Ciencias de la Computación I

Inducción Matemática

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

5 de septiembre de 2016

Principio del buen orden

Una propiedad importante y bien interesante que cumple el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ es la siguiente:

Principio del buen orden

Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un elemento mínimo. (Con frecuencia se dice que $\mathbb{Z}^+$ es bien ordenado).

Este enunciado dintingue $\mathbb{Z}^+$ de $\mathbb{R}$ y otros subconjuntos de $\mathbb{R}$, y además es la base de una técnica de demostración conocida como la inducción matemática.

Principio de Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática

Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

1. Si $S(1)$ es verdadera; y
2. siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), entonces $S(k+1)$ será verdadera; entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplos

- Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.
- Se definen los números armónicos H_n como

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

  Pruebe que $H_{2^n} \leq 1 + n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Pruebe también que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Inducción Forma Alternativa

Principio de Inducción Matemática

Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), donde la variable n, que representa a un entero positivo, aparace una o más veces. Además, sean $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$.

1. Si $S(n_0), S(n_0+1), \ldots, S(n_1-1), S(n_1)$ son verdaderas; y
2. siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), entonces $S(k+1)$ será verdadera; entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Ejemplos

- Todo número entero mayor o igual a 14 se puede escribir como suma de treses y ochos.
- Consideremos la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ donde

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \quad \forall n \geq 3$$

  Pruébese que $a_n \leq 3^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Consideremos la sucesión $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ donde

$$p_0 = 3, p_1 = 7$$

$$p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

  Pruébese que $p_n = 2^{n+2} - 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definiciones Recursivas

Cuando trabajamos con una sucesión de números enteros, podemos definirla en base a una fórmula explícita que dependa de n. Pero no todas las sucesiones son fáciles de definir en base a fórmulas. En algunos casos, es mucho más fácil definirlas en base a su propia definición. A esto último, es lo que llamamos **recursividad** o **definiciones recursivas**.

Ejemplos

- $n!$
- Los números de Fibonacci.
- Las torres de Hanoi.

Recursividades Famosas

- Los números de Fibonacci se definen de forma recursiva como
  1. $F_0 = 0, \quad F_1 = 1$; y
  2. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$.

  Esta sucesión cumple

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \times F_{n+1}$$

- Los números de Lucas se definen recursivamente como
  1. $L_0 = 2, \quad L_1 = 1$; y
  2. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$.

  y cumplen

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$