Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias
Departamento de Matemática y Est.

Bitácora de aula: La derivada

1. Introducción

Fecha

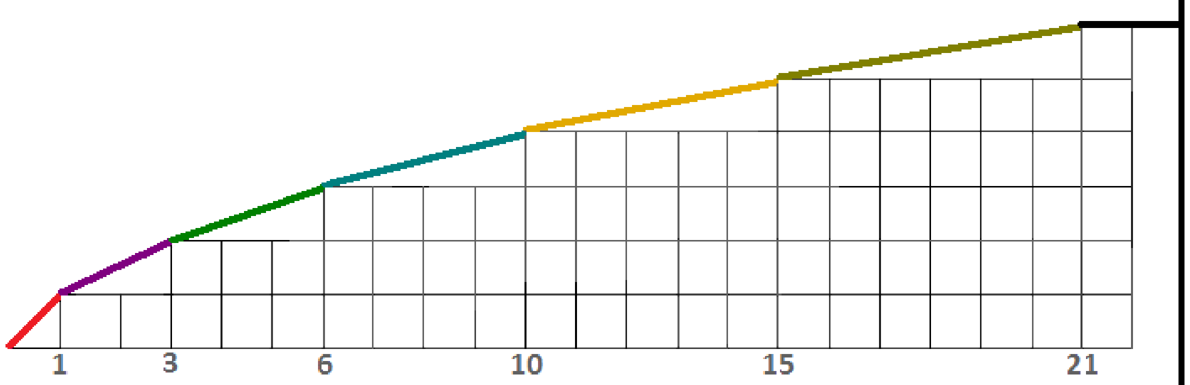
Las derivadas surgieron por la necesidad de buscar respuesta a dos tipos de problemas distintos:

- problemas de carácter geométrico (cálculo de la recta tangente a la curva en un punto)
- problemas de carácter físico (cálculo de la velocidad instantánea en movimientos no uniformes)

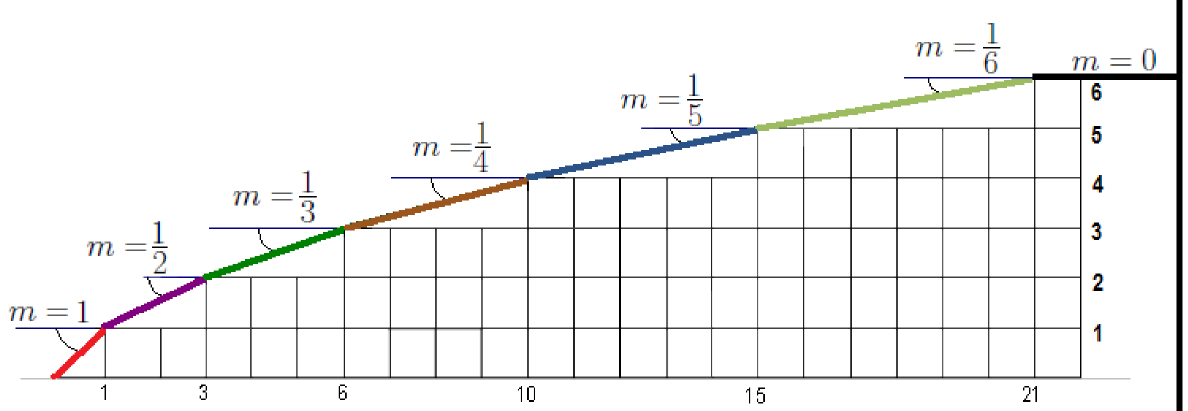
Tarea 1 *Busca en internet y anota, en no más de 20 líneas, una breve reseña histórica sobre la derivada.*

Situación didáctica

Hay que trasladar un carro por las escaleras hacia arriba, para ello se dispone de unos tablones que se irán poniendo de peldaño a peldaño, para poder desplazar el carro, tal como muestra la figura



Se observa en la figura que se tendrá que hacer mucho esfuerzo al inicio para desplazar el carro y menos al final en el último tramo. Ello se debe a que el ángulo de inclinación del tablón es más elevado al inicio que al final. Para ver esto se calcula el ángulo entre el tablón y la horizontal, y se ve que el ángulo se va reduciendo a medida que se avanza a lo largo de los tablones.



En el intervalo $[6, 10]$ se observa una pendiente de $\frac{1}{4}$ ya que tiene que recorrer 4 unidades de medida (la profundidad de la escalera) para subir 1 unidad en el punto 10 (altura de la escalera). De esta forma, la pendiente es la división de lo que ha subido (1 punto) sobre lo que ha avanzado (4 unidades). La pendiente del tablón sobre el intervalo que une el punto 10 con el 15 es de $\frac{1}{5}$, ya que hay que recorrer 5 para subir 1.

Lo que se llama "derivada", nos muestra la evolución de la inclinación de los tablones a lo largo del trayecto. De modo que la derivada tiene que ver con los cambios del ángulo de inclinación de los tablones con relación a la horizontal.
En este caso los ángulos de inclinación son positivos hasta el punto 21, a partir del punto 21 es 0 ya que el tablón está paralelo al suelo, si a partir de ahí se fuese avanzando y las escaleras fuesen bajando, en lugar de subir, el ángulo de inclinación sería negativo.
Podemos decir lo siguiente:

> "La derivada muestra la evolución de la pendiente, en cada punto de los tablones, a lo largo de la curva"

Si se remplazan todos esos tablones por un solo tablero flexible que se posiciona sobre la escalera, podríamos decir que es una subida continua ya que la rueda del carro no siente ningún tipo de discontinuidad a lo largo del trayecto (no hay rupturas entre tablones) y escribiríamos una función continua $f(x)$ que nos indicaría por cada punto que avanzamos en que punto de la altura nos encontramos. Y la derivada sería una función $f'(x)$ derivada de la anterior función que ya no nos da la altura sino que nos dice de cuánto cambia aquella función original y la pendiente que tiene en cada punto del tablero flexible.

Veamos el proceso de como llegar a la derivada.

1.0.1. Tasa de Variación Media

Dada una función f de argumento x, se denomina **tasa de variación** (TV) al número que representa el aumento o disminución que experimenta la función al aumentar la variable independiente x de un valor a a otro b. De esta forma, la tasa de variación de $f(x)$ entre a y b (siendo $a \leq b$) es igual a $f(b) - f(a)$. se anota

$$\text{TV} = f(b) - f(a)$$

Actividad 1 *Halla tasa de variación de las funciones:*

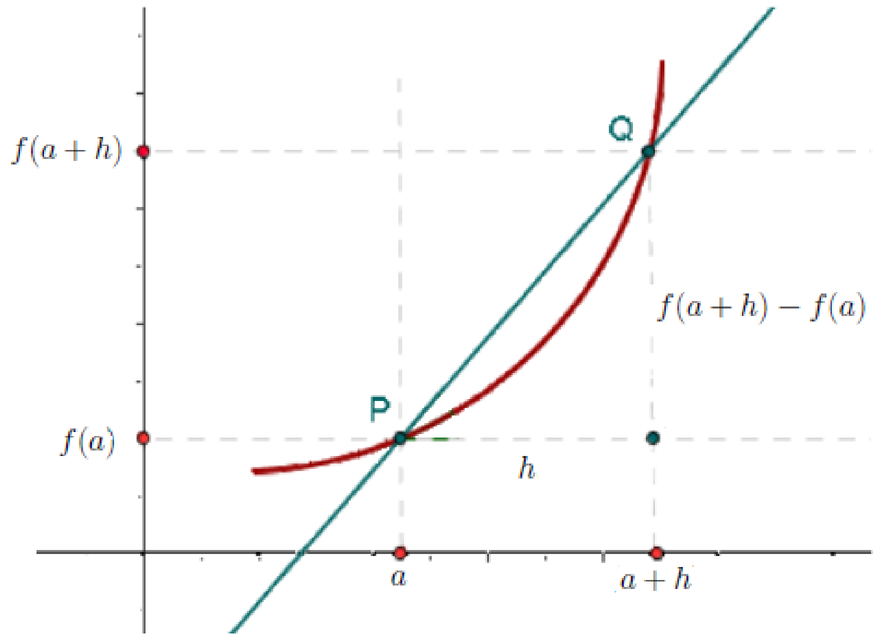
1. *$f(x) = x^2$ al pasar x de 1 a 2*
2. *$f(x) = 1 - x^2$ al pasar x de 2 a 3*
3. *Grafica, en sistemas separados, ambas funciones e indica a que corresponde la tasa de variación.*
4. *Interpreta el signo de la tasa de variación.*

Se llama **tasa de variación media** (TVM) entre a y b al cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo $[a, b]$, esto es:

$$\text{TVM}[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si en lugar de b, al segundo punto lo llamamos $a+h$, la fórmula anterior quedaría así:

$$\text{TVM}[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



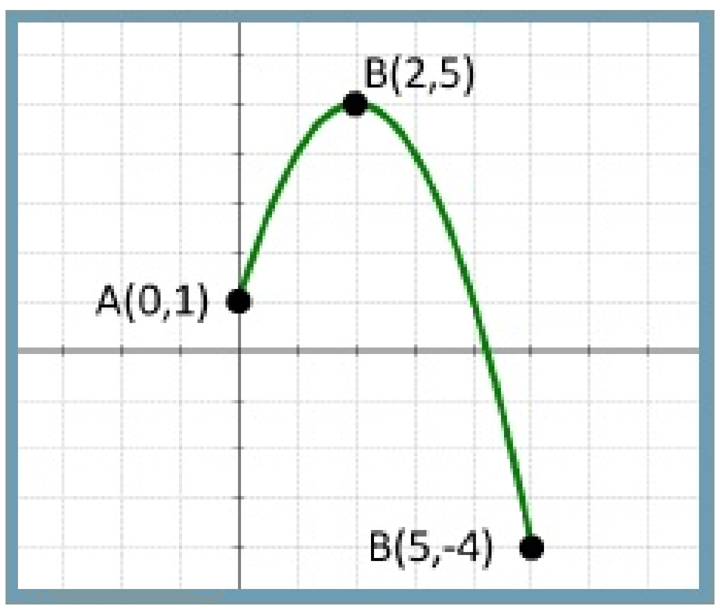
En términos geométricos, la expresión anterior coincide con la pendiente de la recta secante a la función que une los puntos de abscisas a y $a+h$

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En el mismo sentido, la tasa de variación media nos da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece la función en un determinado intervalo.

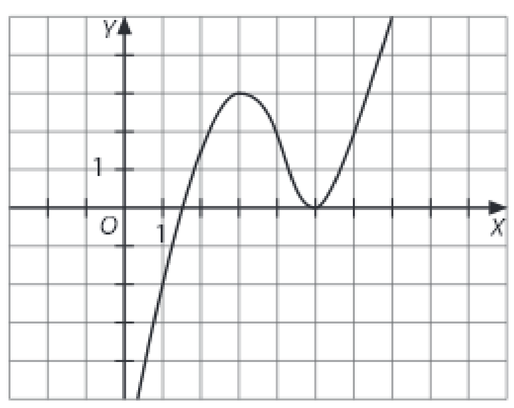
Actividad 2

1. *Hallar la TVM en el intervalo* $[0, 2]$ *para la función de la figura*
2. *Hallar la TVM en el intervalo* $[2, 5]$ *para la función de la figura*
3. *Halla la pendiente de la recta que une* $[0, 1]$ *y* $[2, 5]$
4. *Halla la pendiente de la recta que une* $[2, 5]$ *y* $[5, -4]$
5. *¿Cuál es tu conclusión sobre la TVM y la pendiente?*

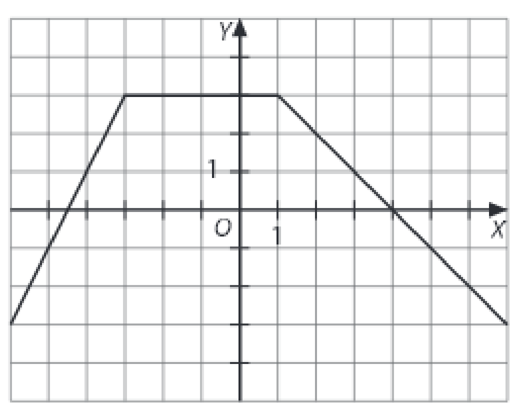


Actividad 3 *Hallar la tasa de variación media de cada función para los intervalos indicados:*

a) $[1, 3]$ *y* $[4, 6]$



b) $[-3, 0]$ *y* $[1, 4]$



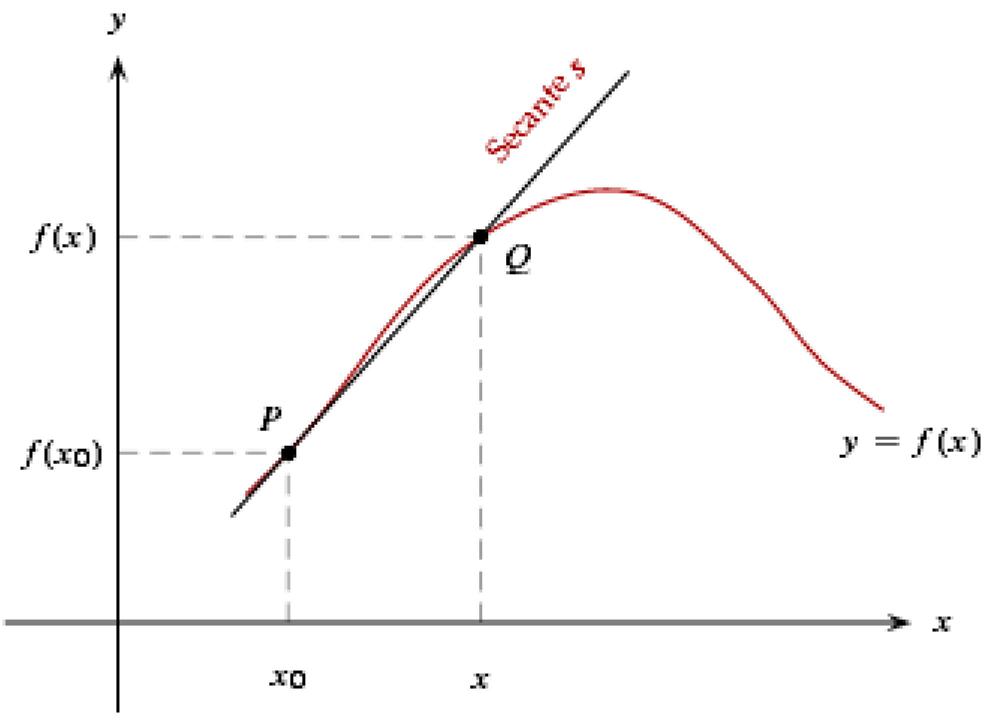
1.0.2. Tasa de variación instantánea

Si hacemos h muy pequeño, obtenemos una información precisa de lo que ocurre en el punto de abscisa $x = a$. Y hacer h muy pequeño, es hacerlo tender a cero. Pues bien cuando hacemos h tender a cero en la tasa de variación media, llegamos al concepto de **tasa de variación instantánea**. Es decir, la tasa de variación instantánea en un punto es el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[a, a+h]$

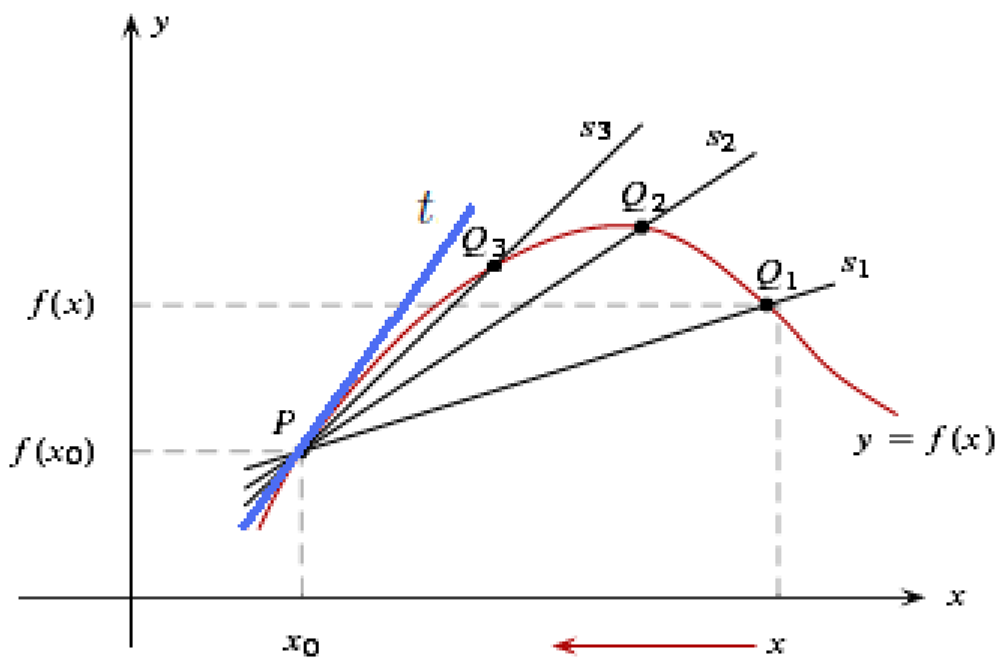
$$TVI[a] = \lim_{h\to 0} \text{TVM}[a, a+h] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1.0.3. Recta tangente

En geometría, la línea tangente (o simplemente la tangente) a una curva en un determinado punto es la línea recta que “sólo toca” la curva en ese punto. Busquemos si existe alguna relación con la tasa de variación instantánea.
Sea f una función definida en un cierto intervalo abierto que contiene a x_0 y sea $P[x_0, f(x_0)]$ un punto fijo en la gráfica de f.



Si tomamos cualquier otro punto $Q[x, f(x)]$ sobre la gráfica de la función, la recta secante s que pasa por P y Q corta a la gráfica de la función al menos en estos dos puntos, por lo que no parece sensato pensar en ella como la tangente, pero en cambio sí parece lógico pensar que si Q estuviese cerca de P, entonces la recta secante s se aproximaría a la tangente buscada y podríamos entonces pensar en definir la pendiente m_t de la recta tangente en P como el límite de la pendiente de la recta secante s, cuando el punto Q tendiese al punto P

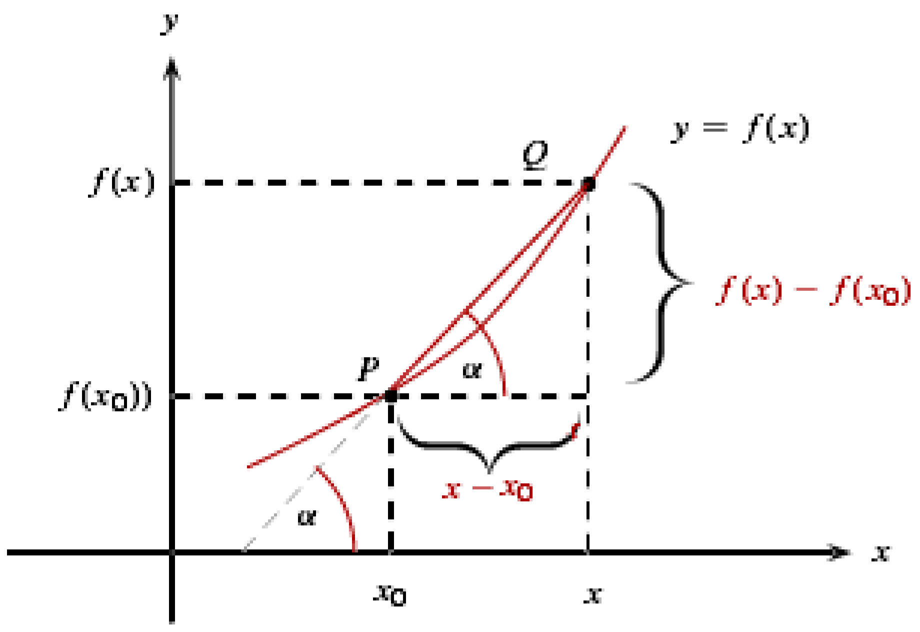


Pero para que esto suceda, intuimos que debe existir en el punto P una única recta t que sea la posición límite de las rectas secantes s, cuando el punto Q tiende al punto fijo P. Supongamos la existencia de esta recta tangente t. La pendiente de la recta secante s es

$$m_s = tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y como $x \to x_0$ cuando $Q \to P$, podríamos pensar que la pendiente m_t de la recta tangente t es

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Si hacemos $x - x_0 = h$, se tiene que $h \to 0$. Luego, la expresión anterior se transforma en:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

"la pendiente de la tangente es la tasa de variación instantánea"

Concretemos el concepto de recta tangente:

Definición 1.1 *Se denomina recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$ a aquella recta que pasa por P y que tiene pendiente*

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Observar que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$, corresponde al límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por el punto. A este límite le hemos denotado $f'(x_0)$ que se lee "f prima en x sub-cero"

Actividad 4 *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2.*

Conociendo un punto $(2, 4)$ y la pendiente, la ecuación de la recta es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 4 = m(x - 2)$$

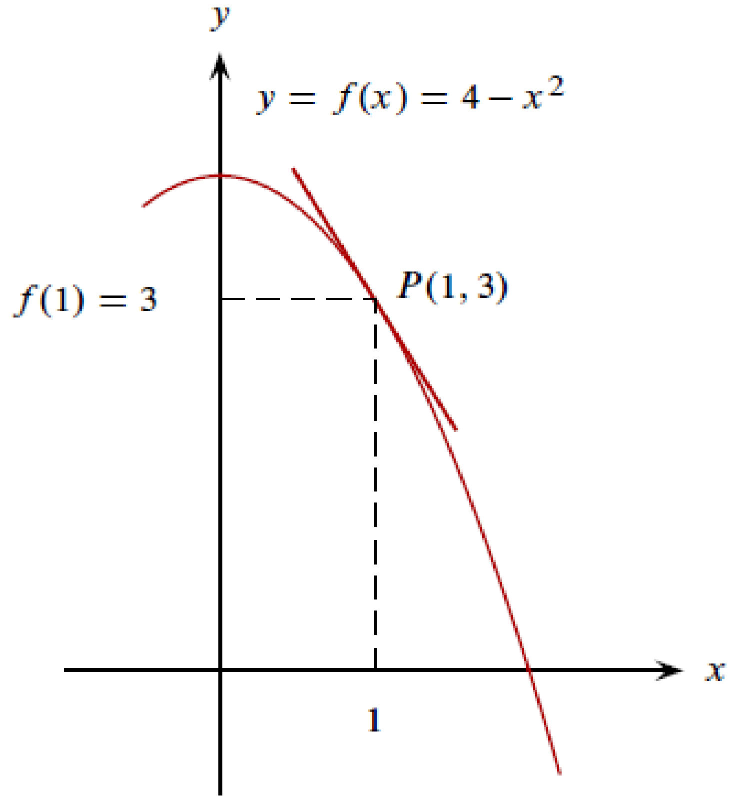
Pero recién hemos visto que la pendiente $m = f'(2)$. Tenemos:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = 4$$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 4 = 2(x - 2)$$

Actividad 5 *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ en el punto $(1, 3)$.*

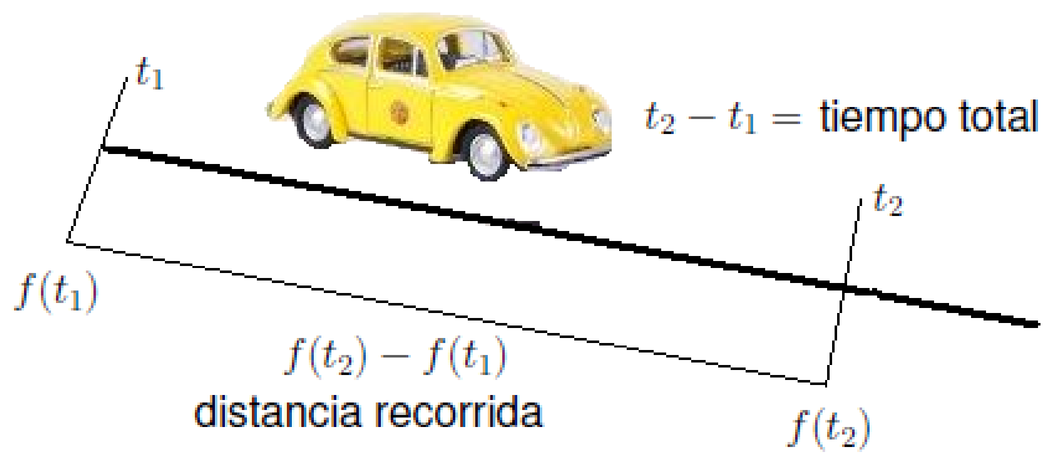


Tarea 2 *Dada la función $f(x) = \frac{1}{x - 2}$. Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $[1, f(1)]$. Obtener además la ecuación de dicha recta tangente y trazarla sobre la gráfica de f.*

1.0.4. Velocidad promedio y Velocidad instantánea

La **velocidad media** de un automóvil, v_m, en un trayecto ilustra de manera clara un concepto matemático muy importante, la tasa de variación de una función en un intervalo. Igual que la TVM, la **velocidad media** del movimiento se define como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. Sea $y = f(t)$ la distancia en función del tiempo, entonces

$$v_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$



Ejemplo 1.2 *Suponga que el desplazamiento de un móvil hasta el tiempo t está dado por la ecuación $d(t) = 64 + 4t^2$ metros, donde t está medido en segundos. Determinar la velocidad promedio durante los tiempos de*

1. $t = 2$ a $t = 4$	*3.* $t = 2$ a $t = 2,5$
2. $t = 2$ a $t = 3$	*4.* $t = 2$ a $t = 2,1$

1. La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 4$ viene dada por

$$\frac{d(4) - d(2)}{4 - 2} = 24m/s$$

2. La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 3$ es:

3. La velocidad promedio durante el tiempo de $t = 2$ a $t = 2,5$ es:

Nos interesa ahora tener una mejor idea de lo que está ocurriendo cerca de $t = 2$. En términos generales estamos interesados en "la velocidad" en el instante $t = 2$, la que marca el velocímetro en ese instante.

- **velocidad instantánea**

La velocidad a la que circula un automóvil en cada momento es un dato de uso corriente y conduce a la noción de tasa de variación instantánea de una función en un punto.
La velocidad instantánea v es la velocidad en un instante preciso. Dicho de otra manera, hacemos que el intervalo de tiempo transcurrido sea prácticamente cero y miramos cual seria la distancia recorrida.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}$$

Hallemos entonces la velocidad instantánea en $t = 2$ para $f(t) = 64 + 4t^2$.

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{64 + 4(2 + h)^2 - (64 + 16)}{h}$$

Al reducir queda

$$v(2) = \lim_{h \to 0} \frac{16h + 4h^2}{h} = 16m/s$$

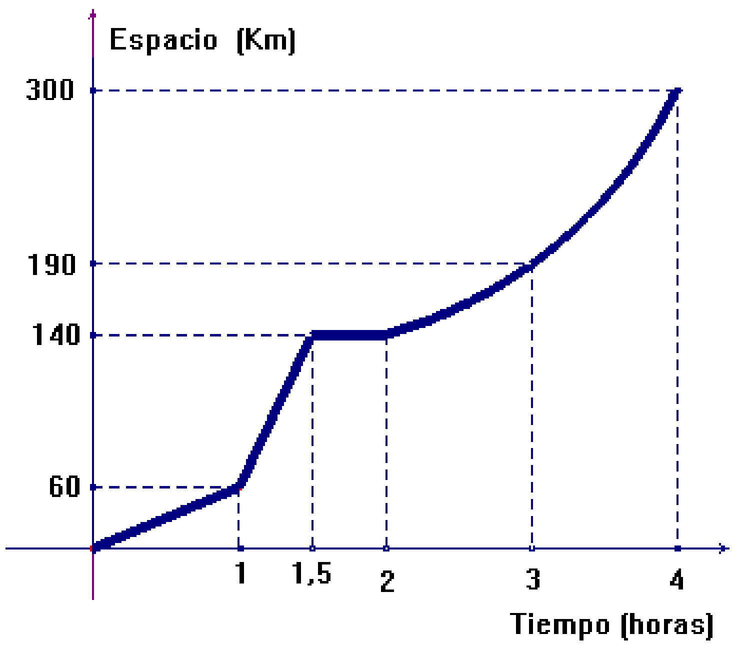
Actividad 6
Un móvil se mueve de acuerdo a la ecuación $s(t) = 3t^2$. La distancia se mide en metros y el tiempo en segundos.

1. *Hallar la velocidad media entre $t = 1$ y $t = 4$.Resp 15m/s*
2. *Hallar la velocidad instantánea en $t = 1$. Resp. 6m/s*

Tarea 3 *La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $f(t) = 6t^2$. Calcular:*

1. *La velocidad media entre $t = 1$ y $t = 4$.*
2. *La velocidad instantánea en $t = 1$.*

Actividad 7 *La gráfica de la figura describe el movimiento de un vehículo que realiza un viaje de 300 Km en 4 horas.*



1. *Halla la velocidad que lleva el vehículo en un momento determinado de cualquiera de las tres primeras etapas del viaje.*
2. *En el cuarto tramo la velocidad no es constante. El movimiento en ese tramo sigue la fórmula $f(t) = 30t^2 - 100t + 220$. Hallar la velocidad instantánea a las 3,5 horas.*

1.0.5. Derivada de una función en un punto

El límite que define la tasa de variación instantánea, la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea y que también aparece en otras aplicaciones da origen a lo siguiente:

Definición 1.3 *Dada una función $y = f(x)$, se llama derivada de la función f en un punto $x = x_0$ al siguiente límite si existe y es finito*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El símbolo $f'(x_0)$ se lee "efe prima de equis sub-cero. Cuando este límite existe (y es finito) se dice que la función f es derivable en el punto x_0. A la cantidad h se la llama "incremento de x", y corresponde al paso del punto x al punto $x = x_0 + h$. Como $x_0 + h$ representa un punto cercano a x_0, entonces podemos escribir la alternativa siguiente de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Algunos libros prefieren usar la notación Δx en vez de h, quedando escrita la función derivada como:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Actividad 8 *Para la función $f(x) = x^2$:*

1. *Usa la definición para hallar $f'(2)$*
2. *Calcula $f'(a)$*
3. *Halla $f'(10)$*

Notaciones Para la función $y = f(x)$ las siguientes notaciones son equivalentes:

$$y', \qquad f'(x), \qquad f_x, \qquad D_x, \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df}{dx}$$

Podemos decir que y' es la notación más popular, pero a la vez la más engañosa porque no dice con respecto a que variable se deriva. La segunda notación (de Lagrange) también es popular, y a diferencia de la anterior dice respecto de quién es la derivada. La notación D_x indica la operación de *tomar derivada* (la letra D indica que se **toma** derivada). La notación $\frac{dy}{dx}$ (de Leibnitz) es muy popular, amén de famosa, porque además de indicar quién se deriva y respecto de quién, le da a la derivada el sentido de un cociente, tal como partimos para llegar a la noción de derivada.

Actividad 9 *Hallemos derivada de:*

1. $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ *en un punto* x
2. $f(x) = 2$ *en cualquier punto* x.
3. $f(x) = sen\, x$ *en un punto x. En este caso te debo ayudar recordándote que*

$$sen(\alpha + \beta) = sen\, \alpha \cdot cos\, \beta + sen\, \beta \cdot cos\, \alpha$$

Antes de ver las técnicas de derivación responde dos preguntas esenciales:

- La función es $f(x) = x^2$. Al sacar la derivada en cualquier punto x estamos obteniendo ...
- La función es $f(t) = t^2$, t es el tiempo y f representa la posición en cualquier instánte t. Al sacar la derivada se obtiene ...

1.0.6. Reglas de cálculo de derivadas

Los hechos que a continuación se narran se pueden encontrar en cualquier libro de Cálculo.

Para dos funciones f y g que tengan derivada se satisface

- **Derivada de la suma**

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- **Derivada de un Producto**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **Derivada de un Cociente**

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Actividad 10 *Hallar la derivada de:*

1. $f(x) = x^2 + x^3$
2. $f(x) = x \cdot sen\, x$
3. $f(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$
4. $f(x) = (x + cosx)^2$

1.0.7. Derivada de una función compuesta

Si las funciones f y g tienen derivada, entonces la función compuesta de f con g, esto es, $f(g(x))$. tiene derivada y es tal que

$$[\, f(g(x))\,]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lo principal aquí es "saber leer" esta fórmula. Apréndela así:

La derivada de la f evaluada en g por la derivada de la g

La figura didáctica de asemejar la derivada con una máquina "aniquiladora" de funciones es bastante efectiva al principio del aprendizaje de la derivada. En este contexto lo primero es establecer de que tipo es la función que vamos a derivar. Por ejemplo, en una potencia hay que ir "matando" primero la potencia como tal y luego la base, siendo la derivada el producto de ambas. Con un ejemplo se aclaran las cosas.

Actividad 11 *Hallemos derivada de* $f(x) = sen\,(x^2)$

Observa que se va a derivar la función **seno**. Esto es lo primero que debe tener claro antes de iniciar el proceso de derivación ¿a qué función se sacará la derivada? Así, la derivación aniquila primero al seno y luego lo que queda (su argumento) se tiene:

$$f'(x) = cos\,(\text{argumento}) \cdot \text{derivada de argumento}$$

lo que es equivalente a:

$$f'(x) = cos\,(x^2) \cdot 2x$$

1.1 Tabla de Derivadas

La siguiente tabla contiene las derivadas de diversas funciones y está confeccionada al "estilo" compuesta.

n^o	Función	Derivada	n^o	Función	Derivada
1	$y = sen\, f(x)$	$y' = cos\, f(x) \cdot f'(x)$	8	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
2	$y = cos\, f(x)$	$y' = -sen\, f(x) \cdot f'(x)$	9	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
3	$y = tg\, f(x)$	$y' = sec^2 f(x) \cdot f'(x)$	10	$y = arc\, sen f(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}} \cdot f'(x)$
4	$y = ctg\, f(x)$	$y' = -csc^2\, f(x) \cdot f'(x)$	11	$y = arc\, cos f(x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}} \cdot f'(x)$
5	$y = sec\, f(x)$	$y' = sec\, f(x) \cdot tg\, f(x) \cdot f'(x)$	12	$y = arc\, tg f(x)$	$y' = \frac{1}{1 + f^2(x)} \cdot f'(x)$
6	$y = csc\, f(x)$	$y' = -csc\, f(x) \cdot ctg\, f(x) \cdot f'(x)$	13	$y = arc\, ctg f(x)$	$y' = -\frac{1}{1 + f^2(x)} \cdot f'(x)$
7	$y = f(x)^k$	$y' = k f(x)^{k-1} \cdot f'(x)$	14	$y = u(x)^{v(x)}$	$y' = u(x)^{v(x)} \left(v' \cdot \ln\, u + \frac{v}{u} \cdot u'\right)$

1.1.1. Derivada de las trigonométricas inversas

En esta sección trataremos las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas que se muestran en la tabla. Puedes observar algunas características de las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas:

- Todas son una fracción cuyo numerador es la derivada del argumento.
- Las cofunciones son iguales, diferenciadas solamente de un signo negativo, es decir, la fórmula del arco seno es igual a la del arco coseno, solamente que ésta última es negativa; la fórmula de la arco tangente es igual a la de la arco cotangente, siendo ésta última negativa. Y algo semejante sucede con la arco secante y la arco cosecante.

Para entender mejor el funcionamiento de las reglas, se sugiere interpretar, por ejemplo, la regla 12 como sigue

$$[\text{arc tg}(\text{argumento})]' = \frac{1}{1+(\text{argumento})^2} \cdot (\text{derivada de argumento})$$

Actividad 12 *Derivada de* $y = arcsen(x^3 - 1)$

Tu profesor te puede explicar directamente en la pizarra. Sin embargo te muestro la siguiente forma:

Lo primero que debes notar es que se trata de derivar una trigonométrica inversa, el arco seno, y que su argumento es $(x^3 - 1)$. Partimos entonces por "aniquilar" el arco seno. Para ello sabemos que su derivada es

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\text{argumento})^2}} \cdot \text{derivada del argumento}$$

o que traducido a lenguaje matemático significa

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}} \cdot 3x^2$$

Actividad 13 *Derivada de* $y = arctg^6(3x^2 - 1)$

En este caso debieras reconocer que se trata de la derivada de una POTENCIA, exactamente, eso es lo primero que resalta al ver la fórmula. La derivada de una potencia tiene la forma:

$$\text{exponente} \cdot (\text{base})^{\text{exponente -1}} \cdot \text{derivada de la base}$$

Actividad 14 *Hallar derivada de:*

1. $y = (x^2 + 3)^5$
2. $y = sen(x^2 + 3)^5$
3. $y = \ln[sen(x^2 + 3)^5]$
4. $y = sen^2(x + 3) + e^{x^3 - 1}$
5. $y = \dfrac{arctg(x^2 + 3)}{e^{sen(x+x^2)}}$

Lo primero que debes tener claro es que las funciones a derivar son compuestas. No interesa cuales son las funciones que hacen la composición, lo importante es saber que es compuesta. Te muestro una técnica para derivar la primera y las restantes las hacemos en la clase.

- **derivada de** $y = (x^2 + 3)^5$

Como ya sabes, la derivada se asemeja a una máquina "aniquiladora" de funciones, de modo que en una potencia, hay que ir "matando" primero la potencia como tal y luego la base, siendo la derivada el producto de ambas. A ver si se entiende:

Una potencia "genérica" tiene la forma

$$y = (\text{base})^{\text{potencia}}$$

de modo que su proceso de derivación, paso a paso, sería:

- **Paso 1**: "matamos la potencia": $(\text{base})^{\cancel{\text{potencia}}}$

Por tanto, la primera parte de la derivada es

$$\text{potencia} \cdot (\text{base})^{\text{potencia-1}}$$

- **Paso 2**: Aniquilada la potencia, nos queda la base.

$$\text{base} = \cancel{x^2+3} \Longrightarrow (\text{base})' = 2x$$

En consecuencia:

$$y' = 5 \cdot (x^2 + 3)^4 \cdot 2x$$

El proceso mostrado, es mucho más dinámico en la pizarra y debiera verse así

$$y' = \text{potencia} \cdot (\text{base})^{\text{potencia -1}} \cdot (\text{base})'$$

1.1.2. Derivada de funciones implícitas

Al considerar la función de ecuación $f(x) = x^3+3x^2-12$, es posible determinar $f'(x)$ con los teoremas enunciados anteriormente, ya que f es una función dada explícitamente en términos de la variable independiente x.

Sin embargo, existen funciones que no están definidas en forma explícita, tal como:

$$x^2y^2 - xy^3 + x = 2, \quad 4y = sen(2x - y^2)$$

Estas ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para y en términos de x. Se dice entonces que la función f está definida **implícitamente** por las ecuaciones:

$$x^2[f(x)]^2 - x[f(x)]^3 + x = 2, \qquad 4[f(x)] = sen(2x - [f(x)]^2)$$

respectivamente.

Note que ambas expresiones son de la forma general $F(x, y) = 0$. Para efectos de hallar la derivada de esta clase de funciones, es necesario precisar una definición

Definición 1.4 *La ecuación* $F(x, y) = 0$ *define a* y *de manera implícita como una función diferenciable de* x*, es decir,* $y = f(x)$*, si* $F(x, f(x)) = 0$ *para todas las* x *del dominio de* f*.*

La regla de la cadena permite realizar la derivación de funciones implícitas. En efecto,

Para obtener la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de una función implícita se emplean las mismas fórmulas y las mismas reglas de derivación estudiadas hasta ahora, en donde debe tenerse solamente el cuidado de tratar a la variable y como una variable dependiente de x.

Actividad 15 *Hallemos derivada de* $x^2y^2 - xy^3 + x = 2$

Solo con el fin de guiar tu aprendizaje anotaré la dependencia $y = f(x)$. Posteriormente puedes abreviar el proceso de cálculo. La ecuación dada equivale a:

$$x^2[f(x)]^2 - x[f(x)]^3 + x = 2$$

Tomamos derivada en ambos lados, respecto de x

$$2x[f(x)]^2+x^2\cdot 2[f(x)]\cdot f'(x)-[f(x)]^3-x\cdot 3[f(x)]^2\cdot f'(x)+1 = 0$$

El proceso de despejar $f'(x)$ conduce a

$$f'(x) = \frac{5y^3 - 6xy^2 - 1}{6x^2y - 15xy^2}$$

Actividad 16 *Hallar y' si:*

1. $x^2 + 2xy^2 + 1 = 0$
2. $4y = sen(2x - y^2)$
3. y' si $x + y + sen\, xy - 3 = 0$

Tarea 4

1. *Suponiendo que existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, calcular $\frac{dy}{dx}$*
2. *Hallar la ecuación de la recta tangente, en el punto $(1, 3)$ a la curva $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$*

1.1.3. Derivada de funciones paramétricas

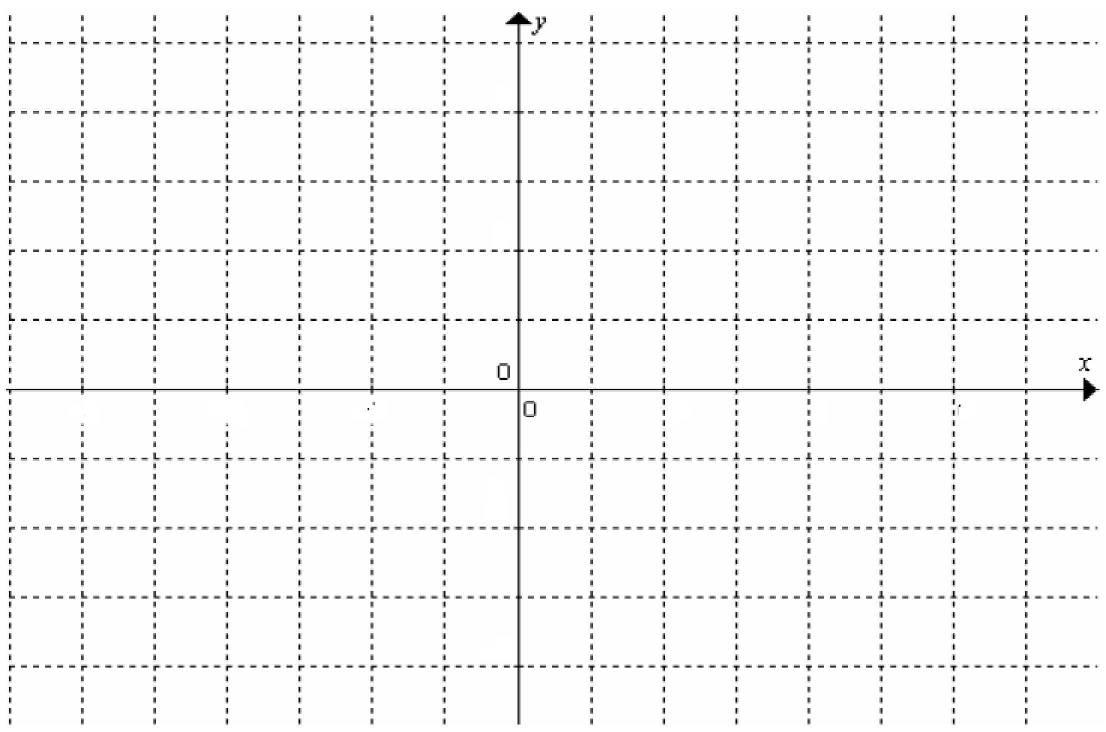
En este caso, la función viene dada a través de un parámetro t. Tienen la forma

$$\begin{cases} y &= f(t) \\ x &= g(t) \end{cases}$$

Esta funciones son muy útiles para representar el movimiento de partículas en el plano. Por ejemplo, tú conoces que $x^2+y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia. Mira la siguiente ecuación parámetrica, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{cases} y &= sen\, t \\ x &= cos\, t \end{cases}$$

¿Crees que tengan algo en común esta ecuación con la de la circunferencia? Antes de tu respuesta te puedo decir que para graficar una paramétrica se le dan valores al parámetro y con ello se van ubicando los puntos en el plano. El plano cartesiano a continuación espera por tu gráfica de la paramétrica.



Actividad 17 *Hallemos y' si $x = t^2, \quad y = \ln t$*

Se quiere conocer la derivada $\frac{dy}{dx}$. El problema, aparente, radica en que, tanto la x como la y están en función de otra variable, el parámetro t. ¿Cuál será la solución?. De nuevo nos viene a ayudar la **regla de la cadena**. Mirando la notación como cociente podemos ver que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

En este caso la t sirve como variable "de pasada", como que sirve para conectar en la derivada. Para el problema particular que tenemos que resolver se tiene

$$\begin{aligned} y &= \ln t \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \\ x &= t^2 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \end{aligned}$$

Como $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$, entonces, al reemplazar en la expresión que define la derivada de la paramétrica se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2x}$$

Te comunico que no es necesario que escribas la derivada final en términos de x, es suficiente con que la dejes en la variable t.

1.1.4. Derivadas de orden superior

Así como se saca la derivada de una función, es posible volver a derivar y obtener una segunda derivada, una tercera, y así sucesivamente. De las derivadas de orden superior, la más importante es la de orden 2. Sus notaciones más usuales para la derivada de $y = f(x)$ son:

$$y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f_{xx}$$

Actividad 18 *Hallar y'' si $x = t^2, \quad y = \ln t$*

Ya sabe que esta función se trabajó en la actividad anterior y que su primera derivada es $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t^2}$, pero se ve mejor si la escribimos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot t^{-2}$$

Esta es la derivada de un producto entre una constante y una función potencia. Veamos como queda escrito el hecho de querer sacar esta derivada aplicando en ambos lados de la igualdad el operador derivada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot t^{-2} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \cdot t^{-2}\right)$$

El lado izquierdo de la ecuación no presenta problemas y sólo tenemos un problema de notación. En el lado derecho tenemos un paréntesis conteniendo t y lo queremos derivar respecto de x. La regla de la cadena se encarga de resolver este "detalle". Tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \cdot t^{-2}\right) \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot t^{-2}\right)\frac{dt}{dx}$$

Ahora si que sí. Las t se derivan con t. Tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\cdot(-2)\,t^{-3}\cdot\frac{dt}{dx}$$

El valor del $\dfrac{dt}{dx}$ se tenía de la actividad anterior, era

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}$$

En consecuencia

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2t^4}$$

Actividad 19 *Hallar y'' si $x^2 - 2xy + y^3 - 1 = 0$*

1.1.5. Derivadas laterales

Tienes que recordar que la derivada no es más que un límite con una forma "very special". Si se podían sacar límites por derecha y por izquierda ¿porqué no se puede hacer lo mismo con la derivada? Obvio, es posible, ello da origen a las derivadas izquierda y derecha. No te asustes todo sigue igual que antes, tanto la derivada por derecha como por la izquierda siguen representando la pendiente de la recta tangente cuando se acerca por izquierda o por derecha al punto. Tenemos un resultado potente:

Teorema 1.5 *Una función f es derivable en un punto x_0 si, y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0, y además las dos derivadas laterales tienen el mismo valor: $f'(x_0)$.*

Notaciones:

- La derivada derecha se define como

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- La derivada izquierda está dada por

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Todo se aclara con un ejemplo

Actividad 20 *Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$*

Veamos las derivadas a izquierda y derecha del $x = 1$ y la conclusión.

Hallemos primero la derivada derecha,

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2(1+h)-1-1}{h} = 2$$

La derivada izquierda es

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

Ambas derivadas son iguales, por tanto, $f'(1) = 2$ y la función es derivable en $x = 1$.

Actividad 21 *Si $f(x) = \begin{cases} x^2+x-10, & 0 \le x < 3 \\ x-1, & x \ge 3 \end{cases}$, encuentra la derivada en $x = 3$.*

Averigua, en primer lugar si esta función es o no continua. A continuación haces tus derivadas laterales.

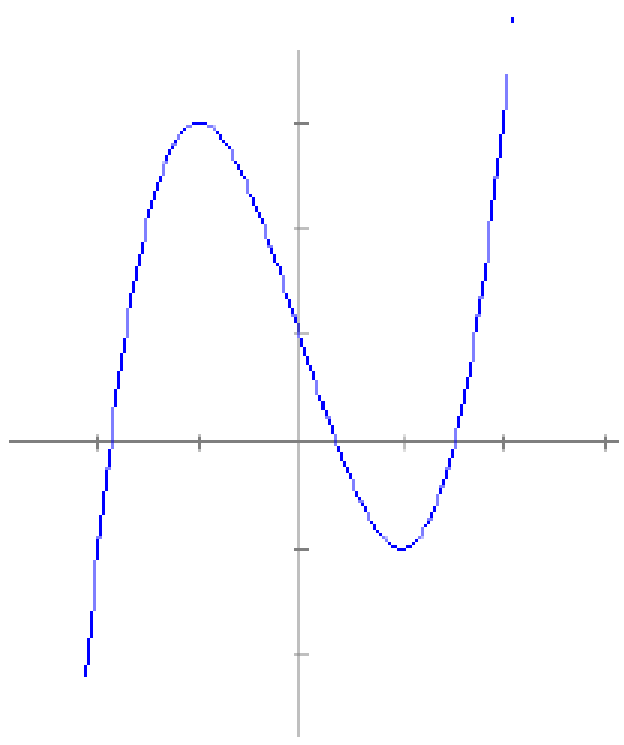
Observación 1.6 *Teniendo en cuenta el concepto de derivadas laterales, si éstas existen pero no coinciden, habrá dos "pendientes", lo que gráficamente implica que la función no sea derivable.*

Tarea 5 *Determina la existencia o no de la derivada de $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{si } x \ge 1 \\ 4x-1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$. Usa un sofware para graficar o a mano y relata que sucede con la gráfica en el punto $(1,3)$*

1.1.6. Continuidad y derivabilidad

Vamos a descubrir la relación que existe entre *continuidad* y *derivabilidad*.

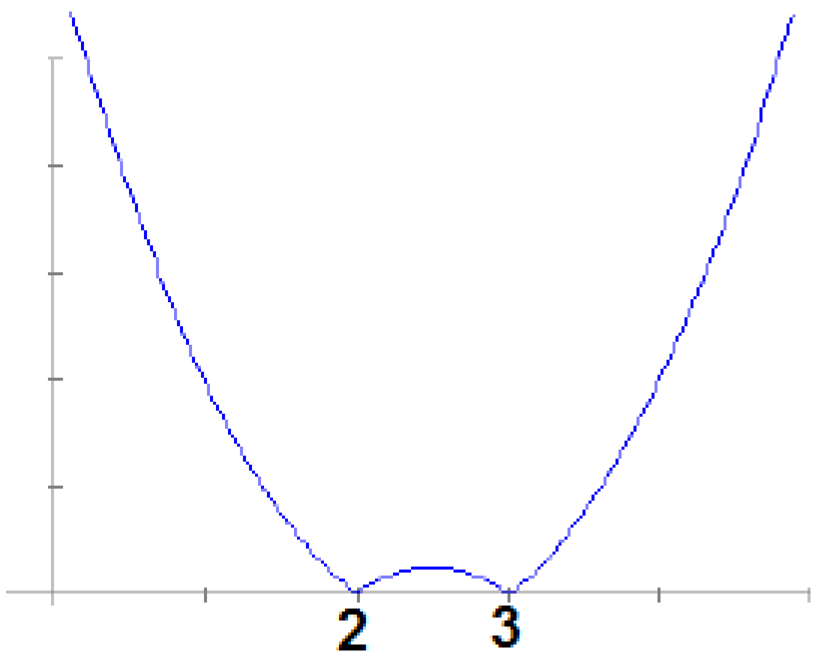
Actividad 22 *Consideramos la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$. ¿es posible trazar la tangente a esta curva en cualquier punto?*



Mirando la gráfica la respuesta parece ser afirmativa. Más aún, mediante las reglas de derivación se puede calcular la derivada en cualquier punto. De forma intuitiva podríamos decir que esta función que nos han dado es continua y derivable en cualquier valor del dominio de la función que, al ser polinómica, son todos los números reales.

Para determinar si una función es derivable usa el elemento geométrico de la recta **tangente** en cada punto a la curva, si la tangente es **única**, entonces es derivable. Se concluye que la función que muestra la figura es derivable.

Actividad 23 *Consideramos la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. ¿Será posible trazar la recta tangente en cualquier punto de la curva?*



La gráfica “al parecer” muestra dos puntos conflictivos. Veremos mediante un proceso algebraico que sucede en esos puntos. Mediante las reglas de derivación no podemos calcular la derivada en ningún punto, ya que no sabemos derivar la función valor absoluto como tal. Por ello, necesitamos expresar la función valor absoluto utilizando la nomenclatura de función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & , \text{ si } x < 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & , \text{ si } 2 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 5x + 6 & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Esta función presenta continuidad en todo punto (lo muestra la gráfica) y además es sencillo probarlo analíticamente. Pero, ¿qué sucede con la derivabilidad? Te muestro la derivada en todo punto diferente de $x = 2$ y $x = 3$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \text{ si } x < 2 \\ -2x + 5 & , \text{ si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

En los puntos $x = 2$ y $x = 3$ hay que estudiar la definición de derivada en un punto, es decir, se debe calcular:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f'(2)$

La derivada derecha es:

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6 - 0}{x - 2} = -1$$

La derivada izquierda es.

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{-x^2 + 5x - 6 - 0}{x - 2} = 1$$

Se concluye que $f'(2)$ NO existe, esto significa que no existe una recta tangente única en el punto de abscisa $x = 2$.

- $f'(3)$

La derivada derecha es:

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6 - 0}{x - 3} = 1$$

La derivada izquierda es.

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{-x^2 + 5x - 6 - 0}{x - 3} = -1$$

Se concluye que $f'(3)$ NO existe, esto significa que no existe una recta tangente única en el punto de abscisa $x = 3$.

Tarea 6 *Estudiar continuidad y derivabilidad de la función*

$$\begin{cases} x^2 & , \text{ si } x < 1 \\ 2x + 7 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Dibuja la función

Apunta en alguna parte destacada de tu cuaderno que la conclusión es:

Toda función derivable en un punto es **continua** en ese punto

De ahora en adelante será sencillo ver gráficamente si una función es o no derivable. Para que una función tenga la categoría de derivable, primero tiene que ser continua y luego no debe presentar “**puntas**”, ello es con el fin que la tangente a la curva sea **única**, no como en el valor absoluto cuya tangente en el origen no lo es.

Tarea 7 *Si* $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, *verifica que es continua en* $x = 1$ *pero no derivable en* $x = 1$.

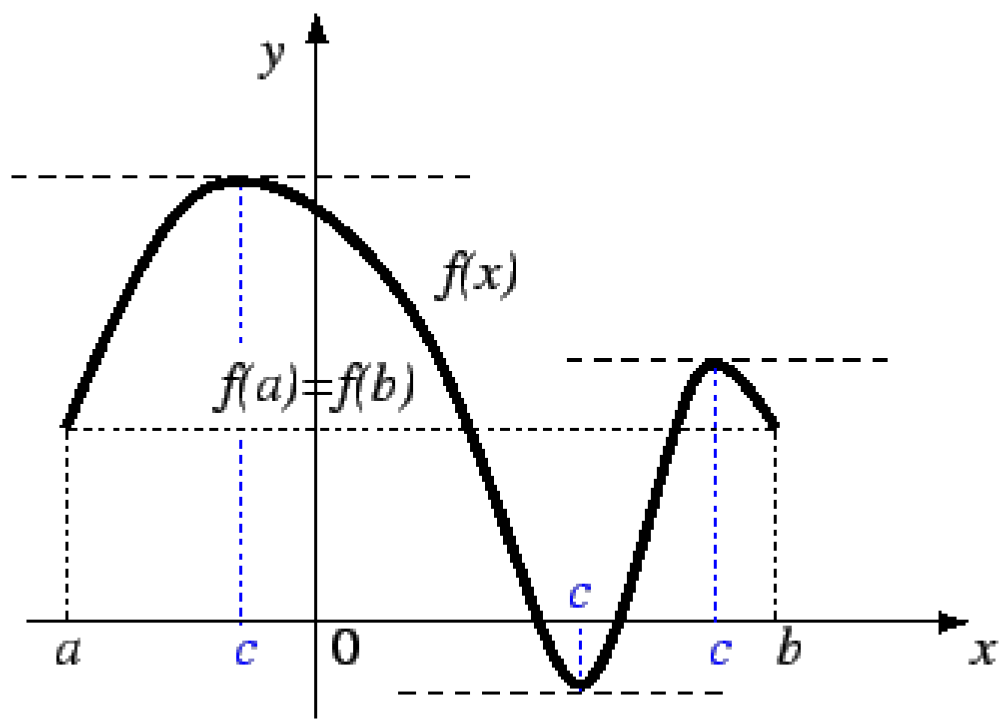
1.1.7. Teorema de Rolle

En términos geométricos este resultado establece que si una función es continua sobre un intervalo cerrado y toma valores iguales en los extremos del intervalo, es decir los puntos correspondientes de la gráfica se encuentran a la misma altura, entonces existe algún punto en el interior del intervalo donde la gráfica de la función presenta una recta tangente paralela al eje de las x. Esto es cierto bajo las siguientes condiciones.

Teorema 1.7 *(Rolle o sobre las raíces de la derivada)* *Sea f una función que cumple las condiciones siguientes:*

- *es continua sobre un intervalo cerrado* $[a, b]$
- *es derivable sobre un intervalo abierto* $]a, b[$
- $f(a) = f(b) = 0$

Entonces existe por lo menos un número real c, $a < c < b$, tal que $f'(c) = 0$.

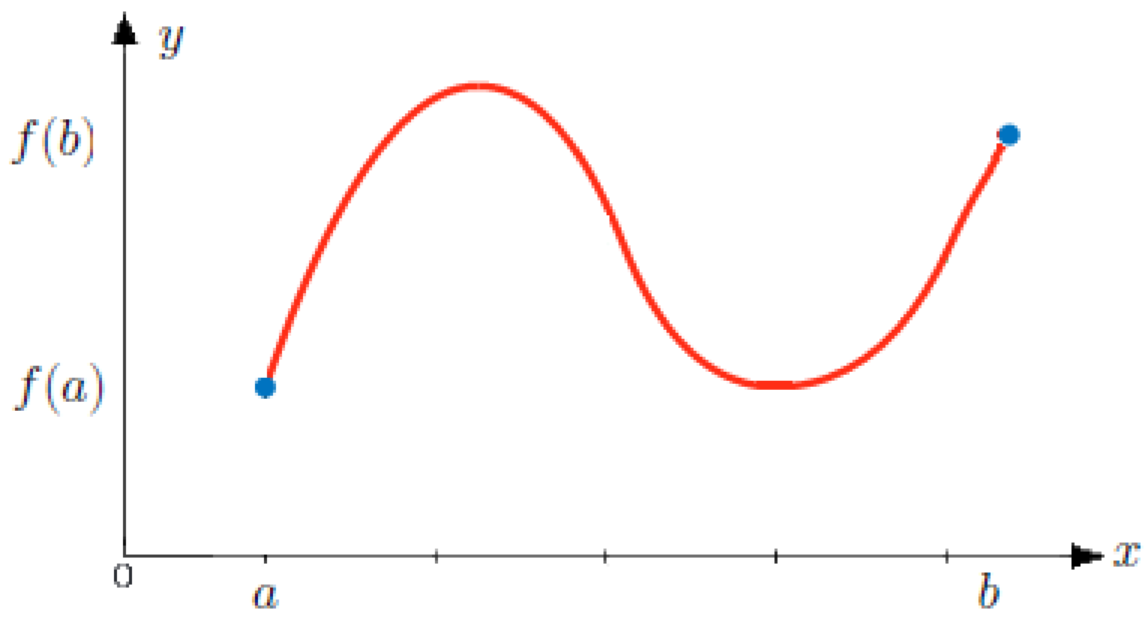


Actividad 24

1. *Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. En caso afirmativo determinar los valores de c.*

2. *Estudiar si la función $f(x) = x^2 - 4x + 11$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 3]$.*

1.1.8. Teorema del Valor Medio



Una pequeña modificación en la actividad anterior conduce al llamado *teorema del valor medio* (TVM). Vamos a encontrar condiciones para que exista un punto de abscisa x_0 en donde la recta tangente a la curva sea paralela a la recta que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$. Usa la figura superior para dar respuestas a las interrogantes que se plantean.

1. Traza, con lápiz de color, la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$
2. Escribe la pendiente de esta recta.
3. Traza, con otro color de lápiz, todas las rectas tangentes a la curva y paralelas a la anterior ¿cuántas encontraste?
4. Si una de las abscisas del punto donde graficaste la tangente se llama x_0, escribe la pendiente en ese punto.
5. Si las rectas son paralelas, ¿cómo son sus pendientes?
6. Escribe con notación matemática que la pendiente en x_0 es la misma que la recta que une los extremos.
7. Si, por algún procedimiento, se gira la curva hasta que coincidan $f(a)$ con $f(b)$ ¿de qué teorema estamos hablando?

Tenemos todos los datos para enunciar el TVM

Teorema 1.8 *(TVM)*
Sea f una función que satisface lo siguiente:

1. *f es una función continua en el intevalo $[a, b]$*
2. *f es una funcion diferenciable en (a, b)*

entonces hay un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Actividad 25 *Verificar que la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ satisface las condiciones del TVM en $[-1, 1]$, halla el valor de c.*

Veamos ahora dos consecuencias del Teorema de Valor Medio.

Proposición 1.9 *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante.*

Ejemplo 1.10 *Probar que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo número real x.*

Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$, entonces

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) = 0$$

Por tanto, f es constante en todo la recta real. Para saber cuál es la constante, evaluamos f en un punto cualesquiera, por ejemplo en $x = 0$. Tenemos

$$f(0) = \operatorname{sen}^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1$$

De lo que se deduce que

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

para todo número real x.

Proposición 1.11 *Sean f, g funciones derivables en un intervalo I tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$. Entonces existe una constante C tal que*

$$f(x) = g(x) + C$$

para todo $x \in I$.

Dicho de otro modo, si dos funciones tienen igual derivada, su diferencia es una constante.

Ejemplo 1.12 *$f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = x^3 - 8$ tienen la misma derivada y lo que las diferencia es una constante*

1.1.9. Funciones crecientes y decrecientes

Proposición 1.13 *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Se tiene:*

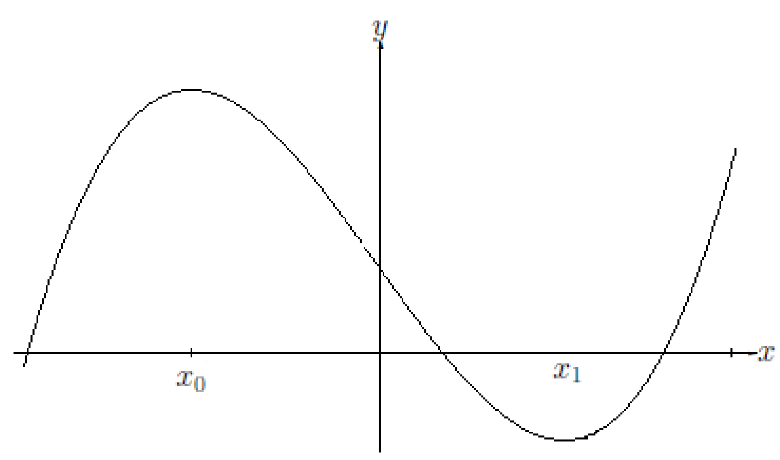
1. *f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ para cada $x \in I$.*
2. *f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leq 0$ para cada $x \in I$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.*
4. *Si $f'(x) < 0$ para cada $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.*

Actividad 26 *Usa la derivada para determinar los intervalos de monotonía de la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.*

1.1.10. Máximos y mínimos

Vamos a ver ahora que de interesantes tienen los puntos donde la derivada es cero

Actividad 27 *Mira la gráfica siguiente y responde lo pedido:*



1. En una vecindad del punto de abscisa x_0 el valor $f(x_0)$ es mayor que en cualquier otro de abscisa x. Escribe esto en notación matemática

   Acabas de descubrir que en x_0 la función tiene un $\boxed{\textbf{máximo local}}$

2. En una vecindad del punto de abscisa x_1 el valor $f(x_1)$ es menor que en cualquier otro de abscisa x. Escribe esto en notación matemática

   Un nuevo descubrimiento: En x_1 la función tiene un $\boxed{\textbf{mínimo local}}$

   Veamos como ayuda la derivada a descubrir estos hechos:

3. Traza sobre la curva las rectas tangentes con pendiente cero
4. La pendiente de la recta tangente a la izquierda del x_0 es (positiva o negativa)
5. La pendiente de la recta tangente a la derecha de x_0 es ....
6. La pendiente de la recta tangente a la izquierda del x_1 es ....
7. La pendiente de la recta tangente a la derecha de x_1 es ....
8. El valor más grande que toma la función tiene abscisa ....
9. El valor más pequeño que toma la función tiene abscisa ....

Basándonos en lo anterior tenemos lo siguiente:

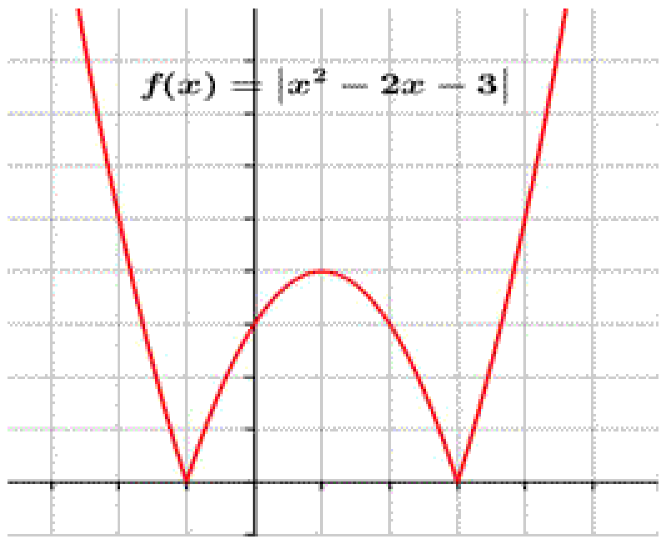
Definición 1.14

La función f tiene un valor **máximo** en el punto de abscisa x_0 si la derivada a izquierda de x_0 es **POSITIVA** y a derecha de x_0 es **NEGATIVA**

La función f tiene un valor **mínimo** en el punto de abscisa x_1 si la derivada a izquierda de x_1 es **NEGATIVA** y a derecha de x_1 es **POSITIVA**

Aquellos valores que anulan la derivada se denominan **puntos críticos**. Estos puntos son los **candidatos** a *máximo* y/o *mínimo*

Actividad 28 *Observa la gráfica de $y = |x^2 - 2x - 3|$ ¿Es la función derivable en $x_0 = 3$?*



Sin embargo, es sencillo darse cuenta que la función tiene un mínimo en $x = 3$. Esto indica que debemos tener cuidado con los puntos en que la derivada no existe.

Actividad 29 *Para la función $f(x) = x^4 - 8x^2$:*

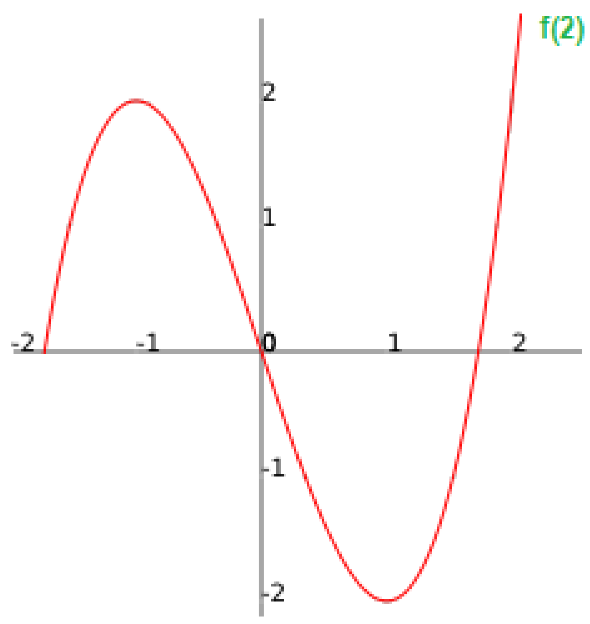
1. Halla los ceros o raíces.
2. Halla la derivada y los valores que la anulan.
3. Halla los puntos críticos.
4. En la recta real determina los signos de la derivada en cada subintervalo.
5. Anota: Punto de máximo y su valor. Punto de mínimo y su valor.

1.1.11. Concavidad y Convexidad

En términos gráficos, una caracterización medianamente aceptable es la siguiente:

- Una función f es **convexa** si al unir dos puntos cualesquiera de la gráfica, el segmento trazado queda por encima de la gráfica.
- Una función es **cóncava** si al unir dos puntos cualesquiera de la gráfica, el segmento trazado queda por debajo de la gráfica.

Actividad 30 *Determina los intervalos en donde la figura siguiente es cóncava y en cuales es convexa*



La caracterización dada nos ayuda bastante, pero no es del todo precisa. La herramienta apropiada y convincente es la derivada de órden 2.

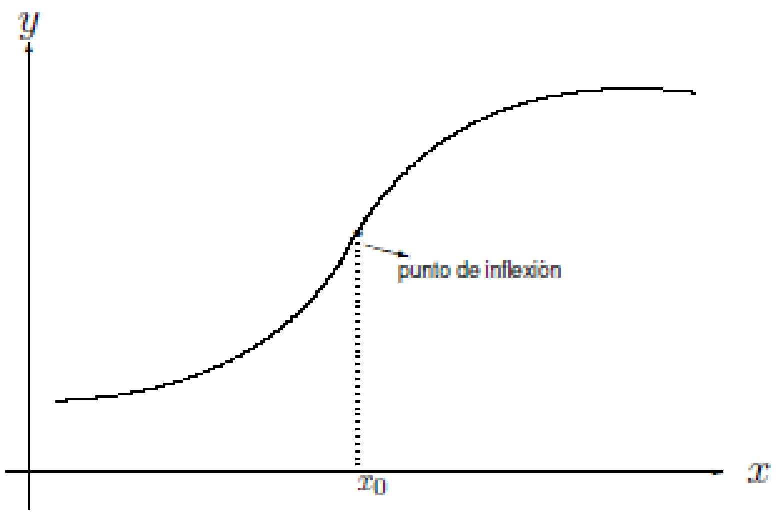
1.1.12. La segunda derivada

La primera derivada de f es f', su **segunda derivada** es f''. Del mismo modo que f' es una medida de la tasa instantánea de cambio en el valor de la función f respecto al cambio que se da en x, también f'' constituye una medida de la tasa instantánea de cambio en el valor de f' respecto al cambio que se produce en x. Otra forma de expresar la misma idea es diciendo que “la segunda derivada es una medida de la tasa instantánea de cambio en la **pendiente** respecto al que se da en x”. Por otra parte, si la función representa a la distancia en función del tiempo, esto es, $s = f(t)$, en donde s es distancia y t tiempo, entonces $s'(t)$ es la velocidad instantánea en cualquier instánte t. La segunda derivada $s''(t)$ es la medida de la tasa instantánea de cambio en la *velocidad* respecto a un cambio en el tiempo. Este cambio en la velocidad se llama **aceleración**.

El hecho que la derivada o bien que la pendiente de la recta tangente crezca o disminuya (aumente de valor o bien disminuya) le da forma a una curva, permitiendo determinar su concavidad.

Actividad 31 *Considerando la figura responder lo siguiente:*

1. Traza un par de tangentes a la curva antes de la abscisa x_0. Determina si el valor de la pendiente de la tangente a la curva, medido de izquierda a derecha, crece o decrece
2. Traza un par de tangentes a la curva después de la abscisa x_0. Determina si el valor de la pendiente de la tangente a la curva, medido de izquierda a derecha, crece o decrece



3. Antes del punto de abscisa x_0 la recta tangente pasa bajo o sobre la curva
4. Después del punto de abscisa x_0 la recta tangente pasa bajo o sobre la curva
5. A derecha de x_0 la curva es ¿cóncava o convexa?
6. A izquierda de x_0 la curva es ¿cóncava o convexa?

Recordar lo siguiente:

- Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo
- Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo

Ahora vamos por la conclusión, sin olvidar que f'' es la derivada de f':

- **Conclusión**
- Si la función f' es creciente en un intervalo, entonces su derivada f'' es mayor que cero en ese intervalo. Eso es lo que pasa antes del x_0 en la figura. Esto es

$$f \text{ convexa} \iff f'' \geq 0$$

- Si la función f' es decreciente en un intervalo, entonces su derivada f'' es menor que cero en ese intervalo. Eso es lo que pasa después del x_0 en la figura. Esto es

$$f \text{ cóncava} \iff f'' \leq 0$$

El punto (el "negrito" ese que aparece en la gráfica) se llama **punto de inflexión**, y corresponde al punto donde se produce el *cambio en la concavidad*

Actividad 32 *Sea* $f(x) = x^3 - 3x$*:*

1. Determina los puntos críticos y su naturaleza.
2. Anota la segunda derivada
3. Anota los valores que anulan la segunda derivada (sólo estos puntos pueden ser de inflexión).
4. Estudia los signos de y'' en cada subintervalo. Estás en condiciones de dar a conocer los intervalos de concavidad.
5. Anota los puntos de inflexión (si existen).

1.1.13. Asíntotas

Como ya sabemos, existe una trilogía de asíntotas: verticales, horizontales y oblícuas. Ahora usaremos la derivada como elemento de apoyo para identificarlas.

- **asíntota horizontal**: La recta $y = c$ es asíntota horizontal al gráfico de $y = f(x)$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$
- **asíntota vertical**: La recta $x = k$ es asíntota vertical al gráfico de $y = f(x)$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to k} f(x) = \pm\infty$
- **asíntota oblícua**: La recta $y = mx + n$ es asíntota oblícua al gráfico de $y = f(x)$ si y sólo si
  - $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
  - $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

Actividad 33 *Sea* $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$

1. Anota el dominio de esta función.
2. Anota los puntos críticos.
3. Estudia el signo de la derivada a cada lado de los puntos críticos.
4. Anota los puntos de máximo y su valor.
5. Anota los puntos de mínimo y que su valor.
6. Escribe los intervalos de monotonía.
7. Escribe los puntos que anulan la segunda derivada.
8. Anota los intervalos de concavidad y convexidad.
9. Escribe los puntos de inflexión, si existen.
10. Calcula las asíntotas.
11. Con todos los datos obtenidos haces el gráfico de la función.

Tarea 8 *Estudia la función* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *siguiendo el esquema de la acividad anterior.*

---

2. Reglas de L'Hôpital

El Marqués Guillaume Francois Antoine de L'Hopital (1661-1704) Francés, por supuesto, en un acto reñido con el "fair play", *copió*, si leiste bien, *copió* las enseñanzas de su maestro Johan Bernouilli y las publicó como si fueran propias.

Pero lo principal es saber ¿para qué sirven estas reglas? Breve pero conciso, para calcular ciertos límites cuyas máscaras tienen formas tales como:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0$$

Las primeras dos "máscaras" son las básicas, todas las demás, por operaciones algebraicas o logarítmicas se reducen a una de esas básicas.

Regla del $\frac{0}{0}$

1. f y g son dos funciones derivables en una vecindad del punto x_0
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Se concluye que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

El L y el x_0 pueden ser real o infinito.

A todo el mundo le encanta sacar límites por las reglas de **L' Hopital**, te puedo asegurar que no vas a ser la excepción

Actividad 34 *Calcular, usando L 'Hopital:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-x^4+x^2-1}{x-1}$

Regla del $\frac{\infty}{\infty}$

1. f y g son dos funciones derivables en una vecindad del punto x_0
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Se concluye que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Si escribimos $\frac{\infty}{\infty} = \frac{1/0}{1/0} = \frac{0}{0}$, estamos en el caso anterior.

El L y el x_0 pueden ser real o infinito.

Actividad 35 *Calcula* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{10}}$

A esta alturas parece inoficioso recordarte que esta sólo es una bitácora, que contiene algo de teoría y pocos ejemplos. La guía de ejercicios, la ayudantía y el texto que conoces hacen el resto.

Veamos como se resuelves otras "máscaras".

Actividad 36 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

El último tipo de límite tiene que ver con la máscara $\infty-\infty$

Actividad 37 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

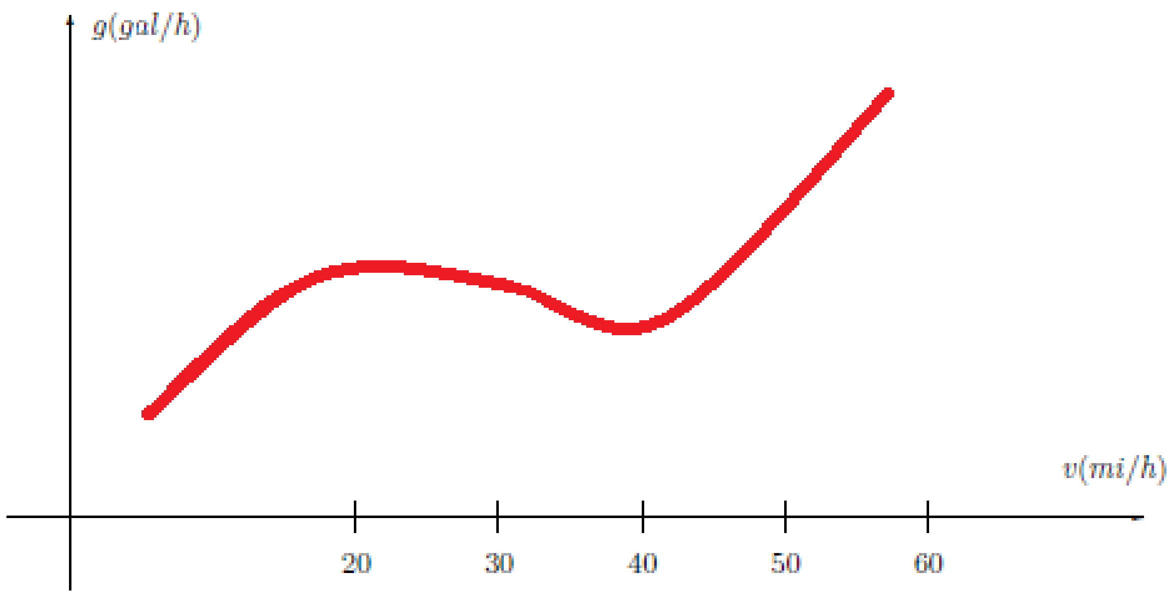
Tarea 9 *Verifica, usando L 'Hôpital, que:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx} = 2$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+\ln^3 x} = \frac{1}{2}$

2.0.14. Problemas de optimización

Con frecuencia es importante determinar el valor máximo o mínimo de una cantidad. Por ejemplo, la mínima cantidad de combustible para un vehículo, la máxima capacidad de un contenedor, el menor tiempo en las colas de los bancos, etc. Todos estos problemas pertenecen al ámbito de la optimización. La derivada proporciona métodos eficientes para resolver muchos de esos y otros problemas.

Actividad 38 *El consumo de gasolina g, en galones por hora, es una función de la velocidad v, en millas por hora, tal como se muestra en la figura. Se quiere minimizar el consumo de gasolina por milla recorrida. El consumo promedio por milla es $G = \frac{g}{v}$*



Esta es de esa clase de problemas en los que la función no está dada y solo debemos trabajar con su gráfica. Por tanto en este caso, derivar la función, encontrar puntos críticos y estudiar si es un máximo o un mínimo no procede. Pero el Cálculo siempre presenta una alternativa eficiente.
Observa lo siguiente:
Hay que minimizar $G = \frac{g}{v}$ con solo la gráfica que relaciona g con v. Como $\frac{g}{v}$ es la pendiente de la recta que une el origen del sistema con un punto P cualquiera sobre la curva, entonces hay que encontrar ese punto P en donde la pendiente de esa recta sea mínima.

1. Elige 2 puntos cualesquiera sobre la curva. Traza las rectas que unen el origen con cada punto. Usa lápiz de color diferente.
2. De las rectas trazadas dime cuál tiene menor pendiente
3. Encuentra el punto P sobre la curva en donde la recta, que nace en el origen de coordenadas, tiene la menor pendiente.
4. Dime que tipo de recta es la que minimiza ....

5. En consecuencia, para minimizar el gasto de gasolina se debe manejar más o menos a .... mi/h.

Actividad 39

1. *Dividir el número 10 en dos partes de tal modo que la suma del doble de una de ellas y el cuadrado de la otra sea mínima*
2. *Hallar los lados del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. *Te aconsejo hacer un esquema gráfico de la situación para ubicar "estratégicamente" el rectángulo.*
3. *Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y tales que el producto de 2 veces uno de los números, y el cuadrado del otro sean un máximo.*
4. *El propietario de un terreno de forma rectangular de 1000 metros cuadrados de área quiere cercarlo y dividirlo en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados extremos. Hallar el número mínimo de metros de cerca necesarios.*
5. *El costo por hora* c *de operar un automóvil está dado por*
$$c = 0,12s - 0,0012s^2 + 0,08$$
donde s *es la velocidad en kilómetros por hora. Hallar la velocidad que produce el costo mínimo por hora*

Tarea 10

1. *Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 centímetros de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encontrar la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?*
2. *Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 centímetros cuadrados para material impreso; márgenes de 3 centímetros arriba y abajo y de 2 centímetros a cada lado. Encontrar las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima.*
3. *Descomponer el número 8 en dos partes, tales que la suma de sus cubos sea mínima.*