Ciencias de la Computación I

Recurrencias

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

20 de septiembre de 2016

Introducción

En esta parte analizaremos funciones discretas $a(n)$, que por comodidad denotaremos a_n, las cuales relacionan un término enésimo con algunos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$. Este estudio de las llamadas **relaciones de recurrencia** o **ecuaciones en diferencias** es la contrapartida discreta de las ideas aplicadas en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Relación Lineal de Primer Orden

Progresión Geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión infinita de números donde el cociente de cualquier término (distinto del primero) entre su predecesor es una constante, llamada razón común.

A modo de ejemplo, la sucesión 5,15,45,135,..., tiene como razón común el 3 ya que $\frac{15}{5}, \frac{45}{15}, \frac{135}{45}, \ldots, = 3$. En esta progresión en particular tenemos que $a_{n+1} = 3a_n, n \geq 0$. No obstante, esta relación no describe una única relación ya que la sucesión 7,21,63,189,..., cumple también con la igualdad anterior.

La ecuación $a_{n+1} = 3a_n$ es una relación de recurrencia, ya que el valor actual depende del valor anterior. Como el valor actual depende sólo de su predecesor inmediato, esta relación se dice que es de primer orden. La forma general de las relación de recurrencia de primer orden es $a_{n+1} = da_n$, $n \geq 0$ y d una constante.

Solución General

La solución general de la relación de recurrencia $a_{n+1} = da_n$, donde $n \geq 0$, d una constante y $a_0 = A$ es única y está dada por

$$a_n = Ad^n, \quad n \geq 0$$

La relación de recurrencia lineal general de primer orden con coeficientes constantes tiene la forma $a_{n+1} + ca_n = f(n), \quad n \geq 0$, donde c es una constante y $f(n)$ es una función en el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros no negativos.
Cuando $f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la relación es homogénea; en caso contrario, la relación es no homogénea. La relación es lineal ya que todo término aparece elevado a la primera potencia.

Ejemplos

- Resuelva la relación de recurrencia $a_n = 7a_{n-1}$, donde $n \geq 1$ y $a_2 = 98$.
- Determine a_8 si $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$, donde $a_n > 0$ para $n \geq 0$ y $a_0 = 2$.
- Busque el término general para la sucesión 0,2,6,12,20,30,42,...

Relación Lineal de Segundo Orden

Relación de Recurrencia Lineal de Segundo Orden

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $C_n, C_{n-1}, \ldots, C_{n-k}(\neq 0)$ números reales. Si $a_n, \quad n \geq 0$, es una función discreta, entonces

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + \ldots + C_{n-k} a_{n-k} = f(n), \quad n \geq k,$$

es una relación de recurrencia lineal (con coeficientes constantes) de orden k. Si $f(n) = 0$ para todo $n \geq 0$, decimos que la relación es homogénea; en otro caso, es no homogénea.

A partir de este momento, nos ocuparemos de la relación homogénea de orden dos $C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$.