Ciencias de la Computación I

Principios de Conteo

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

22 de agosto de 2016

1. Reglas de Suma y Producto
2. Permutaciones
3. Combinaciones

El primer principio de conteo a utilizar es el siguiente:

Regla de la Suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas , mientras que una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de $m+n$ formas.

Suponemos aquí que tanto m y n son formas distintas de de realizar las tareas.

Regla del Producto

Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, y si existen m resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de mn formas.

Esta regla se conoce también como el principio de elección.

Ejemplos

- El club de teatro de la Universidad Central realiza ensayos para una obra que se montará en primavera. Si seis hombres y ocho mujeres ensayan para los papeles principales. ¿De cuántas maneras se puede elegir a la pareja principal?
- Si la fabricación de placas de automóviles que constan de dos letras seguidas por cuatro dígitos, ¿Cuántas patentes distintas se pueden fabricar?
    - Si ninguna letra o dígito se puede repetir.
    - Si se permite repetir las letras o dígitos.
    - Dado el caso anterior, ¿Cuántas placas tienen sólo vocales y dígitos pares?

Permutaciones

Permutaciones

Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición (lineal) de estos objetos se denomina permutación de la colección.

En general, si existen n objetos distintos, que se denotan con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y r es un entero, con $1 \leq r \leq n$, entonces, por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r para los n objetos es

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplos

- El número de permutaciones en la palabra COMPUTER es 8!. Si sólo se utilizan cuatro de las letras, ¿Cuántas permutaciones existen? Si se permiten repeticiones de las letras, ¿Cuántas posibles secuencias de 12 letras se pueden hacer?
- En un grupo de 10 estudiantes, se escogerá a cinco y se les sentará en fila para una foto ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición

En general, si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,..., y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces existen $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ disposiciones (lineales) de los n objetos dados. (Los objetos del mismo tipo son indistinguibles.)

- ¿Cuál es el número de disposiciones lineales de las cuatro letras de la palabra BALL?
- Determine la cantidad de disposiciones lineales de las seis letras de la palabra PEPPER?
- ¿De cuántas maneras se puede desordenar la palabra MASSASAUGA?

Permutaciones Circulares

Empecemos por explicarlo con un ejemplo. Si seis personas designadas, como A,B,...,F, se sientan en torno a una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles, si las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de otra mediante una rotación?

Permutaciones Circulares

Para un conjunto de n elementos dispuestos en forma circular, el número de permutaciones circulares es $(n-1)!$.

Combinaciones

Cuando listamos la permutación de 4 objetos, digamos A, B, C y D, en grupos de 2 tenemos que las posibilidades son 12 y no es difícil listarlas de manera explícita. Sin embargo, para efectos del problema puede ser que el par $A - B$ represente el mismo par $B - A$ (piense en la teoría de conjuntos). Es en este caso que nos damos cuenta que un mismo par está contado dos veces. Lo anterior motiva lo siguiente

Combinaciones

En general, si partimos de n objetos distintos, cada selección, o combinación, de r de estos objetos, sin hacer referencia al orden, corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de los n objetos. Así, el numero de combinaciones de tamaño r de una colección de tamaño n, que se denota $C(n,r)$, donde $0 \leq r \leq n$ satisface $(r!) \times C(n,r) = P(n,r)$ y

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n.$$

Ejemplos

1. Un estudiante que realiza un examen de historia recibe la instrucción de responder siete de diez preguntas. Además, el estudiante por obligación debe responder tres preguntas de las primeras cinco y elegir cuatro de las cinco restantes. ¿De cuántas formas puede el estudiante realizar el examen?
2. Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos en total tiene A?

Generación de Permutaciones y Combinaciones

Suponga que deseamos escribir las $n!$ permutaciones de n objetos distintos. Para $n = 1, 2, 3$, sólo hay 1,2 y 6 permutaciones posibles que no representan mayor dificultad en listarlas. No obstante, con n grande, ¿de qué manera se puede generar un procedimiento sistemático para crearlas? Para responder esta pregunta debemos empezar por dar un orden.

Orden Lexicográfico

Orden Lexicográfico

Sea $a = a_1 a_2 ... a_n$ y $b = b_1 b_2 ... b_n$ dos secuencias de n números. Se dice que $a < b$ si existe i tal que $a_j = b_j$ para todo $j < i$ y $a_i < b_i$.

Por ejemplo, la permutación 124653 se encuentra antes que la permutación 125643, y la permutación 125463 se encuentra después de la permutación 125346.
Supongamos ahora que se nos da una permutación $a_1 a_2 \cdots a_n$. ¿Cuál es la siguiente permutación de acuerdo con el orden lexicográfico?

Tal permutación debe ser tal que:

1. $a_i = b_i, 1 \leq i \leq m-1$, y $a_m < b_m$, para el m más grande.
2. b_m es el elemento más pequeño de entre $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ tal que es mayor que a_m.
3. $b_{m+1} < b_{m+2} < \cdots < b_n$.

Por ejemplo, la permutación que sigue a 124653 en el orden lexicográfico es 125346. Para una permutación dada $a_1 a_2 \cdots a_n$, notamos que el m más grande posible para el cual (1) se satisface es el m más grande para el cual a_m es menor que al menos una de entre $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$. Un momento de reflexión muestra que éste también es el m más grande posible para el cual $a_m < a_{m+1}$.

En el caso de una permutación de 4 números, tenemos

$$1234 \to 1243 \to 1324 \to 1342 \to 1423 \to 1432 \to 2134 \to 2143 \to$$

$$2314 \to 2341 \to 2413 \to 2431 \to 3124 \to 3142 \to 3214 \to 3241 \to$$

$$3412 \to 3421 \to 4123 \to 4132 \to 4213 \to 4231 \to 4312 \to 4321$$

que ordena lexicográficamente las 24 permutaciones de una disposición lineal de 4 números.