Ciencias de la Computación I

Principio de Inclusión y Exclusión

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

3 de octubre de 2016

Introducción

Lo que sigue tiene su fundamento en la teoría de conjuntos. El principio de Inclusión y Exclusión es un tema adicional de conteo que nos permite establecer resultados generales a partir de la categorización de elementos de un conjunto. Problemas como conteo de funciones sobreyectivas entre conjuntos finitos se hacen mucho más simples que antes.

Notación

Sea S un conjunto tal $|S| = N$ y sean $c_1 c_2 ... c_n$ una colección de condiciones o propiedades satisfechas por algunos, o todos, los elementos de S.

- Algunos elementos de S podrían satisfacer más de una de las condiciones, mientras que otros podrían no satisfacer ninguna.
- Para todo $1 \leq i \leq t$, $N(c_i)$ denota el número de elementos de S que satisfacen la condición c_i.
- Para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3, ..., t\}$, tales que $i \neq j$, $N(c_i c_j)$ denotará el número de elementos de S que satisfacen ambas condiciones c_i, c_j(pudiendo satisfacer otras más).
- Para cada $1 \leq i \leq t$, $N(\bar{c}_i) = N - N(c_i)$ denota el número de elementos de S que no satisfacen la condición c_i.

Principio de Inclusión y Exclusión

Teorema

Consideremos un conjunto S tal que $|S| = N$ y las condiciones c_i, $1 \leq i \leq t$ satisfechas por alguno de los elementos de S. El número de elementos de $|S|$ que no satisfacen ninguna de las condiciones c_i, se denota con $\bar{N} = N(\bar{c}_1\bar{c}_2...\bar{c}_t)$, donde

$$\bar{N} = N - \sum_{1\leq i\leq t} N(c_i) + \sum_{1\leq i<j\leq t} N(c_ic_j) - \sum_{1\leq i\leq t} N(c_ic_jc_k) + ...$$

$$+(-1)^t N(c_1c_2c_3...c_t)$$

Si recordamos como se definen los conjuntos por comprensión, entonces el teorema es facilmente verificable según las operaciones conjuntistas. De hecho, tenemos

Cardinalidad de la unión

Para los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_r \subset S$, tenemos

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r|$$

Ejemplos

- Determine el número de enteros entre 1 y 250 que son divisibles entre cualquiera de los enteros 2,3,5,y 7.
- ¿De cuántas formas pueden permutarse las 26 letras del alfabeto de tal manera que ninguno de los patrones sea car,dog, pun o byte?