

La ley de Gauss es una relación elegante entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Es más general que la ley de Coulomb. La ley de Gauss incluye la integral del campo eléctrico \vec{E} en cada punto de una superficie cerrada. La superficie es sólo imaginaria, por lo que a nosotros nos toca elegir la forma y la posición de la superficie en tercera dimensión para calcular la integral. En este dibujo se muestran dos superficies diferentes, ambas encerrando a la carga Q . La ley de Gauss establece que el producto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$, (donde $d\vec{A}$ es una área infinitesimal de la superficie), integrado sobre toda la superficie, es igual a la carga encerrada por la superficie Q_{enc} dividida entre ϵ_0 . Ambas superficies encierran la misma carga Q . Por lo tanto, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ dará el mismo resultado para las dos superficies.

Ley de Gauss

CAPÍTULO 22

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO ¡Adivine ahora!

Una esfera no conductora tiene una densidad de carga uniforme distribuida sobre toda su superficie. ¿Cómo varía la magnitud del campo eléctrico en el interior con la distancia desde el centro?

- El campo eléctrico es cero en todas partes.
- El campo eléctrico es constante, pero distinto de cero en todas partes.
- El campo eléctrico se incrementa linealmente con la distancia desde el centro hacia fuera.
- El campo eléctrico se incrementa exponencialmente con la distancia desde el centro hacia fuera.
- El campo eléctrico se incrementa cuadráticamente con la distancia desde el centro hacia fuera.

El gran matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1855) desarrolló una importante relación, conocida ahora como la ley de Gauss, la cual desarrollamos y analizamos en este capítulo. Es un enunciado de la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico, así como una expresión más general y elegante que la ley de Coulomb.

En principio, podemos utilizar la ley de Coulomb para hallar el campo eléctrico debido a cualquier distribución de carga dada. El campo total en cualquier punto será la suma vectorial (la integral) de las contribuciones debidas a todas las cargas presentes (véase la ecuación 21-6). Salvo en algunos casos muy simples, esta suma o integral puede ser muy complicada de evaluar. Para situaciones en las que no es posible obtener una solución analítica (como vimos en los ejemplos de las secciones 21-6 y 21-7), debe usarse una computadora.

Sin embargo, en algunos casos, el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada puede calcularse más fácilmente y con mayor elegancia usando la ley de Gauss, como veremos en este capítulo. La mayor importancia de la ley de Gauss es que brinda una visión adicional sobre la naturaleza de los campos eléctricos, así como una relación más general entre cargas y campos.

Antes de estudiar la ley de Gauss, nos ocuparemos del concepto de *flujo*.

CONTENIDO

22-1 Flujo eléctrico

22-2 Ley de Gauss

22-3 Aplicaciones de la ley de Gauss

*22-4 Base experimental de las leyes de Gauss y Coulomb

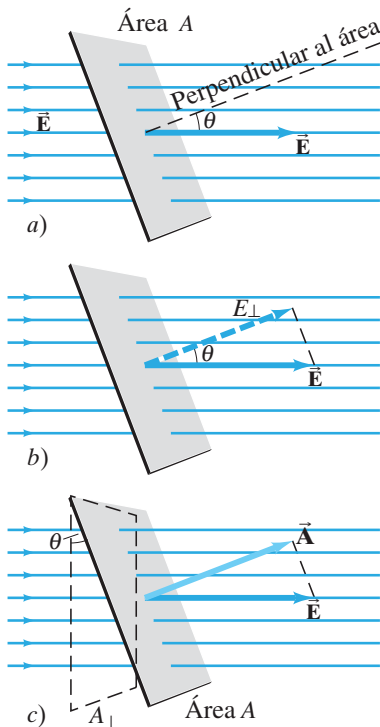


FIGURA 22-1 a) Un campo eléctrico uniforme \vec{E} pasa a través de una área plana A . b) $E_{\perp} = E \cos \theta$ es la componente de \vec{E} perpendicular al plano del área A . c) $A_{\perp} = A \cos \theta$ es la proyección (indicada con líneas punteadas) del área A perpendicular al campo \vec{E} .

FIGURA 22-2 Flujo eléctrico a través de una superficie curva. Se indica una pequeña área $\Delta \vec{A}_i$, de la superficie.

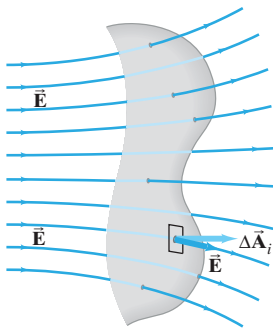
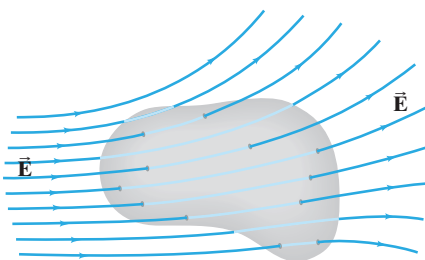


FIGURA 22-3 Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada.



22-1 Flujo eléctrico

La ley de Gauss implica el concepto de **flujo eléctrico**, el cual se refiere al campo eléctrico que pasa a través de una superficie dada. Para un campo eléctrico uniforme \vec{E} que pasa a través de una área A , como se muestra en la figura 22-1a, el flujo eléctrico Φ_E se define como

$$\Phi_E = EA \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre la dirección del campo eléctrico y una línea perpendicular al área. El flujo puede escribirse como

$$\Phi_E = E_{\perp} A = EA_{\perp} = EA \cos \theta, \quad [\vec{E} \text{ uniforme}] \quad (22-1a)$$

donde $E_{\perp} = E \cos \theta$ es la componente de \vec{E} a lo largo de la dirección perpendicular al área (figura 22-1b) y, de manera similar, $A_{\perp} = A \cos \theta$ es la proyección del área A perpendicular al campo \vec{E} (figura 22-1c).

El área A de la superficie puede representarse con un vector \vec{A} cuya magnitud es A y cuya dirección es perpendicular a la superficie, como se muestra en la figura 22-1c. El ángulo θ es el ángulo entre \vec{E} y \vec{A} , así que el flujo eléctrico también puede representarse como

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}. \quad [\vec{E} \text{ uniforme}] \quad (22-1b)$$

El flujo eléctrico tiene una interpretación intuitiva simple en términos de las líneas de campo. En la sección 21-8 mencionamos que las líneas de campo siempre se pueden dibujar de manera que el número de líneas (N) que pasa a través de una área unitaria perpendicular al campo (A_{\perp}) es proporcional a la magnitud del campo (E); esto es, $E \propto N/A_{\perp}$. Por lo tanto,

$$N \propto EA_{\perp} = \Phi_E,$$

de manera que el flujo a través de una área dada es proporcional al número de líneas que pasan a través de esa área.

EJEMPLO 22-1 Flujo eléctrico. Calcule el flujo eléctrico a través del rectángulo mostrado en la figura 22-1a. El rectángulo mide 10 cm por 20 cm, mientras el campo eléctrico es uniforme y vale 200 N/C, en tanto que el ángulo θ es de 30° .

PLANTEAMIENTO Usamos la definición de flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta$.

SOLUCIÓN El flujo eléctrico es

$$\Phi_E = (200 \text{ N/C})(0.10 \text{ m} \times 0.20 \text{ m}) \cos 30^\circ = 3.5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

EJERCICIO A ¿Cuál de los siguientes casos producirá un cambio en el flujo eléctrico a través de un círculo contenido en el plano xz , donde el campo eléctrico es $(10 \text{ N})(10 \text{ N})\hat{j}$? a) Cambiar la magnitud del campo eléctrico. b) Modificar el tamaño del círculo. c) Girar el círculo de manera que quede contenido en el plano xy . d) Todos los anteriores. e) Ninguno de los anteriores.

En el caso más general, cuando el campo eléctrico \vec{E} es uniforme y la superficie no es plana (figura 22-2), dividimos la superficie elegida en n pequeños elementos de superficie, cuyas áreas son $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Elegimos la división de forma que cada ΔA_i sea tal que 1. pueda considerarse plano y 2. el campo eléctrico varíe muy poco sobre esta pequeña área, de manera que puede considerarse uniforme. El flujo eléctrico a través de toda la superficie es aproximadamente

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i,$$

donde \vec{E}_i es el campo que pasa a través de $\Delta \vec{A}_i$. En el límite cuando $\Delta \vec{A}_i \rightarrow 0$, la suma se convierte en una integral sobre toda la superficie y la relación se vuelve matemáticamente exacta

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (22-2)$$

La ley de Gauss involucra el flujo *total* a través de una superficie *cerrada*, una superficie de cualquier forma que encierra completamente un volumen dado de espacio, como el que se ilustra en la figura 22-3. En este caso, el flujo neto a través de la superficie cerrada está dado por

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (22-3)$$

donde el signo de la integral se escribe \oint para indicar que la integral toma el valor de \vec{E} sobre cada punto de la superficie cerrada.

Hasta ahora no nos hemos preocupado por la ambigüedad en la dirección del vector \vec{A} o $d\vec{A}$ que representa una superficie. Por ejemplo, en la figura 22-1c, el vector \vec{A} pudo apuntar hacia arriba a la derecha (como se indica) o hacia abajo a la izquierda y seguir siendo perpendicular a la superficie. Para una superficie cerrada, definimos (de manera arbitraria) la dirección de \vec{A} , o $d\vec{A}$, de manera que apunte *hacia fuera* del volumen encerrado (figura 22-4). Para una línea de campo eléctrico que sale del volumen encerrado (a la derecha de la figura 22-4), el ángulo θ entre \vec{E} y $d\vec{A}$ debe ser menor que $\pi/2$ ($= 90^\circ$), por lo que $\cos \theta > 0$. Para una línea de campo que entra en el volumen (a la izquierda de la figura 22-4) $\theta > \pi/2$, por lo que $\cos \theta < 0$. Por lo tanto, *el flujo que entra al volumen es negativo* ($\int E \cos \theta dA < 0$), mientras que *el flujo que sale de la superficie es positivo*. En consecuencia, la ecuación 22-3 da el flujo neto *fuera* del volumen. Si Φ_E es negativo, entonces hay un flujo neto *hacia* el volumen.

En las figuras 22-3 y 22-4, cada línea que entra al volumen también sale. Por lo tanto, $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$. No hay un flujo neto desde o hacia esta superficie cerrada. El flujo, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$, será diferente de cero sólo si una o más líneas terminan o empiezan en la superficie. Como las líneas de campo empiezan o terminan sólo en cargas eléctricas, el flujo será diferente de cero sólo si la superficie encierra una carga neta. Por ejemplo, la superficie marcada como A_1 en la figura 22-5 encierra una carga positiva y hay un flujo neto hacia fuera de la superficie ($\Phi_E > 0$). La superficie A_2 encierra una carga negativa de la misma magnitud y hay un flujo neto hacia dentro de la superficie ($\Phi_E < 0$). Para la configuración que se representa en la figura 22-6, el flujo a través de la superficie mostrada es negativo (cuenta las líneas). El valor de Φ_E depende de la carga encerrada por la superficie, que es de lo que se trata la ley de Gauss.

22-2 Ley de Gauss

La relación precisa entre el flujo eléctrico a través de una superficie, mientras la carga neta Q_{enc} encerrada dentro de la superficie está dada por la **ley de Gauss**:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}, \quad (22-4)$$

donde ϵ_0 es la misma constante (permitividad del vacío) que aparece en la ley de Coulomb. La integral del lado izquierdo considera el valor de \vec{E} sobre cualquier superficie cerrada; elegimos esa superficie como mejor nos convenga para una situación dada. La carga Q_{enc} es la carga neta *encerrada* dentro de esa superficie. No importa dónde o cómo esté distribuida la carga dentro de la superficie. No debe incluirse ninguna carga fuera de esa superficie. Una carga fuera de la superficie seleccionada podría afectar la posición de las líneas de campo eléctrico, pero no afectará el número neto de líneas que entran a la superficie o que salen de ésta. Por ejemplo, para la superficie gaussiana A_1 de la figura 22-5, Q_{enc} sería la carga positiva encerrada por A_1 . La carga negativa contribuye al campo eléctrico en A_1 , pero *no* está encerrada dentro de la superficie A_1 , así que no se incluye en Q_{enc} .

Veamos ahora cómo se relaciona la ley de Gauss con la ley de Coulomb. Primero analizaremos que la ley de Coulomb se obtiene a partir de la ley de Gauss. En la figura 22-7 tenemos una carga aislada Q . Elegimos nuestra “superficie gaussiana” como una esfera imaginaria de radio r centrada en la carga. Como se supone que la ley de Gauss se cumple para cualquier superficie, hemos elegido una superficie para que se simplifiquen nuestros cálculos. Dada la simetría de esta esfera (imaginaria) con respecto a la carga en su centro, sabemos que \vec{E} debe tener la misma magnitud en cualquier punto sobre su superficie y que \vec{E} apunta radialmente hacia fuera o (hacia adentro) paralelo a $d\vec{A}$, un elemento de área superficial. Así, escribimos la integral en la ley de Gauss como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2)$$

dado que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$, mientras que la magnitud de \vec{E} es la misma para todos los puntos sobre esta superficie esférica. Así que la ley de Gauss queda con $Q_{\text{enc}} = Q$

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

porque \vec{E} y $d\vec{A}$ son ambos perpendiculares a la superficie en cada punto, y $\cos \theta = 1$. Al despejar E , obtenemos

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

que es la ley de Coulomb en la forma de campo eléctrico (ecuación 21-4b).

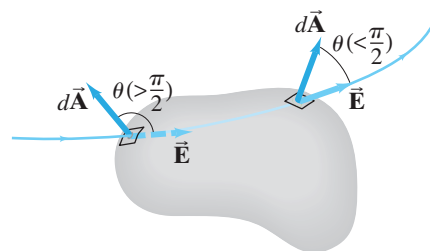


FIGURA 22-4 La dirección de un elemento de área $d\vec{A}$ se toma apuntando hacia fuera de una superficie cerrada.

FIGURA 22-5 Un dipolo eléctrico. El flujo a través de la superficie A_1 es positivo. El flujo a través de la superficie A_2 es negativo.

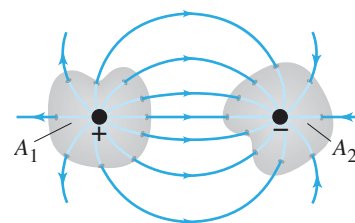


FIGURA 22-6 El flujo neto a través de la superficie A es negativo.

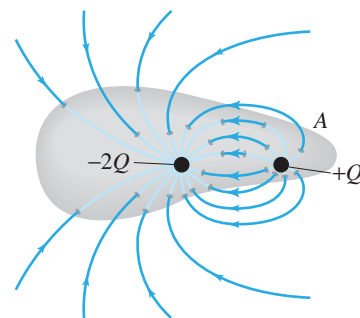
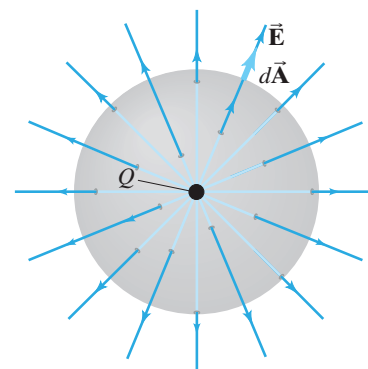


FIGURA 22-7 Una sola carga puntual Q en el centro de una esfera imaginaria de radio r (nuestra “superficie gaussiana”, es decir, la superficie cerrada que hemos elegido para aplicar la ley de Gauss en este caso).



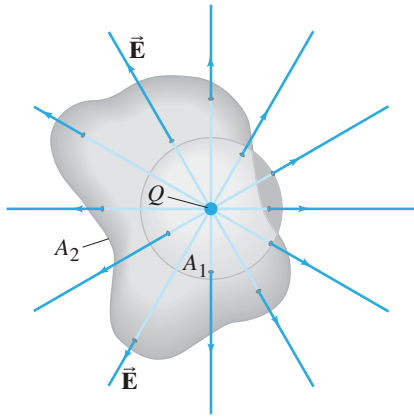


FIGURA 22-8 Una carga puntual sola rodeada por una superficie esférica A_1 y por otra superficie de forma irregular A_2 .

Hagamos ahora lo opuesto: obtengamos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb para cargas eléctricas estáticas.[†] Primero consideremos una sola carga puntual Q rodeada de una superficie esférica imaginaria como en la figura 22-7 (que se muestra de nuevo en color naranja en la figura 22-8). La ley de Coulomb dice que el campo eléctrico en la superficie de la esfera es $E = (1/4\pi\epsilon_0) (Q/r^2)$. Invertiendo el argumento que acabamos de usar, tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ésta es la ley de Gauss con $Q_{\text{enc}} = Q$, y la dedujimos para el caso especial de una superficie esférica que encierra una carga puntual en su centro. Pero, ¿qué sucede cuando se tiene otra superficie, como la superficie irregular A_2 en la figura 22-8? El mismo número de líneas de campo (debidas a nuestra carga Q) pasan a través de la superficie A_2 que las que pasan a través de la superficie esférica A_1 . Por lo tanto, como el flujo a través de una superficie es proporcional al número de líneas que atraviesan esa superficie, como vimos en la sección 22-1, el flujo a través de A_2 es el mismo que el flujo a través de A_1 :

$$\oint_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Así, podemos esperar que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

sería válida para *cualquier* superficie que encierre a la sola carga puntual Q .

Por último, veamos el caso de más de una carga. Para cada carga Q_i encerrada por la superficie,

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \frac{Q_i}{\epsilon_0},$$

donde \vec{E}_i se refiere al campo eléctrico producido sólo por la carga Q_i . Por el principio de superposición de los campos eléctricos (sección 21-6), el campo eléctrico total \vec{E} es igual a la suma de los campos debidos a cada carga por separado, $\vec{E} = \Sigma \vec{E}_i$. De aquí que,

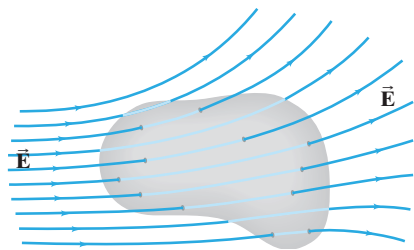
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\Sigma \vec{E}_i) \cdot d\vec{A} = \Sigma \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

donde $Q_{\text{enc}} = \Sigma Q_i$ es la carga neta total encerrada dentro de la superficie. Así, vemos que, con base en este simple argumento, la ley de Gauss se deduce de la ley de Coulomb para cualquier distribución de cargas eléctricas estáticas encerradas dentro de una superficie cerrada de cualquier forma.

La deducción de la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb es válida para campos eléctricos producidos por cargas eléctricas estáticas. Veremos después que también es factible producir campos eléctricos mediante campos magnéticos variables. La ley de Coulomb no puede usarse para describir tales campos. No obstante, *se encuentra* que la ley de Gauss también se cumple para campos producidos por cualquiera de estos modos. Por lo tanto, *la ley de Gauss es una ley más general que la ley de Coulomb*. Se cumple para cualquier campo eléctrico.

Aun en el caso de campos eléctricos estáticos que estamos considerando en este capítulo, es importante reconocer que \vec{E} en el lado izquierdo de la ley de Gauss no es necesariamente sólo por la carga encerrada Q_{enc} que aparece en el lado derecho. Por ejemplo, en la figura 22-9 hay un campo eléctrico \vec{E} en todos los puntos de la superficie gaussiana imaginaria, pero éste no es consecuencia de la carga encerrada dentro de la superficie (que en este caso es $Q_{\text{enc}} = 0$). El campo eléctrico \vec{E} que aparece en el lado izquierdo de la ley de Gauss, es el campo eléctrico *total* en cada punto sobre la superficie gaussiana elegida, no sólo el campo debido a la carga encerrada Q_{enc} que aparece en el lado derecho. Se ha encontrado que la ley de Gauss es válida para el flujo total en cualquier superficie. Nos indica que cualquier *diferencia* entre el flujo de entrada y de salida, sobre cualquier superficie, es resultado de cargas dentro de esa superficie.

FIGURA 22-9 Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada (igual que en la figura 22-3). La carga neta encerrada por esta superficie es cero ($Q_{\text{enc}} = 0$).



[†] Observe que la ley de Gauss parecería más complicada en términos de la constante $k = 1/4\pi\epsilon_0$ que usamos originalmente en ley de Coulomb (ecuaciones 21-1 o 21-4a):

Ley de Coulomb

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k Q$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

La ley de Gauss tiene una forma más simple usando ϵ_0 ; la ley de Coulomb es más simple usando k . La convención normal es usar ϵ_0 en vez de k , porque la ley de Gauss se considera más general; por lo tanto, es preferible manejarla en una forma más simple.

EJEMPLO CONCEPTUAL 22-2 Flujo eléctrico a partir de la ley de Gauss. Considere las dos superficies gaussianas A_1 y A_2 mostradas en la figura 22-10. La única carga presente es la carga Q , que está en el centro de la superficie A_1 . ¿Cuál es el flujo neto a través de cada superficie A_1 y A_2 ?

RESPUESTA La superficie A_1 encierra a la carga $+Q$. Por la ley de Gauss, el flujo neto a través de A_1 es Q/ϵ_0 . Para la superficie A_2 , la carga $+Q$ está fuera de la superficie. La superficie A_2 no encierra ninguna carga neta, así que por ley de Gauss el flujo eléctrico neto a través de la superficie A_2 es cero. Observe que todas las líneas de campo que entran al volumen encerrado por la superficie A_2 también salen.

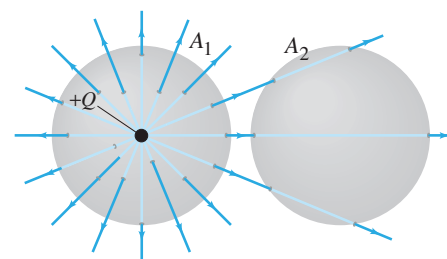


FIGURA 22-10 Ejemplo 22-2. Dos superficies gaussianas.

EJERCICIO B Una carga puntual Q está en el centro de una superficie gaussiana esférica A . Cuando se coloca una segunda carga Q justo afuera de la superficie A , el flujo total a través de esta superficie esférica es *a*) el mismo, *b*) el doble, *c*) la mitad, *d*) ninguna de las anteriores.

EJERCICIO C Tres cargas de $2.95 \mu\text{C}$ están dentro de una caja pequeña. ¿Cuál es el flujo neto que sale de la caja? *a*) $3.3 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, *b*) $3.3 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, *c*) $1.0 \times 10^{12} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, *d*) $1.0 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, *e*) $6.7 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$.

Notamos que la integral en la ley de Gauss generalmente es más difícil de llevar a cabo en la práctica. Rara vez tenemos que hacerla, excepto en situaciones muy simples, que explicaremos ahora.

22-3 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es una manera compacta y elegante de representar la relación entre carga eléctrica y campo eléctrico. También ofrece una manera simple de determinar el campo eléctrico cuando la distribución de carga es simple y/o posee un alto grado de *simetría*. Sin embargo, para aplicar la ley de Gauss, debemos elegir la superficie “gaussiana” con mucho cuidado (para la integral en el lado izquierdo de la ley de Gauss), de manera que podamos determinar \vec{E} . Normalmente consideramos una superficie que tenga la simetría necesaria para que E sea constante sobre toda la superficie o sobre partes de ella. Algunas veces elegimos una superficie de manera que el flujo a través de parte de la superficie sea cero.

EJEMPLO 22-3 Conductor esférico. Un cascarón esférico delgado de radio r_0 posee una carga neta total Q , que está distribuida de manera uniforme sobre su superficie (figura 22-11). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cascarón y *b*) dentro del cascarón. *c*) ¿Qué pasaría si el conductor fuera una esfera sólida?

PLANTEAMIENTO Como la carga está distribuida simétricamente, el campo eléctrico también debe ser simétrico. Como resultado, el campo fuera de la esfera debe estar dirigido radialmente hacia fuera (o hacia adentro si $Q < 0$) y debe depender sólo de r , no del ángulo (en coordenadas esféricas).

SOLUCIÓN *a*) El campo eléctrico tendrá la misma magnitud sobre todos los puntos de una superficie gaussiana, si elegimos esta superficie como una esfera de radio r ($r > r_0$) concéntrica con el cascarón, como se muestra en la figura 22-11, con el círculo entrecortado A_1 . Como \vec{E} es perpendicular a esta superficie, el coseno del ángulo entre \vec{E} y $d\vec{A}$ siempre es 1. La ley de Gauss da entonces (con $Q_{\text{enc}} = Q$ en la ecuación 22-4)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde $4\pi r^2$ es el área de la superficie de nuestra esfera gaussiana de radio r . Así que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad [r > r_0]$$

En consecuencia, el campo afuera del cascarón esférico cargado de manera uniforme es el mismo, como si toda la carga estuviera concentrada en el centro, como una carga puntual.

b) Dentro del cascarón, el campo eléctrico también habrá de ser simétrico. Así que E debe tener el mismo valor sobre todos los puntos de una superficie gaussiana esférica (A_2 en la figura 22-11) concéntrica con el cascarón. Así que E se puede factorizar de la integral y, como $Q_{\text{enc}} = 0$ porque la carga encerrada dentro de la esfera A_2 es cero, entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = 0.$$

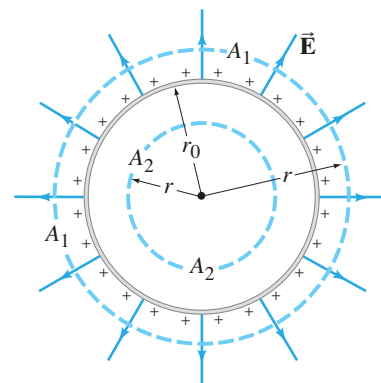
De donde

$$E = 0 \quad [r < r_0]$$

dentro de un cascarón esférico con carga uniforme.

c) Este mismo resultado se aplica a una esfera conductora sólida cargada de manera uniforme, ya que toda la carga reside en una capa delgada en la superficie.

FIGURA 22-11 Corte transversal de un cascarón esférico delgado de radio r_0 , portando una carga neta Q distribuida de manera uniforme. A_1 y A_2 representan dos superficies gaussianas que usamos para determinar \vec{E} . Ejemplo 22-3.



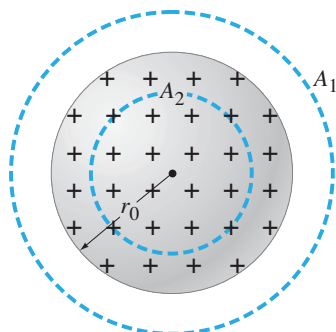
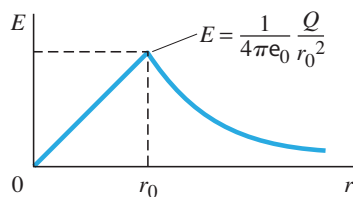


FIGURA 22-12 Una esfera sólida con densidad de carga uniforme. Ejemplo 22-4.

FIGURA 22-13 Magnitud del campo eléctrico como función de la distancia r desde el centro de una esfera sólida con carga uniforme.



EJERCICIO D Se coloca una carga Q sobre una pelota de metal hueca. En el capítulo 21 vimos que toda la carga reside en la superficie de la pelota, porque el metal es un conductor. ¿Cómo se distribuye la carga sobre la pelota? a) La mitad en la superficie interior y la otra mitad en la superficie exterior. b) Parte en cada superficie en proporción inversa a los dos radios. c) Parte en cada superficie, pero con una dependencia de los radios, más complicada que la respuesta b). d) Toda en la superficie interna. e) Toda en la superficie externa.

EJEMPLO 22-4 Esfera sólida de carga. Se distribuye de manera uniforme una carga eléctrica Q a través de una esfera no conductora de radio r_0 (figura 22-12). Determine el campo eléctrico a) afuera de la esfera ($r > r_0$) y b) dentro de la esfera ($r < r_0$).

PLANTEAMIENTO Como la carga se distribuye simétricamente en la esfera, el campo eléctrico en todos los puntos también debe ser *simétrico*. \vec{E} depende sólo de r y se dirige en forma radial hacia fuera (o hacia dentro si $Q < 0$).

SOLUCIÓN a) Elegimos nuestra superficie gaussiana como una esfera de radio r ($r > r_0$), llamada A_1 en la figura 22-12. Puesto que E depende sólo de r , con $Q_{\text{enc}} = Q$ la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

o

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

De nuevo, el campo fuera de una distribución de carga con simetría esférica es el mismo que el de una carga puntual de la misma magnitud localizada en el centro de la esfera.

b) Dentro de la esfera, elegimos nuestra superficie gaussiana como una esfera concéntrica de radio r ($r < r_0$), llamada A_2 en la figura 22-12. Por simetría, la magnitud de \vec{E} es la misma para todos los puntos sobre la superficie A_2 y \vec{E} es perpendicular a la superficie, así que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2).$$

Debemos igualar esto a $Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ donde Q_{enc} es la carga encerrada por A_2 . Observe que Q_{enc} no es la carga total Q , sino sólo una fracción de ella. Definimos la **densidad de carga**, ρ_E , como la carga por unidad de volumen ($\rho_E = dQ/dV$); en este caso, tenemos que $\rho_E = \text{constante}$. Así que la carga encerrada por la superficie gaussiana A_2 , que es una esfera de radio r , es

$$Q_{\text{enc}} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_E} \right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q.$$

De aquí, usando la ley de Gauss, tenemos,

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{r_0^3} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

o

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r. \quad [r < r_0]$$

Así que el campo se incrementa linealmente con r , hasta $r = r_0$, y luego decrece como $1/r^2$, como se grafica en la figura 22-13.

EJERCICIO E Regrese a la pregunta de inicio de capítulo (página 591) y contéstela de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

Los resultados del ejemplo 22-4 habrían sido difíciles de obtener usando la ley de Coulomb por integración sobre la esfera. Usando la ley de Gauss y la *simetría* de la situación, se obtiene este resultado con facilidad, lo que demuestra el gran poder de la ley de Gauss. Sin embargo, su uso de esta manera se limita generalmente a casos donde la distribución de carga tiene un alto grado de simetría. En tales casos, *elegimos* una superficie simple sobre la cual $E = \text{constante}$, de manera que la integración sea sencilla. La ley de Gauss se cumple, por supuesto, para cualquier superficie.

EJEMPLO 22-5 Esfera sólida con carga no uniforme. Suponga que la densidad de carga de la esfera sólida de la figura 22-12 (ejemplo 22-4) está dada por $\rho_E = \alpha r^2$, donde α es una constante. a) Encuentre α en términos de la carga total Q y del radio de la esfera r_0 . b) Determine el campo eléctrico como función de r dentro de la esfera.

PLANTEAMIENTO Dividimos la esfera en cascarones delgados concéntricos de espesor dr , como se muestra en la figura 22-14, e integramos a) estableciendo que $Q = \int \rho_E dV$ y b) usando la ley de Gauss.

SOLUCIÓN a) El volumen de una cascarón delgado de radio r y espesor dr (figura 22-14) es $dV = 4\pi r^2 dr$. La carga total está dada por

$$Q = \int \rho_E dV = \int_0^{r_0} (\alpha r^2)(4\pi r^2 dr) = 4\pi\alpha \int_0^{r_0} r^4 dr = \frac{4\pi\alpha}{5} r_0^5.$$

Así que $\alpha = 5Q/4\pi r_0^5$.

b) Para encontrar E dentro de la esfera a una distancia r del centro, aplicamos la ley de Gauss a una esfera imaginaria de radio r , la cual encierra una carga

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^r \rho_E dV = \int_0^r (\alpha r^2) 4\pi r^2 dr = \int_0^r \left(\frac{5Q}{4\pi r_0^5} r^2 \right) 4\pi r^2 dr = Q \frac{r^5}{r_0^5}.$$

Por simetría, E será el mismo sobre todos los puntos de la superficie de la esfera de radio r , así que la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$(E)(4\pi r^2) = Q \frac{r^5}{\epsilon_0 r_0^5},$$

por lo que

$$E = \frac{Qr^3}{4\pi\epsilon_0 r_0^5}.$$

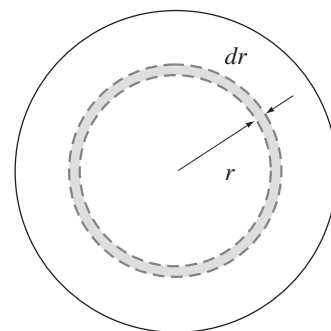


FIGURA 22-14 Ejemplo 22-5.

EJEMPLO 22-6 Línea larga de carga uniforme. Un alambre recto muy largo posee una carga positiva uniforme por unidad de longitud, λ . Calcule el campo eléctrico en puntos cerca (pero fuera) del alambre y lejos de sus extremos.

PLANTEAMIENTO Dada la *simetría*, esperamos que el campo eléctrico esté dirigido radialmente hacia fuera y que dependa sólo de la distancia perpendicular R desde el alambre. Dada la simetría cilíndrica, el campo será el mismo sobre todos los puntos de una superficie gaussiana con forma de cilindro con el alambre a lo largo de su eje (figura 22-15). \vec{E} es perpendicular a esta superficie en todos los puntos. Para aplicar la ley de Gauss necesitamos una superficie cerrada, así que incluimos las dos tapas planas del cilindro. Dado que \vec{E} es paralelo a estas tapas, no hay flujo eléctrico a través de ellas (el coseno del ángulo entre \vec{E} y $d\vec{A}$ sobre las tapas es $\cos 90^\circ = 0$).

SOLUCIÓN Para la superficie gaussiana que hemos elegido, la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi R\ell) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0},$$

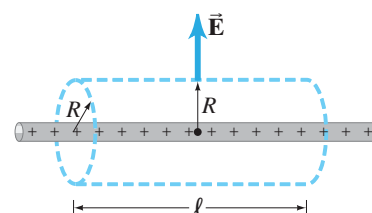
donde ℓ es la longitud de nuestra superficie gaussiana ($\ell \ll$ que la longitud del alambre) y $2\pi R$ es su circunferencia. Por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}.$$

NOTA Éste es el mismo resultado que encontramos en el ejemplo 21-11 usando la ley de Coulomb (utilizamos x en vez de R), pero esta vez se requirió mucho menos esfuerzo. De nuevo, vemos el gran poder de la ley de Gauss.[†]

NOTA Recuerde del capítulo 10 (figura 10-2), que usamos R para la distancia de una partícula a un eje (simetría cilíndrica) y r minúscula para la distancia desde un punto dado (por lo general, el origen 0).

FIGURA 22-15 Cálculo de \vec{E} producido por una línea de carga muy larga. Ejemplo 22-6.



[†]Sin embargo, observe que el método usado en el ejemplo 21-11 permite calcular también E para una línea de carga corta con los límites apropiados en la integral, mientras que la ley de Gauss no es práctica en ese caso, dada la falta de simetría.

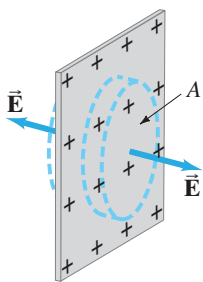


FIGURA 22-16 Cálculo del campo eléctrico fuera de una superficie plana no conductora con carga uniforme. Ejemplo 22-7.

EJEMPLO 22-7 Plano de carga infinito. Se distribuye carga de manera uniforme, con una densidad superficial de carga σ (σ = carga por unidad de área = dQ/dA), sobre una superficie plana no conductora muy larga, pero muy delgada. Determine el campo eléctrico en puntos cercanos al plano.

PLANTEAMIENTO Elegimos como superficie gaussiana un cilindro pequeño cerrado, con su eje perpendicular al plano, que se extiende a través del plano como se muestra en la figura 22-16. Dada la simetría, esperamos que \vec{E} esté dirigido de forma perpendicular al plano a ambos lados, como se muestra en la figura, y que sea uniforme sobre las tapas del cilindro, cada una con área A .

SOLUCIÓN Puesto que no hay flujo eléctrico sobre las paredes curvas de nuestra superficie cilíndrica, todo el flujo es a través de las dos tapas. Así que la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

donde $Q_{\text{enc}} = \sigma A$ es la carga encerrada por nuestro cilindro gaussiano. El campo eléctrico es, por lo tanto,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

NOTA Éste es el mismo resultado que obtuvimos de manera mucho más elaborada en el capítulo 21 (ecuación 21-7). El campo es uniforme para puntos lejanos de los bordes del plano y cercano a su superficie.

EJEMPLO 22-8 Campo eléctrico cerca de cualquier superficie conductora.

Muestre que el campo eléctrico justo fuera de la superficie de cualquier buen conductor de forma arbitraria está dado por

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

donde σ es la densidad superficial de carga en la superficie del conductor en cualquier punto.

PLANTEAMIENTO Elegimos como nuestra superficie gaussiana una pequeña caja cilíndrica, como hicimos en el ejemplo anterior. Elegimos el cilindro con una altura muy pequeña, de manera que una de sus tapas circulares quede justo arriba del conductor (figura 22-17). La otra tapa queda justo debajo de la superficie del conductor y la pared cilíndrica es perpendicular a la superficie del conductor.

SOLUCIÓN El campo eléctrico es cero dentro de un conductor y perpendicular a su superficie justo afuera de él (sección 21-9), así que hay flujo eléctrico sólo a través de la tapa externa de nuestra superficie cilíndrica; no hay flujo a través de la tapa interior o de la pared cilíndrica. Elegimos el área A (de la tapa plana) suficientemente pequeña, de manera que E sea uniforme sobre ella. Así que la ley de Gauss nos da

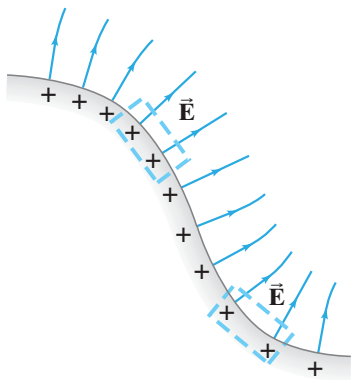
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

de manera que

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad [\text{en la superficie de un conductor}] \quad (22-5)$$

NOTA Este útil resultado se aplica a un conductor de cualquier forma.

FIGURA 22-17 Campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor. Ejemplo 22-8.



! CUIDADO
Cuándo usar $E = \sigma/\epsilon_0$
y cuándo $E = \sigma/2\epsilon_0$

¿Cómo es que el campo fuera de un plano grande no conductor es $E = \sigma/2\epsilon_0$ (ejemplo 22-7), mientras que fuera de un conductor es $E = \sigma/\epsilon_0$ (ejemplo 22-8)? La razón del factor 2 no viene de que sea un conductor *versus* un no conductor, sino de cómo definimos carga por unidad de área σ . Para un no conductor plano delgado (figura 22-16), la carga puede estar distribuida a través del volumen (no sólo en la superficie, como en un conductor). La carga por unidad de área σ representa toda la carga a través de la anchura del no conductor delgado. También nuestra superficie gaussiana tiene sus tapas fuera del no conductor en cada uno de sus lados, de manera que se incluye toda esta

carga. Por otro lado, para un conductor, la carga se acumula en las superficies externas solamente. Para un conductor plano delgado, como se ilustra en la figura 22-18, la carga se acumula en ambas superficies; usando la misma superficie gaussiana pequeña que en la figura 22-17, con una tapa dentro y la otra tapa fuera del conductor, terminamos con el resultado $E = \sigma/\epsilon_0$. Si definimos σ para un conductor, como lo hicimos para un no conductor, σ representaría la carga por unidad de área del conductor entero. Entonces, la figura 22-18 mostraría que la carga superficial en cada superficie es $\sigma/2$, por lo que la ley de Gauss daría $\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = (\sigma/2)A/\epsilon_0 = \sigma A/2\epsilon_0$ así que $E = \sigma/2\epsilon_0$, lo mismo que para un no conductor. Habrá que ser cuidadosos acerca de cómo definimos la carga por unidad de área σ .

En la sección 21-9 vimos que, en una situación estática, el campo eléctrico dentro de cualquier conductor debe ser cero, aun si tiene una carga neta. (De otro modo, las cargas libres en el conductor se moverían hasta que la fuerza neta en cada una y, por lo tanto \vec{E} , fueran cero.) También mencionamos que cualquier carga eléctrica neta en un conductor debe residir en su superficie exterior. Lo anterior se puede mostrar más fácilmente con la ley de Gauss. Considere un conductor cualquiera de forma arbitraria, como el que se representa en la figura 22-19, el cual porta una carga neta Q . Elegimos la superficie gaussiana, indicada con línea punteada en el diagrama, de manera que toda quede justo debajo de la superficie del conductor y cubra en esencial todo el volumen del conductor. Nuestra superficie gaussiana puede estar arbitrariamente cerca de la superficie, pero aún *dentro* del conductor. El campo eléctrico es cero en todos los puntos de esa superficie, ya que está en el interior de un conductor. Por lo tanto, a partir de la ley de Gauss (ecuación 22-4), la carga neta dentro de la superficie habrá de ser cero. En consecuencia, no puede haber una carga neta dentro del conductor. Cualquier carga neta tiene que residir en la superficie del conductor.

Si hay una cavidad vacía dentro del conductor, ¿se puede acumular carga en esa superficie (interna) también? Como se muestra en la figura 22-20, si imaginamos una superficie gaussiana (indicada con línea punteada) apenas dentro del conductor cubriendo la cavidad, sabremos que \vec{E} debe ser cero en cualquier punto de tal superficie, puesto que está dentro del conductor. Por lo tanto, por la ley de Gauss, *no puede haber una carga neta en la superficie de la cavidad*.

¿Qué pasa si la cavidad no está vacía y hay una carga dentro de ella?

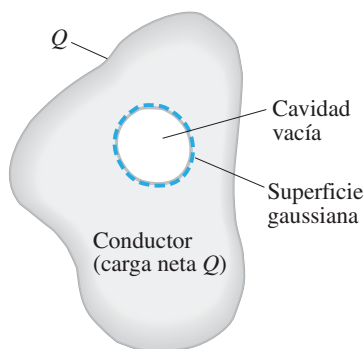


FIGURA 22-20 Una cavidad vacía dentro de un conductor cargado tiene una carga neta igual a cero.

EJEMPLO CONCEPTUAL 22-9 Conductor con una carga dentro de una cavidad.

Suponga que un conductor posee una carga neta $+Q$ y que contiene una cavidad dentro de la cual hay una carga puntual $+q$. ¿Qué puede decir acerca de las cargas en las superficies interna y externa del conductor?

RESPUESTA Como se observa en la figura 22-21, una superficie gaussiana dentro del conductor que rodee justo a la cavidad debe contener una carga neta igual a cero ($E = 0$, dentro de un conductor). Así que una carga neta $-q$ tiene que existir en la superficie de la cavidad. El conductor mismo posee una carga $+Q$, así que su superficie exterior debe portar ahora una carga igual a $Q + q$. Estos resultados se aplican a una cavidad de cualquier forma.

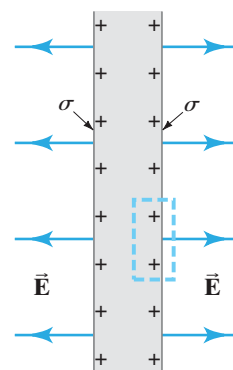


FIGURA 22-18 Conductor delgado plano cargado con densidad superficial de carga σ en cada superficie. Para el conductor como un todo, la densidad de carga es $\sigma' = 2\sigma$.

FIGURA 22-19 Un conductor con carga y aislado de forma arbitraria con una superficie gaussiana justo debajo de la superficie del conductor.

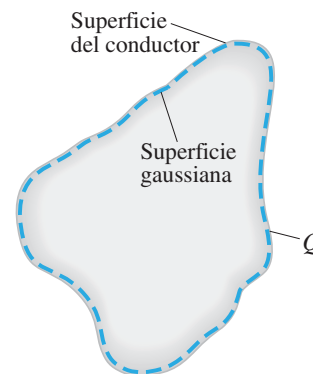
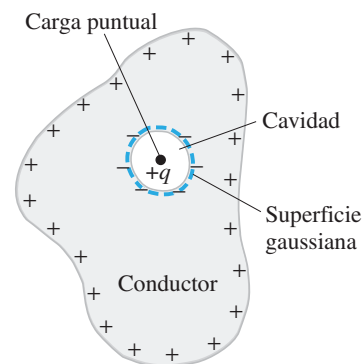


FIGURA 22-21 Ejemplo 22-9.



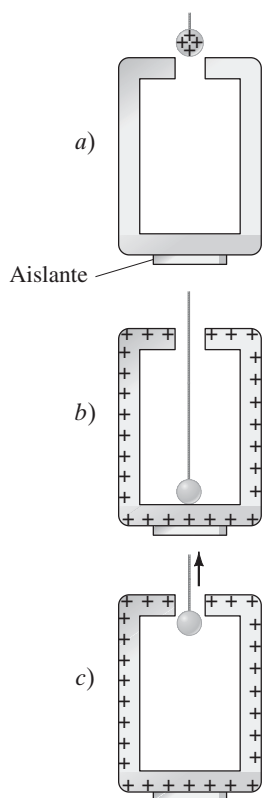
Ley de Gauss para distribuciones simétricas de carga

1. Primero identifique la **simetría** de la distribución de carga: esférica, cilíndrica o plana. Esta identificación debe sugerir la superficie gaussiana para la cual \vec{E} será constante y/o cero sobre toda o parte de la superficie: una esfera para simetría esférica, un cilindro para simetría cilíndrica o un cilindro pequeño (“caja de píldoras”) para simetría plana.
2. Dibuje la superficie gaussiana apropiada verificando que contenga los puntos donde quiere calcular el campo eléctrico.

3. Use la simetría de la distribución de carga para determinar la dirección de \vec{E} en puntos sobre la superficie gaussiana.
4. Evalúe el flujo, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Usando la superficie gaussiana adecuada, el producto punto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ debe ser cero o igual a $\pm E dA$, siendo la magnitud de E constante sobre toda la superficie o parte de ella.
5. Calcule la carga *encerrada* por la superficie gaussiana. Recuerde que lo que importa es la carga encerrada. Ignore todas las cargas fuera de la superficie gaussiana.
6. Iguale el flujo a la carga encerrada y despeje el campo eléctrico E .

EJERCICIO F ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca de la ley de Gauss es correcto?
 a) Si conocemos la carga encerrada en una superficie, siempre sabremos el campo eléctrico en cualquier punto de esa superficie. b) Para encontrar el campo eléctrico usando la ley de Gauss, siempre usamos una esfera como superficie gaussiana. c) Si conocemos el flujo total a través de una superficie, también conoceremos la carga neta dentro de esa superficie. d) Podemos usar la ley de Gauss sólo si el campo eléctrico es constante en el espacio.

FIGURA 22-22 a) Un conductor cargado (una pelota de metal) se hace bajar dentro de una lata de metal (buen conductor) aislada inicialmente neutra. b) La pelota cargada toca la lata y toda su carga fluye de forma rápida hacia la superficie exterior de la lata. c) Cuando se retira la pelota, se encuentra que tiene una carga neta igual a cero.



* 22-4 Base experimental de las leyes de Gauss y de Coulomb

La ley de Gauss predice que la carga neta en cualquier conductor debe residir sólo en su superficie. ¿Pero es esto verdad en la vida real? Veamos cómo se puede verificar esto experimentalmente. Al confirmar esta predicción de la ley de Gauss, también se confirma la ley de Coulomb, ya que esta última se obtiene a partir de la ley de Gauss, como vimos en la sección 22-2. De hecho, la primera observación de que la carga reside sólo en la superficie de un conductor fue registrada por Benjamin Franklin unos 30 años antes de que Coulomb estableciera su ley.

La figura 22-22 ilustra un sencillo experimento. Una lata de metal con una pequeña abertura en la parte superior descansa sobre un material aislante. La lata, que es un conductor, está inicialmente descargada (figura 22-22a). Mediante un hilo aislante se hace descender una bola de metal cargada (también un conductor) dentro de la caja y se permite que toque la caja (figura 22-22b). La pelota y la caja ahora forman un solo conductor. La ley de Gauss, como se explicó, predice que toda la carga fluirá a la superficie externa de la lata. (El flujo de carga en tales situaciones no ocurre en forma instantánea, pero el tiempo implicado, por lo general, es despreciable.) Estas predicciones se confirman con experimentos: **1.** conectando un electroscopio a la lata, lo cual mostrará que la lata está cargada, y **2.** conectando un electroscopio a la pelota después de que se ha retirado de la lata (figura 22-22c), lo cual mostrará que la carga de la pelota es cero.

La precisión con la que se cumplen las leyes de Coulomb y de Gauss puede establecerse cuantitativamente, escribiendo la ley de Coulomb como

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^{2+\delta}}.$$

Para una ley del inverso cuadrado perfecta, $\delta = 0$. Los experimentos más precisos y recientes (1971) indican que $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$. Encontramos que las leyes de Coulomb y de Gauss son válidas con una precisión ¡extremadamente alta!

Resumen

El **flujo eléctrico** que pasa a través de una área plana A para un campo eléctrico \vec{E} es

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}. \quad (22-1b)$$

Si el campo no es uniforme, el flujo se calcula mediante la integral

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (22-2)$$

La dirección del vector \vec{A} o $d\vec{A}$ se elige de manera que sea perpendicular a la superficie cuya área es A o dA , y que apunte hacia fuera de una superficie cerrada. El flujo a través de una superficie es proporcional al número de líneas de campo que la atraviesan.

La **ley de Gauss** establece que el flujo neto que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie Q_{enc} dividida entre ϵ_0 :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}. \quad (22-4)$$

La ley de Gauss puede usarse en principio para determinar el campo eléctrico debido a una distribución de carga dada, pero su uso está limitado principalmente a un número pequeño de casos, donde la distribución de carga tenga gran simetría. La importancia de la ley de Gauss es que es un enunciado más general y elegante (que la ley de Coulomb) para representar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Es una de las ecuaciones básicas del electromagnetismo.

Preguntas

1. Si el campo eléctrico a través de una superficie cerrada es cero, ¿el campo eléctrico es necesariamente cero en todos los puntos de la superficie? Explique. ¿Qué sucede con lo contrario? Es decir, si $\vec{E} = 0$ para todos los puntos de la superficie, ¿el flujo a través de la superficie es cero?
2. ¿Es el campo eléctrico \vec{E} en la ley de Gauss, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$, creado sólo por la carga encerrada Q_{enc} ?
3. Una carga puntual está rodeada por una superficie gaussiana de radio r . Si la esfera se sustituye por un cubo de lado r , ¿será Φ_E mayor, menor o igual? Explique.
4. ¿Qué puede decir acerca del flujo a través de una superficie cerrada que encierra un dipolo eléctrico?
5. El campo eléctrico \vec{E} es cero en todos los puntos de una superficie cerrada; ¿no hay necesariamente una carga neta dentro de la superficie? Si una superficie encierra una carga neta cero, ¿el campo eléctrico es necesariamente cero en todos los puntos sobre la superficie?
6. Defina el flujo gravitacional en analogía con el flujo eléctrico. ¿Hay “fuentes” y “sumideros” para el campo gravitacional, como los hay para el campo eléctrico? Discuta su respuesta.
7. ¿Serviría la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico?
8. A una pelota de básquetbol esférica (un no conductor) se le imparte una carga Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. ¿Qué puede decir acerca del campo eléctrico dentro de la pelota? Ahora, una persona se pone de pie encima de la pelota, comprimiéndola y forzando a que salga la mayor parte del aire sin alterar la carga. ¿Qué puede decir ahora acerca del campo en el interior?
9. En el ejemplo 22-6 se ve que el campo eléctrico calculado se debe sólo a la carga en el alambre que está encerrado por el cilindro que elegimos como superficie gaussiana. De hecho, la carga entera a lo largo del alambre completo contribuye al campo. Explique de qué manera contribuye al campo E en la superficie gaussiana la carga fuera de la superficie cilíndrica gaussiana de

la figura 22-15. [Sugerencia: Compare con lo que sería el campo debido a un alambre corto].

10. Suponga que la línea de carga del ejemplo 22-6 se extiende sólo un poco más allá de las tapas del cilindro mostrado en la figura 22-15. ¿Cómo se alteraría el resultado del ejemplo 22-6?
11. Una carga puntual Q está rodeada por una superficie esférica de radio r_0 , cuyo centro está en el punto C. Después, se mueve la carga a la derecha una distancia $\frac{1}{2}r_0$, pero la esfera permanece donde estaba (figura 22-23). ¿Cómo cambia el flujo Φ_E a través de la esfera? ¿Cambia el campo eléctrico en la superficie de la esfera? Describa el cambio en cada caso si las respuestas fueron afirmativas.

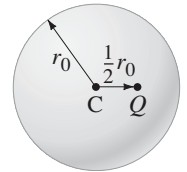


FIGURA 22-23
Pregunta 11.

12. Un conductor sólido transporta una carga neta positiva Q . Hay una cavidad en el conductor, en cuyo centro está una carga puntual negativa $-q$ (figura 22-24). ¿Cuál es la carga a) en la superficie externa del conductor y b) en la superficie interna de la cavidad del conductor?

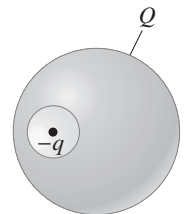


FIGURA 22-24
Pregunta 12.

13. Se localiza una carga puntual q en el centro de una cavidad de un cascarón de metal delgado que es neutro. ¿Sentirá la fuerza eléctrica una carga Q localizada fuera del cascarón? Explique.
14. Se inserta una pequeña bola cargada dentro de un globo. Luego se infla lentamente el globo. Describa cómo cambia el flujo a través de la superficie del globo mientras éste se infla. Considere tanto el flujo total como el flujo por unidad de área del globo.

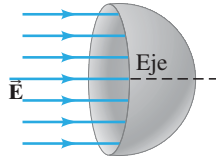
Problemas

22-1 Flujo eléctrico

1. (I) Un campo eléctrico uniforme de magnitud $5.8 \times 10^2 \text{ N/C}$ pasa a través de un círculo de radio de 13 cm. ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del círculo cuando su cara se encuentra a) perpendicular a las líneas de campo, b) a 45° de las líneas de campo y c) paralela a las líneas de campo?
2. (I) La Tierra posee un campo eléctrico de magnitud (promedio) de 150 N/C cerca de su superficie. El campo apunta radialmente hacia dentro. Calcule el flujo eléctrico neto hacia fuera a través de una superficie esférica que justo rodee la superficie de la Tierra.

3. (II) Un cubo de lado ℓ se localiza en un campo eléctrico uniforme E_0 y sus lados son paralelos a las líneas de campo. a) ¿Cuál es el flujo neto a través del cubo? b) ¿Cuál es el flujo a través de cada una de las seis caras?
4. (II) Un campo eléctrico \vec{E} es paralelo al eje de un hemisferio hueco de radio r (figura 22-25). a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie hemisférica? b) ¿Cuál es el resultado si ahora \vec{E} es perpendicular al eje?

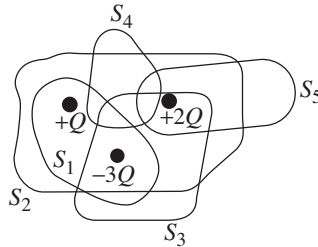
FIGURA 22-25
Problema 4.



22-2 Ley de Gauss

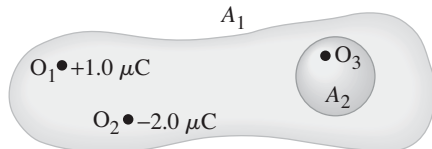
5. (I) El flujo eléctrico total de una caja cúbica de 28.0 cm de lado es $1.84 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. ¿Cuál es la carga encerrada dentro de la caja?
6. (I) La figura 22-26 muestra cinco superficies cerradas que rodean varias cargas en un plano, como se indica. Determine el flujo eléctrico a través de cada superficie: S_1 , S_2 , S_3 , S_4 y S_5 . Las superficies son "cajas de píldoras" planas que se extienden sólo ligeramente arriba y abajo del plano que las contiene.

FIGURA 22-26
Problema 6.



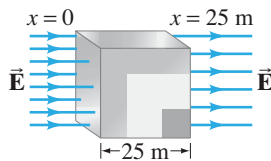
7. (II) En la figura 22-27, dos objetos, O_1 y O_2 , tienen cargas $+1.0 \mu\text{C}$ y $-2.0 \mu\text{C}$, respectivamente, y un tercer objeto, O_3 , es eléctricamente neutro. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie A_1 que encierra a los tres objetos? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie A_2 , que encierra sólo al tercer objeto?

FIGURA 22-27
Problema 7.



8. (II) Un anillo de carga con densidad de carga uniforme está completamente rodeado por una cavidad con forma de rosquilla. Una copia exacta del anillo está encerrada por completo dentro de una esfera hueca. ¿Cuál es el cociente del flujo que sale de la rosquilla con respecto al flujo que sale de la esfera?
9. (II) En cierta región del espacio, el campo eléctrico es constante en dirección (digamos horizontal, en la dirección x), pero su magnitud disminuye desde $E = 560 \text{ N/C}$ en $x = 0$ hasta $E = 410 \text{ N/C}$ en $x = 25 \text{ m}$. Determine la carga dentro de una caja cúbica de lado $\ell = 25 \text{ m}$, con la caja orientada de manera que cuatro de sus lados son paralelos a las líneas de campo (figura 22-28).

FIGURA 22-28
Problema 9.



10. (II) Se localiza una carga puntual Q en el centro de un cubo de lado ℓ . ¿Cuál es el flujo a través de un lado del cubo?

11. (II) Una varilla de plástico cargada de manera uniforme y que mide 15.0 cm de longitud se sella dentro de una bolsa de plástico. El flujo total que sale de la bolsa es de $7.3 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. ¿Cuál es la densidad lineal de carga de la varilla?

22-3 Aplicaciones de las leyes de Gauss

12. (I) Dibuje las líneas de campo alrededor de un huevo de metal cargado negativamente.
13. (I) El campo justo afuera de una bola de metal de 3.50 cm de radio es $6.25 \times 10^2 \text{ N/C}$ y apunta hacia la pelota. ¿Cuál es la carga dentro de la pelota?
14. (I) A partir del resultado del ejemplo 22-3, muestre que el campo eléctrico justo afuera de un conductor esférico cargado uniformemente es $E = \sigma/\epsilon_0$, consistente con el ejemplo 22-8.
15. (I) Un alambre delgado y largo, con cientos de metros de longitud, tiene una carga uniformemente distribuida de $-7.2 \mu\text{C}$ por metro de longitud. Estime la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos a) 5.0 m y b) 1.5 m localizados de manera perpendicular desde el centro del alambre.
16. (I) Un globo de metal tiene un carga de 1.50 mC puesta en el polo norte. Luego se aplican -3.00 mC de carga en el polo sur. Dibuje las líneas de campo para este sistema después de que ha llegado al equilibrio.
17. (II) Una esfera no conductora está hecha de dos capas. La sección interna tiene un radio de 6.0 cm y una densidad de carga uniforme de -5.0 C/m^3 . La capa externa tiene una densidad de carga uniforme de $+8.0 \text{ C/m}^3$ y se extiende desde el radio interior de 6.0 cm hasta un radio exterior de 12.0 cm. Determine el campo eléctrico para a) $0 < r < 6.0 \text{ cm}$, b) $6.0 \text{ cm} < r < 12.0 \text{ cm}$ y c) $12.0 \text{ cm} < r < 50.0 \text{ cm}$. d) Grafique la magnitud del campo eléctrico para $0 < r < 50.0 \text{ cm}$. ¿Es el campo continuo en las fronteras de las capas?
18. (II) Una esfera de metal sólida de radio 3.00 m tiene una carga total de $-5.50 \mu\text{C}$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia del centro de la esfera de a) 0.250 m, b) 2.90 m, c) 3.10 m y d) 8.00 m? ¿Cómo cambiarían las respuestas si la esfera fuera e) un cascarón delgado, o f) un no conductor sólido cargado de manera uniforme?
19. (II) Una esfera no conductora de diámetro de 15.0 cm tiene una carga total de $2.25 \mu\text{C}$ distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Grafique el campo eléctrico E como función de la distancia r desde el centro de la esfera (es decir, desde $r = 0$) hasta $r = 30.0 \text{ cm}$.
20. (II) Una hoja delgada plana cuadrada de aluminio, de 25 cm de lado, tiene una carga distribuida de manera uniforme de 275 nC. ¿Cuál es, de manera aproximada, el campo eléctrico a) a 1.0 cm sobre el centro de la hoja y b) a 15 m sobre el centro de la hoja?
21. (II) Una cavidad esférica de radio de 4.50 cm está en el centro de una esfera de metal con radio de 18.0 cm. Una carga puntual $Q = 5.50 \mu\text{C}$ descansa justo en el centro de la cavidad, mientras que el metal conductor no porta carga neta. Determine el campo eléctrico en un punto a) a 3.00 cm del centro de la cavidad, b) a 6.00 cm del centro de la cavidad, c) a 30.0 cm del centro.
22. (II) Una carga puntual Q descansa en el centro de un cascarón conductor esférico neutro. ¿Cuál es el campo eléctrico E como función de r a) para r menor que el radio del cascarón, b) dentro del cascarón y c) más allá del cascarón? d) ¿Afecta el cascarón al campo debido a Q ? ¿La carga Q afecta al cascarón?

23. (II) Un cubo de metal sólido tiene una cavidad hueca esférica en su centro, como se ilustra en la figura 22-29. En el centro de la cavidad hay una carga puntual $Q = +8.00 \mu\text{C}$. El cubo de metal tiene una carga neta de $q = -6.10 \mu\text{C}$ (sin incluir a Q). Determine *a*) la carga total sobre la superficie de la cavidad esférica y *b*) la carga total en la superficie exterior del cubo.

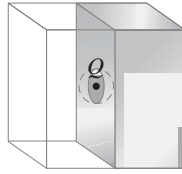


FIGURA 22-29
Problema 23.

24. (II) Dos largas placas planas de metal están separadas una distancia que es muy pequeña comparada con su largo y su ancho. A los conductores se les imparten cargas opuestas con densidad de carga uniforme $\pm \sigma$. Ignore los efectos de borde y con base en la ley de Gauss demuestre *a*) que para puntos lejanos de los bordes el campo eléctrico entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0$ y *b*) que en cualquier lado afuera de las placas el campo eléctrico es cero. *c*) ¿Cómo cambiarían sus resultados si las dos placas fueran no conductoras? (Véase la figura 22-30.)



FIGURA 22-30
Problemas 24, 25 y 26.

25. (II) Suponga que las dos placas conductoras del problema 24 tienen el mismo signo e igual magnitud de carga. ¿Cuál sería entonces el campo eléctrico *a*) entre las placas y *b*) a cualquier lado fuera de ellas? *c*) ¿Qué pasa si las placas son no conductoras?
26. (II) El campo eléctrico entre dos placas de metal cuadradas es de 160 N/C . Las placas tienen 1.0 m de arista y están separadas por 3.0 cm , como en la figura 22-30. ¿Cuál es la carga en cada placa? Ignore los efectos de borde.
27. (II) Dos cascarones esféricos concéntricos de radio r_1 y r_2 ($r_1 < r_2$) contienen densidades de carga uniforme σ_1 y σ_2 , respectivamente (véase la figura 22-31). Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_2$ y *c*) $r > r_2$. *d*) ¿En qué condiciones será $E = 0$ para $r > r_2$? *e*) ¿En qué condiciones será $E = 0$ para $r_1 < r < r_2$? Ignore el grosor de los cascarones.

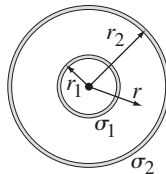


FIGURA 22-31 Dos cascarones esféricos (problema 27).

28. (II) Un globo de hule esférico tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. En $t = 0$ el globo no conductor tiene un radio r_0 y el globo se infla lentamente, de manera que r se incrementa en forma lineal hasta $2r_0$ en un tiempo t . Determine el campo eléctrico como función del tiempo *a*) justo fuera de la superficie del globo y *b*) en $r = 3.2 r_0$.
29. (II) Suponga que la esfera no conductora del ejemplo 22-4 tiene una cavidad esférica de radio r_1 centrada en el centro de la esfera (figura 22-32). Suponiendo que la carga Q está distribuida de manera uniforme en el "cascarón" (entre $r = r_1$ y $r = r_0$), determine el campo eléctrico como función de r para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_0$ y *c*) $r > r_0$.

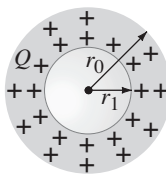


FIGURA 22-32
Problemas 29, 30, 31 y 44.

30. (II) Suponga que en la figura 22-32 (problema 29), también hay una carga q en el centro de la cavidad. Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_1$, *b*) $r_1 < r < r_0$ y *c*) $r > r_0$.

31. (II) Suponga que el cascarón esférico grueso del problema 29 es un conductor. Tiene una carga total neta Q y en su centro hay una carga puntual q . ¿Cuál es la carga total que se encuentra *a*) en la superficie interior del cascarón y *b*) en la superficie exterior del cascarón? Determine el campo eléctrico para *c*) $0 < r < r_1$, *d*) $r_1 < r < r_0$ y *e*) $r > r_0$.

32. (II) Suponga que en el centro de la cavidad dentro del cascarón (carga Q) de la figura 22-11 (ejemplo 22-3) hay una carga puntual q ($q \neq \pm Q$). Determine el campo eléctrico para *a*) $0 < r < r_0$ y para *b*) $r > r_0$. ¿Cuál sería su respuesta si *c*) $q = Q$ y *d*) $q = -Q$?

33. (II) Un largo cascarón cilíndrico de radio R_0 y longitud ℓ ($R_0 \ll \ell$) posee una densidad superficial de carga uniforme (carga por unidad de área) σ (figura 22-33). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cilindro ($R > R_0$) y *b*) dentro del cilindro ($0 < R < R_0$); suponga que los puntos están lejos de los extremos y no muy lejos del cascarón ($R \ll \ell$). *c*) Compare el resultado para una línea larga de carga (ejemplo 22-6). Ignore el grosor del cascarón.

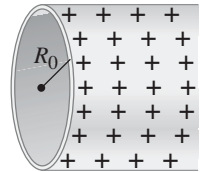


FIGURA 22-33
Problema 33.

34. (II) Un cilindro no conductor sólido muy largo de radio R_0 y longitud ℓ ($R_0 \ll \ell$) posee una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E (C/m^3) (figura 22-34). Determine el campo eléctrico en puntos *a*) fuera del cilindro ($R > R_0$) y *b*) dentro del cilindro ($R < R_0$). Considere sólo puntos muy alejados de los extremos del alambre y que $R \ll \ell$.

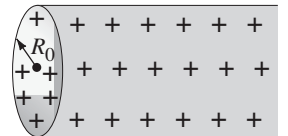


FIGURA 22-34
Problema 34.

35. (II) Un cascarón cilíndrico delgado de radio R_1 está rodeado por un segundo cascarón cilíndrico concéntrico de radio R_2 (figura 22-35). El cascarón interior tiene una carga total $+Q$ y el exterior una carga $-Q$. Suponiendo que la longitud ℓ de los cascarones es mucho mayor que R_1 o R_2 , determine el campo eléctrico como función de R (la distancia perpendicular desde el eje común de los cilindros) para *a*) $0 < R < R_1$, *b*) $R_1 < R < R_2$ y *c*) $R > R_2$. *d*) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón si se desplaza entre los cascarones (y concéntrico con ellos) en una órbita circular de radio $(R_1 + R_2)/2$? Ignore el grosor de los cascarones.

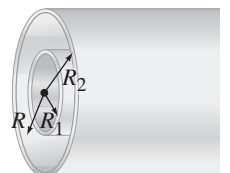


FIGURA 22-35
Problemas 35, 36 y 37.

36. (II) Un cascarón cilíndrico delgado de radio $R_1 = 6.5 \text{ cm}$ está rodeado por un segundo cascarón cilíndrico de radio $R_2 = 9.0 \text{ cm}$, como en la figura 22-35. Ambos cilindros miden 5.0 m de longitud y el cascarón interno tiene una carga total $Q_1 = -0.88 \mu\text{C}$ y el externo una carga neta $Q_2 = +1.56 \mu\text{C}$. Determine el campo eléctrico para puntos lejanos de los extremos de los cilindros a una distancia radial R desde el eje central de *a*) 3.0 cm , *b*) 7.0 cm y *c*) 12.0 cm .
37. (II) *a*) Si un electrón ($m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$) se escapa de la superficie del cilindro interior en el problema 36 (figura 22-35) con rapidez despreciable, ¿cuál será su rapidez cuando llegue al cilindro exterior? *b*) Si un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) gira en una órbita circular de radio $r = 7.0 \text{ cm}$ en torno al eje (es decir, entre los cilindros), ¿qué rapidez debe tener?

38. (II) Un cilindro no conductor sólido muy largo de radio R_1 tiene una carga uniforme con densidad de carga ρ_E . Está rodeado por un tubo cilíndrico concéntrico de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (como se ilustra en la figura 22-36), el cual también tiene una densidad de carga uniforme ρ_E . Determine el campo eléctrico como función de la distancia R desde el centro de los cilindros para a) $0 < R < R_1$, b) $R_1 < R < R_2$, c) $R_2 < R < R_3$ y d) $R > R_3$. e) Si $\rho_E = 15 \mu\text{C}/\text{m}^3$ y $R_1 = \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{3}R_3 = 5.0 \text{ cm}$, grafique E como función de R desde $R = 0$ hasta $R = 20.0 \text{ cm}$. Suponga que los cilindros son muy largos comparados con R_3 .

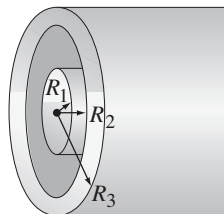


FIGURA 22-36
Problema 38.

39. (II) Una esfera no conductora de radio r_0 tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E . Está rodeada por una esfera de metal (conductora) concéntrica de radio interior r_1 y radio exterior r_2 , que tiene una carga neta $+Q$. Determine el campo eléctrico resultante en las regiones a) $0 < r < r_0$, b) $r_0 < r < r_1$, c) $r_1 < r < r_2$ y d) $r > r_2$, donde la distancia radial r se mide desde el centro de la esfera no conductora.
40. (II) Un cilindro sólido no conductor muy largo de radio R_1 tiene una carga uniforme con densidad de carga ρ_E . Está rodeado por un tubo de metal (conductor) cilíndrico de radio interior R_2 y radio exterior R_3 , que no tiene una carga neta (la figura 22-37 muestra un corte transversal). Si los ejes de los dos cilindros son paralelos, pero están separados una distancia d , determine el campo eléctrico resultante en la región $R > R_3$, donde la distancia radial R se mide desde el eje del cilindro de metal. Considere que $d < (R_2 - R_1)$.

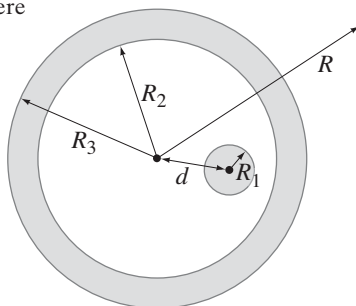


FIGURA 22-37
Problema 40.

41. (II) Un anillo plano (radio interior R_0 y radio exterior $4R_0$) está cargado de manera uniforme. Determine, en términos de la carga total Q , el campo eléctrico sobre el eje en los puntos a) $0.25 R_0$ y b) $75R_0$ desde el centro del anillo. [Sugerencia: El anillo puede sustituirse por dos discos superpuestos con cargas opuestas].
42. (II) Una esfera conductora sólida descargada y de radio r_0 contiene dos cavidades esféricas de radios r_1 y r_2 , respectivamente. Se sitúa una carga puntual Q_1 dentro de la cavidad de radio r_1 y una carga puntual Q_2 se sitúa dentro de la cavidad de radio r_2 (figura 22-38). Determine el campo eléctrico resultante (magnitud y dirección) en posiciones fuera de la esfera sólida ($r > r_0$), donde r es la distancia desde su centro.

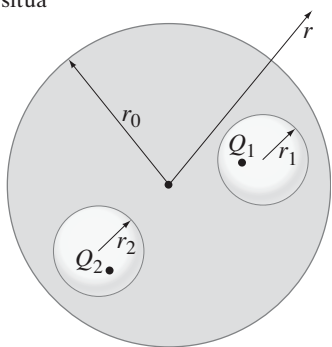


FIGURA 22-38
Problema 42.

43. (III) Una lámina de material no conductor plana muy larga (considérela infinita) tiene un espesor d y una densidad volumétrica de carga uniforme $+\rho_E$. a) Muestre que existe un campo eléctrico uniforme fuera de esta lámina. Determine su magnitud y su dirección (con respecto a la superficie de la lámina). b) Como se aprecia en la figura 22-39, la lámina se orienta de manera que ahora una de sus caras yace a lo largo de la recta $y = x$. En $t = 0$, una partícula puntual (masa m , carga $+q$) está ubicada en la posición $\vec{r} = +y_0\hat{j}$ y tiene velocidad $\vec{v} = v_0\hat{i}$. Muestre que la partícula chocará con la lámina si $v_0 \geq \sqrt{2qy_0\rho_E d/\epsilon_0 m}$. Ignore la gravedad.

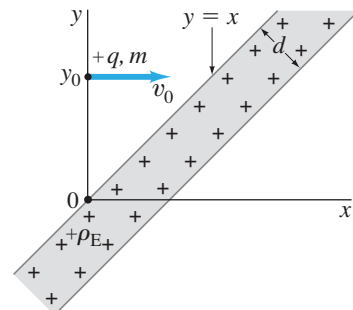


FIGURA 22-39
Problema 43.

44. (III) Suponga que la densidad de carga entre r_1 y r_0 de la esfera hueca del problema 29 (figura 22-32) varía como $\rho_E = \rho_0 r_1/r$. Determine el campo eléctrico como función de r para a) $0 < r < r_1$, b) $r_1 < r < r_0$, c) $r > r_0$. d) Grafique E contra r desde $r = 0$ hasta $r = 2r_0$.
45. (III) Suponga que dos placas planas delgadas miden $1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m}$ y que están separadas por 5.00 mm . Tienen cargas opuestas de $\pm 15 \mu\text{C}$. a) Estime la fuerza total ejercida por una placa sobre la otra (ignore los efectos de borde). b) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover las placas desde una separación de 5.0 mm hasta 1.00 cm ?
46. (III) Una lámina delgada de material no conductor (figura 22-40) tiene una carga uniforme por unidad de volumen ρ_E . La lámina cuenta con un espesor d , que es pequeño comparado con su largo y ancho. Determine el campo eléctrico como función de x a) dentro de la lámina y b) fuera de la lámina (a distancias mucho menores que su ancho o su largo). Considere el origen en el centro de la lámina.

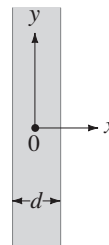


FIGURA 22-40
Problema 46.

47. (III) Una lámina delgada de material no conductor tiene un espesor $2d$, que es pequeño en comparación con su largo y su ancho. Defina el eje x a lo largo de la dirección del espesor de la lámina con el origen en el centro de la lámina (figura 22-41). Si la lámina tiene una densidad de carga volumétrica tal que $\rho_E(x) = -\rho_0$ y $\rho_E(x) = +\rho_0$ en las regiones $-d \leq x < 0$ y $0 < x \leq +d$, respectivamente, donde ρ_0 es una constante positiva. Determine el campo eléctrico \vec{E} como función de x en las regiones a) fuera de la lámina, b) $0 < x \leq +d$ y c) $-d \leq x < 0$.

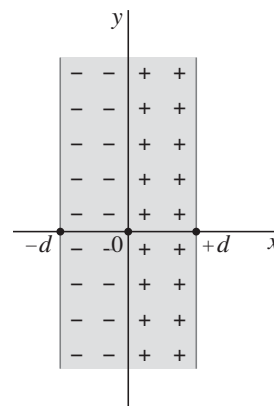


FIGURA 22-41
Problema 47.

48. (III) Un cilindro no conductor sólido extremadamente largo tiene un radio R_0 . La densidad de carga dentro del cilindro es una función de la distancia R desde el eje dada por $\rho_E(R) = \rho_0(R/R_0)^2$. ¿Cuál es el campo eléctrico en cualquier punto dentro y fuera del cilindro (lejos de sus bordes) en términos de ρ_0 y R_0 ?

49. (III) Se distribuye carga dentro de una esfera sólida de radio r_0 , de manera que la densidad de carga es una función de la posición radial dentro de la esfera de la forma: $\rho_E(r) = \rho_0(r/r_0)$. Si la carga total dentro de la esfera es Q (y positiva), ¿cuál es el campo eléctrico en cualquier punto dentro de la esfera en términos de Q , r_0 y la posición radial r ?

Problemas generales

50. Una carga puntual Q está sobre el centro del eje de un cilindro corto. El diámetro del cilindro es igual a su longitud ℓ (figura 22-42). ¿Cuál es el flujo total a través de la pared curva del cilindro? [Sugerencia: Calcule el flujo a través de las dos tapas.]

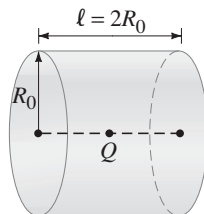


FIGURA 22-42
Problema 50.

51. Escriba la ley de Gauss para el campo gravitacional \vec{g} (véase la sección 6-6).
52. La Tierra está rodeada de un campo eléctrico, dirigido hacia dentro en cada punto, de magnitud $E \approx 150 \text{ N/C}$ cerca de la superficie. a) ¿Cuál es la carga neta de la Tierra? b) ¿A cuántos electrones en exceso por metro cuadrado de la superficie de la Tierra corresponde esto?
53. Un cubo de lado ℓ tiene una esquina en el origen de coordenadas y se extiende a lo largo de los ejes positivos x , y y z . Suponga que el campo eléctrico en esta región está dado por $\vec{E} = (ay + b)\hat{j}$. Determine la carga dentro del cubo.
54. Una esfera no conductora sólida de radio r_0 tiene una carga total Q que está distribuida de acuerdo con $\rho_E = br$, donde ρ_E es la carga por unidad de volumen o densidad de carga (C/m^3) y b es una constante. Determine a) b en términos de Q , b) el campo eléctrico en puntos dentro de la esfera y c) el campo eléctrico en puntos afuera de la esfera.
55. Una carga puntual de 9.20 nC está localizada en el origen, y una segunda carga de -5.00 nC está localizada sobre el eje x en $x = 2.75 \text{ cm}$. Calcule el flujo eléctrico a través de una esfera centrada en el origen de radio de 1.00 m . Repita el cálculo para una esfera de radio de 2.00 m .
56. Una carga puntual produce un flujo eléctrico de $+235 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ a través de una esfera gaussiana con radio de 15.0 cm y centrada en la carga. a) ¿Cuál es el flujo a través de una esfera gaussiana de 27.5 cm de radio? b) ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga?
57. Una carga puntual Q se localiza a una distancia $r = r_0/2$ por arriba de la superficie de una esfera imaginaria de radio r_0 (figura 22-43). a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la esfera? b) ¿Qué intervalo de valores tiene E sobre la superficie de la esfera? c) ¿Es \vec{E} perpendicular a la esfera en todos los puntos? d) ¿Es la ley de Gauss útil para obtener E sobre la superficie de la esfera?

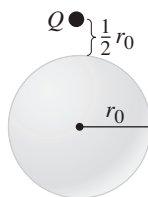


FIGURA 22-43
Problema 57.

58. Tres hojas largas, pero delgadas, y con carga son paralelas entre sí, como se muestra en la figura 22-44. La hoja I tiene una densidad superficial de carga de 6.5 nC/m^2 ; la hoja II tiene una carga de -2.0 nC/m^2 , y la hoja III, una carga de 5.0 nC/m^2 . Estime la fuerza por unidad de área sobre cada hoja en N/m^2 .

FIGURA 22-44
Problema 58.

59. El hidrógeno neutro se puede modelar como una carga positiva de $+1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, rodeada por una distribución negativa de carga con densidad volumétrica dada por $\rho_E(r) = -Ae^{-2r/a_0}$ donde $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ es el radio de Bohr, A es una constante tal que la cantidad total de carga negativa es $-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ y $e = 2.718$ es la base de los logaritmos naturales. a) ¿Cuál es la carga neta dentro de una esfera de radio a_0 ? b) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico a una distancia a_0 desde el núcleo? [Sugerencia: No confunda la función exponencial e con la carga elemental e que usa el mismo símbolo, pero que tiene un significado y un valor completamente diferentes ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$).
60. Un plano delgado muy largo tiene una densidad superficial de carga uniforme σ . Haciendo contacto por la derecha (figura 22-45) hay una lámina ancha y larga de espesor d con densidad volumétrica de carga uniforme ρ_E . Determine el campo eléctrico a) a la izquierda del plano, b) a la derecha de la lámina y c) en cualquier punto dentro de la lámina.

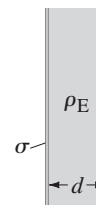


FIGURA 22-45
Problema 60.

61. Una esfera de radio r_0 tiene una densidad de carga volumétrica ρ_E (figura 22-46). Dentro de la esfera se perfora una cavidad esférica de radio $r_0/2$ y se deja hueca, como se muestra. a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto A? b) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto B? Los puntos A y C están en el centro de sus respectivas esferas.

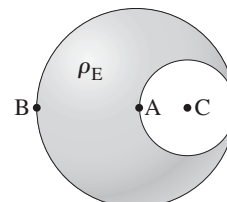


FIGURA 22-46
Problema 61.

62. El aire seco se rompe y genera una chispa si el campo eléctrico excede cerca de $3 \times 10^6 \text{ N/C}$. ¿Cuánta carga podría haber dentro de la superficie de un guisante (diámetro de 0.75 cm) antes de que el guisante se descargue espontáneamente?

63. Tres hojas muy largas están separadas por distancias iguales de 15.0 cm (figura 22-47). La primera y la tercera son muy delgadas y no conductoras, además de que poseen una carga por unidad de área σ de $+5.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y $-5.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$, respectivamente. La hoja central es conductora, pero no tiene una carga neta. a) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la hoja central? ¿Cuál es el campo eléctrico b) entre la hoja izquierda y la hoja central, y c) entre la hoja central y la hoja derecha? d) ¿Cuál es la densidad de carga sobre la superficie de la hoja central que da hacia la hoja izquierda y e) sobre la superficie de la hoja central que da hacia la hoja derecha?

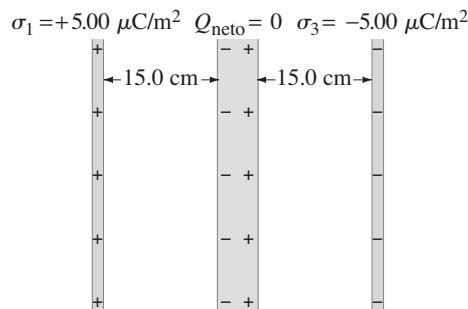


FIGURA 22-47 Problema 63.

64. En un volumen cúbico, de 0.70 m de arista, el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = E_0 \left(1 + \frac{z}{a} \right) \hat{i} + E_0 \left(\frac{z}{a} \right) \hat{j}$$

donde $E_0 = 0.125 \text{ N/C}$ y $a = 0.70 \text{ m}$. El cubo tiene sus lados paralelos a los ejes coordenados (figura 22-48). Determine la carga neta dentro del cubo.

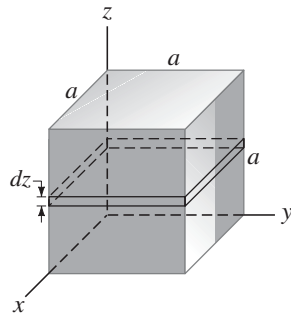


FIGURA 22-48 Problema 64.

65. Un cascarón esférico conductor (figura 22-49) tiene un radio interior de 10.0 cm, un radio exterior de 15.0 cm y una carga puntual de $+3.0 \mu\text{C}$ en su centro. Se pone una carga de $-3 \mu\text{C}$ sobre el conductor. a) ¿A dónde va a dar la carga eléctrica de $-3.0 \mu\text{C}$ sobre el conductor? b) ¿Cuál es el campo eléctrico tanto dentro como fuera del cascarón?

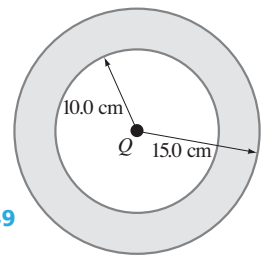


FIGURA 22-49 Problema 65.

66. Se coloca un hemisferio esférico de radio R en una región del espacio libre de carga donde existe un campo eléctrico uniforme de magnitud E dirigido de manera perpendicular a la base circular del hemisferio (figura 22-50). a) Usando la definición de Φ_E a través de una superficie "abierta", calcule (con integración explícita) el flujo eléctrico a través del hemisferio. [Sugerencia: En la figura 22-50 puede ver que, sobre la superficie de una esfera, el área infinitesimal localizada entre los ángulos θ y $\theta + d\theta$ es $dA = (2\pi R \sin \theta)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$.] b) Elija una superficie gaussiana apropiada y use la ley de Gauss para obtener, mucho más fácilmente, el mismo resultado para el flujo eléctrico a través del hemisferio.

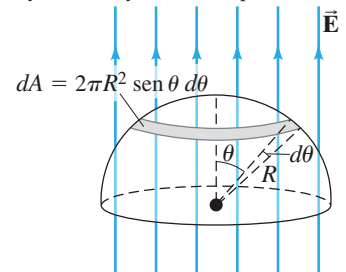


FIGURA 22-50 Problema 66.

* Problema numérico/por computadora

- *67. (III) Un campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = E_{x0} e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} \hat{i} + E_{y0} e^{-\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} \hat{j},$$

donde $E_{x0} = 50 \text{ N/C}$, $E_{y0} = 25 \text{ N/C}$ y $a = 1.0 \text{ m}$. Dado un cubo con lados paralelos a los ejes coordenados, con una esquina en el origen (como en la figura 22-48), y con lados de 1.0 m de longitud, estime el flujo que sale del cubo usando una hoja de cálculo u otro método numérico. ¿Cuál es la carga total encerrada por la superficie?

Respuestas a los ejercicios

A: d).

B: a).

C: d).

D: e).

E: c).

F: c).