

EJERCICIOS DE PRUEBAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Herme Soto Segura

2004

Capítulo 1

Ejercicios

1.1 Ejercicios de pruebas

1. Resuelva el sistema de Ecuaciones diferenciales lineales:

$$x' - 3x - 3y = t$$

$$y' + x + y = 1$$

2. Resuelva el siguiente problema de valor inicial, usando transformada de Laplace

$$y'' - 3y' = t + t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$(\sec x + y \tan x) dx + dy = 0$$

4. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 + 5\cos(5x) + e^{2x}(1 + x)$$

5. La vida media del cobalto radioactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de cobalto radioactivo ascienda en cierta región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable?

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'' + \alpha y' = \beta$$

$$y'' - \alpha x' = 0$$

7. Resuelva el siguiente problema de valor inicial, usando transformada de Laplace

$$y''(t) + ky(t) = f(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Con a y b constantes y $f(t)$ es una función que tiene transformada $H(s)$. Considere los siguientes casos

(a) $k = w^2$

(b) $k = -w^2, w > 0.$

8. Resuelva la ecuación diferencial

$$(\sec x + y \tan x) dx + dy = 0$$

9. Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x} + 2e^x + 3e^{-x}$$

10. Resuelva la ecuación:

$$y''' - y'' - y' - y = -2t - t^2$$

11. Resuelva el sistema de Ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

12. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'' + y' - x + y &= -1 \\ x' + y' - x &= t^2 \end{aligned}$$

13. Resuelva el siguiente problema de valor inicial, usando transformada de Laplace

$$ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

14. Determine solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que una de ellas es de Ricatti y tiene solución particular $y_p = \frac{2}{x}$.

(a) $(x^2 + y^2 + 1)dx - (xy + y)dy = 0$

(b) $y' = \frac{-4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

(c) $(2x - 2y)dx + (y + 1)dy = 0$

(d) $ydx + (x^2y - x)dy = 0$

(e) $(1 + x)^2dy + (y^2 - (x + 1)y)dx = 0$

(f) $y'' - 3y' = x + x^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

(g) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

15. Suponga que se usa pentobarbital sódico para anesteciar a un perro: el perro queda anesteciado cuando su corriente sanguínea contiene por lo menos 45 miligramos(mg) de pentobarbital sódico por kilogramo del peso del perro. Suponga también que este medicamento es eliminado con una rapidez proporcional a la cantidad presente en ese instante, con una vida media de 5 horas. ¿Qué dosis única debe ser administrada para tener anestesiado durante una hora a un perro de 50 kg?
16. Determine solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que una de ellas es de Ricatti y tiene solución particular $y_p = \frac{2}{x}$.
- (a) $y = x(1 + y') + y^2$
 - (b) $y' = \frac{-4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$
 - (c) $(2x - 2y)dx + (y + 1)dy = 0$
 - (d) $ydx + (x^2y - x)dy = 0$
17. Un Estanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. Al estanque entra salmuera conteniendo una libra de sal por galón, con una velocidad de 2gal/min. y la solución sale del estanque a 3gal/min.
- (a) Determine la cantidad de sal en el estanque en t minutos.
 - (b) En cuánto tiempo queda vacío el estanque?
 - (c)Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el estanque?
- (a) Resuelva las ecuaciones:

- i. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
- ii. $y'' - 2y' + y = x - 2$
- iii. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

(b) Resuelva el sistema de Ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

18. Determine la solución general de la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0.$$

Sabiendo que $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x)$ es una solución particular.

19. Determine solución general de la ecuación

$$y'' - y' - 2y = xe^{-x} + e^{3x}\cos(3x) - 2$$

20. Determine solución general del sistema

21. Resuelva la ecuación diferencial sabiendo que tiene un factor de integración de la forma $\mu = e^{ax+by}$.

$$(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + (2x^2 - 4xy - 2x)dy = 0$$

22. Resuelva el sistema de Ecuaciones diferenciales lineales:

$$x' = y + 1 - \frac{t\cos(t)}{\sin^2 t}$$

$$y' = -x + \frac{t}{\sin(t)}$$

23. Una persona, que porta una noticia, llega a una galería comercial en la que hay 1000 personas (aparte de ella). Si la rapidez con que se propaga la noticia es proporcional al producto del número de personas que ya se enteraron por el número de personas que aun no conocen la noticia y se observa que en 4 horas hay 50 personas que ya se enteraron de la noticia, determine el número de personas que se enterarán de la noticia en 6 horas.
24. Determine solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.
- (a) $(2x - 2y)dx + (y + 1)dy = 0$
 - (b) $ydx + (x^2y - x)dy = 0$
 - (c) $(1 + x)^2dy + (y^2 - (x + 1)y)dx = 0$
 - (d) $y'' - 3y' = x + x^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
 - (e) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$
25. La vida media del cobalto radioactivo es de 5,27 años. Suponga que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de cobalto radiactivo ascienda en cierta región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable?.