Errores de truncamiento y propagación

Métodos Numéricos

Prof. Juan Pablo Concha y Eduardo Uribe

Conferencia 4

Conferencia 4

Conceptos Básicos

Definición

Los errores de truncamiento resultan de calcular utilizando una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto.

Teorema de Taylor

Si una función f y sus derivadas hasta el orden $(n+1)$ son continuas en un intervalo que contiene a los números $\bar{x}$ y x, entonces el valor de la función en x está dado por:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-\bar{x})^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x-\bar{x})^n + R_n$$

El error R_n puede estimarse como (con ξ entre $\bar{x}$ y x)

$$R_n = \int_{\bar{x}}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\bar{x})^{(n+1)}$$

Ejemplos

Otra forma del Teorema de Taylor ($h > 0$ y ξ entre x y $x + h$)

$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{(n+1)}$$

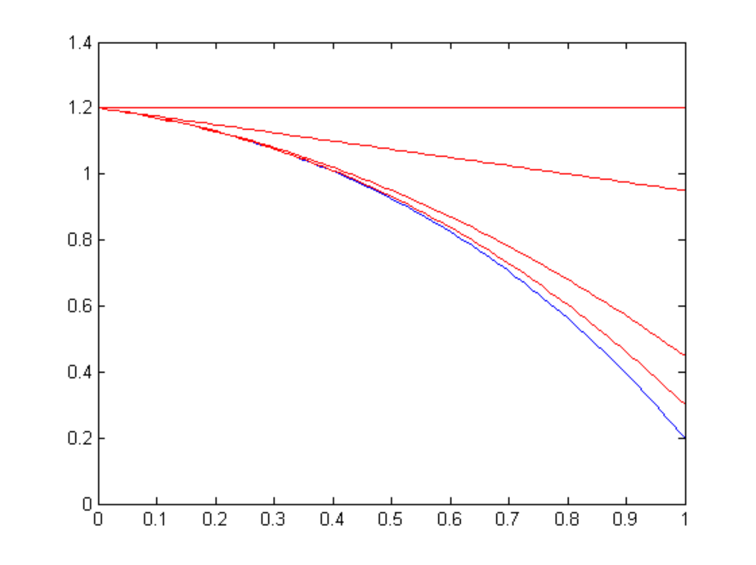
Problema

Predecir el valor de $f(1)$ utilizando los polinomios de Taylor de hasta orden cuatro centrados en 0 ($h = 1$), donde:

$$f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2 = p_4(x)$$

$$\begin{aligned}
p_0(1) &= f(0) = 1{,}2 \\
p_1(1) &= f(0) + f'(0) = 1{,}2 - 0{,}25 = 0{,}95 \\
p_2(1) &= f(0) + f'(0) + f''(0)/2 = 0{,}95 - 1/2 = 0{,}45 \\
p_3(1) &= f(0) + f'(0) + f''(0)/2 + f^{(3)}(0)/6 = 0{,}45 - 0{,}15 = 0{,}3 \\
p_4(1) &= f(1) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2
\end{aligned}$$

Polinomios de Taylor de un polinomio



Ejemplos

Problema

Considere la función $f(x) = cos(x)$ cercana al punto $x_0 = 0$. Construya los polinomios de Taylor de orden 2 y 3 de $f(x)$ en torno al punto x_0 y estime con ellos el valor de $cos(0{,}01)$.

Solución (Orden 2)

$f(0) = cos(0) = 1,\ f'(0) = -sen(0) = 0,\ f''(0) = -cos(0) = -1$

$$\begin{aligned} p_2(h) &= 1 - \tfrac{1}{2}h^2 \\ cos(h) &= 1 - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{6}sen(\xi)h^3 \\ cos(0{,}01) &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(0{,}01)^2 = 0{,}99995 \end{aligned}$$

Error:

$E = \frac{1}{6}sen(\xi)(0{,}01)^3 = 0{,}1\overline{6} \cdot 10^{-6} sen(\xi) \leq 0{,}1\overline{6} \cdot 10^{-6}$

Como $\xi \leq 0{,}01$ y $sen(t) \leq t$: $E = 0{,}1\overline{6} \cdot 10^{-6} sen(\xi) \leq 0{,}1\overline{6} \cdot 10^{-8}$

Ejemplos

Problema

Considere la función $f(x) = cos(x)$ cercana al punto $x_0 = 0$. Construya los polinomios de Taylor de orden 2 y 3 de $f(x)$ en torno al punto x_0 y estime con ellos el valor de $cos(0{,}01)$.

Solución (Orden 3)

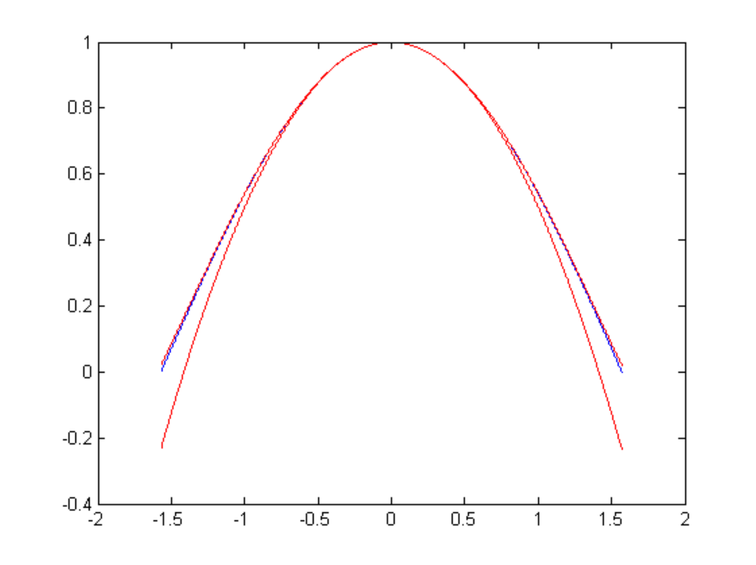
$f'''(0) = sen(0) = 0$

$$\begin{aligned} p_3(h) &= p_2(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2 \\ cos(h) &= 1 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{24}cos(\xi)h^4 \\ cos(0{,}01) &\approx 1 - \frac{1}{2}(0{,}01)^2 = 0{,}99995 \end{aligned}$$

Error:

$|E| = |\frac{1}{24}cos(\xi)(0{,}01)^4| = 4{,}1\overline{6} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-8} cos(\xi) \leq 4{,}1\overline{6} \cdot 10^{-10}$

Polinomios de Taylor del cos



Funciones de una variable

Propagación del error absoluto

Por Teorema de Taylor

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - \bar{x})^2 + \dots$$

Desechando términos de orden mayor:

$$E_a(f(x)) = |f(x) - f(\bar{x})| \cong |f'(\bar{x})||(x - \bar{x})| = |f'(\bar{x})|E_a(x)$$

Ejemplo

Dado x una aproximación de $\bar{x} = 2{,}5$ con un error absoluto máximo de $E_a(x) = 0{,}01$, estimar el error absoluto resultante de evaluar $f(x) = x^3$.

Funciones de una variable

Ejemplo

Dado x una aproximación de $\bar{x} = 2{,}5$ con un error absoluto máximo de $E_a(x) = 0{,}01$, estimar el error absoluto resultante de evaluar $f(x) = x^3$.

Solución: $E_a(f(x)) = |f'(\bar{x})|E_a(x)$

$$E_a(f(x)) = 3(2{,}5)^2(0{,}01) = 0{,}1875$$

Como $f(2{,}5) = 15{,}625$ entonces, de manera aproximada:

$$f(x) \in [15{,}625 - 0{,}1875, 15{,}625 + 0{,}1875] = [15{,}4375, 15{,}8125]$$

En efecto:

$$f(2{,}49) = 15{,}4382; \quad f(2{,}51) = 15{,}8132$$

Funciones de varias variables

Formula de Taylor general

Para una función suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla^T f(\bar{x})(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \ldots$$

Por ejemplo para $n = 2$, $\bar{x} = (0, 0)^T$.

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2^2} x_2^2 + \ldots$$

Variación del error absoluto:

$$|f(x) - f(\bar{x})| \cong |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}| \cdot |x_1 - \bar{x}_1| + \ldots + |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}| \cdot |x_n - \bar{x}_n|$$

$$E_a(f(x)) \cong |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}| E_a(x_1) + \ldots + |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}| E_a(x_n)$$

Ejemplo de propagación del error absoluto

Estimar el valor de evaluar

$$y(F, L, E, I) = \frac{FL^4}{8EI}$$

para el punto $(\bar{F}, \bar{L}, \bar{E}, \bar{I})^T = (50, 30, 1{,}5 \times 10^8, 0{,}06)$ utilizando una aproximación (F, L, E, I) sujeta a un error $(E_a(F), E_a(L), E_a(E), E_a(I))^T = (2, 0{,}1, 0{,}01 \times 10^8, 0{,}0006)$

Solución:

$$E_a(y) \cong |\frac{\partial y}{\partial F}|E_a(F) + |\frac{\partial y}{\partial L}|E_a(L) + |\frac{\partial y}{\partial E}|E_a(E) + |\frac{\partial y}{\partial I}|E_a(I)$$

$$E_a(y) \cong |\frac{\bar{L}^4}{8\bar{E}\bar{I}}|E_a(F) + |\frac{\bar{F}\bar{L}^3}{2\bar{E}\bar{I}}|E_a(L) + |\frac{\bar{F}\bar{L}^4}{8\bar{E}^2\bar{I}}|E_a(E) + |\frac{\bar{F}\bar{L}^4}{8\bar{E}\bar{I}^2}|E_a(I)$$

$$E_a(y) \cong 0{,}0225 + 0{,}0075 + 0{,}00375 + 0{,}005625 = 0{,}039375$$

Ejemplo de propagación del error absoluto

Estimar el error de evaluar

$$y(F,L,E,I) = \frac{FL^4}{8EI}$$

para el punto $(\bar{F},\bar{L},\bar{E},\bar{I})^T = (50, 30, 1{,}5 \times 10^8, 0{,}06)$ utilizando una aproximación (F,L,E,I) sujeta a un error $(E_a(F), E_a(L), E_a(E), E_a(I))^T = (2, 0{,}1, 0{,}01 \times 10^8, 0{,}0006)$

Solución:

$$E_a(y) \cong 0{,}0225 + 0{,}0075 + 0{,}00375 + 0{,}005625 = 0{,}039375$$

Luego: $y \cong 0{,}5625 \pm 0{,}039375 \in [0{,}523125, 0{,}601875]$

$$y_{min} = \frac{48(29{,}9)^4}{8(1{,}51\times 10^8)0{,}0606} = 0{,}52407$$

$$y_{max} = \frac{52(31{,}1)^4}{8(1{,}49\times 10^8)0{,}0594} = 0{,}60285$$

Propagación del Error relativo en varias variables

Variación del error relativo:

Partiendo del resultado para el error absoluto:

$$|f(x) - f(\bar{x})| \cong |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}| \cdot |x_1 - \bar{x}_1| + \ldots + |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}| \cdot |x_n - \bar{x}_n|$$

Tenemos:

$$\frac{|f(x) - f(\bar{x})|}{|f(\bar{x})|} \cong |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}| \cdot \frac{|\bar{x}_1|}{|f(\bar{x})|} \cdot \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{|\bar{x}_1|} + \ldots + |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}| \cdot \frac{|\bar{x}_n|}{|f(\bar{x})|} \cdot \frac{|x_n - \bar{x}_n|}{|\bar{x}_n|}$$

$$E_r(f(x)) \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{|\bar{x}_i|}{|f(\bar{x})|} |\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}| E_r(x_i)$$

Ejemplos

Operaciones sencillas

En general:

$$E_r(f(x)) \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{|\bar{x}_i|}{|f(\bar{x})|} \left|\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right| E_r(x_i)$$

Multiplicación y división

$$E_r(x_1 \cdot x_2) = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\bar{x}_2 E_r(x_1) + \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\bar{x}_1 E_r(x_2) = E_r(x_1) + E_r(x_2)$$

$$E_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{\bar{x}_1}{\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}} \frac{1}{\bar{x}_2} E_r(x_1) + \frac{\bar{x}_2}{\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}} \frac{-\bar{x}_1}{\bar{x}_2^2} E_r(x_2) = E_r(x_1) - E_r(x_2)$$

Suma y resta

$$E_r(x_1 \pm x_2) = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} E_r(x_1) + \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} E_r(x_2)$$

Ejercicios

1) Calcular la cota del error absoluto y relativo al efectuar la siguiente operación

$$\frac{7\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{3}}$$

Se toman como datos las aproximaciones siguientes

$$\pi = 3{,}14 \qquad \sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{3} = 1{,}7$$

2) Usando la fórmula de propagación de errores, determine cuántas cifras exactas se necesitan en el número $\sqrt{3}$(con truncamiento) para que el resultado de calcular $(5 - 2\sqrt{3})^4$ tenga 3 decimales exactos.

3) Se quiere calcular e^{-5} para ello se proponen dos alternativas
   - Calcular el polinomio de Taylor de tercer orden de $f(x) = e^{-x}$ y después evaluar $f(5)$.
   - Calcular el polinomio de Taylor de tercer orden de $f(x) = e^{x}$ y después evaluar $\dfrac{1}{f(5)}$.

   Usando una aritmética de tres dígitos. ¿Qué estrategia es mejor y por qué?

Ejercicios

4) Para medir la altura de un árbol L, se mide la longitud de su sombre L_1, la altura de un objeto de referencia L_2 y la longitud de su sombra. Por semejanza:

$$L = L_1 \frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan $L_1 = 200 \pm 2$ cm, $L_2 = 100 \pm 0{,}4$ cm, $10{,}3 \pm 0{,}2$ cm. Determine el error cometido al medir la altura del árbol.

5) Considere las funciones

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2+1} \qquad \text{y} \qquad \bar{f}(x) = \frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

a) Calcule el polinomio de Taylor $P(x)$ de cuarto orden en torno a $x_0 = 0$.

b) Usando Aritmética de cuatro dígitos con redondeo calcule:

- $f(0{,}01)$
- $\bar{f}(0{,}01)$
- $P(0{,}01)$

c) Si el valor real es $\bar{x} = -0{,}4999 \times 10^{-4}$. ¿Qué método entrega una mejor aproximación?

Ejercicios

6) La fórmula de Manning para un canal rectangular se escribe como

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(BH)^{5/3}}{(B + 2H)^{2/3}} S^{1/2}$$

donde $Q =$ flujo(m^3/s), $n =$ coeficiente de rugosidad, $B =$ ancho (m), $H =$ profundidad (m) y $S =$ pendiente. Aplique la fórmula para un arroyo donde se conoce $B = 20\ m$ y la profundidad $H = 0{,}3\ m$, pero el coeficiente de rugosidad y la pendiente se conocen con una precisión de $\pm 10\,\%$. El coeficiente de rugosidad tiene una medición aproximada de $n = 0{,}03$ y la pendiente $S = 0{,}0003$. Estime el error propagado al calcular el flujo. Si se puede volver a medir uno de los factores. ¿Cuál se debería volver a medir para una mejor precisión?