Problemas resueltos (Integrales de Linea) - Mate 4

Problema 1.
Si $C = C_1 + C_2$, calcular la integral

$$\oint_C y^2\,dx + x\,dy,$$

donde la curva C se recorre en sentido positivo y:

1. C_1 es el segmento rectilíneo que une el punto $(0,2)$ con el punto $(-5,-3)$.
2. C_2 es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ desde el punto $(-5,-3)$ al punto $(0,2)$.

solución:

Parametrización de C_1: $(x,y) = (1-t)(0,2) + t(-5,-3)$, $\quad 0 \le t \le 1$. Luego queda

$$\begin{aligned} x &= -5t & dx &= -5dt \\ y &= 2-5t & dy &= -5dt \end{aligned}$$

Luego la integral sobre C_1 queda:

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 [(2-5t)^2(-5) - 5t(-5)]\,dt = -5\int_0^1 (4 - 25t + 25t^2)\,dt = \frac{5}{6}$$

Parametrización de C_2:

$$\begin{aligned} x &= 4-y^2 & dx &= -2ydy \\ y &= y & dy &= dy \end{aligned}$$

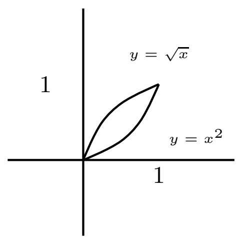
La integral sobre C_2 queda:

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^{2} [y^2(-2y) + (4-y^2)]\,dy = \int_{-3}^{2} [-2y^3 - y^2 + 4]\,dy = -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\,\Big|_{-3}^{2} = \frac{245}{6}$$

Por lo tanto: $\oint_C y^2\,dx + x\,dy = \int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy + \int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \dfrac{5}{6} + \dfrac{245}{6} = \dfrac{125}{6}$

Problema 2.
Calcular
$$\oint_C \left(\mathbf{e}^x - x^2 y\right)\, dx + 3x^2 y\, dy,$$
donde C es la curva determinada por $y = x^2, x = y^2$.
solución:

$$\oint_C \left(\mathbf{e}^x - x^2 y\right)\, dx + 3x^2 y\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(6xy + x^2\right)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 3xy^2 + x^2 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \left(3x^2 + x^{5/2} - 3x^5 - x^4\right)\, dx$$
$$= 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^{7/2}}{7/2} - 3\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{41}{70}$$



Problema 3.

Calcular $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$, donde

$$\vec{F}(x,y) = \left[2\cos 2x - \mathbf{e}^{-x}\left(\cos xy + y \operatorname{sen} xy\right)\right]\vec{\imath} - \left[x\mathbf{e}^{-x}\operatorname{sen} xy\right]\vec{\jmath}$$

solución:

Observar que $\overrightarrow{F}$ es un campo gradiente y $\varphi(x,y) = \mathbf{e}^{-x}\cos xy + \operatorname{sen} 2x + K$ es un potencial de $\overrightarrow{F}$.

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\alpha = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$= \varphi(1,1) - \varphi(0,0)$$

$$= \mathbf{e}^{-1}\cos(1) + \operatorname{sen}(2) - 1\cdot 1 - 0$$

$$= \mathbf{e}^{-1}\cos(1) + \operatorname{sen}(2) - 1$$

Problema 4.

Calcular

$$\int_{(1,0,1)}^{(0,1,1)} \operatorname{sen} y \cos x \, dx + \cos y \operatorname{sen} x \, dy + dz.$$

Solución

Observar que el campo $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} y \cos x, \cos y \operatorname{sen} x, 1)$. En efecto: es conservativo

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}_1}{\partial y} = \cos y \cos x \qquad \frac{\partial \overrightarrow{F}_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}_2}{\partial x} = \cos y \cos x \qquad \frac{\partial \overrightarrow{F}_2}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}_3}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \overrightarrow{F}_3}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \quad \text{se cumple} \quad \frac{\partial \overrightarrow{F}_1}{\partial y} = \frac{\partial \overrightarrow{F}_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial \overrightarrow{F}_1}{\partial z} = \frac{\partial \overrightarrow{F}_3}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \overrightarrow{F}_2}{\partial z} = \frac{\partial \overrightarrow{F}_3}{\partial y}$$

Además $\overrightarrow{F}$ está definido y es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, simplemente conexo. Por lo tanto la integral no depende del camino. Tomemos el camino

$$\begin{array}{rclcrclc} x & = & 1-t & \qquad & dx & = & -dt & \\ y & = & t & & dy & = & dt & \\ z & = & 1 & & dz & = & 0 & \qquad 0 \leq t \leq 1 \end{array}$$

Así, la integral queda

$$\int_{(1,0,1)}^{(0,1,1)} \operatorname{sen} y \cos x \, dx + \cos y \operatorname{sen} x \, dy + dz = \int_0^1 (-\operatorname{sen} t \cos(1-t) + \cos t \operatorname{sen}(1-t)) \, dt$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}(1 - t - t) \, dt$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}(1-2t) \, dt \quad = \quad \left. \frac{\cos(1-2t)}{2} \right|_0^1 \quad = \quad \frac{\cos(-1) - \cos 1}{2} = 0$$

Problema 5.

Calcular:

$$\oint\limits_{\Gamma} x^2 y\, dy - y^2 x\, dx$$

donde Γ es el hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, orientada en sentido positivo.

Observación: Las ecuaciones paramétricas del hipocicloide son:

$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\, t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución:

Sea $\mathcal{R}$ la región interior del hipocicloide, entonces usando el teorema de Green para el campo $\overrightarrow{F}(x,y) = -y^2 x\,\overrightarrow{i} + x^2 y\,\overrightarrow{j}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\Gamma} x^2 y\, dy - y^2 x\, dx &= \iint\limits_{\mathcal{R}} 4xy\, \mathrm{dA} \\
&= 8\int_{-a}^{a} \int_{0}^{(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} xy\, dy\, dx \\
&= 4\int_{-a}^{a} xy^2 \Big|_{0}^{(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} dx \\
&= 4\int_{-a}^{a} x(a^{2/3} - x^{2/3})^3\, dx \\
&= 4\int_{-a}^{a} \left(a^2 x - 3a^{4/3} x^{5/3} + 3a^{2/3} x^{7/3} - x^3\right) dx \\
&= 4\left[a^2 \frac{x^2}{2} - 3a^{4/3}\frac{3x^{8/3}}{8} + 3a^{2/3}\frac{3x^{10/3}}{10} - \frac{x^4}{4}\ \Big|_{-a}^{a}\ \right] = 0
\end{aligned}$$

Otra solución:

Calculando directamente la integral de linea. Hacer

$$dx = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t\, dt \qquad dy = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t$$

se tiene:

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\Gamma} x^2y\,dy - y^2x\,dx &= 3a^4\int\limits_0^{2\pi}\big(\cos^7 t\,\mathrm{sen}^5\,t + \mathrm{sen}^7\,t\cos^5 t\big)\,dt \\
&= 3a^4\int\limits_0^{2\pi}\cos^5 t^{\mathrm{o}}sen^5 t\,dt \\
&= 3a^4\int\limits_0^{2\pi}\big(\cos^5 t(1-2\cos^2 t+\cos^4 t)\,\mathrm{sen}\,t\big)\;dt \\
&= 3a^4\int\limits_0^{2\pi}\big(\cos^5 t\,\mathrm{sen}\,t - 2\cos^7 t\,\mathrm{sen}\,t + \cos^9 t^{\mathrm{o}}sent\big)\;dt \\
&= 3a^4\left[-\frac{\cos^6 t}{6}+\frac{2\cos^8 t}{8}-\frac{\cos^{10} t}{10}\Bigg|_0^{2\pi}\right] = 0
\end{aligned}
$$

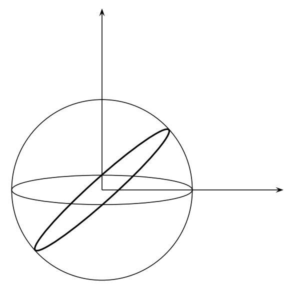
Problema 6.

Sea Γ la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $x - z = 0$. Calcule la integral

$$\oint_{\Gamma} (2x - y)dx - yz^2\, dy - y^2 z\, dz$$

Orientada en el sentido positivo, respecto del plano xy.

Solución:



Curva intersección

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 4 \\ x - z & = & 0 \end{array}\right| \implies z = x$$

Reemplazando:

$$2x^2 + y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \text{elipse en el plano } xy$$

Parametrización:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{2}\cos\theta \\ y & = & 2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z & = & \sqrt{2}\cos\theta \end{array} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \begin{array}{rcl} dx & = & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dy & = & 2\cos\theta \\ dz & = & -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}$$

$$\oint_{\Gamma} (2x - y)\,dx - yz^2\,dy - y^2 z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\Big(2\sqrt{2}\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\Big)\,(-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta) - 2\operatorname{sen}\theta \cdot 2\cos^2\theta \cdot 2\cos\theta$$

$$-4\operatorname{sen}^2\theta \cdot \sqrt{2}\cos\theta(-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)\Big)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\sqrt{2}\operatorname{sen}^2\theta - 8\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta + 8\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\Big)\,d\theta$$

$$= -4\left.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} + 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + 8\left.\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_0^{2\pi} + 8\left.\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4}\right|_0^{2\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\left.\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\right|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}(2\pi - 0 - (0 - 0)) = 2\sqrt{2}\pi$$