Ciencias de la Computación II

Autómatas Finito No Deterministas

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

31 de agosto de 2016

Lenguajes

Para trabajar con las AFD, y a posteriori con las AFN, es necesario introducir algo de notación. Si M es un AFD, entonces el lenguaje aceptado por M es

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* | w \ \ es \ \ aceptada \ \ por \ \ M\}$$

es decir, es el conjunto de cadenas que hacen que M pase de su estado inicial a un estado de aceptación.
Diremos que dos AFD M_1 y M_2 son equivalentes si $L(M_1) = L(M_2)$.

Para cada (q_i, σ) de $Q \times \Sigma$, la función δ asocia a este par un nuevo estado perteneciente a Q, el cual a través de algún $\sigma \in Q$ llega a otro. Podemos definir entonces la aplicación de δ a una cadena entendiéndose ésta como una aplicación reiterada de la función. Formalmente, si q_0 es el estado inicial de M y se tiene como entrada la cadena $\sigma_1\sigma_2...\sigma_n$, el estado resultante se obtiene mediante la aplicación

$$\delta(...(\delta(\delta(q_0, \sigma_1), \sigma_2)...), \sigma_n)$$

Esta expresión la abreviaremos como $\delta(q_0, \sigma_1\sigma_2...\sigma_n)$.

Autómatas Finito No Deterministas

Si se permite que desde un estado se realicen 0 o más transiciones mediante el mismo símbolo de entrada, se dice que el autómata finito es **no determinista**. La definición de un AFN se hace de manera análoga a las AFD con cierta excepción en cuanto a la función de transición.

Autómata Finito No Determinista

Definimos un **Autómata Finito No Determinista** mediante una colección de cinco objetos $(Q, \Sigma, s, F, \Delta)$, donde

1. Q es un conjunto finito de estados.
2. Σ es un alfabeto de entrada.
3. s es uno de los estados de Q designado como estado de partida.
4. F es una colección de estados de aceptación o finales.
5. Δ es una relación sobre $(Q \times \Sigma) \times Q$ y se llama relación de transición.

Como Δ es una relación para todo par (q, σ), ésta está compuesta por pares donde (q, σ) puede no aparece así como aparecer más de una vez como primera coordenada de la terna.

Ejemplo

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_2, q_3, q_4\}$, $s = q_0$ y δ representado por

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_4\}$

que es el lenguaje compuesto por cadenas con algunas *a*es seguidas de una b o por una a seguida de varias *b*es, cuya expresión regular es $a^*b \cup ab^*$.

Ejemplo

- Consideremos el AFN M dado por $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_0\}$, $s = q_0$ y Δ representado por

Δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\emptyset$

que es el lenguaje $(ab \cup aba)^*$.

La naturaleza recursiva del análisis de cadenas que vimos para los AFD se mantiene en los AFN si la notación se define con cuidado. Si $X \subseteq Q$ vamos a interpretar $\Delta(X, \sigma)$ como $\{p | q \in X \quad y \quad p \in \Delta(q, \sigma)\}$ que es el conjunto de todos los estados siguientes a los que se puede llegar desde X con la entrada σ. Cabe destacar que $\Delta(X, \sigma) = \bigcup\limits_{q \in X} \Delta(q, \sigma)$.

ϵ-transiciones

Si queremos incluir transiciones de un estado a otro que no dependan de ninguna entrada, debemos ampliar el concepto de AFN. Tales transiciones son llamadas $\epsilon-$ *transiciones* y no consumen ningún símbolo de entrada. La decisión de elegir una ϵ-transición se hace de la misma forma que la de cualquier otra transición con múltiples opciones en un AFN, de manera que este tipo de transición sigue siendo consistente con el carácter no determinista del modelo.

Damos las siguientes definiciones:

Cerradura

Para todo estado $q \in Q$, definimos la ϵ-cerradura de q como

$$\epsilon - c(q) = \{p | p \;\; es \;\; accesible \;\; desde \;\; q \;\; sin \;\; consumir \;\; entrada\}$$

Para un conjunto de estados tenemos

$$\epsilon - c(\{q_1, q_2, ..., q_n\}) = \bigcup_{k=1}^{n} \epsilon - c(q_k)$$

Hay que destacar que todo estado es accesible desde sí mismo sin consumir ningún caracter de entrada.

Para $q \in Q$ y $\sigma \in \Sigma$ se define

$$d(q, \sigma) = \{p | hay \quad una \quad transicion \quad etiquetada \quad con \quad \sigma\}$$

La colección $d(q, \sigma)$ es la colección de estados que "siguen" directamente a q pasando por la transición etiquetada con σ. Ampliaremos la definición de d a conjuntos como sigue

$$d(\{q_1, q_2, ..., q_n\}, \sigma) = \bigcup_{k=1}^{n} d(q_k, \sigma)$$

Transformación

A partir de un AFN $M = (Q, \Sigma, s, F, \Delta)$ que tiene $\epsilon - transiciones$, se puede construir un AFN sin $\epsilon - transiciones$ que acepte el mismo lenguaje. Se define $M' = (Q, \Sigma, s, F', \Delta')$ como

$$F' = F \cup \{q | \epsilon - c(q) \cap F \neq \emptyset\}$$

y $\Delta'(q, \sigma) = \epsilon - c(d(\epsilon - c(q), \sigma))$.

Equivalencias