# Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática y Estadística


**TEMUCO**, Marzo 1 de 2011

**Guia Integrales de linea y superficie**


**Profesor: Abdón Catalán**


1. Calcule la siguientes integrales de linea a lo largo de la curva indicada:
   (a) $\int_C xds$, $C : \alpha(t) = (t^3, t), 0 \leq t \leq 1$
   (b) $\int_C xy^4ds$, $C$ es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 16, x \geq 0$
   (c) $\int_C (x - 2y^2)ds$, $C$ es el arco de parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$
   (d) $\int_C xydx + (x - y)dy$, $C$ consite de los segmentos de recta de (0,0) a (2,0) y de (2,0) a (3,2).
   (e) $\int_C xyzds$, $C : \alpha(t) = (2t, , 3\sin t, 3cost), 0 \leq t \leq \pi/2$
   (f) $\int_C xy^2zds$, $C$ es elsegmento de recta de (1,0,1) a (0,3,6).
   (g) $\int_C x^3y^2zds$, $C : \alpha(t) = (2t, t^2, t^2), 0 \leq t \leq 1$.
   (h) $\int_C z^2dx - zdy + 2ydz$, $C$ consiste de los segmentos de recta de (0,0,0) a (0,1,1) de (0,1,1) a (1,2,3) y de (1,2,3) a (1,2,4).

2. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ para:
   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ y $C$ es la curva que une los puntos (0,0,0) a (1,1,1) a través de $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$
   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ y $C$ es la poligonal que une los puntos (0,0,0) a (1,1,0) y de (1,1,0) a (1,1,1).
   (c) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ y $C$ es el arco de circunferencia $\alpha(t) = (t, \sqrt{4 - t^2})$ uniendo los puntos de (-2,0) a (2,0).
   (d) $\vec{F}(x, y) = 2(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ y $C$ es la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, recorrida una vez en sentido anti-horario.

3. Calcule
   (a) $\int_C xdx + (y + x)dy + zdz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x + 2y - 1$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(b) $\int_C (2y+1)dx + zdy + xdz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $x^2+4y^2=1$ y $x^2+y^2=1$, con $y \geq 0$, $z \geq 0$, recorrida una vez del punto (1,0,0) al punto (-1,0,0).

(c) $\int_C ydx + zdy + xdz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $x+y=2$ y $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(d) $\int_C xdx + (y+x)dy + zdz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $z=xy$ y $x^2+y^2=1$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(e) $\int_C x^2dx + xdy + zdz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $z=\frac{x^2}{9}$ y $z=1-\frac{y^2}{4}$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(f) $\int_C y^2dx + 3zdy$, donde $C$ es la intersección de las superficies $z=x^2+y^2$ y $z=2x+4y$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(g) $\int_C zdy - xdz$, donde $C$ es la intersección del elipsoide $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=\frac{4}{3}$ con el plano $x+z=2$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ sea recorrida una vez en sentido horario.

(h) $\int_C 2xdx + (x^2 - \frac{y^2}{2})dz$, donde $C$ es el arco circular dado por $x=0$, $y^2+z^2=4$, de (0,2,0) a (0,0,2).

(i) $\int_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, donde $C$ es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, recorrida una vez en sentido horario.

(j) $\int_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$, donde $C$ es la frontera de la región limitada por $x=0$, $y=1$ e $y=x^2$ recorrida una vez en sentido horario.

4. (a) Determine la masa de un alambre cuya forma es la de la curva $\alpha(t)=(2t,t^2,t^2), 0 \leq t \leq 1$, y la densidad de masa en cada punto es $\delta(x,y,z)=x$

   (b) Un cable delgado tiene la forma de un semicírculo $x^2+y^2=4, x \geq 0$. Si la densidad es $\delta(x,y)=k$, determine la masa y el centro de masa.

5. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

   $\vec{F}(x,y)=x\vec{i}+(y+2)\vec{j}$ al mover una partícula a lo largo de la cicloide $\vec{\alpha}(t)=(t-\sin t)\vec{i}+(1-cost)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

6. Usando el Teorema de Green, calcule las siguientes integrales de linea:

   (a) $\oint_C x^2ydx + xy^3dy$, donde $C$ es el cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1), orientado positivamente.

   (b) $\oint_C (x+2y)dx + (x-2y)dy$, donde $C$ consiste del arco de parábola $y=x^2$ de (0,0) a (1,1) y del segmento de recta de (1,1) a (0,0), orientado positivamente.

(c) $\oint_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + cosy^2)dy$, donde $C$ es la frontera de la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$, orientada positivamente.

(d) $\oint_C x^2dx + y^2dy$, donde C es la curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada positivamente.

(e) $\oint_C xydx + 2x^2dy$, donde $C$ consiste del segmento de recta uniendo (-2,0) a (2,0) y de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ orientada positivamente.

(f) $\oint_C 2xydx + x^2dy$, donde C es la cardioide $r = 1 + cos\theta$, orientada positivamente.

(g) $\oint_C (xy + e^{x^2})dx + (x^2 - \ln(1 + y)dy$, donde $C$ consiste del segmento de recta de (0,0) a $(\pi, 0)$ y del arco de curva $y = \sin x$, orientada positivamente.

(h) $\oint_C (y^2 - x^2dx + xy^2dy$, donde $C$ consiste del arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ de (2,0) a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y de los segmentos de recta de $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a (0,0) y de (0,0) a (2,0).

7. (a) Sea $D$ una región de $\mathbb{R}^2$con $D$ y $C = Fr(D)$ satisfaciendo el Teorema de Green. Pruebe que el área de $D$ es $A(D) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx$

   (b) Calcule el área de las siguientes regiones:

      i. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

      ii. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$

   (c) Calcule el área de la región acotada por el hipocicloide $\vec{\alpha}(t) = cos^3t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j},\ 0 \leq t2\pi$

8. Area de un polígono

   (a) Si $C$ es un segmento de recta que vá del punto $(x_1, y_1)$ al punto $(x_2, y_2)$, pruebe que $\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1$

   (b) Ordenado en sentido antihorario, los vértices de un polígono son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_N, y_N)$. Pruebe que su área es:

   $A = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots (x_{N-1}y_N - x_Ny_{n-1}) + (x_Ny_1 - x_1y_N)\right]$

   (c) Deteremine el área del pentágono de vértices (0,0),(2,1),(1,3),(0,2) y (-1,1).

9. Calcule

   (a) $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, donde $C$ es la frontera de la región acotada por las curvas $y^2 = 2(x+2)$ y $x = 0$, orientada en sentido horario.

   (b) $\int_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, donde C es la curva $y = x^2 + 1,\ -1 \leq x \leq 2$ recorrida del punto (-1,2) a (2,5).

   (c) $\int_C \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, donde $C$ es circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, orientada en sentido horario.

(d) $\int_C \frac{x^2ydx - x^3dy}{(x^2+y^2)^2}$, donde $C$ es la frontera de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, orientada en sentido horario.

10. Verifique que la integral $\int_C 2x \sin y dx + (x^2 cos y - 3y^2)dy$, donde $C$ es una curva que une los puntos (-1,0) a (5,1), es independiente del camino y clacule su valor.

11. Sea $C$ una curva plana cerrada simple y suave por partes, recorrida una vez en sentido horario. Dé todos los valores posibles para:

    (a) $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$

    (b) $\int_C \frac{-ydx + xdy}{4x^2+9y^2}$

12. Determine todos los valores posibles de la integral $\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$ sobre un camino que no pase por el origen

13. Considere el campo $\vec{F}(x,y) = cxy\vec{i} + x^6y^2\vec{j},\ c > 0$, actuando sobre una partícula que se mueve del punto (0,0) hasta la recta $x = 1$ sobre la curva $C$, gráfico de la función $y = ax^b$, con $a > 0$ y $b > 0$. Determine un valor de $c$ en términos de $a$ y $b$ para que el trabajo realizado por $\vec{F}$ sea nulo.

14. Un campo de vectores $\vec{F}$ se llama radial ( o central) si existe una función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x,y) = g(|\vec{r}|)\vec{r}$, donde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponga que $g$ es de clase $C^1$. Pruebe que $\vec{F}$ es conservativo.

15. En cada caso, determine si $\vec{F}$ es o no un campo conservativo en el dominio indicado $D$. En caso afirmativo, determine un potencial para $\vec{F}$.

    (a) $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$

    (b) $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2$

    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3y - 3xy))\vec{j} + (4z^2y^2 + 2x^3z)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} + (y+z))\vec{j} + (x-y)\vec{k}$, $D = \mathbb{R}^3$

    (e) $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

    (f) $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$

    (g) $\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

16. Pruebe que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + xy\vec{j}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es nulo a lo largo de cualquier circunferencia con centro en el eje $x$. ¿Se puede concluir que $\vec{F}$ es conservativo?

17. Calcule las integrales de linea

(a) $\int_C (-2xy + x^2)dx + \sqrt{8 - y^7}dy$, donde $C$ es el gráfico de $y = c0sx$, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, recorrido en el sentido de $x$ creciente.

(b) $\int_C \frac{2xy^2}{x^2+1}dx + (2y\ln(x^2+1))dy$, donde $C$ es el arco de la elipse $4x^2 + y^2 = 1$ del punto (0,1) al punto $(\frac{1}{2}, 0)$ recorrido en sentido antihorario.

(c) $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right)dy$, donde $C$ es la frontera de la región del plano determinada por las desigualdades $y \geq x - 1$ e $y^2 \leq x + 1$ orientada en sentido antihorario.

(d) $\int_C (2xy + \sin y)dx + xcosydy + z^2dz$, donde $C$ es la intersección de las superficies $3x^+y^2 + z^2 = 1$ y $y = x$, en el primer octante y orientada de forma que su proyección en el plano $yz$ sea recorrida en sentido horario.

(e) $\int_C \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy$, donde $C$ es la circunferencia de centro (0,1) y radio 3, orientada en sentido horario. ¿Es el campo conservativo?. Justifique su respuesta

18. Determine una representación paramétrica de cada una de las superficies y calcule su área:

(a) $S$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior al cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) $S$ es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ comprendida entre los planos $y = -1$ e $y = 3$.

(c) $S$ es la parte del,plano $z = 2x + 3y$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

(d) $S$ es la parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

(e) $S$ es la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

(f) $S$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en interior del cilindro $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

(g) $S$ es el toro obtenido por la rotación de la circunferencia en el plano $xz$ con centro en $(b, 0, 0)$ y readio $a < b$ en torno al eje $z$.

(h) $S$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.

19. Sean $0 < a < b$ y $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva con derivada continua. Determine ecuaciones paramétricas de las superficies generadas por la rotación de la curva $y = f(x)$ en torno al: (a) eje $x$ ; (b) eje $y$ . Calcule el área de la superficie.

20. Calcule las siguientes integrales de superficies:

(a) $\iint_S ydS$, donde $S$ es al superficie dada por $z = x + y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

(b) $\iint_S x^2dS$, donde $S$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(c) $\iint_S ydS$, donde $S$ es la parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está contenido en el primer octante.

(d) $\iint_S xzdS$, donde $S$ es el triángulo de vértices (1,0,0), (1,1,1) y (0,0,2).

(e) $\iint_S (x^2+y^2)dS$, donde $S$ es la parte del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ contenida en el semiplano $x \geq 0$.

(f) $\iint_S yzdS$, donde $S$ es la parte del plano $z = y + 3$ acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(g) $\iint_S xydS$, donde $S$ es la fdrontera de la región acotada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y por los planos $y = 0$ y $x + y = 2$.

(h) $\iint_S z(x^2+y^2)dS$, donde $S$ es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

(i) $\iint_S xyzdS$, donde $S$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(j) $\iint_S \sqrt{\dfrac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}dS$, donde $S$ es la parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ con $1 \leq z \leq 3$.

(k) $\iint_S (x+1)dS$, donde $S$ es la parte de $z = \sqrt{x^2+y^2}$ acotada por $x^2 + y^2 = 2y$.

21. Calcule la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ para cada uno de los campos vectoriales $\vec{F}$ y superficies orientadas $S$. En otras palabras, calcule el flujo de $\vec{F}$ através de $S$. Cuando $S$ es una superficie cerrada admita que está orientada por la normal exterior.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = -x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ y $S$ es la parte del parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, con $z \geq 0$, orientada de modo que la normal en el punto $(0,0,9)$ es $\vec{k}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ y $S$ es la parte del plano $3x + 2y + z = 6$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que su vector normal es $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$ y $S$ es la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y $S$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z\vec{k}$ y $S$ es el hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que su vector normal en el punto $(0,0,4)$ es $\vec{k}$.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - z\vec{k}$ y $S$ consiste del parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ y el disco $x^2 + z^2 \leq 1, y = 1$.

(g) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ y $S$ es el cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

(h) $\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + z\vec{k}$ y $S$ es el rectángulo de vértices (1,0,1), (1,0,0), (0,1,0) y (0,1,1), orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$.

(i) $\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i}$ y $S$ es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior al cilíndro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que su vector normal en el punto $(2,0,0)$ es $\vec{i}$.

(j) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ y $S$ es la parte de la superficie $z = \sqrt{4-x}$ acotada por la superficie cilíndrica $y^2 = x$, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$.

(k) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ y $S$ es la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ acotada por el cilíndro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

22. Calcule

    (a) $\iint_S xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + x^2dx \wedge dy$, donde $S$ es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$,$z \geq 0$, orientada por la normal exterior.

    (b) $\iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, donde $S$ es la parte del plano $x + y + z = 2$ en el primer octante, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{j} \geq 0$.

    (c) $\iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, donde $S$ es la parte del parabolólide $z = 4 - x^2 - y^2$ contenida en el subespacio $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.

23. Suponga que la superficie $S$ sea el gráfico de una función : $D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1$, orientada de modo que su normal unitaria $\vec{N}$ tenga tercera componente no negativa. Si $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ es uncampo vectorial sobre $S$, muestre que $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_D \left( -P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dxdy$

24. Use el Teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ en cada uno de los, sguientes casos:

    (a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ y $C$ es la frontera de la parte del plano $3x + y + z = 3$ contenida en el primer octante, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

    (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + e^{x^2})\vec{i} + (y^2 + \ln(1 + y^2))\vec{j} + (xy + \sin z^3)\vec{k}$ y $C$ es la frontera del triángulo con vértices (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,2), orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

    (c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z + \sin^{x^3})\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y + \sin(\sin z^2))\vec{k}$ y $C$ es la intersección del plano $z = x + 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = (x + cosx^3)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^100)\vec{k}$ y $C$ es la frontera de la parte del parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ contenida en el primer octante, orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

    (e) $\vec{F}(x,y,z) = (y + z)\vec{i} + (2x + (1 + y^2)20)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ y $C$ es la intersección del cilíndro $x^2 + y^2 = 2y$ con el plano $z = y$ , orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

    (f) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ y $C$ es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ con el plano $x + y + z = 0$ , orientada de modo que su proyección en el plano $xy$ es recorrida en sentido anti-horario.

25. Calcule

    (a) $\iint_S y^2z^2dy \wedge dz + xdz \wedge dx + ydx \wedge dy$, donde $S$ es la parte de la superficie $z^2 = x^2 + 2y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = y + 3$, orientada con $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

    (b) $\iint_S e^{z^2}(\ln(z + y)dy \wedge dz + (x^2 + z^2)dz \wedge dx + zdx \wedge dy$, donde $S$ es la parte del parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acotado por el plano $z = y + 4$, orientada de modo que su vector normal $\vec{N}$ satisfaga $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$.

26. Calcule $\int_C (z+y^2)dx+(y^2+1)dy+(\ln(z^2+1)+y)dz$, donde $C$ es dada por $\gamma(t)=(2cost, 2\sin t, 10-2\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

27. Sea $C$ una curva cerrada simple, cerrada y plana y sea $\vec{N}=(a,b,c)$ un vector unitario normal al plano que contiene a $C$. Muestre que el área de la región plana acotada por $C$ es dada por $^{o}frac12\int_C (bz-cy)dx+(cx-az)dy+(ay-bx)dz$ con $C$ orientada por la orientación inducida de $\vec{N}$.

28. Calcule $\iint_S dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$, donde $S$ está orientada por la normal exterior a $S$ en los siguientes casos:

    (a) $S$ es la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$

    (b) $S$ es la frontera de la región acotada por $z=4$ y $z=x^2+y^2$.

29. Sea $\vec{v}=\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$, donde $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{N}dS$, donde $\vec{N}$ es la normal unitaria exterior a $S$ en los siguientes casos:

    (a) $S$ es la esfera de radio $a>0$ con centro en el origen.

    (b) $S$ es una superficie suave cerrada por partes tal que que el origen no pertenece a $S$ ni a su interior.

    (c) $S$ es una superficie suave cerrada por partes que contiene al origen en su interior.

30. Sea $S$ una superficie cerrada suave por partes y orientada por la normal exterior $\vec{N}$. Verifique las siguientes igualdades:

    (a) Volumen de $S=\dfrac{2}{3}\iint_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$.

    (b) $\iint_S rot\vec{v}\cdot\vec{N}dS=0$, para cualquier campo $\vec{v}$ de clase $C^1$ en una región que contiene a $S$.

31. Suponga que $D\subset\mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto y que las funciones $u,v\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ son de clase $C^2$. Suponga que $S\subset D$ es una superficie cerrada suave por parte tal que su interior está contenido en $D$, orientada por la normal exterior $\vec{N}$. Sea $R$ la región acotada por $S$. Muestre que:

    (a) $\iint_S \nabla u\cdot\vec{N}dS=\iiint_R \Delta u dxdydz$

    (b) $\iint_S (u\nabla v)\cdot\vec{N}dS=\iiint_R (u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)dxdydz$

    (c) $\iint_S (u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{N}dS=\iiint_R (u\Delta v-v\Delta u)dxdydz$