UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
CAMPUS SANTIAGO

Problemas Resueltos Integrales de Superficie - MAT 4

1. Calcular $\displaystyle\iint_S xy \ \mathrm{dS}$.

   donde S es la parte del plano $x + z = 1$, acotada por los planos $z = 0$, $y = 0$ y $x = y$.

   Solución

   Como la superficie corresponde al gráfico de la función $z = f(x, y) = 1 - x$, cuyo dominio es el triángulo determinado por las rectas: $y = 0$, $y = x$, $x = 1$. Por lo tanto

$$\iint_S xy \ \mathrm{dS} = \int_0^1 \int_0^x xy\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \ dydx = \sqrt{2} \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^3 \ dx = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

2. Hallar el área la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

Solución

Sea S la porción de la esfera, en el hemisferio superior, contenida en el cilindro. Sea $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$, con x , y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, la parametrización natural de S . Entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} \quad = \quad 2 \iint\limits_{S} \mathrm{dS} &= 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leq ay} \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1} \ \mathrm{dA} \\
&= 2 \iint\limits_{x^2+y^2 \leq ay} \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} \ \mathrm{dA} \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \ dr \, d\theta \\
&= -4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2} \, \Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} \ d\theta \\
&= -4a \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - a \right] \ d\theta \\
&= -4a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta - 1) \ d\theta \\
&= -4a^2 (\operatorname{sen} \theta - \theta) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= 2\pi a^2 - 4a^2
\end{aligned}
$$

3. Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$, situada entre los planos $z = 0$ y $x + 2z = 3$.

Solución:

De la ecuación del plano $z = \dfrac{3-x}{2}$ y reemplazando en la ecuación del cono se tiene

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(3-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x+1)^2 + 4y^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \iint\limits_{3(x+1)^2+4y^2\leq 12} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\; d\mathrm{A} \\
&= \iint\limits_{3(x+1)^2+4y^2\leq 12} \sqrt{2}\, d\mathrm{A} \\
&= \sqrt{2}(\text{área de la elipse}) \quad = \quad 2\sqrt{6}\pi
\end{aligned}$$

4. Sea Γ la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el plano $x-z=0$. Use el Teorema de Stoke para calcular la integral de linea

$$\oint_\Gamma (2x-y)dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz$$

Orientada en el sentido positivo, respecto del plano xy.

Solución:

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 4 \\ x & = & z \end{array}\right| \Rightarrow \quad 2x^2+y^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

Por otra parte:

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Luego si llamamos S al pedazo del plano $x-z=0$ contenido en la esfera, entonces $\partial S = \Gamma$. Usando el Teorema de Stokes:

$$\oint_\Gamma (2x-y)dx - yz^2\,dy - y^2z\,dz = \iint_S (0,0,1)\cdot(-1,0,1)\,dS = \iint_{2x^2+y^2\leq 4} dA = 2\sqrt{2}\pi$$

Pues el área de la elipse de semieje mayor $a=2$ y semieje menor $b=\sqrt{2}$ es $2\sqrt{2}\pi$.

5. Calcular

$$\int\int_S (x^3 + \mathrm{e}^z)\, dy \wedge dz + x^2 y\, dz \wedge dx + (\operatorname{sen} xy)\, dx \wedge dy$$

donde S es la frontera de la región acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2$ y por los planos $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 5$

Solución:

Usando el teorema de la divergencia y calculando la integral triple, se tiene:

$$\iint\limits_S (x^3 + \mathrm{e}^z)\, dy \wedge dz + x^2 y\, dz \wedge dx + (\operatorname{sen} xy)\, dx \wedge dy = \iiint\limits_T 4x^2\, \mathrm{dV}$$

donde T es el sólido acotado por la superficie S . Calculando:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_T 4x^2\, \mathrm{dV} &= 2\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{5-z} 4x^2 dydzdx \\
&= 2\int_0^2 4x^2 \left(\int_0^{4-x^2} (5-z)\, dz \right) dx \\
&= -8\int_0^2 x^2 \frac{(z-5)^2}{2} \Bigg|_0^{4-x^2} dx \\
&= -4\int_0^2 x^2(x^4 + 2x^2 - 24)\, dx \\
&= -4\left(\frac{x^7}{7} + \frac{2x^5}{5} - 8x^3 \right) \Bigg|_{,0}^{2} \\
&= \frac{4640}{35}
\end{aligned}$$

6. Suponer que $\nabla^2 f \equiv 0$ en una región T de $\mathbb{R}^3$, acotada por una superficie suave, simple cerrada S. Pruebe que

$$\int\int_S f\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}\,dS = \int\int\int |\nabla f|^2 dV$$

Solución:

Observar que $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \nabla f \cdot \overrightarrow{n}$ y por lo tanto

$$f\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = f\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Luego usando el teorema de la divergencia, se tiene:

$$\iint\limits_S f\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}\,dS = \iint\limits_S (f\nabla f \cdot \overrightarrow{n})\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}(f\nabla f)\,dV = \iiint\limits_T |\nabla f|^2\,dV$$

En efecto, esta última igualdad se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{dy^2} + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{dz^2} \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2\right] + f\left(\frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{dy^2} + \frac{\partial^2 f}{dz^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2\right] \\
&= |\nabla f|^2
\end{aligned}$$

7. Calcular el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy^2\,,\, yz\,,\, zx^2)$ a traves de la frontera del sólido (orientado por la normal exterior) , entre los cilindros $x^2+y^2 = 1$ y $x^2+y^2 = 4$ y entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.

Solución:

Usando el teorema de la divergencia, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\iiint (y^2 + z + x^2)\, d\mathrm{V} &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_1^3 r(r^2 + z)\, dz d\theta dr \\
&= 2\pi \int_1^2 \int_1^3 (r^3 + rz)\, dz dr \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(r^3 z + \frac{rz^2}{2} \right) \Big|_1^3 dr \\
&= 2\pi \int_1^2 (2r^3 + 4r)\, dr \\
&= 27\pi
\end{aligned}
$$

8. Calcular

$$\int\int_S \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right) dS$$

donde S es la superficie exterior total del tronco de cono $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9} = \dfrac{z^2}{4}$ con $1 \leq z \leq 2$

Solución:

Observar que la superficie S es el gráfico de la función $z = f(x,y) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, definida en $\dfrac{9}{4} \leq x^2+y^2 \leq 9$.

Calculamos directamente la integral de superficie, primero sobre el manto del cono (S_1) y luego sobre las tapas: $x^2+y^2 \leq 9$, con $z = 2$ (S_2) y $x^2+y^2 \leq \dfrac{9}{4}$, con $z = 1$ (S_3)

Para S_1 usamos la parametrización natural $(x,y) \to \left(x, y, \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)$ y en este caso el vector normal es $\overrightarrow{n} = \left(\dfrac{2x}{3\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{2y}{3\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$. Se tiene

$$\iint\limits_{S_1} \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iint\limits_{\frac{9}{4}\leq x^2+y^2\leq 9} \left(\frac{x^2}{2}, y, \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{3\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dydx \\
&= \iint\limits_{\frac{9}{4}\leq x^2+y^2\leq 9} \left(\frac{x^3}{3\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2}{3\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right) dydx \\
&= \int_{3/2}^{3}\int_0^{2\pi} r\left(\frac{r^3\cos^3\theta}{3r} + \frac{2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{3r} - \frac{2}{3}r\right) d\theta dr \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_{3/2}^{3} r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta\right) + \frac{2}{3}\left(\int_{3/2}^{3} r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta\right) - \frac{4\pi}{3}\int_{3/2}^{3} r^2\,dr \\
&= -\frac{21\pi}{4}
\end{aligned}$$

Para la tapa S_2. Usar la parametrización: $(x,y) \to (x,y,2)$ definida en el circulo $x^2+y^2 \leq 9$, vector normal unitario $\overrightarrow{n} = (0,0,1)$, que apunta hacia afuera del sólido. Se tiene:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} \left(\frac{1}{2}x^2\,,\,y\,,\,2\right)\cdot(0,0,1)\,d\mathrm{A} = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} d\mathrm{A} = 18\pi$$

Para la tapa S_3. Usar la parametrización: $(x,y) \to (x,y,1)$ definida en el circulo $x^2+y^2 \leq \frac{9}{4}$, vector normal unitario $\overrightarrow{n} = (0,0,-1$, que apunta hacia afuera del sólido. Se tiene:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9/4} \left(\frac{1}{2}x^2\,,\,y\,,\,2\right)\cdot(0,0,-1)\,d\mathrm{A} = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 9} d\mathrm{A} = -\frac{9\pi}{4}$$

Luego evaluando:

$$\begin{aligned}
& \iint\limits_{S} \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS \\
= \; & \iint\limits_{S_1} \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS + \iint\limits_{S_2} \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS \\
& + \iint\limits_{S_3} \left(\frac{1}{2}x^2\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS \\
= \; & -\frac{21\pi}{4} + 18\pi - \frac{9\pi}{4} \\
= \; & \frac{21\pi}{2}
\end{aligned}$$

Usando el teorema de la divergencia y calculando la integral triple

$$\begin{aligned}
& \iint\limits_{x^2+y^2\leq 9/4} \int_1^2 (x+2)\,d\mathrm{V} + \iint\limits_{9/4\leq x^2+y^2\leq 9} \int_{2/3\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x+2)\,d\mathrm{V} \\
= \; & \int_0^{3/2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\cos\theta+2)r\,dzd\theta dr + \int_{3/2}^3\int_0^{2\pi}\int_{2r/3}^2 (r\cos\theta+2)r\,dzd\theta dr \\
= \; & \int_0^{3/2}\int_0^{2\pi} (r^2\cos\theta+2r)\,d\theta dr + \int_{3/2}^3\int_0^{2\pi} (r^2\cos\theta+2r)\left(2-\frac{2r}{3}\right)d\theta dr \\
= \; & \int_0^{3/2} r^2 \operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi} dr + \int_0^{3/2} 2r\,dr + 2\pi\int_{3/2}^3 \left(4r - \frac{4r^2}{3}\right)dr \quad = \quad \frac{21\pi}{2}
\end{aligned}$$

9. Calcular $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{dS}$, donde S es la porción del paraboloide $z = x^2+y^2$ entre los planos $z=1$ y $z=4$ y $\vec{n}$ es normal a S, unitario, con tercera coordenada negativa.

Solución

Para usar el teorema de la divergencia es necesario agregar las tapas en $z=1$ y en $z=4$, para luego restarlas como integrales de superficie. Con esto:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{dS} &= \iiint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\ \mathrm{dV} - \iint_{\text{tapa:}\,z=4} \vec{F}\cdot(0,0,1)\ \mathrm{dS} \\
&\quad - \iint_{\text{tapa:}\,z=1} \vec{F}\cdot(0,0,-1)\ \mathrm{dS} \\
&= \iiint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\ \mathrm{dV} - \iint_{x^2+y^2\le 4} \mathrm{Arctg}(x^2+y^2)\ \mathrm{dA} \\
&\quad + \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{Arctg}(x^2+y^2)\ \mathrm{dA} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^4\int_0^{\sqrt{z}} r^3\ dr\,dz\,d\theta - \int_0^2\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\ d\theta\,dr \\
&\quad + \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\ d\theta\,dr \\
&= 2\pi\int_1^4 \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{z}} dz - 2\pi\int_0^2 r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\ dr + 2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\ dr \\
&= \left.\frac{\pi}{6}\,z^3\right|_1^4 - 2\pi\left.\left[\frac{1}{2}\left(r^2\,\mathrm{Arctg}(r^2)\right) - \frac{1}{4}\ln(1+r^4)\right]\right|_0^2 \\
&\quad + 2\pi\left.\left[\frac{1}{2}\left(r^2\,\mathrm{Arctg}(r^2)\right) - \frac{1}{4}\ln(1+r^4)\right]\right|_0^1 \\
&= \frac{63\pi}{6} + \frac{\pi^2}{4} - 4\pi\,\mathrm{Arctg}(4) + \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{17}{2}\right)
\end{aligned}
$$

10. Considerar el campo:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy^2 + \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{sen}(z))\,\overrightarrow{i} + (x^2y + \mathrm{e}^{-x}\cos(z))\,\overrightarrow{j} + \mathrm{Arctg}(x^2+y^2)\,\overrightarrow{k}$$

Calcular $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{dS}$, donde S es la porción del paraboloide $z = x^2+y^2$ entre los planos $z=1$ y $z=4$ y $\overrightarrow{n}$ es normal a S, unitario, con tercera coordenada negativa.

Solución

Para usar el teorema de la divergencia es necesario agregar las tapas en $z=1$ y en $z=4$, para luego restarlas como integrales de superficie. Con esto:

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\,\mathrm{dS} &= \iiint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\,\mathrm{dV} - \iint_{\text{tapa: } z=4} \overrightarrow{F}\cdot(0,0,1)\,\mathrm{dS} \\
&\quad - \iint_{\text{tapa: } z=1} \overrightarrow{F}\cdot(0,0,-1)\,\mathrm{dS} \\
&= \iiint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\,\mathrm{dV} - \iint_{x^2+y^2\le 4} \mathrm{Arctg}(x^2+y^2)\,\mathrm{dA} \\
&\quad + \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{Arctg}(x^2+y^2)\,\mathrm{dA} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^4\int_0^{\sqrt{z}} r^3\,dr\,dz\,d\theta - \int_0^2\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\,d\theta\,dr \\
&\quad + \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\,d\theta\,dr \\
&= 2\pi\int_1^4 \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{z}} dz - 2\pi\int_0^2 r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\,dr + 2\pi\int_0^1 r\,\mathrm{Arctg}(r^2)\,dr \\
&= \left.\frac{\pi}{6}z^3\right|_1^4 - 2\pi\left.\left[\frac{1}{2}\left(r^2\,\mathrm{Arctg}(r^2)\right) - \frac{1}{4}\ln(1+r^4)\right]\right|_0^2 \\
&\quad + 2\pi\left.\left[\frac{1}{2}\left(r^2\,\mathrm{Arctg}(r^2)\right) - \frac{1}{4}\ln(1+r^4)\right]\right|_0^1 \\
&= \frac{63\pi}{6} + \frac{\pi^2}{4} - 4\pi\,\mathrm{Arctg}(4) + \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{17}{2}\right)
\end{aligned}$$