Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería y Ciencias Segundo Semestre 2013

Departamento de Matemática y Estadística

Guía de Ejercicios Integración Indefinida
Cálculo de una Variable (IME050)
Segundo Semestre 2010

Carrera: Ingenierías Civiles

Profesores: H. Burgos, M. Choquehuanca, E. Henríquez, A. Parra, A. Sepúlveda, H. Soto, P. Valenzuela.

1. Utilice una sustitución simple para determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x} dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

e) $\displaystyle\int x^2 \left(4+x^3\right)^{-\frac{1}{2}} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}} dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-2x}-1}}$

i) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$

j) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)^2}$

l) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x + x\ln x}$

m) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

n) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

ñ) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} 2x\,dx}{\ln(\cos 2x)}$

2. Utilice integración por partes para determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx$

c) $\displaystyle\int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

e) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen} 2x \, dx$

f) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} dx$

g) $\displaystyle\int \ln \sqrt[3]{8x}\, dx$

h) $\displaystyle\int e^{-3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

i) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} 4x \, dx$

j) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$

k) $\displaystyle\int \sec^3 x \, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. Utilice sustituciones trigonométricas para determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x^2+25}}$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$

d) $\displaystyle\int x^2\sqrt{25-4x^2}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{2-e^{2x}} dx$

g) $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ *i*) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(8-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ *k*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x-3)^2}$ *j*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 -5\cos x+4}dx$ *l*) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

4. Utilice descomposición en fracciones parciales para determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x}$ *e*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x+\cos x-2}dx$ *i*) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-2x^3}$ *f*) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}dx$ *j*) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x-3\operatorname{tg} x+1}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x}dx$ *g*) $\displaystyle\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x^2-1)^2}dx$ *k*) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^3+15x^2+3x}{x^2+2x+1}dx$ *h*) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}dx$ *l*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-x^3}$

5. Determine las siguientes integrales indefinidas de funciones racionales de seno y coseno:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\operatorname{sen} x}$ *c*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1-\operatorname{sen} x}$ *e*) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} x}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}dx$ *f*) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x+b^2\cos^2 x}$

6. Determine las siguientes integrales indefinidas de funciones trigonométricas:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ *e*) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\cos x\,dx$ *i*) $\displaystyle\int \sec^4 2x\operatorname{tg}^4 2x\,dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$ *f*) $\displaystyle\int \csc^5\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}^3\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$ *j*) $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{sen}^2\left(e^{-x}\right)\cos^3\left(e^{-x}\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{4-4\cos^2 x}}dx$ *g*) $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^2 x}dx$ *k*) $\displaystyle\int \frac{\cos^4(\ln x)\operatorname{sen}^6(\ln x)}{x}dx$

d) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} 2x+\cos 2x)^2\,dx$ *h*) $\displaystyle\int \cos 3x\operatorname{sen} 5x\,dx$ *l*) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x^2-2x)\cos(6x-3x^2)}{(x-1)^{-1}}dx$

7. Utilice la sustitución $t=e^x$ para determinar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+1}{e^x-e^{-x}}dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x-16}}$

8. Determine las siguientes integrales indefinidas de funciones irracionales:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$ *c*) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{4}}\left(1+x^{\frac{1}{5}}\right)dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

f) $\int \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$

h) $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt[3]{x}\,dx$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

g) $\int \frac{(x+3)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\sqrt{x+2}-1}dx$

i) $\int \frac{2+\sqrt{x-3}}{(x-3)^2-\sqrt{x-3}}dx$

9. Demuestre las siguientes formulas:

a) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{1}{m+n}\left(\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x - (m-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^n x\,dx\right)$

b) $\int x^m \ln^n x\,dx = \frac{1}{m+1}\left(x^{m+1}\ln^n x - n\int x^m \ln^{n-1} x\,dx\right)$, $m \neq -1$

c) $\int x^m \ln\left(x^2+a^2\right)\,dx = \frac{1}{m+1}\left(x^{m+1}\ln\left(x^2+a^2\right) - 2\int \frac{x^{m+2}}{x^2+a^2}\,dx\right)$

d) $\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{a(1+2m)}\left(x^m\sqrt{ax+b} - bm\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}\,dx\right)$, $m \neq -\frac{1}{2}$

e) $\int \operatorname{tg}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$, $n \geq 2$

10. Utilizando el o los métodos más apropiados determine las siguiente integrales indefinidas:

a) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

b) $\int x e^{\operatorname{arc\,sen} x}dx$

c) $\int x^2 \ln\left(x^2+5\right)dx$

d) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1+x}}dx$

e) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}dx$

f) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

g) $\int \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\left(x^3-1\right)^2}dx$

h) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

i) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx$

j) $\int x f''(x)\,dx$

k) $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-1}}$

l) $\int \frac{x\,dx}{x^4+4x^2+5}$

m) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+5x}}$

n) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-4}}$

ñ) $\int x^2 \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

o) $\int \cos^4 3x\,dx$

p) $\int \frac{dx}{4+\sqrt{4+5x}}$

q) $\int \sec^7 5x \operatorname{tg} 5x\,dx$

r) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

s) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$

t) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{5+4\operatorname{sen} x}dx$

u) $\int \frac{\sec^2 t\,dt}{1+\sec t}$

v) $\int \frac{x^3\,dx}{\left(16-9x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

w) $\int \frac{2x^2-x+2}{x+2x^3+x^5}dx$

x) $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

y) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}dx$

z) $\int x\ln\left(x^3+x\right)dx$

a') $\int \frac{x^3 e^{x^2}\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

b') $\int 3x^4 \operatorname{sen} 2x\,dx$

c') $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$

d') $\int \frac{x^2\,dx}{\left(16-4x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$

e') $\displaystyle\int \frac{x+2}{\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

f') $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\cos x)\cos x}}$

g') $\displaystyle\int x\left(\cos^3 x^2-\operatorname{sen}^3 x^2\right)\,dx$

h') $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^3}dx$

i') $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}dx$

j') $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{2}{3}}-4\right)^3\,dx$

k') $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+3x)\sqrt{7x^2+6x+1}}$

l') $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}$

m') $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}$

n') $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(9+4\ln^2 x\right)}$

ñ') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t\,dt}{6\cos^2 t+5\operatorname{sen}^2 t}$

o') $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$

p') $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\cos x+\operatorname{sen} x}$

q') $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+12}{x^2+4}dx$

r') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}dx$

s') $\displaystyle\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

t') $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$

u') $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

v') $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}$

w') $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$

x') $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}\,dx$

y') $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\left(x^2-x+1\right)^3}$

z') $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)\operatorname{sen} x}dx$

a") $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt$

b") $\displaystyle\int \frac{4x+7}{2x^2+3x+8}dx$

c") $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$

d") $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{4e^x+3}}$

e") $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

f") $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$

g") $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\left(\ln^2 x+1\right)}$

h") $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\ln(\operatorname{sen} 2x)}dx$

i") $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{4e^{-2x}+1}}$

j") $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}}dx$

k") $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6+1}}$

l") $\displaystyle\int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

m") $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

n") $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

ñ") $\displaystyle\int \frac{3-x^2}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}dx$

o") $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x+1}{x\sqrt{\ln^3 x+3\ln x}}dx$

p") $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

q") $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\operatorname{tg}\left(x^2-1\right)\sqrt{\ln\left(\operatorname{sen}\left(x^2-1\right)\right)}}$

r") $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$