Interpolación polinomial

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez

Conferencia 19

Conferencia 19

Interpolación

Problema de interpolación.

Dado un conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_0, y_0); \cdots ; (x_n, y_n)\}$$

tales que $x_i \neq x_j$. Determinar una función $p(x)$ que pase por los puntos, o sea:

$$\{p(x_0) = y_0; \cdots ; p(x_n) = y_n\}$$

Observaciones

- Es deseable utilizar funciones polinomiales del tipo $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ debido a lo simple que resulta su evaluación numérica (esquema de Horner) y el cálculo de derivadas e integrales asociadas.
- El polinomio de Taylor no es de utilidad en este problema.

Resultado principal

Teorema

Si $x_0, \ldots x_n$ son $n+1$ puntos distintos y f es una función, de la cual se tiene sus valores en dichos puntos $\{f(x_k)\}_{k=0}^{n}$, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado máximo n tal que

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \forall k = 0 \ldots n$$

El polinomio $P(x)$ se denomina **polinomio de interpolación de Lagrange** y tiene la siguiente expresión:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

donde, para cada $k = 0, \ldots, n$:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Error asociado al polinomio de Lagrange

Teorema

Supongamos que $x_0, \ldots x_n$ son $n+1$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$ y que f es una función $n+1$-veces continuamente derivable en ese intervalo (o sea $f \in C^{n+1}[a, b]$).
Se cumple entonces que, para cualquier punto $x \in [a, b]$ existe un punto $\xi(x) \in (a, b)$ tal que:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

donde $P(x)$ es el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_0, \ldots x_n$.

Motivación

Teorema (Evaluación recursiva del Polinomio de Lagrange)

Sean $f(x)$ una función definida en los $k+1$ puntos distintos $\{x_0, \ldots, x_k\}$ y x_i, x_j dos puntos en ese conjunto. Entonces

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

donde $P(x) = P_{1,\ldots,k}(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de $f(x)$ en los $k+1$ puntos $x_0, \ldots x_k$.

Con esta fórmula puede calcularse recursivamente

x_0	$P_0(\bar{x})$				
x_1	$P_1(\bar{x})$	$P_{0,1}(\bar{x})$			
x_2	$P_2(\bar{x})$	$P_{1,2}(\bar{x})$	$P_{0,1,2}(\bar{x})$		
x_3	$P_3(\bar{x})$	$P_{2,3}(\bar{x})$	$P_{1,2,3}(\bar{x})$	$P_{0,1,2,3}(\bar{x})$	
x_4	$P_4(\bar{x})$	$P_{3,4}(\bar{x})$	$P_{2,3,4}(\bar{x})$	$P_{1,2,3,4}(\bar{x})$	$P_{0,1,2,3,4}(\bar{x})$

Algoritmo

Notación simplificada: Para $i >= j \geq 0$

$$Q_{i,j}(x) = P_{i-j,i-j+1,\dots,i}$$

Por ejemplo: $Q_{2,0}(x) = P_2(x) = f(x_2)$; $Q_{4,2}(x) = P_{2,3,4}(x)$

Pseudocódigo (Para evaluar $P_{0,\dots,n}(\bar{x})$)

DATOS: $x_0, \dots, x_k$ puntos de interpolación
$f(x_i), 0 \leq i \leq n$ valores a interpolar
$\bar{x}$: Punto a evaluar

RESULT: Tabla Q de todos los valores $Q_{i,j}, 0 \leq j \leq i \leq n$

PASO 1: Para $k = 0 : n$ tomar $Q_{k,0}(\bar{x}) = f(x_k)$.

PASO 2: Para $i = 1 : n$ hacer
Para $j = 1 : i$, tomar

$$Q_{i,j}(\bar{x}) = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1}(\bar{x}) - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}(\bar{x})}{(x_i - x_{i-j})}$$

PASO 3: STOP(Q)

Motivación

Polinomio de interpolación de Lagrange

Dados $n+1$ puntos distintos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, el polinomio de interpolación de Lagrange de f para esos puntos se obtiene como:

$$P_{0,\ldots,n}(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Representación más conveniente

Encontrar los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ que permitan representar al polinomio de interpolación de Lagrange de la siguiente forma:

$$P_{0,\ldots,n}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Ejemplo

Cálculo de los primeros coeficientes

Evaluando el polinomio

$$P_{0,\dots,n}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

en x_0 y x_1 obtenemos:

$$P_{0,\dots,n}(x_0) = f(x_0) \Longrightarrow a_0 = f(x_0);$$

$$P_{0,\dots,n}(x_1) = f(x_1) \Longrightarrow f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

y por ende:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Definición recursiva de diferencia dividida

Primera diferencia dividida

Dadas las diferencias divididas de orden cero:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

definimos las diferencias divididas uno como:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Argumento recursivo

Teniendo definidas las diferencias divididas de orden k:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]; \quad f[x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}]$$

definimos la diferencia dividida de orden $k+1$ como:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}] =$$

Ejemplo de las fórmulas de diferencias divididas

Diferencias divididas de orden cero

$$f[x_0] = f(x_0), \quad f[x_1] = f(x_1), \quad f[x_2] = f(x_2), \quad f[x_3] = f(x_3)$$

Primeras diferencias divididas

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1},$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$$

Segundas diferencias divididas

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \; f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1},$$

Terceras diferencias divididas

Resultados principales sobre diferencias divididas

Proposición

Dados los puntos distintos $\{x_0, \dots, x_n\}$, el polinomio de interpolación de Lagrange de f correspondiente es:

$$P_{0,\dots,n}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$, o sea:

$$P_{0,\dots,n}(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$$

Proposición

Supongamos que $f \in C^n[a, b]$ y $\{x_0, \dots, x_n\}$ son puntos distintos del intervalo $[a, b]$. Entonces existe un número $\xi \in (a, b)$ tal que:

Cálculo de las diferencias divididas de Newton

Notación simplificada: Para $i >= j \geq 0$

$$F_{i,j} = f[x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_i]$$

Por ejemplo: $F_{2,0} = f[x_2] = f(x_2)$; $F_{4,2} = f[x_2, x_3, x_4]$

Pseudocódigo (Para obtener los coeficientes de $P_{0,\ldots,n}(x)$)

DATOS: $x_0, \ldots, x_k$ puntos de interpolación
$f(x_i), 0 \leq i \leq n$ valores a interpolar

RESULT: Los valores $F_{i,i}, 0 \leq i \leq n$ tales que $F_{i,i} = f[x_0, \ldots, x_i]$

PASO 1: Para $k = 0 : n$ tomar $F_{k,0}(\bar{x}) = f(x_k)$.

PASO 2: Para $i = 1 : n$ hacer
Para $j = 1 : i$, tomar

$$F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{(x_i - x_{i-j})}$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (III)

Calcular $P_{0,1,2,3,4}(x)$ con los datos

i	x_i	$f(x_i) = J_0(x_i)$
0	1.0	0.7651977
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Cálculo de $F_{j,0}$

i	x_i	$f[x_i]$
0	1.0	0.7651977
1	1.3	0.6200860
2	1.6	0.4554022
3	1.9	0.2818186
4	2.2	0.1103623

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (III)

Cálculo de $F_{j,1}$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
0	1.0	0.7651977	
			-0.4837057
1	1.3	0.6200860	
			-0.5489460
2	1.6	0.4554022	
			-0.5786120
3	1.9	0.2818186	
			-0.5715210
4	2.2	0.1103623	

$$f[x_0, x_1] = \frac{0.6200860 - 0.7651977}{1.3 - 1.0} = -0.4837057$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{0.4554022 - 0.6200860}{1.6 - 1.3} = -0.5489460$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{0.2818186 - 0.4554022}{1.9 - 1.6} = -0.5786120$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (III)

Cálculo de $F_{j,2}$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	1.0	0.7651977		
			-0.4837057	
1	1.3	0.6200860		-0.1087339
			-0.5489460	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433
			-0.5786120	
3	1.9	0.2818186		0.0118183
			-0.5715210	
4	2.2	0.1103623		

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-0.5489460 + 0.4837057}{1.6 - 1.0} = -0.1087339$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-0.5786120 + 0.5489460}{1.9 - 1.3} = -0.0494433$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{-0.5715210 + 0.5786120}{2.2 - 1.6} = 0.0118183$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (III)

Cálculo de $F_{j,3}$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
0	1.0	0.7651977			
			-0.4837057		
1	1.3	0.6200860		-0.1087339	
			-0.5489460		0.0658784
2	1.6	0.4554022		-0.0494433	
			-0.5786120		0.0680685
3	1.9	0.2818186		0.0118183	
			-0.5715210		
4	2.2	0.1103623			

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-0.0494433 + 0.1087339}{1.9 - 1.0} = 0.0658784$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{0.0118183 + 0.0494433}{2.2 - 1.3} = 0.0680685$$

Ejemplo largo del uso del polinomio de Lagrange (III)

Cálculo de $F_{j,4}$

i	x_i	$\mathbf{F}_{0,0}$	$\mathbf{F}_{1,1}$	$\mathbf{F}_{2,2}$	$\mathbf{F}_{3,3}$	$\mathbf{F}_{4,4}$
0	1.0	**0.7651977**				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		**-0.1087339**		
			-0.5489460		**0.0658784**	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		**0.0018251**
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0.0680685 - 0.0658784}{2.2 - 1.0} = 0.0018251$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$\begin{aligned} P_{0,1,2,3,4}(x) = \quad & 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) \\ & +0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) \\ & +0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9) \end{aligned}$$

Matriz de Vandermonde

La matriz de Vandermonde correspondiente a los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ viene dado por la siguiente fórmula:

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Los elementos de cada renglón forman una progresión geométrica.

Principales consecuencias

1. $\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$
2. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ diferentes por pares $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Entonces $\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$
3. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ diferentes por pares.

Fénomeno de Runge

Si se esta aproximando curvas por polinomios que ajusten ciertos datos se puede pensar que cuanto más se aumente el grado de los polinomios involucrados, mejor se aproximarán a la curva original. Consideremos el siguiente ejemplo

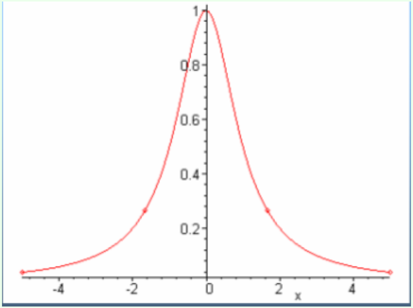


Figure: Función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Si tomamos los cuatro puntos que están marcados en el dibujo y las evaluaciones dados por las coordenadas de esos puntos (-5, -5/3, 5/3, 5), podemos pensar que si aproximamos esos datos por polinomios, obtendremos algo similar a la gráfica de la función.

Fénomeno de Runge

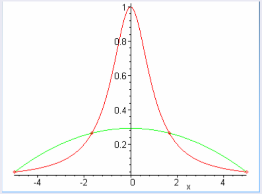
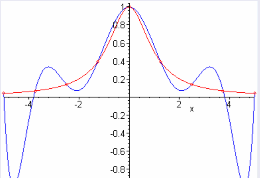


Figure: Polinomio con 4 puntos

1. Gráfica roja es la función original
2. Gráfica azul corresponde al polinomio interpolador utilizando 4 puntos.

Fénomeno de Runge



1. Gráfica roja es la función original
2. Gráfica azul corresponde al

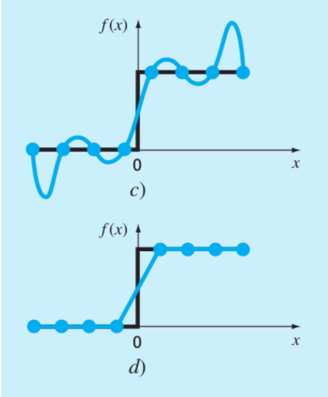
Splines

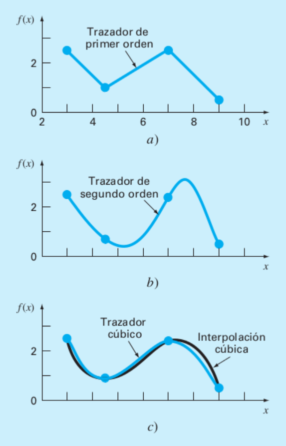
Una función spline interpolante de grado k con nodos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ es una función $S(x)$ formada por varios polinomios, cada uno de ellos definido sobre un subintervalo y que se unen entre sí bajo ciertas condiciones de continuidad. Las condiciones que debe cumplir $S(x)$ son las siguientes:

1. En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $S(x)$ es un polinomio de grado $gr[S(x)] \leq k$.
2. $S(x)$ admite derivada continua de orden $k-1$ en $[x_1, x_{n+1}]$.

En general pueden crearse funciones spline de grado k, pero la interpolación más frecuente es a través de funciones splines de grado 3, es decir, de splines cúbicos.

Splines


f(x)
0
x
c)
f(x)
0
x
d)


f(x)
Trazador de
primer orden
2
0
2
4
6
8
10
x
a)
f(x)
Trazador de
segundo orden
2
0
x
b)
f(x)
Trazador
cúbico
Interpolación
cúbica
2
0
x
c)

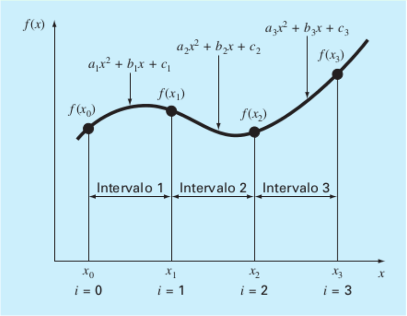


Figure: splines cuadráticos

Formulación

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.
2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.
4. Suponga que en el primer punto la segunda derivada es cero.

Fómulación

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores($i = 2, \ldots, n$).

$$a_{i-1}x_{i-1}^2+b_{i-1}x_{i-1}+c_{i-1} = f(x_{i-1}) \qquad a_ix_{i-1}^2+b_ix_{i-1}+c_i = f(x_{i-1})$$

2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = f(x_0) \qquad a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = f(x_n)$$

3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_ix_{i-1} + b_i, \qquad i = 2, \ldots, n$$

4. Suponga que en el primer punto la segunda derivada es cero $a_1 = 0$.

Ejemplo: Consideremos los siguientes datos

x	3.0	4.5	7.0	9.0
$f(x)$	2.5	1.0	2.5	0.5

Se tienen 4 datos y $n = 3$ intervalos. Por lo tanto, $3(3) = 9$ incógnitas

Desarrollo

Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 &= 1.0 \\ 20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1.0 \\ 49a_2 + 7b_2 + c_2 &= 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 &= 2.5 \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones de Continuidad}$$

$$\left.\begin{aligned} 9a_1 + 3b_1 + c_1 &= 2.5 \\ 81a_3 + 9b_3 + c_3 &= 0.5 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Primera y última funciones} \\ \text{evaluadas en los extremos}\end{array}$$

$$9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2 \quad \Big\} \text{Continuidad de la derivada}$$

Obteniendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuya solución entrega

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & , \text{ si } 3 \leq x \leq 4.5 \\ 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & , \text{ si } 4.5 \leq x \leq 7.0 \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & , \text{ si } 7.0 \leq x \leq 9.0 \end{cases}$$

Construcción de splines cúbicos

El objetivo en los splines cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Así, para $n+1$ datos ($i = 0, 1, 2, ..., n$), existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar.

1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n-2$ condiciones).
2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2

Ejercicios

1. Halle el polinomio de interpolación $p(x)$ de menor grado, que pase por los siguientes puntos del plano:

$$(x_i, y_i) = \{(0, 4/9),\ (1/3, 8/9),\ (1/2, 5/9),\ (1, 6/9)\},$$

utilizando los polinomios $L_{n,k}(x)$ de Lagrange, las diferencias divididas $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ de Newton y resolviendo el sistema generado por $p(x_i) = y_i$ donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

2. Para la función $f(x) = \ln(1 + x)$, encuentre explicitamente el polinomio de interpolación de Newton, para los valores de siguientes de x.

$$\left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

Calcule $\ln(1.5)$ y estime el error cometido.