E.T.S. Minas: Métodos Matemáticos Ejercicios resueltos Tema 8 EDOs de orden superior

Francisco Palacios

Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa Universidad Politécnica de Cataluña Curso 2006/07

Noviembre 2006, Versión 1.1

Ejercicio 1 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

1.
$$4y'' + y' = 0$$
.

2.
$$y'' - y' - 6y = 0$$
.

3.
$$y'' + 8y' + 16y = 0$$
.

4.
$$12y'' - 5y' - 2y = 0$$
.

5.
$$y'' + 9y = 0$$
.

6.
$$y'' - 4y' + 5y = 0$$
.

7.
$$3y'' + 2y' + y = 0$$
.

(1.1)

$$4y'' + y' = 0.$$

Ecuación característica

$$4m^2 + m = 0,$$

$$m(4m+1) = 0,$$

raíces

$$m = 0, \quad m = -1/4,$$

soluciones

$$y_1 = e^{0x} = 1,$$

 $y_2 = e^{-\frac{1}{4}x}.$

Solución general

$$y = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{4}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1.2)

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^2 - m - 6 = 0$$
,

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3, \\ -\frac{4}{2} = -2. \end{cases}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{3x},$$

$$y_2 = e^{-2x}.$$

Solución general

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y'' + 8y' + 16y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^2 + 8m + 16 = 0,$$

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$
 (doble).

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-4x},$$

$$y_2 = xe^{-4x}.$$

Solución general

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$12y'' - 5y' - 2y = 0.$$

Ecuación característica

$$12m^2 - 5m - 2 = 0,$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 12}}{24} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{24}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{24} = \frac{5 \pm 11}{24} = \begin{cases} \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, \\ -\frac{6}{24} = -1/4. \end{cases}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{\frac{2}{3}x},$$

 $y_2 = e^{-\frac{1}{4}x}.$

Solución general

$$y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{1}{4}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y'' + 9y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^2 + 9 = 0$$
.

$$m^2 = -9,$$

$$m = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i.$$

Tenemos dos raíces complejas conjugadas (simples)

$$z = \alpha \pm \beta i,$$

con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$. Las soluciones son del tipo

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Solución general

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x),$$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1.6)

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^2 - 4m + 5 = 0.$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{2x} \cos x,$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x.$$

Solución general

$$y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1.7)

$$3y'' + 2y' + y = 0.$$

Ecuación característica

$$3m^2 + 2m + 1 = 0,$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right),$$

$$y_2 = e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right).$$

Solución general

$$y = e^{-\frac{x}{3}} \left[c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{3} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{3} x \right) \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad \Box$$

Ejercicio 2 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

1.
$$y''' - 4y'' - 5y' = 0$$
.

2.
$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$$

3.
$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0.$$

4.
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$
.

5.
$$y^{(4)} + y''' + y'' = 0$$
.

6.
$$16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^4y}{dx^4} + 9y = 0.$$

7.
$$\frac{d^5u}{dr^5} + 5\frac{d^4u}{dr^4} - 2\frac{d^3u}{dr^3} - 10\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + 5u = 0.$$

(2.1)

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

Ecuación característica

$$m^{3} - 4m^{2} - 5m = 0,$$

$$m(m^{2} - 4m - 5) = 0,$$

$$m = 0, \quad m^{2} - 4m - 5 = 0,$$

$$m^{2} - 4m - 5 = 0,$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5, \\ -\frac{2}{2} = -1. \end{cases}$$

Raíces

$$m = 0, \quad m = 5, \quad m = -1.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{0x} = 1,$$

 $y_2 = e^{5x},$
 $y_3 = e^{-x}.$

Solución general

$$y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(2.2)
$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^3 - 5m^2 + 3m + 9 = 0.$$

Intentamos con los divisores del término independiente

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9.$$

Para m = -1, obtenemos

$$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + 9 = -1 - 5 - 3 + 9 = 0.$$

Descomponemos usando la regla de Ruffini

$$m^3 - 5m^2 + 3m + 9 = (m+1)(m^2 - 6m + 9)$$
.

Resolvemos

$$m^2 - 6m + 9 = 0,$$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{(doble)} .$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-x},$$

 $y_2 = e^{3x},$
 $y_3 = xe^{3x}$

Solución general

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(2.3)

$$\frac{d^3u}{dt^2} + \frac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0,$$

$$u''' + u'' - 2u = 0.$$

Ecuación característica

$$m^3 + m^2 - 2 = 0.$$

Observamos que m=1 es solución. Descomponemos usando la regla de Ruffini

$$m^3 + m^2 - 2 = (m-1)(m^2 + 2m + 2)$$
.

Resolvemos

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$
,

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Raíces de la ecuación característica

$$m = 1, \quad m = -1 \pm i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^t,$$

$$y_2 = e^{-t} \cos t,$$

$$y_3 = e^{-t} \sin t.$$

Solución general

$$y = c_1 e^t + e^{-t} (c_2 \cos t + c_3 \sin t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0,$$

 $(m+1)^3 = 0.$

Raíces

$$m = -1$$
, (triple).

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-x},$$

 $y_2 = xe^{-x},$
 $y_3 = x^2e^{-x}.$

Solución general

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$y^{(4)} + y''' + y'' = 0.$$

Ecuación característica

$$m^4 + m^3 + m^2 = 0,$$

 $m^2 (m^2 + m + 1) = 0.$

Resolvemos

$$m^2 + m + 1 = 0$$
,

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Raíces de la ecuación característica

$$m=0$$
 (doble),
$$m=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
 (complej
as conjugadas, simples).

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^0 = 1,$$

$$y_2 = xe^0 = x,$$

$$y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

$$y_4 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Solución general

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_3 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + c_4 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

$$(2.6)$$

$$16 \frac{d^4 y}{dx^4} + 24 \frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0,$$

$$16 y^{(4)} + 24 y^{(2)} + 9y = 0.$$

Ecuación característica

$$16m^4 + 24m^2 + 9 = 0.$$

Se trata de una ecuación bicuadrada, realizamos el cambio $t=m^2$

$$16t^2 + 24t + 9 = 0,$$

$$t = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{32} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$= \frac{-24}{32} = -\frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 4} = -\frac{3}{4} \quad \text{(doble)}.$$

$$m^2 = -\frac{3}{4},$$

$$m = \pm \sqrt{-\frac{3}{4}},$$

$$m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{(dobles)}.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

$$y_2 = x \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

$$y_3 = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

$$y_4 = x \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Solución general

$$y = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 x \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), c_j \in \mathbb{R}.$$
(2.7)
$$\frac{d^5 u}{dr^5} + \frac{5d^4 u}{dr^4} - 2\frac{d^3 u}{dr^3} - 10\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + 5u = 0.$$

Ecuación característica

$$m^5 + 5m^4 - 2m^3 - 10m^2 + m + 5 = 0.$$

Descomponemos usando la regla de Ruffini

Raíces

$$m = 1$$
 (doble), $m = -1$ (doble), $m = -5$.

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^r,$$

 $y_2 = re^r,$
 $y_3 = e^{-r},$
 $y_4 = re^{-r},$
 $y_5 = e^{-5r}.$

Solución general

$$y = c_1 e^r + c_2 r e^r + c_3 e^{-r} + c_4 r e^{-r} + c_5 e^{-5r}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 3 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Se trata de una EDO lineal homogénea con coeficientes constantes. Ecuación característica

$$m^2 + 16 = 0$$
,

$$m^2 = -16,$$

$$m = \sqrt{-16} = \pm 4i.$$

Solución general

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

Imponemos las condiciones iniciales

$$y' = -4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x,$$

de

$$y(0) = 2,$$

obtenemos

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 2,$$

$$c_1 = 2.$$

De la condición

$$y'(0) = -2,$$

obtenemos

$$-4c_1 \sin 0 + 4c_2 \cos 0 = -2,$$

 $4c_2 = -2,$
 $c_2 = -1/2.$

Solución del problema de valor inicial

$$y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x. \quad \Box$$

Ejercicio 4 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

EDO lineal homogénea con coeficientes constantes. Ecuación característica

$$m^2 - 4m - 5 = 0,$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5, \\ -\frac{2}{2} = -1. \end{cases}$$

Solución general

$$y = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}.$$

Imponemos las condiciones iniciales

$$y' = 5c_1e^{5t} - c_2e^{-t},$$

de

$$y(1) = 0,$$

obtenemos

$$c_1 e^5 + c_2 e^{-1} = 0.$$

De

$$y'(1) = 2,$$

resulta

$$5c_1e^5 - c_2e^{-1} = 2.$$

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 e^5 + c_2 e^{-1} = 0, \\ 5c_1 e^5 - c_2 e^{-1} = 2. \end{cases}$$

Sumamos las ecuaciones y resulta

$$6c_1e^5 = 2,$$

$$c_1 = \frac{2}{6e^5} = \frac{1}{3e^5}.$$

Sustituimos en

$$c_1 e^5 + c_2 e^{-1} = 0$$

y obtenemos

$$\frac{1}{3e^5}e^5 + c_2e^{-1} = 0,$$

$$c_2 e^{-1} = -\frac{1}{3},$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}e.$$

Solución del problema de valor inicial

$$y = \frac{1}{3e^5}e^{5t} - \frac{1}{3}e \cdot e^{-t}.$$

Podemos reescribir la solución en la forma

$$y = \frac{1}{3}e^{5t-5} - \frac{1}{3}e^{-t+1},$$

$$y = \frac{1}{3}e^{5(t-1)} - \frac{1}{3}e^{-(t-1)}. \quad \Box$$

Ejercicio 5 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' + 2y = 0, \\ y(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

EDO lineal homogénea con coeficientes constantes.

Ecuación característica

$$m^{2} + m + 2 = 0,$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Solución general

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left[c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{7}}{2} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2} x \right) \right].$$

De

$$y(0) = 0,$$

obtenemos

$$e^{0} \left(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \right) = 0$$
$$c_1 = 0.$$

Como $c_1=0$, sabemos que la solución es de la forma

$$y = e^{-\frac{x}{2}}c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

Calculamos

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-x/2}c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + e^{-x/2}c_2\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),$$

de la condición

$$y'(0) = 0,$$

obtenemos

$$-\frac{1}{2}e^{0}c_{2}\sin 0 + e^{0}c_{2}\frac{\sqrt{7}}{2}\cos 0 = 0,$$

$$c_{2} = 0.$$

La solución es

$$y(x) = 0.$$

Este resultado puede deducirse sin realizar ningún cálculo, ya que y=0 es solución (y es única). \square

Ejercicio 6 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' + 12y'' + 36y' = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = -7. \end{cases}$$

EDO lineal homogénea con coeficientes constantes.

Ecuación característica

$$m^{3} + 12m^{2} + 36m = 0,$$

 $m(m^{2} + 12m + 36) = 0,$
 $m^{2} + 12m + 36 = (m+6)^{2}.$

Raíces de la ecuación característica

$$m = 0$$
, $m = -6$ (doble).

Solución general

$$y = c_1 + c_2 e^{-6x} + c_3 x e^{-6x}.$$

Imponemos las condiciones iniciales. De

$$y(0) = 0,$$

obtenemos

$$c_1 + c_2 e^0 + c_3 \cdot 0 \cdot e^0 = 0,$$

 $c_1 + c_2 = 0.$

Calculamos

$$y' = -6c_2e^{-6x} + c_3e^{-6x} - 6c_3xe^{-6x}.$$

De la condición

$$y'(0) = 1,$$

resulta

$$-6c_2 + c_3 = 1.$$

Calculamos

$$y'' = 36c_2e^{-6x} - 6c_3e^{-6x} - 6c_3e^{-6x} + 36c_3xe^{-6x}$$
$$= 36c_2e^{-6x} - 12c_3e^{-6x} + 36c_3xe^{-6x}.$$

De la condición

$$y''(0) = -7,$$

resulta

$$36c_2 - 12c_3 = -7.$$

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ -6c_2 + c_3 = 1, \\ 36c_2 - 12c_3 = -7. \end{cases}$$

Multiplicamos la 2^a ecuación por 6 y la sumamos a la 3^a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ -6c_2 + c_3 = 1, \\ -6c_3 = -1, \end{cases}$$

resulta

$$c_3 = \frac{1}{6}.$$

Sustituimos en la 2^a

$$-6c_2 + \frac{1}{6} = 1,$$

$$-6c_2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$c_2 = \frac{-5}{36}.$$

Sustituimos en la 1^a

$$c_1 = -c_2 = \frac{5}{36}.$$

Solución del problema de valor inicial

$$y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-6x} + \frac{1}{6}xe^{-6x}. \quad \Box$$

Ejercicio 7 Resuelve el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

EDO lineal homogénea con coeficientes constantes.

Ecuación característica

$$m^2 - 10m + 25 = 0,$$

 $m = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = 5$ (doble).

Solución general

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

Imponemos las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 e^5 + c_2 e^5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_1 + c_2 = 0, \end{cases}$$

Solución

$$y = e^{5x} - xe^{5x}.$$
$$= e^{5x} (1 - x). \square$$

Ejercicio 8 Resuelve el problema de condiciones de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 2. \end{cases}$$

Ecuación característica

$$m^2 + 1 = 0$$
,

raíces

$$m^2 = -1,$$

$$m = \pm \sqrt{-1} = \pm i.$$

Solución general

$$y = e^{0x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Calculamos y'

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

e imponemos las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y'(0) = 0, \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 2. \end{cases}$$

Obtenemos

$$\begin{cases}
-c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0, \\
-c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
c_2 = 0, \\
-c_1 = 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
c_1 = -2, \\
c_2 = 0.
\end{cases}$$

La solución es

$$y = -2\cos x$$
. \square

Ejercicio 9 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1.
$$y'' + y = \sec x$$
.

2.
$$y'' + y = \cos^2 x$$
.

3.
$$y'' - y = \cosh x$$
.

4.
$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$
.

5.
$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$$
.

6.
$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$$
.

7.
$$3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$$
.

$$y'' + y = \sec x.$$

Homogénea asociada

$$y'' + y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 + 1 = 0,$$

$$m^2 = -1,$$

$$m = \pm \sqrt{-1} = \pm i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = \cos x$$

$$y_2 = \sin x$$
.

Solución de la EDO homogénea

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Solución particular

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = \sec x. \end{cases}$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W}.$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Determinamos $u_1(x)$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$u_1 = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|.$$

Determinamos $u_2(x)$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = 1,$$

$$u_2 = \int dx = x.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(9.2)

$$y'' + y = \cos^2 x.$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes. Homogénea asociada

$$y'' + y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 + 1 = 0$$
,

$$m^2 = -1,$$

$$m = \pm \sqrt{-1} = \pm i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = \cos x,$$

$$y_2 = \sin x$$
.

Solución general de la EDO homogénea asociada

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \cos^2 x. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cos^2 x,$$

$$W_2 = \left| \begin{array}{cc} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos^2 x \end{array} \right| = \cos^3 x,$$

determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\sin x \cos^2 x}{1} = -\sin x \cos^2 x,$$

$$u_1 = \int -\sin x \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x (-\sin x) \, dx$$
$$= \frac{1}{3} \cos^3 x.$$

Determinamos u_2

$$u_2' = \cos^3 x,$$

$$u_2 = \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \, \cos x \, dx$$
$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$
$$= \int \cos x \, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx$$
$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \left(\frac{1}{3}\cos^3 x\right)\cos x + \left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\sin x$$
$$= \frac{1}{3}\cos^4 x + \sin^2 x - \frac{1}{3}\sin^4 x.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3} \cos^4 x + \sin^2 x - \frac{1}{3} \sin^4 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Podemos simplificar

$$\frac{1}{3}\cos^4 x + \sin^2 x - \frac{1}{3}\sin^4 x = \frac{1}{3}\left[\cos^4 x - \sin^4 x\right] + \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{3} \left[\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{=1} \right] + \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{3} \cos 2x + \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x.$$

Finalmente

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$(9.3)$$

$$y'' - y = \cosh x.$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes. Homogénea asociada

$$y'' - y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 - 1 = 0,$$

raíces

$$m=\pm 1$$
,

sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^x,$$

$$y_2 = e^{-x}$$

Solución de la EDO homogénea

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

con

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{cases}$$
$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W}.$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x}$$
$$= -1 - 1 = -2$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \cosh x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} \cosh x$$
$$= -e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = -\frac{1 + e^{-2x}}{2}.$$

Determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\left(-\frac{1+e^{2x}}{2}\right)}{-2} = \frac{1+e^{-2x}}{4},$$

$$u_1 = \frac{1}{4} \int \left(1+e^{-2x}\right) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}e^{-2x}.$$

Calculamos

$$W_{2} = \begin{vmatrix} y_{1} & 0 \\ y'_{1} & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \cosh x \end{vmatrix}$$
$$= e^{x} \cosh x = e^{x} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2},$$

determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}{-2} = -\frac{1}{4}\left(e^{2x}+1\right),$$

$$u_2 = \int \left(-\frac{1}{4}\right) \left(e^{2x} + 1\right) dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}e^{2x} + x\right)$$
$$= -\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}e^{-2x}\right)e^x + \left(-\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x}{4}\right)e^{-x}$$
$$= \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{8}e^{-x} - \frac{1}{8}e^x - \frac{x}{4}e^{-x}.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x \left(e^x - e^{-x} \right) - \frac{1}{8} \left(e^x + e^{-x} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como

$$sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

la solución puede reescribirse en la forma

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x \sinh x - \frac{1}{4} \cosh x.$$

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes. Homogénea asociada

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$
,

raíces

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + 1}{2} = -1, \\ \frac{-3 - 1}{2} = -2. \end{cases}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-x},$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

Solución general de la EDO homogénea

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = \frac{1}{1 + e^x}. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-x}(-2)e^{-2x} + e^{-x}e^{-2x} = -2e^{3x} + e^{-3x}$$
$$= -e^{-3x}.$$

También puede calcularse como sigue

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-x}e^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = e^{-3x}(-2+1)$$
$$= -e^{-3x}.$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{-e^{-2x}}{1+e^x},$$

determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\left(\frac{-e^{-2x}}{1+e^x}\right)}{-2} = \frac{e^{-2x}}{\left(1+e^x\right)e^{-3x}} = \frac{e^x}{1+e^x},$$
$$u_1 = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln\left(1+e^x\right).$$

Calculamos

$$W_{2} = \begin{vmatrix} y_{1} & 0 \\ y'_{1} & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^{x}} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{e^{-x}}{e^{x}+1},$$

determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\left(\frac{e^{-x}}{e^x + 1}\right)}{-e^{-3x}} = \frac{-1}{e^{-2x}(e^x + 1)}$$
$$= -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$
$$u_2 = -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx.$$

Realizamos el cambio de variable

$$\begin{cases} e^x = t \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{cases} \Rightarrow -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\int \frac{t^2}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} dt$$
$$= -\int \frac{t dt}{t + 1} = -\int \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt$$
$$= -\int \left(1 - \frac{1}{t + 1}\right) dt = -t + \ln(t + 1)$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = e^{-x} \ln (1 + e^x) + e^{-2x} (-e^x + \ln (e^x + 1))$$

= $e^{-x} \ln (1 + e^x) - e^{-x} + e^{-2x} \ln (e^x + 1)$
= $-e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$.

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Podemos reescribir la solución en la forma

$$y = e^{-x} (c_1 - 1) + c_2 e^{-2x} + (e^x + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$$

= $c'_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$.
$$c'_1 = (c_1 - 1).$$

(9.5)
$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x).$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes.

EDO homogénea asociada

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

ecuación característica

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$
,

raíces

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + 1}{2} = -1, \\ \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2. \end{cases}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-x},$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

Solución general de la EDO homogénea

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = \sin(e^x). \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$
$$= -2e^{3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}.$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \sin e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-2x} \sin(e^x),$$

determinamos u_1

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{-2x}\sin(e^x)}{-e^{-3x}} = \frac{\sin(e^x)}{e^{-x}}$$

= $\sin(e^x) \cdot e^x$,

$$u_1 = \int \sin\left(e^x\right) \, e^x \, dx.$$

Con el cambio

$$\begin{cases} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \end{cases}$$

resulta

$$u_1 = \int \sin t \, dt = -\cos t,$$

$$u_1 = -\cos(e^x).$$

Calculamos

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \sin(e^x) \end{vmatrix} = e^{-x}\sin(e^x),$$

determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{-x}\sin(e^x)}{-e^{-3x}} = \frac{-\sin(e^x)}{e^{-2x}},$$

$$u_2' = -e^{2x}\sin(e^x),$$

$$u_2 = -\int e^{2x}\sin(e^x) dx.$$

Con el cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} t=e^x,\\ dt=e^x\,dx, \end{array} \right.$$

resulta

$$u_2 = -\int t \sin t \, dt = -\left(-t \cos t + \int \cos t \, dt\right),$$

$$u_2 = -\left(-t \cos t + \sin t\right),$$

$$= t \cos t - \sin t.$$

deshacemos el cambio

$$u_2 = e^x \cos(e^x) - \sin(e^x).$$

La solución particular de la EDO completa es

$$y_p = -(\cos e^x) e^{-x} + (e^x \cos (e^x) - \sin (e^x)) e^{-2x}$$

= $-e^{-x} \cos (e^x) + e^{-x} \cos (e^x) - e^{-2x} \sin (e^x)$
= $-e^{-2x} \sin (e^x)$.

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x} \sin(e^x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t.$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes. La EDO homogénea asociada es

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$
.

raíces

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$$
 (doble).

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{-t},$$

$$y_2 = t e^{-t}$$

Solución general de la EDO homogénea asociada

$$y_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-2t}.$$
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(t) = e^{-t} \ln t. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-t}(e^{-t} - te^{-t}) + te^{-2t}$$
$$= e^{-2t} - te^{-2t} + te^{-2t} = e^{-2t}.$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(t) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & te^{-t} \\ e^{-t} \ln t & (1-t)e^{-t} \end{vmatrix}$$
$$= -(e^{-t} \ln t) (te^{-t}) = -e^{-2t} t \ln t.$$

Determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{-2t}t\ln t}{e^{-2t}} = -t\ln t,$$

$$u_1 = \int (-t\ln t) dt = -\left(\frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{t} dt\right)$$

$$= -\left(\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\int t dt\right) = -\frac{t^2}{2}\ln t + \frac{1}{4}t^2.$$

Calculamos

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & e^{-t} \ln t \end{vmatrix}$$
$$= e^{-2t} \ln t.$$

Determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{-2t} \ln t}{e^{-2t}} = \ln t,$$

$$u_2 = \int \ln t \, dt = t \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= t \ln t - \int dt$$

$$= t \ln t - t.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = e^{-t} \left(-\frac{t^2}{2} \ln t + \frac{1}{4} t^2 \right) + t e^{-t} \left(t \ln t - t \right)$$

$$= e^{-t} \left(-\frac{t^2}{2} \ln t + \frac{1}{4} t^2 + t^2 \ln t - t^2 \right)$$

$$= e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^2 \right).$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^2 \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x.$$

EDO lineal completa con coeficientes constantes, la forma estándar es

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{3}e^x \sec x.$$

Ecuación homogénea asociada

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 - 2m + 2 = 0,$$

raíces

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2},$$

 $m = 1 \pm i.$

Tenemos un par de raíces complejas conjugadas, el sistema fundamental de soluciones es

$$y_1 = e^x \cos x,$$

$$y_2 = e^x \sin x.$$

Solución general de la EDO homogénea

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = \frac{1}{3} e^x \sec x. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \cos x - e^x \sin x & e^x \sin x + e^x \cos x \end{vmatrix}$$
$$= e^{2x} (\cos x \sin x + \cos^2 x) - e^{2x} (\cos x \sin x - \sin^2 x)$$
$$= e^{2x} (\cos x \sin x + \cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x)$$
$$= e^{2x} (\sin^2 x + \cos^2 x) = e^{2x}.$$

Calculamos

$$W_{1} = \begin{vmatrix} 0 & y_{2} \\ f(x) & y'_{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} \sin x \\ \frac{1}{3}e^{x} \sec x & e^{x} (\sin x + \cos x) \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{2x} \sin x \cdot \sec x = -\frac{1}{3}e^{2x} \sin x \frac{1}{\cos x}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{2x} \frac{\sin x}{\cos x},$$

determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\frac{1}{3}e^{2x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{e^{2x}} = -\frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{3}\ln|\cos x|.$$

Calculamos

$$W_{2} = \begin{vmatrix} y_{1} & 0 \\ y'_{1} & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x} \cos x & 0 \\ e^{x} (\cos x - \sin x) & \frac{1}{3} e^{x} \sec x \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} e^{2x} \cos x \cdot \sec x = \frac{1}{3} e^{2x} \cos x \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{3} e^{2x}.$$

Determinamos u_2

$$\begin{array}{rcl} u_2' & = & \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{1}{3}e^{2x}}{e^{2x}} = 1/3, \\ u_2 & = & \frac{1}{3}\int dx = x/3. \end{array}$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \left(\frac{1}{3}\ln|\cos x|\right)e^x\cos x + \frac{x}{3}e^x\sin x.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{3} e^x \cos x \ln|\cos x| + \frac{1}{3} x e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 10 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} 4y'' - y = x e^{x/2}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Se trata de una EDO lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes, escribimos la ecuación en forma estándar

$$y'' - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}xe^{x/2}.$$

Homogénea asociada

$$y'' - \frac{1}{4}y = 0,$$

ecuación característica

$$m^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

raíces

$$m^2 = \frac{1}{4},$$
$$m = \pm \frac{1}{2}.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x},$$

 $y_2 = e^{-x/2}.$

Solución general de la EDO homogénea

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = \frac{1}{4} x e^{x/2}. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x/2} & e^{-x/2} \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & -\frac{1}{2}e^{-x/2} \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x/2} \\ \frac{1}{4}xe^{x/2} & -\frac{1}{2}e^{-x/2} \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{4}xe^{x/2}e^{-x/2} = -\frac{1}{4}x.$$

Determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\frac{1}{4}x}{(-1)} = \frac{1}{4}x,$$

 $u_1 = \int \frac{1}{4}x \, dx = \frac{1}{8}x^2.$

Calculamos

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x/2} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{x/2} & \frac{1}{4}xe^{x/2} \end{vmatrix}$$
$$= e^{x/2}\frac{1}{4}xe^{x/2} = \frac{1}{4}xe^x.$$

Determinamos u_2

$$\begin{array}{rcl} u_2' & = & \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{1}{4}xe^x}{-1} = -\frac{1}{4}xe^x, \\ u_2 & = & \int \left(-\frac{1}{4}xe^x\right)dx = -\frac{1}{4}\int xe^x \, dx = \frac{-1}{4}\left(x-1\right)e^x. \end{array}$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \left(\frac{1}{8}x^2\right)e^{x/2} + \frac{(1-x)}{4}e^x \cdot e^{-x/2}$$
$$= \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{x/2}.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{x/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponemos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

De la condición

$$y(0) = 1$$

resulta

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 1,$$

 $c_1 + c_2 = 3/4.$

Calculamos

$$y' = \frac{1}{2}c_1e^{x/2} - \frac{1}{2}c_2e^{-x/2} + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)e^{x/2} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}e^{x/2}$$

e imponemos la condición

$$y'(0) = 0,$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 0, \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{8} &= 0, \\ c_1 - c_2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3/4, \\ c_1 - c_2 = 1/4. \end{cases}$$

Sumando, resulta

$$2c_1 = 1,$$
 $c_1 = 1/2.$

Restando, la 2^a ecuación a la 1^a , obtenemos

$$2c_2 = 1/2,$$
 $c_2 = 1/4.$

La solución del problema de valor inicial es

$$y = \frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{4}e^{-x/2} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^{x/2}$$
$$= \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{4}e^{-x/2} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{x}{4}\right)e^{x/2}. \quad \Box$$

Ejercicio 11 Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

EDO lineal completa de segundo orden con coeficientes constantes. La homogénea asociada es

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

Ecuación característica

$$m^2 + 2m - 8 = 0,$$

raíces

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2 + 6}{2} = 2, \\ \frac{-2 - 6}{2} = -4. \end{cases}$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{2x},$$

$$y_2 = e^{-4x}.$$

Solución general de la EDO homogénea

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) = 2e^{-2x} - e^{-x}. \end{cases}$$

Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-4x} \\ 2e^{2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix}$$
$$= -4e^{-2x} - 2e^{-2x} = -6e^{-2x}.$$

Calculamos

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4x} \\ 2e^{-2x} - e^{-x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix}$$
$$= -e^{-4x} \left(2e^{-2x} - e^{-x} \right).$$

Determinamos u_1

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{-4x} \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right)}{-6e^{-2x}}$$
$$= \frac{1}{6}e^{-2x} \left(2e^{-2x} - e^{-x}\right)$$
$$= \frac{1}{6} \left(2e^{-4x} - e^{-3x}\right) = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{6}e^{-3x}.$$

$$u_1 = \int \left(\frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{6}e^{-3x}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{12}e^{-4x} + \frac{1}{18}e^{-3x}.$$

Calculamos

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2e^{-2x} - e^{-x} \end{vmatrix}$$
$$= e^{2x} (2e^{-2x} - e^{-x}) = 2 - e^x,$$

y determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2 - e^x}{-6e^{-2x}} = \left(-\frac{1}{6}\right) e^{2x} (2 - e^x)$$

$$= -\frac{1}{6} \left(2e^{2x} - e^{3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x},$$

$$u_2 = \int \left(-\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{3x}\right) dx,$$

$$u_2 = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{18}e^{3x}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = \left(-\frac{1}{12}e^{-4x} + \frac{1}{18}e^{-3x}\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{18}e^{3x}\right)e^{-4x}$$

$$= -\frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{-x}$$

$$= \frac{-3}{12}e^{-2x} + \frac{2}{18}e^{-x}$$

$$= \frac{-1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{9} e^{-x}.$$

Imponemos la condición

$$y(0) = 1$$

v resulta

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = 1,$$

$$c_1 + c_2 + \frac{-9 + 4}{36} = 1,$$

$$c_1 + c_2 - \frac{5}{36} = 1,$$

$$c_1 + c_2 = 1 + \frac{5}{36} = \frac{41}{36}$$

Calculamos

$$y' = 2c_1e^{2x} - 4c_2e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{9}e^{-x}$$

e imponemos la condición

$$y'(0) = 0,$$

resulta

$$2c_1 - 4c_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = 0,$$

$$2c_1 - 4c_2 + \frac{9 - 2}{18} = 0,$$

$$2c_1 - 4c_2 + \frac{7}{18} = 0,$$

$$2c_1 - 4c_2 = -7/18,$$

$$c_1 - 2c_2 = \frac{-7}{36}.$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{41}{36}, \\ c_1 - 2c_2 = \frac{-7}{36}. \end{cases}$$

Restamos la 2^a ecuación a la 1^a

$$3c_2 = \frac{41+7}{36} = \frac{48}{36} = \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{4}{3},$$
 $c_2 = \frac{4}{9}.$

Sustituimos en la 1^a ecuación

$$c_1 + \frac{4}{9} = \frac{41}{36},$$

$$c_1 = \frac{41}{36} - \frac{4}{9} = \frac{41 - 16}{36} = \frac{25}{36}.$$

Solución del problema de valor inicial

$$y = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$$
. \square

Ejercicio 12 Resuelve la EDO

$$y''' + y' = \tan x.$$

 EDO lineal completa de tercer orden con coeficientes constantes. La EDO homogénea asociada es

$$y''' + y' = 0.$$

Ecuación característica

$$m^3 + m = 0,$$

 $m(m^2 + 1) = 0,$

raíces

$$m = 0, \quad m = \pm i.$$

Sistema fundamental de soluciones

$$y_1 = 1,$$

$$y_2 = \cos x,$$

$$y_3 = \sin x.$$

Solución general de la EDO homogénea

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Solución particular de la EDO completa

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3,$$

que verifica

$$\begin{cases} y_1u'_1 + y_2u'_2 + y_3u'_3 = 0, \\ y'_1u'_1 + y'_2u'_2 + y'_3u'_3 = 0, \\ y''_1u'_1 + y''_2u'_2 + y''_3u'_3 = f(x) = \tan x. \end{cases}$$

Wronskiano

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix},$$

$$W = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Calculamos

$$W_{1} = \begin{vmatrix} 0 & y_{2} & y_{3} \\ 0 & y_{2}' & y_{3}' \\ f(x) & y_{2}'' & y_{3}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \tan x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$
$$= \tan x \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \tan x \left(\cos^{2} x + \sin^{2} x\right)$$
$$= \tan x.$$

Determinamos u_1

$$u'_1 = \tan x,$$

$$u_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|.$$

Calculamos

$$W_{2} = \begin{vmatrix} y_{1} & 0 & y_{3} \\ y'_{1} & 0 & y'_{3} \\ y''_{1} & f(x) & y''_{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \tan x & -\sin x \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{vmatrix} = -\tan x \cos x = -\sin x.$$

Determinamos u_2

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = -\sin x,$$

$$u_2 = \int (-\sin x) \ dx = \cos x.$$

Calculamos W_3

mamos
$$w_3$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \tan x \end{vmatrix} = -\sin x \tan x$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Determinamos u_3

$$u_3' = \frac{W_3}{W} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$u_3 = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} dx =$$

$$= \int (-\sin x) \tan x dx.$$

Integramos por partes

$$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x \, dx$$

$$dv = -\sin x \, dx \qquad v = \cos x$$

$$u_3 = \cos x \tan x - \int \cos x \sec^2 x \, dx$$

$$= \sin x - \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \sin x - \int \sec x \, dx$$

 $= \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$.

Recordamos el cálculo de la primitiva de sec x

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx,$$

como

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x,$$

resulta

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x|.$$

Finalmente, la solución particular de la EDO completa es

$$y_p = -\ln|\cos x| \cdot 1 + \cos x \cdot \cos x + (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \sin x$$
$$= -\ln|\cos x| + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \ln|\sec x + \tan x|$$
$$= 1 - \ln|\cos x| - \sin x \ln|\sec x \tan x|.$$

Solución general de la EDO completa

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + 1 - \ln|\cos x| - \sin x \ln|\sec x \tan x|$$
.

Finalmente, podemos incluir el 1 con la constante c_1

$$y = c_1' + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\cos x| - \sin x \ln|\sec x \tan x|. \quad \Box$$