UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS FISICAS

SEGUNDA PRUEBA DE FÍSICA II
ICF- 190
PRIMER SEMESTRE DE 2017
23/ MAYO / 2017

NOMBRE COMPLETO		PUNTAJE	NOTA
CARRERA	MÓDULO		

Instrucciones

1. *Esta prueba tiene **16 preguntas**. En sus respuestas es necesario que explicite los cálculos realizados.*
2. *El puntaje total de la prueba es de **24 puntos**. El puntaje asignado a cada pregunta está en la primera columna.*
3. *La nota 4.0 se obtiene con el 50% del puntaje total y el 7.0 con el 100% del puntaje.*
4. *Puede usar calculadora.*
5. *Dispone de **2 horas** para responder la prueba.*

Datos que podrían ser útiles:

Constante eléctrica (o de Coulomb) $k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \times 10^9$ N m^2/C^2

Carga elemental $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C ; Masa electrón $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$\vec{\nabla} f(r,\theta) = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} f(r,\theta) + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} f(r,\theta)$$

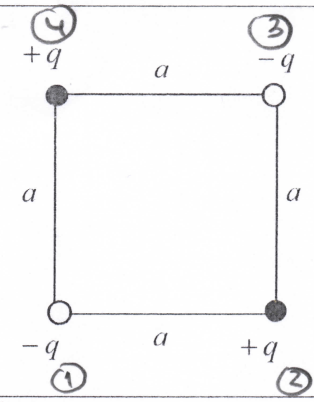
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right|$$

Información para las preguntas 1 y 2.

Un sistema está compuesto por cuatro cargas puntuales fijas dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado a como muestra la figura.



$W = U_{sist}$

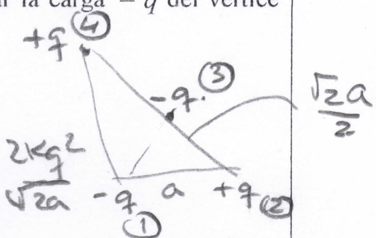
(1.5) 1.- Calcule el trabajo requerido por un agente externo para formar este sistema de cargas.

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U = -\frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a} - \frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}\,a} - \frac{kq^2}{a} - \frac{kq^2}{a} = -\frac{kq^2}{a}\left(4 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$U = -\frac{kq^2}{a}(4 - \sqrt{2}) = -2{,}586\,\frac{kq^2}{a}$$

(1.5) 2.- ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo al campo eléctrico para cambiar la carga $-q$ del vértice superior al centro del cuadrado?

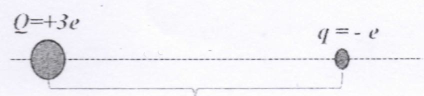


$$W_{ext} = U' - U$$

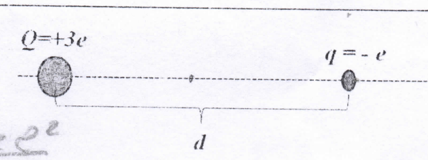
$$U' = -\frac{kq^2}{a} + \cancel{\frac{2kq^2}{\sqrt{2}a}} - \frac{kq^2}{a} - \cancel{\frac{2kq^2}{\sqrt{2}\,a}} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}a} - \frac{2kq^2}{\sqrt{2}a}$$

$$U' = -\frac{kq^2}{a}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2{,}707\,\frac{kq^2}{a} \Rightarrow W_{ext} = -0{,}121\,\frac{kq^2}{a}$$

(1) 3.- Un electrón se libera a una distancia d de una carga puntual, $Q = +3e$ tal como se muestra en la figura. Determine la velocidad del electrón cuando ha avanzado una distancia $d/2$.



(1) 3.- Un electrón se libera a una distancia d de una carga puntual, $Q = +3e$ tal como se muestra en la figura. Determine la velocidad del electrón cuando ha avanzado una distancia $d/2$.



$E_i = \cancel{K_i}^{0} + U_i$; $E_i = \frac{k(3e)(-e)}{d} = -3\frac{ke^2}{d}$

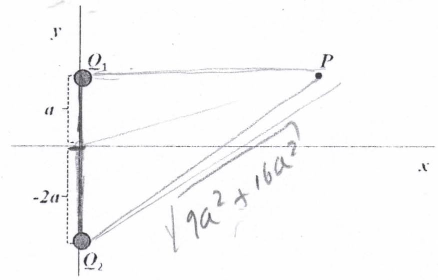
$E_f = K_f + U_f$; $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{k(+3e)\cdot(-e)}{d/2} = \frac{1}{2}mv_f^2 - 6\frac{ke^2}{d}$ (0,5)

$E_i = E_f$ $\quad \frac{1}{2}mv_f^2 - 6\frac{ke^2}{d} = -3\frac{ke^2}{d}$ $\quad \frac{1}{2}mv_f^2 = 3\frac{ke^2}{d}$

$v_f^2 = \frac{6ke^2}{dm}$ $\quad v = \sqrt{\frac{6ke^2}{dm}}$ $\quad \boxed{v = e\sqrt{\frac{6k}{md}}}$ (0,5)

Información para las preguntas 4 y 5.

Una carga $Q_1 = 4q$ se ubica en el punto $(0, a)$ y una segunda carga $Q_2 = 5q$ en el punto $(0, -2a)$, tal como se muestra en la figura.



(2)	4.-	Calcule la diferencia de potencial entre el origen y el punto $P(4a, a)$.

Potencial en el origen

$V_1 = \frac{kQ_1}{a}$ $\quad V_i = V_1 + V_2$

$V_2 = \frac{kQ_2}{2a}$ $\quad V_i = \frac{k4q}{a} + \frac{k5q}{2a}$

$V_i = \frac{kq}{a}\left[4 + \frac{5}{2}\right]$

$\boxed{V_i = \frac{13kq}{2a}}$

Potencial $P(4a, 0)$

$V_{1P} = \frac{kQ_1}{4a} = \frac{k4q}{4a} = \frac{kq}{a}$

$V_{2P} = \frac{kQ_2}{5a} = \frac{k5q}{5a} = \frac{kq}{a}$

$V_P = V_{1P} + V_{2P} = \frac{2kq}{a}$

$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{9kq}{2a}$

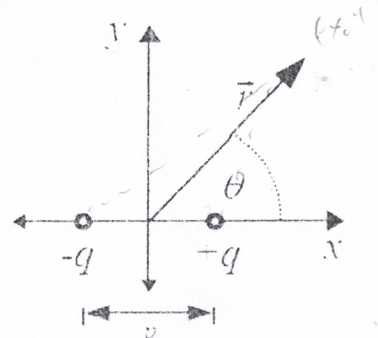
(1)	5.-	Calcule el trabajo realizado por un agente externo y por el campo para mover una carga $Q_3 = \frac{-q}{7}$ desde el origen hasta el punto P.

$W = q\Delta V$ $\quad W = -\frac{q}{7 \cdot 2a} \cdot -9kq = +\frac{9k}{14}\frac{q^2}{a}$

Información pregunta 6.

Un dipolo eléctrico es un sistema en el cual dos cargas de igual magnitud q pero con signo contrario se ubican separadas por una distancia p fija. El potencial para esta distribución de cargas en el plano xy, se puede escribir como:

$$V = \frac{qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$



(2) 6.- Determine el campo eléctrico en el plano *xy*.

$V = \alpha \dfrac{\cos\theta}{r^2}$, con $\alpha = \dfrac{qP}{4\pi\varepsilon_0}$

0,5 $\boxed{\text{Luego } \vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

$\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\alpha 2 \dfrac{\cos\theta}{r^3}}$ 0,5

$\boxed{\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -\alpha \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}}$ 0,5

Luego,

$\vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$

$\boxed{\vec{E} = \dfrac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^3}\hat{\theta}\right) N/C}$ 0,5

$V = \alpha \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ con $\alpha = \dfrac{qP}{4\pi\varepsilon_0}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Luego $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$ 0,5

$\dfrac{\partial V}{\partial x} = \alpha\left(\dfrac{(x^2+y^2)^{3/2} - \frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{1/2}\cancel{2}x^2}{(x^2+y^2)^3}\right) = \dfrac{\alpha\,\cancel{(x^2+y^2)^{1/2}}}{\cancel{(x^2+y^2)^{1/2}}}\left(\dfrac{(x^2+y^2) - 3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right)$

$= \boxed{\alpha \dfrac{y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}}$ 0,5

$\dfrac{\partial V}{\partial y} = -\alpha \dfrac{x\,\cancel{2}y \cdot 3}{\cancel{2}(x^2+y^2)^{5/2}} = \boxed{-\alpha \dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}}$ 0,5

Luego

$\vec{E} = \dfrac{qP}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\left[(2x^2-y^2)\hat{\imath} + 3xy\,\hat{\jmath}\right]$ 0,5

(2) 7.- En una región del espacio se tiene un campo eléctrico dado por $\vec{E} = 5x^2\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}\ N/C$. Imagine que un agente externo desplaza un electrón en este campo desde la posición (5, 5, 5) m hasta el origen de coordenadas. Encuentre el trabajo para realizar dicho desplazamiento.

$W = q[-\Delta V] = q\displaystyle\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$; $d\vec{s} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$

i: (5,5,5) m

f: (0,0,0) m

1.0

$W = q\left[\displaystyle\int_5^0 5x^2dx + \int_5^0 10dy\right] = q\left\{5\dfrac{x^3}{3}\Big|_5^0 + 10y\Big|_5^0\right\}$ 1.0

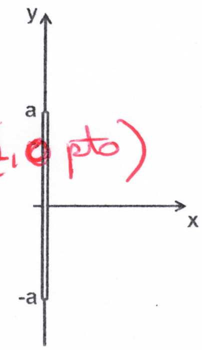
$W = -258.3q\,[J]$

(1) 8.- Considere el campo eléctrico $\vec{E} = 5z\hat{k}\ N/C$. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A(3, 1, 4) y B(2,7,4) m.

$\Delta V = -\displaystyle\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$.

como están en el mismo plano $\Delta V = 0$.

(3) 9.- Una varilla delgada de longitud 2a se coloca a lo largo del eje de coordenadas "y" en el plano xy, como se muestra en la figura. La varilla tiene una densidad lineal de carga uniforme λ. El punto P_1 está situado en (0, 2a) y P_2 en (x, 0). Encuentre x si los potenciales en P_1 y P_2 son iguales.



$$V_1 = K_e \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{(2a-y)}\,dy = K_e \lambda \left(-\ln(2a-y)\right)\Big|_{-a}^{a} = K_e \lambda \ln 3 \quad (1,0 \text{ pto})$$

$$V_2 = K_e \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = K_e \lambda \ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$= K_e \lambda \ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{-a+\sqrt{x^2+a^2}}\right) \quad (0,7)$$

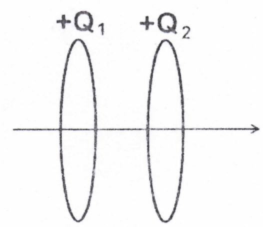
$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{-a+\sqrt{x^2+a^2}} = 3 \quad (0,8)$$

$$a+\sqrt{x^2+a^2} = 3\left(-a+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

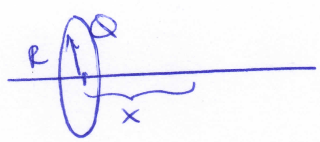
$$4a = 2\sqrt{x^2+a^2} \Rightarrow 4a^2 = x^2+a^2$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{3}\,a} \quad (0,5)$$

(2) 10.- Dos anillos delgados idénticos, cada uno de radio R, están separados coaxialmente a una distancia R. Las cargas distintas + Q_1 y + Q_2 están distribuidas uniformemente sobre los dos anillos, respectivamente. Determine el trabajo que realiza un agente externo para mover una carga +q desde el centro del anillo con carga + Q_1 hasta el centro del otro.



Para un anillo:



$$V = K_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{K_e Q}{\sqrt{x^2+R^2}} \quad (0,5)$$

$$U_i = K_e q\left(\frac{Q_1}{R} + \frac{Q_2}{\sqrt{R^2+R^2}}\right) = \frac{K_e q}{R}\left(Q_1 + \frac{Q_2}{\sqrt{2}}\right) \quad (0,5)$$

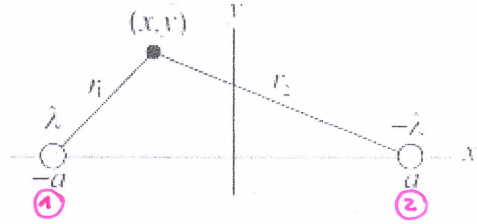
$$U_f = K_e q\left(\frac{Q_2}{R} + \frac{Q_1}{\sqrt{R^2+R^2}}\right) = \frac{K_e q}{R}\left(Q_2 + \frac{Q_1}{\sqrt{2}}\right) \quad (0,5)$$

$$W_{a.e.} = U_f - U_i = \frac{K_e q}{R}\left(Q_2 - Q_1 + \frac{Q_1}{\sqrt{2}} - \frac{Q_2}{\sqrt{2}}\right) \quad (0,5)$$

$$\boxed{W_{a.e.} = \frac{K_e q}{R}\left(Q_2 - Q_1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

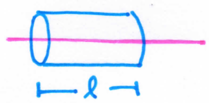
Información pregunta 11.

Dos líneas de cargas infinitas y paralelas tienen carga por unidad de longitud λ y $-\lambda$ respectivamente. Las líneas son paralelas al eje z. La línea positiva intersecta al eje x en x = -a, y la línea negativa intersecta al eje x en x = +a.



(3) 11.- Escoja el origen como referencia donde el potencial es cero, y exprese el potencial en un punto arbitrario (x,y) en el plano xy, en términos de x, y, λ, y a.

El campo eléctrico de una línea de carga infinita se obtiene utilizando ley de Gauss



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r} \quad (0.5)$$

• Para la línea ubicada en x = -a

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} - (-a\hat{i}) = (x+a)\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$V_1(r) = -\int_{r_1}^{r} \frac{2k\lambda}{r}\,dr = -2k\lambda \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} = -2k\lambda(\mathrm{Ln}\, r - \mathrm{Ln}\, r_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1(r) = 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r_1}{r}\right)} \quad (1.0)$$

De forma análoga para la línea ubicada en x = a

$$\vec{r}_2 = x\hat{i} + y\hat{j} - (a\hat{i}) = (x-a)\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$V_2(r) = -\int_{r_2}^{r} \frac{(-2k\lambda)}{r}\,dr = 2k\lambda \int_{r_2}^{r} \frac{dr}{r} = 2k\lambda(\mathrm{Ln}\, r - \mathrm{Ln}\, r_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2(r) = 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r}{r_2}\right)} \quad (1.0)$$

⇒ El potencial total en el punto (x, y) está dado por.

$$V_P = V_1(P) + V_2(P)$$

$$= 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r_1}{r}\right) + 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r}{r_2}\right)$$

$$= 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r_1}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{r_2}\right) = 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(P) = 2k\lambda\, \mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}\right)} \quad (0.5)$$

Información para pregunta 12 a 14.

Un condensador de placas plano paralelas de área A separadas una distancia $2d$, se encuentra conectado a una batería cuya diferencia de potencial es V_0 (Fig. 4 a). Un agente externo junta las placas a una distancia d, manteniendo el condensador conectado a la batería (Fig. 4 b).

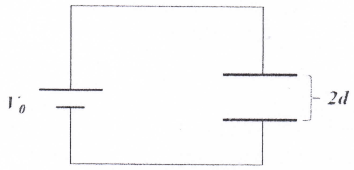


Fig. 4 a

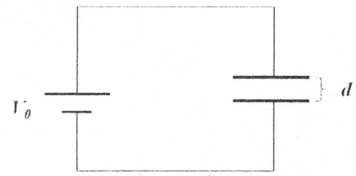


Fig. 4 b

(0.5) 12.- Encuentre la relación entre la capacitancia inicial y la capacitancia final del condensador.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{2}C} \text{ ó } \boxed{C = 2C_0} \quad (0,5)$$

(1) 13.- Encuentre la variación de la carga y la variación de la energía almacenada en el condensador.

$$Q_0 = C_0 V_0$$
$$Q = C V_0 = 2C_0 V_0$$
$$Q = 2Q_0$$
$$\Delta Q = Q_f - Q_i$$
$$\Delta Q = 2Q_0 - Q_0$$
$$\boxed{\Delta Q = Q_0 = C_0 V_0} \quad (0,5)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$
$$U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} 2C_0 V_0^2$$
$$U = 2\left(\frac{1}{2} C_0 V_0^2\right) = 2U_0$$
$$\Delta U = U_f - U_i$$
$$\Delta U = 2U_0 - U_0$$
$$\boxed{\Delta U = U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2} \quad (0,5)$$

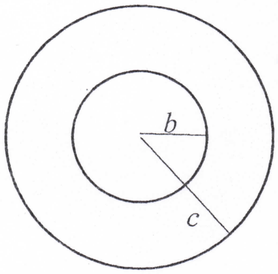
(0.5) 14.- ¿Cuál es el trabajo que realiza la batería para que se mantenga la diferencia de potencial V_0 constante en el condensador cuando las placas se acercan?

$$W_b = V_0 (q_f - q_i)$$
$$W_b = V_0 \Delta Q$$
$$\boxed{W_b = V_0 Q_0 = C_0 V_0^2} \quad (0,5)$$

Información para las preguntas 15 y 16.

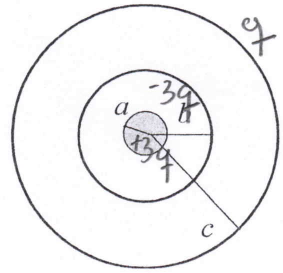
Considere la siguiente situación:

Un casquete esférico conductor de radio interior b y radio exterior c tiene una carga $Q = -2q$.



$Q = -2q$

A continuación, se coloca una esfera aislante de radio a y carga $Q' = +3q$ en el centro del casquete, tal como se muestra en la figura.



(1) 15.- Una vez que se ha introducido la esfera aislante, determine la carga en la superficie interior y en la superficie exterior del casquete.

Superficie Interior $-3q$

Superficie exterior q

$Q = -3q + q = -2q$ ✓

(1)

(1) 16.- Calcule el potencial eléctrico a una distancia r del centro del casquete, tal que $b < r < c$, considerando que el potencial es cero en el infinito.

$r > c$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{-2q+3q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad r > c$$ (0,2)

$b < r < c$

$q = 0 \Rightarrow$ conductor

$\vec{E} = \vec{0}$

$$V(r) - \cancel{V(\infty)}^{\,0} = -\int_{\infty}^{c} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \cancel{\int_{c}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}}^{\,0}$$

$\vec{E} = 0$

(0,3)

$$V(r) = -\int_{\infty}^{c} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{c}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}}$$

(0,5)