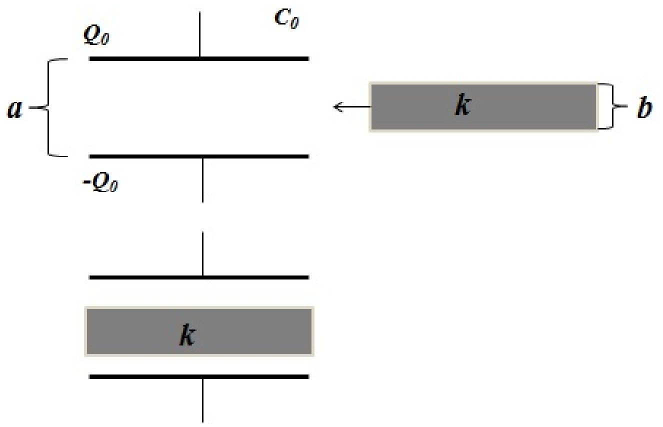
Capacidad, Parte II

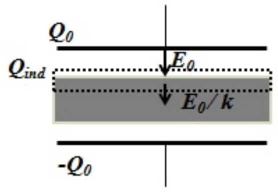
Material de Apoyo para el Curso de Física II (ICF-190)

PROBLEMA RESUELTO 1

Un condensador de placas paralelas de capacidad C_0, cuyo espacio entre las placas está vacío, tiene una carga inicial Q_0. Se introduce una placa de dieléctrico de constante κ, que no llena totalmente el espacio entre las placas, como se indica en la figura.



Determine antes y después de introducir el dieléctrico a carga constante:



a) la carga inducida
b) la carga en las armaduras.
c) la diferencia de potencial entre las placas conductoras.
d) la diferencia de potencial entre las caras opuestas del dieléctrico.
e) la capacidad del condensador.
f) la energía potencial eléctrica.

Solución

Antes de introducir el dieléctrico, se tienen las siguientes cantidades:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} a \tag{1}$$

$$Q = Q_0 \tag{2}$$

$$Q_{ind} = 0 \tag{3}$$

$$E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} \tag{4}$$

$$E = 0 \tag{5}$$

fuera de las placas, y

$$U_0 = \frac{{Q_0}^2}{2C_0} \tag{6}$$

Después de introducir el dieléctrico

a) La carga inducida, puede calcularse aplicando la ley de Gauss a una "caja de fósforos" cuyas bases sean paralelas a las placas:

El flujo a través de las paredes laterales es cero pues $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$. Luego:

$$\Phi_E = \int_{bases} d\vec{S} \cdot \vec{E} = -E_0 A + \frac{E_0}{\kappa} A \tag{7}$$

pero el flujo debe ser igual a la carga neta encerrada, dividida por ϵ_0, esto es, $\Phi_E = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{ind}}{\epsilon_0}$. Por tanto, igualando se tiene:

$$Q_{ind} = E_0 A \epsilon_0 (\frac{1}{\kappa} - 1) \tag{8}$$

pero $E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$, de donde

$$Q_{ind} = (\frac{1}{\kappa} - 1) Q_0 \tag{9}$$

donde $\frac{1}{\kappa} - 1 \ < \ 0$

b) La carga en las armaduras del condensador no varía durante el proceso, pues las placas conductoras permanecen aisladas.

c) La diferencia de potencial entre las placas conductoras, puede calcularse mediante

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_+^- d\vec{l} \cdot \vec{E}, \tag{10}$$

donde hay que considerar que el campo dentro del dieléctrico es E_0/κ. Así,

$$\Delta V = E_0(a-b) + \frac{E_0}{\kappa} b = E_0 \left[a + b(\frac{1}{\kappa} - 1) \right] \tag{11}$$

$$\Delta V = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}\left[a + b(\frac{1}{\kappa} - 1)\right] = V_0\left[\frac{a + b(\frac{1}{\kappa} - 1)}{a}\right]. \tag{12}$$

Esta diferencia de potencial es menor que la del condensador vacío, pero mayor que del mismo condensador lleno con dieléctrico.

d) La diferencia de potencial entre las caras opuestas del dieléctrico corresponde a:

$$\Delta V_d = \frac{E_0}{\kappa} b. \tag{13}$$

e) La capacidad del condensador por definición, es el valor absoluto de la carga libre en cada placa, dividido por la

diferencia de potencial:

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\frac{Q_0}{\epsilon_0 A}\left[a + b(\frac{1}{\kappa} - 1)\right]} = C_0 \frac{a}{a + b(\frac{1}{\kappa} - 1)}. \tag{14}$$

Puede apreciarse, que el nuevo valor de la capacidad está comprendido entre la capacidad del condensador vacío y la del condensador lleno con dieléctrico:

$$C_0 < C_0 \frac{a}{a + b(\frac{1}{\kappa} - 1)} < kC_0 \tag{15}$$

f) La energía potencial eléctrica, puede calcularse directamente de:

$$U = \frac{{Q_0}^2}{2C} = \frac{{Q_0}^2}{2C_0 \frac{a}{a+b(\frac{1}{\kappa}-1)}}. \tag{16}$$

La diferencia de energía potencial final e inicial es:

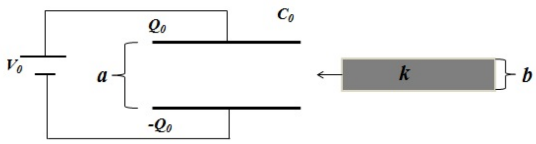
$$\Delta U = U - U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}\left(\frac{1}{\frac{a}{a+b(\frac{1}{k}-1)}} - 1\right) = U_0 \frac{b(\frac{1}{\kappa} - 1)}{a}, \tag{17}$$

con $\frac{1}{\kappa} - 1$ negativo.

La energía disminuye, o en otras palabras, un agente externo debe hacer un trabajo negativo para introducir el dieléctrico. Esto significa, que el dieléctrico es atraído hacia el interior del condensador.

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1

Repita el problema anterior, pero manteniendo la batería conectada durante todo el proceso de introducir el dieléctrico.



Solución

Antes de introducir el dieléctrico, rigen los mismos valores del problema anterior, los cuales expresados en términos de V_0, C_0, a y b:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} a \tag{18}$$

$$Q = Q_0 \tag{19}$$

$$Q_{ind} = 0 \tag{20}$$

$$E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} \tag{21}$$

$$E = 0 \tag{22}$$

fuera de las placas, y

$$U_0 = \frac{{Q_0}^2}{2C_0} \tag{23}$$

Después de introducir el dieléctrico

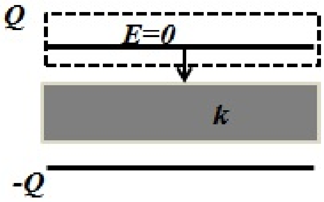
- $V = V_0$, ya que, la batería permanece conectada.
- Supongamos que el campo eléctrico en el espacio vacío, tiene ahora magnitud E, luego el campo dentro del dieléctrico será E/k y debe cumplirse

$$V_0 = E(a-b) + \frac{E}{k} b = E\left(a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right) \tag{24}$$

entonces

$$E = \frac{V_0}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)} = E_0 \left(\frac{a}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)}\right) \tag{25}$$

Siendo $a > a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)$ (analice, considerando que $k \geqslant 1$ y $a > b$). Por lo tanto el campo en el vacío debe aumentar en magnitud para compensar el debilitamiento producido por el dieléctrico y mantener constante la diferencia de potencial.



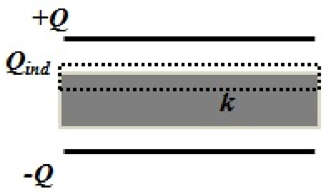
- La nueva carga libre, puede calcularse aplicando la ley de Gauss a una ”caja de fósforos” que encierre una de las placas; como se indica:

  Mustre que la carga libres es

$$Q = Q_0 \left(\frac{a}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)} \right), \tag{26}$$

  es decir el valor absoluto de la carga libre aumenta en la misma proporción que el campo en el vacío: la bateria transfiere carga de una placa a la otra para mantener constante la diferencia de potencial.

- Para la carga inducida, aplicaremos la ley de Gauss a una ”caja de fosforos” que encierra una de las caras del dieléctrico.



  Demuestre que la carga de polarización es:

$$Q_{ind} = Q_0 \left(\frac{a}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)} \right) \left(\frac{1}{k} - 1 \right) = Q \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \tag{27}$$

- Considerando la carga libre Q en las armaduras del condensador y el potencial entre las placas es constante e igual a V_0 para este proceso, obtenemos que la capacidad es:

$$C = C_0 \frac{a}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)}. \tag{28}$$

  Compare la capacidad en ambos procesos (a carga constante y a potencial constante).

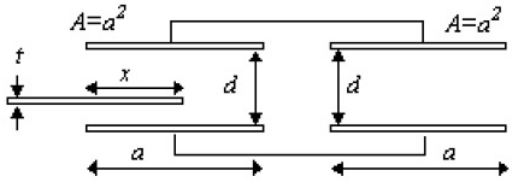
Considerando la capacidad C y el potencial entre las placas constante e igual a V_0 para este proceso, se puede calcular la energía potencial eléctrica:

$$U = U_0 \left(\frac{a}{a + b\left(\frac{1}{k} - 1\right)} \right) \tag{29}$$

PROBLEMA DESAFIO 1

Dos condensadores idénticos de área A y lado a y separación entre placas d, inicialmente descargados, se conectan en paralelo. Mediante una batería se aplica al sistema una diferencia de potencial V_0. Posteriormente se desconecta la batería, con lo cual los condensadores en paralelo quedan cargados y aislados. Se introduce en uno de los condensadores una placa conductora de igual área y de espesor t, como se muestra en la figura.

a)Calcule la energía almacenada en el sistema cuando la placa de espesor t ha penetrado una distancia x en el condensador.
b)Calcule la cantidad de carga transferida de un condensador a otro como función de x, e indique en que sentido es la transferencia.



PROBLEMA DESAFIO 2

Responder a la pregunta anterior cuando la placa que se introduce en el condensador de la izquierda está hecha con un dieléctrico cuya constante es k.