Normas de vectores y matrices

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez

Conferencia 14

Conferencia 14

Introducción del concepto

Definición

Las normas $||x||_1$, $||x||_2$ y $||x||_\infty$ de un vector $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ se definen como:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}; \quad ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Ejemplo: Si $x^T = (-1, 1, -2)$, entonces

- $||x||_1 = 1 + 1 + 2 = 4$,
- $||x||_2 = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$,
- $||x||_\infty = \max\{|-1|, |1|, |2|\} = 2$

Motivación

Las normas vectoriales:

- Extienden la noción de valor absoluto
- Permiten medir las distancias entre vectores
- Son la base para el concepto de convergencia

Propiedades básicas

Axiomas de las normas

$$\begin{array}{ll} (i) & ||x|| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ (ii) & ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ (iii) & ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ (iv) & ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$|x^T y| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = ||x||_2 \cdot ||y||_2$$

Teorema (Equivalencia de normas)

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n} ||x||_\infty$$

Distancia basada en norma

Definición

Dado dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ la distancia entre ellos (según la norma) se define como:

$$||x-y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}; \quad ||x-y||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

Ejemplo

Si $x^T = (1, 1, 1)$ y $\tilde{x}^T = (1.2001, 0.99991, 0.92538)$ entonces

$$\begin{aligned} ||x-\tilde{x}||_2 &= \sqrt{(1.2001-1)^2 + (0.99991-1)^2 + (0.92538-1)^2} \\ ||x-\tilde{x}||_2 &= \sqrt{(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2} = 0.21356 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||x||_\infty &= \max\{|1.2001-1|, |0.99991-1|, |0.92538-1|\} \\ ||x||_\infty &= \max\{|0.2001|, |0.00009|, |0.07462|\} = 0.2001 \end{aligned}$$

Convergencia

Definición

Una sucesión $\{x^k\}$ de $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si, para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural positivo $N(\epsilon)$ tal que

$$||x^k - x|| \leq \epsilon, \quad \forall k \geq N(\epsilon)$$

Teorema

Una sucesión $\{x^k\}$ de $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si y solo si, $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo

La sucesión $\{x^k\}$ de $\mathbb{R}^4$ definida como

$$(x^k)^T = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k) = (1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k} sen(k))$$

converge al vector $x^T = (1, 2, 0, 0)$.

Aspectos básicos

Definición (axiomática)

Una norma matricial $||.||$ es una función con valores reales definida sobre las matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ y que satisface las siguientes propiedades para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$
\begin{array}{ll}
(i) & ||A|| \geq 0 \\
(ii) & ||A|| = 0 \iff A = 0 \\
(iii) & ||\alpha A|| = |\alpha|||A|| \\
(iv) & ||A + B|| \leq ||A|| + ||B|| \\
(v) & ||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||
\end{array}
$$

Teorema (Normas naturales o inducidas)

Si $||.||$ es una norma de vectores (por ejemplo $||.||_2$ ó $||.||_\infty$) entonces la siguiente expresión genera una norma matricial

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Ejemplos y Propiedades

Ejemplos de normas matriciales

$$||A||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2; \quad ||A||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$$

Observación

Si $||.||$ es una norma inducida, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se cumple:

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

Teorema (Cálculo de norma inducida)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz, entonces

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejemplos y Propiedades

Teorema (Cálculo de norma inducida infinita)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz, entonces

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejemplo

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

- $||A||_1 = \max\{|1| + |0| + |5|; |2| + |3| + |-1|; |-1| + |-1| + |1|\} = 6$
- $||A||_\infty = \max\{|1| + |2| + |-1|; |3| + |-1|; |5| + |-1| + |1|\} = 7$

Radio espectral

Definición

El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define como

$$\rho(A) = \max |\lambda|$$

donde λ es cualquier valor propio de A (también complejo).

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{3}$

$$\rho(A) = \max\{|1|, |1 + i\sqrt{3}|, |1 - i\sqrt{3}|\} = \max\{1, 2, 2\} = 2$$

Propiedades

Teorema (Cálculo de la norma inducida $||.||_2$)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $||.||$ una norma inducida cualquiera, entonces

$$\begin{array}{ll} (i) & ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ (ii) & \rho(A) \leq ||A|| \end{array}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Valores propios de $A^T A$: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 7 + \sqrt{7}$; $\lambda_3 = 7 - \sqrt{7}$

$$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\max\{0, 7+\sqrt{7}, 7-\sqrt{7}\}} = \sqrt{7+\sqrt{7}} \approx 3.106$$