Teorema de Green

1. Use teorema de Green para calcular $\oint_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$ donde C es la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. Sea $\vec{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^{2x} \cos y)$ y R el rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(1, \frac{\pi}{2})$.
   a) Pruebe que es posible aplicar el Teorema de Green a $\vec{F}$ en R.
   b) Use el teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, donde C es la frontera de R.

3. Calcule $\oint_C (4 - e^{\sqrt{x}})dx + (\sin y + 3x^3)dy$, si C es la frontera de la región

   $R = \{(x, y) \,/\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

4. Sea C el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Hallar $I = \oint_C (y - \sin x)\,dx + \cos x dy$.
   a) Directamente.
   b) Usando el Teorema de Green.

5. Pruebe que el área de una elipse de semiejes a y b es πab, usando Teorema de Green.

6. Sean $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$

   a) Explique porqué no es posible usar el Teorema de Green si C es la curva $x^2 + y^2 = 1$. Calcule I directamente.

   b) Compruebe que es posible aplicar el teorema de Green si C es la curva $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, calcule I haciendo uso de él.

   c) Calcule I, si C es la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

7. Sean C_1 el arco de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, con $x \leq -1$, y C_2 el segmento de recta $x + 1 = 0$, con $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, y C la curva cerrada $C_1 \cup C_2$ y $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$
   a) Parametrice la curva C, orientada positivamente. Exprese, sin calcular, mediante integrales simples, la integral de línea: $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$

   c) Use Teorema de Green para calcular I. Para ello:

   i) Considere C' una circunferencia centrada en el origen, de algún radio apropiado y aplique Teorema de Green a $\vec{F}$ en la región comprendida entre C y C'

   ii) Obtenga el valor de I.