Interpolación polinomial

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez

Conferencia 18

Conferencia 18

Interpolación

Problema de interpolación.

Dado un conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_0, y_0); \cdots ; (x_n, y_n)\}$$

tales que $x_i \neq x_j$. Determinar una función $p(x)$ que pase por los puntos, o sea:

$$\{p(x_0) = y_0; \cdots ; p(x_n) = y_n\}$$

Observaciones

- Es deseable utilizar funciones polinomiales del tipo $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ debido a lo simple que resulta su evaluación numérica (esquema de Horner) y el cálculo de derivadas e integrales asociadas.
- El polinomio de Taylor no es de utilidad en este problema.

Ejemplo

Problema con dos puntos

Hallar la única recta (polinomio de grado 1) que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$

Solución

Definimos las funciones:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

que cumplen

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_0) = 0,\ L_1(x_1) = 1$$

y tomamos:

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

Resultado principal

Teorema

Si $x_0, \dots x_n$ son $n+1$ puntos distintos y f es una función, de la cual se tiene sus valores en dichos puntos $\{f(x_k)\}_{k=0}^{n}$, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado máximo n tal que

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \forall k = 0 \dots n$$

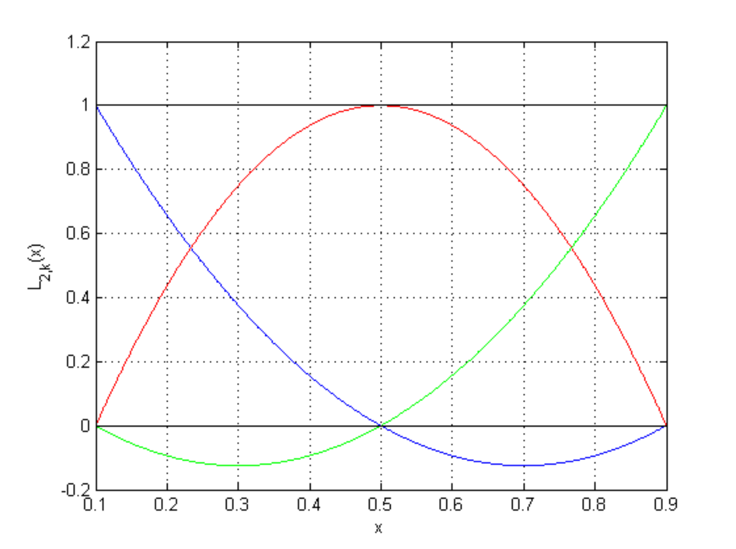
El polinomio $P(x)$ se denomina **polinomio de interpolación de Lagrange** y tiene la siguiente expresión:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

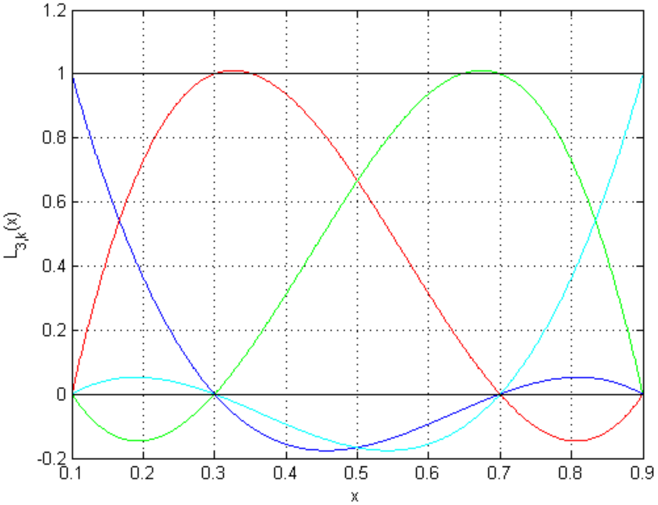
donde, para cada $k = 0, \dots, n$:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

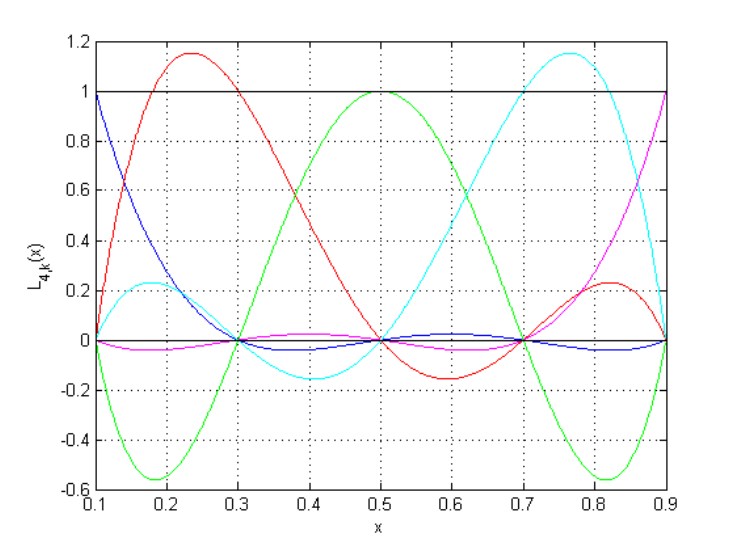
Polinomios base $L_{2,k}(x)$



Polinomios base $L_{3,k}(x)$



Polinomios base $L_{4,k}(x)$



Ejemplo corto del uso del polinomio de Lagrange

Problema

Utilizando los nodos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$, estimar con el polinomio de Lagrange el valor de $f(x) = 1/x$ en el punto $\bar{x} = 3$.

Solución (denotemos $L_k(x) = L_{n,k}(x)$)

$$f(x_0) = \frac{1}{2} = 0.5, \quad L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$f(x_1) = \frac{1}{2.5} = 0.4, \quad L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$f(x_2) = \frac{1}{4} = 0.25, \quad L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+1}{3}$$

$$P(x) = 0.5((x-6.5)x+10) + 0.4\,\frac{(-4x+24)x-32}{3} + 0.25\,\frac{(x-4.5)x+1}{3}$$

$$P(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15 \Longrightarrow f(3) = \frac{1}{3} \approx P(3) = 0.325$$

Error asociado al polinomio de Lagrange

Teorema

Supongamos que $x_0, \dots x_n$ son $n+1$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$ y que f es una función $n+1$-veces continuamente derivable en ese intervalo (o sea $f \in C^{n+1}[a, b]$).
Se cumple entonces que, para cualquier punto $x \in [a, b]$ existe un punto $\xi(x) \in (a, b)$ tal que:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

donde $P(x)$ es el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_0, \dots x_n$.

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange

Problema

La siguiente tabla lista algunos valores de la función de Bessel de primer tipo de orden zero $J_0(x)$.

x	$J_0(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Compare las aproximaciones de $J_0(1.5) = 0.5118277$ que pueden obtenerse utilizando distintos polinomios de Lagrange.

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange

Notación

Sean $f(x)$ una función definida en los $n+1$ puntos distintos $\{x_i\}_{i=0}^n$ y $\{m_j\}_{j=1}^k \subset \{0 \dots n\}$ un conjunto de k índices distintos. Denotaremos por

$$P_{m_1,\dots,m_k}(x)$$

al polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x)$ en los puntos $x_{m_1}, \dots x_{m_k}$.

Ejemplo de la notación

Sean $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 6$, entonces $P_{1,2,4}(x)$ coincide con f en $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_4 = 6$:

$$P_{1,2,4}(x) = e^2 \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)} + e^3 \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)} + e^6 \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
0	1.0	0.7651977
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Solución

$$P_{1,2}(1.5) = 0.5102968$$

$$P_{0,1,2}(1.5) = 0.5124715 \qquad P_{1,2,3}(1.5) = 0.5112857$$

$$P_{0,1,2,3}(1.5) = 0.5118127 \qquad P_{1,2,3,4}(1.5) = 0.5118302$$

$$P_{0,1,2,3,4}(1.5) = 0.5118200$$

Cómo calcular eficientemente los valores $P_{???}(\bar{x})$

Motivación

Teorema (Evaluación recursiva del Polinomio de Lagrange)

Sean $f(x)$ una función definida en los $k+1$ puntos distintos $\{x_0, \ldots, x_k\}$ y x_i, x_j dos puntos en ese conjunto. Entonces

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

donde $P(x) = P_{1,\ldots,k}(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x)$ en los $k+1$ puntos $x_0, \ldots x_k$.

Con esta fórmula puede calcularse recursivamente

x_0	$P_0(\bar{x})$				
x_1	$P_1(\bar{x})$	$P_{0,1}(\bar{x})$			
x_2	$P_2(\bar{x})$	$P_{1,2}(\bar{x})$	$P_{0,1,2}(\bar{x})$		
x_3	$P_3(\bar{x})$	$P_{2,3}(\bar{x})$	$P_{1,2,3}(\bar{x})$	$P_{0,1,2,3}(\bar{x})$	
x_4	$P_4(\bar{x})$	$P_{3,4}(\bar{x})$	$P_{2,3,4}(\bar{x})$	$P_{1,2,3,4}(\bar{x})$	$P_{0,1,2,3,4}(\bar{x})$

Algoritmo

Notación simplificada: Para $i >= j \geq 0$

$$Q_{i,j}(x) = P_{i-j,i-j+1,\ldots,i}$$

Por ejemplo: $Q_{2,0}(x) = P_2(x) = f(x_2)$; $Q_{4,2}(x) = P_{2,3,4}(x)$

Pseudocódigo (Para evaluar $P_{0,\ldots,n}(\bar{x})$)

DATOS: $x_0, \ldots, x_k$ puntos de interpolación
$f(x_i), 0 \leq i \leq n$ valores a interpolar
$\bar{x}$: Punto a evaluar

RESULT: Tabla Q de todos los valores $Q_{i,j}, 0 \leq j \leq i \leq n$

PASO 1: Para $k = 0 : n$ tomar $Q_{k,0}(\bar{x}) = f(x_k)$.

PASO 2: Para $i = 1 : n$ hacer
Para $j = 1 : i$, tomar

$$Q_{i,j}(\bar{x}) = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1}(\bar{x}) - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}(\bar{x})}{(x_i - x_{i-j})}$$

PASO 3: STOP(Q)

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (II)

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
0	1.0	0.7651977
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $Q_{0,j}$

i	x_i	$Q_{0,j}(\bar{x})$
0	1.0	0.7651977

$$Q_{0,0}(\bar{x}) = P_0(1.5) = 0.7651977$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (II)

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $Q_{1,j}$

i	x_i	$Q_{i,0}(\bar{x})$	$Q_{i,1}(\bar{x})$
0	1.0	0.7651977	
1	1.3	0.6200860	0.5233449

$$Q_{1,1}(\bar{x}) = P_{0,1}(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_1)P_0(\bar{x}) - (\bar{x} - x_0)P_1(\bar{x})}{(x_0 - x_1)}$$

$$Q_{1,1}(\bar{x}) = \frac{(1.5 - 1.3)0.7651977 - (1.5 - 1.0)0.6200860}{(1.0 - 1.3)} = 0.5233449$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (II)

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $Q_{2,j}$

i	x_i	$Q_{i,0}(\bar{x})$	$Q_{i,1}(\bar{x})$	$Q_{i,2}(\bar{x})$
0	1.0	0.7651977		
1	1.3	0.6200860	0.5233449	
2	1.6	0.4554022	0.5102968	**0.5124715**

$$Q_{2,2}(\bar{x}) = P_{0,1,2}(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_2)P_{0,1}(\bar{x}) - (\bar{x} - x_0)P_{1,2}(\bar{x})}{(x_0 - x_2)}$$

$$Q_{2,2}(\bar{x}) = \frac{(1.5 - 1.6)0.5233449 - (1.5 - 1.0)0.5102968}{(1.0 - 1.6)} = 0.5124715$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (II)

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $Q_{3,j}$

i	x_i	$Q_{i,0}(\bar{x})$	$Q_{i,1}(\bar{x})$	$Q_{i,2}(\bar{x})$	$Q_{i,3}(\bar{x})$
0	1.0	0.7651977			
1	1.3	0.6200860	0.5233449		
2	1.6	0.4554022	0.5102968	**0.5124715**	
3	1.9	0.2818186	0.5132634	**0.5112857**	**0.5118127**

$$Q_{3,3}(\bar{x}) = P_{0,1,2,3}(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_3)P_{0,1,2}(\bar{x}) - (\bar{x} - x_0)P_{1,2,3}(\bar{x})}{(x_0 - x_3)}$$

$$Q_{3,3}(\bar{x}) = \frac{(1.5 - 1.9)0.5124715 - (1.5 - 1.0)0.5112857}{(1.0 - 1.9)} = 0.5118127$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (II)

Aproximar $J_0(1.5) = 0.5118277$, por $P_{??}(1.5)$ con los datos

i	x_i	$J_0(x_i)$
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $Q_{4,j}$

i	x_i	$Q_{i,0}(\bar{x})$	$Q_{i,1}(\bar{x})$	$Q_{i,2}(\bar{x})$	$Q_{i,3}(\bar{x})$	$Q_{i,3}(\bar{x})$
0	1.0	0.7651977				
1	1.3	0.6200860	0.5233449			
2	1.6	0.4554022	0.5102968	**0.5124715**		
3	1.9	0.2818186	0.5132634	**0.5112857**	**0.5118127**	
4	2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	**0.5118302**	**0.5118200**

$$Q_{4,3}(\bar{x}) = P_{1,2,3,4}(\bar{x}) = \frac{(\bar{x} - x_4)P_{1,2,3}(\bar{x}) - (\bar{x} - x_1)P_{2,3,4}(\bar{x})}{(x_1 - x_4)}$$

$$Q_{4,3}(\bar{x}) = \frac{(1.5 - 2.2)0.5112857 - (1.5 - 1.3)0.5137361}{(1.0 - 1.9)} = 0.5118302$$