Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

1 Integrales de Línea

1.1 Problema

Calcular la integral de línea $\int_{\overrightarrow{r}} xydx + x^2dy$, donde $\overrightarrow{r}$ es la trayectoria
$x^2 + 4y^2 = 4,\ x > 0.$

Solución Primero, escribamos la ecuación paramétrica de la trayectoria orientada positivamente
$\left.\begin{array}{rc} x = & 2\cos t \\ y = & sent \end{array}\right\} t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \implies \overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, sent)$
Calculemos el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ sobre la trayectoria

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(xy, x^2\right) \implies \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = \left(2\cos t sent, (2\cos t)^2\right)$$

Determinemos el vector $\overrightarrow{r}' = (-2sent, \cos t)$
Calculemos la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{r}} xydx + x^2dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\cos t sent, (2\cos t)^2\right) \cdot (-2sent, \cos t)\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-4sen^2t\cos t + 4\cos^3 t)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-8sen^2t\cos t + 4\cos t)dt \\
&= \left[-\frac{8}{3}sen^3t + 4sent\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

1.2 Problema

Calcular la integral de línea $\int_{\overrightarrow{r}} -y^2dx + xdy$, donde $\overrightarrow{r}$ es la trayectoria
$y^2 = 2x - x^2,$ tal que $x > 1, y > 0.$

Solución Observemos que $\overrightarrow{r}$ es el segmento de circunferencia:
$y^2 = 2x - x^2 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1$ tal que $x > 1, y > 0$.
Entonces:
$\left.\begin{array}{rc} x = & 1+\cos t \\ y = & sent \end{array}\right\} \; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies \overrightarrow{r}(t) = (1+\cos t, sent) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
Calculemos el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ sobre la trayectoria
$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(-y^2, x\right) \implies \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = \left(-sen^2 t, 1+\cos t\right)$
Determinemos el vector $\overrightarrow{r}'(t) = (-sent, \cos t)$
luego, obtenemos
$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = \left(-sen^2 t, 1+\cos t\right) \cdot (-sent, \cos t)$
Calculemos la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{r}} -y^2 dx + x dy &= \int_0^{\pi/2} \left(sen^3 t + \cos^2 t + \cos t\right) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\left(1-\cos^2 t\right) sent + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) + \cos t\right) dt \\
&= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{sen2t}{4} + sent\right]_0^{\pi/2} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + 1 \\
&= \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

1.3 Problema

Calcular la integral de línea $\int_{\overrightarrow{r}} (8x+z)dx + 2xz^2 dy - 4y^2 dz$, siendo $\overrightarrow{r}$ la curva definida por las ecuaciones: $z = 9 - 2x^2 - 4y^2,\ z = 1$.

Solución Observemos, que la curva contenida en el plano $z = 1$, es la elipse $2x^2 + 4y^2 = 8$,con semi ejes $a = 2$ y $b = \sqrt{2}$, que se parametriza mediante.
$\left.\begin{array}{rc} x = & 2\cos t \\ y = & \sqrt{2}sent \\ z = & 1 \end{array}\right\} \; t \in [0, 2\pi] \implies \overrightarrow{r}(t) = \left(2\cos t, \sqrt{2}sent, 1\right) \quad t \in [0, 2\pi]$
Calculemos el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ sobre la trayectoria
$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(8x+z, 2xz^2, -4y^2\right) \implies \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = (16\cos t + 1, 4\cos 1t, 1)$
Evaluemos el vector
$\overrightarrow{r}'(t) = \left(-2sent, \sqrt{2}\cos t, 0\right)$
luego, obtenemos
$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = (16\cos t + 1, 4\cos t, 1) \cdot \left(-2sent, \sqrt{2}\cos t, 0\right)$
Entonces la integral de línea es

$$
\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{r}} (8x+z)dx + 2xz^2dy - 4y^2dz &= \int_0^{2\pi} \left(-32sent\cos t - 2sent + 4\sqrt{2}\cos^2 t\right) dt \\
&= \left[-16sen^2 t + 2\cos t\right]_0^{2\pi} + 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\
&= 4\sqrt{2}\left[\frac{t}{2} + \frac{sen2t}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

2 Campo conservativo

2.1 Problema

Calcular la integral $\int_{\overrightarrow{r}} 2x\cos y dx - x^2 seny dy$, donde $\overrightarrow{r} : [1,2] \to IR^2$ definida por $\overrightarrow{r}(t) = \left(e^{t-1}, sen\frac{\pi}{t}\right)$.

Solución. Determinemos si el campo vectorial es conservativo, de modo que calculamos

$$
\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x\cos y & -x^2 seny & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)
$$

Como hallamos que $\nabla \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{F}$ tiene una función potencial $\phi(x,y)$ tal que

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) &= 2x\cos y \\
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) &= -x^2 seny
\end{aligned} \quad = \right\}
$$

Integrando la primera ecuación parcialmente con respecto a x, se tiene

$\phi(x,y) = x^2\cos y + h(y) \implies \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = -x^2 seny + h'(y) = -x^2 seny$

$h'(y) = 0 \iff h(y) = c$

En consecuencia, la función potencial $\phi(x,y)$ para $\overrightarrow{F}(x,y)$es

$\phi(x,y) = x^2\cos y + c$

Entonces , podemos afirmar que

$$
\int_{\overrightarrow{r}} 2x\cos y dx - x^2 seny dy = \int_{\overrightarrow{r}} \nabla\phi \cdot d\overrightarrow{r} = \phi(\overrightarrow{r}(2)) - \phi(\overrightarrow{r}(1))
$$

donde $\phi(\overrightarrow{r}(2)) = \phi\left(e, sen\frac{\pi}{2}\right) = e^2 + c$ y $\phi(\overrightarrow{r}(1)) = \phi(1, sen\pi) = 1 + c$

Por tanto. obtenemos:

$$\int_{\overrightarrow{r}} 2x\cos y dx - x^2 seny dy = e^2 - 1$$

2.2 Problema.

Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ en IR^3 definido por :

$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2}, \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}, \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2} \right).$

Evaluar $\displaystyle\int_{\overrightarrow{r}} \frac{yzdx + xzdy + xydx}{1+x^2y^2z^2}$,donde $\overrightarrow{r}$ es:

a) el segmento rectílineo entre $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

b) la instersección de $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, con $x^2+y^2+z^2=1$.

Se tiene que las componentes del campo vectorial son continuas $\forall (x,y,z) \in IR^3$

Solución

Primero, verifiquemos si el campo vectorial es conservativo o no.

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2} & \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2} & \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

Puesto que

$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}, \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}$, etc.
$= (0,0,0)$

Como hallamos que $\nabla \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{F}$ tiene una función potencial $\phi(x,y)$ tal que

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) = & \dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = & \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\phi(x,y) = & \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2} \end{array}\right\}$$

Integrando la primera ecuación parcialmente con respecto a x, se tiene

$\phi(x,y) = arctg(xyx) + h(y,z) \implies \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2} + h'(y,z) = \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}$

$h'(y,z) = 0 \iff h(y,z) = g(x)$

En consecuencia, la función potencial $\phi(x,y)$ para $\overrightarrow{F}(x,y)$es

$\phi(x,y) = arctg(xyx) + g(z) \implies \phi(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2} + g'(x) = \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}$

$g'(x) = 0 \iff g(x) = c$

Entonces , podemos concluir que

$\phi\left(x,y\right)=arctg\left(xyx\right)+c$

En este caso hallamos , que el valor de la integral

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{r}}\frac{yzdx+xzdy+xydx}{1+x^2y^2z^2} &= \int_{\overrightarrow{r}}\nabla\phi\cdot d\overrightarrow{r}=\phi\left(1,1,1\right)-\phi\left(0,0,0\right)\\ &= arctg\left(1\right)-arctg\left(0\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{r}$ es la intersección de dos esferas la curva resultante es cerrada, en consecuencia

$$\int_{\overrightarrow{r}}\frac{yzdx+xzdy+xydx}{1+x^2y^2z^2}=\int_{\overrightarrow{r}}\nabla\phi\cdot d\overrightarrow{r}=0$$

3 Teorema de Green

3.1 Problema

Verificar el teorema de Green para el campo vectorial $\overrightarrow{F}\left(x,y,z\right)=\left(2(x^2+y^2),(x+y)^2\right)$,donde las curvas frontera de la región D corresponden al contorno del triángulo con vértices en los puntos $\left(1,1\right),\left(2,2\right)$,y $\left(1,3\right)$ orientado positivamente.

Solución

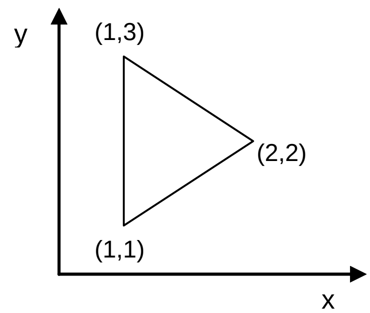
Como el campo vectorial $\overrightarrow{F}\left(x,y\right)$ es de clase C^1, y la región D conexa, entonces el teorema de Green afima que:

$$\int_C 2(x^2+y^2)dx\,+\,(x+y)^2dy=\int\int_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2-\frac{\partial}{\partial y}2(x^2+y^2)\right]dxdy$$

En primer lugar, calculemos directamente la integral de línea, segmentando la frontera en tres curvas:

$$\begin{aligned}\int_C 2(x^2+y^2)dx\;+\;(x+y)^2dy &= \int_{C_1}2(x^2+y^2)dx\;+\;(x+y)^2dy+\int_{C_2}2(x^2+y^2)dx\;+\;(x+y)^2dy\\ &\quad+\int_{C_3}2(x^2+y^2)dx\,+\,(x+y)^2dy\end{aligned}$$

Parametricemos cada uno de los segmentos de curvas que unen los puntos $\left(1,1\right)$ y $\left(2,2\right);\left(2,2\right)$ y $\left(1,3\right);\left(1,3\right)$ y $\left(1,1\right)$



Sea C_1 la recta $y = x,\ 1 \leq x \leq 2 \implies \overrightarrow{r}(t) = (t, t), t \in [1, 2] \implies \overrightarrow{r}'(t) = (1, 1), t \in [1, 2]$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} 2(x^2 + y^2)dx \ + \ (x + y)^2 dy &= \int_1^2 \left[2\left(t^2 + t^2\right) + (2t)^2\right] dt = \int_1^2 8t^2 dt = 8\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{56}{3}
\end{aligned}$$

Sea C_2 la recta $y = 4 - x,\ 1 \leq x \leq 2 \implies \overrightarrow{r}(t) = (4 - t, t), t \in [2, 3] \implies \overrightarrow{r}'(t) = (-1, 1), t \in [2, 3]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} 2(x^2 + y^2)dx \ + \ (x + y)^2 dy &= \int_2^3 \left[2\left((4 - t)^2 + t^2\right)(-1) + (4)^2\right] dt \\
&= \int_2^3 \left[-2\left(16 - 8t + 2t^2\right) + 16\right] dt \\
&= -4\int_2^3 \left[t^2 - 4t + 4\right] dt = -4\int_2^3 [t - 2]^2 dt \\
&= -4\left[\frac{(t - 2)^3}{3}\right]_2^3 = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Sea C_3 la recta $x = 1,\ 1 \leq y \leq 3 \implies \overrightarrow{r}(t) = (1, 3 - t), t \in [0, 2] \implies \overrightarrow{r}'(t) = (0, -1), t \in [0, 2]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} 2(x^2 + y^2)dx \ + \ (x + y)^2 dy &= \int_0^2 (4 - t)^2(-1)dt \\
&= \left[\frac{(4 - t)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{64}{3} = -\frac{56}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al sumar los tres términos tenemos:

$$\int_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}$$

En segundo lugar tenemos que calcular:

$$\int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}2(x^2+y^2)\right] dxdy = \int\int_D [2x-2y]\, dxdy$$

donde $D = \left\{(x,y) \in IR^2/1 \leq x \leq 2; x \leq y \leq 4-x\right\}$.Luego

$$\begin{aligned}
\int\int_D [2x-2y]\, dxdy &= \int_1^2 \int_x^{4-x} [2x-2y]\, dydx = \int_1^2 \left[2xy - y^2\right]_x^{4-x} dx \\
&= \int_1^2 \left[2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 - x^2\right] dx \\
&= \int_1^2 \left[-4x^2+16x-16\right] dx \\
&= -4\int_1^2 [x-2]^2\, dx = -4\left[\frac{(x-2)^2}{3}\right]_1^3 \\
&= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

lo que muestra la validez de la formula del teorema de Green.

3.2 Problema

Usando integrales de línea, calcular el área de la región encerrada por la elipse definida por: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

Solución

En primer lugar, parametrizamos la elipse de semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{5}$, mediante

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(2\cos t, \sqrt{5}sent\right),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

que produce las ecuaciones paramétricas: $x(t) = 2\cos t \quad , \quad y(t) = \sqrt{5}sent \quad \Longrightarrow$ $x'(t) = -2sent \quad , \quad y(t) = \sqrt{5}\cos t$

Entonces:

$$\begin{aligned}
A(D) &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{5}\cos^2 t + 2\sqrt{5}sen^2 t\right) dt \\
&= \sqrt{5}\int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{5}\pi
\end{aligned}$$

4 Area de una superficie parametrizada

4.1 Problema

Sea la funcion $\overrightarrow{r}: D \to IR^2$, definida por $\overrightarrow{r}(r,\theta) = (r \ \cos\theta, r \ senv, r)$ donde $D = \{(r,\theta)/0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ una parametrización de un cono S. Hallar su área de superficie.

Solución

El área de una superficie parametrizada se define $A(S) = \int\int_D \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| \, dudv$

Calculemos el integrando de área usando la propiedad:

$\|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}\right]^2}$

siendo los Jacobianos

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} sen\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta$

$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & -rsen\theta \end{vmatrix} = rsen\theta$

Así que el integrando de área es

$\|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta} = r\sqrt{2}$

Por tanto,el área de la superficie S es

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int\int_D \|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}\theta\| \, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Observación, $\|\overrightarrow{r}_r \times \overrightarrow{r}\theta\|$se anula para $r = 0$,pero $\overrightarrow{r}(0,\theta) = (0,0,0)\,\forall\theta$. Así, $(0,0,0)$ es el único punto donde la superficie no es suave.

4.2 Problema

Calcular el área S de la región del cono definido por $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, acotado en el octante $x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$.

Solución

Parametrizando la ecuación del cono, usando coordenadas cartesianas (y,z),se tiene que

$$\overrightarrow{r}(y,z)=\left(\sqrt{y^2+z^2},y,z\right),\ (y,z)\in D$$

La superficie S está al interior del cilindro , por lo que $x^2+y^2=2y^2+z^2\leq a^2$.Entonces, la región D esta definida sobre el plano yz por

$D=\left\{(y,z)\in IR^2/2y^2+z^2\leq a^2,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}$.

El área de la superficie es:

$$A(S)=\int\int_D \|\overrightarrow{r}_y\times\overrightarrow{r}_z\|\,dydz$$

luego ,si

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}_y &= \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},1,0\right),\ \overrightarrow{r}_z=\left(\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},0,1\right)\implies \overrightarrow{r}_y\times\overrightarrow{r}_z=(1,-\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}})\\ \implies & \|\overrightarrow{r}_y\times\overrightarrow{r}_z\|=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$A(S)=\int\int_D \sqrt{2}dydz$$

Observemos que: $2y^2+z^2\leq a^2,\ y\geq 0,\ z\geq 0\iff \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{a^2}\leq 1,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ es el área de la cuarta parte de la elipse

Usando cambio de variables tenemos: $\begin{array}{rl} x= & \dfrac{a}{\sqrt{2}}r\cos\theta \\ y= & arsen\theta\end{array} \implies \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=$

$$\left|\begin{array}{cc}\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta & -\dfrac{a}{\sqrt{2}}rsen\theta\\ asen\theta & ar\cos\theta\end{array}\right|=\frac{a^2}{\sqrt{2}}r$$

$$\frac{y^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{z^2}{a^2}\leq 1\iff 0\leq r^2\leq 1\implies 0\leq r\leq 1\ \ y\ 0\leq\theta\leq\pi$$

Entonces la región $D^*=\{(r,\theta)/0\leq r\leq 1\ y\ 0\leq\theta\leq\pi\}$.Luego, si

$$\begin{aligned}A(S) &= \int\int_D\sqrt{2}dydz=\sqrt{2}\int\int_{D^*}\frac{a^2}{\sqrt{2}}rdrd\theta\\ &= a^2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 rdrd\theta=a^2\int_0^{\pi/2}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 d\theta\\ &= \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

4.3 Problema

Calcular el área S de la región del manto del cilindro $x + y = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$y $z = 0$.

Solución

El área de la superficie es:

$$A(S) = \int\int_D \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| \, dudv$$

Parametrizando la superficie del cilindro, $x^2+y^2 = 2y \iff x^2+(y-1)^2 = 1$

Usando coordenadas cilindricas (u, v),se tiene que

$$\overrightarrow{r}(u, v) = (\cos u, 1 + senu, v)\,,\ (u, v) \in D$$

$D = \{(u, v)\,/ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2 - (1 + senu)\}$

Determinemos el integrando de área

$$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -senu & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, -senu, 0) \implies \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| = 1$$

Por tanto,el área de la superficie S es

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_D dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1-senu} dvdu \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - senu)\, du \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

5 Integrales de superficie

5.1 Problema

Sea S el octante positivo de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.Calcular la integral de superficie $\displaystyle\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} dS$

Solución

Parametricemos la Superficie S usando coordenadas esféricas, es decir

$\overrightarrow{r}(u, v) = (senu\ \cos v, senu\ senv, \cos u)$ $D^* = \{(u, v)\,/ 0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq \pi/2\}$

Calculemos el valor del integrando sobre S

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{sen^2u\ \cos^2 v + sen^2u\ sen^2v + (\cos^2 u - 1)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{sen^2u\ + \cos^2 u + 1 - 2\cos u}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2-2\cos u}}
\end{aligned}
$$

Calculemos el producto vectorial

$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u\ senv & -senu \\ -senu\ senv & senu\ \cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(sen^2u\ \cos v, sen^2u\ senv, senu \cos v\right)$

Luego , obtenemos la norma del producto :

$\|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| = \left(sen^4u + sen^2u\ \cos^2 u\right)^{1/2} = |senu| = senu$ porque $0 \leq u \leq \pi/2$

Finalmente, apliquemos la definición de integral de superficie y calculemos

$$
\begin{aligned}
\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}} dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\|}{\sqrt{2-2\cos u}} dudv \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{senu}{\sqrt{2-2\cos u}} dudv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \left[2\sqrt{1-\cos u}\right]_0^{\pi/2} dv \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} dv \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

5.2 Problema

Evaluar $\displaystyle\iint_S z^2 ds$, donde S es el paraboloide $z = x^2 + y^2$, comprendido entre $z = 1$ y $z = 4$.

Solución

Para este problema tenemos dos opciones para representar parametricamente la corona del paraboloide.

Usando coordenadas cartesianas rectángulares

$\overrightarrow{r}(x,y) = \left(x, y, x^2+y^2\right)$, donde $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

Calculemos el vector normal a la superficie S, dado por

$\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$

Luego , obtenemos la norma del producto :
$\| \overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y \| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$
Aplicando la definición de integral de superficie

$$\begin{aligned}\iint_S z^2 ds &= \int\int_D z^2 \| \overrightarrow{r}_y \times \overrightarrow{r}_z \| \, dxdy \\ &= \int\int_D (x^2 + y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares para evaluar la integral doble,

$$\begin{aligned}\int\int_D (x^2 + y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 \, \frac{1}{12} \left(4r^2 + 1\right)^{3/2} \Big|_1^2 - \frac{2}{12} \int_1^2 r \left(4r^2 + 1\right)^{3/2} dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 \, \frac{1}{12} \left(4r^2 + 1\right)^{3/2} \Big|_1^2 - \frac{1}{120} \left(4r^2 + 1\right)^{5/2} \Big|_1^2 \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \left[17^{3/2} - 5^{3/2} - \frac{1}{10} 17^{5/2} + \frac{1}{10} 5^{3/2} \right]\end{aligned}$$

6 Flujo de un campo vectorial

6.1 Problema

Calcular el flujo para $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x, 3y, \ z)$ en la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ tal que $z \geq 0$

Solución

Usando coordenadas cartesianas rectangulares, la parametrización de la superficie S es

$\overrightarrow{r}(x, y) = \left(x, y, 9 - x^2 - y^2\right)$, donde $D = \left\{(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 \leq 9, \quad z \geq 0\right\}$

Calculemos el vector normal a la superficie S, dado por

$\overrightarrow{r}_x \times \overrightarrow{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$

Aplicando la definición de integral de superficie al flujo a través de S, se obtiene

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}ds &= \iint_D \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(x,y)\right)\cdot\left(\overrightarrow{r}_x\times\overrightarrow{r}_y\right)dxdy\\
&\iint_D (3x,3y,\ z)\cdot(2x,2y,1)dxdy\\
&= \iint_D \left(6x^2+6y^2+\ z\right)dxdy\\
&= \iint_D \left(6x^2+6y^2+\ 9-x^2-y^2\right)dxdy\\
&= \iint_D \left(5x^2+5y^2+\ 9\right)dxdy
\end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(5x^2+5y^2+\ 9\right)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(5r^2+\ 9\right)rdrd\theta\\
&= \frac{567\pi}{2}
\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos parametrizar directamente la superficie S en coordenadas cilíndricas.

$$\overrightarrow{r}(r,\theta)=\left(r\cos\theta,\ rsen\theta,\ 9-r^2\right),\ 0\le r\le 3, 0\le\theta\le 2\pi$$

Calculemos el vector normal a la superficie y el campo vectorial sobre la superficie:

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{r}_r\times\overrightarrow{r}_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos\theta & sen\theta & -2r\\ -rsen\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\left(2r^2\cos\theta,2r^2sen\theta,r\right)$$

Aplicando la definición de integral de superficie al flujo sobre S, se obtiene

$$\begin{aligned}
\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}ds &= \iint_D \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(r,\theta)\right)\cdot\left(\overrightarrow{r}_r\times\overrightarrow{r}_\theta\right)drd\theta\\
&= \iint_D \left(3r\cos\theta,3\ rsen\theta,\ 9-r^2\right)\cdot\left(2r^2\cos\theta,2r^2sen\theta,r\right)drd\theta\\
&= \iint_D \left(6r^3(\cos^2\theta+sen^2\theta)+9r-r^3\right)drd\theta\\
&= \iint_D \left(5r^3+9r\right)drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(5r^3+\ 9r\right)drd\theta=\frac{567\pi}{2}
\end{aligned}$$

7 Teorema de la divergencia de Gauss

7.1 Problema

Calcular el flujo $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dS$ del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x^2 + senz, xy + \cos z, e^y\right)$ a través de la frontera S limitada por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$,

Solución

Puesto que el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ es continuo, con primeras derivadas parciales continuas en IR^3 y la región V$\subseteq IR^3$ encerrada es conexa y S es una superficie cerrada suave, entonces es aplicable el teorema de la divergencia de Gauss.

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \overrightarrow{F} \, dV$$

Para resolver la ultima integral necesitamos describir el sólido V. Completando el cuadrado, la ecuación de la superficie cilíndrica dada puede escribirse como:

$x^2 + y^2 = 2y \iff x^2 + (y-1)^2 = 2y.$

Luego, la proyección del sólido sobre el plano XY es la circunsferencia de centro $(0,1)$ y radio 1. Por otra parte z esta acotado entre los dos planos dados $0 \le z \le 2 - y$.

Por tanto, el sólido esta dado por $V = \Big\{(x,y,z) \in IR^3 / -\sqrt{2y - y^2} \le x \le \sqrt{2y - y^2}, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2 -$

Calculemos la divergencia del campo vectorial:

$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + senz\right) + \frac{\partial}{\partial y}(xy + \cos z) + \frac{\partial}{\partial z}(e^y) = 3x$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 3x dx dy dz &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{2-y} 3x dz dx dy \\
&= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} 3x(2-y) dx dy \\
&= \int_0^2 (2-y)\left(\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} dy = 0
\end{aligned}$$

Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

El teorema de la divergencia afirma que.

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \overrightarrow{F} \, dV$$

La divergencia de $\overrightarrow{F}$ es

$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 3.$
de modo que.

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \overrightarrow{F}\ dV &= \iiint_V 3\ dV \\ &= 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) \\ &= 4\pi a^3 \end{aligned}$$

Calculemos ahora el Flujo sobre la superficie.

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dS = \iint_D \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\right) dudv$$

Parametricemos la superficie usando coordenadas esféricas.
$\overrightarrow{r}(u,v) = (senu\ \cos v, senu\ senv, \cos u)$, con $D = \{(u,v)/0 \le u \le \pi/2, 0 \le v \le \pi/2\}$
Calculemos el producto vectorial
$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u\ senv & -senu \\ -senu\ senv & senu\ \cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(sen^2 u\ \cos v, sen^2 u\ senv, senu \cos v\right)$

7.2 Problema

Verificar el teorema de la divergencia para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x^3, y^3,\ z^3\right)$ en la R la región acotada por la frontera $x^2+y^2=4, z=0,$y $z=3.$

Solución

El teorema de la divergencia afirma que $\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds = \iiint_R \nabla \cdot \overrightarrow{F}\ \ dV$

Calculemos el flujo que produce el campo sobre la frontera:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds + \iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds$$

Si definimos parametrizacion de las superficies inferior y superior que limitan el cilindro tenemos:
$S_1 : \overrightarrow{r}(u,v) = (u, -v, 0)\ \ D^* = \{(u,v)/0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\pi, 0\}$
El vector normal con orientacion positiva es
$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1)$
Así , obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds &= \iint_{D^*} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\right) dudv \\ &= \iint_{D^*} \left(u^3, -v^3, 0\right) \cdot (0,0,-1)\, dudv = 0 \end{aligned}$$

Analogamente para:
$S_3 : \overrightarrow{r}(u,v) = (u,v,0) \quad D^* = \{(u,v)\,/ 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi\}$
$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$
Luego:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds &= \iint_{D^*} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\right) dudv \\
&= \iint_{D^*} \left(u^3, v^3, 3^3\right) \cdot (0,0,1)\, dudv \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3^3 dudv \\
&= 108\pi
\end{aligned}$$

Si definimos la parametrización para el manto del cilíndro se tiene:
$S_2 : \overrightarrow{r}(u,v) = (2\cos u, 2senu\ , v) \quad D^* = \{(u,v)\,/ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3\}$
El vector normal con orientacion positiva es,
$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2senu & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos u, 2senu, 0)$
En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds &= \iint_{D^*} \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\right) dudv \\
&= \iint_{D^*} \left((2\cos u)^3, (2senu)^3, v^3\right) \cdot (2\cos u, 2senu, 0)\, dudv \\
&= 16 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 u + sen^4 u\right) dudv \\
&= 16 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(6 + 2\cos 4u)\, dudv \\
&= 16 \int_0^3 \frac{1}{8}\left[6u + \frac{2}{4} sen4u\right]_0^{2\pi} dv \\
&= 2(12\pi) \int_0^3 dv \\
&= 72\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las integrales de flujo se tiene:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds = 102\pi + 72\pi = 180\pi$$

Por otra parte, como $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial x^3}{\partial x} + \dfrac{\partial y^3}{\partial y} + \dfrac{\partial z^3}{\partial z} = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, entonces

$$\iiint_R \nabla \cdot \overrightarrow{F}\ dV = \iiint_R 3\left(x^2+y^2+z^2\right) dV$$

Usando coordenadas cilíndricas para evaluar la integral triple, tenemos

$$\left.\begin{array}{rc} x = & r\cos\theta \\ y = & rsen\theta \\ z = & z \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq x^2+y^2 \leq 4 \iff 0 \leq r^2 \leq 4 \iff 0 \leq r \leq 2$$

Entonces la región $R^* = \{(r,\theta,z)\,/0 \leq r \leq 2\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\begin{aligned}
\iiint_R 3\left(x^2+y^2+z^2\right) dV &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 \left(r^2+z^2\right) rdzdrd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^2 z + \frac{r^3}{3}\right]_0^3 rdrd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[3r^2+9\right] rdrd\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4}r^4 + \frac{9}{2}r^2\right]_0^2 d\theta \\
&= 3\int_0^{2\pi} 30 d\theta \\
&= 90\theta\big|_0^{2\pi} = 180\pi
\end{aligned}$$

7.3 Problema

Calcular el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x+y^3, 2y-e^z, -3z-1\right)$ en la R la región acotada por la frontera S $x^2+y^2+3z^2=1$.

Solución:

Usemos el teorema de la divergencia de Gauss para calcular el flujo, que afirma que,

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds = \iiint_R \nabla \cdot \overrightarrow{F}\ dV$$

Calculemos la divergencia del campo vectorial en la región R.

$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+y^3\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2y-e^z\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-3z-1\right) = 1+2-3 = 0$

Entonces el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}$ a través de S verifica

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} ds = \iiint_R 0\ dV = 0$$

8 Teorema de Stokes

8.1 Problema

Verificar el teorema de Stokes para $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(-y^3,\ x^3,\ z^3\right)$ donde S es la porción del plano $x+y+z=1$ al interior del cilindro $x^2+y^2=1$.

Solución.

El teorema de Stokes afirma que $\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}dS$

Calculemos $\nabla\times\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & z^3 \end{vmatrix} = (0,0,3x^2+3y^2)$, y $\overrightarrow{N} = \nabla(x+y+z-1) = (1,1,1)$

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iint_D \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}\ dxdy \\ &= \iint_D 3(x^2+y^2)\ dxdy \end{aligned}$$

donde $D = \left\{x,y)\in IR^2/x^2+y^2\le 1\right\}$.

Usando coordenadas polares : $\begin{matrix} x = & r\cos\theta \\ y = & rsen\theta \end{matrix} \implies \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$x^2+y^2\le 1 \iff 0\le r^2\le 1 \implies 0\le r\le 1\ \ y\ 0\le\theta\le 2\pi$

Entonces la región $D^* = \{(r,\theta)/0\le r\le 1\ y\ 0\le\theta\le 2\pi\}$.Luego, si

$$\begin{aligned} \iint_D 3(x^2+y^2)\ dxdy &= 3\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\ d\theta dr \\ &= 6\pi\int_0^1 r^3\ dr \\ &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

8.2 Problema

Verificar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C xdx\ +\ yz^2dy + xzdz$$

donde C es la intersección de la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z\ge 0$ y el cilindro $x^2+y^2 = y$.

Solución

El teorema de Stokes afirma que

$$\oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \nabla\times\overrightarrow{F}\cdot\widehat{n}dS$$

donde S es la región de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C.

Calculemos directamente la integral de línea, parametrizando la curva C mediante coordenadas cilíndricas $x = r\ cost,\ y = r\ sent, z = z$.

Al sustituir en la ecuaciones de las superficies que definen la curva C, tenemos que $z = \sqrt{1-r^2}\quad ,\quad r = sent$ donde $0 \leq t \leq \pi$.

Luego, la ecuación de la curva es

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(sent \cos t,\ sen^2 t,\ \sqrt{1-sen^2 t}\right),\ 0 \leq t \leq \pi$$

Usando identidades trigonométricas $sen^2 t = \frac{1}{2}\ (1-\cos 2t), \cos^2 t = \frac{1}{2}\ (1+\cos 2t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}(t) &= \left(\frac{1}{2}sen2t, \frac{1}{2}\ (1-\cos 2t),\ \ \cos t\right),\ 0 \leq t \leq \pi \\
\overrightarrow{r}'(t) &= (\cos 2t,\ -sen2t,\ -sent),\ 0 \leq t \leq \pi
\end{aligned}$$

Evaluemos la integral de linea:

$$\begin{aligned}
\int_C xdx\ +\ yz^2dy + xzdz &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}sen2t\cos 2t - \frac{1}{2}\ (1-\cos 2t)\cos^2 t sen2t - \ \frac{1}{2}sen2t\cos t sent\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}sen2t\cos 2t - \frac{1}{4}\ (1-\cos^2 2t)sen2t - \ \frac{1}{4}sen^2 2t\right] dt \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}sen2t\cos 2t - \frac{1}{4}\ (1-\cos^2 2t)sen2t - \ \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)\right] dt \\
&= \left[\frac{1}{4}sen^2 2t + \frac{1}{8}\ \cos 2t - \frac{1}{24}\cos^3 2t - \ \frac{1}{8}t + \frac{sen4t}{32}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Por otra parte, debemos evaluar

$$\iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n} dS = \iint_D \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} dA$$

Como S es la región de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C, una parametrizacion de S viene dada por

$$\overrightarrow{T}(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ rsen\theta,\ \sqrt{1-r^2}\right),\ 0 \leq r \leq sen\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

A continuación calculemos el vector normal a la superficie:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{T}_r \times \overrightarrow{T}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & sen\theta & -\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -rsen\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2 sen\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r\right)$$

La orientacion del vector normal a la superficie es compatible con la orientación de su frontera C.

Determinemos el rotor del campo vectorial $\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & yz & xz \end{vmatrix} =$ $(-2yz, -z, 0)$,

Por lo que la función compuesta queda $\nabla \times \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{T}(r,\theta)\right) = \left(-2rsen\theta\sqrt{1-r^2}, -\sqrt{1-r^2}, 0\right)$.

Entonces, estamos en condiciones de calcular la integral de superficie,

$$\begin{aligned}
\iint_D \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} dA &= \int_0^\pi \int_0^{sen\theta} \left(-2r^3 sen\theta \cos\theta - r^2 sen\theta\right) drd\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{2} sen\theta \cos\theta + \frac{r^3}{3} sen\theta\right]_0^{sen\theta} d\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{sen^5\theta}{2}\cos\theta + \frac{sen^4\theta}{3}\right] d\theta \\
&= -\left[\frac{sen^6\theta}{12}\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi sen^4\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi sen^4\theta d\theta
\end{aligned}$$

Puesto que el integrando queda

$$\begin{aligned}
sen^4\theta &= \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\int_0^\pi sen^4\theta d\theta &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{3\theta}{2} - sen2\theta + \frac{sen4\theta}{2}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$