Ejercicios Resueltos de Teoremas Fundamentales.

1.- Calcule la integral de línea $\oint_C (x^2 - xy)dx + (y^2 - xy)dy$, siendo C el contorno de la región rectangular cerrada, con vértices en los puntos $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ y $D(0,1)$.

Solución:

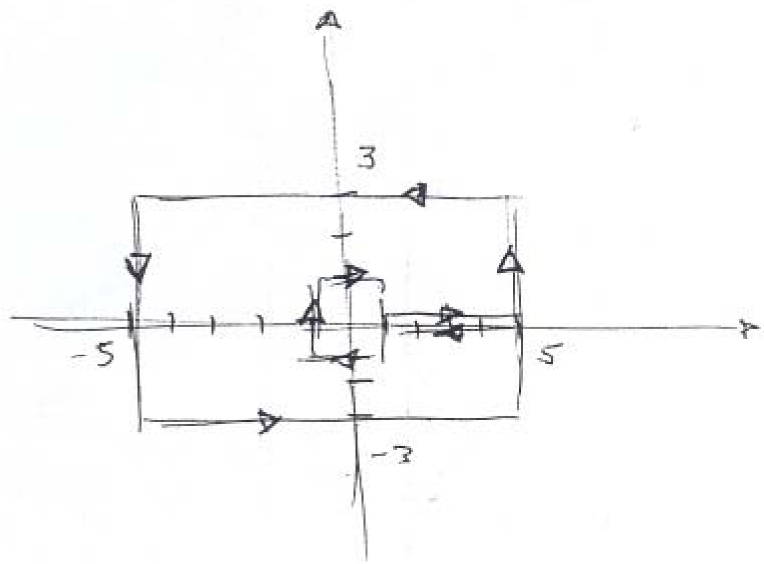
$$\oint_C \overbrace{(x^2 - xy)dx}^{P} + \overbrace{(y^2 - xy)dy}^{Q} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R \big(y - (-x)\big) dA = \iint_R (x+y) dA$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} (x+y) dy dx = \int_{x=0}^{2} \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{1} dx = \int_{x=0}^{2} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)_{x=0}^{2} = 3$$

2.- Utilice el Teorema de Green para calcular la integral $\oint_C (y-x)dx + (2x-y)dy$, donde C es la frontera de la región situada en el interior del rectángulo limitado por $x=-5, x=5, y=-3, y=3$ y en el exterior del cuadrado limitado por $x=-2, x=1, y=-1, y=1$.

Solución:



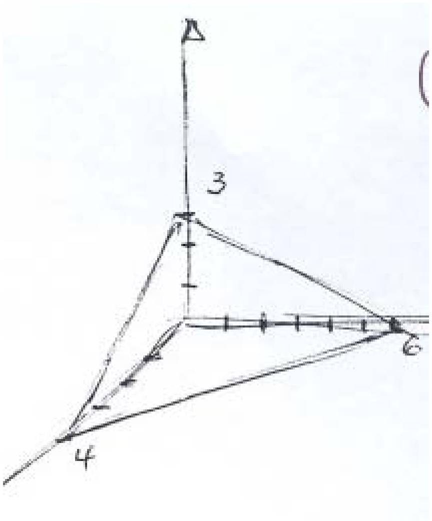
$$\oint_C (y-x)dx + (2x-y)dy = \iint_R (2-1)dA = \int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} dydx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydx$$

$$= \int_{-5}^{5}\big(3-(-3)\big)dx - \int_{-1}^{1}\big(1-(-1)\big)dx = \int_{-5}^{5} 6dx - \int_{-1}^{1} 2dx$$

$$= \big(5-(-5)\big)\cdot 6 - 2\big(1-(-1)\big) = 56$$

3.- Calcular $\oint_C \ \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}ds$ para $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x^2\hat{\imath}+xy\hat{\jmath}+5\hat{k}$, y Q la región sólida acotada por los planos coordenados y el plano $2x+3y+4z=12$.

Solución:



$$\oint_C F\cdot Nds=\iiint_Q (2x+x)dV=\int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}\int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} 3xdzdydx$$

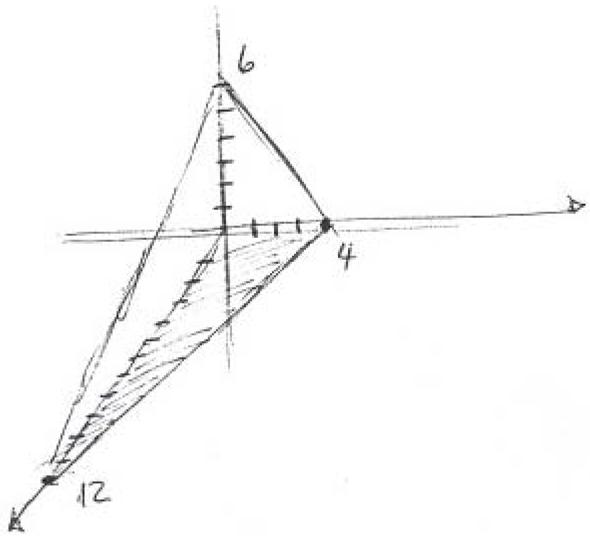
$$=\frac{3}{4}\int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}(12x-2x^2-3xy)dydx=\frac{3}{4}\int_0^6 (12x-2x^2)y-\frac{3}{2}xy^2\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^6\left[x(12-2x)(12-2x)-\frac{x}{2}(12-2x)^2\right]dx=\frac{1}{8}\int_0^6[x(12-2x)^2]dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{144x^2}{2}-\frac{48x^3}{3}+x^4\right]_0^6=\frac{1}{8}\cdot 432=54$$

4.- Calcular $\int_C \, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dR}$ para $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{x}^2\hat{\boldsymbol{k}}$ y $\boldsymbol{S}$ la porción del primer octante del plano $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=12$.

Solución:



$F(x,y,z) = (x-z)\hat{\imath} + (y-z)\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$

$$Rot\ I = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-z & y-z & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial x^2}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial(x-z)}{\partial z}\hat{\jmath} + \frac{\partial(y-z)}{\partial x}\hat{k} - \left(\frac{\partial(x-z)}{\partial y}\hat{k} + \frac{\partial(y-z)}{\partial z}\hat{\imath} + \frac{\partial x^2}{\partial x}\hat{\jmath}\right)$$

$$= -1\hat{\jmath} + \hat{\imath} - 2x\hat{\jmath} = \hat{\imath} + (-1-2x)\hat{\jmath}$$

$$z = \frac{12-3x-y}{2}$$

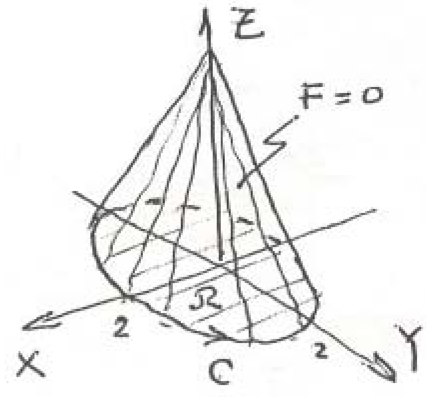
$$\int_C F = \iint_R (1,-1-2x,0)\cdot\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)dA = \iint_R \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1-2x)\right)dA = \iint_R (1-x)dA$$

$$= \int_0^4 \int_0^{12-3x} (1-x)dydx = \int_0^4 (1-x)(12-3x)dx = \int_0^4 (12-15x+3x^2)dx$$

$$= 12x - \frac{15x^2}{2} + x^3\Big|_0^4 = 48-120+64 = -8$$

5.- Calcular $\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n}\, ds$, siendo $\vec{A} = (x+y)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ y S la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ encima del plano XY.

Solución:



$$\iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n}\, ds = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_C (x+y)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

$$= \int_C (x+y)dx + xdy$$

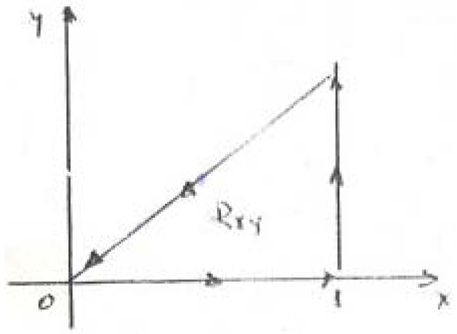
$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (2\cos\theta + 2\sin\theta)(-2\sin\theta\, d\theta) + 2\cos\theta\,(2\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (-4\sin\theta\cos\theta - 4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} (-2\sin 2\theta + 4\cos 2\theta)d\theta = \cos 2\theta + \sin 2\theta\big|_0^{2\pi} = 0$$

6.- Calcular la integral $\int_E \left(e^{x^3} + y^2\right) dx + \left(x + \sqrt{y^7}\right) dy$, donde E pertenece a $y = 0, x = 1, y = x$.

Solución:



$E: y = 0, x = 3, y = x \;\; ; \;\; E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$E_1 \to y = 0 => dy = 0 \;\; ; \;\; 0 \leq x \leq 1$

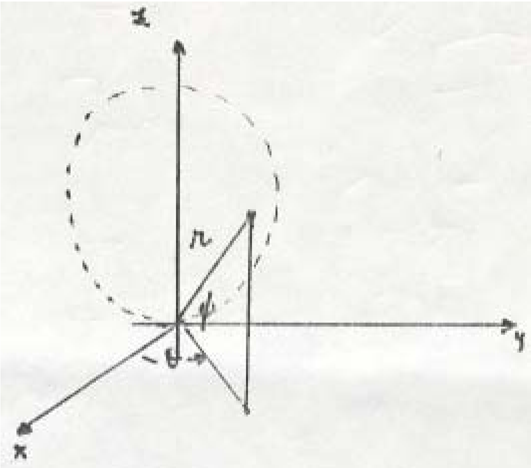
$P(x,y) = e^{x^3} + y^2 \;\; ; \;\; Q(x,y) = x + \sqrt{y^7} => \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \;\; ; \;\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$$Aplicando\ el\ Teorema\ de\ Green: \oint_E Pdx + Qdy = \iint_{R_{x,y}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (1 - 2y) dydx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

7.- Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds$, en que $\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ y S es la frontera de la región D: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0$.

Solución:



Por teorema de la divergencia: $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \iiint_V div\, F\, dV$

Pero: $div\, F = \frac{2z^2}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \iiint_V \frac{2z^2}{x^2+y^2+z^2}\, dV$

Aplicando coordenadas esféricas:

$$\begin{array}{lcl} x = r\cos\theta\cos\phi & & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r\sin\theta\cos\phi & ; & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ z = r\sin\phi & & 0 \leq r \leq 2\sin\phi \end{array}$$

$|J| = r^2 \cos\phi$

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\cos\phi\, d\phi|_0^{2\sin\phi}\, dr = 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos\phi\, d\theta = 2\pi$$

8.- Sea $\vec{F} = f(r)\vec{r}$ en que $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\vec{r}\|$, demuestre que: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Solución:

Por teorema de Stokes: $\int_E \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot ds$

$$\therefore\ \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) z - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) y, \left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) x - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) y, \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right) y - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) x$$

Pero:

$$\left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) z - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) y = z \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = z \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} - y \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{z}{r} = 0$$

Análogamente:

$$\left(\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right) x - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) y = 0 \wedge \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right) y - \left(\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right) x$$

$$=> \int_E \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S 0 \cdot ds = 0$$

9.- Calcule la integral $\iint_S \vec{F} * \hat{n} dS$ con $\vec{F} = (x, y, 2z)$ y S es la superficie externa del sólido acotado por $x^2 + y^2 = 1 - z \quad y \quad z = 0.$

Solución:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, 2z) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint_R \nabla \cdot \vec{F}\, dv = \iiint_R 4\, dv$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{2\prod} \int_{\rho=0}^{1} \int_{z=0}^{1-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4 \cdot (2\prod) \int_{\rho=0}^{1} \rho(1-\rho^2)\, d\rho$$

$$= 8\prod \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 2\prod$$

10.- Qué puede decir de $\int_{C\cup C^*} ye^{xy}\,dx + xe^{xy}dy$, **donde** $C^*: r(t) = 2\vec{i} + t\vec{j},\ -1 \le t \le 1.$

Solución:

La integral de línea es nula, ya que

$$\int_{C\cup C^*} ye^{xy}\,dx + xe^{xy}dy \underbrace{=}_{Teorema\ de Green} \iint_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \underbrace{=}_{Campo\ Conservador} 0$$

Donde D es la región plana limitada por la curva cerrada $C \cup C^*$ y

$P(x, y) = ye^{xy}, Q(x, y) = xe^{xy}$

11.- Calcular $\int_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ donde $\vec{F} = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ y C es la frontera de la parte del plano $3x + y + z = 3$ que está en el primer octante.

Solución:

Por Teorema de Stokes, se tiene que:

$$\int_C \vec{F}\cdot dr = \iint_S rot\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

Donde $S: z = 3 - 3x - y = g(x,y)$ orientada hacia arriba limitada por la curva C en el primer octante. D es la proyección de S en el plano xy

$$rot\,\vec{F} = \underbrace{3x}_{P}\vec{i} + \underbrace{(x-3y)}_{Q}\vec{j} + \underbrace{2y}_{R}\vec{k}$$

$$\therefore \int_C \vec{F}\cdot dr = \iint_D (10x - y)dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{3-3x} (10x - y)dy\,dx = \int_0^1 (10xy - \frac{y^2}{2})$$

$$= \int_0^1 (10x(3-3x) - \frac{(3-3x)^2}{2})dx = \int_0^1 (30x - 30x^2 - \frac{(9 - 18x + 9x^2)}{2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (60x - 60x^2 - 9 + 18x - 9x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (78x - 69x^2 - 9)dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{78x^2}{2} - \frac{69x^3}{3} - 9x) = \frac{1}{2}(39x^2 - 23x^3 - 9x)$$

$$= \frac{1}{2}(39 - 23 - 9) = \frac{7}{2}$$

12.- Determinar el valor de la integral $\iiint_S (xz-3z)dV$, donde S es la región limitada por el cilindro $x^2+z^2=9$ y los planos $x+y=3, z=0$ e $y=0$, arriba del plano XY.

Solución:

$$\iiint\limits_S (xz-3z)dzdydx = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-x}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} (xz-3z)dzdydx = \int_{-3}^{3}\int_{0}^{3-x} -(x+3)\left(\frac{x^2-9}{3}\right)dydx$$

$$= \int_{-3}^{3}(3-x)(x+3)\left(\frac{x^2-9}{3}\right)dx = \frac{648}{5}$$

13.- Evaluar, usando algún tipo de coordenadas, la integral:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy$$

Solución:

$$Usando\ coordenadas\ esféricas: \quad \begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\ \phi \end{aligned}$$

$Tenemos\ que\ x^2+y^2+z^2 = r^2\ y\ dV = r^2\sin\phi$

$La\ integral\ queda:$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \sin\phi\, drd\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\phi\, d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta = \pi$$

14.- Calcular la integral $\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds$ para $\vec{F} = (x, y, z)$ y $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

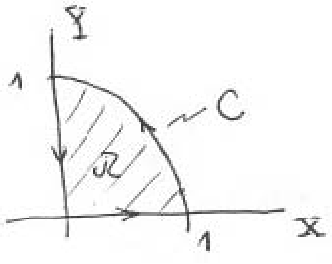
Solución:

Usando el teorema de la divergencia, se tiene:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_V 3\, dV = 3V = 3\left(\frac{4}{3}\pi(3)^3\right) = 108\pi \; ; siendo\ \nabla \cdot \vec{F} = 3$$

15.- Determinar el valor de la integral $\oint_C \left(x^3 - x^2 y\right)dx + xy^2 dy$, donde C es la frontera de la región encerrada por $y = \sqrt{1 - x^2}, y = 0, x = 0$.

Solución:



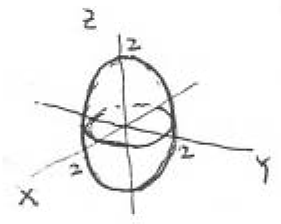
$$\oint_C (x^3 - x^2 y)dx + xy^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (x^2 + y^2) dxdy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{1} \rho^3 d\rho d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$Siendo: P = x^3 - x^2 y \,, Q = xy^2 => \frac{\partial Q}{\partial x} = -x^2 \,, \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$$

16.- Hallar el valor de la integral $\iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds$, donde $\vec{A} = (2x+3z)\hat{\imath} - (xz+y)\hat{\jmath} + (y^2+2z)\hat{k}$ y S es la superficie de la esfera de centro el origen y radio 2.

Solución:



$$\iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,ds = \iiint_R div\,\vec{A}\,dV = 3\iiint_R dV = 3\,V_{esf} = 32\pi$$

$$Donde: div\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(2x+3z, -xz-y, y^2+2z) = 2-1+2 = 3$$