CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

24

?La energía utilizada en la unidad de un flash de una cámara fotográfica se almacena en un capacitor, el cual consiste en dos conductores cercanos entre sí y con cargas opuestas. Si la cantidad de carga en los conductores se duplica, ¿en qué factor se incrementa la energía almacenada?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

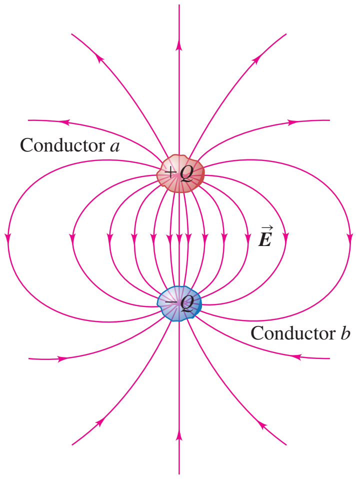
- La naturaleza de los capacitores y la forma de calcular una cantidad que mide su capacidad para almacenar carga.
- Cómo analizar capacitores conectados en una red.
- A calcular la cantidad de energía almacenada en un capacitor.
- Qué son los dieléctricos y cómo forman capacitores más eficaces.

Cuando preparamos una ratonera antigua de resorte o tensamos la cuerda de un arco, almacenamos energía mecánica en forma de energía potencial elástica. Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial *eléctrica* y carga eléctrica. Para hacer un capacitor, basta aislar dos conductores uno del otro. Para almacenar energía en este dispositivo hay que transferir carga de un conductor al otro, de manera que uno tenga carga negativa y en el otro haya una cantidad igual de carga positiva. Debe realizarse trabajo para trasladar las cargas a través de la diferencia de potencial resultante entre los conductores, y el trabajo efectuado se almacena como energía potencial eléctrica.

Los capacitores tienen un gran número de aplicaciones prácticas en dispositivos tales como unidades de flash electrónicas para fotografía, láseres de pulso, sensores de bolsas de aire para automóviles y receptores de radio y televisión. En capítulos posteriores encontraremos muchas de estas aplicaciones (en particular en el capítulo 31, en el que se verá el papel crucial que desempeñan los capacitores en los circuitos de corriente alterna que invaden nuestra sociedad tecnológica). Sin embargo, en este capítulo el énfasis está en las propiedades fundamentales de los capacitores. Para un capacitor en particular, la razón entre la carga de cada conductor y la diferencia de potencial entre los conductores es una constante llamada *capacitancia*. La capacitancia depende de las dimensiones y las formas de los conductores y del material aislante (si lo hay) entre ellos. En comparación con el caso en que sólo hay vacío entre los conductores, la capacitancia aumenta cuando está presente un material aislante (un *dieléctrico*). Esto sucede porque en el interior del material aislante ocurre una redistribución de la carga, llamada *polarización*. El estudio de la polarización ampliará nuestra perspectiva de las propiedades eléctricas de la materia.

Los capacitores también ofrecen una forma nueva de pensar acerca de la energía potencial eléctrica. La energía almacenada en un capacitor con carga, guarda relación con el campo eléctrico en el espacio entre los conductores. Veremos que la energía potencial eléctrica puede considerarse almacenada *en el mismo campo*. La idea de que el campo eléctrico es en sí un almacén de energía está en el corazón de la teoría de las ondas electromagnéticas y de nuestra concepción moderna de la naturaleza de la luz, que estudiaremos en el capítulo 32.

24.1 Dos conductores cualesquiera *a* y *b* aislados uno del otro forman un capacitor.

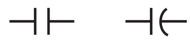


ActivPhysics ONLINE
11.11.6 Potencial eléctrico: introducción cualitativa
11.12.1 y 11.12.3 Potencial, campo y fuerza eléctricos

24.1 Capacitores y capacitancia

Dos conductores separados por un aislante (o vacío) constituyen un **capacitor** (figura 24.1). En la mayoría de las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta cero, y los electrones son transferidos de un conductor al otro; a esta acción se le denomina *cargar* el capacitor. Entonces, los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y signo contrario, y la carga *neta* en el capacitor en su conjunto permanece igual a cero. En este capítulo se supondrá que éste es el caso. Cuando se dice que un capacitor tiene carga Q, o que una carga Q está *almacenada* en el capacitor, significa que el conductor con el potencial más elevado tiene carga $+Q$ y el conductor con el potencial más bajo tiene carga $-Q$ (si se supone que Q es positiva). Hay que tener presente esto en el análisis y los ejemplos que siguen.

En los diagramas de circuito, un capacitor se representa con cualquiera de estos símbolos:



En cada uno de estos símbolos, las líneas verticales (rectas o curvas) representan los conductores, y las líneas horizontales representan los alambres conectados a uno y otro conductor. Una manera común de cargar un capacitor es conectar estos dos alambres a las terminales opuestas de una batería. Una vez establecidas las cargas Q y $-Q$ en los conductores, se desconecta la batería. Esto da una *diferencia de potencial* fija V_{ab} entre los conductores (es decir, el potencial del conductor con carga positiva *a* con respecto al potencial del conductor con carga negativa *b*), que es exactamente igual al voltaje de la batería.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de carga en cada conductor. Por lo tanto, la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores también es proporcional a Q. Si se duplica la magnitud de la carga en cada conductor, también se duplican la densidad de carga en cada conductor y el campo eléctrico en cada punto, al igual que la diferencia de potencial entre los conductores; sin embargo, la *razón* entre la carga y la diferencia de potencial no cambia. Esta razón se llama **capacitancia** C del capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad \text{(definición de capacitancia)} \tag{24.1}$$

La unidad del SI para la capacitancia es el **farad** (1 F), en honor del físico inglés del siglo XIX, Michael Faraday. De acuerdo con la ecuación (24.1), un farad es igual a un *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

CUIDADO **Capacitancia contra coulombs** No confunda el símbolo C para la capacitancia (que siempre está en cursivas) con la abreviatura C de los coulombs (que nunca se escribe con cursivas).

Cuanto mayor es la capacitancia C de un capacitor, mayor será la magnitud Q de la carga en el conductor de cierta diferencia de potencial dada V_{ab}, y, por lo tanto, mayor será la cantidad de energía almacenada. (Hay que recordar que el potencial es energía potencial por unidad de carga.) Así, *la capacitancia es una medida de la aptitud (capacidad) de un capacitor para almacenar energía*. Se verá que el valor de la capacitancia sólo depende de las formas y los tamaños de los conductores, así como de la naturaleza del material aislante que hay entre ellos. (El comentario anterior acerca de que la capacitancia es independiente de Q y de V_{ab} no se aplica a ciertos tipos especiales de materiales aislantes. Sin embargo, en este libro no se estudiarán esos materiales.)

Cálculo de la capacitancia: Capacitores con vacío

Es posible calcular la capacitancia C de un capacitor dado encontrando la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores para una magnitud de carga dada Q y aplicando la ecuación (24.1). Por ahora sólo se considerarán *capacitores con vacío*; es decir, se supondrá que los conductores que constituyen el capacitor están separados por un espacio vacío.

La forma más sencilla de un capacitor consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones (figura 24.2a). Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico está localizado casi por completo en la región entre las placas (figura 24.2b). Como se dijo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4), el campo entre esas placas es esencialmente *uniforme*, y las cargas en las placas se distribuyen de manera uniforme en sus superficies opuestas. Este arreglo recibe el nombre de **capacitor de placas paralelas**.

En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) se calculó la magnitud del campo eléctrico E para este arreglo utilizando el principio de superposición de campos eléctricos, y de nuevo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4) empleando la ley de Gauss. Sería una buena idea revisar esos ejemplos. Se vio que $E = \sigma/\epsilon_0$, donde σ es la magnitud (valor absoluto) de la densidad superficial de carga en cada placa. Esto es igual a la magnitud de la carga total Q en cada placa dividida entre el área A de la placa, o bien, $\sigma = Q/A$, por lo que la magnitud del campo E se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es d, por lo que la diferencia de potencial (voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

A partir de esto se observa que la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas con vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{(capacitancia de un capacitor de placas paralelas con vacío)} \qquad (24.2)$$

La capacitancia sólo depende de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación d. Las cantidades A y d son constantes para un capacitor dado, y ϵ_0 es una constante universal. Así, con vacío la capacitancia C es una constante independiente de la carga en el capacitor o de la diferencia de potencial entre las placas. Si una de las placas del capacitor es flexible, la capacitancia C cambia conforme cambia la separación d de las placas. Éste es el principio de operación de un micrófono condensador (figura 24.3).

Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades afectan la capacitancia. En la sección 24.4 se volverá a tratar este asunto. Entre tanto, se debe hacer notar que si el espacio entre las placas contiene aire a presión atmosférica en lugar de vacío, la capacitancia difiere de lo que predice la ecuación (24.2) en menos del 0.06%.

En la ecuación (24.2), si A se expresa en metros cuadrados y d en metros, C está en farads. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$, por lo que se observa que

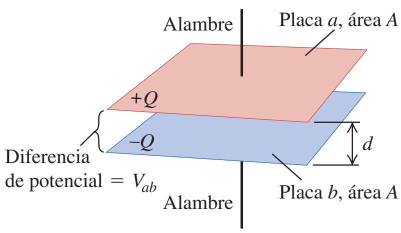
$$1\ F = 1\ C^2/N \cdot m = 1\ C^2/J$$

Como $1\ V = 1\ J/C$ (energía por unidad de carga), esto es congruente con la definición $1\ F = 1\ C/V$. Por último, las unidades de ϵ_0 se expresan como $1\ C^2/N \cdot m^2 = 1\ F/m$, por lo que

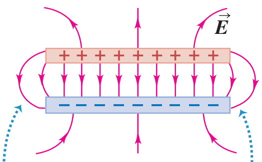
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

24.2 Capacitor de placas paralelas con carga.

a) Arreglo de las placas del capacitor

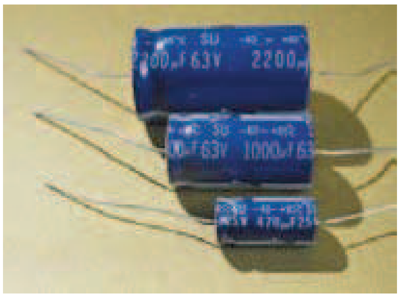


b) Vista lateral del campo eléctrico $\vec{E}$



24.3 Dentro de un micrófono condensador hay un capacitor con una placa rígida y una placa flexible. Las dos placas se mantienen con una diferencia de potencial constante V_{ab}. Las ondas sonoras provocan que la placa flexible se mueva hacia delante y atrás, lo que hace variar la capacitancia C y ocasiona que la carga fluya hacia y desde el capacitor de acuerdo con la relación $C = Q/V_{ab}$. Así, la onda sonora se convierte en un flujo de carga que puede amplificarse y grabarse en forma digital.

24.4 Los capacitores comerciales están rotulados con el valor de su capacitancia. Para estos capacitores, $C = 2200\ \mu\text{F}$, $1000\ \mu\text{F}$ y $470\ \mu\text{F}$.



Esta relación es útil en los cálculos de la capacitancia y también ayuda a comprobar que la ecuación (24.2) es consistente en términos de dimensiones.

Un farad es una capacitancia muy grande, como lo ilustra el siguiente ejemplo. En muchas aplicaciones, las unidades más convenientes de capacitancia son el *microfarad* ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$) y el *picofarad* ($1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$). Por ejemplo, la unidad de flash de las cámaras fotográficas utiliza un capacitor de algunos cientos de microfarads (figura 24.4), mientras que las capacitancias en el circuito de sintonía de un aparato de radio por lo común están entre 10 y 100 picofarads.

Para *cualquier* capacitor con vacío, la capacitancia C sólo depende de las formas, las dimensiones y la separación de los conductores que constituyen el capacitor. Si las formas del conductor son más complejas que las del capacitor de placas paralelas, la expresión de la capacitancia es más complicada que la ecuación (24.2). En los siguientes ejemplos mostraremos cómo calcular C para otras dos geometrías distintas de conductores.

Ejemplo 24.1 Tamaño de un capacitor de 1 F

Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 1.0 F. Si las placas tienen una separación de 1.0 mm, ¿cuál es el área de las placas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre la capacitancia, la separación de las placas y el área de éstas (la variable que se busca) para un capacitor de placas paralelas.

PLANTEAR: Se dan los valores de C y d para un capacitor de placas paralelas, por lo que se emplea la ecuación (24.2) y se despeja la variable buscada A.

EJECUTAR: De la ecuación (24.2), el área A es

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}}$$
$$= 1.1 \times 10^{8}\ \text{m}^2$$

EVALUAR: Esto corresponde a un cuadrado ¡de alrededor de 10 km (cerca de 6 millas) de lado! Esta área es la tercera parte de la isla de Manhattan. Es obvio que éste no es un diseño muy práctico para un capacitor.

De hecho, ahora es posible fabricar capacitores de 1 F que miden unos cuantos centímetros de lado. La clave está en que exista una sustancia apropiada entre las placas en vez del vacío. En la sección 24.4 se estudiará esto con más detalle.

Ejemplo 24.2 Propiedades de un capacitor de placas paralelas

Las placas paralelas de un capacitor con vacío están separadas una distancia de 5.00 mm y tienen $2.00\ \text{m}^2$ de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10,000 V (10.0 kV) a través del capacitor. Calcule *a*) la capacitancia, *b*) la carga en cada placa y *c*) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se tienen los datos del área de las placas A, la separación d entre ellas y la diferencia de potencial V_{ab} para este capacitor de placas paralelas. Las variables que se buscan son la capacitancia C, la carga Q y la magnitud del campo eléctrico E.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (24.2) para calcular C y después se encuentra la carga Q en cada placa por medio de la diferencia de potencial dada V_{ab} y la ecuación (24.1). Una vez que se conoce Q, se encuentra el campo eléctrico entre las placas a partir de la relación $E = Q/\epsilon_0 A$.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (24.2)

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(2.00\ \text{m}^2)}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 3.54 \times 10^{-9}\ \text{F} = 0.00354\ \mu\text{F}$$

b) La carga en el capacitor es

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9}\ \text{C/V})(1.00 \times 10^{4}\ \text{V})$$
$$= 3.54 \times 10^{-5}\ \text{C} = 35.4\ \mu\text{C}$$

La placa con mayor potencial tiene una carga de $+35.4\ \mu\text{C}$, y la otra tiene $-35.4\ \mu\text{C}$.

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00\ \text{m}^2)}$$
$$= 2.00 \times 10^{6}\ \text{N/C}$$

EVALUAR: Una forma alternativa de llegar al resultado del inciso *c*) es recordar que el campo eléctrico tiene igual magnitud que el gradiente de potencial [ecuación (23.22)]. Como el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^{4}\ \text{V}}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.00 \times 10^{6}\ \text{V/m}$$

(Recuerde que el newton por coulomb y el volt por metro son unidades equivalentes.)

Ejemplo 24.3 Capacitor esférico

Dos corazas conductoras esféricas y concéntricas están separadas por vacío. La coraza interior tiene una carga total $+Q$ y radio exterior r_a, y la coraza exterior tiene carga $-Q$ y radio interior r_b (figura 24.5). (La coraza interior está unida a la coraza exterior mediante delgadas varillas aislantes que tienen un efecto despreciable sobre la capacitancia.) Determine la capacitancia del capacitor esférico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste no es un capacitor de placas paralelas, por lo que no es posible utilizar las relaciones desarrolladas para esa geometría particular. En vez de ello, regresaremos a la definición fundamental de capacitancia: la magnitud de la carga en cualquier conductor dividida entre la diferencia de potencial de los conductores.

PLANTEAR: Emplearemos la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico entre los conductores esféricos. A partir de este valor se determina la diferencia de potencial V_{ab} entre los dos conductores; después usaremos la ecuación (24.1) para encontrar la capacitancia $C = Q/V_{ab}$.

EJECUTAR: Con el mismo procedimiento del ejemplo 22.5 (sección 22.4), se toma como superficie gaussiana una esfera con radio r entre las dos esferas y que sea concéntrica con respecto a éstas. La ley de Gauss (ecuación 22.8) establece que el flujo eléctrico a través de esta superficie es igual a la carga total encerrada dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Por simetría, $\vec{E}$ es de magnitud constante y paralela a $d\vec{A}$ en cada punto de esta superficie, por lo que la integral en la ley de Gauss es igual a $(E)(4\pi r^2)$. La carga total encerrada es $Q_{enc} = Q$, por lo que se tiene

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico entre las esferas sólo es el que se debe a la carga en la esfera interior; la esfera exterior no tiene ningún efecto. En el ejemplo 22.5 vimos que la carga en una esfera conductora produce un campo igual a cero *dentro* de la esfera, lo que también nos indica que el conductor exterior no contribuye al campo entre los conductores.

La expresión anterior para E es la misma que la correspondiente a una carga puntual Q, por lo que la expresión para el potencial también puede tomarse como la misma que la correspondiente a una carga puntual, $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. De ahí que el potencial del conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Por último, la capacitancia es

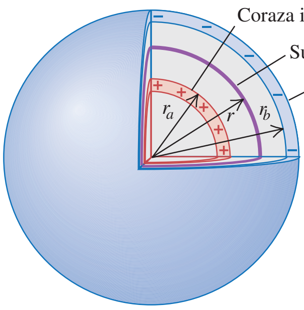
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\,\text{F/m})\frac{(0.095\,\text{m})(0.105\,\text{m})}{0.010\,\text{m}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-10}\,\text{F} = 110\,\text{pF}$$

EVALUAR: Podemos relacionar este resultado con la capacitancia de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la *media geométrica* de las dos áreas, lo que se denota con A_{gm}. La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, por lo que el resultado anterior se escribe como $C = \epsilon_0 A_{gm}/d$. Ésta es exactamente la misma forma que para placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. La conclusión es que si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, las esferas se comportan como placas paralelas con la misma área y separación.

24.5 Capacitor esférico.



Ejemplo 24.4 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico largo tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por una coraza conductora cilíndrica coaxial con radio interior r_b y densidad lineal de carga $-\lambda$ (figura 24.6). Calcule la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor, suponiendo que hay vacío en el espacio entre los cilindros.

SOLUCIÓN

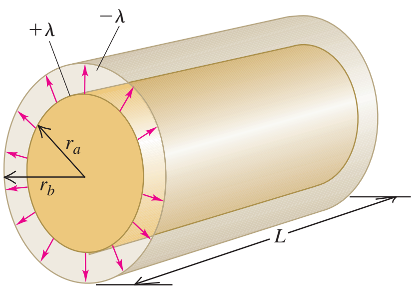
IDENTIFICAR: Igual que en el ejemplo 24.3, se usa la definición fundamental de capacitancia.

PLANTEAR: Primero se encuentran expresiones para la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros y la carga Q en una longitud L de los cilindros; después se encuentra la capacitancia de una longitud L mediante la ecuación (24.1). La variable buscada es esta capacitancia dividida entre L.

EJECUTAR: Para encontrar la diferencia de potencial entre los cilindros, se utiliza el resultado que se obtuvo en el ejemplo 23.10 (sección

continúa

24.6 Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad lineal de carga λ se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud L de cualquier cilindro es λL.



23.3). Ahí se determinó que en un punto afuera de un cilindro con carga a una distancia r de su eje, el potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio (arbitrario) en el que $V = 0$. En este problema, se puede usar este mismo resultado para el potencial *entre* los cilindros porque, de acuerdo con la ley de Gauss, la carga en el cilindro exterior no contribuye al campo entre los cilindros (véase el ejemplo 24.3). En nuestro caso, se toma el radio r_0 como r_b, el radio de la superficie interior del cilindro exterior, de manera que el cilindro conductor exterior está en $V = 0$. Entonces, el potencial en la superficie exterior del cilindro interior (donde $r = r_a$) es igual al potencial V_{ab} del cilindro interior a (positivo) con respecto al cilindro exterior b (negativo), es decir,

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Esta diferencia de potencial es positiva (si se toma λ como positiva, como en la figura 24.6) porque el cilindro interior está a un potencial más elevado que el del exterior.

La carga total Q en una longitud L es $Q = \lambda L$, por lo que, de la ecuación (24.1), la capacitancia C de una longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

Si se sustituye $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m} = 8.85\ \mathrm{pF/m}$, se obtiene

$$\frac{C}{L} = \frac{55.6\ \mathrm{pF/m}}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

EVALUAR: Se observa que la capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por las dimensiones, tal como ocurre en el caso de las placas paralelas. Los cables coaxiales comunes están fabricados de este modo, pero entre los conductores interior y exterior tienen un material aislante en vez de vacío. El cable típico para las antenas de televisión y conexiones de videograbadoras tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m.

Evalúe su comprensión de la sección 24.1 Un capacitor tiene vacío en el espacio entre los conductores. Si se duplica la cantidad de carga en cada conductor, ¿qué pasa con la capacitancia? i) aumenta; ii) disminuye; iii) permanece igual; iv) la respuesta depende del tamaño o la forma de los conductores.

MP

24.2 Capacitores en serie y en paralelo

24.7 Algunos de los capacitores disponibles en el comercio.

Los capacitores se fabrican con ciertas capacitancias y voltajes de trabajo estándares (figura 24.7). Sin embargo, estos valores estándar podrían no ser los que se necesiten en una aplicación específica. Se pueden obtener los valores requeridos combinando capacitores; son posibles muchas combinaciones, pero las más sencillas son la conexión en serie y la conexión en paralelo.

Capacitores en serie

La figura 24.8a es un diagrama de una **conexión en serie**. Se conectan en serie dos capacitores (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos a y b. Al principio ambos capacitores están inicialmente sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial V_{ab} positiva y constante entre los puntos a y b, los capacitores se cargan; la figura muestra que la carga en *todas* las placas conductoras tiene la misma magnitud. Para saber por qué, primero observe que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q. El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello se requiere que la placa inferior tenga carga $-Q$. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2, la cual se carga positivamente con carga $+Q$. Luego, esta carga positiva atrae la carga negativa $-Q$ desde la conexión en el punto b a la placa inferior de

C_2. La carga total en la placa inferior de C_1 y la placa superior de C_2, en conjunto, debe ser siempre igual a cero porque tales placas sólo están conectadas una con otra y con nada más. Así, *en una conexión en serie, la magnitud de la carga en todas las placas es la misma.*

En relación con la figura 24.8a, las diferencias de potencial entre los puntos a y c, c y b, y a y b, pueden representarse como

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

por lo que

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$

Por una convención común, los símbolos V_1, V_2 y V se utilizan para denotar las *diferencias* de potencial V_{ac} (a través del primer capacitor), V_{cb} (a través del segundo capacitor) y V_{ab} (a través de toda la combinación de capacitores), respectivamente.

La **capacitancia equivalente** C_{eq} de la combinación en serie se define como la capacitancia de un *solo* capacitor para el que la carga Q es la misma que para la combinación, cuando la diferencia de potencial es la misma. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un *capacitor equivalente* de capacitancia C_{eq}. Para un capacitor de este tipo, como el que se ilustra en la figura 24.8b,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Al combinar las ecuaciones (24.3) y (24.4) se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este análisis se puede extender a cualquier número de capacitores conectados en serie. Se obtiene el siguiente resultado para el *recíproco* de la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \quad \text{(capacitores en serie)} \tag{24.5}$$

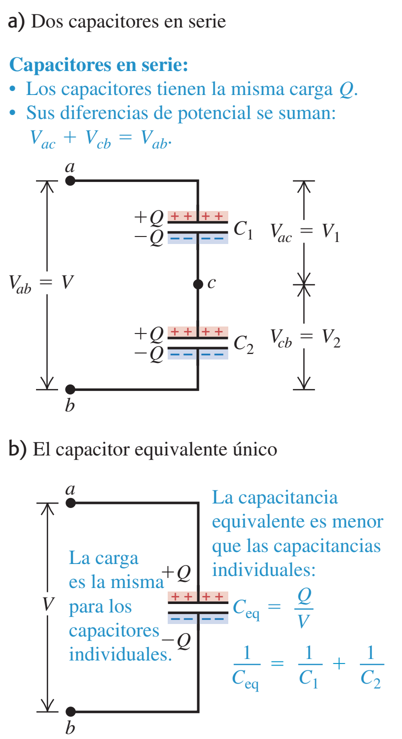
El recíproco de la capacitancia equivalente de una combinación en serie es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. En una conexión en serie la capacitancia equivalente siempre es *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO **Capacitores en serie** En una combinación en serie, la magnitud de la carga es la misma en todas las placas de todos los capacitores; sin embargo, las diferencias de potencial de los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las diferencias de potencial de los capacitores individuales se suman para dar la diferencia de potencial total a través de la combinación en serie: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$.

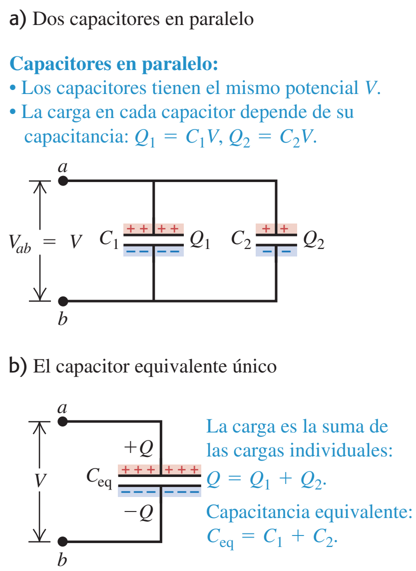
Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura 24.9a se llama **conexión en paralelo**. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos a y b. En este caso, las placas superiores de los dos capacitores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial, y las placas inferiores forman otra. Entonces, *en una conexión en paralelo, la diferencia de potencial para todos los capacitores individuales es la misma*, y es igual a $V_{ab} = V$. Sin embargo, las cargas Q_1 y Q_2 no son

24.8 Conexión en serie de dos capacitores.



24.9 Conexión en paralelo de dos capacitores.



necesariamente iguales, puesto que pueden llegar cargas a cada capacitor de manera independiente desde la fuente (como una batería) de voltaje V_{ab}. Las cargas son

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V$$

La carga *total* Q de la combinación, y por consiguiente la carga total en el capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

por lo que

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{24.6}$$

La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ y diferencia de potencial V que la combinación (figura 24.9b). La capacitancia equivalente de la combinación, C_{eq}, es la misma que la capacitancia Q/V de este único capacitor equivalente. Así, de la ecuación (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De igual forma se puede demostrar que para cualquier número de capacitores en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \quad \text{(capacitores en paralelo)} \tag{24.7}$$

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la *suma* de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo, la capacitancia equivalente siempre es *mayor que* cualquier capacitancia individual.

CUIDADO **Capacitores en paralelo** Las diferencias de potencial son las mismas para todos los capacitores en una combinación en paralelo; no obstante, las cargas en los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las cargas en los capacitores individuales se suman para dar la carga total en la combinación en paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$. [Compare estos enunciados con los del párrafo bajo el título “Cuidado” que sigue a la ecuación (24.5).]

Estrategia para resolver problemas 24.1 Capacitancia equivalente

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El concepto de capacitancia equivalente es útil siempre que se conectan dos o más capacitores.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo del arreglo de los capacitores.
2. Determine si los capacitores están conectados en serie o en paralelo. Cuando hay combinaciones más complicadas, a veces es posible identificar partes que son conexiones simples en serie o en paralelo.
3. Recuerde que cuando se dice que un capacitor tiene carga Q, siempre significa que la placa con mayor potencial tiene carga $+Q$, y la otra placa tiene carga $-Q$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Cuando los capacitores están conectados en serie, como en la figura 24.8a, siempre tienen la misma carga, considerando que estaban sin carga antes de conectarse. Las diferencias de potencial *no* son iguales a menos que las capacitancias sí lo sean. La diferencia de potencial total a través de la combinación es la suma de las diferencias de potencial individuales.
2. Cuando los capacitores están conectados en paralelo, como en la figura 24.9a, la diferencia de potencial V siempre es la misma para todos los capacitores individuales. Las cargas en los capacitores individuales *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La carga total en la combinación es la suma de las cargas individuales.
3. Para combinaciones más complicadas, identifique las partes que sean conexiones simples en serie o paralelo y sustitúyalas por sus capacitancias equivalentes, en una reducción paso a paso. Si luego se necesita encontrar la carga o la diferencia de potencial para un capacitor individual, regrese por el camino en reducción paso a paso, hasta llegar a los capacitores originales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que el resultado tenga sentido. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente C_{eq} debe ser *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales. Por el contrario, si los capacitores están conectados en paralelo, C_{eq} debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

Ejemplo 24.5 Capacitores en serie y en paralelo

En las figuras 24.8 y 24.9, sean $C_1 = 6.0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 3.0\ \mu\text{F}$ y $V_{ab} = 18$ V. Encuentre la capacitancia equivalente, la carga y la diferencia de potencial para cada capacitor cuando los dos capacitores se conectan *a*) en serie, y *b*) en paralelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa las ideas analizadas en esta sección acerca de las conexiones de los capacitores.

PLANTEAR: En los dos incisos, una de las variables buscadas es la capacitancia equivalente C_{eq}, que para la combinación en serie del inciso *a*) está dada por la ecuación (24.5), y para la combinación en paralelo del inciso *b*) por la ecuación (24.6). En cada inciso podemos encontrar la carga y la diferencia de potencial utilizando la definición de capacitancia, ecuación (24.1), y las reglas descritas en la Estrategia para resolver problemas 24.1.

EJECUTAR: *a*) Para la capacitancia equivalente de la combinación en serie (figura 24.8a), se aplica la ecuación (24.5) y se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{3.0\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 2.0\ \mu\text{F}$$

La carga Q en cada capacitor en serie es igual a la carga en el capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 36\ \mu\text{C}$$

La diferencia de potencial a través de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu\text{C}}{6.0\ \mu\text{F}} = 6.0\ \text{V}$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu\text{C}}{3.0\ \mu\text{F}} = 12.0\ \text{V}$$

b) Para determinar la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo (figura 24.9a), se utiliza la ecuación (24.6):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu\text{F} + 3.0\ \mu\text{F} = 9.0\ \mu\text{F}$$

La diferencia de potencial a través de cada uno de los dos capacitores en paralelo es la misma que aquélla a través del capacitor equivalente, 18 V. Las cargas Q_1 y Q_2 son directamente proporcionales a las capacitancias C_1 y C_2, respectivamente:

$$Q_1 = C_1V = (6.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 108\ \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2V = (3.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 54\ \mu\text{C}$$

EVALUAR: Observe que la capacitancia equivalente C_{eq} para la combinación en serie del inciso *a*) es menor que C_1 o C_2, en tanto que para la combinación en paralelo del inciso *b*), la capacitancia equivalente es mayor que C_1 o C_2.

Resulta pertinente comparar las diferencias de potencial y las cargas en cada inciso del ejemplo. Para los dos capacitores en serie, como en el inciso *a*), la carga es la misma en cualquier capacitor y la diferencia de potencial *más grande* ocurre a través del capacitor con la *menor* capacitancia. Además, $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V, como debe ser. En contraste, para los dos capacitores en paralelo, como en el inciso *b*), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial y la *mayor* carga está en el capacitor con la *mayor* capacitancia. ¿Puede usted demostrar que la carga total $Q_1 + Q_2$ en la combinación en paralelo es igual a la carga $Q = C_{eq}V$ en el capacitor equivalente?

Ejemplo 24.6 Red de capacitores

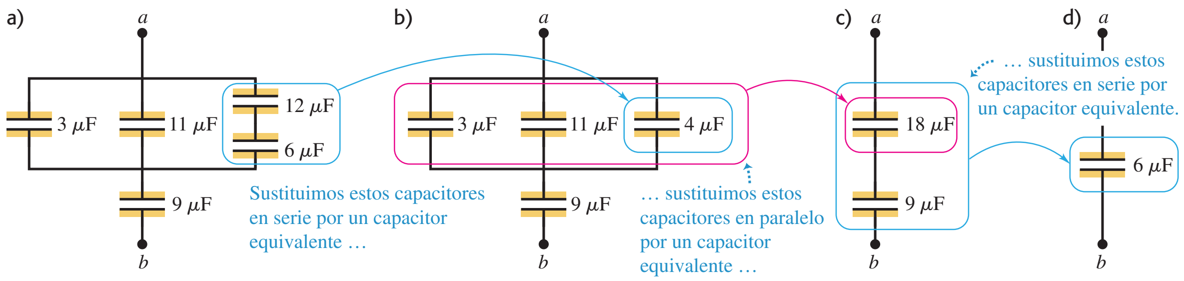
Encuentre la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura 24.10a.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los cinco capacitores en la figura 24.10a no están conectados todos en serie ni en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que *sí* están en serie o en paralelo, las cuales combinaremos para encontrar la capacitancia equivalente.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (24.5) para analizar las porciones de la red conectadas en serie, y la ecuación (24.7) para analizar aquellas que están en paralelo.

24.10 a) Red de capacitores entre los puntos a y b. b) Los capacitores de 12 μF y 6 μF conectados en serie en a) se sustituyen por un capacitor equivalente de 4 μF. c) Los capacitores en paralelo de 3 μF, 11 μF y 4 μF en b) se sustituyen por un capacitor equivalente de 18 μF. d) Por último, los capacitores en serie de 18 μF y 9 μF en c) se sustituyen por un capacitor equivalente de 6 μF.



continúa

EJECUTAR: Primero se sustituye la combinación en serie de 12 μF y 6 μF por su capacitancia equivalente, que se denota como C', en la ecuación (24.5):

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} \qquad C' = 4\ \mu\text{F}$$

Esto da la combinación equivalente que se ilustra en la figura 24.10b. A continuación, con la ecuación (24.7), se encuentra la capacitancia equivalente de los tres capacitores en paralelo, la cual se representa con C'':

$$C'' = 3\ \mu\text{F} + 11\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 18\ \mu\text{F}$$

Esto da la combinación más sencilla que aparece en la figura 24.10c. Por último, se calcula la capacitancia equivalente C_{eq} de estos dos capacitores en serie (figura 24.10d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu\text{F}} + \frac{1}{9\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 6\ \mu\text{F}$$

EVALUAR: La capacitancia equivalente de la red es 6 μF; es decir, si se aplica una diferencia de potencial V_{ab} a través de las terminales de la red, la carga neta en la red es el producto de 6 μF por V_{ab} veces. ¿Cómo se relaciona esta carga neta con las cargas en los capacitores individuales en la figura 24.10a?

Evalúe su comprensión de la sección 24.2 Se desea conectar un capacitor de 4 μF y otro de 8 μF. *a)* ¿Con qué tipo de conexión el capacitor de 4 μF tendrá una *diferencia de potencial* más grande que en el de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) indistintamente, en serie o paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo. *b)* ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de 4 μF una *carga* mayor que la carga del capacitor de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) indistintamente, en serie o paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo.

24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

Muchas de las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su capacidad para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en los diferentes conductores. Cuando el capacitor se descarga, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por las fuerzas eléctricas.

Podemos determinar la energía potencial U de un capacitor con carga mediante el cálculo del trabajo W que se requiere para cargarlo. Suponga que cuando se carga el capacitor, la carga final es Q y la diferencia de potencial final es V. Según la ecuación (24.1), estas cantidades están relacionadas de la siguiente forma

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces, $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento adicional de carga dq es

$$dW = v\,dq = \frac{q\,dq}{C}$$

El trabajo total W necesario para incrementar la carga q del capacitor, de cero a un valor final Q, es

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{(trabajo para cargar el capacitor)} \quad (24.8)$$

Esto también es igual al trabajo total realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando el capacitor se descarga. Entonces, q *disminuye* desde un valor inicial Q hasta cero conforme los elementos de carga dq "caen" a través de las diferencias de potencial v que varían desde V hasta cero.

Si se define la energía potencial de un capacitor *sin carga* como igual a cero, entonces W en la ecuación (24.8) es igual a la energía potencial U del capacitor con carga. La carga final almacenada es $Q = CV$, por lo que U (que es igual a W) se expresa como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad \text{(energía potencial almacenada en un capacitor)} \quad (24.9)$$

Cuando Q está en coulombs, C en farads (coulombs por volt) y V en volts (joules por coulomb), U queda expresada en joules.

La última forma de la ecuación (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, muestra que el trabajo total W que se requiere para cargar el capacitor es igual a la carga total Q multiplicada por la diferencia de potencial *promedio* $\frac{1}{2}V$ durante el proceso de carga.

La expresión $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$ en la ecuación (24.9) indica que un capacitor con carga es el análogo eléctrico de un resorte estirado con energía potencial elástica $U = \frac{1}{2}kx^2$. La carga Q es análoga a la elongación x, y el *recíproco* de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante k de la fuerza. La energía suministrada a un capacitor en el proceso de carga es análoga al trabajo que se realiza sobre un resorte al estirarlo.

Las ecuaciones (24.8) y (24.9) plantean que la capacitancia mide la facultad de un capacitor para almacenar tanto energía como carga. Si un capacitor se carga conectándolo a una batería o a otra fuente que suministre una diferencia de potencial fija V, entonces un incremento en el valor de C da una carga mayor $Q = CV$ y una cantidad más grande de energía almacenada $U = \frac{1}{2}CV^2$. Si en vez de lo anterior, el objetivo es transferir una cantidad dada de carga Q de un conductor al otro, la ecuación (24.8) indica que el trabajo W requerido es inversamente proporcional a C; cuanto mayor sea la capacitancia, más fácil será dar a un capacitor una cantidad fija de carga.

Aplicaciones de los capacitores: Almacenamiento de energía

La mayoría de las aplicaciones de los capacitores aprovechan su capacidad de almacenar y liberar energía. En las unidades electrónicas de flash que usan los fotógrafos, la energía almacenada en un capacitor (véase la figura 24.4) se libera al oprimir el botón del obturador. Esto provee una trayectoria de conducción de una placa del capacitor a la otra a través del tubo del flash. Una vez establecida esta trayectoria, la energía almacenada se convierte rápidamente en un destello de luz breve, pero intenso. Un ejemplo extremo del mismo principio es la máquina Z en Sandia National Laboratories en Nuevo México, la cual se usa en experimentos de fusión nuclear controlada (figura 24.11). Un banco de capacitores cargados libera más de un millón de joules de energía en unas cuantas mil millonésimas de segundo. En ese breve lapso, la potencia de salida de la máquina Z es de 2.9×10^{14} W, que equivale a ¡80 veces la producción de electricidad de todas las plantas de energía de la Tierra!

24.11 La máquina Z utiliza un número grande de capacitores en paralelo para dar una capacitancia equivalente C enorme (véase la sección 24.2). De ahí que sea posible almacenar una gran cantidad de energía $U = \frac{1}{2}CV^2$ incluso con una diferencia de potencial modesta V. Los arcos mostrados en la figura se producen cuando los capacitores descargan su energía en un blanco, no mayor que un carrete de hilo. Esto hace que el objetivo se caliente a una temperatura superior a 2×10^9 K.

En otras aplicaciones, la energía se libera con más lentitud. Los resortes de la suspensión de un automóvil ayudan a hacer más suave la marcha al absorber la energía de las sacudidas bruscas y liberarla en forma gradual; de manera análoga, un capacitor en un circuito electrónico mitiga las variaciones indeseables del voltaje debido a oleadas de corriente. Y al igual que la presencia de un resorte da a un sistema mecánico una frecuencia natural a la que responde con más intensidad ante una fuerza periódica aplicada, la presencia de un capacitor da a un circuito eléctrico una frecuencia natural ante las oscilaciones de corriente. Esta idea se emplea en circuitos sintonizados tales como los de los receptores de radio y televisión, que responden a las señales de las emisoras en una frecuencia particular e ignoran las señales procedentes de otras. Estos circuitos se estudiarán en detalle en el capítulo 31.

Las propiedades de almacenamiento de energía de los capacitores también tienen efectos prácticos indeseables. Las patillas de conexión adyacentes del lado inferior de los chips de computadoras actúan como capacitores, y la propiedad que confiere utilidad a los capacitores para amortiguar las variaciones del voltaje actúa en este caso para disminuir la rapidez a la que cambian los potenciales de las patillas de conexión del chip. Esta tendencia limita la rapidez a la que los chips pueden realizar cálculos, un efecto que cobra mayor importancia a medida que los chips de computadora se hacen más pequeños y tienen que operar con mayor rapidez.

Energía del campo eléctrico

Un capacitor puede cargarse trasladando electrones directamente de una placa a otra. Esto requiere efectuar trabajo contra el campo eléctrico entre las placas. Así, es posible considerar la energía como si estuviera almacenada *en el campo,* en la región entre las placas. Para desarrollar esta relación, debemos encontrar la energía *por unidad de volumen* en el espacio entre las placas paralelas de un capacitor con área A y separación d. Ésta se denomina **densidad de energía** y se denota con u. De la ecuación (24.9) se desprende que el total de energía potencial almacenada es $\frac{1}{2}CV^2$ y el volumen entre las placas es Ad; por lo tanto, la densidad de energía es

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \qquad (24.10)$$

De la ecuación (24.2), la capacitancia C está dada por $C = \epsilon_0 A/d$. La diferencia de potencial V está relacionada con la magnitud del campo eléctrico E de acuerdo con $V = Ed$. Si estas expresiones se utilizan en la ecuación (24.10), los factores geométricos A y d se anulan y se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en vacío)} \qquad (24.11)$$

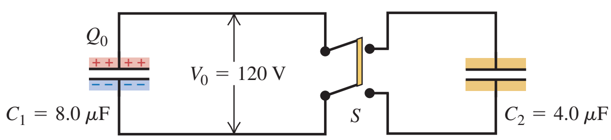
Aunque esta relación se obtuvo sólo para un capacitor de placas paralelas, es válida para cualquier capacitor con vacío y por ello *para cualquier configuración de campo eléctrico en el vacío*. Este resultado tiene una implicación interesante. El vacío se considera como espacio en el que no hay materia; sin embargo, el vacío puede tener campos eléctricos y, por lo tanto, energía. Así que, después de todo, el espacio "vacío" en realidad no está vacío. Esta idea y la ecuación (24.11) se utilizarán en el capítulo 32 en relación con la energía transportada por las ondas electromagnéticas.

CUIDADO **La energía del campo eléctrico es energía potencial eléctrica** Es un error común creer que la energía del campo eléctrico es una nueva clase de energía, distinta de la energía potencial eléctrica descrita con anterioridad. Pero *no* es así; tan sólo es una forma diferente de interpretar la energía potencial eléctrica. Se puede considerar la energía de un sistema de cargas como una propiedad compartida de todas las cargas, o pensar en la energía como una propiedad del campo eléctrico que crean las cargas. Cualquiera de estas interpretaciones lleva al mismo valor de la energía potencial.

Ejemplo 24.7 Transferencia de carga y energía entre capacitores

En la figura 24.12 se carga un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\ \mu\text{F}$ al conectarlo a una fuente con diferencia de potencial $V_0 = 120$ V (en la figura no aparece). Inicialmente, el interruptor S está abierto. Una vez que C_1 se ha cargado, se desconecta la fuente de la diferencia de potencial. *a*) ¿Cuál es la carga Q_0 en C_1 si se deja abierto el interruptor S? *b*) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1 si el interruptor S se deja abierto? *c*) Inicialmente, el capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\ \mu\text{F}$ está sin carga. Después de cerrar el interruptor S, ¿cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor, y cuál es la carga en cada uno? *d*) ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor S?

24.12 Cuando se cierra el interruptor S, el capacitor con carga C_1 está conectado a otro capacitor sin carga C_2. La parte central del interruptor es una manija aislante; la carga sólo puede fluir entre las dos terminales superiores y entre las dos terminales inferiores.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al principio se tiene un solo capacitor con una diferencia de potencial dada entre sus placas. Después de que se cierra el interruptor, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores y otro conecta las placas inferiores; en otras palabras, los capacitores están conectados en paralelo.

PLANTEAR: En los incisos *a*) y *b*) se encuentran la carga y la energía almacenada para el capacitor C_1 mediante las ecuaciones (24.1) y (24.9), respectivamente. En el inciso *c*) se emplea el carácter de la conexión en paralelo para determinar la manera en que los dos capacitores comparten la carga Q_0. En el inciso *d*) se utiliza otra vez la ecuación (24.9) para calcular la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2; la energía total es la suma de estos valores.

EJECUTAR: *a*) La carga Q_0 en C_1 es

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en el capacitor es

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0.058\ \text{J}$$

c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye sobre las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ se distribuye en las placas inferiores de los dos capacitores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes de las cargas finales en los dos capacitores. De la conservación de la carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

En el estado final, cuando las cargas ya no se trasladan, ambas placas superiores están al mismo potencial; están conectadas por un alambre conductor, de manera que forman una sola superficie equipotencial. Las dos placas inferiores también están al mismo potencial, diferente del potencial de las placas superiores. La diferencia de potencial final V entre las placas es, por lo tanto, la misma para los dos capacitores, como era de esperarse para una conexión en paralelo. Las cargas en los capacitores son

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Cuando se combina esto con la ecuación anterior de la conservación de la carga, se obtiene

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8.0\ \mu\text{F} + 4.0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

d) La energía final del sistema es la suma de las energías almacenadas en cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1 V + \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}Q_0 V$$

$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0.038\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía final es menor que la energía original $U_{\text{inicial}} = 0.058$ J; la diferencia se ha convertido en energía de algún otro tipo. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y algo de energía se irradia como ondas electromagnéticas. En los capítulos 26 y 31 se estudiará con detalle el comportamiento de los capacitores en los circuitos.

Ejemplo 24.8 Energía del campo eléctrico

Se desea almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en vacío. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se requiere? *b*) Si la magnitud del campo eléctrico es 10 veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se utiliza la relación entre la magnitud del campo eléctrico E y la densidad de energía u, que es igual a la energía del campo eléctrico dividida entre el volumen ocupado por el campo.

PLANTEAR: En el inciso *a*) se emplea la información dada para obtener u, y después se usa la ecuación (24.11) para encontrar el valor de E que se requiere. Esta misma ecuación da la relación entre los cambios en E y los cambios correspondientes en u.

EJECUTAR: *a*) La densidad de energía deseada es $u = 1.00\ \text{J/m}^3$. Se despeja E en la ecuación (24.11):

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00\ \text{J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$

$$= 4.75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4.75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

b) La ecuación (24.11) muestra que u es proporcional a E^2. Si E se incrementa en un factor de 10, u aumenta en un factor de $10^2 = 100$ y la densidad de energía es 100 J/m^3.

EVALUAR: El valor de E calculado en el inciso *a*) es considerable, pues corresponde a una diferencia de potencial de casi medio millón de volts en una distancia de 1 metro. En la sección 24.4 se verá que la magnitud del campo eléctrico en los aislantes prácticos llega a ser tan grande como este valor o incluso más.

Ejemplo 24.9 Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor

El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 (sección 24.1) tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Calcule la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor *a*) calculando la capacitancia C obtenida en el ejemplo 24.3, y *b*) integrando la densidad de energía del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pide que se piense en la energía almacenada en un capacitor U de dos maneras diferentes: en términos del trabajo realizado para colocar las cargas en los dos conductores, $U = Q^2/2C$, y en términos de la energía en el campo eléctrico entre los dos conductores. Las dos descripciones son equivalentes, por lo que deben dar el mismo resultado para U.

PLANTEAR: En el ejemplo 24.3 se obtuvo la capacitancia C y la magnitud del campo E entre los conductores. Para determinar la energía almacenada U en el inciso *a*), se utilizará la expresión para C en la ecuación (24.9). En el inciso *b*) se empleará la expresión para E en la ecuación (24.11) para determinar la densidad de energía del campo eléctrico u entre los conductores. La magnitud del campo depende de la distancia r desde el centro del capacitor, por lo que u también depende de r. Entonces, no es posible calcular U con sólo multiplicar u por el volumen entre los conductores; en vez de ello, se debe integrar u con respecto a ese volumen.

EJECUTAR: *a*) Del ejemplo 24.3, el capacitor esférico tiene una capacitancia

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios interior y exterior de las esferas conductoras. De la ecuación (24.9), la energía almacenada en este capacitor es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

b) El campo eléctrico en el volumen entre las dos esferas conductoras tiene una magnitud de $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. El campo eléctrico es igual a cero dentro de la esfera interior y también afuera de la superficie interna de la esfera exterior, ya que una superficie gaussiana con radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta de cero. Así, la densidad de energía es diferente de cero sólo en el espacio comprendido entre las esferas ($r_a < r < r_b$). En esta región,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía *no* es uniforme, sino que disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde el centro del capacitor. Para

continúa

encontrar la energía total del campo eléctrico se integra u (energía por unidad de volumen) sobre el volumen que hay entre las esferas conductoras interior y exterior. Al dividir este volumen en corazas esféricas de radio r, área superficial $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$, se obtiene

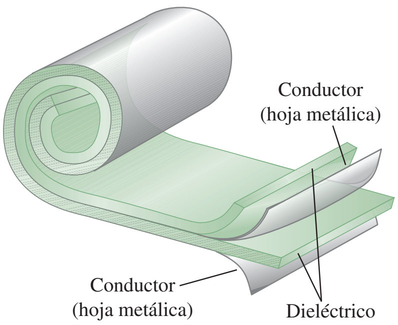
$$\begin{aligned} U &= \int u\,dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\,dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}\right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\,\frac{r_b-r_a}{r_a r_b} \end{aligned}$$

EVALUAR: Con cualquiera de los enfoques se obtiene el mismo resultado para U, como debe ser. Hacemos hincapié en que la energía potencial eléctrica puede considerarse como asociada con cualquiera de las *cargas*, como en el inciso *a*), o el *campo*, como en el inciso *b*); sin importar el punto de vista que se elija, la cantidad de energía almacenada es la misma.

Evalúe su comprensión de la sección 24.3 Se desea conectar un capacitor de 4 μF con otro de 8 μF. ¿Con qué tipo de conexión el capacitor de 4 μF tendrá una cantidad mayor de *energía almacenada* que el de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) con cualquiera, ya sea en serie o en paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo.

24.4 Dieléctricos

24.13 Un tipo común de capacitor utiliza láminas dieléctricas para separar los conductores.



La mayoría de los capacitores tienen un material no conductor o **dieléctrico** entre sus placas conductoras. Un tipo común de capacitor emplea tiras largas de hojas (láminas) metálicas como placas, separadas por tiras de hojas de materiales plásticos, como Mylar. Estos materiales dispuestos en forma de emparedado se enrollan para formar una unidad capaz de proveer una capacitancia de varios microfarads en un paquete compacto (figura 24.13).

La colocación de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. La primera es que resuelve el problema mecánico de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto.

La segunda función es que un dieléctrico incrementa al máximo posible la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Como se describió en la sección 23.3, cualquier material aislante experimenta una ionización parcial que permite la conducción a través de él, si se somete a un campo eléctrico suficientemente grande. Este fenómeno se llama **ruptura del dieléctrico**. Muchos materiales dieléctricos toleran sin romperse campos eléctricos más intensos que los que soporta el aire. Así que el uso de un dieléctrico permite que un capacitor mantenga una gran diferencia de potencial V y que, por lo tanto, almacene cantidades más grandes de carga y energía.

La tercera función es que la capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es *mayor* cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en vez de vacío. Este efecto se demuestra con ayuda de un *electrómetro* sensible, dispositivo que mide la diferencia de potencial entre dos conductores sin permitir un flujo apreciable de carga de uno a otro. La figura 24.14a ilustra un electrómetro conectado a través de un capacitor con carga, con magnitud de carga Q en cada placa y diferencia de potencial V_0. Cuando entre las placas se inserta una lámina sin carga de material dieléctrico, como vidrio, parafina o poliestireno, los experimentos muestran que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor pequeño V (figura 24.14b). Al retirar el dieléctrico, la diferencia de potencial vuelve a su valor original V_0, lo que demuestra que las cargas originales en las placas no han cambiado.

La capacitancia original C_0 está dada por $C_0 = Q/V_0$, y la capacitancia C con el dieléctrico presente es $C = Q/V$. La carga Q es la misma en ambos casos, y V es menor que V_0, de donde se concluye que la capacitancia C con el dieléctrico presente es *mayor que* C_0. Cuando el espacio entre las placas está lleno por completo por el dieléctrico, la razón de C a C_0 (igual a la razón de V_0 a V) se denomina **constante dieléctrica** del material, K:

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(definición de constante dieléctrica)} \tag{24.12}$$

Cuando la carga es constante, $Q = C_0V_0 = CV$ y $C/C_0 = V_0/V$. En este caso, la ecuación (24.12) se puede expresar de la forma

$$V = \frac{V_0}{K} \quad \text{(donde } Q \text{ es una constante)} \tag{24.13}$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial para una carga Q dada se *reduce* en un factor de K.

La constante dieléctrica K es un número puro. Como C siempre es mayor que C_0, K siempre es mayor que la unidad. En la tabla 24.1 se incluyen algunos valores representativos de K. Para el vacío, $K = 1$, por definición. Para el aire a temperaturas y presiones ordinarias, K es alrededor de 1.0006; este valor es tan cercano a 1 que para fines prácticos, un capacitor con aire es equivalente a uno con vacío. Observe que aunque el agua tiene un valor de K muy grande, por lo general no es un dieléctrico muy práctico como para usarlo en capacitores. La razón es que si bien el agua pura es un conductor deficiente, por otro lado, es un excelente solvente iónico. Cualquier ion disuelto en el agua haría que las cargas fluyeran entre las placas del capacitor, por lo que éste se descargaría.

Tabla 24.1 Valores de la constante dieléctrica, K, a 20 °C

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

Ningún dieléctrico real es un aislante perfecto. Por consiguiente, siempre hay cierta *corriente de fuga* entre las placas con carga de un capacitor con dieléctrico. En la sección 24.2 se ignoró tácitamente este efecto en la obtención de las expresiones para las capacitancias equivalentes de capacitores conectados en serie, ecuación (24.5), y en paralelo, ecuación (24.7). Pero si la corriente de fuga fluye un tiempo suficientemente largo como para cambiar de manera sustancial las cargas con respecto a los valores usados para obtener las ecuaciones (24.5) y (24.7), tales ecuaciones podrían dejar de ser exactas.

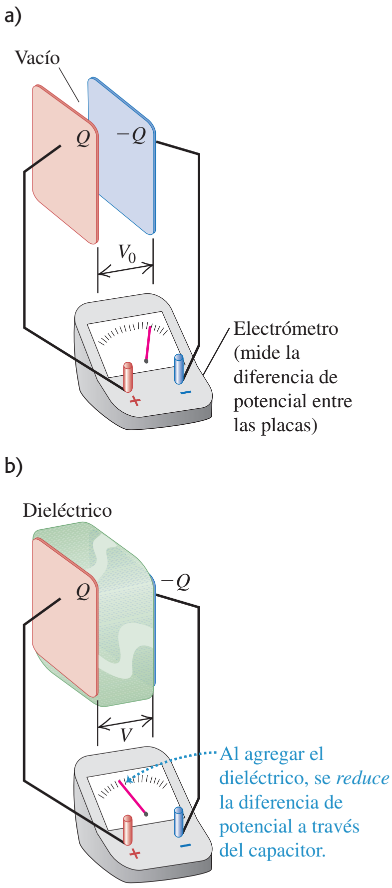
Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un material dieléctrico entre las placas de un capacitor al mismo tiempo que la carga se mantiene constante, la diferencia de potencial entre aquéllas disminuye en un factor K. Por lo tanto, el campo eléctrico entre las placas debe reducirse en el mismo factor. Si E_0 es el valor con vacío y E es el valor con dieléctrico, entonces

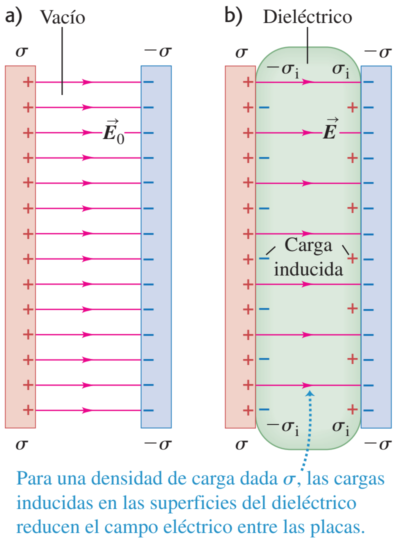
$$E = \frac{E_0}{K} \quad \text{(cuando } Q \text{ es una constante)} \tag{24.14}$$

Como la magnitud del campo eléctrico es menor cuando el dieléctrico está presente, la densidad superficial de carga (que crea el campo) también debe ser menor. La carga superficial en las placas conductoras no cambia, pero en cada superficie del dieléctrico aparece una carga *inducida* de signo contrario (figura 24.15). Originalmente, el dieléctrico era neutro y todavía lo es; las cargas superficiales inducidas surgen como resultado de la *redistribución* de la carga positiva y negativa dentro del material dieléctrico. Este fenómeno se llama **polarización**. La polarización se mencionó por primera vez en la sección 21.2, y se sugiere al lector que vuelva a leer la explicación de la figura 21.8. Se supondrá que la carga superficial inducida es *directamente proporcional* a la magnitud del campo eléctrico E en el material; de hecho, éste es el caso de muchos dieléctricos comunes. (Esta proporcionalidad directa es análoga a la

24.14 Efecto de un dieléctrico entre las placas paralelas de un capacitor. a) Con una carga dada, la diferencia de potencial es V_0. b) Con la misma carga pero con un dieléctrico entre las placas, la diferencia de potencial V es menor que V_0.



24.15 Líneas de campo eléctrico cuando entre las placas hay a) vacío y b) un dieléctrico.



ley de Hooke para un resorte.) En este caso, K es una constante para cualquier material en particular. Cuando el campo eléctrico es muy intenso o si el dieléctrico está hecho de ciertos materiales cristalinos, la relación entre la carga inducida y el campo eléctrico es más compleja; no consideraremos aquí este tipo de casos.

Es posible obtener una relación entre esta carga superficial inducida y la carga en las placas. Se denotará como σ_i la magnitud de la carga inducida por unidad de área en las superficies del dieléctrico (la densidad superficial de carga inducida). La magnitud de la densidad superficial de carga en cada lado del capacitor es σ, como de costumbre. En tal caso, la magnitud de la carga superficial neta en cada lado del capacitor es $(\sigma - \sigma_i)$, como se ilustra en la figura 24.15b. Como vimos en los ejemplos 21.13 (sección 21.5) y 22.8 (sección 22.4), el campo entre las placas se relaciona con la densidad superficial de carga de acuerdo con $E = \sigma_{\text{neta}}/\epsilon_0$. Sin el dieléctrico y con éste, respectivamente, se tiene

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Al usar estas expresiones en la ecuación (24.14) y reordenar el resultado, se encuentra que

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \qquad \text{(densidad superficial de carga inducida)} \tag{24.16}$$

Esta ecuación plantea que cuando K es muy grande, σ_i casi es tan grande como σ. En este caso, σ_i casi anula a σ, y el campo y la diferencia de potencial son mucho menores que sus valores en el vacío.

El producto $K\epsilon_0$ se llama **permitividad** del dieléctrico, y se denota con ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad \text{(definición de permitividad)} \tag{24.17}$$

En términos de ϵ, el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

La capacitancia cuando hay un dieléctrico presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \qquad \text{(capacitor de placas paralelas, dieléctrico entre las placas)} \tag{24.19}$$

La obtención de la ecuación (24.11) se repite para la densidad de energía u en un campo eléctrico para el caso en que hay un dieléctrico presente. El resultado es

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)} \tag{24.20}$$

En el espacio vacío, donde $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$ y las ecuaciones (24.19) y (24.20) se reducen a las ecuaciones (24.2) y (24.11), respectivamente, para un capacitor de placas paralelas con vacío. Por esta razón, en ocasiones ϵ_0 se llama "permitividad del espacio libre" o "permitividad del vacío". Como K es un número puro, ϵ y ϵ_0 tienen las mismas unidades, $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

La ecuación (24.19) muestra que es posible obtener capacitancias muy elevadas con placas que tienen una gran área superficial A y están separadas una distancia pequeña d por un dieléctrico con un valor elevado de K. En un *capacitor electrolítico de doble capa*, hay gránulos diminutos de carbono adheridos a cada capa: el valor de A es el área superficial de los gránulos combinada, que puede ser enorme. Las placas con gránulos adheridos están separadas por una lámina dieléctrica muy delgada. Un capacitor de esta clase llega a tener una capacitancia de 5000 farads y puede caber en la palma de la mano (compárelo con el del ejemplo 24.1 en la sección 24.1).

Varios dispositivos prácticos aprovechan la manera en que un capacitor responde ante un cambio en la constante dieléctrica. Un ejemplo es el localizador eléctrico de clavos, que utilizan quienes hacen reparaciones en el hogar para localizar clavos metálicos ocultos tras la superficie de un muro. Consiste en una placa metálica con circuitos asociados. La placa actúa como la mitad de un capacitor, y el muro como la otra mitad. Si el localizador de clavos pasa por encima un objeto metálico, la constante dieléctrica efectiva del capacitor cambia, lo que modifica la capacitancia y activa una señal.

Estrategia para resolver problemas 24.2 Dieléctricos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las relaciones de esta sección son útiles siempre que haya un campo eléctrico en un dieléctrico, como el que existe entre las placas de un capacitor con carga. Es común que se pida relacionar la diferencia de potencial entre las placas, el campo eléctrico en el capacitor, la densidad de carga en las placas y la densidad de carga inducida sobre las superficies del dieléctrico en el capacitor.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo de la situación.
2. Identifique las variables que se buscan y elija cuáles de las ecuaciones clave de esta sección le servirán para encontrar esas variables.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. En problemas como los del siguiente ejemplo, es fácil perderse en un laberinto de fórmulas. Pregúntese a cada paso qué tipo de cantidad representa cada símbolo. Por ejemplo, distinga con claridad entre las cargas y las densidades de carga, y entre los campos eléctricos y las diferencias de potencial eléctrico.
2. Conforme efectúe los cálculos compruebe continuamente la consistencia de las unidades. Esto implica un mayor esfuerzo con las cantidades eléctricas que con las de la mecánica. Las distancias siempre deben estar expresadas en metros. Recuerde que un microfarad es 10^{-6} farads, etcétera. No confunda el valor numérico de ϵ_0 con el valor de $1/4\pi\epsilon_0$. Hay varios conjuntos alternativos de unidades para la magnitud del campo eléctrico, como N/C y V/m. Las unidades de ϵ_0 son $\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ o F/m.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando compruebe valores numéricos, recuerde que con un dieléctrico presente, *a*) la capacitancia siempre es mayor que sin el dieléctrico; *b*) para una cantidad dada de carga en el capacitor, el campo eléctrico y la diferencia de potencial siempre son menores que sin el dieléctrico; y *c*) la densidad superficial de carga inducida σ_i en el dieléctrico siempre es de menor magnitud que la densidad de carga σ en las placas del capacitor.

Ejemplo 24.10 Capacitor con y sin dieléctrico

Suponga que cada una de las placas paralelas en la figura 24.15 tiene un área de 2000 cm^2 (2.00×10^{-1} m^2) y están separadas por 1.00 cm (1.00×10^{-2} m). El capacitor está conectado a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 3000$ V $= 3.00$ kV. Después se desconecta de la fuente de energía y se inserta entre las placas una lámina de material plástico aislante, llenando por completo el espacio entre ellas. Se observa que la diferencia de potencial disminuye a 1000 V y que la carga en cada placa del capacitor permanece constante. Calcule *a*) la capacitancia original C_0; *b*) la magnitud de la carga Q en cada placa; *c*) la capacitancia C después de haber insertado el dieléctrico; *d*) la constante dieléctrica K del dieléctrico; *e*) la permitividad ϵ del dieléctrico; *f*) la magnitud de la carga Q_i inducida en cada cara del dieléctrico; *g*) el campo eléctrico original E_0 entre las placas; y *h*) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la mayoría de relaciones que se han estudiado para capacitores y dieléctricos.

PLANTEAR: La mayoría de las variables buscadas se pueden obtener de diferentes maneras. Los métodos que se usan a continuación son una muestra representativa; invitamos al lector a pensar en otros métodos y a comparar los resultados.

EJECUTAR: *a*) Con vacío entre las placas se usa la ecuación (24.19) con $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0\frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})\frac{2.00 \times 10^{-1}\ \mathrm{m^2}}{1.00 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$
$$= 1.77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 177\ \mathrm{pF}$$

b) A partir de la definición de capacitancia, ecuación (24.1),

$$Q = C_0V_0 = (1.77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F})(3.00 \times 10^3\ \mathrm{V})$$
$$= 5.31 \times 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0.531\ \mu\mathrm{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, la carga permanece sin cambio, pero el potencial disminuye a $V = 1000$ V. Por ello, de acuerdo con la ecuación (24.1), la nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \mathrm{C}}{1.00 \times 10^3\ \mathrm{V}} = 5.31 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 531\ \mathrm{pF}$$

d) De la ecuación (24.12), la constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10}\ \mathrm{F}}{1.77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F}} = \frac{531\ \mathrm{pF}}{177\ \mathrm{pF}} = 3.00$$

En forma alternativa, de la ecuación (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \mathrm{V}}{1000\ \mathrm{V}} = 3.00$$

e) Al sustituir el valor de K del inciso *d*) en la ecuación (24.17), la permitividad resulta ser

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})$$
$$= 2.66 \times 10^{-11}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

f) Se multiplica la ecuación (24.15) por el área de cada placa para obtener la carga inducida $Q_i = \sigma_i A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ en cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7}\ \mathrm{C})\left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$
$$= 3.54 \times 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

continúa

g) Como el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es la diferencia de potencial dividida entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

h) Con la nueva diferencia de potencial después de insertar el dieléctrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de la ecuación (24.17),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o bien, de la ecuación (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de la ecuación (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

EVALUAR: Siempre es útil comprobar los resultados obteniéndolos en más de una forma, como se hizo en los incisos *d*) y *h*). Los resultados indican que al insertar el dieléctrico se incrementa la capacitancia en un factor de $K = 3.00$ y el campo eléctrico entre las placas se reduce en un factor de $1/K = 1/3.00$. Eso ocurre porque se desarrollan cargas inducidas en las caras del dieléctrico con magnitud $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3.00) = 0.667Q$.

Ejemplo 24.11 Almacenamiento de energía con y sin dieléctrico

Calcule el total de energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, tanto antes como después de haber insertado el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se tiene que extender el análisis del ejemplo 24.10 para que incluya las ideas de la energía almacenada en un capacitor y de la energía del campo eléctrico.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (24.9) para encontrar la energía almacenada antes y después de insertar el dieléctrico, y la ecuación (24.20) para calcular la densidad de energía.

EJECUTAR: Sea U_0 la energía original y U la energía con el dieléctrico insertado. De acuerdo con la ecuación (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0 V_0^2 = \frac{1}{2}(1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(5.31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2.66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La densidad de energía sin el dieléctrico está dada por la ecuación (24.20) con $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.398\ \text{J/m}^3$$

Con el dieléctrico insertado,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.00 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.133\ \text{J/m}^3$$

La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

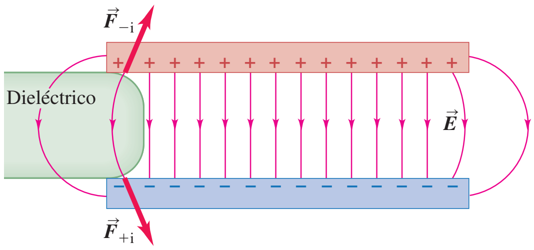
EVALUAR: La respuesta para u_0 se comprueba al notar que el volumen entre las placas es $V = (0.200\ \text{m})^2(0.0100\ \text{m}) = 0.00200\ \text{m}^3$. Como el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente el cociente que resulta de dividir la energía almacenada entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}}{0.00200\ \text{m}^3} = 0.398\ \text{J/m}^3$$

lo que concuerda con la primera respuesta. Se debe utilizar el mismo enfoque para comprobar el valor de U y el de la densidad de energía con el dieléctrico.

Los resultados de este ejemplo se pueden generalizar. Cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor mientras la carga en cada placa permanece igual, la permitividad ϵ se incrementa en un factor de K (la constante dieléctrica), el campo eléctrico disminuye en un factor de $1/K$, y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ se reduce en un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta está en la curvatura del campo en los bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como se aprecia en la figura 24.16, ese campo tiende a atraer el dieléctrico hacia el espacio entre las placas, y al hacerlo efectúa un trabajo sobre él. Se podría acoplar un resorte en el extremo izquierdo del dieléctrico de la figura 24.16 y usar esta fuerza para estirar el resorte. Puesto que el campo realiza un trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.

24.16 La curvatura del campo en los bordes del capacitor ejerce fuerzas $\vec{F}_{-i}$ y $\vec{F}_{+i}$ sobre las cargas superficiales positivas y negativas inducidas de un dieléctrico, lo que atrae al dieléctrico hacia el interior del capacitor.

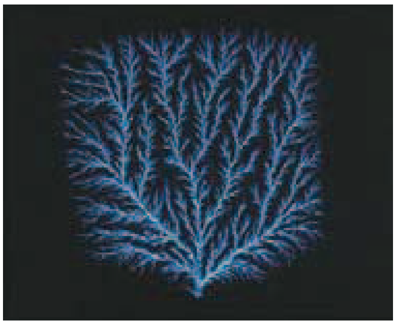


Ruptura del dieléctrico

Ya se mencionó que cuando un material dieléctrico se somete a un campo eléctrico suficientemente intenso, tiene lugar la *ruptura del dieléctrico* y entonces el dieléctrico se convierte en conductor (figura 24.17). Esto ocurre cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca los electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse de forma repentina.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando un capacitor se somete a un voltaje excesivo se forma un arco a través de la capa de dieléctrico, y lo quema o perfora. Este arco crea una trayectoria conductora (un circuito corto) entre los conductores. Si la trayectoria conductora permanece después de haberse extinguido el arco, el dispositivo queda inutilizado de manera permanente en su función de capacitor.

La magnitud máxima de campo eléctrico a que puede someterse un material sin que ocurra la ruptura se denomina **rigidez dieléctrica**. Esta cantidad se ve afectada de manera significativa por la temperatura, las impurezas, las pequeñas irregularidades en los electrodos metálicos y otros factores que son difíciles de controlar. Por esta razón sólo pueden darse cifras aproximadas de las rigideces dieléctricas. La rigidez dieléctrica del aire seco es alrededor de 3×10^6 V/m. En la tabla 24.2 se presentan valores de la rigidez dieléctrica de varios materiales aislantes comunes. Observe que todos los valores son mucho mayores que el del aire. Por ejemplo, una capa de policarbonato de 0.01 mm de espesor (el espesor práctico más pequeño) tiene 10 veces la rigidez dieléctrica del aire y soporta un voltaje máximo cercano a $(3 \times 10^7 \text{ V/m})(1 \times 10^{-5} \text{ m}) = 300$ V.



24.17 Un campo eléctrico muy intenso ocasionó la ruptura de la rigidez del dieléctrico en un bloque de plexiglás. El flujo de carga resultante grabó este patrón en el bloque.

Tabla 24.2 Constante dieléctrica y rigidez dieléctrica de algunos materiales aislantes

Material	Constante dieléctrica, K	Rigidez dieléctrica, E_m (V/m)
Policarbonato	2.8	3×10^7
Poliéster	3.3	6×10^7
Polipropileno	2.2	7×10^7
Poliestireno	2.6	2×10^7
Vidrio pyrex	4.7	1×10^7

Evalúe su comprensión de la sección 24.4 El espacio entre las placas de un capacitor aislado de placas paralelas está ocupado por un bloque de material dieléctrico con constante dieléctrica K. Las dos placas del capacitor tienen cargas Q y $-Q$. Se extrae el bloque dieléctrico. Si las cargas no cambian, ¿cómo se modifica la energía en el capacitor cuando se retira el material dieléctrico? i) Se incrementa; ii) disminuye; iii) permanece igual.

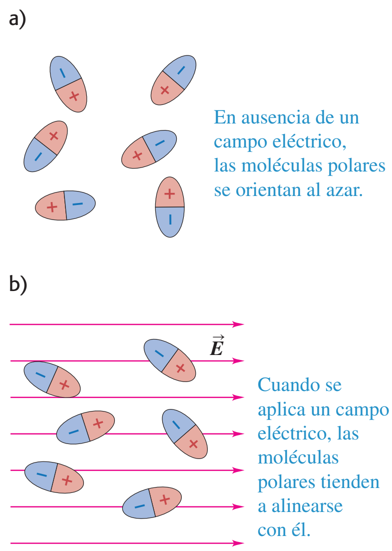
MP

*24.5 Modelo molecular de la carga inducida

En la sección 24.4 se estudiaron las cargas superficiales inducidas en un dieléctrico, debidas a un campo eléctrico. Ahora veremos cómo se originan estas cargas superficiales. Si el material fuera un *conductor*, la respuesta sería sencilla. Los conductores contienen carga que tiene libertad de movimiento y, cuando está presente un campo eléctrico, algunas de ellas se redistribuyen en la superficie de manera que no hay campo eléctrico dentro del conductor. Pero un dieléctrico ideal *no* tiene cargas con libertad para moverse, así que, ¿cómo puede surgir una carga superficial?

Para comprender esto, se tiene que analizar otra vez el reacomodo de la carga a nivel *molecular*. Algunas moléculas, como las de H_2O y N_2O, tienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas, pero con una distribución desigual, con exceso de carga positiva concentrada en un lado de la molécula y carga negativa en el otro. Como se describió en la sección 21.7, tal arreglo recibe el nombre de *dipolo eléctrico*, y la molécula se llama *molécula polar*. Cuando no está presente un campo eléctrico en un gas o un líquido con moléculas polares, éstas se orientan al azar (figura 24.18a). Sin embargo, al colocarse en un campo eléctrico, tienden a orientarse como en la

24.18 Moléculas polares a) sin un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$ y b) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.



24.19 Moléculas no polares a) sin un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$ y b) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

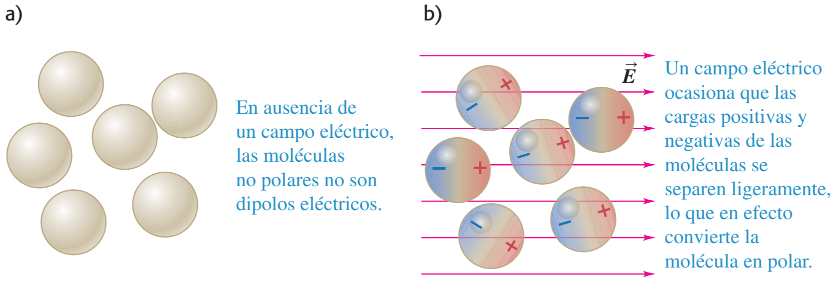
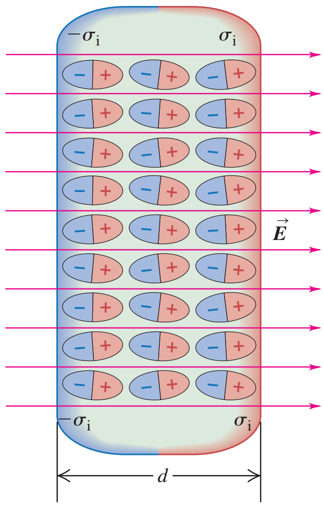


figura 24.18b, como resultado de los pares de torsión de campo eléctrico descritos en la sección 21.7. En virtud de la agitación térmica, la alineación de las moléculas con respecto a $\vec{E}$ no es perfecta.

Incluso una molécula que por lo general *no* es polar se *convierte* en un dipolo al colocarse en un campo eléctrico debido a que éste empuja las cargas positivas en las moléculas en la dirección del campo, y a las negativas en dirección opuesta. Esto ocasiona una redistribución de la carga dentro de la molécula (figura 24.19). Tales dipolos se llaman dipolos *inducidos*.

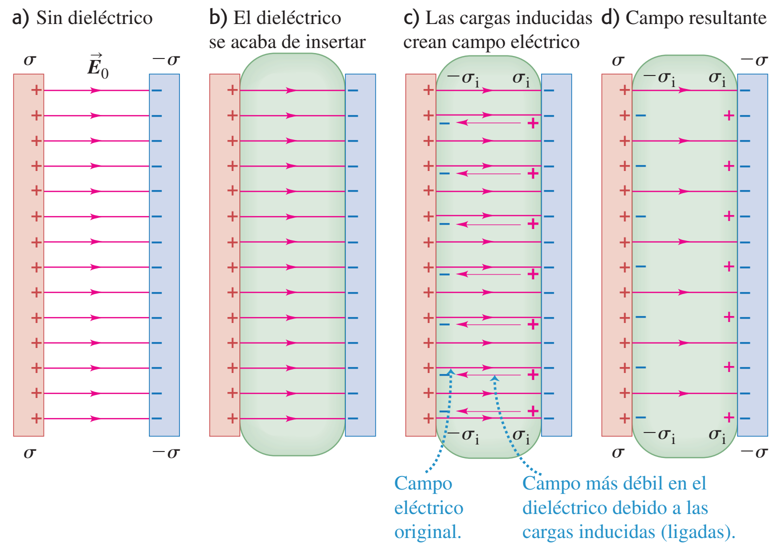
24.20 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ da lugar a la formación de capas delgadas de cargas ligadas en las superficies, lo que crea densidades de carga superficiales σ_i y $-\sigma_i$. Por claridad, se han exagerado los tamaños de las moléculas.



Ya sea con moléculas polares o no polares, la redistribución de la carga causada por el campo origina la formación de una capa de carga en cada superficie del material dieléctrico (figura 24.20). Estas capas son las cargas superficiales descritas en la sección 24.4; su densidad superficial de carga se denota con σ_i. Las cargas *no* tienen libertad para moverse indefinidamente como lo harían en un conductor porque cada una está unida a una molécula. En realidad se llaman **cargas ligadas** para diferenciarlas de las **cargas libres** que se agregan y se retiran de las placas conductoras de un capacitor. En el interior del material, la carga neta por unidad de volumen permanece igual a cero. Como se ha visto, esta redistribución de carga recibe el nombre de *polarización*, y se dice que el material está *polarizado*.

Los cuatro incisos de la figura 24.21 ilustran el comportamiento de un trozo de dieléctrico cuando se inserta en el campo entre un par de placas de capacitor con cargas opuestas. La figura 24.21a muestra el campo original. La figura 24.21b presenta la situación después de haber insertado el dieléctrico, pero antes de que ocurra el reacomodo de las cargas. La figura 24.21c ilustra con flechas delgadas el campo adicio-

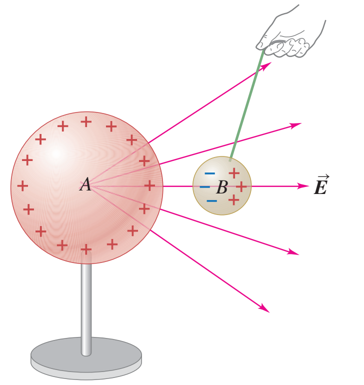
24.21 a) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con cargas. b) Introducción de un dieléctrico con constante dieléctrica K. c) Las cargas superficiales inducidas y su campo. d) Campo resultante de magnitud E_0/K.



nal que se establece en el dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Este campo es *opuesto* al original, pero no tan grande como para anularlo por completo, ya que las cargas en el dieléctrico no tienen libertad para moverse en forma indefinida. Por consiguiente, el campo resultante en el dieléctrico, que se presenta en la figura 24.21d, disminuyó su magnitud. En la representación con líneas de campo, algunas de ellas salen de la placa positiva y van a través del dieléctrico, mientras que otras terminan en las cargas inducidas en las caras del dieléctrico.

Como se vio en la sección 21.2, la polarización también es la razón por la que un cuerpo con carga, como una varilla de plástico electrificada, puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo *sin carga*, como un trozo de papel o una bolita de médula de saúco. En la figura 24.22 se presenta una esfera B dieléctrica sin carga en el campo radial de un cuerpo con carga positiva A. Las cargas positivas inducidas en B experimentan una fuerza hacia la derecha, mientras que la fuerza en las cargas inducidas negativas va hacia la izquierda. Las cargas negativas están más cerca de A, por lo que se encuentran en un campo más intenso que las cargas positivas. La fuerza hacia la izquierda es mayor que la que va hacia la derecha, y B es atraída hacia A, aun cuando su carga neta es igual a cero. La atracción ocurre sin importar que el signo de la carga de A sea positivo o negativo (véase la figura 21.7). Además, el efecto no está limitado a los dieléctricos; un cuerpo conductor sin carga sería atraído de igual manera.

24.22 Una esfera B neutra en el campo eléctrico radial de una esfera con carga positiva A es atraída hacia la carga a causa de la polarización.



Evalúe su comprensión de la sección 24.5 Un capacitor tiene cargas Q y $-Q$ en sus dos placas paralelas. Después se inserta un bloque de dieléctrico con $K = 3$ en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura 24.21. Ordene las siguientes magnitudes de campo eléctrico, en orden decreciente. i) El campo antes de insertar el dieléctrico; ii) el campo resultante después de haber insertado el dieléctrico; iii) el campo debido a las cargas ligadas.

*24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

El análisis de la sección 24.4 puede extenderse para reformular la ley de Gauss de manera que sea útil en el caso particular de los dieléctricos. La figura 24.23 es un acercamiento de la placa izquierda del capacitor y la superficie izquierda del dieléctrico de la figura 24.15b. Se aplicará la ley de Gauss a la caja rectangular que se muestra en corte transversal mediante la línea púrpura; el área superficial de los lados izquierdo y derecho es A. El lado izquierdo está incrustado en el conductor que forma la placa izquierda del capacitor, por lo que el campo eléctrico en cualquier sitio de esa superficie es igual a cero. El lado derecho está incrustado en el dieléctrico, donde el campo eléctrico tiene magnitud E y $E_\perp = 0$ en cualquier lugar de las otras cuatro caras. La carga total encerrada, incluida la carga de la placa del capacitor y la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es $Q_{enc} = (\sigma - \sigma_i)A$, por lo que la ley de Gauss da

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \tag{24.21}$$

Tal como está, esta ecuación no es muy esclarecedora porque relaciona dos cantidades desconocidas: E dentro del dieléctrico y la densidad superficial de carga inducida σ_i. Pero ahora se puede usar la ecuación (24.16), desarrollada para esta misma situación, con la finalidad de simplificar la ecuación eliminando σ_i. La ecuación (24.16) es

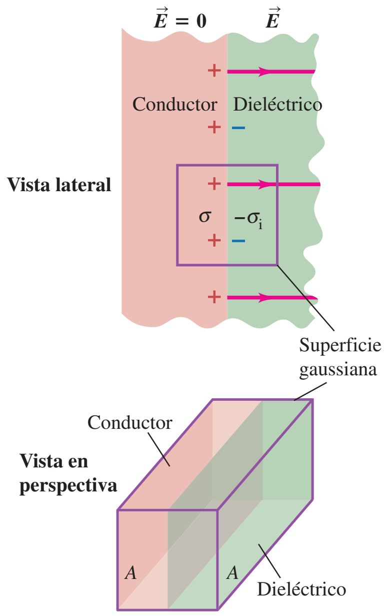
$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{o bien,} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Al combinarse con la ecuación (24.21) se obtiene

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{o bien,} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

La ecuación (24.22) plantea que el flujo de $K\vec{E}$, no $\vec{E}$, a través de la superficie gaussiana, como en la figura 24.23, es igual a la carga *libre* encerrada σA dividida entre ϵ_0.

24.23 Ley de Gauss con un dieléctrico. Esta figura presenta un acercamiento de la placa izquierda del capacitor de la figura 24.15b. La superficie gaussiana es una caja rectangular que tiene una mitad en el conductor y la otra mitad en el dieléctrico.



Resulta que, para *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida sea proporcional al campo eléctrico en el material, la ley de Gauss puede expresarse como

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss en un dieléctrico)} \qquad (24.23)$$

donde $Q_{\text{enc-libre}}$ es la carga *libre* total (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La importancia de estos resultados es que las caras derechas sólo contienen la carga *libre* en el conductor, no la carga ligada (inducida). En realidad, aunque no lo hemos demostrado, la ecuación (24.23) sigue siendo válida aun cuando diferentes partes de la superficie gaussiana estén incrustadas en dieléctricos que tengan valores distintos de K, siempre y cuando el valor de K en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico (que por lo general es el caso para los campos eléctricos que no son demasiado intensos) y que se utilice el valor de K apropiado para cada punto de la superficie gaussiana.

Ejemplo 24.12 Capacitor esférico con dieléctrico

En el capacitor esférico del ejemplo 24.3 (sección 24.1), el volumen entre las corazas conductoras esféricas está lleno de un aceite aislante cuya constante dieléctrica es igual a K. Use la ley de Gauss para encontrar la capacitancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En esencia, éste es el mismo problema que el del ejemplo 24.3. La única diferencia es la presencia del dieléctrico.

PLANTEAR: Al igual que se hizo en el ejemplo 24.3, se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio r entre las dos esferas. Como hay un dieléctrico, la ley de Gauss se emplea en la forma de la ecuación (24.23).

EJECUTAR: La simetría esférica del problema no cambia por la presencia del dieléctrico, por lo que se tiene

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint KE\,dA = KE\oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$ es la permitividad del dieléctrico (presentada en la sección 24.4). En comparación con el caso en que hay vacío entre las corazas conductoras, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$. De igual forma, la diferencia de potencial V_{ab} entre las corazas disminuye en un factor de $1/K$, con lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ se *incrementa* en un factor de K, al igual que para un capacitor de placas paralelas cuando se inserta un dieléctrico. Utilizando el resultado para el caso con vacío, ejemplo 24.3, se encuentra que la capacitancia con el dieléctrico es

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

EVALUAR: En este caso, el dieléctrico llena por completo el volumen entre los dos conductores, por lo que la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena sólo parcialmente este volumen (véase el problema de desafío 24.76).

Evalúe su comprensión de la sección 24.6 Una carga puntual única q está incrustada en un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K. En cierto punto dentro del dieléctrico a una distancia r de la carga puntual, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico? i) $q/4\pi\epsilon_0 r^2$; ii) $Kq/4\pi\epsilon_0 r^2$; iii) $q/4\pi K\epsilon_0 r^2$; iv) ninguna de las anteriores.

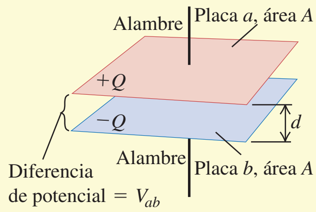
CAPÍTULO 24 RESUMEN

Capacitores y capacitancia: Un capacitor es todo par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado hay cargas de igual magnitud Q y signo opuesto en los dos conductores, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia C se define como la razón de Q a V_{ab}. La unidad del SI para la capacitancia es el farad (F): 1 F = 1 C/V.

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d. Si están separadas por vacío, la capacitancia sólo depende de A y d. Para otras geometrías, la capacitancia se obtiene a partir de la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véanse los ejemplos 24.1 a 24.4.)

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \tag{24.1}$$

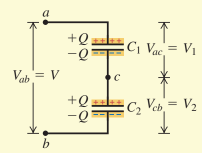
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{24.2}$$

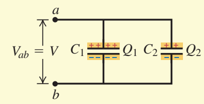


Capacitores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias $C_1, C_2, C_3, \ldots$, el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando los capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véanse los ejemplos 24.5 y 24.6.)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \tag{24.5}$$
(capacitores en serie)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \tag{24.7}$$
(capacitores en paralelo)

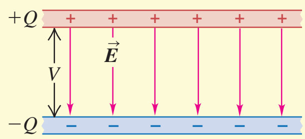




Energía en un capacitor: La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y carga Q, es igual a la energía almacenada en el capacitor. Esta energía se puede considerar como si residiera en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico. (Véanse los ejemplos 24.7 a 24.9.)

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{24.9}$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{24.11}$$



Dieléctricos: Cuando el espacio entre conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia se incrementa en un factor K, llamado constante dieléctrica del material. La cantidad $\epsilon = K\epsilon_0$ se llama permitividad del dieléctrico. Para una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas en el mismo factor K. La carga superficial proviene de la polarización, que es el reacomodo microscópico de la carga en el dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10.)

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se vuelven conductores, una situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se llama rigidez dieléctrica.

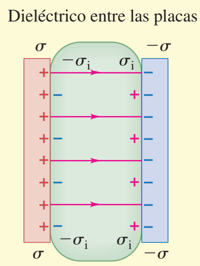
En un dieléctrico la expresión para la densidad de energía es la misma que en el vacío pero sustituyendo ϵ_0 por $\epsilon = K\epsilon_0$. (Véase el ejemplo 24.11.)

La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en el vacío, con dos diferencias clave: $\vec{E}$ se sustituye por $K\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por $Q_{enc\text{-}libre}$, que incluye solo la carga libre (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. (Véase el ejemplo 24.12.)

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \tag{24.19}$$
(capacitor de placas paralelas con un dieléctrico)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{24.20}$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc\text{-}libre}}{\epsilon_0} \tag{24.23}$$



Términos clave

capacitor, *816*
capacitancia, *816*
farad, *816*
capacitor de placas paralelas, *817*
conexión en serie, *820*
capacitancia equivalente, *821*
conexión en paralelo, *821*
densidad de energía, *826*
dieléctrico, *828*
ruptura del dieléctrico, *828*
constante dieléctrica, *828*
polarización, *829*
permitividad, *830*
rigidez dieléctrica, *833*
carga ligada, *834*
carga libre, *834*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La ecuación (24.9) indica que la energía almacenada en un capacitor con capacitancia C y carga Q es $U = Q^2/2C$. Si la carga Q se duplica, la energía almacenada se incrementa en un factor de $2^2 = 4$. Observe que si el valor de Q es demasiado grande, la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor superará la rigidez dieléctrica del material entre las placas y ocurrirá la ruptura del dieléctrico (véase la sección 24.4). Esto fija un límite práctico a la cantidad de energía que puede almacenarse.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

24.1 Respuesta: iii) La capacitancia no depende del valor de la carga Q. La duplicación del valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique, por lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ permanece sin cambio. Estos enunciados son verdaderos sin importar la geometría del capacitor.

24.2 Respuestas: *a*) i), *b*) iv) En una conexión en serie, los dos capacitores tienen la misma carga Q, pero distintas diferencias de potencial $V_{ab} = Q/C$; el capacitor con la menor capacitancia C tiene la mayor diferencia de potencial. En una conexión en paralelo, los dos capacitores tienen la misma diferencia de potencial V_{ab}, pero distintas cargas $Q = CV_{ab}$; el capacitor con la mayor capacitancia C tiene la carga más grande. Por lo tanto, un capacitor de 4 μF tendrá una diferencia de potencial más grande que otro capacitor de 8 μF si los dos están conectados en serie. El capacitor de 4 μF no puede tener más carga que el de 8 μF sin importar cómo se conecten: en una conexión en serie tendrán la misma carga, y en una conexión en paralelo el capacitor de 8 μF tendrá más carga.

24.3 Respuesta: i) Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q. Para comparar la cantidad de energía almacenada se utiliza la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9); esto indica que el capacitor con la *menor* capacitancia ($C = 4\ \mu$F) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En contraste, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V, por lo que para compararlos se emplea $U = \frac{1}{2}CV^2$ de la ecuación (24.9). Esto demuestra que en una combinación en paralelo, el capacitor con la capacitancia *más grande* ($C = 8\ \mu$F) tiene más energía almacenada. (Si en vez de lo anterior se hubiera usado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analizar la combinación en serie, se habrían tenido que explicar las distintas diferencias de potencial a través de los capacitores. En forma similar, el empleo de $U = Q^2/2C$ para estudiar la combinación en paralelo requeriría que se explicaran las diferentes cargas en los capacitores.)

24.4 Respuesta: i) Aquí, Q permanece sin cambio, por lo que se emplea $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9) para la energía almacenada. Si se retira el dieléctrico la capacitancia se reduce en un factor de $1/K$; como U es inversamente proporcional a C, la energía almacenada aumenta en un factor de K. Se requiere trabajo para retirar el bloque dieléctrico del capacitor porque la curvatura del campo trata de atraerlo de regreso (figura 24.16). El trabajo que se hace pasa a la energía almacenada en el capacitor.

24.5 Respuestas: i), iii), ii) La ecuación (24.14) establece que si E_0 es la magnitud del campo eléctrico inicial (antes de insertar el dieléctrico), entonces la magnitud del campo resultante después de insertar el dieléctrico es $E_0/K = E_0/3$. La magnitud del campo resultante es igual a la diferencia entre la magnitud del campo inicial y la magnitud E_i del campo debido a las cargas ligadas (véase la figura 24.21). Por lo tanto, $E_0 - E_i = E_0/3$ y $E_i = 2E_0/3$.

24.6 Respuesta: iii) La ecuación (24.23) muestra que esta situación es la misma en una carga puntual aislada en el vacío pero sustituyendo $\vec{E}$ por $K\vec{E}$. Así, KE en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y por eso $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2$. Al igual que en el ejemplo 24.12, si se llena el espacio con un dieléctrico, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P24.1. La ecuación (24.2) muestra que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas aumenta a medida que la separación d entre las placas disminuye. Sin embargo, existe un límite práctico en cuanto a qué tan pequeña puede ser d, lo que también impone un límite superior a la magnitud de C. Explique qué es lo que fija los límites para d. (*Sugerencia:* piense en qué pasa con la magnitud del campo eléctrico cuando $d \rightarrow 0$.)

P24.2. Suponga que distintos capacitores de placas paralelas se cargan con una fuente de voltaje constante. Pensando en el movimiento y la posición reales de las cargas a nivel atómico, ¿por qué es razonable que las capacitancias sean proporcionales a las áreas de las placas? ¿Por qué es razonable que las capacitancias sean *inversamente* proporcionales a la distancia entre las placas?

P24.3. Suponga que las dos placas de un capacitor tienen diferentes áreas. Cuando el capacitor se carga conectándolo a una batería, ¿las cargas en las dos placas tienen magnitud igual o diferente? Explique su razonamiento.

P24.4. En el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab), en Illinois, los protones se aceleran en un anillo de 2 km de radio hasta alcanzar una rapidez cercana a la de la luz. La energía para este proceso se almacena en capacitores del tamaño de una casa. Cuando esos capacitores se están cargando emiten un sonido muy intenso. ¿Cuál es el origen de ese sonido?

P24.5. En el capacitor de placas paralelas de la figura 24.2, suponga que las placas se separan de manera que la separación d es mucho mayor que el tamaño de las placas. *a*) ¿Es exacto decir que el campo eléctrico entre las placas es uniforme? ¿Por qué? *b*) En la situación que se ilustra en la figura 24.2, la diferencia de potencial entre las placas es $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Si las placas se separan según la descripción anterior, ¿V_{ab} es mayor o menor de lo que indicaría esta fórmula? Explique su razonamiento. *c*) Con las placas separadas de acuerdo con la descripción, ¿la capacitancia es mayor, menor o igual a la que da la ecuación (24.2)? Explique su razonamiento.

P24.6. Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y se mantiene conectado a ésta. Después se duplica la distancia de separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la carga en las placas y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.7. Un capacitor de placas paralelas se carga conectándolo a una batería y luego se desconecta de ésta. Después se duplica la distancia de separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la diferencia de potencial y la energía total? Dé una explicación de su razonamiento.

P24.8. Dos capacitores de placas paralelas, idénticos, pero con la excepción de que uno tiene el doble de separación entre sus placas que el otro, se cargan mediante la misma fuente de voltaje. ¿Cuál capacitor tiene el campo eléctrico más intenso entre las placas? ¿Cuál capacitor tiene mayor carga? ¿Cuál tiene mayor densidad de energía? Explique su razonamiento.

P24.9. Las placas con carga de un capacitor se atraen entre sí, por lo que el hecho de separarlas requiere trabajo realizado por alguna fuente externa. ¿A dónde va la energía agregada por ese trabajo? Explique su razonamiento.

P24.10. Las dos placas de un capacitor reciben cargas $\pm Q$. Después se desconecta el capacitor del dispositivo de carga de manera que las cargas en las placas no cambien, y el capacitor se sumerge en un tanque de aceite. El campo eléctrico entre las placas, ¿aumenta, disminuye o permanece igual? Explique su razonamiento. ¿Cómo podría medirse el campo?

P24.11. Como se aprecia en la tabla 24.1, el agua tiene una constante dieléctrica muy grande, $K = 80.4$. ¿Por qué piensa que no es común utilizar agua como dieléctrico en los capacitores?

P24.12. ¿La rigidez dieléctrica es lo mismo que la constante dieléctrica? Explique cualesquiera diferencias entre las dos cantidades. ¿Existe alguna relación sencilla entre la rigidez dieléctrica y la constante dieléctrica? (Consulte la tabla 24.2.)

P24.13. Un capacitor construido con tiras de aluminio separadas por una película de Mylar estuvo sometido a un voltaje excesivo, y la ruptura resultante del dieléctrico perforó agujeros en el Mylar. Después de esto, se observó que la capacitancia era aproximadamente la misma que antes, pero el voltaje de ruptura era mucho menor, ¿por qué?

P24.14. Suponga que usted acerca un bloque dieléctrico al espacio entre las placas de un capacitor con carga y se prepara para introducirlo entre ellas. ¿Qué fuerza sentiría? ¿Qué le dice esta fuerza acerca de la energía almacenada entre las placas una vez que el dieléctrico esté en su lugar, en relación con el momento en que no lo estaba?

P24.15. La frescura del pescado se puede medir si se coloca un ejemplar entre las placas de un capacitor y se mide la capacitancia. ¿Cómo funciona esto? (*Sugerencia:* considere que el pescado se seca conforme pasa el tiempo. Consulte la tabla 24.1.)

P24.16. Los capacitores *electrolíticos* usan como dieléctrico una capa muy delgada de óxido no conductor entre una placa metálica y una solución conductora. Analice la ventaja de esa clase de capacitores en relación con los que se construyen colocando un dieléctrico sólido entre las placas metálicas.

P24.17. En términos de la constante dieléctrica K, ¿qué sucede con el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana que se ilustra en la figura 24.23, cuando se inserta el dieléctrico en el espacio antes vacío entre las placas? Explique su respuesta.

P24.18. Un capacitor de placas paralelas está conectado a una fuente de energía que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas. *a*) Si luego se coloca una lámina de dieléctrico entre las placas, ¿qué sucede con i) el campo eléctrico entre las placas, ii) la magnitud de la carga entre cada placa y iii) la energía almacenada en el capacitor? *b*) Ahora suponga que antes de insertar el dieléctrico se desconecta el capacitor con carga de la fuente de energía. En este caso, ¿qué pasa con i) el campo eléctrico entre las placas, ii) la magnitud de la carga en cada placa, iii) la energía almacenada en el capacitor? Explique cualquier diferencia que exista entre las dos situaciones.

P24.19. Los dieléctricos líquidos que tienen moléculas polares (como el agua) siempre tienen constantes dieléctricas que disminuyen al aumentar la temperatura. ¿Por qué?

P24.20. Un conductor es un caso extremo de dieléctrico ya que, si se le aplica un campo eléctrico, las cargas tienen libertad para moverse dentro del conductor para establecer "cargas inducidas". ¿Cuál es la constante dieléctrica de un conductor perfecto: $K = 0$, $K \rightarrow \infty$, o algún valor intermedio? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 24.1 Capacitores y capacitancia

24.1. Un capacitor tiene una capacitancia de 7.28 μF. ¿Qué cantidad de carga debe colocarse en cada una de sus placas para que la diferencia de potencial entre ellas sea de 25.0 V?

24.2. Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas por una distancia de 3.28 mm, y cada una tiene un área de 12.2 cm^2. Cada placa tiene una carga con magnitud de 4.35×10^{-8} C. Las placas están en el vacío. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?

24.3. Un capacitor de placas paralelas de aire y capacitancia de 245 pF tiene una carga con magnitud de 0.148 μC en cada placa. Las placas están separadas por una distancia de 0.328 mm. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada placa?

24.4. Capacitancia de un osciloscopio. Los osciloscopios tienen placas metálicas paralelas en su interior para que desvíen el haz de electrones. Estas placas se llaman *placas de desviación*, y es común que sean cuadradas de 3.0 cm por lado y estén separadas 5.0 mm, con vacío entre ellas. ¿Cuál es la capacitancia de estas placas de desviación y, por lo tanto, del osciloscopio? (*Nota:* esta capacitancia en ocasiones tiene un efecto en el circuito en estudio y debe tomarse en cuenta al efectuar los cálculos.)

24.5. Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF con placas circulares está conectado a una batería de 12.0 V. *a*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *b*) ¿Cuánta carga habría en las placas si se duplicara la separación y el capacitor permaneciera conectado a la batería? *c*) ¿Cuánta carga habría en las placas si el capacitor se conectara a la batería de 12.0 V después de duplicar el radio de cada placa sin modificar su separación?

24.6. Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF está conectado a una batería de 12.0 V. Después de que el capacitor se carga por completo, la batería se desconecta sin que haya pérdida de carga en las placas. *a*) Se conecta un voltímetro a través de las dos placas sin descargarlas. ¿Cuál es su lectura? *b*) ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si i) la separación de las placas se duplica; ii) el radio de cada placa se duplica, pero la separación entre ellas permanece igual?

24.7. ¿Cuál debe ser la separación entre dos monedas de un centavo de dólar colocadas en forma paralela para constituir un capacitor de 1.00 pF? ¿Su respuesta sugiere que se justifica tratar las monedas como láminas infinitas? Explique su respuesta.

24.8. Un capacitor lleno de aire, con placas circulares paralelas de 5.00 pF, va a usarse en un circuito en el que estará sometido a potenciales de hasta 1.00×10^2 V. El campo eléctrico entre las placas no va a ser mayor de 1.00×10^4 N/C. Suponga que, como ingeniero eléctrico en ciernes de Live-Wire Electronics, se le asignan las siguientes tareas: *a*) diseñe el capacitor determinando las dimensiones físicas y la separación que debe tener; *b*) determine la carga máxima que pueden tener sus placas.

24.9. Un capacitor está construido con dos cilindros coaxiales de hierro, huecos, uno dentro del otro. El cilindro interior tiene carga negativa y el exterior tiene carga positiva; la magnitud de la carga en cada uno es 10.0 pC. El cilindro interior tiene un radio de 0.50 mm y el exterior de 5.00 mm, y la longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Qué diferencia de potencial es necesario aplicar para tener tales cargas en los cilindros?

24.10. Un capacitor cilíndrico consiste en un núcleo sólido conductor con radio de 0.250 cm, coaxial con un tubo conductor exterior hueco. Los dos conductores están rodeados por aire, y la longitud del cilindro es de 12.0 cm. La capacitancia es de 36.7 pF. *a*) Calcule el radio interior del tubo hueco. *b*) Cuando el capacitor está cargado a 125 V, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ del capacitor?

24.11. Un capacitor cilíndrico tiene un conductor interno de 1.5 mm de radio y un conductor externo de 3.5 mm de radio. Los dos conductores están separados por vacío, y el capacitor completo mide 2.8 m de largo. *a*) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud? *b*) El potencial del conductor interno es 350 mV mayor que el del conductor externo. Determine la carga (magnitud y signo) en ambos conductores.

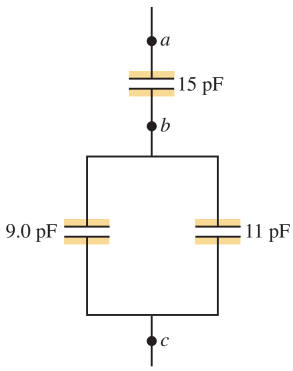
24.12. Un capacitor esférico está formado por dos corazas concéntricas, esféricas y conductoras, separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 15.0 cm y la capacitancia es de 116 pF. *a*) ¿Cuál es el radio de la esfera exterior? *b*) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada esfera?

24.13. Un capacitor esférico contiene una carga de 3.30 nC cuando está conectado a una diferencia de potencial de 220 V. Si sus placas están separadas por vacío y el radio interno de la coraza exterior es de 4.00 cm, calcule: *a*) la capacitancia; *b*) el radio de la esfera interior; *c*) el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie de la esfera interior.

Sección 24.2 Capacitores en serie y en paralelo

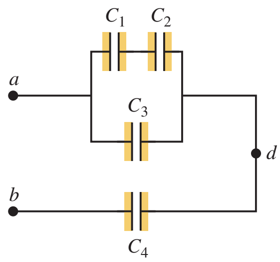
24.14. Para el sistema de capacitores que se aprecia en la figura 24.24, calcule la capacitancia equivalente *a*) entre *b* y *c*, y *b*) entre *a* y *c*.

Figura 24.24 Ejercicio 24.14.



24.15. En la figura 24.25, cada capacitor tiene $C = 4.00\ \mu F$ y $V_{ab} = +28.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor; *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor; *c*) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *d*.

Figura 24.25 Ejercicio 24.15.

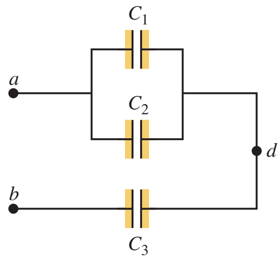


24.16. En la figura 24.8a, sean $C_1 = 3.00\ \mu F$, $C_2 = 5.00 \mu F$ y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor, y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.17. En la figura 24.9a, sean $C_1 = 3.00\ \mu F$, $C_2 = 5.00\ \mu F$ y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.18. En la figura 24.26, $C_1 = 6.00\ \mu F$, $C_2 = 3.00\ \mu F$ y $C_3 = 5.00\ \mu F$. La red de capacitores está conectada a un potencial aplicado V_{ab}. Después de que las cargas en los capacitores han alcanzado sus valores finales, la carga en C_2 es de 40.0 μC. *a*) ¿Cuáles son las cargas en los capacitores C_1 y C_3? *b*) ¿Cuál es el voltaje aplicado V_{ab}?

Figura 24.26 Ejercicios 24.18 y 24.19.



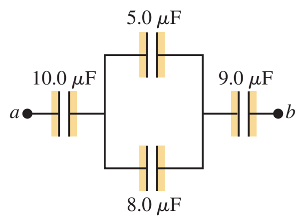
24.19. En la figura 24.26, $C_1 = 3.00\ \mu F$ y $V_{ab} = 120$ V. La carga en el capacitor C_1 es 150 μC. Calcule el voltaje a través de los otros dos capacitores.

24.20. Dos capacitores de placas paralelas al vacío tienen separaciones d_1 y d_2 entre sus placas; las áreas *A* de las placas son iguales. Demuestre que cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es la misma que para un solo capacitor con área de placas *A* y distancia de separación $d_1 + d_2$.

24.21. Dos capacitores al vacío entre placas paralelas tienen áreas A_1 y A_2, con igual distancia de separación *d*. Demuestre que cuando los capacitores están conectados en paralelo, la capacitancia equivalente es la misma que para un solo capacitor con área de placa $A_1 + A_2$ y distancia de separación *d*.

24.22. En la figura 24.27 se ilustra un sistema de cuatro capacitores, donde la diferencia de potencial a través de *ab* es 50.0 V. *a*) Determine la capacitancia equivalente de este sistema entre *a* y *b*. *b*) ¿Cuánta carga se almacena en esta combinación de capacitores? *c*) ¿Cuánta carga se almacena en cada uno de los capacitores de 10.0 μF y 9.0 μF?

Figura 24.27 Ejercicio 24.22.



24.23. Suponga que el capacitor de 3 μF en la figura 24.10a se retirara para sustituirse por otro diferente, y que esto cambiara la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* a 8 μF. ¿Cuál sería la capacitancia del capacitor remplazado?

Sección 24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía del campo eléctrico

24.24. Un capacitor de placas paralelas separadas por aire tiene una capacitancia de 920 pF. La carga en cada placa es de 2.55 μC. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) Si la carga se mantiene constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas, si la separación se duplica? *c*) ¿Cuánto trabajo se requiere para duplicar la separación?

24.25. Un capacitor de placas paralelas separadas por aire, de 5.80 μF, tiene una separación de 5.00 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 400 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas, en unidades de J/m^3.

24.26. Un capacitor con aire está hecho de dos placas paralelas planas con una separación de 1.50 mm. La magnitud de la carga en cada placa es de 0.0180 μC, cuando la diferencia de potencial es de 200 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse sin que haya ruptura del dieléctrico? (En el caso del aire, la ruptura del dieléctrico ocurre con una intensidad de campo eléctrico de 3.0×10^6 V/m.) *d*) Cuando la carga es de 0.0180 μC, ¿cuál es la energía total almacenada?

24.27. Un capacitor de 450 μF se carga a 295 V. Después se conecta un alambre entre las placas. ¿Cuántos joules de energía térmica se producen conforme se descarga el capacitor, si toda la energía almacenada se convierte en calor en el alambre?

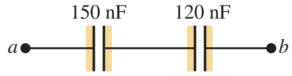
24.28. Un capacitor de capacitancia C se carga a una diferencia de potencial V_0. Después, las terminales del capacitor con carga se conectan a las de un capacitor sin carga de capacitancia $C/2$. Calcule *a*) la carga original del sistema; *b*) la diferencia de potencial final a través de cada capacitor; *c*) la energía final del sistema; *d*) la disminución de energía cuando se conectan los capacitores. *e*) ¿A dónde fue la energía "perdida"?

24.29. Un capacitor tiene placas paralelas con vacío entre ellas, con área de placa igual a A, una separación x, y cargas $+Q$ y $-Q$ en cada una. El capacitor se desconecta de la fuente de carga, por lo que la carga en cada placa permanece fija. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? *b*) Se separan las placas una distancia adicional dx. ¿Cuál es el cambio en la energía almacenada? *c*) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen entre sí, entonces el cambio en la energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado para separar las placas. Encuentre una expresión para F. *d*) Explique por qué F *no* es igual a QE, donde E es el campo eléctrico entre las placas.

24.30. Un capacitor de placas paralelas con vacío entre ellas tiene 8.38 J de energía almacenada. La separación entre las placas es de 2.30 mm. Si la separación disminuye a 1.15 mm, ¿cuál es la energía almacenada *a*) si el capacitor se desconecta de la fuente de potencial de manera que la carga en las placas permanece constante, y *b*) si el capacitor sigue conectado a la fuente de potencial de manera que la diferencia de potencial entre las placas permanece constante?

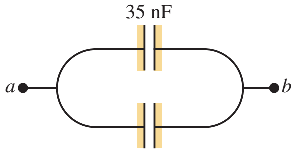
24.31. *a*) ¿Cuánta carga tiene que suministrar una batería a un capacitor de 5.0 μF para crear una diferencia de potencial de 1.5 V a través de sus placas? En este caso, ¿cuánta energía estaría almacenada en el capacitor? *b*) ¿Cuánta carga tendría que suministrar la batería para que en el capacitor se almacenara 1.0 J de energía? En este caso, ¿cuál sería el potencial a través del capacitor?

Figura 24.28 Ejercicio 24.32.



24.32. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.28, la diferencia de potencial a través de ab es de 36 V. Encuentre *a*) la carga total almacenada en esta red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Figura 24.29 Ejercicio 24.33.



24.33. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.29, la diferencia de potencial a través de ab es 220 V. Calcule *a*) la carga total almacenada en la red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.34. Un capacitor cilíndrico de 0.350 m de longitud consiste en un núcleo conductor sólido de 1.20 mm de radio, y un tubo exterior conductor hueco con radio interior de 2.00 mm. Los dos conductores coaxiales están separados por aire y se cargan a una diferencia de potencial de 6.00 V. Calcule *a*) la carga por unidad de longitud para el capacitor; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la capacitancia; *d*) la energía almacenada en el capacitor cuando está cargado por completo.

24.35. Un capacitor cilíndrico de aire tiene una longitud de 15.0 m y almacena 3.20×10^{-9} J de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 4.00 V. *a*) Calcule la magnitud de la carga en cada conductor. *b*) Calcule la razón de los radios interior y exterior de los conductores.

24.36. Un capacitor está formado por dos corazas conductoras concéntricas esféricas separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 12.5 cm, y la exterior tiene un radio de 14.8 cm. Se aplica al capacitor una diferencia de potencial de 120 V. *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? *b*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? *c*) Para un capacitor de placas paralelas la densidad de energía es uniforme en la región entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Esto también se cumple para un capacitor esférico?

24.37. Se tienen dos capacitores idénticos y una fuente externa de potencial. *a*) Compare la energía total almacenada en los capacitores cuando se conectan en serie y en paralelo al potencial aplicado. *b*) Compare la cantidad máxima de carga almacenada en cada caso. *c*) El almacenamiento de energía en un capacitor está limitado por el máximo campo eléctrico entre las placas. ¿Cuál es la razón del campo eléctrico para las combinaciones en serie y paralelo?

Sección 24.4 Dieléctricos

24.38. Un capacitor de placas paralelas tiene capacitancia $C_0 =$ 5.00 pF cuando hay aire entre sus placas. La separación entre las placas es de 1.50 mm. *a*) ¿Cuál es la magnitud máxima de carga Q que puede colocarse en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no debe exceder 3.00×10^4 V/m? *b*) Se inserta un dieléctrico con $K = 2.70$ entre las placas del capacitor, llenando por completo el volumen entre ellas. Ahora, ¿cuál es la magnitud máxima de carga en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no debe exceder 3.00×10^4 V/m?

24.39. Dos placas paralelas tienen cargas iguales de signo contrario. Cuando se evacua el espacio entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3.20 \times 10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un dieléctrico, el campo eléctrico es $E = 2.50 \times 10^5$ V/m. *a*) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

24.40. Un aficionado a la electrónica quiere construir un capacitor sencillo de 1.0 nF para sintonizar su radio de cristal, con dos láminas de aluminio como placas y algunas hojas de papel entre ellas como dieléctrico. El papel tiene una constante dieléctrica de 3.0, y el espesor de una hoja es de 0.20 mm. *a*) Si las hojas de papel miden 22×28 cm y el aficionado corta el aluminio con las mismas dimensiones, ¿cuántas hojas de papel debe poner entre las placas para lograr la capacitancia apropiada? *b*) Suponga que, por conveniencia, él quiere utilizar, en vez de papel, una sola hoja de cartón con la misma constante dieléctrica pero con espesor de 12.0 mm. ¿Qué área de hoja de aluminio necesitará para hacer sus placas y obtener 1.0 nF de capacitancia? *c*) Suponga que recurre a la alta tecnología y encuentra una hoja de teflón del mismo espesor que el del cartón para utilizarla como dieléctrico. ¿Necesitará una área más grande o más pequeña de teflón en comparación con la de cartón? Explique su respuesta.

24.41. El dieléctrico que ha de usarse en un capacitor de placas paralelas tiene una constante dieléctrica de 3.60 y rigidez dieléctrica de 1.60 $\times$ 10^7 V/m. El capacitor debe tener una capacitancia de 1.25 $\times$ 10^{-9} F y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 5500 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

24.42. Demuestre que la ecuación (24.20) se cumple para un capacitor de placas paralelas con un material dieléctrico entre ellas. Use un procedimiento análogo al que se empleó para obtener la ecuación (24.11).

24.43. Un capacitor tiene placas paralelas con un área de 12 cm^2 separadas por una distancia de 2.0 mm. El espacio entre las placas está lleno de poliestireno (consulte la tabla 24.2). *a*) Determine la permitividad del poliestireno. *b*) Calcule el voltaje máximo permisible a través del capacitor para evitar la ruptura del dieléctrico. *c*) Con el voltaje igual al valor obtenido en el inciso *b*), determine la densidad superficial de carga en cada placa y la densidad superficial de carga inducida en la superficie del dieléctrico.

24.44. Se mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V entre las terminales de un capacitor de 0.25 μF de placas paralelas con aire entre ellas. *a*) Se inserta una lámina de Mylar entre las placas de manera que llene por completo el espacio. Cuando se hace esto, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor (consulte la tabla 24.1)? *b*) ¿Cuál es la carga total inducida en cada cara de la lámina de Mylar? *c*) ¿Qué efecto tiene la lámina de Mylar en el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo se puede conciliar este hecho con el incremento de la carga en las placas, el cual actúa para *aumentar* el campo eléctrico.

24.45. Cuando se conecta un capacitor con aire de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F) a una fuente de potencia, la energía almacenada en el capacitor es de 1.85 $\times$ 10^{-5} J. Mientras el capacitor se mantiene conectado a la fuente de potencia, se inserta un trozo de material dieléctrico que llena por completo el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2.32 $\times$ 10^{-5} J. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica del trozo de material?

24.46. Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de C = 12.5 pF cuando el volumen entre las placas está lleno de aire. Las placas son circulares con radio de 3.00 cm. El capacitor está conectado a una batería y una carga de magnitud 25.0 pC va hacia cada placa. Con el capacitor aún conectado a la batería, se inserta un bloque de dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas. Después de insertar el dieléctrico, la carga en cada placa tiene una magnitud de 45.0 pC. *a*) ¿Cuál es la constante dieléctrica K del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas antes y después de haber insertado el dieléctrico? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto medio entre las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

24.47. Se conecta un capacitor de 12.5 μF a una fuente de potencia que mantiene una diferencia de potencial constante de 24.0 V a través de las placas. Entre las placas se coloca un trozo de material cuya constante dieléctrica es de 3.75 llenando por completo el espacio que hay entre ellas. *a*) ¿Cuánta energía hay almacenada en el capacitor antes y después de insertar el dieléctrico? *b*) ¿En cuánto cambia la energía durante la inserción? ¿Aumenta o disminuye?

*Sección 24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

***24.48.** Las placas paralelas de un capacitor tienen un área de 0.0225 m^2 y están separadas por 1.00 mm de teflón. *a*) Calcule la carga en las placas cuando están cargadas a una diferencia de potencial de 12.0 V. *b*) Use la ley de Gauss (ecuación 24.23) para calcular el campo eléctrico dentro del teflón. *c*) Aplique la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico si se desconecta la fuente de voltaje y se retira el teflón.

***24.49.** El volumen entre las placas paralelas de un capacitor está lleno de plástico cuya constante dieléctrica es K. La magnitud de la carga en cada placa es Q. Cada placa tiene área A, con una distancia d entre ambas. *a*) Utilice la ley de Gauss como se plantea en la ecuación (24.23) para calcular la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. *b*) Use el campo eléctrico obtenido en el inciso *a*) para calcular la diferencia de potencial entre las dos placas. *c*) Con el resultado del inciso *b*), determine la capacitancia del capacitor. Compare su resultado con la ecuación (24.12).

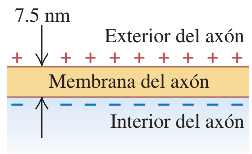
Problemas

24.50. Las placas paralelas de un capacitor con aire miden 16 cm cuadrados de superficie, con una separación de 4.7 mm. El capacitor se conecta a una batería de 12 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? *e*) Si la batería se desconecta y luego se separan las placas hasta estar a 9.4 mm, ¿cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*)?

24.51. Suponga que la batería del problema 24.50 permanece conectada mientras se separan las placas. ¿Cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*) después de haber separado las placas?

24.52. Membranas celulares. Las membranas de las células (la pared que las rodea) normalmente tienen un espesor de 7.5 nm. Son parcialmente permeables para permitir que material con carga entre y salga, según sea necesario. En las caras interior y exterior de las membranas hay densidades de carga iguales pero de signo contrario, para impedir que cargas adicionales crucen la pared celular. Se puede modelar la membrana celular como un capacitor de placas paralelas, con la membrana que contiene proteínas incrustada en un material orgánico que le da una constante dieléctrica alrededor de 10. (Véase la figura 24.30.) *a*) ¿Cuál es la capacitancia por centímetro cuadrado de una membrana celular? *b*) En su estado de reposo normal una célula tiene una diferencia de potencial de 85 mV a través de su membrana. ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de ella?

Figura 24.30 Problema 24.52.



24.53. Las unidades de flash electrónicas de las cámaras fotográficas contienen un capacitor que almacena energía para producir el destello. En una de tales unidades, el destello dura $\frac{1}{675}$ s, con salida media de potencia luminosa de 2.70 $\times$ 10^5 W. *a*) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia del 95% (el resto se convierte en energía térmica), ¿cuánta energía debe almacenarse en el capacitor para obtener un destello? *b*) El capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus placas de 125 V, cuando la energía almacenada es igual al valor calculado en el inciso *a*). ¿Cuál es la capacitancia?

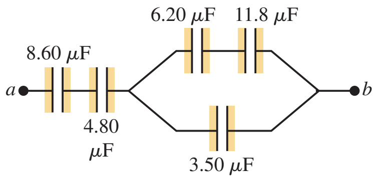
24.54. En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla tiene una pequeña placa metálica que funciona como una de las placas de un capacitor de placas paralelas relleno de aire. Cuando se oprime la tecla, la separación de las placas disminuye y la capacitancia aumenta. Los circuitos electrónicos detectan el cambio de la capacitancia y con ello la tecla que se oprimió. En un teclado en particular, el área de cada placa metálica es de 42.0 mm^2, y la separación entre las placas es de 0.700 mm antes de oprimir la tecla. *a*) Calcule la capacitancia antes de oprimir la tecla. *b*) Si los circuitos son capaces de detectar un cambio en la capacitancia de 0.250 pF, ¿qué distancia hay que oprimir la tecla para que los circuitos detecten que la tecla se oprimió?

24.55. Considere un capacitor cilíndrico como el que se ilustra en la figura 24.6. Sea $d = r_b - r_a$ la distancia entre los conductores interior y exterior. *a*) Los radios de ambos conductores son sólo un poco diferentes, de manera que $d \ll r_a$. Demuestre que el resultado obtenido en el ejemplo 24.4 (sección 24.1) para la capacitancia de un capacitor cilíndrico se reduce a la ecuación (24.2), que es la ecuación de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, con área A como superficie de cada cilindro. Use el resultado de que $\ln(1 + z) \cong z$ para $|z| \ll 1$. *b*) Aunque la Tierra es esencialmente esférica, su superficie parece plana porque su radio es muy grande. Utilice esta idea para explicar por qué es razonable el resultado del inciso *a*) desde un punto de vista puramente geométrico.

24.56. En la figura 24.9a, sean $C_1 = 9.0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 4.0\ \mu\text{F}$ y $V_{ab} = 28$ V. Suponga que los capacitores con carga se desconectan de la fuente y uno del otro, para luego reconectarlos entre sí con placas de signo *contrario*. ¿En cuánto disminuye la energía del sistema?

24.57. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.31, la diferencia de potencial a través de *ab* es de 12.0 V. Calcule *a*) la energía total almacenada en la red, y *b*) la energía almacenada en el capacitor de 4.80 μF.

Figura 24.31 Problema 24.57.



24.58. Se dispone de varios capacitores de 0.25 μF. El voltaje a través de cada uno no debe exceder de 600 V. Se necesita construir un capacitor con capacitancia de 0.25 μF para conectarlo a través de una diferencia de potencial de 960 V. *a*) En un diagrama, muestre la manera de obtener un capacitor equivalente con las propiedades mencionadas. *b*) Ningún dieléctrico es un aislante perfecto que impida por completo el flujo de carga a través de su volumen. Suponga que el dieléctrico en uno de los capacitores en el diagrama es un conductor moderadamente bueno. En este caso, ¿qué ocurrirá cuando la combinación de capacitores se conecte a través de una diferencia de potencial de 960 V?

24.59. En la figura 24.32, $C_1 = C_5 = 8.4\ \mu\text{F}$ y $C_2 = C_3 = C_4 = 4.2\ \mu\text{F}$. El potencial aplicado es $V_{ab} = 220$ V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*? *b*) Calcule la carga y la diferencia de potencial en cada capacitor.

Figura 24.32 Problema 24.59.

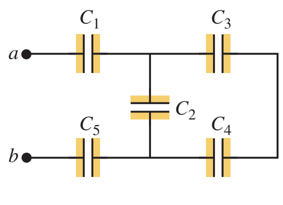
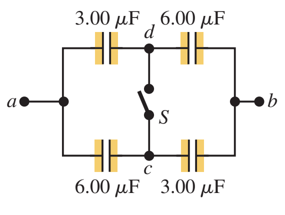


Figura 24.33 Problema 24.60.



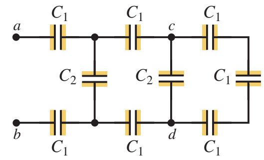
24.60. Los capacitores en la figura 24.33 se encuentran inicialmente sin carga y están conectados, como se ilustra en el diagrama, con el interruptor S abierto. La diferencia de potencial aplicada es $V_{ab} = +210$ V. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd}? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor una vez cerrado el interruptor S? *c*) ¿Cuánta carga fluyó a través del interruptor cuando se cerró?

24.61. Tres capacitores con capacitancias de 8.4, 8.4 y 4.2 μF están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 36 V. *a*) ¿Cuál es la carga en el capacitor de 4.2 μF? *b*) ¿Cuál es la energía total almacenada en los tres capacitores? *c*) Los capacitores se desconectan de la diferencia de potencial sin permitir que se descarguen. Después se vuelven a conectar en paralelo entre sí, con las placas con carga positiva conectadas. ¿Cuál es el voltaje a través de cada capacitor en la combinación en paralelo? *d*) ¿Cuál es la energía total que ahora está almacenada en los capacitores?

24.62. Capacitancia en una nube de tormenta. El centro de carga de una nube de tormenta, que se encuentra a 3.0 km sobre la superficie terrestre, contiene 20 C de carga negativa. Si se supone que el centro de carga tiene un radio de 1.0 km, y el centro de carga y la superficie de la Tierra se modelan como placas paralelas, calcule: *a*) la capacitancia del sistema; *b*) la diferencia de potencial entre el centro de carga y la superficie terrestre; *c*) la intensidad media del campo eléctrico entre la nube y la superficie terrestre; *d*) la energía eléctrica almacenada en el sistema.

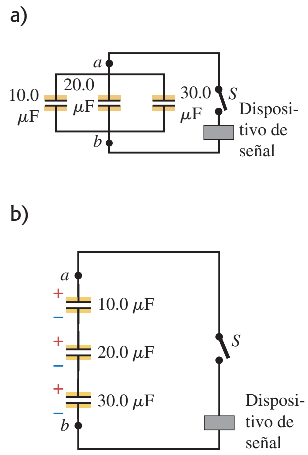
24.63. En la figura 24.34, cada capacitancia C_1 es de 6.9 μF, y cada capacitancia C_2 es de 4.6 μF. *a*) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*. *b*) Determine la carga en cada uno de los tres capacitores más cercanos a *a* y *b* cuando $V_{ab} = 420$ V. *c*) Con 420 V a través de *a* y *b*, calcule V_{cd}.

Figura 24.34 Problema 24.63.



24.64. Cada combinación de capacitores entre los puntos *a* y *b* en la figura 24.35 se conecta primero a través de una batería de 120 V, para cargar la combinación a 120 V. Después, estas combinaciones se conectan para formar el circuito que se ilustra. Cuando se acciona el interruptor S, fluye una oleada de carga desde los capacitores que se descargan, la cual activa el dispositivo de señal. ¿Cuánta carga fluye a través del dispositivo de señal?

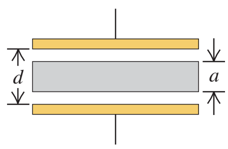
Figura 24.35 Problema 24.64.



24.65. Un capacitor de placas paralelas que tiene sólo aire entre las placas se carga conectándolo a una batería. Luego se desconecta el capacitor de la batería sin que ninguna carga salga de las placas. *a*) Cuando se coloca a través del capacitor, un voltímetro da una lectura de 45.0 V. Al insertar un dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas, el voltímetro lee 11.5 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica de este material? *b*) ¿Cuál será la lectura del voltímetro si se retira parte del dieléctrico de manera que sólo ocupe la tercera parte del espacio entre las placas?

24.66. Un capacitor con aire está construido con dos placas planas, cada una con área A, separadas una distancia d. Después se inserta entre ellas un bloque metálico con espesor a (menor que d) y de la misma forma y tamaño que las placas, paralelo a éstas y sin tocarlas (figura 24.36). *a*) ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo? *b*) Exprese la capacitancia como un múltiplo de la capacitancia C_0 cuando el bloque de metal no está presente. *c*) Analice lo que pasa con la capacitancia en los límites cuando $a \to 0$ y $a \to d$.

Figura 24.36 Problema 24.66.



24.67. Capacitancia de la Tierra. *a*) Analice cómo puede aplicarse el concepto de capacitancia a un *solo* conductor. (*Sugerencia:* en la relación $C = Q/V_{ab}$, piense en el segundo conductor como si se localizara en el infinito.) *b*) Utilice la ecuación (24.1) para demostrar que

$C = 4\pi\epsilon_0 R$ para una esfera conductora sólida de radio R. Utilice el resultado del inciso *b*) para calcular la capacitancia de la Tierra, que es un buen conductor con radio de 6380 km. Realice una comparación con los capacitores comunes que se emplean en los circuitos electrónicos y que tienen capacitancias que van de 10 pF a 100 μF.

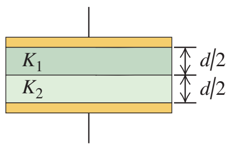
24.68. Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga Q. Calcule la densidad de la energía del campo eléctrico en un punto localizado a una distancia r del centro de la esfera para *a*) $r < R$, y *b*) $r > R$. *c*) Calcule la energía total del campo eléctrico asociada con la esfera con carga. (*Sugerencia:* considere una coraza esférica de radio r y espesor dr con volumen $dV = 4\pi r^2\, dr$, y encuentre la energía almacenada en este volumen. Después integre de $r = 0$ a $r \to \infty$.) *d*) Explique por qué el resultado del inciso *c*) se interpreta como la cantidad de trabajo requerido para colocar la carga Q en la esfera. *e*) Empleando la ecuación (24.9) y el resultado del inciso *c*), demuestre que la capacitancia de la esfera es la que se da en el problema 24.67.

24.69. Capacitancia de la Tierra-ionosfera. La Tierra puede considerarse como un capacitor de un solo conductor (véase el problema 24.67). En combinación con la ionosfera, que es una capa atmosférica con carga, también es posible considerarla como un capacitor esférico de dos placas, donde la superficie terrestre es la placa negativa. La ionosfera se encuentra a una altitud de 70 km aproximadamente, y la diferencia de potencial entre ésta y la superficie terrestre es de alrededor de 350,000 V. Calcule *a*) la capacitancia de este sistema; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la energía almacenada en el sistema.

24.70. El cilindro interior de un capacitor largo y cilíndrico tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por una coraza cilíndrica, coaxial, conductora, con radio interior r_b y densidad lineal de carga $-\lambda$ (véase la figura 24.6). *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en la región entre los conductores a una distancia r del eje? *b*) Integre la densidad de energía calculada en el inciso *a*) con respecto al volumen entre los conductores en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud. *c*) Con base en la ecuación (24.9) y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejemplo 24.4 (sección 24.1), calcule U/L. ¿Concuerda el resultado con el que se obtuvo en el inciso *b*)?

24.71. El espacio entre las placas paralelas de un capacitor está ocupado por dos bloques de dieléctrico, uno con constante K_1 y otro con constante K_2 (figura 24.37). Cada bloque tiene un espesor de $d/2$, donde d es la distancia entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

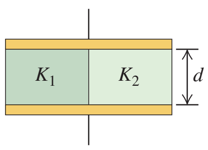
Figura 24.37 Problema 24.71.



$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$

24.72. El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos bloques de material dieléctrico, uno con constante K_1 y otro con constante K_2 (figura 24.38). El espesor de cada bloque es el mismo que la separación d entre las placas, y cada uno llena la mitad del volumen entre ellas. Demuestre que la capacitancia es

Figura 24.38 Problema 24.72.



$$C = \frac{\epsilon_0 A(K_1 + K_2)}{2d}$$

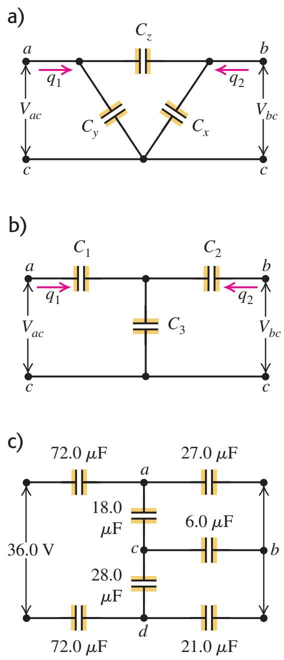
Problemas de desafío

24.73. Los capacitores en red no siempre pueden agruparse en combinaciones sencillas de conexiones en serie o en paralelo. Por ejemplo, la figura 24.39a muestra tres capacitores, C_x, C_y y C_z, en una *red en delta*, llamada así en virtud de su forma triangular. Esta red tiene *tres* terminales *a*, *b* y *c*, por lo que no puede transformarse en un único capacitor equivalente. Es posible demostrar que hasta donde concierne al efecto en el circuito externo, una red en delta es equivalente a lo que se denomina *red en estrella*. Por ejemplo, la red en delta de la figura 24.39a se puede sustituir por la red en estrella de la figura 24.39b. (El nombre "red en estrella" también se refiere a la forma que tiene.) *a*) Demuestre que las ecuaciones de transformación que dan C_1, C_2 y C_3 en términos de C_x, C_y y C_z son

$$C_1 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_x$$
$$C_2 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_y$$
$$C_3 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_z$$

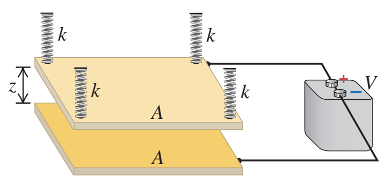
(*Sugerencia:* la diferencia de potencial V_{ac} debe ser la misma en ambos circuitos, igual que ocurre para V_{bc}. Asimismo, la carga q_1, que fluye del punto *a* a lo largo del alambre según se indica, debe ser la misma en los dos circuitos, al igual que sucede para q_2. Obtenga una relación para V_{ac} como función de q_1 y q_2 y las capacitancias para cada red, y obtenga una relación aparte para V_{bc} como función de las cargas en cada red. Los coeficientes de cargas correspondientes en ecuaciones correspondientes deben ser los mismos para las dos redes.) *b*) Para la red que aparece en la figura 24.39c, determine la capacitancia equivalente entre las terminales en el extremo izquierdo de la red. (*Sugerencia:* utilice la transformación delta-estrella obtenida en el inciso *a*). Utilice los puntos *a*, *b* y *c* para formar la delta, y transfórmela en una estrella. Luego, los capacitores pueden combinarse empleando las relaciones para combinaciones en serie y paralelo.) *c*) Determine la carga de cada capacitor de la figura 24.39c, así como la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos.

Figura 24.39 Problema de desafío 24.73.



24.74. El capacitor con aire entre las placas paralelas que se ilustra en la figura 24.40 consiste en dos placas conductoras horizontales de área igual A. La placa inferior descansa en un apoyo fijo, y la superior está

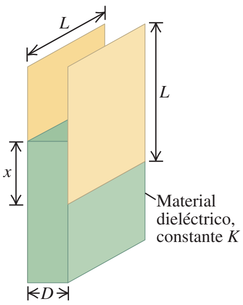
Figura 24.40 Problema de desafío 24.74.



sostenida por cuatro resortes con constante de elasticidad k, cada uno ubicado en una de las cuatro esquinas de la placa, como se observa en la figura. Cuando no tienen carga, las placas están separadas por una distancia z_0. Se conecta una batería a las placas y produce una diferencia de potencial V entre ellas. Esto ocasiona que la separación entre las placas disminuya a z. Ignore cualquier efecto de los bordes. *a*) Demuestre que la fuerza electrostática entre las placas con carga tiene una magnitud de $\epsilon_0 AV^2/2z^2$. (*Sugerencia:* consulte el ejercicio 24.29.) *b*) Obtenga una expresión que relacione la separación z entre las placas con la diferencia de potencial V. La ecuación resultante será cúbica con respecto a z. *c*) Dados los valores $A = 0.300$ m^2, $z_0 = 1.20$ mm, $k = 25.0$ N/m y $V = 120$ V, encuentre los dos valores de z para los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* es posible resolver la ecuación cúbica insertando un valor de ensayo de z en la ecuación, y después ajustar la conjetura hasta que se satisfaga la ecuación a tres cifras significativas. La ubicación gráfica de las raíces de la ecuación cúbica ayuda a elegir los valores iniciales de z para este procedimiento por ensayo y error. Una raíz de la ecuación cúbica tiene un valor negativo no físico.) *d*) Para cada uno de los dos valores de z encontrados en el inciso *c*), ¿el equilibrio es estable o inestable? Para el equilibrio estable, un desplazamiento pequeño del objeto dará lugar a una fuerza neta que tiende a regresar al objeto a la posición de equilibrio. Para el equilibrio inestable, un desplazamiento pequeño originará una fuerza neta que aleje al objeto aún más del equilibrio.

24.75. Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están separadas por una distancia D. Se inserta un bloque dieléctrico con constante K con dimensiones $L \times L \times D$, a una distancia x en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura 24.41. *a*) Calcule la capacitancia C de este sistema (véase el problema 24.72). *b*) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si el dieléctrico se inserta una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, demuestre que el cambio en la energía almacenada es

Figura 24.41 Problema de desafío 24.75.

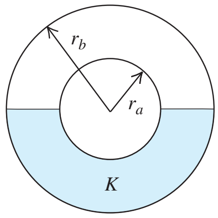


$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

c) Suponga que antes de desplazar el bloque dieléctrico la distancia dx, las placas se desconectan de la batería, de manera que las cargas en ellas permanecen constantes. Determine la magnitud de la carga en cada placa y luego demuestre que cuando el dieléctrico se desplaza la distancia adicional dx en el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión para dU que se dio en el inciso *b*). *d*) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre el dieléctrico, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado *contra* esta fuerza para desplazar el material dieléctrico una distancia dx. De esta forma, $dU = -F\,dx$. Demuestre que la aplicación de esta expresión al resultado del inciso *b*) sugiere que la fuerza eléctrica sobre el dieléctrico lo empuja *hacia fuera* del capacitor, mientras que el resultado para el inciso *c*) sugiere que la fuerza atrae al dieléctrico *hacia dentro* del capacitor. *e*) La figura 24.16 indica que la fuerza en realidad atrae al dieléctrico hacia el capacitor. Explique por qué el resultado del inciso *b*) da una respuesta incorrecta para la dirección de la fuerza, y calcule la magnitud de tal fuerza. (Este método no requiere conocer la naturaleza del efecto de bordes del campo.)

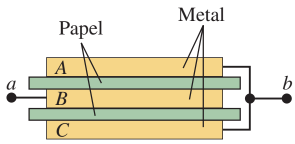
24.76. Un capacitor esférico aislado tiene carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). Después, se llena la mitad del volumen entre los dos conductores con un líquido dieléctrico con constante K, como se muestra en el corte transversal de la figura 24.42. *a*) Encuentre la capacitancia del capacitor medio lleno. *b*) Calcule la magnitud de $\vec{E}$ en el volumen entre los dos conductores como función de la distancia r desde el centro del capacitor. Dé respuestas para las mitades superior e inferior de este volumen. *c*) Obtenga la densidad superficial de la carga libre en las mitades superior e inferior de los conductores interno y externo. *d*) Determine la densidad superficial de la carga ligada en las superficies interior ($r = r_a$) y exterior ($r = r_b$) del dieléctrico. *e*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga ligada en la superficie plana del dieléctrico? Explique su respuesta.

Figura 24.42 Problema de desafío 24.76.



24.77. Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 12 cm de lado y 1.50 mm de espesor, se acomodan como se ilustra en la figura 24.43. Las placas están separadas por hojas de papel de 0.45 mm de espesor y constante dieléctrica de 4.2. Las placas exteriores se conectan entre sí y con el punto b. La placa interior se conecta al punto a. *a*) Copie el diagrama y muestre con signos más y menos la distribución de la carga en las placas cuando el punto a se mantiene a un potencial positivo en relación con el punto b. *b*) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b?

Figura 24.43 Problema de desafío 24.77.



24.78. Un medidor de combustible utiliza un capacitor para determinar la altura que alcanza el combustible dentro de un tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia de un valor de 1 cuando el tanque está vacío, a un valor de K, la constante dieléctrica del combustible cuando el tanque está lleno. Circuitos electrónicos apropiados determinan la constante dieléctrica efectiva de la combinación de aire y combustible entre las placas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares tiene un ancho w y longitud L (figura 24.44). La altura del combustible entre las placas es h. Se pueden ignorar los efectos de los bordes. *a*) Obtenga una expresión para K_{ef} como función de h. *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva para un tanque a la cuarta parte, a la mitad y a las tres cuartas partes de su volumen de llenado, si el combustible es gasolina ($K = 1.95$)? *c*) Repita el inciso *b*) para metanol ($K = 33.0$). *d*) ¿Para qué combustible resulta más práctico usar este medidor?

Figura 24.44 Problema de desafío 24.78.