Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

1 Integrales de superficie

La integral de superficie generaliza la integral doble, tal como la integral de linea generaliza la integral de Riemann vista en el primer curso de Cálculo.

Para ver el significado de esta integral sigamos el siguiente razonamiento:

S es una superficie definida por

$$z = g(x, y)$$

y R la región proyección de S en el plano xy.

Supongamos que g, g_x, g_y son continuas sobre R. P una partición de R tal que cada subrectángulo R_i generado por la partición es la proyección un S_i porción de la superficie S generada por la partición P. Sea $\triangle S_i$ el área de S_i

Sea además $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua

Definimos en terminos de las sumas intermedias de Riemann *la integral de suprficie de f sobre S* como

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \lim_{\|p\| \to 0} \sum_{i,j=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}) \triangle S_i$$

Para el **calculo de esta integral:**

Sea S superficie definida por $z = g(x, y)$ y Rregión proyección de S en el plano xy.

Suponiendo g, g_x, g_y son continuas sobre R y f función continua sobre S, entonces

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{R_{xy}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x]^2 + [g_y]^2} dA$$

De manera similar.

Si S se expresa de la forma $x = g(y, z), (y, z) \in R_{yz}$ entonces

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{R_{yz}} f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y]^2 + [g_z]^2} dA$$

Si S se expresa de la forma $y = g(x, z), (x, z) \in R_{xz}$ entonces

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{R_{xz}} f(x,g(x,x),z)\sqrt{1+[g_x]^2+[g_z]^2}dA$$

Ejemplo:
Evalúe $\iint\limits_{S} xydS \quad S: z = 9 - x^2, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x$
Solución:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} xydS &= \iint\limits_{R_{xy}} xy\sqrt{1+4x^2}dA \\ &= \int_0^2 \int_0^x xy\sqrt{1+4x^2}dydx \\ &\text{¡No por aquí!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} xydS &= \iint\limits_{R_{xy}} xy\sqrt{1+4x^2}dA \\ &= \int_0^2 \int_y^2 xy\sqrt{1+4x^2}dxdy \\ &= \frac{391\sqrt{17}+1}{240}\end{aligned}$$

Obs.
1.- Si $f(x,y,z) = 1 \Longrightarrow$ Area de $S = \iint\limits_{S} dS. = \iint\limits_{R} \sqrt{1+[g_x]^2+[g_y]^2}dA$

2.- Si $f(x,y,z) = \rho(x,y,z)$ densisdad de una lamina $\Longrightarrow$ Masa de lamina $= \iint\limits_{S} \rho(x,y,z)dS$

Ejemplo.
Calcule el área lateral del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$ usando integral de superficie.
Solución.
Pademos poner $z = \sqrt{1+[g_x]^2+[g_y]^2}$ y $1+[g_x]^2+[g_y]^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 2$
entonces

$$AreadeS = \iint\limits_{S} dS. = \iint\limits_{R} \sqrt{2}dA =$$

Cambiando acoordenadas polares

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \sqrt{2}dA &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 rdrd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^4 d\theta \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta = 16\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

1.1 Superficie orientada

Definición.

Decimos que una superficie es orientada si se puede definir un vector normal unitario N en todo punto de la superficie que no pertenezca a la frontera de forma tal que lo vectores normales varían de forma continua sobre la superficie S.

Por ejemplo $z = g(x,y)$ ponemos $G(x,y,z) = z - g(x,y)$ y

$$N = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \text{ o sea } N = \frac{-g_x\widehat{i} - g_y\widehat{j} + \widehat{k}}{\sqrt{1 + [g_x]^2 + [g_y]^2}} \text{ vector normal unitario}$$

$$N = -\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \text{ vector normal unitario hacia abajo}$$

Superficie orientada:

Definición.

Decimos que una superficie es orientada si se puede definir un vector normal unitario N en todo punto de la superficie que no pertenezca a la frontera de forma tal que lo vectores normales varían de forma continua sobre la superficie S.

Por ejemplo $z = g(x,y)$ ponemos $G(x,y,z) = z - g(x,y)$ y

$$N = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \text{ o sea } N = \frac{-g_x\widehat{i} - g_y\widehat{j} + \widehat{k}}{\sqrt{1 + [g_x]^2 + [g_y]^2}} \text{ vector normal unitario}$$

$$N = -\frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \text{ vector normal unitario hacia abajo}$$

1.2 Integral de flujo.

Definición.

Si F es un campo vectorial perteneciente a C^1 definido sobre una superficie orientada S, con vector unitario N, entonces la integral de superficie de F sobre S es.

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot N dS$$

La que se llama integral de flujo. El nombre es debido a su aplicación a un problema físico de un fluido a traves de una superficie.

Supongamos que una superficie S está inmersa en un fluido que tiene un campo de velocidades continuo F.

Entonces

$$\underset{\text{(por unidad de tiempo)}}{\text{Volumen de fluido a traves de } S} = \iint_S F \cdot N dS$$

S es superficie orientada mediante N, y $F(x,y,z){=}P(x,y,z)\widehat{i}{+}Q(x,y,z)\widehat{j}+R(x,y,z)\widehat{k}$ campo vectorial tal que P, Q, R son funciones escalarescon primeras derivadas parciales continuas en S.

Además si $\rho = \rho(x,y,z)$ representa la densidad del fluido en cada (x,y,z) de S,entonces

$$\underset{\text{(por unidad de tiempo)}}{\text{Masa del fluido a traves de } S} = \iint_S \rho F \cdot N dS$$

Ejemplo

Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - \left(x^2 + y^2\right)$ Sobre el plano XY, orientado hacia arriba. Un fluido de densidad constante $\rho = k$ pasa a través de S según el campo de velocidades.

$$F(x,y,z) = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$$

Hallar la razón de flujo de masa a través de S

Solución:

$$G(x,y,z) = z - 4 + x^2 + y^2 \Longrightarrow \nabla G = (2x, 2y, 1) \Longrightarrow N = \frac{2x\widehat{i} + 2y\widehat{j} + \widehat{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$$\text{Masa del fluido a traves de } S = \iint_S kF \cdot N dS$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S} kF\cdot NdS &= k\iint\limits_{R_{xy}} \left(x,y,4-\left(x^2+y^2\right)\right)\cdot \frac{2x\widehat{i}+2y\widehat{j}+\widehat{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dA \\
&= k\iint\limits_{R_{xy}} \left[2x^2+2y^2+4-\left(x^2+y^2\right)\right] dA \\
&= k\iint\limits_{R_{xy}} \left[x^2+y^2+4\right] dxdy \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_y^2 \left(4+r^2\right) rdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} 12d\theta = 24k\pi
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\underset{\text{(por unidad de tiempo)}}{\text{Masa del fluido a traves de } S} = 24k\pi$$

En base a lo observado en el desarrollo de este ejercicio se tiene el siguiente planteamiento:

"Si S es una superficie definida por $z = g(x, y)$ y R_{xy} denota la región proyección de S en el plano xy, entonces

$$\iint\limits_{S} F\cdot NdS = \iint\limits_{R_{xy}} F\cdot(-g_x\widehat{i}-g_y\widehat{j}+\widehat{k})dA$$

orientada hacia arriba, y

$$\iint\limits_{S} F\cdot NdS = \iint\limits_{R_{xy}} F\cdot(g_x\widehat{i}+g_y\widehat{j}-\widehat{k})dA$$

orientada hacia abajo.

Superficies Parametrizadas

.

En el tratamiento anterior de este tema hemos supuesto que una superficie viene definida por la ecuación $z = g(x, y)$, sin embargo se debe aclarar que hay superficies que no se pueden definir de esta forma, extenderemos la idea definiendo la forma paramétrica de dar una superficie.

1.3 Definición

Para una superficie parametrizada sea una función $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. La superficie S es la imagen de D según Φ, es decir $S = \Phi(D)$ Podemos escribir

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D$$

Si cada una de las funciones componentes son diferenciables de clase C^1, entonces llamamos a S una superficie diferenciable o de clase C^1.

Vector normal a S :

Definimos en cada punto $\Phi(u_o, v_o)$

$$T_u = \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u}\widehat{i} + \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}\widehat{j} + \frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u}\widehat{k}$$

es vector tangente a la curva $t \longrightarrow \Phi(t, v_0)$ en $\Phi(u_o, v_o)$

$$T_v = \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial v}\widehat{i} + \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v}\widehat{j} + \frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v}\widehat{k}$$

es vector tangente a curva $t \to \Phi(u_o, t)$ en $\Phi(u_o, v_o)$

$$T_u \times T_v \quad \text{es vector normal a la superficie } S.$$

Ahora el concepto de superficie suave se da en la siguiente definición.

1.4 Definición.

S es superficie suave en $\Phi(u_o, v_o)$ si $T_u \times T_v \neq 0$ en (u_o, v_o). Diremos que una superficie es suave si es suave en todos los puntos $\Phi(u_o, v_o)$ de

Ejemplo. Sea S la superficie descrita por.

$$\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u), u \geq 0$$

Probar que no es suave en $(0,0,0)$

Solución:

Es el cono $z^2 = x^2 + y^2, z > 0$ en $(0,0)$

$$\begin{aligned} T_u &= \cos 0\widehat{i} + \sin 0\widehat{j} + 1\widehat{k} \\ &= \widehat{i} + \widehat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_v &= 0(-\sin 0)\widehat{i} + 0\cos 0\widehat{j} + 0\widehat{k} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

así $T_u \times T_v = 0$ y la superficie no es suave en $(0,0,0)$.

En este contexto

1.5 Definición:

Sea F un campo vectorial definido sobre S, S superficie parametrizada por Φ. La integral de superficie de F sobre Φ, denotada por $\iint\limits_{\Phi} F \cdot dS$ se define por:

$$\iint\limits_{\Phi} F \cdot dS = \iint\limits_{D} F \cdot (T_u \times T_v)\, dudv$$

donde D es tal que $S = \Phi(D)$
Ejemplo:
Sea $S = \Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$.
S es la esfera unitaria.
Sea $F(x, y, z) = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$ radio vector del origen,
Calcular $\iint\limits_{\Phi} F \cdot dS$

Solución:
En este caso D es región del plano $\theta\phi$ definida por: $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$.

$$T_\theta = (-\sin\theta \sin\phi)\,\widehat{i} + (\cos\theta \sin\phi)\,\widehat{j} + 0\widehat{k}$$

$$T_\phi = (\cos\theta \cos\phi)\,\widehat{i} + (\sin\theta \cos\phi)\,\widehat{j} - \sin\phi\widehat{k}$$

$$T_\theta \times T_\phi = \left(-\cos\theta \sin^2\phi\right)\widehat{i} - \left(\sin\theta \sin^2\phi\right)\widehat{j} - (\cos\theta \sin\phi)\,\widehat{k}$$

$$F \cdot (T_\theta \times T_\phi) = -\sin\phi$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Phi} F \cdot dS &= \iint\limits_{D} -\sin\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\sin\phi d\phi d\theta \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Nota.
Una superficie parametrizada es positiva si $T_u \times T_v$ nunca es cero y su dirección está dada por la dirección de $T_u \times T_v$.
Aquí $N = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$.

2 TEOREMAS DE GAUSS Y TEOREMAS DE STOKES

Ahora dos teoremas de gran importancia en el campo de las aplicaciones, particularmente en la física, el primero de ellos es el teorema de Gauss o teorema de la divergencia.

2.1 Divergencia

En $\mathbb{R}^2$, sea F un campo vectorial, definimos

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

En $\mathbb{R}^3$,sea F un campo vectorial, definimos

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Ejemplo.
Sea $F(x,y,z) = xy\widehat{i} + (y^2 + e^{xz^2})\widehat{j} + sen(xy)\widehat{k}$, entonces

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial (y^2 + e^{xz^2})}{\partial y} + \frac{\partial sen(xy)}{\partial z} = 3y$$

El foco de atención lo ponemos ahora en regiones R sólidas simples(por ejemplo cajas rectangulares, esferas, elipsoides etc). La frontera S es una superficie cerrada y convenimos que la orientación positiva es hacia afuera, el vector normal N señala hacia afuera de la superficie. En este contexto enunciamos el teorema.

2.2 Teorema de la divergencia de Gauss.

Sea R una región simple sólida limitada por una superficie cerrada S orientada por un vector normal unitario dirigido al exterior de R. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes F_1, F_2 y F_3 tienen derivadas parciales continuas en la región R, entonces

$$\iint_S F \cdot N dS = \iiint_R \operatorname{div} F dV$$

Nota: Este teorema es una generalización del Teorema de Green a tres dimensiones.

Demostración.

Solo daremos algunas ideas generales para indicar un procedimiento para la demostración

Sea $F(x,y,z) = P(x,y,z)\widehat{i} + Q(x,y,z)\widehat{j} + R(x,y,z)\widehat{k}$

$$\Longrightarrow \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Integrando

$$\iiint\limits_R \operatorname{div} F dV = \iiint\limits_R \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint\limits_R \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Por otro lado, si N es el normal unitario de S hacia afuera la integral de superficie es

$$\iint\limits_S F \cdot dS = \iint\limits_S F \cdot N dS = \iint\limits_S P\widehat{i} \cdot N dS + \iint\limits_S Q\widehat{j} \cdot N dS + \iint\limits_S R\widehat{k} \cdot N dS$$

Siguiendo el procedimiento de la demostración del teorema de Green basta probar las siguientes tres igualdades:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_R \frac{\partial P}{\partial x} dV &= \iint\limits_S P\widehat{i} \cdot N dS \\
\iiint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial y} dV &= \iint\limits_S Q\widehat{j} \cdot N dS \\
\iiint\limits_R \frac{\partial R}{\partial z} dV &= \iint\limits_S R\widehat{k} \cdot N dS
\end{aligned}$$

Detalles y cimentarios los puede consultar en el texto "CALCULO de James Stewart, Tercera edicion (Thomson) pagina 935"

Ejemplo:

Sea S esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 = 1$. Demostrar que $\iint\limits_S (xy + yz + xz)\, dS = 0$

Solución: Claramente $x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$ es vector normal a la esfera en todo .(x,y,z)

$$\begin{aligned}
N &= \frac{x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}, \text{ ya que } x^2+y^2+z^2 = 1
\end{aligned}$$

consideramos ahora el suguente arreglo para identificar

$$\begin{aligned} xy+yz+xz &= (y,z,x)\cdot(x,y,z) \\ &= (y,z,x)\cdot N \\ &\Longrightarrow F=(y,z,x) \end{aligned}$$

$$\nabla\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+0+0=0$$

Aplicando Teorema de divergencia

$$\begin{aligned} \iint\limits_S (xy+yz+xz)\,dS &= \iiint\limits_R \nabla\cdot F dV \\ &= \iiint\limits_R 0dV=0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Verificar el teorema de la divergencia en $\iint\limits_S F\cdot NdS$ para $F(x,y,z)=(2x-y)\widehat{i}-(2y-z)\widehat{j}+z\widehat{k}$ S: limitado por los planos coordenados y $x+2y+z=6$

Solución.

En este caso $S=S_1+S_2+S_3$ donde S_1 será el lado de la figura en el plano $x+2y+z=6$, S_2 el lado de la figura en el plano coordenado yz, S_3 el lado de la figura en el plano coordenado xz.

Tenemos

$$\iint\limits_S F\cdot NdS=\iint\limits_{S_1} F\cdot N_1dS+\iint\limits_{S_2} F\cdot N_2dS+\iint\limits_{S_3} F\cdot N_3dS$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S_1} F\cdot N_1dS &= \iint\limits_{R_{xy}} F\left(x,y,z\right)\cdot(-g_x(x,y)\widehat{i}-g_y(x,y)\widehat{j}+\widehat{k})dA \\ &= \iint\limits_{R_{xy}} F\left(x,y,z\right)\cdot(1,2,1)dA=\iint\limits_{R_{xy}}((2x-y)\widehat{i}-(2y-z)\widehat{j}+z\widehat{k})\cdot(1,2,1)dA \\ &= \iint\limits_{R_{xy}}((2x-y)-2(2y-z)+z)dA=\iint\limits_{R_{xy}}(2x-5y+3(6-x-2y)dxdy \\ &= \int_0^6\int_0^{-\frac{1}{2}x+3}(-x-11y+18)dydx=\int_0^6(-\frac{7}{8}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{2})dx=45 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S_2} F\cdot N_2 dS &= \iint\limits_{S_2} F\cdot(-\widehat{i})dS = \iint\limits_{S_2}(y-2x)dS = \iint\limits_{R_{yz}}(y-2(6-2y-z)dydz \\
&= \int_0^3\int_0^{6-2y}(5y+2z-12)\,dzdy = -27
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S_3} F\cdot N_3 dS &= \iint\limits_{S_3} F\cdot(-\widehat{j})dS = \iint\limits_{S_3}(2y-z)dS = \iint\limits_{R_{xz}}(2(\frac{6-x-z}{2})-z)dxdz \\
&= \int_0^6\int_0^{6-x}(6-x-2z)\,dzdx = 0
\end{aligned}
$$

De estos calculos se tiene que

$$
\iint\limits_{S} F\cdot N dS = 45-27+0 = 18
$$

Por el otro lado $\operatorname{div} F = 2-2+1 = 1$, la integral triple es

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{R} \operatorname{div} F dV &= \iiint\limits_{R} dV = \int_0^6\int_0^{-\frac{x}{2}+3}\int_0^{6-x-2y} dzdydx \\
&= \int_0^6\int_0^{-\frac{x}{2}+3}(6-x-2y)dydx = \int_0^6\left(\frac{x^2}{4}-3x+9\right)dx = 18
\end{aligned}
$$

Teorema de Stokes.

Este teorema da la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo e una curva cerrada siempre seccionalmente suave C con orientación positiva que acota a S.

2.3 Teorema:

Sea S una superficie orientada limitada por una curva C orientada positivamente seccionalmente suave. Si F es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y C, entonces.

$$
\oint\limits_{C} F\cdot ds = \iint\limits_{S}(rotF)\,dS = \iint\limits_{S}(\nabla\times F)\,dS
$$

Recuerde que la integral de línea se puede expresar:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz \quad \text{o} \quad \int_C F \cdot T ds$$

Ejemplo

Use el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C F \cdot ds$, donde $F(x,y,z) = 3z\widehat{i} + 5x\widehat{j} - 2y\widehat{k}$ y C es la intersección del plano $z = y+3$ con el cilindro $x^2+y^2 = 1$. Oriente la elipse en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, vista desde arriba.

Solución.

La intersección del plano con el cilindro permite visualizar que S en este caso es la porcion del plano que queda al interior del cilindro y que C es la elipse intersección

$$\oint_C F \cdot ds = \iint_S (rotF) \cdot N dS$$

$$rotF = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \\ & & \end{vmatrix} = -2\widehat{i} + 3\widehat{i} + 5\widehat{k}$$

$$z - y + 3 = 0 \quad \Longrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\widehat{j} + k)$$

Calculando

$$(rotF) \cdot N = (-2\widehat{i} + 3\widehat{i} + 5\widehat{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\widehat{j} + k) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

y entonces la integral será

$$\oint_C F \cdot ds = \iint_S \sqrt{2} dS = \sqrt{2} \iint_S dS = \sqrt{2} \cdot Area(S) = \sqrt{2} \cdot (1 \cdot \sqrt{2}\pi) = 2\pi$$

S es el interior de una elipse de semi ejes 1 y $\sqrt{2}$