Sistemas de ecuaciones

Métodos Numéricos

Prof. Juan Pablo Concha y Eduardo Uribe

Conferencia 10

Conferencia 10

1. Representación
2. Operaciones elementales
3. Existencia y unicidad
4. Algoritmo de Eliminación de Gauss
5. Pivoteo parcial
6. Pivote parcial escalado

Ecuaciones lineales

Sistema cuadrado

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Representación compacta

Matriz ampliada

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

donde $a_{i,n+1} = b_i$.

Ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$[A] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Operaciones Elementales

- Multiplicación de una fila por coeficiente no cero $((\lambda E_i) \to (E_i)$, con $\lambda \neq 0)$
- Sumar dos filas multiplicando una de ellas por un coeficiente no cero $((E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$, con $\lambda \neq 0)$
- Intercambiar dos filas $((E_i) \leftrightarrow (E_j))$

Multiplicación de una fila por coeficiente no cero

Notación: Para $\lambda \neq 0$; $(\lambda E_i) \to (E_i)$

La ecuación E_i se multiplica por el número distinto de cero λ y el resultado sustituye a E_i.

Ejemplo: $(2E_1) \to (E_1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Sumar dos filas multiplicando una de ellas por un coeficiente no cero

Notación: Para $\lambda \neq 0$; $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$

La ecuación E_j se multiplica por el número distinto de cero λ y se suma a la fila E_i. El resultado sustituye a E_i.

Ejemplo: $(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Intercambiar dos filas

Notación: $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

La ecuación E_i se intercambia con la ecuación E_j.

Ejemplo: $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Teorema de Rouche-Frobenius

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $Ax = b$ se tiene que:

$$Ax = b \text{ es soluble si y sólo si } rg(A) = rg(A|b) = p.$$

Además:

- $p = n$ si y sólo si el sistema tiene una única solución.
- $p < n$ si y sólo si el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z & = & -2 \\ -x + y + z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 8 \\ 2x - 2y & = & 6 \end{cases}$$

Calculemos el rango de A

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$|2| = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Con lo cual el rango de A es 3.

Ahora calculemos el rango de $[A]$

Sea $[A] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right)$, entonces:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Con lo cual el rango de $[A]$ es 3 y el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 2

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x + 2y + z & = & -1 \\ 3x + \alpha y + z & = & 2 \\ 4x + 2y + z & = & -1 \end{cases}$$

Estudie los valores de α para los cuales el sistema:

- tenga solución única,
- tenga infinitas soluciones,
- no tenga solución.

Solución

En el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x + 2y + z & = & -1 \\ 3x + \alpha y + z & = & 2 \\ 4x + 2y + z & = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aplicaremos el teorema de Rouche-Frobenius:

$$\det(A) = \alpha^2 + 6 + 8 - 4\alpha - 2\alpha - 6 = \alpha^2 - 6\alpha + 8,$$
$$\det(A) = (\alpha - 4)(\alpha - 2).$$

Entonces, $\det(A) = 0$ si y sólo si $\alpha = 2, 4$. Por tanto:
- El sistema tiene solución única para $\alpha \neq 2, 4$ porque:

$$rank(A) = rank\,(A \mid b) = 3.$$

continuación...

- Si $\alpha = 2$, $\det(A) = 0$. $rank(A) = 2$, porque:

$$M\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Por otro lado $rank\,(A \mid b) = 3$ porque:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 16 + 8 - 8 + 6 = 12 \neq 0,$$

y por tanto:
- Para $\alpha = 2$ no existe solución.

continuación...

- Si $\alpha = 4$, $\det(A) = 0$. $rank(A) = 2$, porque:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10 \neq 0.$$

Por otro lado $rank\,(A \mid b) = 2$, porque todos los determinantes de orden 3, que pueden formarse con la columna b adicional, son nulos:

- $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

y por tanto:
Para $\alpha = 4$, existen infinitas soluciones pues:

$$rank\,(A \mid b) = rank\,(A) = 2 < 3 = n.$$

Idea General del Algoritmo de Gauss

1. Mediante operaciones elementales convertir la matriz aumentada en una matriz triangular superior
2. Calcular y sustituir las variables hacia atrás

$(E_2 - 2E_1) \rightarrow E_2$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$(E_3 - E_1) \rightarrow E_3$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$(E_4 - E_1) \to E_4$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

$(E_2) \leftrightarrow (E_3)$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

$(E_4 + 2E_3) \leftrightarrow (E_4)$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Fin de la eliminación

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Sustitución hacia atrás

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 &= \frac{-4-(-1)x_4}{-1} = 2 \\ x_2 &= \frac{6-x_4-(-1)x_3}{2} = 3 \\ x_1 &= \frac{-8-(-1)x_4-2x_3-(-1)x_2}{1} = -7 \end{aligned}$$

Algoritmo de eliminación de Gauss

Pseudocódigo

DATOS: $A = [aij], 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n+1$: Matriz ampliada
RESULT: Solución $x_1, \ldots, x_n$, o reporte de no existencia única

PASO 1: Para $i = 1 : n-1$ hacer PASOS 2-4 (Eliminación)
PASO 2: Si $a_{ki} = 0, \forall k \geq i$, STOP("No hay solución única")
PASO 3: Si $a_{ii} = 0$ hacer $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$, con $p = \inf\{p \geq i \wedge a_{pi} \neq 0\}$
PASO 4: Para $j = i+1 : n$ hacer $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$ con $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$

PASO 5: Si $a_{nn} = 0$, STOP("No hay solución única")

PASO 6: Tomar $x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$ (Sustitución hacia atrás)
PASO 7: Para $i = n-1 : 1$ hacer $x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$

PASO 8: STOP$(x_1, \ldots, x_n)$

Casos sin solución única

$(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

No hay solución única, pero si existe solución del sistema!

$(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

No hay solución única, ni tampoco el sistema es soluble!

Casos sin solución única

$(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, $(E_3 + E_2) \to (E_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

No hay solución única, pero si existe solución del sistema!

$(E_2 - 2E_1) \to (E_2)$, $(E_3 - E_1) \to (E_3)$, $(E_3 + E_2) \to (E_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

No hay solución única, ni tampoco el sistema es soluble!

Relaciones básicas

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier matriz cuadrada A:

1. El sistema homogeneo $Ax = 0$ tiene una única solución $x = 0$
2. $det(A) \neq 0$
3. La matriz A tiene una inversa A^{-1}.
4. El sistema $Ax = b$ posee una única solución $x = A^{-1}b$ para cualquier vector b.
5. El algoritmo de eliminación de Gauss puede ejecutarse hasta el final para cualquier vector b.

Cantidad de Operaciones

Resumen

	Eliminación	Sustitución hacia atrás	Total
M/D	$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$	$\frac{n^2-n}{2}$	$O(n^3)$
S/R	$\frac{n^3-n}{3}$	$\frac{n^2+n}{2}$	$O(n^3)$
Total	$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$

Propagación de errores

Eliminación con redondeo a cuatro cifras

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

Solución exacta: $\bar{x} = (10, 1)$; Pivote: $a_{11} = 0.003$

$$m_{21} = fl(\frac{5.291}{0.003}) = fl(1763.66..) = 1764$$

$$a_{22} - m_{21}a_{12} = fl(-6.13 - fl(1764 \cdot 59.14))$$
$$= fl(-6.13 - fl(104322.96)) = fl(-6.13 - 104300) = -104300$$

$$a_{23} - m_{21}a_{13} = fl(46.78 - fl(1764 \cdot 59.17))$$
$$= fl(46.78 - fl(104375.88)) = fl(46.78 - 104400) = -104400$$

Propagación de errores

Fin de la Eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

Sustitución hacia atrás ($\bar{x} = (10, 1)$)

$$\hat{x}_2 = fl(\frac{-104400}{-104300}) = fl(1.00095..) = \mathbf{1.001}$$

$$\hat{x}_1 = fl(\frac{fl(59.17 - fl(59.14 \cdot 1.001))}{0.003}) = fl(\frac{fl(59.17 - fl(59.1991))}{0.003})$$

$$fl(\frac{fl(59.17 - 59.2)}{0.003}) = fl(\frac{-0.03}{0.003}) = -\mathbf{10}$$

Algoritmo de Eliminación de Gauss con pivoteo parcial

Idea

Tomar como pivote en cada iteración de la eliminación el mayor valor posible de la columna.

Pseudocódigo

DATOS: $A = [aij], 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq n+1$: Matriz ampliada
RESULT: Solución $x_1, \ldots, x_n$, o reporte de no existencia única
PASO 1: Para $i = 1 : n-1$ hacer PASOS 2-4 (Eliminación)
PASO 2: Si $a_{ki} = 0, \forall k \geq i$, STOP("No hay solución única")

PASO 3: **Hacer** $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$**, con** $\mathbf{p} = \inf\{\mathbf{p} |\ |\mathbf{a_{pi}}| \geq |\mathbf{a_{ki}}|, \forall \mathbf{k} \geq \mathbf{i}\}$

PASO 4: Para $j = i+1 : n$ hacer $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$ con $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$
PASO 5: Si $a_{nn} = 0$, STOP("No hay solución única")
PASO 6: Tomar $x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$ (Sustitución hacia atrás)
PASO 7: Para $i = n-1 : 1$ hacer $x_i = (a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/(a_{ii})$
PASO 8: STOP$(x_1, \ldots, x_n)$

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial

Ejemplo anterior pero con pivote: $a_{11} = 5.291$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = fl(\frac{0.003}{5.291}) = fl(0.00056700056..) = 0.000567$$

$$a_{22} - m_{21}a_{12} = fl(59.14 + fl(5.67 \cdot 10^{-4} \cdot 6.13))$$
$$= fl(59.14 + fl(0.00347571)) = fl(59.14 + 0.003476) = \mathbf{59.14}$$

$$a_{23} - m_{21}a_{13} = fl(59.17 - fl(0.000567 \cdot 46.78))$$
$$= fl(59.17 - fl(0.0265242)) = fl(59.14348) = \mathbf{59.14}$$

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial

Fin de la Eliminación

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right]$$

Sustitución hacia atrás ($\bar{x} = (10, 1)$)

$$\hat{x}_2 = fl(\frac{59.14}{59.14}) = \mathbf{1}$$

$$\hat{x}_1 = fl(\frac{fl(46.78 + fl(6.13 \cdot 1))}{5.291}) = fl(\frac{fl(46.78 + 6.13)}{5.291})$$

$$fl(\frac{fl(52.91)}{5.291}) = fl(\frac{52.91}{5.291}) = \mathbf{10}$$

Eliminación con pivoteo parcial escalado (Motivación)

Variante del ejemplo anterior $((1000 \cdot E_1) \to (E_1))$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = fl(\frac{5.291}{30}) = fl(0.17636..) = 0.1764$$

$$a_{22} - m_{21}a_{12} = fl(-6.13 - fl(0.1764 \cdot 591400)) = -104300$$

$$a_{23} - m_{21}a_{13} = fl(46.78 - fl(0.1764 \cdot 591700)) = -104400$$

Solución: $\hat{x}_2 = \mathbf{1.001}; \quad \hat{x}_1 = -\mathbf{10}.$
Fuente del Problema: El error de 0.001 se amplifica con el cociente

$$\frac{591400}{30} = \frac{59.14}{0.003} = 19713.3 \approx 20000$$

Algoritmo de Eliminación con pivoteo parcial escalado

Idea

Al selecccionar el pivote en el Algoritmo de Eliminación con pivoteo parcial escalar previamente los coeficientes con respecto al valor mayor de la fila (inicial) correspondiente.

Pseudocódigo

PASO 1: **Para** $i = 1 : n$ **definir** $s_i = \max\{|a_{ij}|, j = 1..n\}$

PASO 2: Para $i = 1 : n - 1$ hacer PASOS 3-5 (Eliminación)
PASO 3: Si $a_{ki} = 0, \forall k \geq i$, STOP("No hay solución única")

PASO 4: **Hacer** $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$**,** $s_p \leftrightarrow s_i$ **con**
$\mathbf{p} = \inf\{\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{a_{pi}}|}{\mathbf{s_p}} \geq \frac{|\mathbf{a_{ki}}|}{\mathbf{s_k}}, \forall \mathbf{k} \geq \mathbf{i}\}$

PASO 5: Para $j = i + 1 : n$ hacer $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$ con $m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$
PASO 6-9: Como pasos 5-8 de Algoritmo de Gauss

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado

Ejemplo anterior

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 30 & 591400 & 591700 \end{array}\right]$$

$$s_1 = \max\{|30|, |591400|\} = 591400$$
$$s_2 = \max\{|5.291|, |-6.13|\} = 6.13$$

Calculando p

$$\max\{\frac{30}{591400}, \frac{5.291}{6.13}\} = \max\{0.00005073, 0.8631\} = \mathbf{0.8631}$$

Luego $p = 2$ por ende (PASO 4) se intercambian

$$s_1 \leftrightarrow s_2 \quad \text{y} \quad (E_2) \leftrightarrow (E_1)$$

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial escalado

Ejemplo anterior (continuación)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 30 & 591400 & 591700 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 591400 & 591400 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = fl(\frac{30}{5.291}) = fl(5.670005670..) = 5.67$$

$$a_{22} - m_{21}a_{12} = fl(591400 + fl(5.67 \cdot 6.13))$$
$$= fl(591400 + fl(34.7571)) = fl(591400 + 34.76) = \mathbf{591400}$$

$$a_{23} - m_{21}a_{13} = fl(591700 - fl(5.67 \cdot 46.78)) = fl(591700 - fl(265.2426))$$

$$= fl(591700 - 265.2) = fl(591434.8) = \mathbf{591400}$$

Solución: $\hat{x}_2 = \mathbf{1}$; $\hat{x}_1 = \mathbf{10}$.

Operaciones adicionales del pivoteo parcial escalado

PASO 1: Para $i = 1 : n$ definir $s_i = \max\{|a_{ij}|, j = 1..n\}$

$$n(n-1) \text{ Comparaciones} \equiv n(n-1) \text{ Sumas/Restas}$$

PASO 4: $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$, $s_p \leftrightarrow s_i$ con $p = \inf\{p| \frac{|a_{pi}|}{s_p} \geq \frac{|a_{ki}|}{s_k}, \forall k \geq i\}$

Para cada $i = 1 : n-1$ se requieren

$$(n-i) \text{ Comparaciones y } (n-i+1) \text{ Divisiones}$$

Totales

Comparaciones:

$$n(n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = n(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{3}{2}(n-1)n = O(n^2)$$

Divisiones:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1) = \sum_{i=2}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = O(n^2)$$

Ejercicios

- Considere el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2y + kz & = & k \\ (k-2)x + y + 3z & = & 0 \\ (k-1)y & = & (1-k) \end{array}$$

  Determine para que valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución única, infinitas soluciones y no tiene solución.

- Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - y + 2z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & \beta \\ 2x - 5y + \alpha z & = & -2 \end{array} \right.$$

  Estudie los valores de α y β para los cuales el sistema tenga solución única, infinitas soluciones y que no tenga solución.

Ejercicios

1) Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Encuentre la solución por medio de

a) Eliminación gaussiana simple
b) Eliminación gaussiana con pivoteo parcial
b) Eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalonado.

2) Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 5 \\ 3x + y - 5z &= 2 \\ x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

Resuelva el sistema usando eliminación gaussiana, con y sin pivoteo parcial, con aritmética decimal de redondeo a 3 dígitos.