Centro de masa

Si un sólido tiene densidad $\rho(x,y,z)$ en cada punto, entonces su **masa** se determina mediante la expresión

$$M = \int\int\int_R \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Sean P un plano en $\mathbb{R}^3$ con normal $\mathbf{n}$, $\mathbf{x}_0$ un punto fijo en el plano. El **primer momento** (M_P) y el **momento de Inercia** (I_P) de una región R en $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano P se definen como:

$$\begin{aligned} M_P &= \int_R comp_{\mathbf{n}}\Big[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \Big]\,dx\,dy\,dz \\ I_P &= \int_R comp^2_{\mathbf{n}}\Big[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \Big]\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

`Casos particulares`

I) Si P es el plano xy, se escoge el vector $\mathbf{n}$ en la dirección positiva del eje z, teniéndose que

$$comp_{\mathbf{n}}\Big[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \Big] = \mathbf{k}\cdot\Big[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \Big] = z$$

Luego,

$$M_{xy} = \int\int\int_R z\ dx\,dy\,dz, \quad I_{xy} = \int\int\int_R z^2\,dx\,dy\,dz$$

II) Si P es el plano yz, se escoge $\mathbf{n}$ en dirección positiva del eje x. Se tiene que

$$comp_{\mathbf{n}}\left[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \right]=\mathbf{i}\cdot\left[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \right]=x$$

Luego,

$$M_{yz}=\int\int\int_R x\ dx\,dy\,dz,\quad I_{yz}=\int\int\int_R x^2\,dx\,dy\,dz$$

III) Si P es el plano xz, se escoge $\mathbf{n}$ en dirección positiva del eje y. Se tiene que

$$comp_{\mathbf{n}}\left[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \right]=\mathbf{j}\cdot\left[\ \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\ \right]=y$$

Luego,

$$M_{zx}=\int\int\int_R y\ dx\,dy\,dz,\quad I_{zx}=\int\int\int_R y^2\,dx\,dy\,dz$$

El centro de masa de un sólido de masa M es $\mathbb{R}^3$ es el punto de coordenadas

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\frac{1}{M}(M_{yz},M_{zx},M_{xy})$$

4.4. Problemas

1. Calcular las siguientes sumas de riemann

   a) $\displaystyle\int_E (2x+y)\,dA, \quad E=[0,1]\times[0,2]$

   Las particiones P_1 y P_2, y el área $A(R_{ij})$ queda como

$$P_1=\left\{x_i=\frac{i}{n},\ 0\le i\le n\right\}\ \text{ y }\ P_2=\left\{y_j=\frac{j}{n},\ 0\le j\le 2n\right\}\Rightarrow A(R_{ij})=\frac{1}{n^2}$$

   Con lo anterior se tiene que

$$\int_E (2x+y)\,dA=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}(2x_i+y_j)A(R_{ij})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}(2\frac{i}{n}+\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}$$

   Desarrollando las sumatorias

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}(2\frac{i}{n}+\frac{j}{n})\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[2i(2n)+\frac{2n(2n+1)}{2}\right]=\frac{1}{n^2}\left[4\frac{n(n+1)}{2}+(2n+1)n\right]$$

$$\frac{1}{n}\left[2n+2+2n+1\right]=4+\frac{3}{n}\Rightarrow\int_E (2x+y)\,dA=\lim_{n\to\infty}\left[4+\frac{3}{n}\right]=4$$

   b) $\displaystyle\int_E (3x^2+2y)\,dA, \quad E=[0,2]\times[0,1]$

   Las particiones P_1 y P_2, y el área $A(R_{ij})$ queda como

$$P_1=\left\{x_i=\frac{i}{n},\ 0\le i\le 2n\right\}\ \text{ y }\ P_2=\left\{y_j=\frac{j}{n},\ 0\le j\le n\right\}\Rightarrow A(R_{ij})=\frac{1}{n^2}$$

   Con lo anterior se tiene que

$$\int_E (3x^2+2y)\,dA=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}(3x_i^2+2y_j)A(R_{ij})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\left(3\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}$$

   Desarrollando las sumatorias

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}(3(\frac{i}{n})^2+2\frac{i}{n})\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{n}i^2(n)+2\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\frac{1}{n^3}\left[3\frac{(4n+1)2n(2n+1)}{6}+n(n+1)(2n)\right]\Rightarrow\int_E (2x+y)\,dA=\lim_{n\to\infty}\left[8+2\right]=10$$

2. Escribir las siguientes integrales en sumas de riemann

a) $\displaystyle\int_5^{10}\int_{-2}^{2}(x^2+3xy)dy\,dx$

$$x_i = 5+\frac{(10-5)}{n}i = 5+\frac{5}{n}i, \quad \Delta x_i = \frac{10-5}{n} = \frac{5}{n}$$

$$y_j = -2+\frac{(2--2)}{n}j = -2+\frac{4}{n}j, \quad \Delta y_j = \frac{2--2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$\Rightarrow A(R_{ij}) = \frac{5}{n}\cdot\frac{4}{n} = \frac{20}{n^2}$$

$$\int_5^{10}\int_{-2}^{2}(x^2+3xy)dy\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^2+3x_iy_j\right)\left(\frac{20}{n}\right)$$

$$\int_5^{10}\int_{-2}^{2}(x^2+3xy)dy\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(5+\frac{5i}{n}\right)^2+3\left(5+\frac{5i}{n}\right)\left(\frac{4j}{n}-2\right)\right]\left(\frac{20}{n^2}\right)$$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{6}\int_0^4 x^2y dx\,dy$

$$x_i = 0+\frac{(4-0)}{n}i = \frac{4}{n}i, \quad \Delta x_i = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

$$y_j = -2+\frac{(6--2)}{n}j = -2+\frac{8}{n}j, \quad \Delta y_j = \frac{6--2}{n} = \frac{8}{n}$$

$$\Rightarrow A(R_{ij}) = \frac{4}{n}\cdot\frac{8}{n} = \frac{32}{n^2}$$

$$\int_{-2}^{6}\int_0^4 x^2y dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^2y_j\right)\left(\frac{32}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{8j}{n}-2\right)\right]\left(\frac{32}{n^2}\right)$$

c) $\displaystyle\int_R (x+1)dA$, siendo R con vertices $(1,1)$, $(5,1)$, $(1,3)$ y $(5,3)$.

Se tiene que

$$\int_R (x+1)dA = \int_1^3\int_1^5 (x+1)dx\,dy$$

$$x_i = 1+\frac{(5-1)}{n}i = 1+\frac{4}{n}i, \quad \Delta x_i = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$$

$$y_j = 1+\frac{(3-1)}{n}j = 1+\frac{2}{n}j, \quad \Delta y_j = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow A(R_{ij}) = \frac{4}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{8}{n^2}$$

$$\int_1^3\int_1^5 (x+1)dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i+1)\left(\frac{8}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[2+\frac{4i}{n}\right]\left(\frac{8}{n^2}\right)$$

3. Escribir el recinto triangular de vértices $(0,1)$, $(1,0)$ y $(2,2\sqrt{2})$ como una región del tipo:

   a) R_x

$$R_x = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1; \quad 1 - x \leq y \leq \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) x + 1 \\ 1 \leq x \leq 2; \quad 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \leq y \leq \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right) x + 1 \end{array} \right\}$$

   b) R_y

$$R_y = \left\{ \begin{array}{cc} 0 \leq y \leq 1; & 1 - y \leq x \leq \frac{y+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ 1 \leq y \leq 2\sqrt{3}; & \frac{2y-2}{2\sqrt{3}-1} \leq x \leq \frac{y+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

   c) R_{polar}

$$R_{polar} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \leq r \leq \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} \\ \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; & \frac{1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \leq r \leq \frac{2}{2\operatorname{sen}\theta + (2\sqrt{3}-1)\cos\theta} \end{array} \right\}$$

4. Sea $R = \{(x,y)/x = 0,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = 10,\ xy = 3\}$, describir la región como

   a) R_x

$$R_x = \left\{ \begin{array}{cc} 0 \leq x \leq 1; & 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 1 \leq x \leq 3; & \frac{3}{x} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 3 \leq x \leq \sqrt{10}; & 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right\}$$

   b) R_y

$$R_y = \left\{ \begin{array}{cc} 0 \leq y \leq 1; & 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ 1 \leq y \leq 3; & \frac{3}{y} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ 3 \leq y \leq \sqrt{10}; & 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \end{array} \right\}$$

   c) R_{polar}

$$R_{polar} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 \leq \theta \leq \arctan\frac{\pi}{3}; & 0 \leq r \leq \sqrt{10} \\ \arctan\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \arctan 3; & \sqrt{3\csc\theta\sec\theta} \leq r \leq \sqrt{10} \end{array} \right\}$$

5. Invertir el orden de integración de la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx\,dy$$

   Se tiene que la integral mostrada describe la región R_y, como

$$R_y = \left\{\ 0 \leq y \leq 1; \quad -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 - y\ \right\}$$

   Entonces la región R_x es

$$R_x = \left\{ \begin{array}{cc} -1 \leq x \leq 0; & 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 1; & 0 \leq y \leq 1 - x \end{array} \right\}$$

Finalmente la integral nos queda

$$I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)dy\,dx$$

6. Calcular las siguientes integrales, usando el método más conveniente (polares, tranformación propia, etc.)

   a) $\displaystyle\int\int(x^2+y^2)dx\,dy$, con R una circunferencia de radio 1 y centro $(1,0)$.

   La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2-2y=0$. Usando polares se tiene que $r^2-2r\operatorname{sen}\theta=0$, con lo que se llega a que $r=2\operatorname{sen}\theta$. Con esto se tiene que:

$$\int\int(x^2+y^2)dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^3dr\,d\theta=4\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=6\pi$$

   b) $\displaystyle\iint_R(x^2+y^2)dx\,dy$, siendo $R=\{x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2,\ y=2x,\ y=x\}$.

   La tranformación adecuada para calcular esta integral es

$$T(x,y)=\left(x^2+y^2,\frac{y}{x}\right)$$

   Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)|=\begin{vmatrix} 2x & -\frac{y}{x^2}\\ 2y & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=2+2\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow\left|J^{-1}(x,y)\right|=|J(u,v)|=\frac{1}{2+2v^2}$$

   Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R(x^2+y^2)dx\,dy=\int_1^2\int_1^2 u\cdot\frac{1}{2(1+v^2)}du\,dv=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)_1^2\cdot(\arctan(v))_1^2=\frac{3}{4}(\arctan(2)-\pi/4)$$

   c) $\displaystyle\iint_R\frac{dx\,dy}{x^3}$, siendo $R=\{y^2=2x,\ y^2=x,\ y=x^2,\ y=2x^2\}$.

   Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(x,y)=\left(\frac{y}{x^2},\frac{y^2}{x}\right)$$

   Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)|=\begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & -\frac{y^2}{x^2}\\ \frac{1}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{vmatrix}=\left|-3\frac{y^2}{x^4}\right|\Rightarrow\left|J^{-1}(x,y)\right|=\frac{x^4}{3y^2}$$

   Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R\frac{dx\,dy}{x^3}=\int_1^2\int_1^2\frac{1}{3v}du\,dv=\frac{1}{3}(u)_1^2\cdot(\ln(v))_1^2=\frac{1}{3}\ln(2)$$

d) $\displaystyle\iint_R \frac{dx\,dy}{4-3x^2-y^2}$, siendo $R=\{3x^2+y^2\leq 1\}$.

Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(r,\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta\right)=(x,y)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(r,\theta)|=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}r$$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{4-3x^2-y^2}=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}r\,dr\,d\theta}{4-r^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\theta\right)_0^{2\pi}\cdot\frac{-1}{2}\left(\ln(4-r^2)\right)_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}(\ln(4)-\ln(3))$$

e) $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, siendo R .la región del plano acotada por el eje X y la semicircunferencia positiva $(x-2)^2+y^2=1$.

Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(r,\theta)=(r\cos\theta+2, r\operatorname{sen}\theta)=(x,y)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(r,\theta)|=\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R xy\,dA=\int_0^{\pi}\int_0^1 (r\cos\theta+2)r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=\frac{4}{3}$$

f) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dA$, siendo R la región acotada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(r,\theta)=(ar\cos\theta, br\operatorname{sen}\theta)=(x,y)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(r,\theta)|=\begin{vmatrix} a\cos\theta & b\operatorname{sen}\theta \\ -ar\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta=2\pi ab\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{2\pi}{3}ab$$

g) $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, siendo $R = \{x - 2y = 0,\ x + y = 4,\ x + y = 1,\ x - 2y = -4\}$.

Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(x,y) = (x - 2y, x + y) = (u,v)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \left|J^{-1}(x,y)\right| = |J(u,v)| = \frac{1}{3}$$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R xy\,dA = \int_1^4 \int_{-4}^0 \left(\frac{2v+u}{3}\right)\left(\frac{v-u}{3}\right) du\,dv = \frac{164}{9}$$

h) $\displaystyle\iint_R y\,\mathrm{sen}(xy)\,dA$, siendo $R = \{xy = 1,\ xy = 4,\ y = 1,\ y = 4\}$.

Usemos la siguiente tranformación para calcular la integral

$$T(x,y) = (xy, y) = (u,v)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} y & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix} = y \Rightarrow \left|J^{-1}(x,y)\right| = |J(u,v)| = \frac{1}{v}$$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\iint_R y\,\mathrm{sen}(xy)\,dA = \int_1^4 \int_1^4 \left(v\,\mathrm{sen}(u)\frac{1}{v}\right) du\,dv = 3(\cos(1) - \cos(4))$$

i) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dA$, siendo $R = \{x = 2,\ xy = 1,\ y = x\}$.

La integral nos queda como

$$\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dA = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy\,dx = \frac{9}{4}$$

j) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{sen}\,y \cos\frac{x}{y} dx\,dy$

No se puede iterar en el orden de integración dado, por lo cual se debe invertir el orden de integración.
De la integral dada, se deduce que

$0 \le x \le 1 \quad x \le y \le 1 \Rightarrow$ Invirtiendo el orden de integración $\Rightarrow 0 \le y \le 1 \quad 0 \le x \le y$

Con lo cual, la integral nos queda como

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{sen}\,y \cos\frac{x}{y} dx\,dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{y}\,\mathrm{sen}\,y \cos\frac{x}{y} dx\,dy = \mathrm{sen}(1)(1 - \cos(1))$$

k) Calcular la siguiente integral $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy\, dx.$

Usando polares, se tiene que

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta = \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^2 \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

7. Expresar la integral $\displaystyle\iint_A (1-x^2-y^2) dx\, dy$ en coordenadas polares, siendo A el recinto triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

   El ángulo parte de 0 hasta la recta $y = x$, en polares se escribe como $r \operatorname{sen}\theta = r\cos\theta$, del cual se deduce que $\theta = \frac{\pi}{4}$.
   Por otro lado, el radio parte de cero hasta la recta $x = 1$, es decir, hasta $r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \csc\theta$.
   En resumen se tiene que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \csc\theta \Rightarrow \iint_A (1-x^2-y^2) dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\csc\theta} \frac{r}{\sqrt[3]{(1-r^2)^2}} dr\, d\theta$$

8. Hallar una integral que exprese la masa de la región limitada por las circunferencias $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y $x^2 - 4x + y^2 = 0$, y por el eje X. Considere la densidad como $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

$$\text{MASA} = \iint \rho(x,y)\, dA = \iint (x^2+y^2)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^3\, dr\, d\theta$$

9. Exprese, mediante una intergral doble, el área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2 - 2x$ e $y = x$.

$$\text{AREA} = \iint dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\theta[2-\tan\theta]}^{\sec\theta[\tan\theta+2]} dr\, d\theta$$

10. Calcular el area S de la región del plano limitada por las desigualdades

$$2x+3y-6 \geq 0, \quad 2x-3y+6 \geq 0, \quad 2x+3y-18 \leq 0, \quad 2x-3y-6 \leq 0$$

   Usemos la transformación siguiente

$$T(x,y) = (2x+3y, 2x-3y) = (u,v)$$

   Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = |-12| = 12 \Rightarrow \left|J^{-1}(x,y)\right| = |J(u,v)| = \frac{1}{12}$$

   Con lo cual, la integral del área nos queda como

$$\text{AREA} = \iint_S dA = \int_6^{18} \int_{-6}^{6} \frac{du\, dv}{12} = 12$$

11. Hallar el volumen de la superficie que esta limitada superiormente por $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 1 - y$.

El volumen de la superficie es

$$\text{Volumen} = \iint [z_2 - z_1]\, dx\, dy = \iint \big[(1 - x^2 - y^2) - (1 - y)\big]\, dx\, dy = \iint (y - x^2 - y^2) dx\, dy$$

Describiendo la superficie desde el plano XY, se tiene que

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

Utilizando polares, se tiene que la integral nos queda

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} (r \operatorname{sen}\theta - r^2) r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{32}$$

12. Sea R la región que acotan las curvas $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = 1 - x$, $y = 2 - x$

a) Determinar el centro de masa de R

Debemos hallar $(\bar{x}, \bar{y})$, pero la región es un poco complicada de trabajar. Por ello, realizaremos una transformación de la región $T(R*) = R$, y calcularemos el centro de masa $(\bar{u}, \bar{v})$.

$$T(x, y) = (y + x, y - x) = (u, v) \Rightarrow |J(x, y)| = 2 \rightarrow \left|J^{-1}(x, y)\right| = |J(u, v)| = \frac{1}{2}$$

Por la simetría de $R*$, se tiene que $\bar{v} = 0$, y $\bar{u} = \frac{3}{2}$. Entonces, el centro de masa de la región R es

$$T(u, v) = \left(\frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2}\right) \Rightarrow T(\bar{v}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

$$T\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)}$$

b) Hallar el volumen que genera la región al rotar en torno a la recta $x + y = 3$.

Recordemos que el volumen viene dado por

$$V = 2\pi A(R) \frac{|A\bar{x} + B\bar{y} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El área de la región es

$$A(R) = T(A(R*)) = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} \frac{1}{2} du\, dv = 1$$

Con esto, se tiene que

$$V = 2\pi \frac{\left|\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

c) Hallar el momento de la región $R*$ respecto la recta $v = 3$

El momento viene dado por

$$M_{v=3} = \iint u\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} u\, du\, dv = 3$$

d) Determine el volumen del sólido, en el primer octante, limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Mirando desde el plano XY, se tiene que superiormente esta acorado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 0$.

$$\iint [z_2 - z_1]\, dA = \iint \sqrt{x^2 + y^2} dA$$

Siendo $A = \{x^2 + y^2 = 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$. Usando polares para describir la región del plano se tiene que

$$\iint \sqrt{x^2 + y^2} dA = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{1} r^2 dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}$$

13. Hallar el volumen de revolución que genera la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 3)$ al girar en torno de la recta $x + y = 4$.

El volumen de revolución viene dado por la expresión

$$V = 2\pi A(R) \frac{|A\bar{x} + B\bar{y} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El área viene dado por

$$A(R) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

Por símetria de la región se tiene que

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (1, \bar{y}) \Rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{M_x}{A}$$

$$M_x = \int_{0}^{3} \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{8-y}{3}} y\, dx\, dy = 6 \Rightarrow \bar{y} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2)$$

$$V = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{|2 + 1 - 4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\pi \approx 13,328$$

14. Hallar la masa de la región R acotada po el cuadrado $|x| + |y| = 1$, si la densidad es $\delta(x, y) = y - 2x^2$.

$$\text{Masa} = \iint \delta(x, y)\, dA = \int_{-1}^{0} \int_{-1-x}^{1+x} (y - 2x^2)\, dy\, dx + \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{1-x} (y - 2x^2)\, dy\, dx = \left| \frac{-2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

15. El calculo del volumen de un sólido da lugar a la integral triple

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_{x^2+y^2}^9 dz\,dy\,dx$$

Exprese V mediante otra integral triple cuyo orden de integración sea $dy\ dx\ dz$; y luego calcúlela.

$\rightarrow$ De la integral dada se deduce que el orden de integración es $dz\,dy\,dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \\ x^2+y^2 \leq z \leq 9 \end{array} \right\}$$

Cambiando el orden de integración a $dy\,dx\,dz$, se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 9 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{z} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{z-x^2} \end{array} \right\}$$

Con lo cual la integral nos queda de la siguiente forma

$$V = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-x^2}} dy\,dx\,dz$$

$\rightarrow$ Para calcular la integral usaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z), con lo cual se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ r^2 \leq z \leq 9 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_{r^2}^9 r dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^74}{4} \right)_0^3 = \frac{81\pi}{8}$$

16. Calcular el volumen exterior a la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ e interior a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Recordemos que en esféricas las variable son (r, θ, ϕ), y además se tiene que

$$\begin{array}{l} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r\cos\phi \end{array} \Rightarrow \text{cuyo jaconiano es } |J(T)| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

Con esto presente, lo aplicamos al problema

$$\begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Con lo anterior la integral que da el volumen es

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos\phi)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

17. Calcular $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 \, dz \, dy \, dx$

El orden de integración dado nos lleva a resolver (o iterar) una integral difícil $\displaystyle\int \operatorname{sen} y^2 \, dy$.

Por esto, cambiamos el orden de integración

$$\begin{array}{l} 1 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow I = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \operatorname{sen} y^2 \, dx \, dy \, dz = \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dz = 1$$

18. Plantear las integrales triples que proporcionan el volumen acotado por las superficies siguientes

a) Acotada superiormente por $z = 1 - y^2$ entre los planos $x + y = 1$, $x + y = 3$.

Usando cilindricas, se tiene que

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}} \int_0^{1 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta} r \, dz \, dr \, d\theta$$

b) Acotada inferiormente por $z = x^2 + y^2$ y superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Como $z = x^2 + y^2$, reemplazando en $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ se tiene que

$$z + z^2 = 6 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow z = 2 \quad z = -3$$

Luego, la intersección de las superficie ocurre a la altura $z = 2$. Usando cilíndricas, se tiene que

$$\begin{array}{l} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2} \end{array} \Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{\sqrt{6 - r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

c) $x = 4 - y^2$, $z = 0$, $z = x$.

Describiendo la superficie desde el plano XY, se tiene que

$$\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x} \\ 0 \leq z \leq x \end{array} \Rightarrow V = \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x}} \int_0^x dz \, dy \, dx$$

d) $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Describiendo la superficie desde el plano XY, se tiene que

$$\begin{array}{l} -3 \leq x \leq 3 \\ -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2 \end{array} \Rightarrow V = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9 - x^2 - y^2} dz \, dy \, dx$$

e) $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$

Describiendo la superficie desde el plano XY, se tiene que

$$\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ \leq y \leq 4 - x^2 \\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 \end{array} \Rightarrow V = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{4-x^2} dz \, dy \, dx$$

19. Calcular el volumen que acota el elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$

Realicemos una transformación modificada de la esférica, esto es

$$\begin{array}{l} x = 3r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ y = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ z = r\cos\phi \end{array} \Rightarrow \text{ cuyo jacobiano es } J(T) = 6r^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Con esto, el elipsoide se convierte en una esfera de radio 1 y centro en el $(0,0,0)$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 6r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = 4\pi\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi = 4\pi\left(-\cos\phi\right)_0^{\pi} = 8\pi$$

20. Exprese la integral

$$I_D = \int\int\int (x^2 + yz)\, dV$$

en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Donde D es la región limitada inferiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, y superiormente $z = 3$.

a) Rectangulares (x, y, z)

$$\begin{array}{l} -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ -\sqrt{3 - x^2} \le y \le \sqrt{3 - x^2} \\ \sqrt{4 - x^2 - y^2} + 2 \le z \le 3 \end{array} \Rightarrow I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{4-x^2-y^2}+2}^{3}(x^2 + yz)dz\, dy\, dx$$

b) Cilíndricas

$$(x, y, z) \to (r, \theta, z) \,:\, [x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z] \Rightarrow J(T) = r$$

$$\begin{array}{l} 0 \le r \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \sqrt{4 - r^2} + 2 \le z \le 3 \end{array} \Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{4-r^2}+2}^{3} r(r^2\cos^2\theta + r^2 z\,\mathrm{sen}\,\theta)dr\, d\theta\, dz$$

c) Esféricas

$$(x, y, z) \to (r, \theta, \phi) \,:\, [x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = r\cos\phi] \Rightarrow J(T) = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\begin{array}{l} 0 \le r \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \sqrt{4 - r^2} + 2 \le \phi \le 3 \end{array}$$

$$I = \int_0^{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{3\sec\phi} r^2\,\mathrm{sen}\,\phi(r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi + r^2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)dr\, d\theta\, d\phi +$$

$$\int_{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\,\mathrm{sen}\,\phi} r^2\,\mathrm{sen}\,\phi(r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi + r^2\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)dr\, d\theta\, d\phi$$

21. Calcular usando coordenadas esféricas la integral $\displaystyle\int\int\int_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde S es el sólido acotado por la superficie $x^2+y^2+z^2=z$.

Usando esféricas, la integral nos queda de la siguiente forma

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\phi} r^3\,\mathrm{sen}\,\phi\,dr\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\phi\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{\cos\phi}=$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi = -\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\cos^5\phi}{5}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}$$

22. Calcular $\displaystyle\int\int\int_S ((x+y)^2-z)\,dx\,dy\,dz$, donde S es el sólido acotado por las superficies $z=0$ y $(z-1)^2=x^2+y^2$.

Usando coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r[(r\cos\theta+r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2-z]\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r}(r^3(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2-zr)\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^3(1-r)(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2-\frac{r(1-r)^2}{2}\right)dr\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right)_0^1(1+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{2r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right)_0^1\right]d\theta=$$

$$\frac{1}{20}\int_0^{2\pi}(1+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\,d\theta-\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\cdot\frac{1}{20}-2\pi\cdot\frac{1}{24}=\frac{\pi}{60}$$

23. Escriba una integral triple para la integral de $f(x,y,z)=6+4y$ sobre la región del primer octante acotada por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el cilindro $x^2+y^2=1$, y los planos coordenados, en rectangulares, cilíndricas y esféricas.

   a) Rectangulares

$$\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\Rightarrow I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(6+4y)dz\,dy\,dx$$

   b) Cilíndricas

$$\begin{array}{l}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le r\end{array}\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^r r(6+4r\,\mathrm{sen}\,\theta)dz\,dr\,d\theta$$

   c) Esféricas

$$\begin{array}{l}0\le r\le\csc\phi\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{4}\end{array}\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\csc\phi}r^2\,\mathrm{sen}\,\phi(6+4r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)dr\,d\theta\,d\phi$$

24. Colocar los limites de integración a la integral $\int_R z\,dV$, siendo R la parte común de las superficies $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$.

$\rightarrow$ Usando coordenadas esféricas se tiene que

$$\begin{array}{l|l} 0 \leq r \leq 1 & 0 \leq r \leq 2\cos\phi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\int_R z\,dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta\, dr \; + \int_0^{2\csc\phi} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta\, dr$$

25. Escribir el volumen que acota cada región acotada por las superficies dadas

a) $z = x^2+4y^2-2$, y $z = 2-x^2-4y^2$.

$$V = 2 \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2 \int_0^{\sqrt{2-4y^2}} \int_0^{2-x^2-4y^2} dz\, dx\, dy$$

b) $z = x^2+y^2$, $xy = 1$, $xy = 2$, $2y = x$, $2x = y$, $z = 0$.

Usemos la siguiente transformación para calcular la integral anterior

$$T(x,y,z) = \left(xy, \frac{y}{x}, z\right) = (u,v,w)$$

Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} y & \frac{-y}{x^2} & 0 \\ x & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \left|J^{-1}(x,y)\right| = |J(u,v)| = \frac{1}{2v}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{u}{v} = x^2$ y $uv = y^2$, se tiene que

$$V = 2 \cdot \int_1^2 \int_{1/2}^2 \int_0^{\frac{u}{v}+uv} \frac{1}{2v} du\, dv\, dw$$

c) $z = x^2+y^2$, $z = 4x^2+4y^2$, $y = x^2$, $y = 3x$, $x, y, z \geq 0$.

Usando coordenadas cilíndricas, se tiene que

$$V = \int_0^{\arctan(3)} \int_0^{\sec^2\theta \operatorname{sen}\theta} \int_{r^2}^{4r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

26. Escribir la integral triple del volumen de la región entre $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ y acotada por $x^2+y^2+z^2 = 16$.

Usando coordenadas esféricas

$$\begin{array}{l} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \arctan(3) \end{array} \Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_{\arctan(3)}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 r^2 \operatorname{sen}\phi dr\, d\phi\, d\theta$$

27. Escribir la integral triple del volumen del solido que acotan $z = x^2 + 3y^2$, $z = 9 - x^2$.

 Vamos a usar coordenadas cilíndricas

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}}} \int_{1+2r^2\operatorname{sen}^2\theta}^{9-r^2\operatorname{sen}^2\theta} r\,dz\,dr\,d\theta$$

28. Escribir la integral triple del volumen que acota el solido $y = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, entre los planos $y = x$ e $y = x\sqrt{3}$.

 Usando coordenadas esféricas

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\sqrt{3})} \int_0^{\pi} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

29. Escribir la integral triple del volumen del solido $4(x^2 + y^2) = (2a - x)^2$ acotado por $x^2 + y^2 = 2ax$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 2a$.

 Se tiene que

 - $x^2 - 2ax + y^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x = a + \sqrt{a^2 - y^2}$
 - $4(x^2 + y^2) = (2a - x)^2 \Rightarrow z = 2a - 2\sqrt{x^2 + y^2}$

 Entonces, usanado coordenadas rectangulares tenemos que

$$\begin{array}{l} -a \leq y \leq a \\ 0 \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - y^2} \\ 0 \leq z \leq 2a - 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \Rightarrow V = 2 \cdot \int_{-a}^{a} \int_0^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \int_0^{2a-2\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dx\,dy$$

 Ahora, ocupemos coordenadas cilindricas

$$\begin{array}{l} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 2a - 2r \end{array} \Rightarrow V = 2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{a} \int_0^{2a-2r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

30. Calcular $\displaystyle\int_R (x+y)^{\frac{1}{2}}(x+2y-z)^{\frac{1}{3}}\,dV$, siendo R la región

$$1 \leq x + y \leq 2,\ 0 \leq x + 2y - z \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$$

 La transformación adecuada es

$$T(x,y,z) = (x+y, x+2y-z, z) = (u,v,w)$$

 Cuyo jacobiano es

$$|J(x,y)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \left|J^{-1}(x,y)\right| = |J(u,v)| = 1$$

$$\int_R (x+y)^{\frac{1}{2}}(x+2y-z)^{\frac{1}{3}}\,dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_1^2 (u^{1/2} \cdot v^{1/3})\,du\,dv\,dw = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{8} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

5. Integración en Campos

Existen dos tipos de campos, escalar y vectorial. En particular, la integración en campos escalares corresponde a las integrales múltiples vistas anteriormente en donde el conjunto donde se integra o recinto de integración son lugares geométricos en dos o en tres dimensiones. Ahora, la integración en campos vectoriales se hace sobre conjuntos llamados *curvas o lineas*, y *superficies.*

Existen 4 categorías para las integrales sobre campos vectoriales:

- Integrando Escalar y la diferencial escalar.
- Integrando Escalar y la diferencial Vectorial.
- Integrando Vectorial y la diferencial escalar.
- Integrando Vectorial y la diferencial Vectorial.

En este último se tiene dos casos, con producto escalar y con producto vectorial.

Observación: Un elemento matemático importante en el estudio de la integración en campos es el operador nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \cdots)$, que aplicado a un campo vectorial y de acuerdo al tipo de producto, vectorial o escalar, que se este aplicando toma el nombre de:

1. El **Rotacional** de un campo vectorial: $(\vec{\nabla} \times \vec{F})$
2. La **Divergencia** de un campo vectorial: $(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$

5.1. Curvas

Trayectorias: sea $\alpha : [a, b] \subset R \to R^n$, es regular si $\alpha'(t) \neq 0\ \forall t$. Es regular por partes si α es regular en cada subintervalo del intervalo $[a, b]$. Es suave si $\alpha(a) = \alpha(b)$ (inicio=final), simple cerrada si α es inyectiva y $\alpha(a) = \alpha(b)$. Las curvas se pueden parametrizar en dos sentidos.

5.2. Integral de Línea

- Caso Campo Escalar
$$\int_{\alpha} f\, dL = \int_{b}^{a} f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\ dt$$
El resultado de la integral de línea sobre campo escalar posee varias intepretaciones como masa de un alambre, centro de masa o momento de inercia, esto va a depender de lo que se pida en el problema.
- Caso campo vectorial
$$\int_{\alpha} \vec{F}\, d\vec{L} = \int_{b}^{a} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$
En este caso el resultado de la integral de línea sobre campo vectorial se intepreta como trabajo que es la energía necesaria para mover un cuerpo sobre α, circulación que es la componente tangencial neta sobre α, o también se intepreta como flujo que son líneas

que entran o salen de α, debido a un campo de fuerza vectorial. Que intepretación le vamos a dar va a depender de los requirientos del problema.

Campos Gradientes: El campo vectorial $\vec{F}(x,y)$ es gradiente si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, de ser así entonces el campo tiene asociado una función potencial $f(x,y)$ la cual cumple que $\nabla f = \vec{F}$. Para calcular la función potencial a un campo de tres variables $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ se puede usar la siguiente ecuación

$$f(x,y) = \int_0^x F_1\, dx + \int_0^y F_2\, dy + \int_0^z F_3\, dz$$

El teorema fundamental del cálculo puede ser aplicado a la integral de línea, relacionando ésta con su función potencial.

Si $\vec{F}$ es gradiente, entonces para calcular la integral de línea se necesita saber el punto inicial (a,b) y el punto final (c,d). Luego, se evalua los puntos en el potencial, como se muestra en la siguiente ecuación

$$\int_\alpha \vec{F}\, d\vec{L} = \int_\alpha (\nabla f)\, d\vec{L} = f(a,b) - f(d,c)$$

Observación: si el campo es gradiente y la curva es cerrada entonces la integral de línea es cero.

5.3. Integral de Superficie

Ahora el recinto o conjunto donde se integra es la supeficie S la cual posee un dominio D definida en el plano y también posee una normal $\vec{n}$ la cual tiene orientación hacia afuera. Además, la superficie se puede parametrizar $\phi(u,v)$. Esta parametrización se relaciona con la normal de la siguiente forma:

$$\vec{n} = \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial v}$$

- Caso campo escalar

  $$\int_S f\, ds = \iint_D f(\phi(u,v)) \cdot \|\vec{n}\|\; dudv = \iint_D f(\phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial v} \right\| \; dudv$$

  Si el campo que esta actuando es unitario, es decir, $f(x,y) = 1$ entonces lo que se esta calculando es el **área** de la superficie parametrizada o la **masa** si la densidad es uno. Si el campo no es unitario, entonces se dice que es la densidad de la superficie y en este caso lo que se esta calculando es la **masa** de la supeficie.

- Caso campo vectorial

  $$\int_S \vec{F} d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v)) \cdot \vec{n}\, dudv = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v)) \cdot \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \phi(u,v)}{\partial v}\, dudv$$

  La integral de superficie es el **flujo** o **cantidad de lineas** que pasa por la supeficie.

5.4. Teoremas

Se puede relacionar las integrales de superficie con las integrales de línea, y las integrales de superficie y de linea con las integrales iteradas. El medio que se ocupa para realizar estas tareas son los teoremas, en la siguiente forma:

5.4.1. Green

Sea R la región del plano y sea C su frontera. Sea $\vec{F}(P(x,y),Q(x,y))$ donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son campos escalares, se tiene que:

$$\int_C \vec{F} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\,dxdy$$

Se puede observar que el teorema de green relaciona la integral de linea a lo largo de la frontera C con la integral doble o de área sobre el interior de la región R.

5.4.2. Stoke

Sea S superficie definida por una función $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in D$. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial definido sobre S. Si ∂S es la frontera de S, se tiene:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)\,dS = \int_{\partial S} \vec{F}\,dL$$

Se observa que el teorema de Stokes establece que la integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre la superficie S, es igual a integral de línea de la componente tangencial de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de S.

5.4.3. Gauss

Sea V región cerrada con frontera S, sea $\vec{F}$ campo vectorial definido sobre S, entonces:

$$\int_S \vec{F}\,\mathbf{dS} = \int_S \vec{F}\,ndS = \int\int\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dV$$

El teorema de Gauss relaciona integrales de superficie con integrales de volumen, y afirma que el flujo de un campo vectorial fuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen acotado por la superficie.

El significado físico de la divergencia es que en un punto $\mathbf{P}$, $\nabla\vec{F}(P)$ es la razón de flujo neto que sale por $\mathbf{P}$, por unidad de volumen.

5.5. Problemas

1. Parametrizar las siguientes curvas entre los puntos dados

   a) $y = 1$, entre $(0,1)$ y $(1,1)$.

   $$\alpha(t) = (t,1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

   b) $\dfrac{y}{x^2} = 2$, entre $(0,0)$ y $(3,18)$.

   $$\text{Sea } x = t \Rightarrow y = 2t^2 \longrightarrow \alpha(t) = (t,t^2) \quad 0 \leq t \leq 3$$

   c) $4x^2 + y^2 + 2x = 4$, toda la curva.

   $$4x^2 + y^2 + 2x = 4 \Rightarrow 4(x + \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{17}{4} \Rightarrow \frac{(x+\frac{1}{4})^2}{\frac{17}{16}} + \frac{y^2}{\frac{17}{16}} = 1$$

   Entonces, se tiene que

   $$x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4}\cos t \qquad y = \frac{\sqrt{17}}{4}\operatorname{sen} t \Rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\cos t - \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}}{4}\operatorname{sen} t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

2. Calcular la integral $\displaystyle\int_A^B (2x^2 + 2y^2 - x + 2)ds$, donde $A(3,0)$ y $b(0,3)$ con respecto a la curva $x^2 + y^2 = 9$.

   El argumento de la integral es un campo escalar $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x + 2$. La curva C^+ se parametriza como

   $$\alpha(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

   $$\alpha'(t) = (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t} = 3$$
   $$f(\alpha(t)) = f(3\cos t, 3\operatorname{sen} t) = 2(9) - 3\cos t + 2 = 20 - 3\cos t$$

   Finalmente se tiene que:

   $$\int_A^B f\,dL = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|\;dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (20 - 3\cos t)\,3dt = 30\pi - 9$$

3. Determinar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (xy,1)$, al desplazarse desde el punto $(0,0)$ hasta $(1,1)$

   a) Por el camino $y = x^2$ (C_1)

   $$\alpha(t) = (t,t^2) \quad 0 \leq t \leq 1$$

   $$\alpha'(t) = (1,2t) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (t^3,1)$$

   $$T_{C_1} = \int \vec{F}(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int_0^1 (t^3,1)(1,2t)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$

b) Por $y = x$ (C_2)

$$\alpha(t) = (t,t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha'(t) = (1,1) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (t^2, 1)$$

$$T_{C_2} = \int_0^1 (t^2,1)(1,1)\,dt = \int_0^1 (t^2+1)dt = \frac{4}{3}$$

c) Por la curva cerrada compuesta por C_1 y C_2, en el sentido antihorario.

$$T_{C_1+C_2} = T_{C_1} - T_{C_2} = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{12}$$

4. Calcular la integral

$$\int_C (2xe^{x^2+2y^2} - y)dx + (4ye^{x^2+2y^2} + x^2)dy$$

a) Donde C es la circunferencia $x^2+y^2=1$, orientada en sentido antihorario.

Como la curva es cerrada, vamos a ocupar green, esto es

$$\int \vec{F} d\vec{L} = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint (2x+1)\,dA$$

En polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^2\cos\theta + r)dr\,d\theta = \frac{1}{2}$$

b) Donde C es la curva formada por el arco de la curva $y = 2 - x^2$ que va desde el punto $(1,1)$ hasta el punto $(-1,1)$.

Si la región la cerramos con la recta $y=1$, se puede aplicar green de la siguiente manera:

$$\int_{y=1} \vec{F} d\vec{L} + \int_C \vec{F} d\vec{L} = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Trabajemos la integral con $y=1$

$$\alpha(t) = (t,1) \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\alpha'(t) = (1,0) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (2te^{t^2+2} - 1, 4e^{t^2+2} + t^2)$$

$$\int_{y=1} \vec{F} d\vec{L} = \int_{-1}^1 (2te^{t^2+2} - 1, 4e^{t^2+2} + t^2)(1,0)\,dt = \int_0^1 (2te^{t^2+2} - 1)dt = -2$$

Por otro lado, se tiene que

$$\iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{-1}^1 \int_1^{2-x^2} (2x+1)dy\,dx = \frac{4}{3}$$

Finalmente, obtebemos lo que andabamos buscando

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA - \int_{y=1} \vec{F} d\vec{L} = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

5. Dada la integral $\int_C (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$,

   a) Muestre que su valor es independiente de la curva C, donde C es una curva que va desde el punto $(1, 2)$ al punto $(3, 4)$.

   Si el rotor es cero, entonces el campo es gradiente o conservativo, es decir, es independiente de la curva.
   Se tiene que $P = 6xy^2 - y^3$ y que $Q = 6x^2y - 3xy^2$, luego el rotor nos queda como

   $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

   Entonces, el valor de la integral es independiente de la curva C.

   b) Calcular dicha integral

   Si es conservativo, entonces tiene asociado una función potencial que se calcula de la siguiente manera

   $$f(x, y) = \int_0^x F_1(t, 0)\,dt + \int_0^y F_2(x, t)\,dt = \int_0^x 0 \cdot dt + \int_0^y (6x^2t - 3xt^2)\,dt = 3x^2y^2 - xy^3$$

   $$\boxed{f(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3}$$

   Usando el teorema fundamental del cálculo

   $$\int_C (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy = f(3, 2) - f(1, 2) = 572 - 192 - 12 + 8 = 476$$

6. Considerar la trayectoria C que se halla en el primer octante y compuesta de las curvas:

   $$C_1 = \left\{4x^2 + y = 1,\ z = 0\right\} \quad C_2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0\right\}$$

   Calcular el trabajo que realiza el campo $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + z, y)$ para mover una partícula sobre la curva C que es recorrida en sentido positivo.

   Primero, parametrizamos las curvas C_1 y C_2

   $$C_1 :\ \alpha(t) = (t, 1 - 4t^2, 0) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

   $$\alpha'(t) = (1, -8t, 0) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (3t^2 - 12t^4, t^3, 1 - 4t^2)$$

   $$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^{\frac{1}{2}} (3t^2 - 12t^4, t^3, 1 - 4t^2) \cdot (1, -8t, 0)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (4t^3 - 16t^5)dt = \frac{1}{48}$$

   $$C_2 :\ \alpha(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

   $$\alpha'(t) = (0, -\operatorname{sen} t, \cos t) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (0, \operatorname{sen} t, \cos t)$$

   $$\int_{C_2} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{sen} t \cos t\,dt = 1$$

   Ahora, calculamos la integral uniendo las dos trayectorias $C = C_1 + C_2$, esto es:

   $$\int_C \vec{F} d\vec{L} = -\int_{C_1} \vec{F} d\vec{L} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{L} = -\frac{1}{48} + 1 = \frac{47}{48}$$

7. Sea $I = \oint_C xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy \qquad C : x^2+4y^2 = 9$

   a) Obtener el valor de la integral a lo largo de la curva cerrada C.

   Usando el teorema de **Green**, se tiene que

$$I = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{A(C)} x\,dA$$

   Usando polares $\begin{cases} x = 3r\cos\theta \\ y = \frac{3}{2}r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad J(T) = \dfrac{9}{2}r$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r\cos\theta \cdot \frac{9}{2}r)dr\,d\theta = \frac{27}{2}\cdot(\operatorname{sen}\theta)_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^1 = 0$$

   b) Hallar I a lo largo de $C*$ entre los puntos $A(3,0)$ y $B(0,\frac{3}{2})$.

   Cerremos la región con las curvas $C_1 : y = 0$ y $C_2 : x = 0$, para poder usar Green, esto es:

$$I_{C*} + I_{C_1} + I_{C_2} = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow C_1(t) = (t,0); \quad 0 \le t \le 3 \to C_1'(t) = (1,0) \qquad \vec{F}(C_1(t)) = (0,t^2)$$

$$x = 0 \Rightarrow C_2(t) = (0,t); \quad 0 \le t \le \frac{3}{2} \to C_2'(t) = (0,1) \qquad \vec{F}(C_2(t)) = (0,t^2)$$

   Retomando la primera expresión con lo anterior, se tiene que

$$I = I_{C_2} - I_{C_1} = \int_0^{\frac{3}{2}} (0,t^2)(0,1)\,dt - \int_0^3 (0,t^2)(1,0)\,dt = \frac{9}{8} - 0 = \frac{9}{8}$$

8. Calcular la **circulación** del campo $\vec{F} = (xy^2, x^3)$ a lo largo del rectangulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ y $(0,3)$.

   Usando Green

$$\int_\alpha \vec{F}d\vec{L} = \iint_{A(\alpha)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \\ \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \end{array}\right\} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 2xy \Rightarrow I = \int_0^2\int_0^3 (3x^2-2xy)dy\,dx = 6$$

9. Calcular **trabajo** que realiza el campo $\vec{F} = \left(\dfrac{1-y}{x^2+(y-1)^2}, \dfrac{x}{x^2+(y-1)^2}\right)$ para mover un objeto sobre el cuadrado de vértices $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$ y $(0,3)$ recorrido en sentido positivo.

   Ocurre que el punto $(0,1)$, que está dentro de la región limitada por la curva, indefine el campo vectorial dado. Es por ello que este punto se encierra con una circunferencia de radio muy pequeño que se denotará por ϵ.

   Luego, ocupando green y definiendo a $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i$ como el contorno del cuadrado, tenemos que

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{L} - \int_{\otimes} \vec{F} d\vec{L} = \iint_{A(\alpha)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$I = \iint_{A(\alpha)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \int_{\otimes} \vec{F} d\vec{L}$$

   Calculemos el primer término del lado derecho de la ecuación anterior

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \iint_{A_\alpha} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

   Para calcular el segundo término debemos parametrizar la circunferencia $(\otimes)$ como

$$\alpha(t) = (\epsilon \cos t, \epsilon \operatorname{sen} t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (-\epsilon \operatorname{sen} t, \epsilon \cos t) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = \left(\frac{-\epsilon \operatorname{sen} t}{\epsilon}, \frac{\epsilon \cos t}{\epsilon}\right) = \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{\epsilon}, \frac{\cos t}{\epsilon}\right)$$

   Con lo cual tenemos que

$$\int_{\otimes} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{\epsilon}, \frac{\cos t}{\epsilon}\right) \cdot (-\epsilon \operatorname{sen} t, \epsilon \cos t) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

10. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_r (e^{x^2} - y^3)dx + (e^{y^2} - x^3)dy$, siendo r la frontera positivamente orientada de la región del plano limitada por las circunferencias α_1 de centro $(0,1)$ y radio 1, y la circunferencia α_2 de centro $(0,2)$ y de radio 2.

    La curva esta dada por

$$\alpha : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

    Por green tenemos que

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{L} = \iint_{A(\alpha)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 3 \iint_{A(R)} (x^2 + y^2)\, dA$$

    Usando polares

$$3 \int_0^{\pi} \int_{2 \operatorname{sen} \theta}^{4 \operatorname{sen} \theta} r^3 dr\, d\theta = \frac{135\pi}{2}$$

    Con esto ocurre que

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{L} = \frac{135\pi}{2}$$

11. Dado el campo $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$:

   a) Determinar si es conservativo sobre el abierto $A = \{(x,y)/\, x > 0\}$

   Como el campo tiene dos componentes, queda analizar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{ El Campo es conservativo o gradiente}$$

   b) Si lo es, hallar el potencial del campo.

   Como el campo es gradiente, entonces tiene asociado un potencial $f(x,y)$ que se calcula como

$$f(x,y) = \int_1^x F_1(t,0) + \int_0^y F_2(x,t) = \int_1^x \frac{1}{2}\ln t^2 dt - \int_0^y \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{x}\right)\, dt$$

   Resolviendo las integrales con sustituciones y por partes, se llega a que

$$f(x,y) = 1 - x - y\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}x\ln(x^2+y^2)$$

12. Calcule la integral $\int_C (e^x\cos y - e^y\operatorname{sen} x)dx + (e^y\cos x - e^x\operatorname{sen} y)dy$, sabiendo que C es una curva que va desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

   Verifiquemos si el campo es gradiente

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^y\operatorname{sen} x - e^x\cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^y\operatorname{sen} x - e^x\cos y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \text{ El Campo es conservativo o gradiente}$$

   Como $\vec{F}(x,y)$ es gradiente, entonces se puede calcular su potencial. Para hallar el potencial se tiene que

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t)\,dt = \int_0^x e^t - \operatorname{sen} t\,dt + \int_0^y (e^t\cos x - e^x\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$f(x,y) = e^y\cos x + e^x\cos y - 2$$

   Como encontramos la expresión de el potencial, podemos calcular la integral como sigue

$$I = f\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) - f(0,0) = -e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

13. Demuestre que el área acotada por la curva cerrada simple C viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{c} x\,dy - y\,dx$$

Teniendo en cuenta el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$ y ocupando el teorema de green, se tiene que

$$\int_C \vec{F}d\vec{L} = \int_C xdy - ydx = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Obtenemos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

Reemplazando en la ecuación anterior. se obtiene que:

$$\iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 2\iint_{A(C)} dA = 2 \times \text{AREA}$$

Luego, ocurre que:

$$A = \frac{1}{2}\int_{c} x\,dy - y\,dx$$

14. Use el ejercicio anterior para calcular el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

El área de la elipse viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{c} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \vec{F}(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt,\ \text{con } \alpha(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, b\cos t) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (-b\,\text{sen}\,t, a\cos t) \Rightarrow \vec{F}(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) = ab$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi \Rightarrow \text{El área de la elipse es } ab\pi$$

15. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (xy^2, x^3)$ a lo largo de la región de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ y $(0,3)$.

Como la región del plano es cerrada, ocupamos el teorema de Green, esto es

$$I = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{A(C)} (3x^2 - 2xy)\,dA$$

$$I = \int_0^2\int_0^3 (3x^2 - 2xy)\,dy\,dx = 6$$

16. Hallar el **flujo** del campo vectorial $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie abierta $x^2 + y^2 = z^2$ para $1 < z < 2$.

FLUJO$=\displaystyle\int_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{A(S)} \vec{F}(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, dA$

Entonces, parametrizamos la superficie de la siguiente forma

$$\phi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \quad D = \left\{(x,y)/1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

Derivando la función $\phi(x,y)$ respecto x e y

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) \qquad \phi_y = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

Obtenemos la normal aplicando el producto cruz entre ϕ_x y ϕ_y, esto es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Ahora, evaluamos la parametrización en el campo vectorial

$$\vec{F}(\phi(x,y)) = (x^3, y^3, (x^2+y^2)^{3/2})$$

Realizamos el producto punto del argumento de la integral y la calculamos obteniendo el flujo a través de la superficie

$$\int_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{A(S)} \vec{F}(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_{A(S)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por último, usando coordenadas polares y considerando el dominio D, tenemos que

$$\text{FLUJO} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 2r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\theta = 0$$

17. Hallar la **circulación** del campo $\vec{F} = (2x + y - z, 2x + z, 2x - y - z)$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, con $2x - z = 0$.

La circulación viene dada por la integral de línea $\displaystyle\int_{\partial S} \vec{F}\, d\vec{L}$ donde ∂S es la curva de intersección entre las superficies dadas, es decir

$$\alpha = \left\{4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4,\ 2x - z = 0\right\} = \left\{2x^2 + y^2 = 1\right\} = \left\{\frac{x^2}{1/2} + y^2 = 1\right\}$$

Para calcular esta integral ocuparemos el teorema de **Stokes**, en donde

$$\int_{\partial S} \vec{F}\, d\vec{L} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_{A(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, dA$$

Entonces, empecemos por calcular el rotor del campor vectorial $\vec{F}(x,y)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + y - z & 2x + z & 2x - y - z \end{vmatrix} = (-2, -3, 1)$$

Como nos dio una función vectorial constante ocurre que

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x,y)) = (-2,-3,1)$$

La paremetrización es

$$\phi(x,y) = (x,y,2x), \quad D = \left\{(x,y)/2x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$\phi_x = (1,0,2) \qquad \phi_y = (0,1,0)$$

Con lo cual el cálculo de la normal nos queda de la siguiente manera

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,0,1)$$

$$\text{CIRCULACIÓN } = \iint_{A(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, dA = 5 \iint dA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

18. Sea $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$. Calcular $\displaystyle\int_s \vec{F} d\vec{S}$, siendo S la cara interna del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, entre $z = 0$ y $z = 1$.

 a) Directamente

$$\phi(x,y) = (x, y, \frac{x^2+y^2}{3}), \quad D = \left\{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 3\right\}$$

$$\phi_x = (1, 0, \frac{2x}{3}) \qquad \phi_y = (0, 1, \frac{2y}{3})$$

La normal nos queda de la siguiente manera

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{2x}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2y}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{2x}{3}, \frac{2y}{3}, -1\right)$$

Entonces, tememos que

$$\int_S \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, ds = \frac{1}{3} \iint_D (x^2+y^2)^2\, ds$$

en polares nos queda que

$$\frac{1}{3} \iint_D (x^2+y^2)^2\, ds = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} r^5\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{r^6}{6}\right)_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$$

 b) Usando Gauss

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} + \int_{Plano} \vec{F} d\vec{S} = \int\int\int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV$$

Ocurre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = (z + z - 2z) = 0$, entonces tenemos que

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = -\int_{Plano} \vec{F} d\vec{S}$$

Se tiene que calcular el flujo a través del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$ es lo mismo que calcular el flujo a través del plano $z = 1$, bajo el campo $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$ y el dominio $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 3\}$.
El plano posee la normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ y la parametrización $\phi(x, y) = (x, y, 1)$, con lo cual se llega a

$$\int_{Plano} \vec{F} d\vec{S} = \iint_D (\vec{F}(\phi(x, y)))(\vec{n})\, ds = \iint_D (x, y, -1)(0, 0, 1)\, ds = -3\pi$$

$$\int_S \vec{F} d\vec{S} = -\int_{Plano} \vec{F} d\vec{S} = -(-3\pi) = 3\pi$$

19. Calcule $\iint_S (x^2 + y^2)\, ds$, donde S es la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, acotada por $z = 0$, $z = 3$.

Notar que esta actuando un campo escalar, el cual es $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Entonces, la integral de superficie se define a partir del producto entre la evaluación de la parametrización en el campo escalar y el módulo de la normal, es decir

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, ds = \iint_{A(S)} f(\phi(x, y))\, \|\vec{n}\|\, ds$$

La parametrización es

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{3(x^2 + y^2)}), \quad D = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 3\}$$

$$\phi_x = (1, 0, \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \qquad \phi_y = (0, 1, \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

La normal es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \|\vec{n}\| = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 2 \qquad f(\phi(x, y)) = x^2 + y^2$$

$$\iint_{A(S)} f(\phi(x, y))\, \|\vec{n}\|\, ds = \iint_{A(S} 2(x^2 + y^2)\, ds = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r^3\, dr\, d\theta = 9\pi$$

20. Verifique el teorema de Stokes para $\vec{F}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$, donde S es la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$, acotada por $z = 2$ y C es su borde.

Debemos verificar que se cumpla la siguiente igualdad

$$\underbrace{\int_C \vec{F} d\vec{L}}_{(1)} = \underbrace{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S}}_{(2)}$$

$\rightarrow$ Trabajemos (1)

Primero, parametrizamos la curva C

$$C:\ \alpha(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (6\operatorname{sen} t, -4\cos t, 8\operatorname{sen} t)$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 12)\, dt = -20\pi$$

$\rightarrow$ Ahora trabajemos con (2)

Primero calculemos el rotor del campo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \big(z^2 + x, 0, -z-3\big) \Rightarrow \vec{F}(\phi(x,y)) = (4+x, 0, -5)$$

La parametrización es

$$\phi(x,y) = (x,y,2), \quad D = \big\{(x,y)/x^2+y^2 \leq 4\big\}$$

$$\phi_x = (1,0,x) \qquad \phi_y = (0,1,y)$$

La normal es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Finalmente se tiene que (2) es

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x,y)) \cdot \vec{n}\, ds = -5 \iint_D ds = -5 \cdot 4\pi = -20\pi$$

Luego, como los resultados de (1) y (2) son iguales, hemos comprobado el teorema de stokes.

21. Calcule la integral $\displaystyle\int_s \vec{F}\, d\vec{S}$ con $\vec{F}(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$, y S es la superficie que limita la región situada dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y sobre el plano $z = 0$. De alguna interpretación repecto el resultado obtenido.

Usando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_s \vec{F}\, d\vec{S} = \int\int\int_s (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = z^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \int\int\int_s (z^2+y^2+z^2)\, dV$$

en esféricas nos queda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\theta\, d\phi = 2 \cdot 2\pi \cdot (-\cos\phi)_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)_0^a = \frac{4a^5\pi}{5}$$

Interpretación

La integral calcula el flujo o lineas que atraviesan el solido por unidad de tiempo.

Si el campo dado fuera magnético, entonces el resultado correponde al flujo magnético que sale del solido, y este depende del radio de la semiesfera. *Hay más flujo magnético, si más grande es el radio.*

22. Calcule $\int_C \frac{y^2}{2}dx + zdy + xdz$, usando el teorema de stokes, donde C es la curva intersección del plano $x + z = 1$, y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, orientada en el sentido horario, mirada desde el origen.

Usando el teorema de Sokes se tiene que

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S}$$

Primero calculemos el rotor del campo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y^2}{2} & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -y)$$

La parametrización es

$$\phi(x, y) = (x, y, 1 - x), \quad D = \left\{(x, y)/x^2 + 2y^2 \leq 1\right\}$$

$$\phi_x = (1, 0, -1) \qquad \phi_y = (0, 1, 0)$$

La normal es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x, y)) \cdot \vec{n}\, ds = -\iint_D (1 + y)\, ds = -\pi$$

23. Verificar el teorema de stokes para el campo $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ sobre la supeficie $x^2 + z^2 = 16$ cortada por los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.

$$\underbrace{\int_C \vec{F} d\vec{L}}_{(1)} = \underbrace{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S}}_{(2)}$$

$\rightarrow$ Trabajemos (1)

Primero, parametrizamos las curvas que se forman C_1, C_2, C_3, C_4

$$C_1 :\ \alpha(t) = (2, t, 2\sqrt{3}) \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\alpha'(t) = (0, 1, 0) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (2\sqrt{3}, 2, t)$$

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^5 2\, dt = 10$$

$$C_2 :\ \alpha(t) = (t, 5, \sqrt{16 - t^2}) \quad 0 \leq t \leq 2\, (\leftarrow)$$

$$\alpha'(t) = (1, 0, \frac{-t}{\sqrt{16 - t^2}}) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (\sqrt{16 - t^2}, t, 5)$$

$$\int_{C_2} \vec{F} d\vec{L} = -\int_0^2 \left(\sqrt{16 - t^2} - \frac{5t}{\sqrt{16 - t^2}}\right) dt = 20 - 12\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$

$$C_3 : \alpha(t) = (0, t, 4) \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$\alpha'(t) = (0, 1, 0) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (0, 0, 1)$$

$$\int_{C_3} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^5 0 \, dt = 0$$

$$C_4 : \alpha(t) = (t, 0, \sqrt{16 - t^2}) \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\alpha'(t) = (1, 0, \frac{-t}{\sqrt{16 - t^2}}) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (\sqrt{16 - t^2}, t, 0)$$

$$\int_{C_4} \vec{F} d\vec{L} = \int_0^2 \sqrt{16 - t^2} \, dt = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$$

Finalmente, tenemos que la integral se escribe como

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{L} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{L} + \int_{C_3} \vec{F} d\vec{L} + \int_{C_4} \vec{F} d\vec{L}$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = 10 + 20 - 12\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} + 0 + \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3} = 30 - 10\sqrt{3}$$

$\rightarrow$ Ahora trabajemos con (2)

Primero calculemos el rotor del campo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \Rightarrow \vec{F}(\phi(x, y)) = (1, 1, 1)$$

La parametrización es

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{16 - x^2}), \quad D = [0, 2] \times [0, 5]$$

$$\phi_x = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}) \qquad \phi_y = (0, 1, 0)$$

La normal es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}, 0, 1)$$

Finalmente se tiene que (2) es

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \, d\vec{S} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x, y)) \cdot \vec{n} \, ds = \int_0^2 \int_0^5 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\right) dy \, dx = 30 - 10\sqrt{3}$$

Luego, como los resultados de (1) y (2) son iguales, hemos comprobado el teorema de stokes para el campo dado.

24. Sea S la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda bajo el plano $z = 2x$ y α la curva de intersección de ambos. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ a lo largo de α:

   a) Usando el teorema de Stokes (normal con componente $z > 0$). Según stokes se cumple que

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S}$$

   $\rightarrow$ Calculemos el rotor del campo

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1) \Rightarrow \vec{F}(\phi(x, y)) = (1, 1, 1)$$

   La parametrización es

$$\phi(x, y) = (x, y, 2x), \quad D = \left\{(x, y)/(x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

$$\phi_x = (1, 0, 2) \qquad \phi_y = (0, 1, 0)$$

   La normal es

$$\vec{n} = \phi_x \times \phi_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1)$$

   Finalmente se tiene que $\displaystyle\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S}$ es

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})(\phi(x, y)) \cdot \vec{n}\, ds = -\iint_{A(S)} dA = -\pi$$

   b) Directamente (integral de línea con orientación apropiada)

   $\rightarrow$ Parametrizamos la curva C

$$C: \; \alpha(t) = (\cos t + 1, \operatorname{sen} t, 2(\cos t + 1)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2 \operatorname{sen} t) \qquad \vec{F}(\alpha(t)) = (2(\cos t + 1), \cos t + 1, \operatorname{sen} t)$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{L} = \int_0^{2\pi} (1 - 3 \operatorname{sen}^2 t)\, dt = -\pi$$

25. Calcular flujo saliente del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xz, xy, yz)$ a través de la superficie cerrada formada por la parte del cilindro (con sus dos tapas) $x^2 + y^2 = 4$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z + y = 2$.

   Usaremos Gauss para calcular el flujo

$$\text{FLUJO} = \int_S \vec{F} d\vec{S} = \int\int\int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV \qquad \text{pero } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = z + x + y$$

$$\Rightarrow \int\int\int_{V(S)} (z + x + y)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_0^{2 - r \operatorname{sen} \theta} (r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta + z) r\, dz\, dr\, d\theta = 6\pi$$

26. Calcular el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está compredida entre los planos $z = 1$ y $z = 0$.

La intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ es el punto $(0, 0)$ y con el plano $z = 1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La región limitada por la proyección de dicha circunferencia sobre el plano XY es

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Podemos considerar la siguiente parametrización

$$\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad (x, y) \in D$$

De esta manera $S = \phi(D)$, siendo S la superficie descrita en el enunciado. Su producto vectorial fundamental es

$$\vec{n}(x, y) = (-2x, -2y, 1), \qquad \text{y} \ \ \|\vec{n}(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

El área solicitada será

$$A(S) = \iint_D \|\vec{n}(x, y)\| \ dx\, dy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy$$

Usando coordenadas polares la integral nos queda de la siguiente forma

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2 + 1}\, d\theta\, dr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

27. Parametrice la superficie plana cuyo borde es la curva $C : \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2} \\ z = y + 1 \end{array} \right.$

La curva C es la intersección del cono $x^2 + y^2 = z^2/2$ con el plano $z = y + 1$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(y + 1)^2 = \frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$$

Es una elipse en el plano $z = y + 1$. Su proyección sobre el plano XY es la curva α de ecuación $x^2 + \dfrac{(y - 1)^2}{2} = 1$ (una elipse también). Sea S la superficie del plano $z = y + 1$ limitada por C; se puede parametrizar como

$$\phi(x, y) = (x, y, y + 1), \quad (x, y) \in D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + \frac{(y - 1)^2}{2} \leq 1\right\}$$

28. Calcule $\displaystyle\int_S x^2 z\, dS$, siendo S la cara externa de $x^2 + y^2 = a^2$ limitada por $z = 2$ y $z = -2$.

La superficie es un cilindro circular recto. Puesto que $x^2 + y^2 = a^2$ y z está entre -2 y 2 consideremos la siguiente parametrización

$$\phi(u, v) = (a \cos u, a \operatorname{sen} v, v) \quad D = [0, 2\pi] \times [-2, 2]$$

Calculemos la normal de la superficie

$$\phi_u = (-a \operatorname{sen} u, a\cos u, 0) \quad \phi_v = (0,0,1)$$

$$\vec{n} = \phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \operatorname{sen} u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos u, a \operatorname{sen} u, 0) \rightarrow \|\vec{n}\| = a$$

$$\int_s x^2 z\, dS = \iint_D a^3 v \cos^2 u\, du\, dv = a^3 \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{2} v\cos^2 u\, dv\, du = 0$$

29. Calcule el área de la porción de superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ situada por encima del plano $z=0$ y limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2ax$.

Hemos de parametrizar la superficie de la cual hay que hallar el área, esto es, la hoja superior (pues $z \geq 0$) del cono $x^2+y^2=z^2$. Como S es la gráfica de la función $z=\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$ sobre la región D (que queda definida por la intersección del cono y la esfera)

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2+z^2=2ax \end{array}\right\} \Rightarrow 2(x^2+y^2)=2ax \rightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

$$D=\left\{(x,y)/\,(x-\frac{a}{2})^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4}\right\}$$

entonces $S=\phi(D)$ siendo ϕ la parametrización

$$\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2}), \quad \forall\,(x,y)\in D$$

La normal de la superficie es

$$\vec{n}=(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1)=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right) \Rightarrow \|\vec{n}\|=\sqrt{2}$$

y el área solicitada vale

$$A(S)=\iint_D \|\vec{n}\|\; dx\,dy=\iint_D \sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}A(D)=\sqrt{2}\pi\frac{a^2}{4}$$

30. Dado el recinto limitado por los planos $z=y$, $z=0$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$. Calcule el área de la porción de superficie cilíndrica comprendida entre los planos.

En el cilindro $x^2+y^2=a^2$ podemos tomar la parametrización

$$\phi(x,y)=(a\cos u, a\operatorname{sen} u, v)$$

con $(u,v)\in D$, siendo

$$D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\,0\leq u\leq\pi,\ 0\leq v\leq a\operatorname{sen} u\right\}$$

Como ya sabemos la normal es $\vec{n}=(a\cos u, a\operatorname{sen} u, 0)$, con lo cual $\|\vec{n}\|=a$.

De esta manera $S=\phi(D)$ es la mitad de la superficie que se describe en el enunciado porque sólo consideramos la porción del cilindro con $z\geq 0$. El área se S es

$$A(S)=\iint_D a\,du\,dv=\int_0^{\pi}\int_0^{a\operatorname{sen} u} a\,dv\,du=2a^2$$

Por tanto, el área que nos piden, que es doble que la de S, vale $4a^2$.

31. Calcule usando el teorema de Stokes, la integral $\int_C (y-1)\,dx + z^2\,dy + y\,dz$, donde C es la intersección de las superficies $x^2+y^2 = z^2/2$ y $z = y+1$.

Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y-1, z^2, y)$, que es un campo vectorial de clase ζ^1. Por el teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F}\,dL = \int_S rotF\,dS$$

siendo $S = \phi(D)$ una superficie simple y regular cuyo borde C es la imagen $\phi(\gamma*)$ de una curva γ de Jordan ζ^1 a trozos orientada positivamente.
Sea S la superficie del plano $z = y+1$ limitada por C; se puede parametrizar como (vease problema 27)

$$\phi(x,y) = (x,y,y+1), \quad (x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1\right\}$$

$$rotF(x,y,z) = (1-2z, 0, -1); \quad \vec{n} = (0,-1-1)$$

Así, la integral de línea que se pide vale

$$\int_C \vec{F}\,dL = \int_S rotF\,dS = \iint_D (1-2z,0,-1)(0,-1-1)\,dx\,dy = -\iint_D = -\sqrt{2}\pi$$

32. Halle el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,2z)$, a través de la superficie cerrada S que limita el sólido

$$V = \left\{(x,y,z)/\, 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\right\}$$

a) Directamente

La superficie cerrada S que limita el sólido V está compuesta por dos superficies: una porción del paraboloide S_1, y la tapa inferior S_2.
Por tanto, hay que calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de cada una de ellas hacia el exterior de la superficie cerrada.

1) Parametrizamos S_1 de ecuación $z = 4-2x^2-2y^2$ (paraboloide):

$$r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \quad r_1(x,y) = (x,y,4-2x^2-2y^2),$$

Donde las variables x e y varían en la proyección del sólido en el plano XY, que calculamos a partir de la intersección del paraboloide con el plano $z = 0$.

$$S_1 = r_1(D), \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2+y^2 \leq 2\right\}$$

El vector normal

$$\vec{n_1} = \frac{\partial r_1}{\partial x} \times \frac{\partial r_1}{\partial y} = (4x, 4y, 1)$$

Tiene tercera componente positiva y por lo tanto su sentido es hacia el exterior de S. El flujo de $\vec{F}$ a través de S_1 es

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \vec{F}\vec{n}\,dS &= \iint_D \vec{F}(r_1)\cdot\vec{n_1}\,dx\,dy \\
&= \iint_D (x,y,8-4x^2-4y^2)(4x,4y,1)\,dx\,dy \\
&= \iint_D 8\,dx\,dy = 16\pi
\end{aligned}$$

2) Parametrizamos S_2, tapa inferior de ecuación $z = 0$,

$$r_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \quad r_2(x, y) = (x, y, 0), \quad S_2 = r_2(D).$$

El vector normal es

$$\vec{n_2} = (0, 0, 1)$$

está dirigido hacia el interior de la superficie S. Calculamos,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \vec{F}\vec{n}\, dS &= \iint_D \vec{F}(r_2) \cdot -\vec{n_2}\, dx\, dy \\ &= \iint_D (x, y, 0)(0, 0, -1)\, dx\, dy = 0\end{aligned}$$

Por tanto, el flujo de $\vec{F}$ hacia el exterior de la superficie cerrada S es

$$\int_S \vec{F}\vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{F}\vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{F}\vec{n} dS = 16\pi$$

$b)$ Usando el teorema de Gauss

El flujo de $\vec{F}$, utilizando el teorema de Gauss, puede calcularse como la integral triple en V de la divergencia de $\vec{F}$.

$$div\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, 2z) = 1 + 1 + 2 = 4$$

Entonces,

$$\int_S \vec{F}\vec{n}\, dS = \int\int\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV \quad (\textbf{Gauss})$$

$$\int\int\int_V 4\, dx\, dy\, dz = 4 \int\int\int_0^{4-2x^2-2y^2} dz\, dx\, dy = 4 \int\int (4 - 2x^2 - 2y^2) dx\, dy$$

Para hacer esta integral doble en el circulo D paramos a coordenadas polares con

$$0 \leq r \leq sqrt2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

por tanto,

$$\int_S \vec{F}\vec{n}\, dS = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (4 - 2r^2) r\, dr\, d\theta = 16\pi$$

Referencias

[1] Valenzuela Ph, Cálculo II y III

[2] Larson, Cálculo, Volumen II

[3] Apostol, Tom. Calculus. Vol. II. Editorial Reverté. Bogotá. 1988.

[4] Bradley, G. Cálculo de varias variable. Volumen II. Editorial Prentice-Hall. España, 1998.

[5] Demidovich, B. Problemas de análisis matemático. Editorial MIR. Moscú. 1977.