

*Problemas resueltos de
Electricidad y Magnetismo*



E.T.S.I.T.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

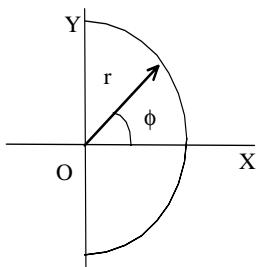
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Vacío

- 1)** Suponiendo una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas de radios 2 cm y 5 cm, tiene una densidad de carga en volumen expresada en coordenadas esféricas:

$$\rho_v = \frac{-3 \cdot 10^{-8}}{R^4} \cdot \cos^2 \phi \quad (C \cdot m^{-3})$$

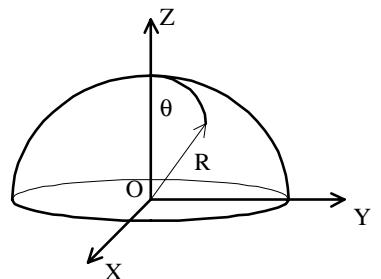
Calcular la carga total contenida en dicha región.

- 2)** Sobre dos placas paralelas e indefinidas, separadas por una distancia d , se distribuyen respectivamente las densidades de carga superficiales: $\rho_{s,1}=2 \text{ Cm}^{-2}$, $\rho_{s,2}=4 \text{ Cm}^{-2}$. Calcular el campo entre los dos planos y en el espacio a derecha e izquierda de los mismos.



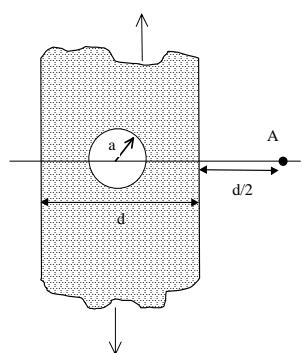
- 3)** Sobre la semicircunferencia indicada en la figura se distribuye una densidad de carga lineal $\rho_l = \rho_0 \cos \phi$.

- a) Calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia.
b) Calcular el campo en el punto O.



- 4)** Sobre una capa semiesférica de radio R , tenemos una distribución superficial de carga uniforme $\rho_s=1 \text{ Cm}^{-2}$.

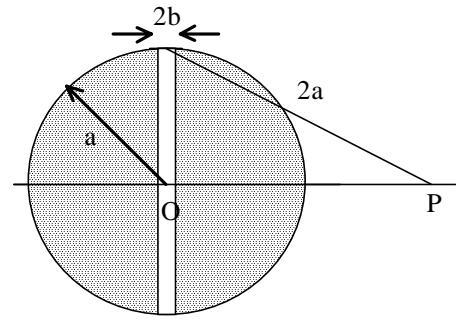
- a) Calcular la carga total en la capa semiesférica.
b) Calcular el campo eléctrico en el centro O de la figura.



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Vacío

- 6)** Tenemos un cilindro indefinido de radio a , sobre él se distribuye una densidad de carga en coordenadas cilíndricas $\rho_v = \rho_0 \operatorname{sen}(\pi r/a)$, siendo $\rho_v=0$ para $r>a$. a) Calcular el campo eléctrico. b) Si situamos una carga negativa sobre el eje del cilindro, ¿será estable la situación de equilibrio de dicha carga?

- 7)** Una esfera se taladra diametralmente, dejando un hueco cilíndrico de radio $b=10^{-2} \cdot a$. El hueco se puede considerar filiforme en comparación con el radio a de la esfera. En la esfera, salvo en el hueco cilíndrico, se distribuye una densidad de carga uniforme ρ_v . Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico \mathbf{E} en el punto P.



- 8)** Calcular y dibujar el campo y el potencial, \mathbf{E} y \mathbf{V} , en función de R para la distribución esférica de carga:

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0 (R/a)^{1/2} & \text{para } a/2 \leq R \leq a \\ 0 & \text{para } R < a/2 \text{ y } R > a \end{cases}$$

- 9)** Sobre un plano indefinido tenemos dos distribuciones de carga. Una densidad superficial de carga uniforme $-\rho_s$ sobre un círculo de radio R y otra de signo contrario ρ_s sobre el resto. Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico sobre el eje perpendicular al círculo y que pasa por su centro.

- 10)** Sobre un disco plano de radio R se distribuye una carga superficial que varía radialmente de la forma:

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

siendo r la distancia al centro del disco. Calcular el potencial y el campo en el eje perpendicular al disco y que pasa por su centro.

PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA - VACÍO

◎ **Ejercicio 1**

La carga total vendrá dada por:

$$\rho_v = \frac{dq}{dv} \Rightarrow Q = \int_v \rho_v dv$$

$$\text{con } dv = R^2 \sin(\theta) dR d\phi d\theta.$$

Sustituyendo la densidad de carga en volumen, e integrado en el volumen especificado:

$$Q = -3 \cdot 10^{-8} \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R^2} dR \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = -1.8 \cdot 10^{-6} \pi C$$

◎ Ejercicio 2

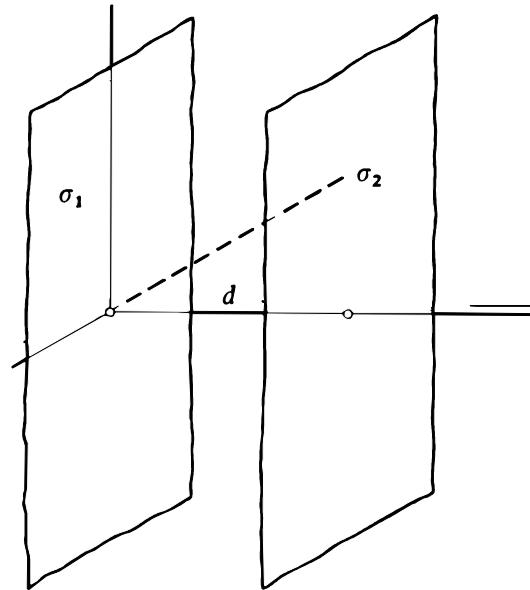


Figura 2.1

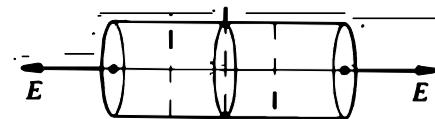


Figura 2.2

Para resolver el problema, dividiremos el espacio en tres zonas:

- 1) Zona comprendida entre los planos.
- 2) Zona a la derecha, $y > d$.
- 3) Zona a la izquierda, $y < 0$.

Para una sola sola lámina, por simetría (por ser infinita), el campo eléctrico E es perpendicular a ella y tiene la misma magnitud en ambos lados. La aplicación del teorema de Gauss en el cilindro de la figura 2, colocándolo de forma que sea cortado por la lámina con las tapas paralelas a su superficie, se obtiene la relación siguiente:

$$2 \cdot E \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Siendo ds la superficie en las tapas. Aplicando lo sabido para una lámina a las del problema, distinguimos tres regiones distintas:

- 1) Zona comprendida entre los planos.

En esta zona el campo total será la suma de los campos debidos a cada una de las distribuciones, teniendo en cuenta que tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Sabemos que:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y) \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (-u_y)$$

Electrostática

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y)$$

Sustituyendo los valores de σ_1 y σ_2 :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2-4}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y) = -\frac{u_y}{\epsilon_0}}$$

2) Zona a la derecha de los planos, $y > d$.

Se procede de forma similar al apartado anterior, con la condición particular de que en esta zona los campos creados por las dos distribuciones tienen la misma dirección y sentido, es decir, los dos tienen sentido hacia $y > 0$.

Sabemos que:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y) \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y)$$

Sustituyendo los valores de σ_1 y σ_2 :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2+4}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y) = \frac{3 \cdot u_y}{\epsilon_0}}$$

3) Zona a la izquierda de los planos, $y < 0$.

Calculamos el campo de manera similar a los casos anteriores, pero ahora los campos tienen sentido hacia $y < 0$, por tanto:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0} (-u_y) \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (-u_y)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y)$$

Sustituyendo los valores de σ_1 y σ_2 :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-2-4}{2 \cdot \epsilon_0} (u_y) = -\frac{3 \cdot u_y}{\epsilon_0}}$$

◎ **Ejercicio 3**

- 1) Para calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia, teniendo en cuenta la definición de la densidad lineal de carga:

$$\zeta_1 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Con lo que la carga total distribuida es:

$$Q = \int \zeta_1 dl$$

Donde el dl para el problema en concreto es:

$$dl = r \cdot d\phi$$

y la densidad lineal de carga es:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \zeta_0 \cos \phi \\ Q &= \int \zeta_0 \cos \phi \cdot r d\phi\end{aligned}$$

Está claro que la integral ha de ser evaluada entre $-\pi/2$ y $\pi/2$:

$$Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \zeta_0 \cos \phi \cdot r d\phi$$

r y ζ_0 pueden salir de la integral al no ser dependientes de ϕ quedando:

$$Q = \zeta_0 r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \zeta_0 r (\sin \phi) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\zeta_0 r$$

- 2) El campo en el punto O, en una distribución lineal de carga, se calcula como:

$$E(r') = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \int \frac{\zeta_1 (r' - r) dl}{|r' - r|^3}$$

Teniendo en cuenta que

- $r' = 0$
- $r = r (\cos \Phi a_x + \sin \Phi a_y)$
- $dl = r \cdot d\Phi$
- $\zeta_1 = \zeta_0 \cos \Phi$
- Evaluando la integral entre $-\pi/2$ y $\pi/2$:

$$E(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\zeta_0 \cos \phi - r(\cos \phi a_x + \sin \phi a_y) r dr}{r^3}$$

Ahora los términos no dependientes con Φ se pueden sacar fuera de la integral, tanto las "r" como ζ_0 , quedando lo siguiente:

Electrostática

$$E(0) = -\frac{\zeta_0 r^2}{4\pi r^3 \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi (\cos \phi a_x + \sin \phi a_y) d\phi$$

Está claro que por la simetría que presenta el problema las componentes en el eje "y" del campo se van a ir anulando unas con otras, por ello la integral que queda para el eje "y" se ha de anular:

$$E(0) = -\frac{\zeta_0}{4\pi r \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi a_x d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi a_y d\phi$$

Para la primera integral se opera con el ángulo doble:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi a_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} a_x = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) a_x = \frac{\pi}{2} a_x$$

La segunda es inmediata y como se había dicho ha de anularse:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi d\phi a_y = \sin^2 \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} a_y = 0 a_y$$

Quedando la siguiente expresión para el campo:

$$E(0) = -\frac{\zeta_0}{4\pi r \epsilon_0} \cdot \left(\frac{\pi}{2} a_z + 0 a_y \right)$$

La segunda parte del problema también se podría haber hecho con la expresión que se dio en clase, la cual está un poco más simplificada:

$$E(r') = \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right) \int \frac{\zeta_1 dl'}{r'^2} a_R$$

Para utilizarla se ha de tener en cuenta la dirección y sentido del vector a_R

◎ **Ejercicio 4**

- 1) La carga total en la capa semiesférica.

Sabemos que, para una densidad superficial de carga:

$$Q_s = \int_s \rho_s \cdot ds$$

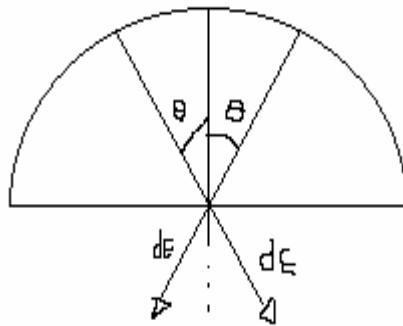
Para una semiesfera:

$$Q_s = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$Q_s = 4 \cdot R^2 \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \cdot [\phi]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{Q_s = 2 \cdot \pi \cdot R^2}$$

- 2) El campo eléctrico en el centro O de la figura.



Como podemos observar, la componente horizontal del campo se anula, quedando sólo la vertical.

$$dq = \rho \cdot ds$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon R^2} \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

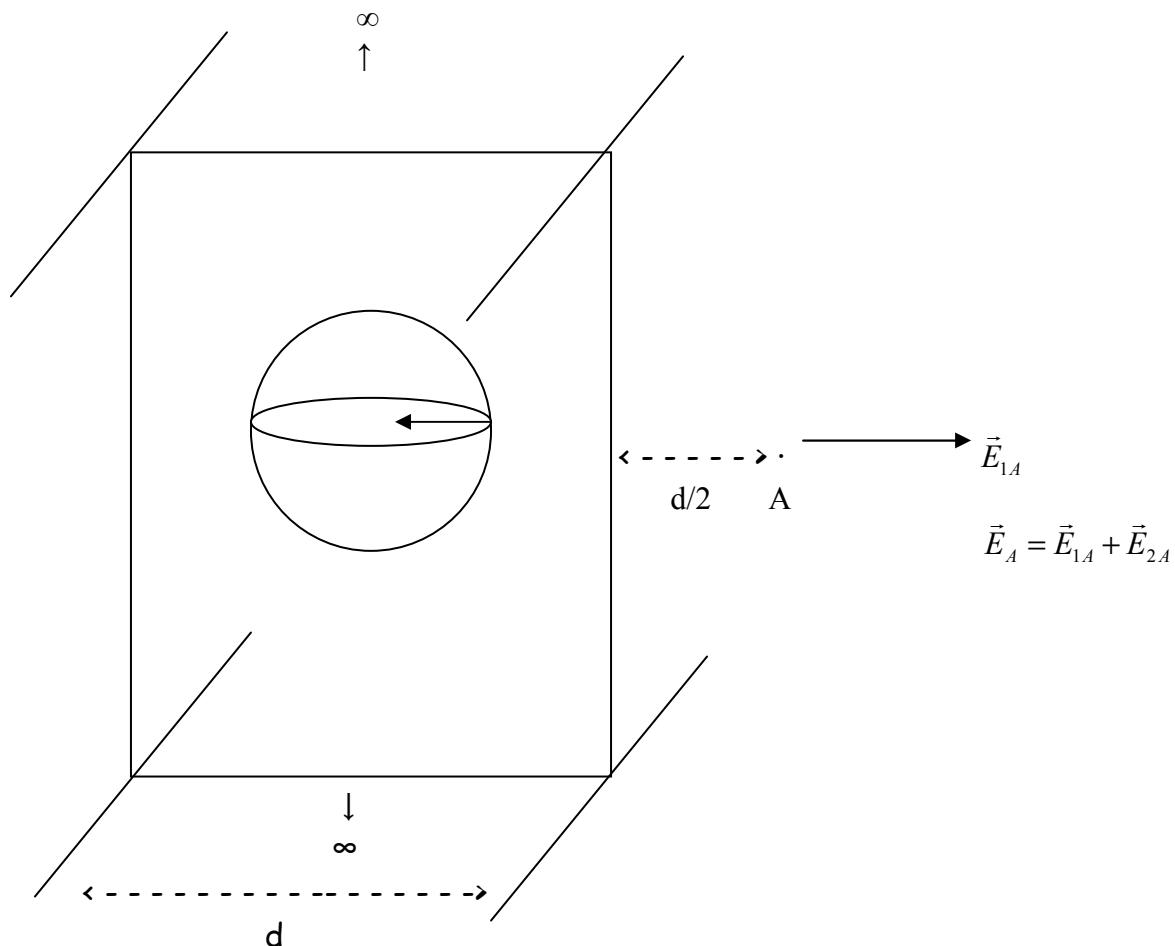
Calculamos el campo infinitesimal efectivo $d\vec{E}_{ef} = -dE \cdot \cos\theta \cdot d\theta (\vec{a}_z)$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta (\vec{a}_z)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot [\phi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} (\vec{a}_z)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\epsilon} \cdot (\vec{a}_z)}$$

◎ **Ejercicio 5**

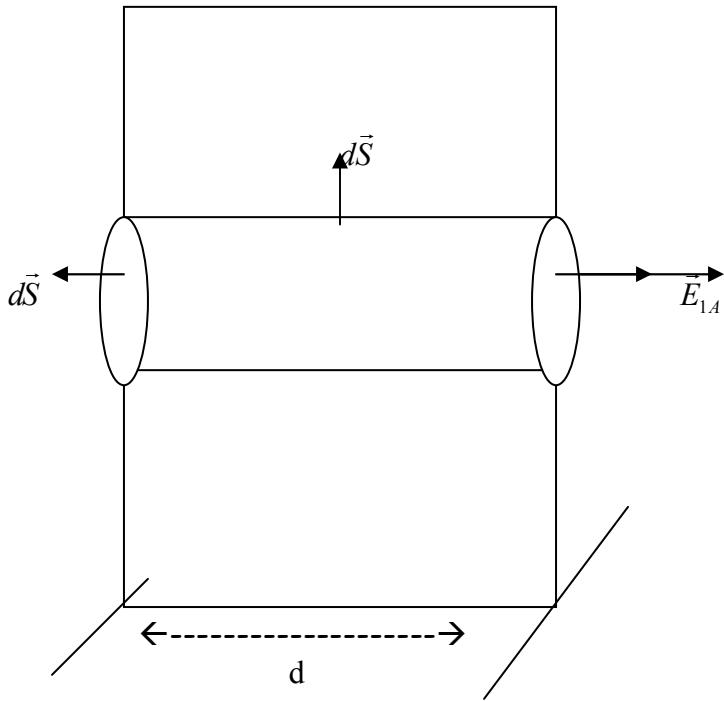


donde E_{1A} y E_{2A} son, respectivamente, los campos en A debidos a una placa maciza con densidad de carga ρ_v y a una esfera a centrada con densidad $-\rho_v$.

Para calcular E_{1A} , al ser una placa indefinida podemos aplicar GAUSS.
 E_{1A} → aplicando el teorema de gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Qv}{\epsilon_0}$$

Electrostática



$$\vec{E}_{1A} = \int_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{como en la superficie lateral } d\vec{S} \text{ es perpendicular a}$$

\vec{E}_{1A} entonces $\vec{E}_{1A} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cos 90^\circ = 0$ la integral se anula.

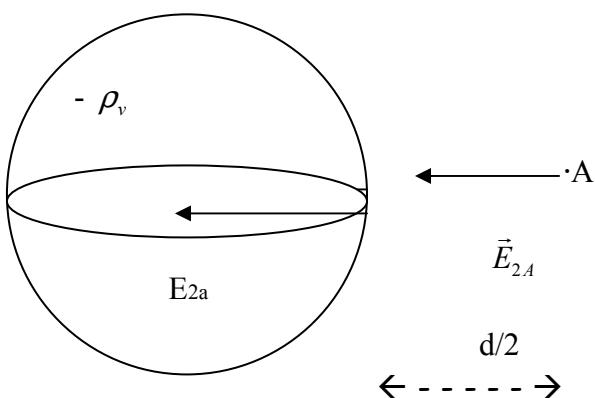
$$\vec{E}_{1A} = \int_{\text{tapas}} E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E_1 \int_{\text{tapas}} dS = E \int_{\text{tapas}} dS = E \cdot 2(\Delta S) = 2E\Delta S$$

$$2E_1 \cdot \Delta S = \frac{Q_v}{\epsilon_o} \quad \rightarrow \quad Q_v = \int_V \rho_v \cdot dV = \rho_v \int_V dV = \rho_v \cdot V$$

$$2E_{1A} \cdot \Delta S = \frac{\rho_v \cdot d \cdot \Delta S}{\epsilon_o} \quad \rightarrow \quad E_{1A} = \frac{\rho_v \cdot d}{2\epsilon_o}$$

$$\boxed{\vec{E}_{1A} = \frac{\rho_v \cdot d}{2\epsilon_o} \vec{a}_x}$$

E_{2A} → En una distribución de carga con simetría esférica, el campo creado en el exterior es equivalente al creado por una carga puntual en el centro, de valor la carga encerrada por la distribución.



Electrostática

$$Q_V = \int_V -\rho_V \cdot dV = -\rho_V \int_V dV$$

$$Q_V = -\rho_v \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

por la ley de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_V}{d^2}$$

$$\vec{E}_{2A} = \frac{-\rho_V \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi\epsilon_0 \cdot d^2} = \frac{-\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot d^2} = \frac{-\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot d^2} \cdot \vec{a}_x$$

por el principio de superposición:

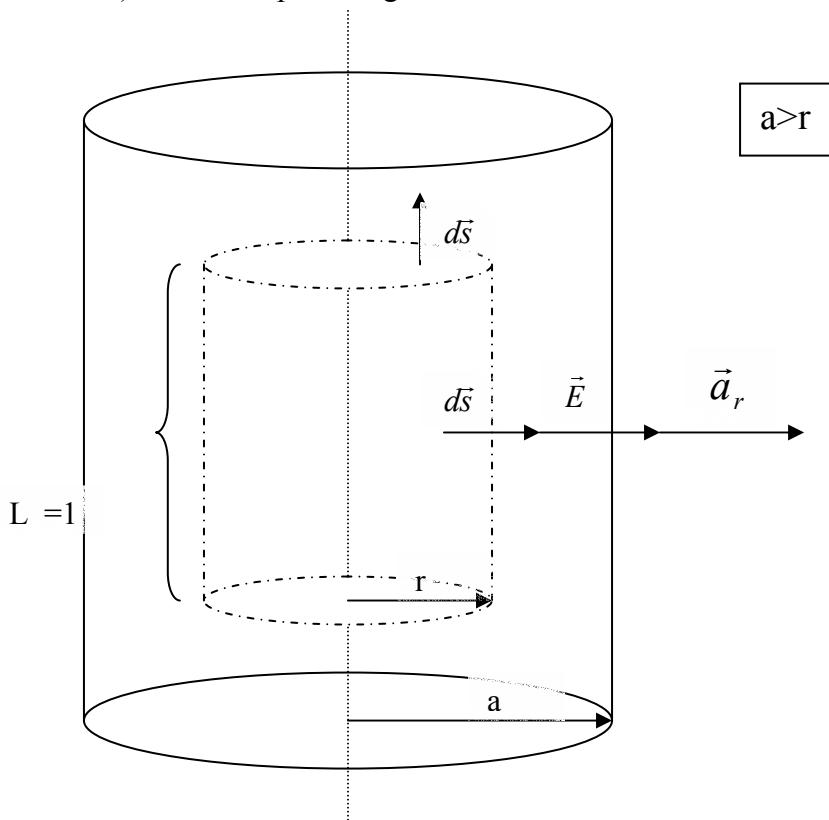
$$\vec{E}_A = \left(\frac{\rho_V \cdot d}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot d^2} \right) \cdot \vec{a}_x$$

$$\boxed{\vec{E}_A = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{d}{2} - \frac{a^3}{3 \cdot d^2} \right) \cdot \vec{a}_x}$$

◎ **Ejercicio 6**

1) Calcularemos el campo eléctrico mediante Gauss. Para ello hemos de considerar dos casos:

a) Caso de superficie gaussiana con $a > r$



Aplicamos Gauss considerando la superficie gaussiana un cilindro interior de radio r :

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = \oint_{\text{tapas}} \vec{E} d\vec{s} + \oint_{\text{lateral}} \vec{E} d\vec{s} \Rightarrow E \oint_s ds = E \cdot 2\pi r L$$

El campo es radial. En las tapas, $d\vec{s}$ es perpendicular a \vec{E} por lo que se anula. En la superficie natural $d\vec{s}$ es paralelo a \vec{E} con lo que se anula el carácter vectorial y consideramos a E como una constante.

Tomando $L = 1$ y aplicando Gauss nos quedamos con la expresión:

$$E \cdot 2\pi r = \frac{Q_v}{\epsilon}$$

Ahora buscamos Q_v , la carga libre encerrada por la superficie gaussiana, integrando ρ_v :

$$Q_v = \int_v \rho_v dv = \rho_0 \int_0^r \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dz = 2\pi \rho_0 \int_0^r \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) r dr = 2\pi \rho_0 I$$

Haciendo la integral I por Partes:

Electrostática

$$\left. \begin{array}{l} u = r \\ dv = \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) dr \\ du = dr \end{array} \right\} v = \frac{-a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right)$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} Q_v &= -r \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) \Big|_0^r - \int_0^r -\frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) dr \\ Q_v &= -\frac{a}{\pi} r \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) \\ Q_v &= \frac{a}{\pi} \left[\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) - r \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) \right] = I \end{aligned}$$

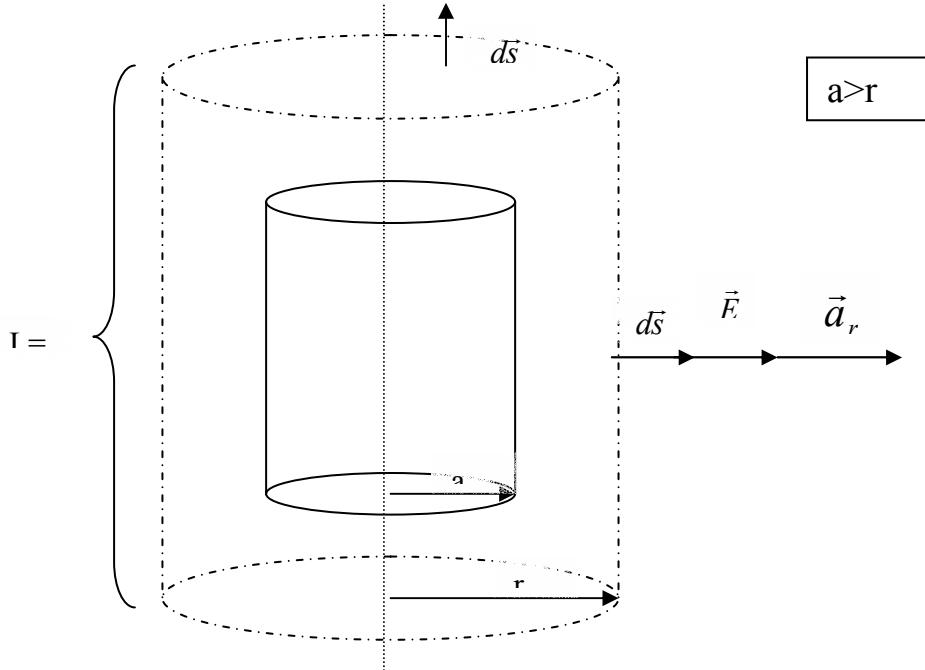
Por lo que nos queda:

$$Q_v = \frac{2\pi\rho_0 a}{\pi} \cdot \left[\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) - r \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) \right]$$

Que sustituyendo en la expresión de Gauss nos da el campo:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a}{\pi r \epsilon_0} \left[\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) - r \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) \right] \cdot (\vec{a}_r)$$

b) Caso para el que la superficie gaussiana tiene de radio $a > r$:



Por un procedimiento análogo al anterior llegamos a la expresión:

$$E \cdot 2\pi r = \frac{Q_v}{\epsilon}$$

Electrostática

Ahora la superficie Gaussiana es exterior al cilindro, por lo que tenemos que tener en cuenta que existirán dos Q_v diferentes en $r > a$ y $r \leq a$.

$$Q_v(r > a) \Rightarrow \int_v \rho_v dv = 0$$

$$Q_v(r \leq a) \Rightarrow \int_v \rho_v dv = Q_v \text{ anterior con } r = a$$

En la expresión de Q_v del apartado (a), sustituimos r por a , con lo que obtenemos la siguiente Q_v y consecuentemente también el campo.

$$Q_v = 2\rho_0 a^2 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{a^2 \rho_0}{\epsilon_0 \pi r} (\vec{a}_r)}$$

2) Introducimos una carga negativa ($-q$) en el eje del cilindro. Para que la carga se encuentre en equilibrio no debe existir ninguna fuerza actuando sobre ella. Para ello usamos el campo existente en el eje ($r = 0$):

$$\vec{F} = (-q) \cdot \vec{E}_{(r=0)}$$

El campo en el eje es una indeterminación del tipo $0/0$, por lo que para calcularlo tomamos el límite cuando r tiende a 0 en la expresión del campo que obtuvimos en el primer apartado:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{a\rho_0}{\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) - r \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) \right] = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINACION}$$

Aplicamos L'Hopital, y derivando arriba y abajo (derivando respecto a r):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{a\rho_0}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{\pi} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi r}{a}\right) + r \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right) \right]$$

$$\vec{E} = \frac{a\rho_0}{\pi\epsilon_0} [1 - 1 + 0] = 0$$

Al ser el campo 0 , la fuerza también será 0 , por lo tanto podemos deducir que la carga está en equilibrio.

Ahora, para saber si el campo es estable, averiguamos el sentido de la fuerza que existe en las proximidades del eje. Si estas fuerzas hacen que la carga tienda hacia el eje, se encuentra en estabilidad. Si por el contrario las fuerzas hacen que la carga tienda hacia el exterior, el equilibrio en el eje será inestable.

La carga en el interior del cilindro es siempre positiva:

$$r \in [0, a] \Rightarrow \frac{\pi r}{a} \in [0, \pi] \Rightarrow \rho_v > 0, \forall r$$

Por lo que el sentido del campo eléctrico es hacia el exterior del cilindro. Al ser la carga puntual colocada en el eje negativa, la fuerza que experimentaría si se separara del eje iría en contra del campo, es decir, hacia el interior del cilindro. Por lo que la situación es de equilibrio estable.

◎ Ejercicio 7

Para calcular el campo en el punto P aplicaremos el principio de superposición, calculando el campo creado por la distribución de carga en toda la esfera, con una densidad volumétrica ρ_v , y luego el campo creado por el cilindro si éste estuviera cargado por una densidad volumétrica $-\rho_v$. Así, sumando ambos, habremos calculado el campo creado por la esfera taladrada, puesto que la densidad volumétrica de carga en el hueco cilíndrico es nula.

Campo creado por la esfera

Aprovechando la simetría del problema, utilizaremos el teorema de Gauss para calcularlo. La superficie gaussiana será esférica y de radio OP.

$$OP = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_v / \epsilon_0$$

$$E \cdot 4\pi(\sqrt{3}a)^2 = Q_v / \epsilon_0$$

$$Q_v = \int_v \rho_v dV' = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v$$

El campo en el punto P, será pues:

$$\vec{E}_{(p)} = a\rho_v / 9\epsilon_0 \vec{a}_y$$

Campo creado por el cilindro (densidad volumétrica $-\rho_v$)

Al ser $b \ll a$, consideramos el cilindro filiforme. Para ello debemos considerar la

conservación de la carga, es decir:

$$q = - \int_v \rho_v dV' = \int l \rho_l dl'$$

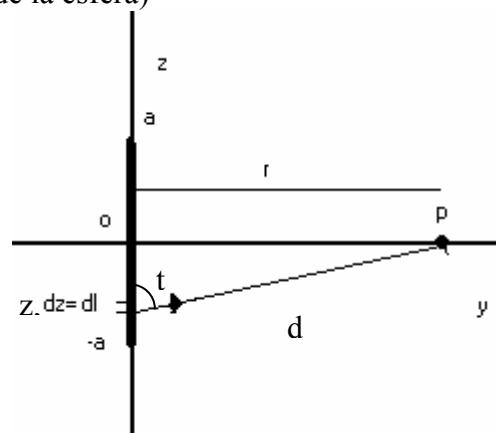
siendo V el volumen del cilindro y l su longitud (diámetro de la esfera)

$$-\pi b^2 2a \rho_v = 2a \rho_l$$

$$\rho_l = -\rho_v \pi 10^{-4}$$

El campo creado por la distribución lineal será:

$$r = OP$$



Electrostática

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \rho_l dl / d^2 u_r \quad \vec{u}_r = r\vec{a}_y - z\vec{a}_z / d^2$$

$$d = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Por simetría la componente a_z se anulará, quedará sólo la componente a_y .

$$\vec{E}_{(y)} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{r\vec{a}_y}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

Haciendo el cambio $z=r \operatorname{tg} t$

$$dz = r(1 + \operatorname{tg}^2 t)dt$$

$$E_c = \int_{\operatorname{arctg} - \sqrt{3}/\sqrt{3} = -30^\circ}^{\operatorname{arctg} \sqrt{3}/\sqrt{3} = 30^\circ} \frac{\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 t)}{(r^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} dt$$

$$E_c = \int_{30^\circ}^{30^\circ} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 (1 + \operatorname{tg}^2 t)}{r^3 (1 + \operatorname{tg}^2 t)^{3/2}} dt = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{30^\circ}^{30^\circ} \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t} dt = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{30^\circ}^{30^\circ} \cos t dt = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \operatorname{sent} \Big|_{-30^\circ}^{30^\circ}$$

$$\vec{E}_c = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} a_y = \frac{-\rho_v}{4\sqrt{3}\epsilon_0 a} 10^{-4} \vec{a}_y$$

El campo total en el punto P será la suma del campo creado por la esfera E_e y el campo creado por el cilindro E_c

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_c$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_v a}{9\pi\epsilon_0} - \frac{\rho_v}{4\sqrt{3}\epsilon_0 a} 10^{-4} \vec{a}_y \approx \vec{E}_e$$

◎ **Ejercicio 8**

1) Campo y el potencial en función de r , la distancia al centro de la distribución.

Distinguimos tres zonas: a) $r < a/2$, b) $a/2 \leq r \leq a$, c) $r > a$

1.1) Cálculo del campo eléctrico.

a) $r < a/2$

En el interior de esta zona no existen cargas eléctricas, por tanto $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} = 0$ sobre una superficie esférica de radio menor que $a/2$. El campo es nulo.

b) $a/2 \leq r \leq a$.

Aplicamos el teorema de Gauss. Considerando la simetría esférica de la distribución, tomamos como superficie gaussiana la de una esfera de radio r , y los límites de integración en la integral de volumen son desde $a/2$ hasta r .

$$\vec{E} = E_r \cdot \vec{u}_r ; \quad ds = \pi r^2 \sin \theta d\theta d\phi ; \quad dv = 4\pi r^2 dr$$

$$\oint_S E_r ds = 4\pi r^2 E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{a/2}^r \rho_0 \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^{\gamma/2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^{\gamma/2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot r^{7/2} \Big|_{a/2}^r$$

Operando:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0 a^{\gamma/2}} \cdot \frac{1}{r^2} \left(r^{\gamma/2} - \left(\frac{a}{2} \right)^{\gamma/2} \right) \cdot (\vec{u}_r)}$$

c) $r > a$.

Operamos de forma similar al apartado anterior, pero en este caso los límites de integración para la distancia en la carga son $a/2$ y a (hay que considerar la carga total que existe en la distribución).

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{a/2}^a \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0 a^{\gamma/2}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(a^{\gamma/2} - \left(\frac{a}{2} \right)^{\gamma/2} \right) \cdot (\vec{u}_r)$$

Operando:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0} \cdot a^3 \left(1 - \left(\frac{1}{8\sqrt{2}} \right) \right) \cdot \frac{1}{r^2} (\vec{u}_r)}$$

Electrostática

1.2) Cálculo el potencial.

a) $r > a$.

Calculamos el potencial entre cero e infinito, teniendo en cuenta que el potencial en el infinito es igual a cero:

$$V_c = - \int_{\infty}^r \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0} \cdot a^3 \left(1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8\sqrt{2}}} \right) \right) \cdot \frac{1}{r^2} dr$$

Operando:

$$\boxed{V_c = \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0} \cdot a^3 \left(1 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8\sqrt{2}}} \right) \right) \cdot \frac{1}{r}}$$

b) $a/2 \leq r \leq a$.

Operamos de igual modo que en el caso anterior pero hemos de tener la continuidad del potencial, o sea que $V_b(a) = V_c(a)$.

$$V_b(r) - V_c(a) = - \int_a^r \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0 a^{5/2}} \cdot \frac{1}{r^2} \left(r^{3/2} - \left(\frac{a}{2} \right)^{3/2} \right) dr$$

$$V_b(r) = V_c(a) - \int_a^r \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0 a^{5/2}} \cdot \frac{1}{r^2} \left(r^{3/2} - \left(\frac{a}{2} \right)^{3/2} \right) dr$$

Operando:

$$\boxed{V_b(r) = V_c(a) - \frac{2\rho_0}{7\epsilon_0 a^{5/2}} \left[\frac{2}{5} \cdot \left(r^{5/2} - a^{5/2} \right) - \left(\frac{a}{2} \right)^{5/2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right]}$$

c) $r < a/2$.

En esta zona, no existe campo eléctrico, por lo que el potencial a de ser constante e igual al potencial en $a/2$.

$$\boxed{V_a(r) = V_b\left(\frac{a}{2}\right)}$$

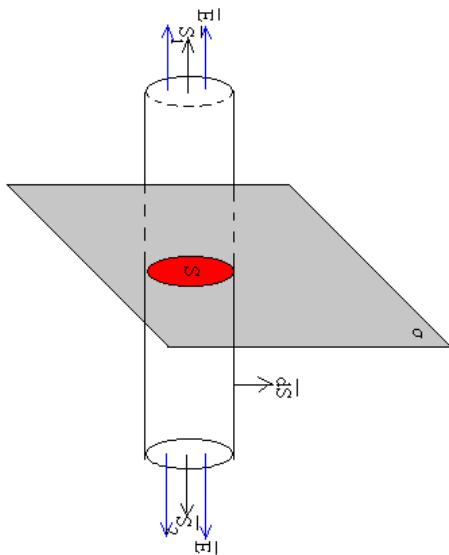
◎ **Ejercicio 9**

El campo eléctrico cumple el principio de superposición, de forma que podemos calcular el campo como la suma del creado por un plano infinito de densidad superficial uniforme ρ_s , más el creado por un disco en el lugar del círculo de radio R , con densidad $-2\rho_s$.

$$\vec{E} = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{circulo} = \vec{E}_{z=0} + \vec{E}_{-2\rho}$$

- Campo creado por el plano infinito ($\vec{E}_{z=0}$):

Podemos hallarlo a partir del Teorema de Gauss, al ser el plano infinito.



$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S_{gauss}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_{gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \\ &= \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 \end{aligned}$$

Usando una superficie de Gauss cilíndrica que atravesase al plano perpendicularmente conseguimos varias simplificaciones muy interesantes:

- 1) $\oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0 \Rightarrow$ El campo es perpendicular al plano y dS_3 (en la superficie lateral) es paralelo a éste. Por tanto, el producto escalar del integrando es nulo.
- 2) $\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \Rightarrow$ El flujo del campo en la superficie gaussiana queda::

$$2 \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ ó } 2 \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- 3) $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = E \cdot dS_1 \cdot \cos \alpha = E \cdot dS_1 \Rightarrow$ Ya que el ángulo que forman \vec{E} y $d\vec{S}_1$ es siempre 0, son paralelos y, por tanto el coseno vale 1.
- 4) $2 \oint_{S_1} E \cdot dS_1 = 2 \cdot E \oint_{S_1} dS_1$ (El campo es constante en la superficie S_1).

La carga contenida en la superficie gaussiana es: $Q = \rho_s \cdot S_1$. Con lo que obtenemos que el campo creado por un plano infinito es:

$$2 \cdot E \cdot S_1 = \frac{\rho_s \cdot S_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2 \cdot \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{plano} = \frac{\rho_s}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{a}_z}$$

Electrostática

- Campo creado por el disco de radio R de densidad $-2\rho_s$ ($\vec{E}_{-2\rho}$):

Para este caso, no podemos usar el Teorema de Gauss y, por tanto, aplicaremos la fórmula del potencial primero y luego, a partir de éste, hallaremos el campo eléctrico.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2} \Rightarrow \text{Distancia de un punto del círculo al punto campo.}$$

Por definición, el potencial eléctrico en un punto del eje que pasa por el centro de un círculo de densidad $-2\rho_s$ es:

$$V_{(z)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{-2\rho_s \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{\sqrt{z^2 + r^2}} \Rightarrow V_{(z)} = \frac{-4\pi\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V_{(z)} = \frac{-\rho_s}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \Rightarrow \text{La integral sale haciendo un cambio de variable:}$$

$$a = z^2 + r^2 ; \frac{da}{dr} = 2 \cdot r \quad \Rightarrow \quad V_{(z)} = \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} \int \frac{da}{\sqrt{a}} \quad \Rightarrow$$

$$V_{(z)} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + r^2} \right]_0^R \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{(z)} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right)}$$

$$\boxed{\vec{E}_{-2\rho} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \cdot \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right] \cdot \vec{a}_z}$$

Luego, el campo finalmente será:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{-2\rho} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot \left[-1 + \frac{2z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \cdot \vec{a}_z}$$

◎ **Ejercicio 10**

La formula que define el potencial es la siguiente:

$$V(z) = \int \frac{\rho_s}{d} ds$$

Teniendo en cuenta que d es la distancia al punto del eje en que calculamos el potencial. En el disco:

$$\begin{aligned}\rho_s &= \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \\ ds &= rd\varphi dr \\ d &= (z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Quedando la integral:

$$V(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho_0 (r/R)^2 r dr d\varphi}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Y resolviendo queda:

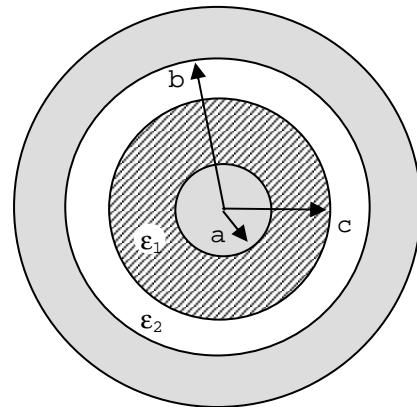
$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R^2} \left[\frac{1}{3} (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} - z^2 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2z^3}{3} \right]$$

Ahora calcularemos el campo por la formula del gradiente, sabiendo de antemano que, por la simetría del problema, sólo vamos a tener campo en le eje z :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} u_z = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R^2} \left[z (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} - z^3 (z^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} - 2z^2 \right] u_z$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

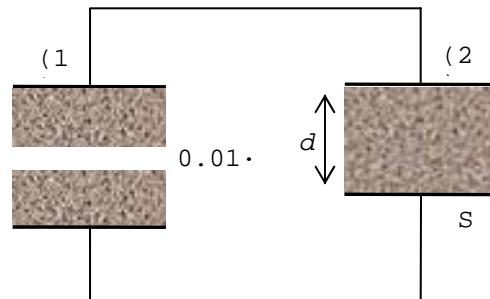
- 1) Una carga puntual positiva Q está en el centro de una capa conductora esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o . Determine \mathbf{E} y V como funciones de la distancia radial R .
- 2) Suponga un tubo de cobre muy largo con radio exterior de 3 cm y radio interior de 2 cm, que rodea una línea de carga de 60 pCm^{-1} situada en su eje. Calcular:
 - a) \mathbf{E} en $r=1 \text{ m}, 2.5 \text{ cm}$ y 1.5 cm .
 - b) La diferencia de potencial entre la superficie interior y la exterior del tubo.
- 3) Considere dos conductores esféricos con radios b_1 y b_2 ($b_2 > b_1$), conectados por un alambre conductor. Se deposita una carga total Q en las esferas. La distancia entre los conductores es muy grande en comparación con los radios de las esferas, de modo que las cargas en los conductores esféricos se distribuyen uniformemente. Calcular las densidades de carga superficial y las intensidades de campo eléctrico en la superficie de las esferas.
- 4) Un cilindro conductor de radio R y longitud L , lleva una carga Q . Coaxialmente con él se disponen dos coronas cilíndricas conductoras. La primera, de radios R_1 y R_2 , lleva la carga Q' , y la segunda, de radios R_3 y R_4 , está conectada a tierra. Calcular:
 - a) la distribución de cargas y sus respectivas densidades.
 - b) el campo eléctrico en las distintas regiones del espacio (suponer los cilindros muy largos).
 - c) el potencial eléctrico en las distintas regiones del espacio.
- 5) Sea un conductor, en el que existe una cavidad interior, sometido a un campo eléctrico. Hallar el campo eléctrico existente en el interior de la cavidad así como la densidad de carga en la superficie de ésta.
- 6) Expresar la energía almacenada por varios conductores independientes entre sí.
- 7) Una esfera conductora de radio R_1 y carga Q , se rodea de una corona esférica conductora concéntrica de radios R_2 y R_3 , siendo $R_2 < R_3$, y con carga $2Q$. Calcular:
 - a) La distribución de cargas y el campo eléctrico en cada una de las regiones del espacio.
 - b) La diferencia de potencial entre la esfera y la corona esférica.
 - c) La capacidad entre la esfera y la corona esférica.



- 8) Un condensador cilíndrico consiste en un cilindro conductor interno de radio a y una corona cilíndrica externa coaxial de radio interior b . El espacio entre los dos conductores está lleno de un dieléctrico con permitividad ϵ y la longitud del condensador es L . Hallar la capacitancia del condensador.
- 9) Entre dos cilindros conductores coaxiales, de radios a y b ($b=2a$), se introducen dos capas de dieléctrico que llenan el espacio entre los conductores. El límite de separación entre los dieléctricos es la superficie cilíndrica de radio c , coaxial con los otros dos. Las permitividades respectivas de los dieléctricos son: $\epsilon_1=4\epsilon_0$ y ϵ_2 . Si entre los conductores se aplica una tensión V_o :
 - a) calcular el valor de ϵ_2 para que el campo sobre la superficie del cilindro de radio a sea cuatro veces superior al campo en el dieléctrico sobre la superficie de radio b .
 - b) hallar la capacidad por unidad de longitud del sistema con los valores de ϵ_1 dado y ϵ_2 obtenido.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

- 10)** Calcular la capacidad de un condensador esférico con armaduras de radios R_1 y R_2 , siendo $R_2 > R_1$, que se llena con un dieléctrico perfecto de permitividad relativa $\epsilon_r = a/R$, en la que a es una constante y R la distancia al centro del condensador.
- 11)** Calcular para una carga puntual en el centro de una esfera dieléctrica el vector de polarización y las densidades de cargas ligadas. Dibujar \mathbf{D} , \mathbf{E} y \mathbf{V} en función de r . Emplear $Q=10^{-9} \text{ C}$, $R=2 \text{ cm}$, $\epsilon_r=3$. Repetir estas gráficas en ausencia de la esfera dieléctrica.
- 12)** Una esfera dieléctrica de radio a está polarizada de forma que $\mathbf{P}=(K/R)\mathbf{a}_r$, siendo \mathbf{a}_r el vector unitario radial.
- Calcular las densidades volumétrica y superficial de carga ligada.
 - Calcular la densidad volumétrica de carga libre.
 - Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera.
 - Representar gráficamente la variación del potencial con la distancia.
- 13)** Una esfera de dieléctrico simple está uniformemente polarizada en la dirección del eje z , con $\vec{P} = 2 \cdot 10^{-6} \hat{a}_z \text{ (Cm}^{-2}\text{)}$. Calcular: a) las densidades de carga de polarización. b) el potencial eléctrico en el centro de la esfera. c) demostrar que la densidad de carga libre en el dieléctrico es nula.
- 14)** En un material, de constante dieléctrica ϵ , existe un campo eléctrico uniforme \vec{E} . Si se practica una cavidad esférica en el interior del material, calcular el valor del campo eléctrico existente en el centro de la cavidad.
- 15)** Dos medios dieléctricos con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 están separados por una frontera libre de cargas. La intensidad de campo eléctrico en la interface en el medio 1 tiene magnitud E_1 y forma un ángulo α_1 con la normal. Determine la magnitud y la dirección de la intensidad de campo eléctrico en dicho punto de la interface en el medio 2.
- 16)** Sea un condensador de placas plano-paralelas rectangulares. La superficie de cada placa es S , y están separadas una distancia l . Despreciando los efectos de borde, si se aplica una tensión constante V_o entre las placas calcular:
- El campo eléctrico en el interior, la densidad de carga superficial en las placas, la energía almacenada por el condensador y su capacidad.
 - Repetir el apartado a), suponiendo que se introduce un dieléctrico de dimensiones $1/2 \times S$, y permitividad relativa ϵ_r .
 - Repetir el apartado b), pero suponiendo que se desconecta la fuente de tensión antes de introducir el dieléctrico.
- 17)** Disponemos de dos condensadores idénticos, de placas plano-paralelas, cuya superficie es S y espesor d , como indica la figura. Entre las placas existe un dieléctrico de permitividad $\epsilon = 100\epsilon_0$. Un vez cargados con una diferencia de potencial V_o , y desconectada la batería, en un instante dado se fractura el dieléctrico entre las placas del condensador (1), de forma que se abre una fisura plana y paralela a las placas, de espesor $0.01 \cdot d$. Calcular:
- los vectores \vec{E} y \vec{D} en los condensadores (1) y (2) antes y después de la fractura.
 - la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores tras la fractura.



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

- 18)** Cuando se usa un cable coaxial para transmitir energía eléctrica, el radio conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por la tensión y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es $r_i = 2$ mm, y que el material aislante es poliestireno, cuya constante dieléctrica relativa y rigidez dieléctrica son, respectivamente, 2.6 y $20 \cdot 10^6$ V/m. Determine el radio exterior, r_o , del conductor externo para que, con una tensión aplicada entre los conductores externo e interno de 10 kV, la intensidad máxima del campo eléctrico en el material aislante no exceda el 25% de su rigidez dieléctrica.
- 19)** Un condensador de placas plano-paralelas, separadas una distancia d , tiene un dieléctrico en su interior, ausente de cargas libres, cuya permitividad dieléctrica relativa, ϵ_r , depende de la distancia a una de las placas, x . Calcular la capacidad del condensador si ϵ_r viene dada por:

$$\epsilon_r = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3d^2}}$$

- 20)** Dentro de un condensador de placas plano-paralelas, de sección A y espesor d , introducimos un dieléctrico de permitividad no uniforme, siendo y la dirección perpendicular a las placas. Despreciando los efectos de borde y en caso de no existir cargas libres en el interior del dieléctrico, calcular:
- el campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico y el vector de polarización, cuando aplicamos una diferencia de potencial V_o entre las placas.
 - las densidades de carga de polarización.
 - la capacidad del condensador.

$$\epsilon = \epsilon_o \left(1 + \frac{y}{d} \right)$$

- 21)** Demostrar que en un dieléctrico lineal no homogéneo, puede existir una densidad volumétrica de carga ligada en ausencia de densidad de carga libre. Calcular su valor. Sol: $-\epsilon_o(E \cdot \nabla \epsilon_r) / \epsilon_r$
- 22)** Si el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales alargados está ocupado por un dieléctrico, ¿cómo debe variar la permitividad relativa con la distancia r al eje para que la intensidad del campo eléctrico sea independiente de r ? ¿Cuál sería la densidad volumétrica de carga ligada?.
- Sol:** $\epsilon_r = K/r$, $p_b = \lambda/2\pi Kr$, siendo λ la densidad lineal de carga en el cilindro interior.
- 23)** Un electrete tiene la forma de una lámina delgada circular de radio R y espesor t , polarizada permanentemente en la dirección paralela a su eje. La polarización \mathbf{P} es uniforme en todo el volumen del disco. Calcular \mathbf{E} y \mathbf{D} sobre el eje, tanto dentro como fuera del disco.
- 24)** Una esfera de radio a está formada por un dieléctrico homogéneo, con constante dieléctrica relativa ϵ_r . La esfera está centrada en el origen del espacio libre. El potencial eléctrico viene dado en el interior y exterior de la esfera, respectivamente, por:

$$V_m = -\frac{3E_o R \cdot \cos \theta}{\epsilon_r + 2}$$

Comprobar que se cumplen las condiciones de contorno para el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico en la superficie de la esfera.

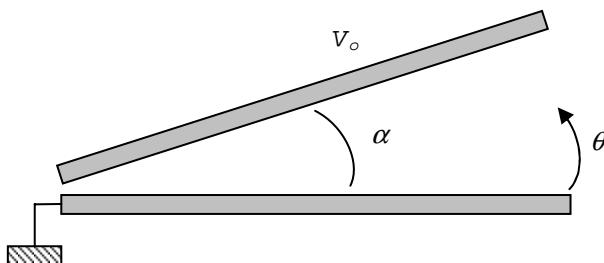
$$V_{out} = -E_o R \cdot \cos \theta + \frac{E_o a^3}{R^2} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot \cos \theta$$

- 25)** Desplazamos la carga 3 una distancia $d/2$ hacia la izquierda, manteniendo fijas las restantes cargas. ¿Es más estable la disposición anterior que ésta?

1	2	3	4
$\bullet \leftarrow d \rightarrow \bullet$		•	•
q	-q	q	-q

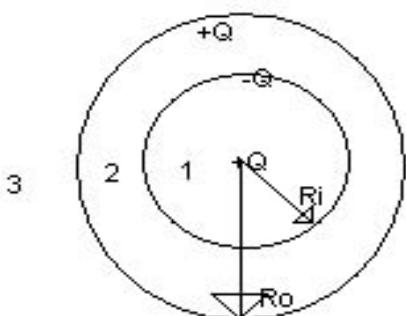
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electrostática-Medios materiales.

- 26)** Calcular la energía electrostática almacenada en el sistema del problema 4.
- 27)** Calcular la energía electrostática almacenada en el sistema del problema 7.
- 28)** Partiendo de una esfera de radio R_a , que tiene una carga Q en la superficie, se inicia la acumulación de carga sobre una superficie esférica de radio R_b ($R_a > R_b$), concéntrica con la anterior. Calcular el trabajo realizado para acumular sobre la superficie esférica de radio R_b una carga igual a $Q/2$.
- 29)** Tenemos un sistema de cargas constituido por una distribución uniforme de carga Q en una esfera de radio R_1 y otra de carga $-Q$ distribuida uniformemente sobre una capa esférica, concéntrica con la esfera, de radio $R_2=5R_1$.
- Calcular el campo en función de la distancia al centro.
 - Calcular la energía electrostática del sistema.
 - Si quitamos la mitad de la carga $-Q$ de la capa esférica, ¿cuál será la variación de energía electrostática del sistema?
- 30)** Un condensador plano de superficie S y espesor d se carga mediante una batería con una diferencia de potencial V_o . Despues de cargado desconectamos la batería. Sin tocar las placas introducimos una lámina metálica de espesor $d/2$.
- Calcular la densidad de energía electrostática antes y después de introducir la lámina metálica.
 - Calcular la energía total en ambos casos. ¿En qué se ha invertido la diferencia entre las dos energías?
- 31)** Un condensador de armaduras planas, de superficie $A=200 \text{ cm}^2$, separadas la distancia $d=1 \text{ mm}$, tiene en su zona central una lámina de material dieléctrico, de la misma forma y tamaño de las armaduras, espesor de 0.6 mm y permitividad relativa $\epsilon_r=4$. El condensador se ha cargado hasta adquirir entre sus armaduras el potencial $V=1000 \text{ V}$. Calcula: a) La capacidad del condensador. b) La carga del mismo. c) La energía almacenada. d) Los vectores desplazamiento eléctrico, campo eléctrico y polarización, representándolos gráficamente.
- 32)** Una carga eléctrica Q se distribuye en una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ , de forma que las densidades de carga libre sean:
- $$\rho_v = \begin{cases} \rho_o(a/R) & \text{para } 0 \leq R \leq a \\ 0 & \text{para } R \geq a \end{cases}$$
- Expresar ρ_o en función de Q y a .
 - Hallar la energía electrostática del sistema.
- 33)** Dos planos conductores aislados infinitos, que se mantienen a potenciales 0 y V_o , constituyen una configuración en forma de cuña, como se ilustra en la figura. Determine las distribuciones de potencial en las regiones: a) $0 < \phi < \alpha$, b) $\alpha < \phi < 2\pi$.



- 34)** Calcular, mediante el método de las imágenes, la carga total inducida en una esfera conductora conectada a tierra, inducida por una carga puntual, Q , situada fuera de la esfera, a una distancia D de su centro.

PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA – MEDIOS MATERIALES

◎ Ejercicio 1

Existe simetría esférica, por lo cual podemos hacer el problema mediante el teorema de Gauss. Calcularemos primero el campo electrostático y luego el potencial.

$$S_{esfera} = 4\pi R^2$$

a) Región 1: $R < R_i$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow E \text{ paralelo a } ds = \int E \cdot ds = E \int ds = E \cdot S$$

$$E \cdot S = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} \vec{a}_R \left(V/m \right)$$

Región 2: $R_i < R < R_o$

Como el campo en el interior de un metal es nulo, la carga en el interior de una superficie gaussiana en esta región es siempre cero, por lo que en la superficie interna del metal se induce una carga $-Q$ (la carga libre en el interior del metal es nula). Como el metal es neutro en la superficie externa se induce una carga Q .

$$\vec{E}_2 = 0 \vec{a}_R$$

Región 3: $R > R_o$

El campo en esta región tiene la misma forma que en la region 1, ya que la carga encerrada por la superficie gaussiana es la misma, Q ($Q - Q + Q = Q$). La única diferencia es que ahora R debe ser mayor que R_o .

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} \vec{a}_R \left(V/m \right), \text{ para } R > R_o.$$

b) Para calcular el potencial en todos los puntos del espacio se integra el campo eléctrico. Empezaremos desde la región 3 hacia la 1.

Electrostática

Región 3: Usaremos la ecuación:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{R} + K \quad (\text{con } K = \text{cte de integración})$$

$$V = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + K \quad (V) \Rightarrow \boxed{V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + K \quad (V)}$$

Para hallar la constante, partimos de la suposición de que el campo en el infinito es cero; igualando, tenemos

$$0 = \frac{Q}{4\pi\infty} + K \Rightarrow K = 0$$

Región 2:

El campo en esta región es cero, luego el potencial es constante. Por la continuidad del potencial, éste toma el valor de la región 3 haciendo $R=R_o$:

$$\boxed{V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o} \quad (V)}$$

Región 1:

$$V_1 = - \int \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} dR \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} + K \quad (V)$$

Para hallar K , por la continuidad del potencial, basta con igualar el valor del potencial de la región 1 de valor R_i al de la región 2:

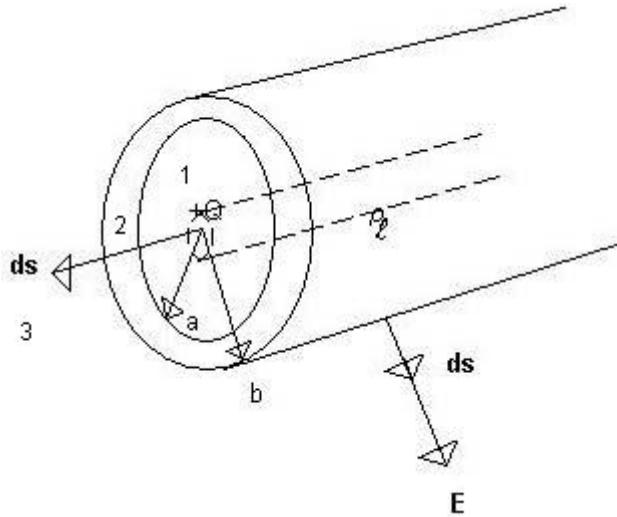
$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o} \Rightarrow K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_o} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} \Rightarrow K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right] \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right] \quad (V)}$$

◎ Ejercicio 2

a)



Suponemos la longitud del tubo lo suficientemente grande como para que \mathbf{E} sea perpendicular al eje. Entonces, las tapas no contribuyen al calcular con el teorema de Gauss.

Zona 1:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0};$$

$$Q = \rho_l \cdot L$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underset{\text{tapas}}{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}} + \underset{\text{lateral}}{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \underset{\text{lateral}}{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}} \Rightarrow E \text{ paralelo a } ds = \int E \cdot ds = E \int ds = E \cdot S$$

$$S = 2\pi r L \Rightarrow E \cdot 2\pi r L = \frac{\rho_l \cdot L}{\epsilon_0} \Rightarrow \left[\vec{E}_1 = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0} \vec{a}_r \right]$$

Zona 2:

Esta región es el interior del conductor, por tanto no existe campo electrostático:

$$\vec{E}_2 = 0 \vec{a}_r$$

Zona 3:

Como el metal es neutro, la carga total es nula (se induce una carga igual y opuesta a la del hilo en la superficie interna, e igual a la del hilo en la superficie externa). La carga encerrada por la superficie gaussiana queda igual a la del hilo. Por tanto, en esta región el campo es el mismo que en la zona 1:

$$\left[\vec{E}_1 = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0} \vec{a}_r \right]$$

Una vez que hemos calculado el campo de las 3 zonas, simplemente damos valores y hallamos el valor numérico del campo en cada zona:

Electrostática

r = 1m (Zona 3)

$$\vec{E} = \frac{60 \times 10^{-12}}{2\pi\epsilon_0} = \frac{30 \times 10^{-12}}{\pi\epsilon_0} \left(\text{V/m} \right)$$

r = 0.25 m (Zona 2)

$$\vec{E}_2 = 0 \left(\text{V/m} \right)$$

r = 0.15 m (Zona 1)

$$\vec{E}_1 = \frac{60 \times 10^{-12}}{2\pi\epsilon_0 \cdot 0.15} = \frac{0.2 \times 10^{-9}}{\pi\epsilon_0} \left(\text{V/m} \right)$$

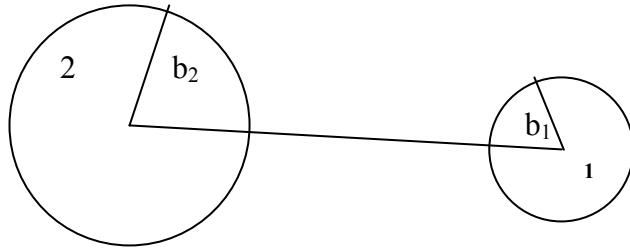
b) Nos piden la diferencia de potencial entre ambas superficies del conductor. Sabemos que el potencial en el interior de un conductor es constante, así que la diferencia de potencial entre ambas caras es nula:

$$V_{ba} = 0$$

Siendo V_{ba} la diferencia de potencial entre cada cara.

◎ **Ejercicio 3**

Tenemos dos esferas :



Como la carga se distribuye uniformemente en la superficie, el campo fuera de las esferas es el mismo que el produce una carga puntual colocada en el centro de valor la carga de la esfera respectiva. Aplicando el teorema de Gauss, tomamos una superficie gausiana de radio ϕ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ que operando nos queda: } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\phi^2} \vec{a}_r$$

$$\text{Para la esfera 1: } \vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1^2} \vec{a}_r$$

$$\text{Para la esfera 2: } \vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2^2} \vec{a}_r$$

Donde q_1 y q_2 son las cargas en la superficie de cada esfera.

Análogamente, integrando el campo eléctrico, el potencial fuera de las esferas es análogo al de una carga puntual. Por la continuidad del potencial, su valor en la superficie de las esferas (igual que el del interior, por ser conductores) será respectivamente:

$$\text{Para la esfera 1: } V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 b_1}$$

$$\text{Para la esfera 2: } V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 b_2}$$

El problema nos dice que entre las dos esferas hay una carga encerrada q , es decir:

$$q = q_1 + q_2.$$

Al estar unidas por un cable, el potencial en ambas esferas es el mismo: $V_1 = V_2$. Lo que nos lleva, despejando, a que $q_1 b_1 = q_2 b_2$.

Teniendo en cuenta que: $q = q_1 + q_2$

obtenemos dos expresiones de la carga en la superficie de cada una de las esferas, en función de datos conocidos como son el radio y la carga total:

$$q_1 = \frac{b_1 q}{b_1 + b_2} \quad \text{Y} \quad q_2 = \frac{b_2 q}{b_1 + b_2}$$

Electrostática

La carga está repartida uniformemente, es decir, las esferas poseen densidades constantes de valor:

$$\rho_{\sigma 1} = q_1 / s_1, \quad \rho_{\sigma 2} = q_2 / s_2, \quad \text{donde } s_1 \text{ y } s_2 \text{ son las superficies de las esferas:}$$
$$s_1 = 4\pi \epsilon_0 b_1^2, \quad s_2 = 4\pi \epsilon_0 b_2^2$$

Sustituyendo datos, obtenemos dos expresiones en función también de datos conocidos.

$$\text{Densidad de la esfera 1: } \rho_{01} = \frac{q}{4\pi b_1(b_1 + b_2)}$$

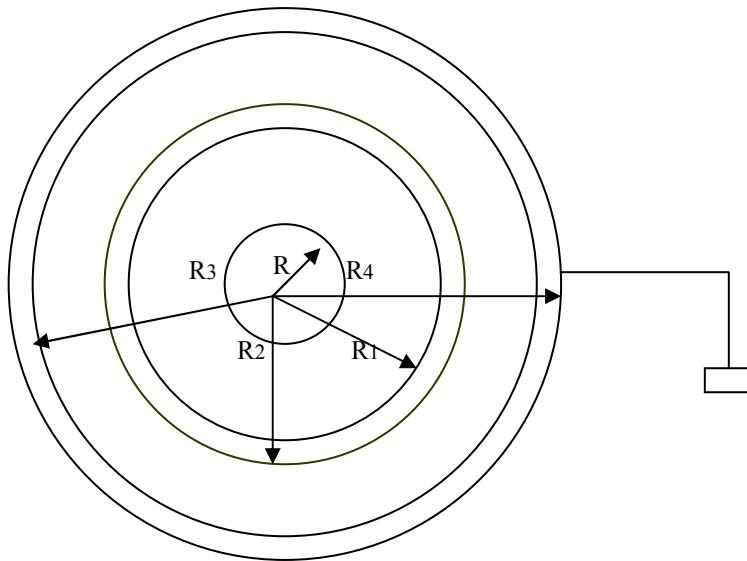
$$\text{Densidad de la esfera 2: } \rho_{02} = \frac{q}{4\pi b_2(b_1 + b_2)}$$

Y si queremos dejar el campo eléctrico en función de la carga hallada:

$$\text{Para la esfera 1: } \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 b_1(b_1 + b_2)} \vec{a}_r$$

$$\text{Para la esfera 2: } \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 b_2(b_1 + b_2)} \vec{a}_r$$

◎ Ejercicio 4



- a) Para hallar la distribución de cargas hay que recordar que las cargas en los metales se distribuyen en la superficie. Además, si se aplica el teorema de Gauss a una superficie en el interior de un metal, al no existir campo eléctrico en éste, la carga total en el interior de la superficie gaussiana ha de anularse. Sea r la distancia al centro de las esferas:

$$\underline{r=R}$$

tenemos una distribución Q y su densidad es $\rho = -\frac{Q+Q}{2\pi R^3 L}$

$$\underline{r = R_1}$$

tenemos una distribución $-Q$ y su densidad es $\rho = \frac{-Q}{2\pi RL}$

$$\underline{r = R_2}$$

tenemos una distribución $Q + Q'$ y su densidad es $\rho = \frac{Q+Q'}{2\pi R^3 L}$

$$\underline{r = R_3}$$

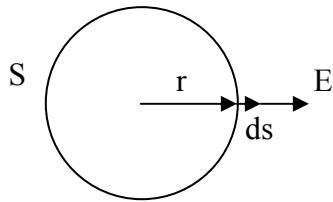
tenemos una distribución $-(Q+Q')$ y su densidad es $\rho = -\frac{Q+Q'}{2\pi R^3 L}$

$$\underline{r = R_4}$$

debido a la toma de tierra, no existe carga y su densidad es por tanto $\rho = 0$

- b) Para hallar el campo eléctrico aplicamos la ley de Gauss a superficies cilíndricas coaxiales en las distintas regiones, considerando la simetría cilíndrica del problema. Así,

Electrostática



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E || ds) = (E \text{ cte en } s)$$

$$E \oint_S ds = E 2\pi r L \quad E \oint_s ds = E 2\pi r L$$

$$\rightarrow E 2\pi r L = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \text{ (Teorema de Gauss)}$$

Por lo tanto:

r < R

$$\vec{E} = 0$$

R < r < R1

$$Q_0 = Q \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \vec{a}_r$$

R1 < r < R2

$$\vec{E} = 0$$

R2 < r < R3

$$Q_0 = Q + Q' \rightarrow \vec{E} = \frac{Q + Q'}{2\pi\epsilon_0 r L} \vec{a}_r$$

R3 < r < R4

$$\vec{E} = 0$$

r > R4

$$Q_0 = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

- c) Para calcular el potencial integramos el campo, de fuera hacia dentro, aplicando la continuidad del potencial al pasar de una región a otra. De esta forma:

r > R4

$$\vec{E} = 0 \rightarrow V = \text{cte} ; V(r = R4) = 0 \text{ (tierra)}$$

R3 < r < R4

$$V = \text{cte} = V(r = R4) = 0$$

R2 < r < R3

Electrostática

$$V = - \int E dr = - \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \int \frac{dr}{r} = - \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln r + K . \text{ Como } V(r=R3) = 0 \rightarrow$$

$$- \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln R3 + k = 0 \rightarrow K = \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln R3 \rightarrow V = \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{r}$$

R < r < R1

$$V = \text{cte} = V(R2) = \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$$

$$V = - \int E dr = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \int \frac{dr}{r} = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln r + k' .$$

$$\text{Como } V(R1) = \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2} ;$$

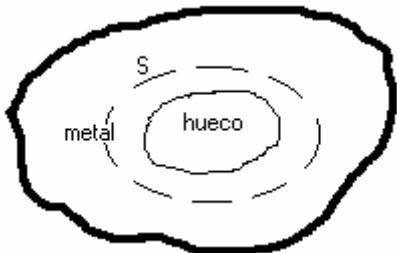
$$- \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2} = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln R1 + K' \rightarrow K' = \frac{Q + Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2} + \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln R1$$

$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R1R3}{R2r} + \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$$

$$\underline{r < R} \rightarrow V = \text{cte} = V(R1) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R1R3}{R2R} + \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{R3}{R2}$$

◎ Ejercicio 5

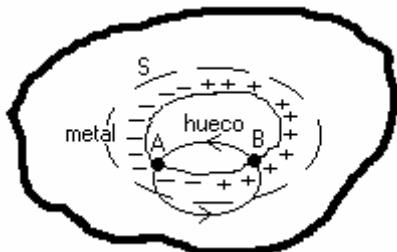
Sea un conductor tal como éste:



metales), es también nula. O sea:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \frac{Q_s}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_s = 0$$

Esto no implica que la densidad superficial de carga en la cavidad interior, $\rho_{S-\text{cavidad}}$, sea 0, ya que puede haber una distribución de carga en la superficie de la cavidad interior tal que las cargas positivas se compensen con las negativas de forma que $Q_s = 0$.



En esta situación existiría un campo eléctrico en la superficie de la cavidad interior, que iría de las carga positivas a las negativas. Para calcularlo, trazamos un camino cerrado a través de los puntos A y B:

Por un lado $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ya que el campo electrostático es conservativo.

$$\text{Por otro lado } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como ya dijimos antes, el campo en el metal es cero, lo que significa que: $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, con lo que finalmente nos queda:

$\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ para toda trayectoria $\Rightarrow E_{\text{cavidad}} = 0$. No es posible tal distribución de carga, ya que el campo eléctrico en el interior de la cavidad es 0.

Al no ser posible que exista tal distribución, se confirma que $\rho_{S-\text{cavidad}} = 0$

◎ Ejercicio 6

Partiendo de la teoría, se comprueba que la energía potencial para un sistema de N cargas es igual a:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

donde V_i es el potencial creado en donde se encuentre q_i por todas las demás cargas.

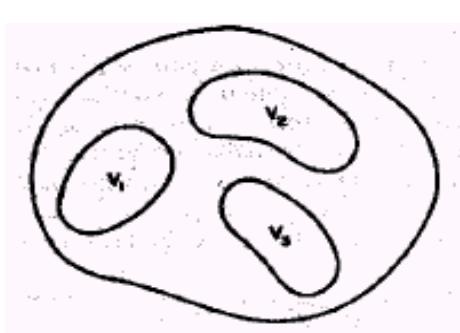
Vista la interacción de cargas discretas, mas fácil de interpretar, buscamos la energía potencial eléctrica para un conductor, que no es más que una generalización de una distribución superficial de carga, ya que la carga en él se distribuye en su superficie. La expresión del potencial para una distribución superficial de cargas será en un conductor:

$$W = \frac{1}{2} \int_s \rho_s V ds$$

Donde S es, por las propiedades de los conductores, una superficie equipotencial, y por tanto el potencial en ella V es constante y puede salir de la integral.

$$W = \frac{1}{2} V \int_s \rho_s ds = \frac{1}{2} QV$$

Ahora suponemos un sistema formado por n conductores. La energía potencial electrostática para un sistema discreto de n conductores será la suma de la energía de cada una de los conductores del sistema



$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i V_i$$

donde definimos V_i es el potencial de cada conductor con superficie S_i , y ρ_{S_i} es la densidad de superficial de carga en cada conductor. Como cada conductor es una superficie equipotencial, el potencial en cada conductor es constante y vuelve a salir de la integral.

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} V_i \int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i$$

Si integramos la carga en cada potencial nos queda que: $\int_{S_i} \rho_{S_i} dS_i = Q_i$. Por lo que la expresión de la suma de los n conductores es:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

◎ Ejercicio 7

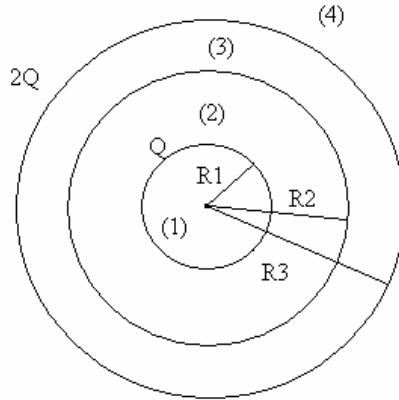


Fig. 1(a)

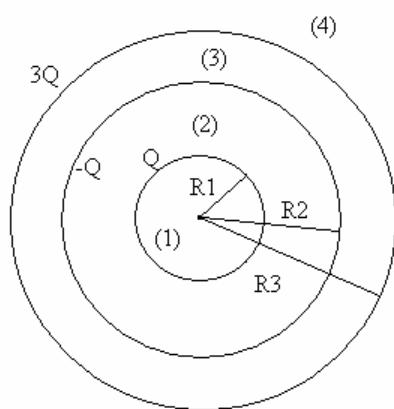


Fig. 1(b)

a) Debido a la carga Q en la superficie de la esfera conductora, aparece un $-Q$, por inducción, en el radio interno de la corona. Y para compensar ésta $-Q$, y como la corona está con $2Q$, en la parte exterior de la corona esférica existe una carga $3Q$ (Fig. 1 (b)).

Región (1), Región (3):

Como tanto la esfera como la corona esférica que la envuelve son conductoras, podremos decir que el campo interior a ambas es igual a cero.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = 0$$

Regiones (2) y (4):

Aplicamos Gauss para un punto, P, a una distancia r del centro de la esfera conductora:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

Eligiendo como superficies gaussianas esferas concéntricas, como tanto el campo electrostático como $d\vec{s}$ son radiales, es decir, perpendiculares a la superficie gaussiana en cada punto y paralelos entre sí, el producto escalar es igual al producto de sus módulos

$$\vec{E} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds$$

Además, como el módulo del campo eléctrico sólo depende de la distancia al centro, la integral en la ley de Gauss queda como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot \int_S ds = 4\pi r^2 E = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

Para la región (2)

$R_1 < r < R_2$,

Q_v vale Q , por tanto, despejando el campo y dotándolo de carácter vectorial:

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_R \left[\frac{N}{m} \right]$$

Electrostática

Para la región (4)

$$\underline{\mathbf{r}} \geq \underline{\mathbf{R}}_3$$

teniendo en cuenta que ahora la carga encerrada por las superficies gaussianas es igual a $3Q$.

$$\vec{E}_4 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_R \left[\frac{N}{m} \right]$$

b) Utilizando $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$, siendo V el potencial, tendremos para el potencial en (2):

$$V_2 = -\int \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + k$$

y en (4), siendo el potencial en el infinito igual a cero:

$$V_4 = -\int \vec{E}_4 \cdot d\vec{r} \quad \rightarrow \quad V_4 = -\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Por continuidad del potencial, $V_2(r = R_2) = V_4(r = R_3)$, entonces despejando para hallar la constante de integración k , llegamos a que:

$$k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right]$$

Es decir que,

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right]$$

Expresando la diferencia de potencial como $V = V_2 - V_4$, obtenemos:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

c) Usaremos la expresión $C = \frac{Q}{V}$ para calcular la capacidad del condensador, donde C es la capacidad y V será la diferencia de potencial calculada anteriormente:

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} [F]$$

◎ **Ejercicio 8**

Para calcular la capacidad suponemos una carga Q en la superficie del cilindro interno y una carga $-Q$ en la superficie interior del cilindro externo. También suponemos 'L' suficientemente largo para que el campo sea radial y perpendicular al eje ($L \gg b$). La capacidad viene dada por:

$$C = Q/V$$

Para calcular el campo eléctrico aplicamos el teorema de Gauss a un cilindro coaxial imaginario, de radio r , entre los dos conductores:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi L r \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

No hay flujo en las tapas porque E y ds son perpendiculares, y por tanto, su producto escalar sería: $E ds \cos 90^\circ = 0$. Cogemos solo el flujo en la parte lateral. Con lo que:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

La carga $-Q$ aparece por inducción electrostática de la carga Q .

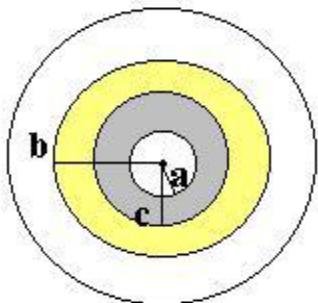
$$V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \vec{E} \cdot dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_A^B \frac{1}{r} \cdot dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} (\ln a - \ln b)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left(\ln \frac{b}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

◎ **Ejercicio 9**

 Dielectrico e1
 Dielectrico e2



Observamos que según el enunciado tenemos dos conductores, separados una cierta distancia (rellenada con los dos dielécticos), sometidos a una diferencia de potencial V_0 . Tomaremos como dato que la carga total almacenada por la estructura es Q .

Por las propiedades de los conductores (el campo en su interior es nulo), esta carga se distribuirá de la siguiente forma: Se almacenará en la cara externa del primer conductor una carga $+Q$ una carga $-Q$ en la cara interna del segundo conductor.

Como consecuencia de esto, la estructura queda de la siguiente forma:

- a) Para el primer apartado tomamos como dato que debemos hallar ϵ_2 de forma que se cumpla que:

$$\vec{E}_1 = 4\vec{E}_2$$

Observamos que los dos conductores son cilíndricos. Al ser infinitos podemos aplicar la ley de gauss generalizada para dielécticos:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \rho_v$$

Veamos pues, como se comporta el vector desplazamiento eléctrico en la región comprendida por los dos dielécticos, siendo la primera región o medio 1, en donde tenemos el dieléctrico de permeabilidad $\epsilon_1=4\epsilon_0$, y la segunda región o medio 2, en la que está el dieléctrico de permeabilidad ϵ_2 . Vemos que para la primera región \vec{D}_1 va en la dirección radial de los cilindros, dirección que es normal a la línea de separación de los dos medios. Igual sucede con \vec{D}_2 . Recurriendo a las condiciones de contorno para medios materiales, como en la superficie entre los dielécticos no existe carga libre superficial, el vector desplazamiento cumple :

$$D_{1n} - D_{2n} = 0$$

Y como :

$$D_{1n} = D_1 \text{ y } D_{2n} = D_2$$

Nos queda que:

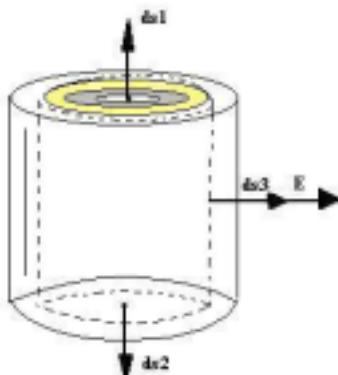
$$D_1 = D_2 = D$$

Con esto deducimos que para ambas regiones el vector desplazamiento será constante, y tendrá dirección radial: $\vec{D} = D(\vec{a}_R)$.

Aplicaremos la ley de Gauss para dielécticos, tomando como superficie gaussiana un cilindro coaxial de radio R y longitud L , situado entre los dos conductores.

Electrostática

Calculando el flujo: $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{s3} \vec{D} \cdot d\vec{s}_3$



Vemos que para s_1 y s_2 (las tapas del cilindro), el vector desplazamiento \vec{D} es perpendicular a $d\vec{s}_1$ y a $d\vec{s}_2$, y según la definición del producto escalar de dos vectores, las integrales en las tapas del cilindro serán 0, influyendo sólo en el flujo resultante la integral en la intercara del cilindro (En este caso \vec{D} y $d\vec{s}_3$ son paralelos).

Como consecuencia la integral queda de la siguiente forma : $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s3} \vec{D} \cdot d\vec{s}_3 = \int_{s3} D \cdot ds_3$

Y como D es constante en S_3 , sacándolo fuera de la integral:

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = D \int_{s3} ds_3 = D \cdot S = D2\pi RL, \text{ siendo } 2\pi RL \text{ el valor de la superficie } S_3.$$

La carga total almacenada por la superficie gaussiana es $+Q$, debido a que nuestro cilindro encierra dicha carga.

Por lo cual, despejando D de la siguiente ecuación: $D2\pi RL = Q$, nos queda que el vector desplazamiento vale:

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi RL} \vec{a}_R$$

De la relación entre desplazamiento y campo eléctrico para medios materiales: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, los campos eléctricos en las regiones 1 y 2 son :

$$\text{Región 1} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_1} \vec{a}_r \quad \text{Región 2} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_2} \vec{a}_r$$

Así el campo en la superficie de los dos conductores vale :

$$\text{Región 1} \Rightarrow \frac{Q}{2\pi a L \epsilon_1} \vec{a}_r = 4 \frac{Q}{2\pi b L \epsilon_2} \vec{a}_r \quad \text{Región 2} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi b L \epsilon_2} \vec{a}_r$$

Y como se ha de cumplir que $\vec{E}_1 = 4\vec{E}_2$:

$$\frac{Q}{2\pi a L \epsilon_1} \vec{a}_r = 4 \frac{Q}{2\pi b L \epsilon_2} \vec{a}_r$$

Y despejando ϵ_2 nos queda que: $\epsilon_2 = 4\epsilon_1 \frac{a}{b}$

Electrostática

Sabiendo que $b = 2a$ y que $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$:

$$\epsilon_2 = 16\epsilon_0 \frac{a}{2a} = 8\epsilon_0$$

b) Para hallar la capacidad de la estructura utilizaremos la siguiente ecuación: $C = \frac{Q}{\Delta V}$, siendo Q la carga total almacenada en el condensador y ΔV la diferencia de potencial entre las placas, que para nuestro caso será V_o .

Como consecuencia, debemos relacionar la diferencia de potencial (V_o) con la carga en las placas. Para ello nos ayudaremos de la siguiente ecuación:

$$\int_{v1}^{v2} dV = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando como curva C para nuestro ejemplo, la dirección radial entre los conductores.



Debido a que no estamos en el vacío, sino que la zona que hay entre las placas esta constituida por dos dielécticos, con campos distintos, debemos separar la integral en dos: una integral para la Región 1, que va desde $R = a$ hasta un punto $R = c$ (donde termina la región 1 y empieza la región 2) y otra integral que va desde $R = c$ hasta $R = b$ para la Región 2:

$$V_o = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \left[\int_a^c \vec{E}_1 \cdot dR + \int_c^b \vec{E}_2 \cdot dR \right]$$

Como $d\vec{l}$ y el campo son vectores paralelos y con el mismo sentido, nos queda que :

$$V_o = \int_a^c E_1 \cdot dR + \int_c^b E_2 \cdot dR = \int_a^c \frac{Q}{2\pi RL\epsilon_1} \cdot dR + \int_c^b \frac{Q}{2\pi RL\epsilon_2} \cdot dR$$

Resolviendo nos queda :

$$V_o = \frac{Q}{8\epsilon_0\pi L} \cdot \left(\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{2a}{c} \right)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión de la capacidad, se tiene que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_o} = 8\epsilon_0\pi L \cdot \left(\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{2a}{c} \right)^{-1}$$

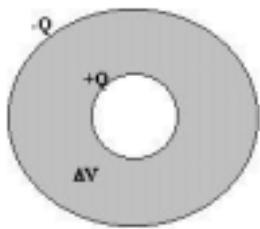
Por lo que la capacidad por unidad de longitud será:

$$\frac{C}{L} = 8\epsilon_0\pi \cdot \left(\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{2a}{c} \right)^{-1}$$

◎ **Ejercicio 10**

La capacidad de un condensador viene dada por la siguiente expresión:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$



donde Q es la carga total del condensador y ΔV la diferencia de potencial entre las placas. Para calcular la diferencia de potencial utilizaremos la siguiente expresión:

$$\int_{v1}^{v2} dV = - \int_C \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Debemos pues de calcular el campo eléctrico en el condensador. Para ello utilizaremos la expresión $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, de donde despejando \vec{E} nos queda que $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$.

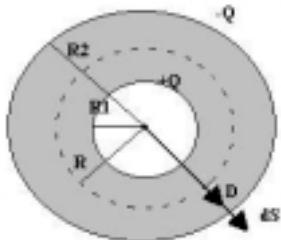
Para hallar el vector desplazamiento eléctrico entre las placas (fuera es nulo), utilizamos la ley de gauss para medios materiales:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \rho_v$$

Tomaremos como sistema coordenado, las coordenadas esféricas, por la simetría esférica del problema y como superficie gaussiana una esfera concéntrica de radio R .

Para calcular el flujo, $d\vec{s}$ y \vec{D} tienen la misma dirección y sentido (radial), por lo que el producto escalar de estos dos vectores será igual al producto de módulos.

Como D en esa zona es constante en la superficie gaussiana :



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D \int_S ds = D \cdot S = D 4\pi R^2$$

Siendo $4\pi R^2$ la superficie de la esfera de radio R . Como consecuencia, la carga total encerrada en esa superficie gaussiana es Q .

Así, la ley de gauss nos queda de la siguiente forma: $D 4\pi R^2 = Q$

Y despejando D , obtenemos el módulo del vector desplazamiento: $D = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Dándole carácter vectorial: $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \vec{a}_R$

Electrostática

Ahora hallaremos el campo eléctrico en la región: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon 4\pi R^2} \vec{a}_R$

Sustituiremos ahora la permitividad absoluta por su verdadero valor: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, siendo ϵ_0 la permitividad del vacío y ϵ_r la permitividad relativa que en nuestro caso será: $\frac{a}{R}$.

El campo eléctrico en la región es entonces :

$$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi R^2} \vec{a}_R = \frac{Q}{\epsilon_0 \frac{a}{R} 4\pi R^2} \vec{a}_R = \frac{Q}{\epsilon_0 a 4\pi R} \vec{a}_R$$

Calcularemos ahora, la diferencia de tensión entre las placas. Para este ejercicio nuestra curva será la recta que va en dirección radial desde R_1 a R_2 , por lo que la ecuación nos queda:

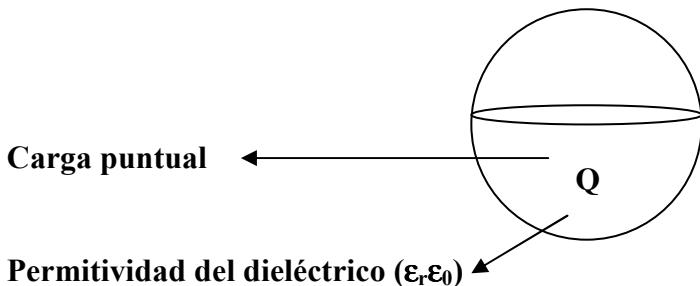
$$V_o = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C \frac{Q}{\epsilon_0 a 4\pi R} \vec{a}_R \cdot dR \vec{a}_R = \int_C \frac{Q}{\epsilon_0 a 4\pi R} \cdot dR = \frac{Q}{\epsilon_0 a 4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Donde hemos integrado a lo largo de la dirección radial, siendo \vec{E} y $d\vec{l} = dR \vec{a}_R$ vectores paralelos.

Sustituyendo el potencial, en la fórmula de la capacidad $C = \frac{Q}{\Delta V}$ nos queda:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_o} = \frac{\epsilon_0 a 4\pi}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

◎ **Ejercicio 11**



- Nos pide hallar el vector de polarización para ello partiremos de la siguiente fórmula:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Y de esta fórmula despejamos el vector de polarización, nos queda:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

Luego nuestro problema queda reducido a hallar el vector de desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico, y sustituir dichos valores en la ecuación anterior.

a) Hallar el vector de desplazamiento eléctrico

Para hallarlo aplicaremos el teorema de Gauss para dieléctricos:

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q_v$$

(Cargas libres encerradas, en nuestro problema es la carga puntual Q)

Para resolver dicha ecuación tenemos que elegir una superficie gaussiana, vamos a escoger una esfera de cualquier radio r. Ya sea dentro o fuera de la esfera la carga libre encerrada siempre es Q:

Vemos que por simetría el campo eléctrico solo depende de la coordenada r, y ésta a su vez es constante, por lo tanto puede salir de la integral, y al ser los vectores paralelos, podemos eliminar el carácter vectorial y dejar la fórmula de la siguiente manera:

$$D(r) \int_S dS = Q$$

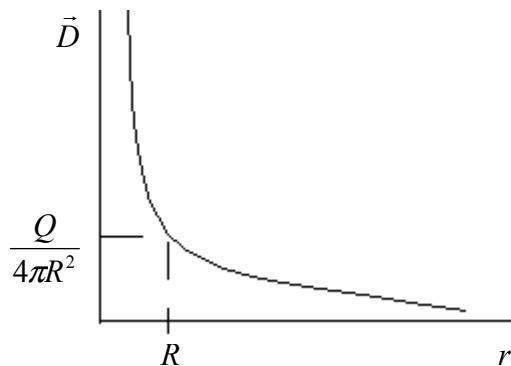
Por lo tanto el vector desplazamiento nos queda:

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Dándole carácter vectorial:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r \quad \forall r$$

Representación gráfica del vector desplazamiento



El problema nos pide que lo representemos con dieléctrico y sin él, pero en este caso la gráfica sería la misma.

b) Hallar el campo eléctrico

Si suponemos el medio lineal podemos escribir que:

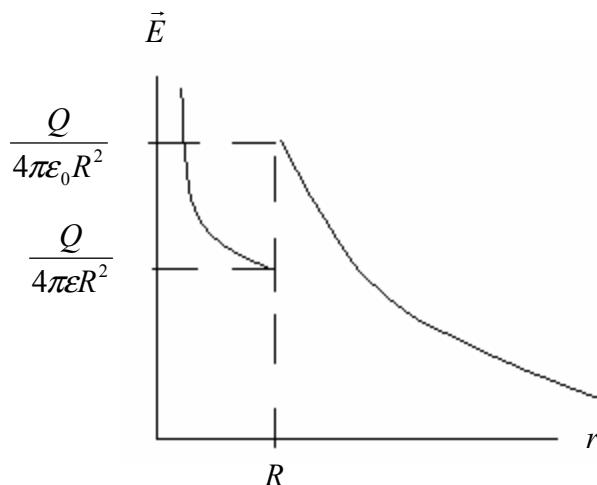
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Luego el campo eléctrico será:

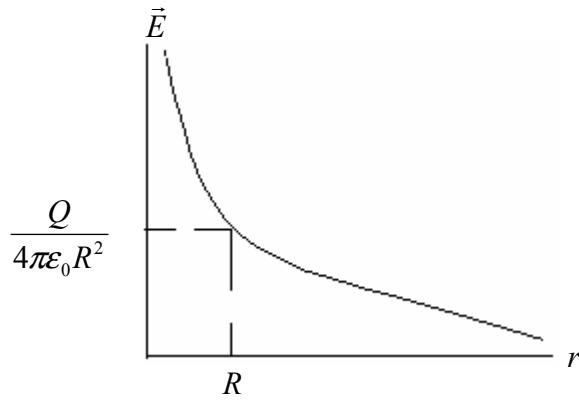
$$\begin{aligned} \vec{E} \text{ para } r < R \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} &\longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r \\ \vec{E} \text{ para } r > R \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} &\longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r \end{aligned}$$

Representación gráfica del campo eléctrico

Gráfica con esfera dieléctrica



El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, debido al cambio de permitividades. Sin embargo sin esfera dieléctrica el campo si es continuo como se puede apreciar en la siguiente gráfica. (campo creado por la carga puntual Q).



Después de obtener los datos que nos eran necesarios para hallar el vector de polarización, lo único que nos queda es sustituirlos en la ecuación:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{P} &\text{ para } r > R \\ \vec{P} &= 0\end{aligned}$$

Esto se debe a que en $r > R$ nos encontramos en el vacío y ahí el vector de polarización es 0.

$$\vec{P} \text{ para } r \leq R$$

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{a}_r - \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon} \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right] \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[\frac{\epsilon_0 \epsilon_r - \epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right] \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right] \vec{a}_r$$

- Lo otro que nos pedía el problema eran las densidades de cargas ligadas:

Densidad de carga de polarización en volumen

$$\rho_{PV} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta P_r) = 0; \quad 0 < r < R$$

La carga volumétrica de polarización es cero.

Densidad de carga de polarización superficial

$$\rho_{PS} = \vec{P}_S \bullet \vec{a}_r = \frac{Q}{4\pi R^2} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right]$$

Como la carga de polarización total en el dieléctrico ha de ser nula, existe una carga puntual de polarización, Q_p , en el centro del dieléctrico de valor:

$$Q_p = -\rho_{PS} \cdot 4\pi R^2 = Q \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right]$$

Electrostática

- Lo último que nos queda es hallar el potencial para poder dibujarlo, que es otra de las cosas que nos piden.

$$V = - \int \vec{E} \bullet d\vec{r} + Cte$$

V para $r > R$

$$V = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte$$

Como sabemos que:

$$V(\infty) = 0 \rightarrow cte. = 0$$

Y nos queda que el potencial para $r > R$ es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

V para $r < R$

$$V = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + Cte$$

Por la continuidad del potencial en la superficie
 $V(r < R)$ en $R = V(r > R)$ en R

Pues si igualamos las dos fórmulas y despejamos la Cte, podemos hallar su valor, que es el siguiente:

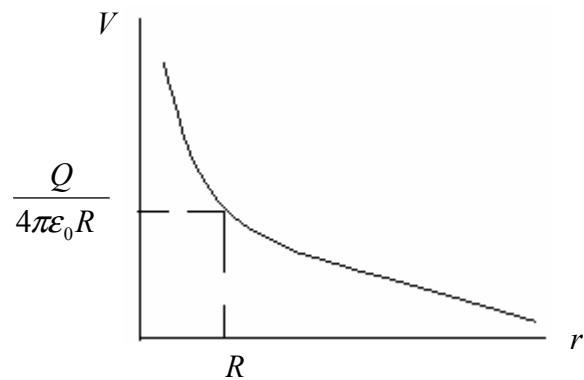
$$Cte = \frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

Y si ese valor lo sustituimos en el potencial para $r < R$, este nos queda:

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0 R} + \frac{1}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon R} \right]$$

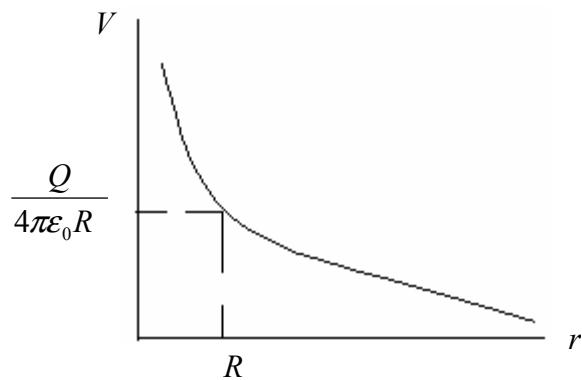
Representación gráfica del potencial

Con esfera dieléctrica



Sin esfera dieléctrica el potencial tiene una dependencia análoga con la única diferencia de que en el interior de la esfera, es decir $r < R$, el potencial tendrá valores mayores.

Sin esfera dieléctrica



◎ Ejercicio 12

a) Calcular las densidades volumétrica y superficial de carga de polarización.

Se define la densidad volumétrica de carga de polarización δ_{pv} como:

$$\delta_{pv} = -\vec{\nabla} \vec{P}$$

Calculamos la divergencia de \vec{P} en esféricas:

$$\vec{\nabla} \vec{P} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \sin \theta \frac{K}{R} \right) = \frac{K}{R^2}$$

Por lo que la densidad volumétrica de carga será: $\delta_{pv} = -\frac{K}{R^2}$

Se define la densidad superficial de carga de polarización δ_{ps} como $\delta_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_R$, por tanto:

$$\delta_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_R = \vec{P}(R=a) \cdot \vec{a}_R = \frac{K}{a} \Rightarrow \delta_{ps} = \frac{K}{a}$$

b) Calcular la densidad volumétrica de carga libre:

En un medio simple:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Como sabemos $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$, despejando tenemos que $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$, sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a que:

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \cdot \vec{D} + \vec{P}$$

Calculando la divergencia en ambos miembros, suponiendo el medio simple:

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \vec{D} + \vec{\nabla} \vec{P}$$

y como $\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{D} = \delta_v \\ \vec{\nabla} \vec{P} = -\delta_{pv} \end{cases}$ la ecuación nos queda: $\delta_v = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \cdot \delta_v - \delta_{pv}$

Operando nos queda: $\delta_{pv} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \delta_v$. Sustituyendo $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, y operando:

$$\delta_{pv} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} - 1 \right) \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_{pv} = \left(\frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) \cdot \delta_v \Rightarrow \delta_v = \left(\frac{\epsilon_r}{1 - \epsilon_r} \right) \delta_{pv}$$

Como $\delta_{pv} = -\frac{K}{R^2}$, sustituyendo:

$$\delta_v = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K}{R^2}$$

c) Calcular el potencial dentro y fuera de la esfera:

Vamos a calcularlo mediante el Teorema de Gauss, primero calculamos el campo dentro y fuera de la esfera, y luego el potencial integrando.

$$\oint_{S'} \vec{D} = Q_V$$

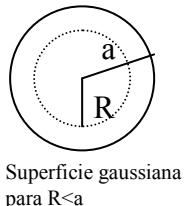
Integrando obtenemos el primer miembro de la ecuación:

$$I = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}; \text{ como } \{\vec{D} \parallel d\vec{S}\} \rightarrow I = \oint_S D \cdot dS; \text{ como } \{D = \text{cte en } S'\} \rightarrow I = D \cdot \oint_S dS = D \cdot 4\pi R^2$$

La carga Q_V encerrada en la superficie gaussiana variará dependiendo si estamos dentro o fuera de la esfera:

R < a

$$Q_V = \int_0^R \delta_V \cdot dv; \{dv = 4\pi R^2 dr\} \rightarrow Q_V = \int_0^R \delta_V \cdot 4\pi R^2 dr = \\ = \int_0^R \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K}{R^2} \cdot 4\pi R^2 dr = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K R$$

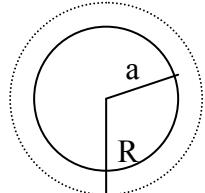


Igualando:

$$D \cdot 4\pi R^2 = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K R \Rightarrow D = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K}{R} \Rightarrow \vec{D} = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K}{R} \vec{a}_R$$

Por lo que el campo será:

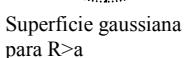
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K}{R} \vec{a}_R \Rightarrow \vec{E} = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \frac{1}{R} \vec{a}_R$$



R > a

Será toda la carga encerrada en el dieléctrico:

$$Q_V = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K a$$



Igualando:

$$D \cdot 4\pi R^2 = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K a \Rightarrow D = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K \frac{a}{R^2} \Rightarrow \vec{D} = \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) 4\pi K \frac{a}{R^2} \vec{a}_R$$

Por lo que el campo será:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \right) \frac{K a}{R^2} \vec{a}_R \Rightarrow \vec{E} = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{R^2} \vec{a}_R$$

Integrando la intensidad de campo obtenemos el potencial:

R > a

$$V = - \int \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{R^2} dR = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{R} + C$$

Obtenemos C haciendo tender $R \rightarrow \infty$:

$$V(\infty) = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{R} + C \Rightarrow 0 = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{\infty} + C \Rightarrow C = 0$$

Por tanto, el potencial en el exterior de la esfera dieléctrica queda:

$$V_{\text{exterior}} = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \frac{a}{R}$$

R < a

$$V = - \int \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \frac{1}{R} dR = - \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \ln R + C$$

Hallamos C haciendo R → a:

$$\begin{aligned} V(R = a) &= - \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \ln a + C \Rightarrow \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} = - \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \ln a + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow C = \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} + \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \ln a \Rightarrow C = \frac{K \cdot \epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\ln a}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

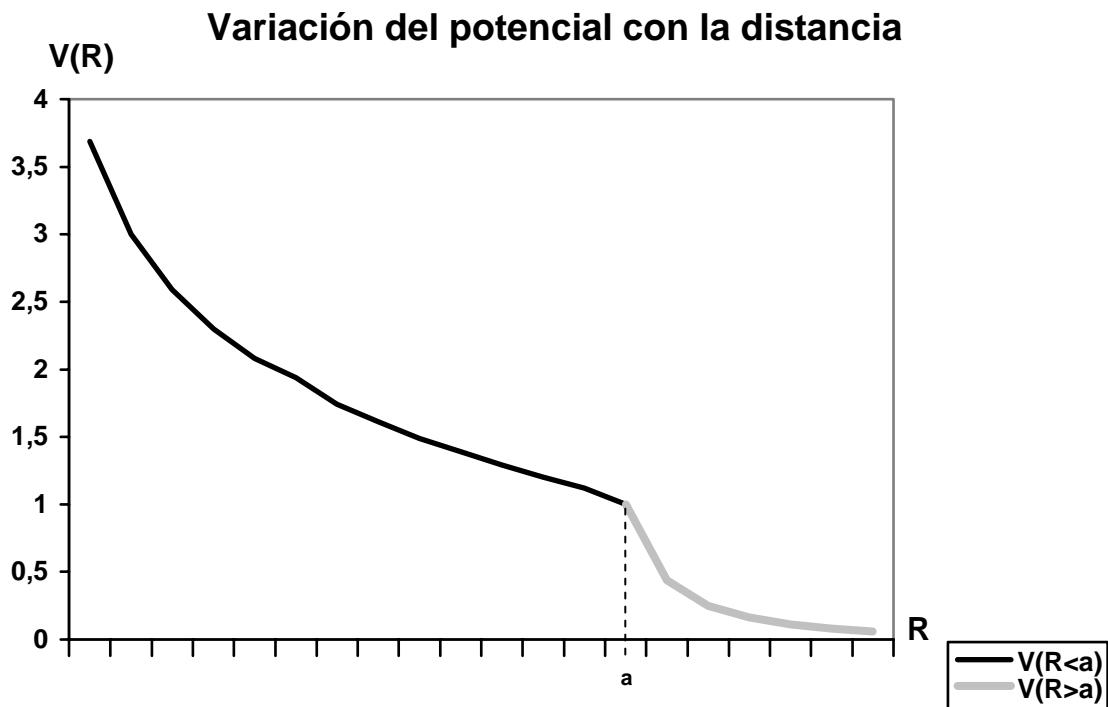
Sustituyendo C y simplificando:

$$\begin{aligned} V &= - \frac{K \cdot \epsilon_r}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} \ln R + \frac{K \cdot \epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\ln a}{\epsilon} \right) = \frac{K \cdot \epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\ln a}{\epsilon} - \frac{\ln R}{\epsilon} \right) = \left\{ \times \frac{\epsilon}{\epsilon} \right\} \\ \frac{K \cdot \epsilon_r (\epsilon_r + \ln a / R)}{\epsilon(\epsilon_r - 1)} &= \{ \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \} = \frac{K \cdot (\epsilon_r + \ln a / R)}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)} \end{aligned}$$

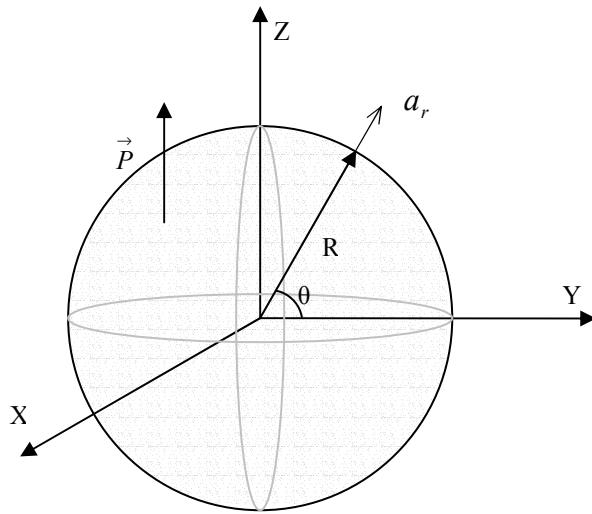
Por tanto, el potencial en el interior de la esfera dieléctrica es:

$$V_{\text{interior}} = \frac{K \cdot (\epsilon_r + \ln a / R)}{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}$$

d) Representar gráficamente la variación de potencial con la distancia:



◎ Ejercicio 13



- a) Densidades de carga de polarización:

ρ_{ps} : densidad superficial de carga de polarización equivalente

ρ_{pv} : densidad volumétrica de carga de polarización equivalente

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_R = 2 \cdot 10^{-6} \vec{a}_z \cdot \vec{a}_R = 2 \cdot 10^{-6} \cos \theta \text{ C/m}^2$$

$$\rho_{ps} = 2 \cdot 10^{-6} \cos \theta \text{ C/m}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{pv} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{P} = cte \end{array} \right\} \quad \rho_{pv} = 0$$

- b) Potencial eléctrico en el centro de la esfera

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\rho_{ps}}{r} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_{pv}}{r} dV'$$

En nuestro caso, como $\rho_{pv}=0$:

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\rho_{ps}}{r} ds'$$

En coordenadas esféricas tenemos que:

$$S' \equiv \theta \Big|_0^\pi ; \phi \Big|_0^{2\pi} ; r = R$$

$$ds' = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Electrostática

Por tanto,

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\rho_{ps}}{r} r^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi 2 \cdot 10^{-6} \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= \frac{R \cdot 10^{-6}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \underbrace{2 \cos\theta \cdot \sin\theta}_{\sin 2\theta} d\theta = \frac{10^{-6}}{4\epsilon_0} (-\cos\theta) \Big|_0^\pi = 0$$

c) Demostración de que la carga libre en el dieléctrico es nula:

El dieléctrico es simple, o sea, lineal, homogéneo e isótropo, por lo que la permitividad relativa es constante ($\epsilon_r = cte$). Sea ρ_v la densidad de volumen de las cargas libres. Sabemos que se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{D} = \rho_v \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} + \vec{\nabla} \vec{P} = \rho_v \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \\ \rho_{pv} = -\vec{\nabla} \vec{P} \end{array} \right\}$$

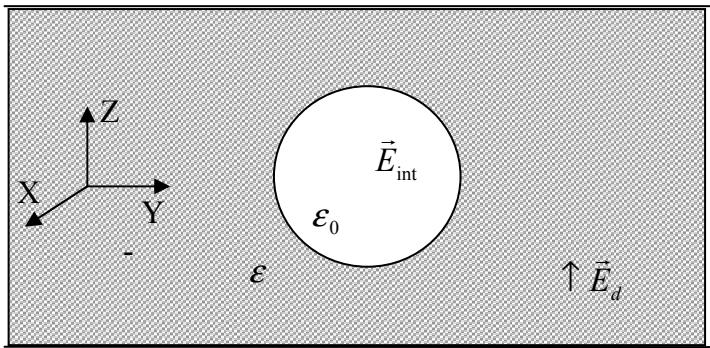
$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon} \right) - \rho_{pv} = \rho \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{\nabla} \vec{D} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \rho_v = \rho_v + \rho_{pv}$$

$$\rho_v = \frac{\epsilon}{\epsilon_0 - \epsilon} \rho_{pv} = 0$$

Vemos que $\rho_v = 0$ debido a que $\rho_{pv} = 0$.

◎ Ejercicio 14

El problema nos dice que tenemos un dieléctrico al cual se le ha hecho una cavidad esférica, como el de la figura, sin embargo, no especifica si el dieléctrico es finito o infinito de manera que vamos a considerarlo finito por hacer el problema más ceñido a la realidad.



De esta forma el campo eléctrico en el interior del dieléctrico es generado por un campo exterior al dieléctrico (\vec{E}_{ext}) que, por las condiciones de contorno y suponiendo que solo tiene componente normal (\hat{a}_z), obtenemos de la siguiente forma:

$$\epsilon_0 \quad \uparrow \vec{E}_{ext}$$

Según las condiciones de contorno la componente normal del vector desplazamiento se conserva:

$$\vec{D}_{ext_n} = \vec{D}_{d_n}$$

Según la relación entre el vector Desplazamiento y el campo eléctrico, la componente normal del campo eléctrico externo vale:

$$\epsilon_0 \cdot \vec{E}_{ext_n} = \epsilon \cdot \vec{E}_{d_n}$$

$$\boxed{\vec{E}_{ext_n} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \vec{E}_{d_n}}$$

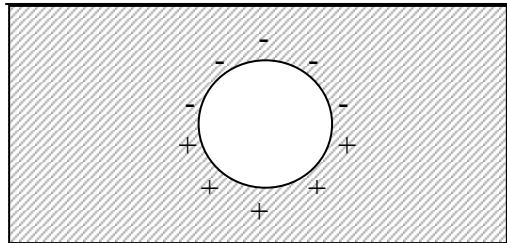
Como solo tiene componente normal el campo del dieléctrico, el campo exterior solo tendrá componente normal:

$$\boxed{\vec{E}_{ext_n} = E_{ext_n} \cdot \hat{a}_Z = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_{d_n} \cdot \hat{a}_Z}$$

Para hallar el campo en el centro de la cavidad podemos hacerlo de varias formas. Yo he elegido utilizar el teorema de superposición, de esta forma, el campo en el centro de la cavidad es la suma del campo exterior con el campo producido por cargas de polarización.

Debido a la interacción del campo eléctrico con las moléculas del dieléctrico, se crean cargas de polarización en la superficie interior del dieléctrico:

Electrostática



Estas cargas se representan vectorialmente con el vector de polarización (\vec{P}) que, viene relacionado con el campo eléctrico según la siguientes expresiones:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{E}_d \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P} = \epsilon \vec{E}_d \\ \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d \end{array} \right.$$

Lo cual significa que el vector polarización tiene la misma dirección y sentido que el campo eléctrico.

El campo eléctrico \vec{E}_d es uniforme (constante según la posición), lo cual significa que su divergencia es nula. Esto implica que la divergencia de \vec{D} también es nula y por consiguiente que no existe densidad de carga libre volumétrica dentro del dieléctrico (no existen cargas libres en el interior del dieléctrico):

$$\vec{E} = cte \Rightarrow \vec{D} = cte \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \rho_v = 0$$

De la misma forma la densidad volumétrica de carga de polarización la hallamos como:

$$\rho_{vv} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

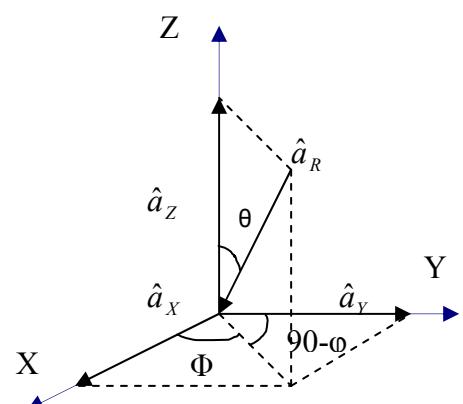
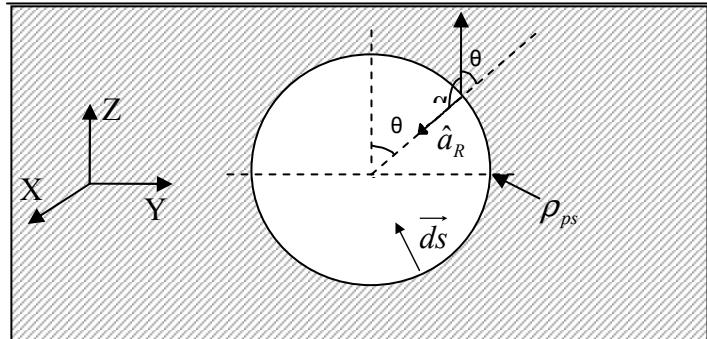
Vemos que se anula igualmente debido a la uniformidad del campo. Esto va a simplificar un poco la expresión que nos da el campo eléctrico creado por las cargas de polarización:

$$\vec{E}_p(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_v \frac{\rho_{pv}}{R^2} \hat{a}_R dv' + \int_s \frac{\rho_{ps}}{R^2} \hat{a}_R ds' \right]$$

Tenemos que hallar la densidad superficial de cargas de polarización ρ_{ps} a lo largo de la superficie interna del dieléctrico. Para ello utilizamos la siguiente expresión:

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n$$

Tenemos que por lo tanto hallar el producto escalar de ambos vectores para lo cual antes los definiremos:



Electrostática

Se deducen de las fórmulas que hallamos antes, que el vector polarización es paralelo al campo eléctrico de manera, que tendrán la misma componente vectorial. Con respecto al vector radial, decir que es un vector que va perpendicular a la superficie del dieléctrico y hacia fuera de éste. Ahora que tenemos el vector radial lo que hacemos es pasarlo de coordenadas esféricas a cartesianas para poder integrar si problemas. Para ello hacemos uso de proyecciones y de trigonometría elemental.

$$\hat{a}_R = -\sin\theta \cos\phi \cdot \hat{a}_x - \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \hat{a}_y - \cos\theta \cdot \hat{a}_z$$

$$\vec{P} = P \cdot \hat{a}_z$$

Ya tenemos definidos ambos vectores, ahora hacemos el producto escalar:

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n = \vec{P} \cdot \hat{a}_R = P \cos\alpha = P \cos(180^\circ - \theta) = -P \cos\theta$$

Con los datos que tenemos, ya podemos hacer la integral que nos dará el campo producido por las cargas de polarización:

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\rho_{ps}}{R^2} \hat{a}_R ds' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{-P \cos\theta}{R^2} [-\sin\theta \cos\phi \cdot \hat{a}_x - \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \hat{a}_y - \cos\theta \cdot \hat{a}_z] ds' \end{aligned}$$

Necesitamos definir nuestra superficie de integración así como el diferencial de superficie a utilizar que, al estar trabajando con simetría esférica, será el mismo expresado en coordenadas esféricas:

$$ds' = R^2 \sin\theta \cdot d\phi \cdot d\theta$$

La superficie es una esfera completa, de manera que debemos integrar según los límites siguientes:

$$s' \left\{ \begin{array}{l} \theta \Big|_0^\pi \\ \phi \Big|_0^{2\pi} \end{array} \right. \quad \text{Hay que fijarse que } \theta \text{ está definida de } 0 \text{ a } \pi. \text{ Esto se debe al eje de coordenadas definido para hacer el problema.}$$

Continuamos pues con nuestra integral:

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(0) &= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [-\cos\theta \cdot \sin\theta \cos\phi \cdot \hat{a}_x - \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \cdot \hat{a}_y - \cos^2\theta \cdot \hat{a}_z] \cdot [R^2 \sin\theta \cdot d\phi \cdot d\theta] = \\ &= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left[- \int_0^{2\pi} \overbrace{\cos\phi \cdot d\phi}^{\sin\phi \Big|_0^{2\pi} = 0} \int_0^\pi \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \hat{a}_x - \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\phi \cdot d\phi \int_0^\pi \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \hat{a}_y}_{\frac{\sin^3\theta}{3} \Big|_\pi^0 = 0} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot \hat{a}_z \right] = \end{aligned}$$

Electrostática

$$= \frac{(\epsilon - \epsilon_0)E_d}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \hat{a}_z = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)E_d}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] \hat{a}_z = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)E_d}{3\epsilon_0} \hat{a}_z$$

Por lo tanto el campo creado por las cargas de polarización en el centro de la cavidad es:

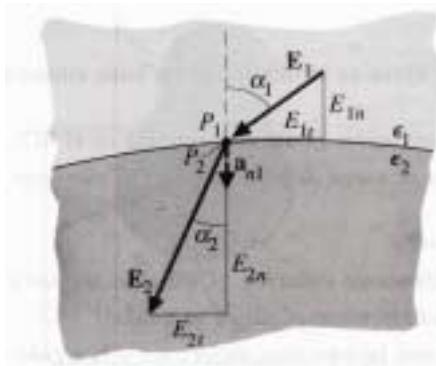
$$\vec{E}_P(0) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)E_d}{3\epsilon_0} \hat{a}_z$$

Ahora, por superposición, sumamos los campos exterior y el creado por las cargas de polarización y así obtenemos el campo total en el centro de la cavidad:

$$\vec{E}_{int}(0) = \vec{E}_P(0) + \vec{E}_{ext}(0) = \left[\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{3\epsilon_0} E_d + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_d \right] \hat{a}_z = \frac{4\epsilon_r - 1}{3} E_d \cdot \hat{a}_z$$

$$\vec{E}_{int}(0) = \frac{4\epsilon_r - 1}{3} E_d \cdot \hat{a}_z$$

◎ **Ejercicio 15**



Utilizando las condiciones de contorno para los campos electrostáticos tenemos:

LA COMPONENTE NORMAL DEL CAMPO:

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s; \text{ como en la interface no hay carga libre: } \rho_s = 0 \Rightarrow D_{1N} = D_{2N}$$

$$\epsilon_1 \cdot E_{1N} = \epsilon_2 \cdot E_{2N} \Rightarrow \epsilon_1 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha_1 = \epsilon_2 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad (\text{ecuación 1})$$

LA COMPONENTE TANGENCIAL DEL CAMPO: Sabemos que ésta se conserva

$$E_{1T} = E_{2T} \Rightarrow E_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_1 = E_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 \quad (\text{ecuación 2})$$

Para hallar la dirección del campo en el medio 2, tendremos que averiguar α_2 y para ello lo más sencillo es dividir la ecuación número (2) entre la ecuación (1):

$$\frac{1}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \operatorname{tg} \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1. \text{ Despejando:}$$

$$\boxed{\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} \alpha_1 \right)}$$

y esta será la dirección que estábamos buscando

Existen dos formas posibles de calcular la magnitud del campo 2:

a) Operando con las ecuaciones (1) y (2): elevando las dos ecuaciones al cuadrado y multiplicando la (2) por ϵ_2^2 , y nos quedan las siguientes expresiones:

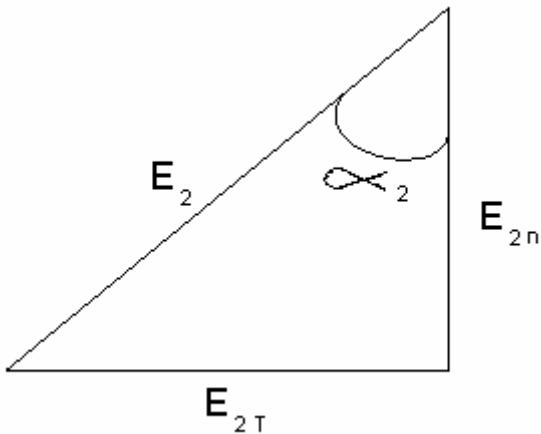
$$\begin{aligned} \epsilon_1^2 \cdot E_1^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 &= \epsilon_2^2 \cdot E_2^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 \\ \epsilon_2^2 \cdot E_1^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_1 &= \epsilon_2^2 \cdot E_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha_2 \end{aligned}$$

Si ahora sumamos las dos expresiones tenemos:

Electrostática

$E_1^2(\epsilon_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \epsilon_2^2 \sin^2 \alpha_1) = \epsilon_2^2 E_2^2$, donde en el segundo miembro de la ecuación se tuvo en cuenta que: $\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = 1$. Por último, despejando E_2 :

Utilizando el teorema de pitágoras



$$E_2 = \sqrt{E_{2N}^2 + E_{2T}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \alpha_2)^2 + (E_2 \cos \alpha_2)^2} = \sqrt{(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1\right)^2}$$

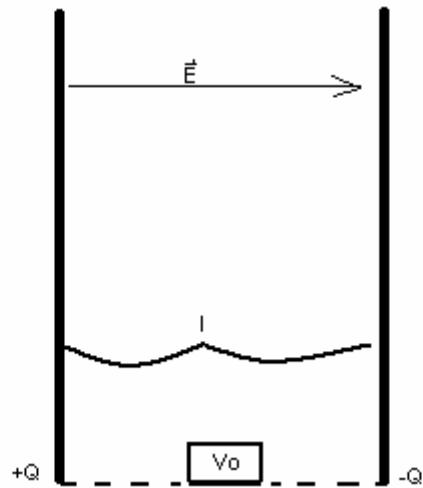
$$E_2 = E_1 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \cos \alpha_1\right)^2}$$

y comprobamos que nos da el mismo resultado.

◎ Ejercicio 16

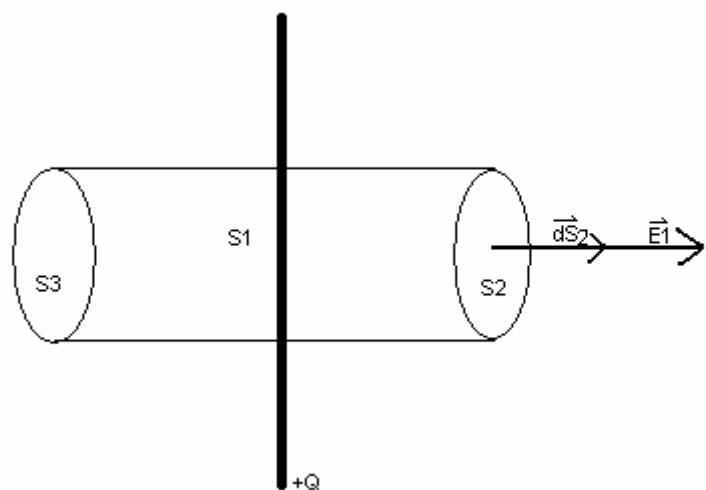
El problema especifica que se desprecien los efectos de borde. Esto quiere decir que las láminas están muy juntas y se tratan como planos infinitos, con lo que podemos suponer que el campo en la región interna del condensador es uniforme. Si hubiésemos considerado el efecto de borde el campo no hubiera sido uniforme en los extremos de las placas.

Al tener una diferencia de potencial, entre las placas ambas quedan cargadas con una carga $+Q$ y $-Q$ respectivamente.



Campo

Aplicando Gauss a la primera placa ($+Q$) para conocer el aporte que realiza al campo de la región interna:



Electrostática

$$\int_S \vec{E}_1 d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{E}_1 d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_1 d\vec{s}_2 + \int_{S_3} \vec{E}_1 d\vec{s}_3 = 2 \int_{S_2} \vec{E}_1 d\vec{s}_2 = 2 \int_{S_2} E_1 ds_2 = 2E_1 \Delta S$$

$$2E_1 \Delta S = \frac{\varrho_v}{\epsilon_o}, 2E_1 \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\epsilon_o}, E_1 = \frac{\rho_s}{2\epsilon_o}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho_s}{2\epsilon_o} \vec{a}_x}$$

El razonamiento a seguir con la segunda placa (-Q) es análogo, de manera que:

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_s}{2\epsilon_o} \vec{a}_x = \vec{E}_1$$

y sumando los aportes de la placa (+Q) y (-Q), obtenemos que el campo en la región interna del condensador es:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \boxed{\frac{\rho_s}{\epsilon_o} \vec{a}_x = \vec{E}}$$

Densidad de carga

Para calcular la densidad de carga superficial en las placas nos ayudamos de que ya conocemos el potencial (es un dato del problema), conocemos el campo y conocemos la expresión que relaciona campo y potencial:

$$V_o = - \int_{-Q}^Q \vec{E} d\vec{l} = - \int_{-Q}^Q -Edl = E \int_{-Q}^Q dl = El$$

$$E = \frac{V_o}{l}, \frac{\rho_s}{\epsilon_o} = \frac{V_o}{l}, \boxed{\rho_s = \frac{V_o \epsilon_o}{l}}$$

Energía

La energía se puede calcular de dos maneras. Una de ellas es utilizando la fórmula de la energía en un condensador:

$$W = \frac{1}{2} QV$$

que utilizaremos más adelante. El segundo camino que podemos seguir para su cálculo es la utilización de la fórmula general:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{D} \vec{E} dV$$

Electrostática

teniendo en cuenta que el medio es lineal, es decir:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Resolviendo por este método:

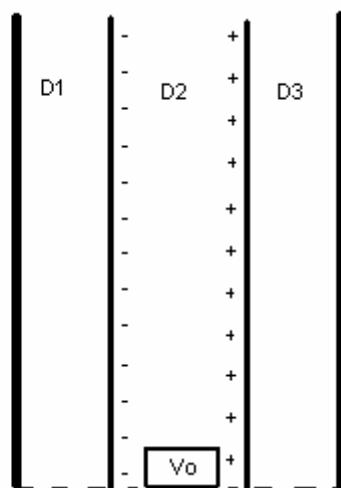
$$\frac{1}{2} \int_{\infty} \epsilon_o E^2 dv = \frac{1}{2} \int_{\text{dentro}} \epsilon_o E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 \int_{\text{dentro}} dv = \frac{1}{2} \epsilon_o \frac{\rho_s^2}{\epsilon_o^2} Sl = \boxed{\frac{SV_o^2 \epsilon_o}{2l} = W}$$

Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o}, C = \frac{\rho_s S}{\rho_s l} = \boxed{\frac{\epsilon_o S}{l} = C}$$

b)

Manteniendo la diferencia de potencial que existía entre las placas del condensador se introduce ahora un dieléctrico de la siguiente forma:



Al polarizarse el dieléctrico se anulan las cargas de los dipolos interiores y sólo quedan las cargas externas en la superficie del mismo. Estas cargas no son libres, son cargas ligadas.

Al haber introducido un dieléctrico en el interior del campo manteniendo el potencial constante, obtendremos una variación en la densidad de carga que contrarreste el efecto del dieléctrico.

Campo

Sabemos que una de las condiciones de contorno en la superficie que separa dos medios es:

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

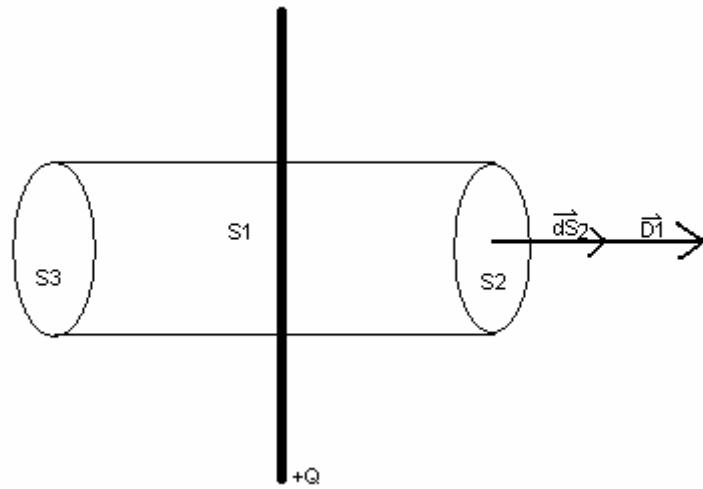
Aplicando esto a las caras externas del dieléctrico, y teniendo en cuenta que la densidad de carga libre en su superficie es 0, obtenemos la siguiente condición de contorno para las dos superficies que separan el dieléctrico de los huecos:

$$D_{1n} = D_{2n}, D_{2n} = D_{3n}$$

y por tanto:

$$D_{1n} = D_{2n} = D_{3n}$$

Además en este caso $\vec{D}_1 = D_{1n}$, $\vec{D}_2 = D_{2n}$, $\vec{D}_3 = D_{3n}$, al ser los vectores \vec{D} perpendiculares a las superficies entre medios. De esta forma sólo tendremos que calcular uno de los D para conocerlos todos. Calculamos D_1 :



Suponiendo que el flujo de campo eléctrico en S_3 es 0 al anularse el flujo producido por $+Q$ con el de $-Q$:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \vec{D}_1 d\vec{s}_2 = \int_S D_1 ds_2 = D_1 \Delta S$$

$$D_1 \Delta S = Q_v, D_1 \Delta S = \rho_s \Delta S, D_1 = \rho_s \Rightarrow \boxed{D_1 = D_2 = D_3 = \rho_s}$$

de aquí obtenemos:

Electrostática

$$D_1 = \epsilon E_1 = \rho_s, \epsilon_0 E_1 = \rho_s, \boxed{E_1 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}}$$

$$D_2 = \epsilon E_2 = \rho_s, \epsilon_0 \epsilon_r E_2 = \rho_s, \boxed{E_2 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

$$D_3 = \epsilon E_3 = \rho_s, \epsilon_0 E_3 = \rho_s, \boxed{E_3 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}}$$

Densidad de carga

La hallamos a través del potencial, que sigue siendo el dato del problema, y la expresión que ya conocemos del apartado a) que nos relaciona campo y potencial $V = El$:

$$\begin{aligned} V_o &= E_1 \frac{l}{4} + E_2 \frac{l}{2} + E_3 \frac{l}{4} = \frac{\rho_s}{\epsilon_o} \frac{l}{4} + \frac{\rho_s}{\epsilon_o \epsilon_r} \frac{l}{2} + \frac{\rho_s}{\epsilon_o} \frac{l}{4} = \frac{\rho_s l}{2\epsilon_o} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{\rho_s l}{\epsilon_o} \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_s &= \frac{V_o \epsilon_o}{l} \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right), \boxed{\rho_s = \rho_{s_0} \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right)} \end{aligned}$$

siendo ρ_{s_0} la densidad de carga en las placas antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

Energía

Utilizaremos ahora la fórmula de la energía de un condensador:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \rho_s S V_o = \frac{V_o S}{2} \frac{V_o \epsilon_o}{l} \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right), \boxed{W = W_o \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right)}$$

siendo W_o la energía del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

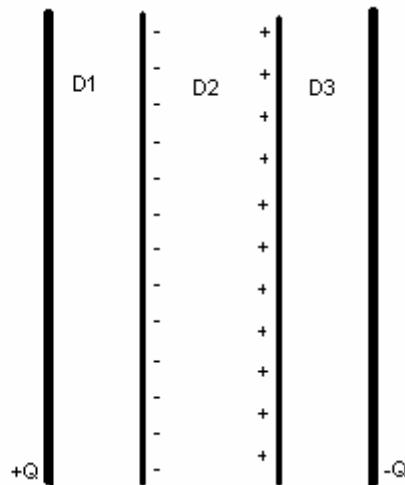
Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o}, C = \frac{\rho_s S}{V_o} = \frac{\epsilon_o S}{l} \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right) = \boxed{C_o \left(\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}\right) = C}$$

siendo C_o la capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

c)

En este apartado consideramos que, antes de insertar el dieléctrico en la región interna del condensador, la fuente de tensión ha sido desconectada. De esta manera la carga que ya existía en las placas va a permanecer constante (igual que en el apartado a)) y lo que cambia ahora para contrarrestar el efecto del dieléctrico es el potencial.



Campo

El campo en los huecos y en el dieléctrico va a seguir teniendo las mismas expresiones que calculamos en el apartado b):

$$E_{hue} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}, E_{die} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Densidad de carga

Se mantiene igual que antes de insertar el dieléctrico (apartado a)):

$$\rho_s = \frac{V_o \epsilon_0}{l}$$

Energía

Para calcular la energía por la fórmula de la energía en un condensador necesitamos conocer el potencial. Lo calculamos a partir de la relación $V = El$ y las expresiones conocidas de E :

Electrostática

$$V = E_1 \frac{l}{4} + E_2 \frac{l}{2} + E_3 \frac{l}{4} = \frac{\rho_s l}{\epsilon_o} \frac{1}{4} + \frac{\rho_s l}{\epsilon_o \epsilon_r} \frac{1}{2} + \frac{\rho_s l}{\epsilon_o} \frac{1}{4} = \frac{\rho_s l}{2\epsilon_o} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{\rho_s l}{\epsilon_o} \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r}\right) = \boxed{V_o \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r}\right) = V}$$

así tenemos:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \rho_s S \frac{\rho_s l}{\epsilon_o} \left(\frac{1 + \epsilon_r}{2\epsilon_r}\right) = \frac{V_o^2 S \epsilon_o}{2l} \left(\frac{1 + \epsilon_r}{2\epsilon_r}\right) = \boxed{W_o \left(\frac{1 + \epsilon_r}{2\epsilon_r}\right) = W}$$

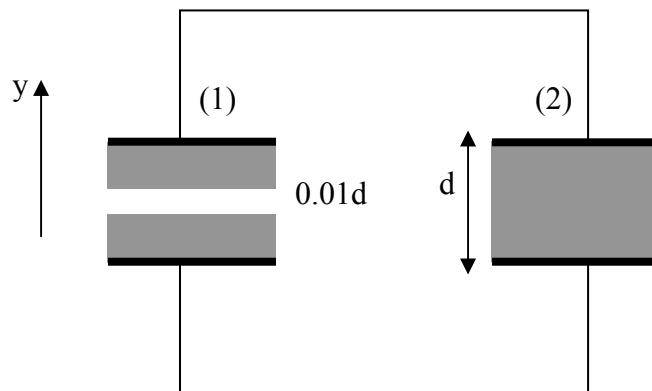
siendo W_o la energía del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

Capacidad

$$C = \frac{Q}{V}, C = \frac{Q}{V_o \left(\frac{1 + \epsilon_r}{2\epsilon_r}\right)} = \frac{\rho_s S}{V_o} \left(\frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}\right) = \frac{V_o \epsilon_o S}{l V_o} \left(\frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}\right) = \frac{\epsilon_o S}{l} \left(\frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}\right) = \boxed{C_o \left(\frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}\right) = C}$$

siendo C_o la capacidad del condensador antes de introducir el dieléctrico (la del apartado a))

◎ Ejercicio 17



a) Antes de la fractura :

Los dos condensadores son iguales y están sometidos la misma tensión, entonces:

$$E_1 = E_2 = V_o / d \quad (-a_y)$$

$$D_1 = D_2 = \epsilon E = \epsilon (V_o/d) = 100 \epsilon_0 (V_o/d) \quad (-a_y)$$

b) Después de la fractura:

Como la fractura se produce después de haber desconectado la batería, la carga total en las placas se conserva.

$$Q_t \text{ antes} = Q_t \text{ después}$$

Hallando la carga antes de la fractura :

$$Q_{a1} = Q_{a2} = \rho S = \epsilon E S = 100 \epsilon_0 (V_o/d)$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{a1} + Q_{a2} = 200 \epsilon_0 S (V_o / d) \quad (1)$$

Mientras que para la carga después de la fractura se ha de considerar que en el condensador 1 existen dos campos eléctricos: E_{d1} (campo en el dieléctrico) y E_f (campo en la fractura), que vienen dados por:

$$Q_{d1} = \epsilon E_{d1} S$$

$$Q_{d2} = \epsilon E_2 S$$

Con lo que la carga total será:

$$Q_{\text{total}} = Q_{d1} + Q_{d2} = \epsilon S (E_{d1} + E_2) \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) :

$$200 S \epsilon_0 (V_o / d) = 100 \epsilon_0 S (E_{d1} + E_2)$$

Así,

$$(E_{d1} + E_2) = 2 (V_o / d) \quad (3)$$

Electrostática

Además, si llamamos V a la tensión de los condensadores tras la fractura, se ha de cumplir que:

$$\begin{aligned}V &= Ed_1 d + Ef_1 0.01d \\V &= E_2 d\end{aligned}$$

Para (1) y (2) respectivamente. Por tanto:

$$\begin{aligned}Ed_1 d + Ef_1 0.01d &= E_2 d \\Ed_1 + Ef_1 0.01 &= E_2\end{aligned}\tag{4}$$

Por otro lado, aplicando la continuidad del desplazamiento eléctrico entre el dieléctrico y la fractura del condensador (1), asumiendo que no existen cargas libres superficiales, y teniendo en cuenta que los vectores desplazamiento eléctrico son normales a las placas:

$$\begin{aligned}Dd_1 = Df_1 \rightarrow \epsilon Ed_1 = Ef_1 \epsilon_0 \rightarrow 100 \cancel{\epsilon_0} Ed_1 = Ef_1 \cancel{\epsilon_0} \\100 Ed_1 = Ef_1\end{aligned}\tag{5}$$

Las expresiones (3), (4) y (5) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si las resolvemos nos da como resultado:

$$\vec{Ed}_1 = 2Vo / 3d (-\vec{a}_y)$$

$$\vec{E}_2 = 4Vo / 3d (-\vec{a}_y)$$

$$\vec{Ef}_1 = 200Vo / 3d (-\vec{a}_y)$$

$$\vec{Dd}_1 = 100 \cancel{\epsilon_0} Ed_1 = 200 \cancel{\epsilon_0} Vo / 3d (-\vec{a}_y)$$

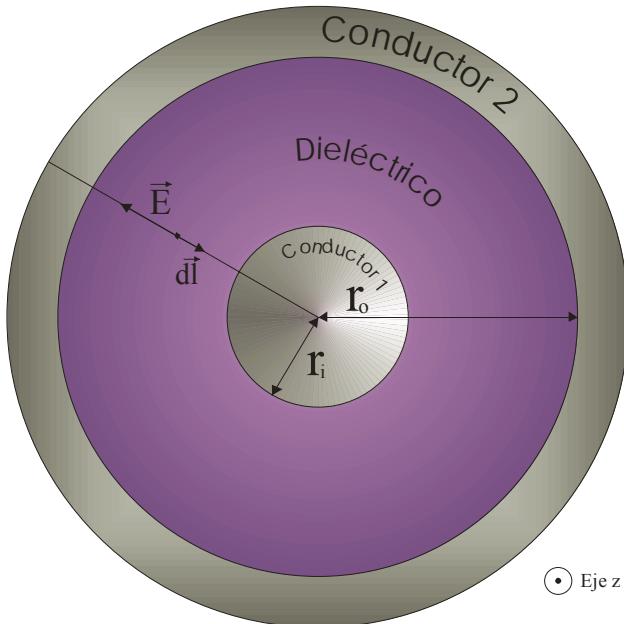
$$\vec{Df}_1 = 100 \cancel{\epsilon_0} Ef_1 = 400 \cancel{\epsilon_0} Vo / 3d (-\vec{a}_y)$$

- b)** El potencial entre las placas lo podemos calcular en el condensador (2) como:

$$V = E_2 d = 4Vo d / 3d = 4Vo / 3$$

◎ **Ejercicio 18**

Un esquema de la sección transversal del cable coaxial es el mostrado en la figura.



Las especificaciones de partida son:

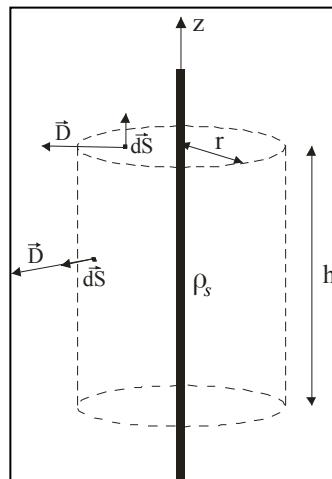
- En el conductor 2:
 - $r_i = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 - $V = V_i$
- En el conductor 2:
 - $V = V_o$
- En el dieléctrico:
 - $\epsilon_r = 2.6$
 - Rig. Dieléctrica = $20 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
 - $E_{\max} = 0.25 \cdot 20 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
- $V_i - V_o = 10 \text{ kV} = 10^4 \text{ V}$

Lo primero que debemos hacer es hallar como se distribuye el campo eléctrico en el dieléctrico. Aplicando el principio de superposición, este campo es la suma del campo creado por el conductor interior y el creado por el conductor exterior:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Calculemos primero el vector desplazamiento eléctrico: $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$, que generan ambos conductores, y utilicémoslo para calcular el campo. Para ello eliminemos primero el conductor 2.

El desplazamiento \vec{D}_1 podemos hallarlo aplicando la generalización de la Ley de Gauss: $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_v$, donde S es una superficie cerrada cualquiera y Q_v es la carga libre encerrada dentro de la superficie. Así, considerando que el conductor 1 tiene una densidad superficial de carga ρ_s , elegiremos como superficie gaussiana un cilindro coaxial al conductor, de radio r y altura arbitraria h .



Por simetría, y como suponemos que el medio circundante (dieléctrico) es simple, el vector desplazamiento eléctrico será radial y su módulo sólo dependerá de la distancia r al eje z : $\vec{D}_1 = D_{1r} \vec{a}_r$. Sólo existirá flujo a través de la superficie lateral del cilindro, ya que en las tapas \vec{D} es perpendicular a $d\vec{S}$ y su producto escalar será nulo. Por otra parte, en la superficie lateral ambos vectores son paralelos y su producto escalar equivale al producto de sus módulos. Así:

$$\oint_s \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S.Lat.} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S.Lat.} D_{1r} \cdot dS$$

Electrostática

Como r es constante en todos los puntos de la superficie lateral, D también es constante y puede salir de la integral, por lo que:

$$\int_{S.Lat.} D_{lr} \cdot dS = D_{lr} \int_{S.Lat.} dS = 2\pi rh D_{lr}$$

Por otra parte, la carga Q_v encerrada en el cilindro vale, teniendo en cuenta que la densidad superficial de carga se distribuye uniformemente:

$$Q_v = \rho_s S = \rho_s 2\pi r_i h$$

Y aplicando la Ley de Gauss:

$$2\pi rh D_{lr} = \rho_s 2\pi r_i h \Rightarrow D_{lr} = \rho_s \frac{r_i}{r} \Rightarrow \vec{D}_1 = \rho_s \frac{r_i}{r} \vec{a}_r$$

Calculemos ahora la contribución del conductor 2. Al eliminar el conductor 1, es fácil advertir que el vector desplazamiento eléctrico creado por un cilindro hueco como el conductor 2 es nulo en su interior, ya que si aplicamos la Ley de Gauss, la carga libre encerrada por cualquier superficie cerrada contenida en el interior del cilindro es cero y, por tanto, el desplazamiento es nulo:

$$\vec{D}_2 = \vec{0}.$$

Así, el desplazamiento eléctrico en el interior del dieléctrico se debe sólo al conductor interior: $\vec{D} = \vec{D}_1$. El dieléctrico es un medio simple, y esto nos permite escribir:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s r_i}{r \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{a}_r$$

Dado que el campo eléctrico en el dieléctrico es inversamente proporcional a la distancia r al eje del cable, el campo máximo se producirá para la distancia mínima, es decir, en la superficie del conductor interior ($r = r_i$):

$$E_{max} = E(r_i) = \frac{\rho_s r_i}{r_i \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0 \epsilon_r} \leq 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

Esto nos permite hallar la siguiente condición para la densidad de carga, ρ_s :

$$\rho_s \leq \epsilon_0 \epsilon_r 5 \cdot 10^6 \text{ C/m}^2$$

La diferencia de potencial entre dos puntos viene dada por:

$$V_o - V_i = - \int_{r_i, C}^{r_o} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

donde podemos elegir cualquier camino C . Lo más sencillo es integrar a lo largo del camino señalado en el esquema de la sección transversal del cable (en la dirección radial), donde \vec{E} es paralelo y de sentido opuesto a $d\vec{l}$:

$$V_o - V_i = - \int_{r_i}^{r_o} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_i}^{r_o} E \cdot dr = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\rho_s r_i}{r \epsilon_0 \epsilon_r} dr = \frac{\rho_s r_i}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\ln r_o - \ln r_i) = 10^4 \text{ V}$$

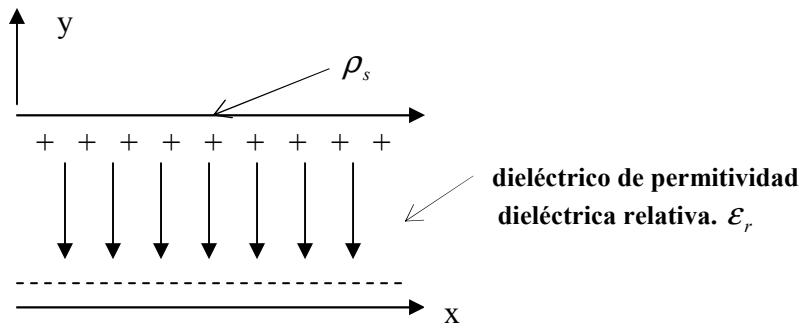
Despejemos ρ_s para obtener la condición que ha de cumplir r_o :

$$\rho_s = \frac{10^4 \epsilon_0 \epsilon_r}{r_i (\ln r_o - \ln r_i)} \leq \epsilon_0 \epsilon_r 5 \cdot 10^6 \Rightarrow \ln r_o - \ln r_i \geq 1 \Rightarrow$$

$$r_o \geq e^{1+\ln(0.002)} \approx 0.0054 \text{ m} = 5.4 \text{ mm}$$

Así que el conductor externo debe tener un radio interior menor o igual que 5.4 mm, para asegurar que el campo eléctrico en el aislante no supera el 25% de su rigidez dieléctrica.

◎ **Ejercicio 19**



Se nos pide la capacidad, C , que se obtiene como $C = \frac{Q}{V}$. Calcularemos V a partir del campo e integrando.

Suponiendo que las cargas se distribuyen uniformemente tendremos una densidad superficial en cada placa $+\rho_s$ y $-\rho_s$, donde:

$$Q = \rho_s \cdot S \rightarrow \rho_s = \frac{Q}{S}$$

Las condiciones de contorno entre el dieléctrico y las placas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} = 0 \rightarrow E_1 = E_{1n}; E_2 = E_{2n} \\ (D_{1n} - D_{2n}) &= \rho_s \end{aligned}$$

indicando con 1 el dieléctrico y con 2 el metal. Como en los metales no existe campo en su interior:

$$E_{2n} = E_2 = 0 \longrightarrow D_{1n} = \epsilon \cdot E_{1n} = \epsilon \cdot E_1 = \rho_s$$

Entonces, como $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$$E_1 = \frac{\rho_s}{\epsilon} = \frac{\rho_s}{S\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

Cálculo de V_{12} :

$$V_{12} = \int_{y=0}^{y=d} E dy = \int_0^d \left(dy \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \right) = \int_0^d \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{1}{1 - \frac{y^2}{3d^2}} \right) dy = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \int_0^d \frac{1}{3d^2 - y^2} dy =$$

Electrostática

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q}{\epsilon_0 S} \int_0^d \frac{3d^2 - y^2}{3d^2} dy = \frac{Q}{\epsilon_0 S \cdot 3d^2} \int_0^d 3d^2 - y^2 dy = \\
&= \frac{Q}{3\epsilon_0 S d^2} \left[\int_0^d 3d^2 dy - \int_0^d y^2 dy \right] = \frac{Q}{3\epsilon_0 S d^2} \left[3d^2 \cdot \left(y \Big|_0^d \right) - \frac{y^3}{3} \Big|_0^d \right] = \\
&= \frac{Q}{3\epsilon_0 S d^2} \left[3d^3 - \frac{d^3}{3} \right] = \frac{Q}{3\epsilon_0 S d^2} \left[\frac{9d^3 - d^3}{3} \right] = \frac{Q}{3\epsilon_0 S d^2} \left[\frac{8d^3}{3} \right] = \frac{Q \cdot 8d^3}{9\epsilon_0 S d^2} = \frac{8Qd}{9\epsilon_0 S} = V_{12}
\end{aligned}$$

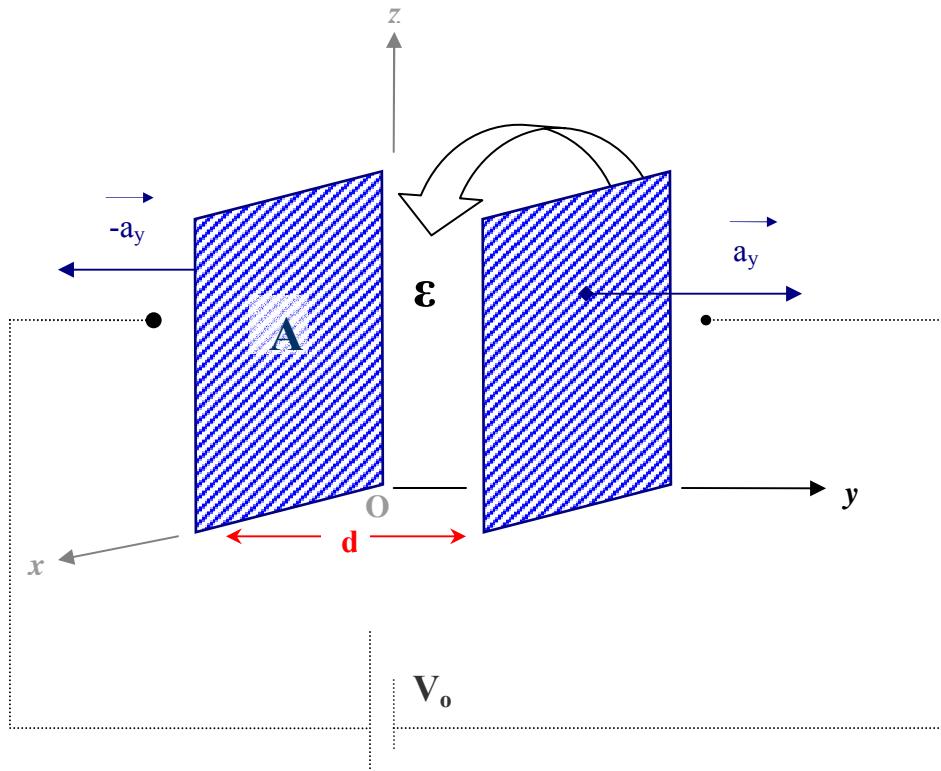
$V_{12} = \frac{8Qd}{9\epsilon_0 S}$ (Voltios)

Calcularemos ahora la capacidad como:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{8Qd}{9\epsilon_0 S}} = \frac{Q \cdot 9 \cdot \epsilon_0 S}{8Qd} = \frac{9\epsilon_0 S}{8d} \quad , \quad C = \frac{9\epsilon_0 S}{8d} \text{ (Faradios)}$$

◎ **Ejercicio 20**

Según los datos del problema tenemos la siguiente distribución:



a) Para determinar el campo eléctrico (\vec{E}), el desplazamiento eléctrico (\vec{D}) y el vector polarización (\vec{P}), utilizaremos las siguientes relaciones:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\vec{\nabla} D = \rho_v \quad (\text{ecuación 3})$$

El enunciado nos dice que el dieléctrico no contiene cargas libres en su interior. Como el problema es unidimensional, la ecuación 3 implica que \vec{D} es constante dentro del condensador:

$$\vec{\nabla} D = \frac{\partial D}{\partial y} = 0 \rightarrow \underline{\underline{D = cte}}$$

Por otro lado, como el campo es conservativo:

$$\int_C E \cdot dl = -\Delta V, \text{ donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta V = V_0 \\ C \equiv y \in [0, d] \end{array} \right.$$

De la ecuación 2 despejamos \vec{E} y sustituyendo el resultado en la integral anterior:

$$dl = dy$$

Electrostática

$$\int_0^d \frac{D}{\epsilon} \cdot dl = V_0, \text{ donde } \left\{ \begin{array}{l} D \equiv cte \\ \epsilon = \epsilon_0 + \frac{y}{d} \end{array} \right.$$

$$\frac{D}{\epsilon_0} \int_0^d \frac{dl}{(1+y/d)} = V_0 \rightarrow \frac{D}{\epsilon_0} d \ln(1+\frac{y}{d}) \Big|_0^d = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{D}{\epsilon_0} d \ln(2)$$

$$D = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \Rightarrow \vec{D} = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \vec{a}_y$$

La expresión obtenida para \vec{D} la sustituimos en la ecuación 2 y así conseguimos determinar \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}, \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{V_0}{\epsilon_0} d \ln(2) \\ \epsilon = \epsilon_0 + \frac{y}{d} \end{array} \right. \longrightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{d \ln(2)[1+y/d]} \vec{a}_y$$

Despejando el vector de polarización en la ecuación 1, y sustituyendo las expresiones halladas para \vec{D} y \vec{E} , se tiene que:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

$$P = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{y}{d+y} \Rightarrow \vec{P} = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{y}{d+y} \vec{a}_y.$$

b) Calculo de las densidades de polarización.

· Densidad de carga volumétrica:

$$\rho_{PV} = -\vec{\nabla}P$$

$$-\vec{\nabla}P = -\frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{V_0 \epsilon_0}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{(d+y)^2}$$

· Densidad de carga superficial en el dieléctrico: $\rho_{PS} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$

(1) en el origen, y=0:

$$\rho_{PS} = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{(0)}{d+(0)} \cdot (-\vec{a}_y) = 0$$

(2) en y=d:

$$\rho_{PS} = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \cdot \frac{(d)}{d+(d)} \cdot \vec{a}_y = \frac{V_0 \epsilon_0}{2d \ln(2)} \cdot \vec{a}_y$$

c) Calculo de la capacidad.

Utilizaremos la siguiente fórmula: $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Electrostática

Donde $\Delta V = V_0$, y Q es la carga en cada placa, que vendrá dada por:

$$Q_v = \rho_s \cdot A$$

Siendo ρ_s la densidad superficial de cargas libres en las placas, y A la superficie de dichas placas. Por otro lado, sabemos que a partir de la condición de contorno para el desplazamiento eléctrico entre cada placa y el dieléctrico, se cumple para ρ_s :

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

Como en un metal el campo eléctrico es nulo: $D_{2n} = \epsilon_0 \cdot E_{2n} = 0$

$$\rightarrow \rho_s = D_{1n} = D_1 = D$$

Por coincidir la componente normal del campo eléctrico con su modulo. Así,

$$\rho_s = \frac{V_0 \epsilon_0}{d \ln(2)} \quad Q_v = \rho_s \cdot A = \frac{AV_0 \epsilon_0}{d \ln(2)}.$$

(Para la carga de la segunda placa, el resultado sería lo mismo con el signo opuesto, ya que D_{1n} sería el del metal y D_{2n} el del dieléctrico).

Una vez calculada la carga, la capacidad del condensador será:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{AV_0 \epsilon_0 / d \ln(2)}{V_0} = \frac{A \epsilon_0}{d \ln(2)}$$

◎ **Ejercicio 21**

Expresiones que contienen ρ_v y ρ_{pv} :

a) $\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_v$, como $\vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$ queda $\vec{\nabla}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v$ llegando a $\vec{\nabla} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{\nabla} \vec{P} = \rho_v$. Con la consideración de que $\vec{\nabla} \vec{P} = -\rho_{pv}$ obtenemos: $\vec{\nabla} \epsilon_0 \vec{E} - \rho_{pv} = \rho_v$

b) $\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho_{pv}}{\epsilon_0}$

Ahora bien, según el enunciado del problema $\rho_v = 0$, cuya sustitución en cualquiera de las ecuaciones anteriores nos da el resultado de:

$$\boxed{\epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \rho_{pv}}.$$

Con lo que demostramos que en un dieléctrico existe densidad volumétrica de carga ligada en ausencia de carga libre. Ahora obtengamos su valor. Al ser el medio lineal se cumple:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

expresión que llevada a las ecuaciones del principio lleva a que

$$\vec{\nabla}(\epsilon \vec{E}) = 0.$$

Desarrollando el operador $\vec{\nabla}$, al ser el medio no homogéneo:

$$\epsilon \vec{\nabla} \vec{E} + \vec{E} \vec{\nabla} \epsilon = 0,$$

quedando finalmente la expresión

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{-\vec{E} \vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon},$$

que sustituida en

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = \rho_{pv}$$

se obtiene

$$\epsilon_0 \left(\frac{-\vec{E} \vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon} \right) = \rho_{pv}.$$

Haciendo el cambio $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ se llega al resultado final:

$$\epsilon_0 \left(\frac{-\vec{E} \vec{\nabla} \epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) = \rho_{pv}$$

cuya simplificación es igual al resultado de las soluciones:

$$\boxed{\epsilon_0 \left(\frac{-\vec{E} \vec{\nabla} \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) = \rho_{pv}}$$

◎ **Ejercicio 22**

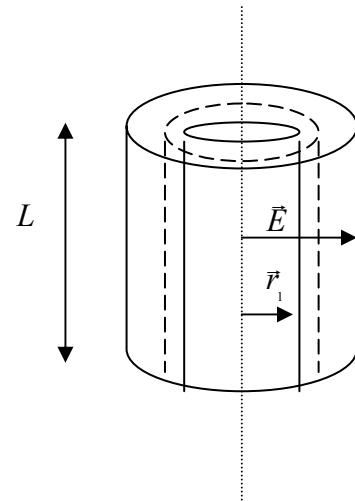
Nos piden la relación de la permitividad relativa que permita que el módulo del campo sea independiente de r . Para ello hallaremos primero el campo eléctrico entre los dos cilindros, suponiendo que en la superficie externa del conductor interior hay una carga superficial $-Q$, y en la superficie interna del conductor exterior $+Q$.

Sabiendo que:

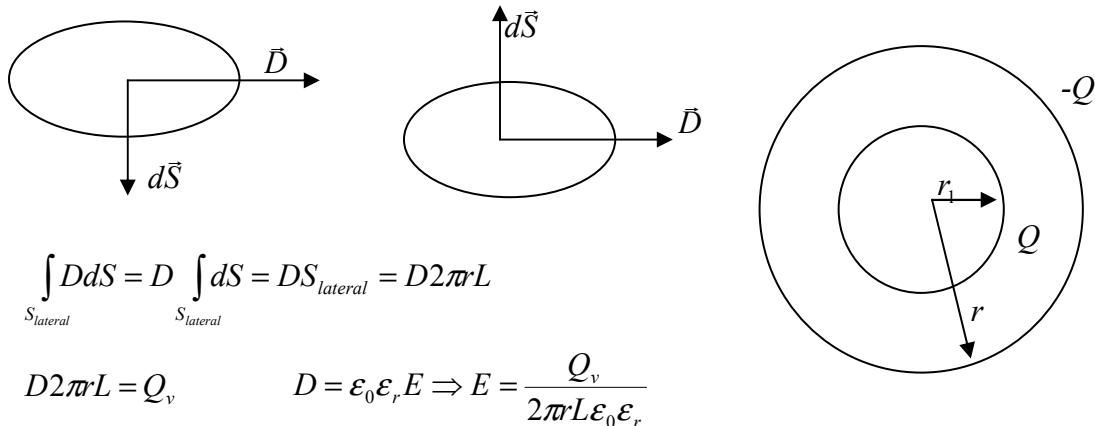
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Por el postulado fundamental:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_v$$



Donde S representa la superficie a trazos de la figura (la suma de las tapas más el lateral). En las tapas el vector \mathbf{D} es perpendicular al vector $d\mathbf{S}$. Y por lo tanto se anulan. Por lo tanto, sólo se calcula el flujo a través de la superficie lateral.



Para que E sea independiente del radio, el dieléctrico ha de ser sea inhomogéneo, con:

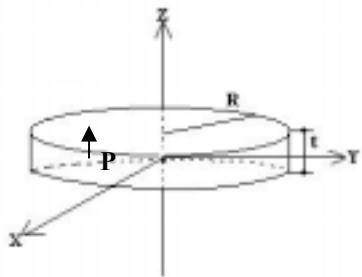
$$\epsilon_r \propto \frac{1}{r} \rightarrow \boxed{\epsilon_r = \frac{K}{r}}$$

Con lo que el campo queda: $\vec{E} = \frac{Q_v}{2\pi K L \epsilon_0 \epsilon_r} \vec{a}_r$

Ahora nos preguntan por la densidad volumétrica de carga.

$$\begin{aligned} \rho_{pv} &= -\bar{\nabla} \bar{P} = -\bar{\nabla} \left(\epsilon_o \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{E} \right) = -\bar{\nabla} \left(\frac{k-r}{r} \cdot \frac{Q}{2\pi K L} \cdot \vec{a}_r \right) = \\ &= -\frac{Q}{2\pi K L} \cdot \bar{\nabla} \left(\frac{k-r}{r} \cdot \vec{a}_r \right) = -\frac{Q}{2\pi K L} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(r \cdot \frac{k-r}{r} \right) = \frac{Q}{2\pi K L r} \end{aligned}$$

◎ **Ejercicio 23**



Un electrete es un dieléctrico que se conserva polarizado indefinidamente, después de ser sometido a un campo eléctrico intenso. La polarización da lugar a una carga positiva neta en una de las caras y negativa en la otra.

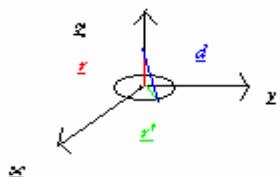
Teniendo en cuenta que

$$\vec{P} = P * \vec{u}_z$$

y que la carga por unidad de área sobre la superficie de un material polarizado es igual a la componente de la polarización que está en la dirección de la normal a la superficie del material, podemos considerar que $P = \sigma_p$ (en la cara superior).

En el interior del electrete, al ser la polarización uniforme, no existe densidad volumétrica de carga de polarización.

Así pues, para resolver el problema vamos a calcular primeramente el campo debido a un disco con densidad superficial σ_p en los puntos de su eje.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\sigma_p dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = z\vec{u}_z \quad \vec{r}' = r'\vec{u}_{r'} \quad dS = r'^*d\varphi^*dr' \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + r'^2)^{1/2}$$

El campo buscado solamente tiene componente z.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\sigma_p z * r' dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \left[-\frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

Nota : La integral se ha resuelto mediante el cambio de variable siguiente: $z^2 + r'^2 = t^2$

El resultado es :

$$\vec{E} = E_z \vec{u}_z \quad (\text{por encima del disco})$$

$$\vec{E} = -E_z \vec{u}_z \quad (\text{por debajo del disco})$$

Electrostática

Ahora vamos a calcular el campo \vec{E} en un punto del eje fuera del electrete. Para ello nos damos cuenta de que el campo buscado es igual a la suma de los campos creados por dos discos con densidades superficiales σ_p y $-\sigma_p$ situados en $z = t$ y $z = 0$, respectivamente.

$$\vec{E}_o = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{z-t}{((z-t)^2 + R^2)^{1/2}} \right) - \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \right] \vec{u}_z$$

Si operamos en la expresión anterior, cambiando σ_p por P , obtenemos:

$$\vec{E}_o = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left[\frac{z-t}{((z-t)^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \vec{u}_z$$

El desplazamiento eléctrico \vec{D} se calcula, de forma general, con la fórmula:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Para calcular \vec{D}_o tenemos que tener en cuenta que en la zona en que hay vacío el vector \vec{P} se anula. El resultado es por tanto:

$$\vec{D}_o = \epsilon_0 \vec{E}_o$$

Ahora vamos a calcular el campo \vec{E} en un punto del eje en el interior del electrete. Operando de manera análoga al caso anterior, teniendo en cuenta que ahora los campos son aditivos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \left[- \left(1 - \frac{(t-z)}{((t-z)^2 + R^2)^{1/2}} \right) - \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \right] \vec{u}_z = \\ &= \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \left[-2 + \frac{t-z}{((t-z)^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \vec{u}_z = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left[2 - \frac{t-z}{((t-z)^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

Como el problema nos dice que el electrete es delgado podemos hacer la siguiente aproximación:

$$R \gg t \rightarrow R \gg z \quad y \quad R \gg (t-z) \rightarrow R^2 \gg z^2 \quad y \quad R^2 \gg (t-z)^2$$

Teniendo esto en cuenta, obtenemos lo siguiente :

$$\vec{E}_i = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left[2 - \frac{t-z}{R} - \frac{z}{R} \right] \vec{u}_z = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left[2 - \frac{1}{R}(t-z+z) \right] \vec{u}_z = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left[2 - \frac{t}{R} \right] \vec{u}_z = \frac{-P}{2\epsilon_0} \left(\frac{2R-t}{R} \right) \vec{u}_z$$

El desplazamiento eléctrico \vec{D}_i se calcula como: $\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}$

$$\vec{D}_i = \epsilon_0 \frac{(-P)}{2\epsilon_0} \left(\frac{2R-t}{R} \right) + \vec{P} = \vec{P} \left(\frac{-2R+t+2R}{2R} \right) = \frac{\vec{P}t}{2R}$$

◎ Ejercicio 24

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} * \quad & E_{in,t} = E_{out,t} \\ * \quad & D_{in,n} - D_{out,n} = \rho_s = 0 \Rightarrow D_{in,n} = D_{out,n} \end{aligned}$$

El problema no nos indica que existe carga libre en la superficie del dieléctrico, por lo tanto, $\rho_s = 0$. También nos dice que el dieléctrico es homogéneo, así que, asumiendo que también es isótropo, podemos afirmar que el medio es simple, por lo que:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Para poder demostrar las condiciones de contorno, tenemos que calcular el campo tanto en el exterior y en el interior de la esfera. En coordenadas esféricas se tiene que:

$$E = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial R}\vec{a}_r - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta$$

ya que no existe dependencia de los potenciales con ϕ . Calculemos entonces el campo en el interior:

$$V_{in} = \frac{-3E_0 R \cos \theta}{\epsilon_r + 2} \quad \frac{\partial V_{in}}{\partial R} = -\frac{3E_0 \cos \theta}{\epsilon_r + 2}$$

$$\frac{\partial V_{in}}{\partial \theta} = -\frac{3RE_0(-\sin \theta)}{\epsilon_r + 2}$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{3E_0 \cos \theta}{(\epsilon_r + 2)} \vec{a}_r + \frac{3E_0(-\sin \theta)}{(\epsilon_r + 2)} \vec{a}_\theta$$

Ahora calculemos el campo en el exterior de la esfera:

$$\begin{aligned} v_{out} &= -E_0 \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{R^2} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} & \frac{\partial V_{out}}{\partial R} &= -E_0 \cos \theta - \frac{2E_0 a^3}{R^3} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cos \theta \\ \frac{\partial V_{out}}{\partial \theta} &= E_0 R \cdot \sin \theta + \frac{E_0 a^3}{R^2} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot (-\sin \theta) \\ \vec{E}_{out} &= E_o \cos \theta \left[1 + \frac{2a^3}{R^3} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right] \vec{a}_r - E_0 \sin \theta \left[1 - \frac{a^3}{R^3} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right] \vec{a}_\theta \end{aligned}$$

Pero como estamos en la superficie ($R = a$), tenemos que el campo eléctrico en el exterior de ella es:

Electrostática

$$\vec{E}_{out}(R = a) = \frac{3E_0\epsilon_r \cos \theta}{\epsilon_r + 2} \vec{a}_R + \frac{3E_0(-\sin \theta)}{\epsilon_r + 2} \vec{a}_\theta$$

Ahora que hemos calculado el campo, comprobamos que se cumplen las condiciones de contorno:

$$* E_{in,t} = E_{out,t}$$

$$E_{in,t} = \frac{3E_0(-\sin \theta)}{\epsilon_r + 2}$$

$$E_{out,t} = \frac{3E_0(-\sin \theta)}{\epsilon_r + 2}$$

por lo que se cumple que las componentes tangenciales del campo son iguales.

$$* D_{in,n} = D_{out,n}$$

$$D_{in,n} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{1n} = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r E_0 \cos \theta}{\epsilon_r + 2}$$

$$D_{out,n} = \epsilon_0 E_{2n} = \frac{3\epsilon_0 \epsilon_r E_0 \cos \theta}{\epsilon_r + 2}$$

Con esto se demuestra que las condiciones de contorno en la superficie de la esfera se cumplen.

Aclaraciones:

- La componente tangencial del campo depende, en esféricas, de los parámetros θ y ϕ . Al ser la componente ϕ nula, la única componente que actúa es θ .
- La componente normal del campo es la que depende del parámetro R.
- En la expresión de la componente normal exterior, el parámetro ϵ_r , puesto que en el vacío su valor es 1, se corresponde al dieléctrico.

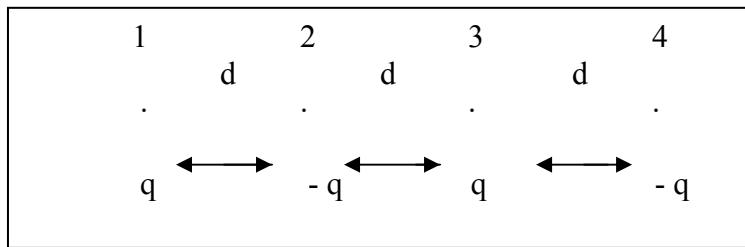
◎ Ejercicio 25

En general, la expresión de la energía de un sistema discreto de cargas es la siguiente:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i , \text{ donde } V_i = \text{potencial en la posición } i \text{ debido a las demás cargas}$$

Para saber cual de las dos situaciones es más estable hallamos la energía en las dos situaciones, y aquella donde la energía es menor es la más estable.

Situación original:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{d} + \frac{q}{2d} - \frac{q}{3d} \right] = \frac{5q}{24\pi\epsilon_0 d}$$

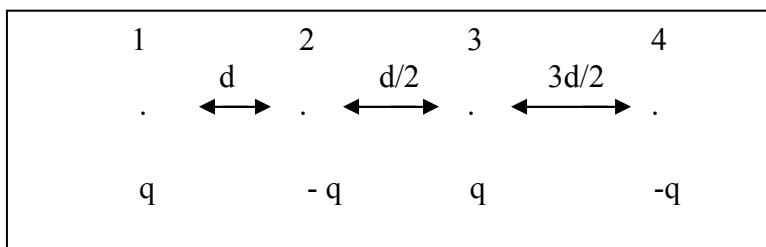
$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{d} + \frac{q}{d} - \frac{q}{2d} \right] = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2d} - \frac{q}{d} - \frac{q}{d} \right] = \frac{-3q}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{3d} - \frac{q}{2d} + \frac{q}{d} \right] = \frac{5q}{24\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_{Original} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = -7q \frac{q}{12\pi\epsilon_0 d}$$

Situación tras el desplazamiento:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{d} + \frac{q}{3d/2} - \frac{q}{3d} \right] = \frac{-q}{6\pi\epsilon_0 d}$$

Electrostática

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{d} + \frac{q}{d/2} - \frac{q}{2d} \right] = \frac{5q}{8\pi\epsilon_0 d}$$

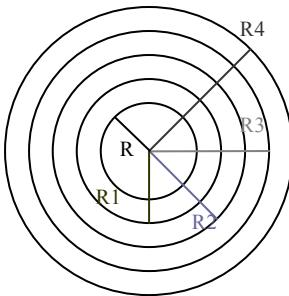
$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{3d/2} - \frac{q}{d/2} - \frac{q}{3d/2} \right] = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{3d} - \frac{q}{2d} + \frac{q}{3d/2} \right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_{desplazado} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = -17q \frac{q}{24\pi\epsilon_0 d}$$

$W_{desplazado}$ es menor que $W_{original}$, por tanto, el sistema es más estable tras el desplazamiento.

◎ Ejercicio 26



Solución:

En el problema 4 obtuvimos los potenciales en las distintas regiones del sistema, que son:

$$* \text{ Para } r > R_4 : V = 0$$

$$* \text{ Para } R_4 > r > R_3 : V = 0$$

$$* \text{ Para } R_3 > r > R_2 : V = \frac{Q + Q'}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_3}{r}\right)$$

$$* \text{ Para } R_2 > r > R_1 : V = \frac{Q + Q'}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

$$* \text{ Para } R_1 > r > R : V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_1 R_3}{R_2 r}\right) + \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

$$* \text{ Para } R > r : V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_1 R_3}{R_2 R}\right) + \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

El sistema es análogo a dos condensadores conectados en serie. La energía total será igual a la suma de la energía de cada uno de estos condensadores:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} Q \cdot [V(R) - V(R_1)] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_1}{R}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} (Q + Q') \cdot [V(R_2) - V(R_3)] = \frac{(Q + Q')^2}{4\pi\epsilon_0 L} \cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

Por tanto, la energía total es:

$$\omega_T = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[Q^2 \cdot L_n\left(\frac{R_1}{R}\right) + (Q + Q')^2 \cdot L_n\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right]$$

◎ Ejercicio 27

Para Realizar el cálculo de la Energía electrostática almacenada en el sistema del problema 7, necesitaremos los siguientes valores calculados en el mismo:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3} \right) \quad r < R_1$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3} \right) \quad R_1 \leq r < R_2$$

$$V_3 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad R_2 \leq r \leq R_3$$

$$V_4 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r > R_3$$

Para calcular la energía almacenada en el sistema, nos basamos en que este es análogo a 2 condensadores en serie: uno entre los dos conductores, y otro entre el conductor externo y el “infinito”. Por lo tanto, aplicamos en cada uno de ellos la fórmula de la energía para un condensador:

$$\omega = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

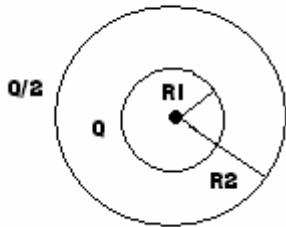
$$\omega_1 = \frac{1}{2} Q [V(R_1) - V(R_2)] = \frac{1}{2} Q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_3} \right) - \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} Q [V(R_1) - V(\infty)] = \frac{1}{2} Q \left[\frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right] = \frac{9Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_3}$$

Sumando las energías resultantes obtenemos la energía Total:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{9}{R_3} \right)$$

◎ **Ejercicio 28**



En primer lugar debemos de darnos cuenta que para calcular el trabajo total tendremos que calcular el trabajo para traer la carga Q desde el infinito y luego calcular el trabajo para traer la carga $Q + Q/2$ desde el infinito. Una vez obtenidas estas dos cantidades haremos la resta de $WQ + Q/2 - WQ$.

Para calcular dichos trabajos usaremos la fórmula:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\rightarrow} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

Como podemos observar en la fórmula del trabajo necesitamos saber el valor del campo para poder responder al problema.

Cálculo del campo:

Observamos como hay tres regiones: una con $R < R_1$, otra con $R_1 < R < R_2$ y la ultima con $R > R_2$. Calculemos el campo en cada una de las regiones. Como el problema tiene simetría esférica aplicamos el Teorema de Gauss para el cálculo del campo.

Región con $R > R_2$

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \int ds = E \cdot 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q/2 + Q}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{3Q}{8\pi R^2 \epsilon_o}$$

Región $R_1 < R < R_2$

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \int ds = E \cdot 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_o}$$

Electrostática

Región de $R < R_1$

En esta región no hay carga por lo que el campo va a ser cero. $E = 0$

Una vez calculados los campos en las distintas regiones procedemos a calcular el trabajo.

Cálculos de los trabajos:

$$W_Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\vec{D} \cdot \vec{E}} dv$$

Como estamos en el vacío sabemos que :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

Entonces:

$$W_Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\vec{D} \cdot \vec{E}} dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty}^{} E^2 dv$$

- *Energía de Q*

El diferencial de volumen es: $dv = 4\pi R^2 dR$ y el campo será el de la región $R > R_1$.

$$W_Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^{\vec{D} \cdot \vec{E}} dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty}^{} E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{\infty} \left(\frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0} \right)^2 \cdot 4\pi R^2 \cdot dR = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_1}$$

- *Energía de Q y $Q/2$*

-

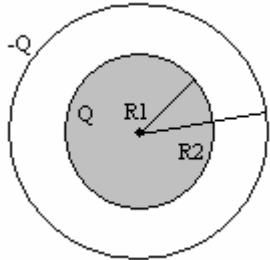
$$W_{Q+Q/2} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_2}^{\infty} \frac{3Q}{8\pi \epsilon_0 R^2} dv = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_1} - \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{9R_1^2}{2\pi \epsilon_0 R_2}$$

Una vez obtenidos las dos energías las restamos y obtenemos el trabajo realizado para acumular sobre la superficie esférica de radio R_2 una carga de $Q/2$.

$$\Delta W = W_{Q+Q/2} - W_Q = \frac{5Q^2}{32\pi \epsilon_0 R_2}$$

◎ **Ejercicio 29**

a) Campo en función de la distancia al centro:



→ En $0 \leq r \leq R_1$

Como la densidad de carga, ρ , es uniforme en la esfera, de volumen V :

$$Q = \rho \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{Q}{4/3 \cdot \pi \cdot R_1^3}$$

Aplicando el teorema Gauss:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0}, \text{ donde, resolviendo la integral:}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4/3\pi\epsilon_0 R_1^3} \cdot 4/3\pi r^3, \text{ quedando } E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} \cdot r \vec{U}_r$$

→ En $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r$$

→ En $r \geq R_2$

$E_3 = 0$, ya que la carga total encerrada en las superficies esféricas para las que $r \geq R_2$ es cero, con lo cual si no hay carga tampoco habrá campo.

b) Energía electrostática del sistema:

Como solo existe campo en la región 1 y en la región 2, la correspondiente energía electrostática, cuya expresión depende directamente del \vec{E} , vendrá definida por los límites de integración correspondiente a las separaciones entre las regiones 1 y 2. Por otra parte, la expresión de la energía electrostática creada por un sistema viene dada por:

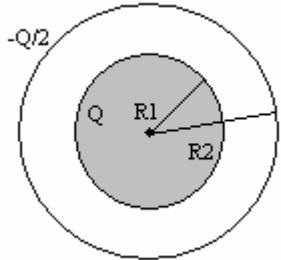
$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_v E^2 \cdot dv$$

En donde calculando la energía de nuestro sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_0^{R_1} E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr \right] = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_0^{R_1} \frac{Q^2 \cdot r^2 \cdot 4\pi r^2}{(4\pi\epsilon_0 R_1^3)^2} dr + \int_{R_1}^{5R_1} \frac{Q^2 \cdot 4\pi r^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} dr \right] = \\ &\frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{2Q^2}{8\pi\epsilon_0^2} \left(\int_0^{R_1} \frac{r^4}{R_1^6} dr + \int_{R_1}^{5R_1} \frac{r^2}{r^4} dr \right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{r^5}{5 \cdot R_1^6} \right)_0^{R_1} + \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{5R_1} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Electrostática

c) Si quitamos la mitad de la carga $-Q$ de la capa esférica, ¿Cuál será la variación de la energía electrostática del sistema?



Al quitar la carga $-Q/2$, la carga resultante será $-Q/2$, cosa que únicamente afecta a E_3 , que deja de ser nulo. Ahora:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

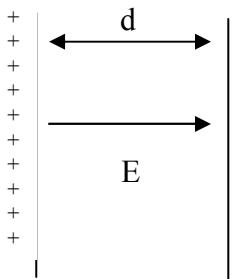
$$\Rightarrow E_3 = \frac{Q/2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r$$

Por tanto, como consecuencia de que el campo eléctrico en la región 3 no es 0, la variación de energía electrostática vendrá determinada por:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\int_{5R_1}^{\infty} \frac{Q^2}{(8\pi\epsilon_0 r^2)^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \right]_{5R_1}^{\infty} \Rightarrow \Delta W_e = \frac{Q^2}{160\pi\epsilon_0 R}$$

◎ **Ejercicio 30**

Tenemos un condensador plano de superficie S y espesor d (separación de las placas). El condensador se carga con una diferencia de potencial de V_0 . Nos piden hallar la densidad de energía electroestática. Para hallarla es necesario conocer el campo entre las placas:



Por ser el campo uniforme, perpendicular a las placas:

$$E = \frac{V_0}{d}$$

Hallamos primero la densidad volumétrica de carga, $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$.

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$:

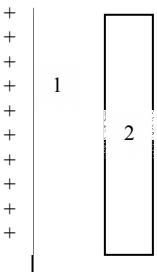
$$\frac{dW_{eA}}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{d^2}$$

Multiplicando por el volumen total: $Volumen = S \cdot d$,

$$W_{eA} = \frac{\epsilon_0}{2} S \frac{V_0^2}{d}$$

En la segunda situación introducimos una lámina metálica de espesor $d/2$ entre las dos placas del condensador, tras haber desconectado la fuente de tensión. Debemos hallar el campo en las regiones 1 y 2.

$d/4 \quad d/2 \quad d/4$



Como las cargas en las placas del condensador no han variado, el campo debido a las placas, entre éstas y el metal (1), permanece constante: $E_1 = \frac{V_0}{d}$. Obviamente, en el interior del metal el campo es nulo: $E_2 = 0$. Por tanto, la densidad volumétrica de energía en (1), será:

$$\frac{dW_{eB}}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{d^2}$$

y en (2) será cero. El volumen ahora será: $Volumen = \left(\frac{d}{4} + \frac{d}{4}\right)S$. Y la energía:

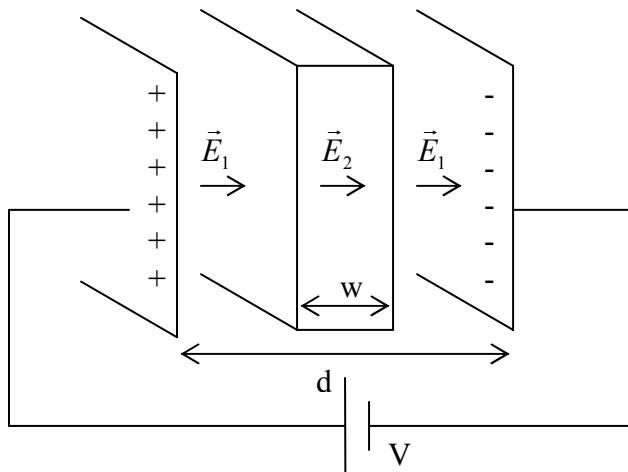
$$W_{eB} = \frac{\epsilon_0}{4} S \frac{V_0^2}{d}$$

Por último, la diferencia de energía entre ambas situaciones es :

$$\Delta W = \epsilon_0 \frac{V_0^2}{d} S \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{V_0^2}{d} S$$

La pérdida de energía se traduce en el trabajo realizado por las placas al introducir la lámina (o como el trabajo que sería necesario para sacar de nuevo la lámina metálica).

◎ **Ejercicio 31**



a) Capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = \int \rho_s dS = \rho_s \cdot A$$

Al tratarse de un condensador sólo existirá campo entre las placas del mismo. Por tanto:

$$V = \int \vec{E} d\vec{l} = E_1 \cdot (d - W) + E_2 \cdot W$$

Por Gauss (empleando como superficie gaussiana un cilindro en una de las placas del condensador):

$$\oint \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}; E_1 \cdot A = \frac{\rho_s \cdot A}{\epsilon_0}; \rho_s = E_1 \cdot \epsilon_0 = D_1$$

Por otro lado, sabemos que una condición de contorno es: $\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_s$. Como en la superficie del dieléctrico no hay carga libre: $\rho_s = 0$, y teniendo en cuenta que el vector desplazamiento eléctrico en este problema sólo se mueve en la dirección perpendicular a las placas (componente normal) tenemos que:

$$D_1 = D_2; \epsilon_0 \cdot D_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot D_2; E_2 = \frac{E_1}{\epsilon_r}$$

Si sustituimos en el potencial:

$$V = E_1 \left(d - W + \frac{W}{\epsilon_r} \right) = \frac{E_1}{\epsilon_r} [\epsilon_r \cdot (d - W) + W]$$

Con lo que capacidad será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s \cdot A}{E_1 \cdot (d - W) + E_2 \cdot W} = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot A}{\epsilon_r \cdot (d - W) + W} = 321 \text{ pF}$$

Electrostática

b) Carga del condensador: sabemos que,

$$Q = \rho_s \cdot A$$

$$V = \frac{E_1}{\epsilon_r} [\epsilon_r \cdot (d - W) + W] \Rightarrow E_1 = \frac{V \cdot \epsilon_r}{\epsilon_r \cdot (d - W) + W}$$

$$\rho_s = E_1 \cdot \epsilon_0 = 1.61 \cdot 10^{-5}$$

$$Q = 0.32 \mu C$$

c) Energía almacenada:

Partiendo de la fórmula general de la energía, podemos deducir una expresión para la energía de un condensador.

$$We = \frac{1}{2} \cdot \int_{\infty} D \cdot E \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \int_{cond.} D \cdot E \cdot dv$$

Sabiendo que:

$$dv = A \cdot dl$$

$$D = \rho_s$$

Sustituyendo se encuentre que:

$$We = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \int D \cdot E \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot A \cdot D \cdot \int E \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot A \cdot D \cdot V$$

$$We = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \rho_s \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{V} \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = 1.605 \cdot 10^{-4} J$$

d) Calculamos los vectores campo, desplazamiento eléctrico y vector de polarización:

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_1 = 1.61 \cdot 10^{-5} \vec{a}_x \text{ C/m}^2$$

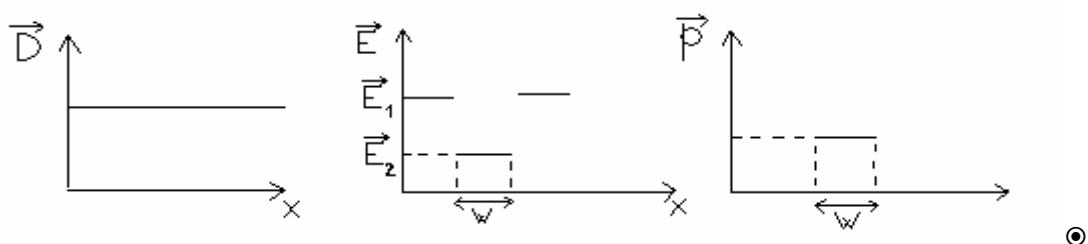
$$\vec{E}_1 = \frac{V \cdot \epsilon_r}{\epsilon_r \cdot (d - W) + W} = 1818181.82 \vec{a}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_1}{\epsilon_r} = 454545.45 \vec{a}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_1 + \vec{P}_1; \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \cdot \vec{E}_1 = 0 \text{ C/m}^2$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_2 + \vec{P}_2; \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \cdot \vec{E}_2 = 1.2 \cdot 10^{-5} \vec{a}_x \text{ C/m}^2$$

La representación de estos vectores será:



Ejercicio 32

a) Hallar ρ_0 en función de Q y a.

R< a

En primer lugar aplicamos el teorema de Gauss generalizado:

$$\int D ds = \int D \cdot S = \epsilon E \int ds = \epsilon E 4\pi R^2 \leftarrow \text{"ecuación número 1"}$$

$$Q_v = \int \rho_v dv = \int \rho_o \frac{a}{R} 4\pi R^2 dR = \rho_o 2a\pi R^2 \leftarrow \text{"ecuación número 2"}$$

Igualando la ecuación 1 con la ecuación 2, obtenemos:

$$E_1 = \frac{\rho_o a}{\epsilon 2} a_r$$

R=a

$$Q = Q_v \quad (R=a)$$

De la ecuación 2 obtenemos:

$$Q_v = \rho_o 2\pi a^3 . \text{Por tanto:}$$

$$\rho_o = \frac{Q}{2\pi a^3}$$

Ahora nos falta calcular lo mismo pero para la región externa.

R> a

$$\left. \begin{array}{l} \int D ds = Q_v = Q \\ \int \epsilon E ds = \epsilon_o E 4\pi R^2 \end{array} \right\} \quad E_2 = \frac{Q}{\epsilon_o 4\pi R^2}$$

b) Hallar la energía electrostática del sistema:

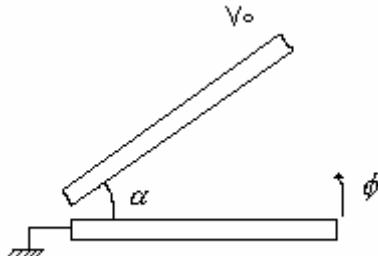
$$W = \frac{1}{2} \int DE dv = \frac{1}{2} \left[\int_0^a \epsilon E_1 \cdot E_1 dv + \int_a^\infty \epsilon_o E_2 \cdot E_2 dv \right] = \frac{1}{2} \left[\epsilon \int_0^a E_1^2 4\pi R^2 dR + \epsilon_o \int_a^\infty E_2^2 4\pi R^2 dR \right]$$

= sustituyendo valores y calculando las integrales

$$= \frac{Q^2}{24\pi a} \cdot \frac{\epsilon_o + 2\epsilon}{\epsilon \cdot \epsilon_o}$$

◎ Ejercicio 33

Dividiremos el estudio de este problema en dos partes bien diferenciadas. Nos centraremos en primer lugar en calcular la distribución de potencial en la zona $0 < \phi < \alpha$, y luego en la región $\alpha < \phi < 2\pi$.



A continuación vamos a realizar un par de consideraciones para simplificar dicho problema. Debido a que los planos conductores son infinitos despreciamos los efectos de borde y el grosor de dichos planos.

Debemos plantear unas ecuaciones que describan el comportamiento del potencial en la figura anterior, y posteriormente calculamos su distribución en ambas regiones.

Partiremos de uno de los postulados fundamentales de la electrostática.

$$\vec{\nabla}D = \vec{\nabla}(\epsilon \vec{E}) = \rho$$

En medios simples, ϵ es cte. $\rightarrow \vec{\nabla}(\epsilon \vec{E}) = \epsilon \vec{\nabla} \vec{E}$. Como el campo eléctrico es menor el gradiente del potencial ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$), la expresión anterior la podemos dejar de la forma siguiente:

$$\epsilon \vec{\nabla} \vec{E} = -\epsilon \vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = -\epsilon \vec{\nabla}^2 V = \rho$$

Teniendo en cuenta que no existen cargas libres en volumen, con lo cual $\rho = 0$, llegamos a la ecuación de Laplace:

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \quad \vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = 0$$

Usaremos coordenadas cilíndricas para simplificar el cálculo del potencial

$$\text{Por todos es conocido que en cilíndricas: } \vec{\nabla}V = \vec{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{a}_\phi \frac{\partial V}{\partial \phi} + \vec{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

Pero como en nuestro caso el potencial no depende de r ni de z :

$$\vec{\nabla}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{a}_\phi$$

Por tanto:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{a}_\phi\right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot 0) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \right]$$

Electrostática

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Para obtener el potencial en el circuito formado por los dos planos conductores, bastaría con resolver la ecuación resultante del procedimiento anterior.

1. $0 < \phi < \alpha$:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = cte \Rightarrow V = A\phi + B$$

Incluyendo las condiciones de contorno: $V(0) = 0$ y $V(\alpha) = V_0$

De la primera obtenemos que $B = 0$.

De la segunda $V_0 = A\alpha \Rightarrow A = V_0/\alpha$

La distribución de potencial para esta zona de estudio será:

$$V = \frac{V_0}{\alpha} \phi$$

2. $\alpha < \phi < 2\pi$:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = cte \Rightarrow V = C\phi + D$$

Incluyendo las condiciones de contorno: $V(\alpha) = V_0$ y $V(2\pi) = 0$

De la primera condición $V_0 = C\alpha + D \quad (1)$

De la segunda se obtiene $0 = C2\pi + D \Rightarrow D = -2\pi C \quad (2)$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos la expresión para la 2^a zona.

$$C\alpha - 2\pi C = V_0 \Rightarrow C(\alpha - 2\pi) = V_0 \Rightarrow C = -\frac{V_0}{(2\pi - \alpha)}$$

Por tanto:

$$D = \frac{2\pi}{(2\pi - \alpha)} V_0$$

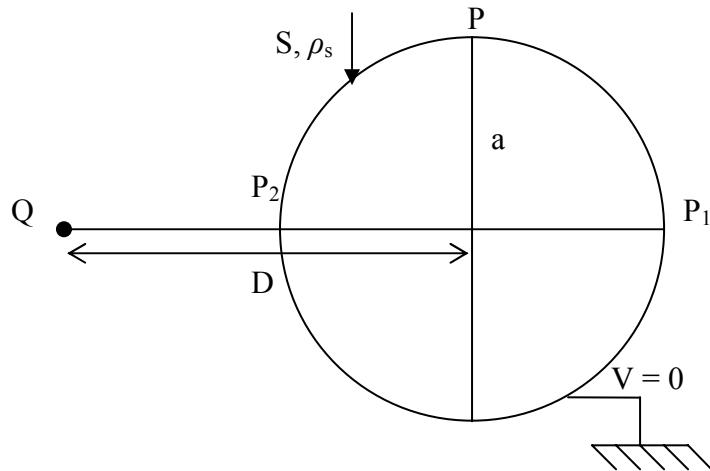
La distribución del potencial será:

$$V = \frac{-V_0}{(2\pi - \alpha)} \phi + \frac{2\pi}{(2\pi - \alpha)} V_0$$

$$V = \frac{2\pi - \phi}{2\pi - \alpha} V_0$$

◎ **Ejercicio 34**

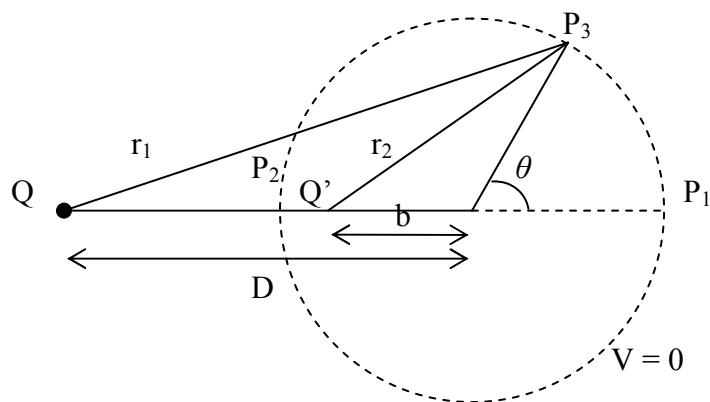
Q_s = Carga inducida por Q en la superficie del conductor.



Para resolver este problema por el método de las imágenes, se debe sustituir el conductor por una distribución de carga para hacerlo más sencillo, pero que siga manteniendo las condiciones de contorno que había con el conductor. En este caso, en la superficie el potencial debe ser 0 porque está conectado a tierra. Utilizaremos una carga puntual imagen que situaremos dentro de la esfera conductora. A continuación se calculará el campo \vec{E}_n (campo eléctrico normal a la superficie) ya que sabemos que:

$$Q_s = \int \rho_s ds ; \quad \rho_s = \epsilon_0 \vec{E}_n$$

Q' = carga puntual imagen



Una vez sustituimos el conductor por la carga imagen, comprobamos que las condiciones de contorno no han variado. En este caso debemos comprobar que el potencial en cualquier punto donde se encontraba la superficie del conductor es 0.

Electrostática

Primero lo comprobamos para P_1 y P_2 :

$$V(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{D-a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q'}{a-b} = 0$$

$$V(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{D+a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q'}{a+b} = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones hallamos:

$$b = \frac{a^2}{D} \quad Q' = -\frac{aQ}{D}$$

Para estos dos puntos se cumplen las condiciones de contorno, pero falta comprobarlo para cualquier punto de la superficie de la esfera. Sea P_3 un punto cualquiera de la superficie de la esfera conductora. Por trigonometría:

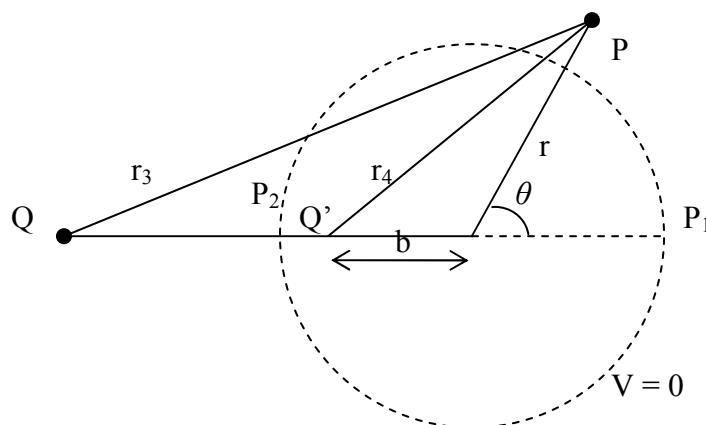
$$V(P_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right)$$

$$r_1 = \sqrt{D^2 + a^2 - 2aD \cos(180 - \theta)} \quad r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(180 - \theta)}$$

$$\cos(180 - \theta) = \cos \theta$$

$$V(P_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{\sqrt{D^2 + a^2 - 2aD \cos \theta}} + \frac{-aQ/D}{\sqrt{a^2 + \frac{a^4}{D^2} - 2\frac{a^3}{D} \cos \theta}} \right) \Rightarrow V(P_3) = 0$$

Esto implica que Q' está bien situada. Una vez comprobado que se cumplen las condiciones de contorno, debemos hallar V en un punto cualquiera.



Electrostática

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r_3} + \frac{Q'}{r_4} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q}{r_3} - \frac{aQ/D}{r_4} \right)$$

$$r_3 = \sqrt{r^3 + D^2 + 2rD \cos \theta} \quad r_4 = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{D^2} - 2r \frac{a^2}{D} \cos \theta}$$

Sabemos que el campo en la superficie será: $\vec{E}_n = \vec{E}_r(r = a)$

$$\text{En general: } \vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q(r + D \cdot \cos \theta)}{r_3^3} + \frac{\frac{aQ}{D} \cdot \left(r + \frac{a^2}{D} \cos \theta \right)}{r_4^3} \right)$$

Con lo que:

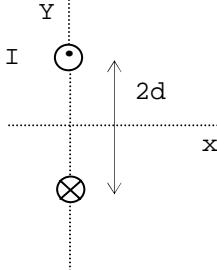
$$\vec{E}_n = \vec{E}_r(r = a) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{D^2 - a}{(D^2 + a^2 + 2aD \cos \theta)^{3/2}}$$

$$Q_s = \int s \rho_s ds; \quad ds = a^2 \sin \theta d\theta d\phi; \quad S = \theta \int_0^\pi \phi \int_0^{2\pi}$$

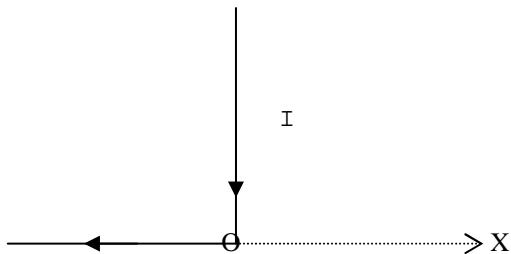
La carga que aparece en la superficie coincide con la carga imagen Q'.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Magnetostática-Fundamentos

- 1) Mediante la ley de Ampere calcular el vector densidad de flujo magnético que existe, cuando circula una corriente i ,
 - a) en el interior de un solenoide de N espiras y longitud L (L suficientemente grande).
 - b) en el interior de una bobina toroidal de N espiras y radio externo medio, a .
 - c) por un hilo conductor infinito.

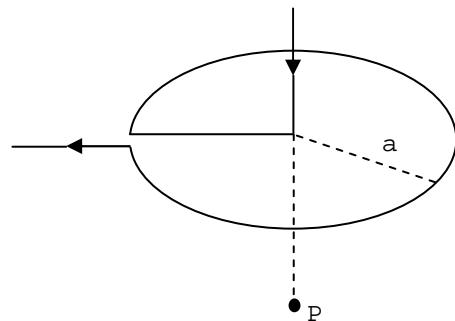
 - 2) Dos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos, separados una distancia $2d$, transportan corrientes de igual intensidad pero con sentidos contrarios, como se indica en la figura. Calcular:
 - a) El vector densidad de flujo magnético B en un punto genérico del eje OX , su valor máximo y el punto donde se localiza. Representar gráficamente $B(x)$.
 - b) El vector densidad de flujo magnético B en un punto genérico del eje OY . Representar $B(y)$.
- 
- 3) Los electrones de un haz cilíndrico de radio a , se mueven con velocidad, v , constante y dirigida a lo largo del eje, de forma que se mantiene una distribución uniforme de n electrones por m^3 . Siendo $a=1\text{ mm}$, $v=2\cdot10^7\text{ ms}^{-1}$ y $n=5\cdot10^{10}\text{ electrones}\cdot m^{-3}$, determinar:
 - a) La densidad espacial de carga, la densidad de corriente eléctrica y la intensidad de la corriente.
 - b) El campo eléctrico en la superficie del haz.
 - c) El vector densidad de flujo magnético en la superficie del haz.
 - d) Las fuerzas de origen eléctrico y magnético que actúan sobre un electrón situado en la superficie del haz, y el cociente entre ambas.

 - 4) Un cable delgado, que transporta una corriente I , está doblado en ángulo recto tal y como indica la figura. Calcular \mathbf{B} a lo largo del eje OX , suponiendo que el cable es infinitamente largo en ambas direcciones.



ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Magnetostática-Fundamentos

- 5) Calcular el vector densidad de flujo magnético en el eje de una espira circular de radio a , por la que circula una corriente I .
- 6) Encuentre la densidad de flujo magnético, \vec{B} , en el centro de una espira cuadrada plana de lados w , por la que circula una corriente I .
- 7) Por un filamento conductor con forma de triángulo equilátero de lado a , fluye una corriente constante I . Calcular la intensidad del campo magnético en el centro del triángulo.
- 8) Disponemos de un conductor cuya forma es la indicada en la figura. Este conductor se prolonga hasta $y=-\infty$ y $z=+\infty$. Por dicho conductor circula una corriente I en el sentido de la figura. Calcular mediante la ley de Biot-Savart la inducción magnética en el punto P de coordenadas $(0, 0, -b)$.



- 9) Una corriente constante con densidad superficial $K_O \vec{a}_z$, fluye en el plano $y = 0$. Calcular la densidad de flujo magnético que se genera a ambos lados de dicho plano.

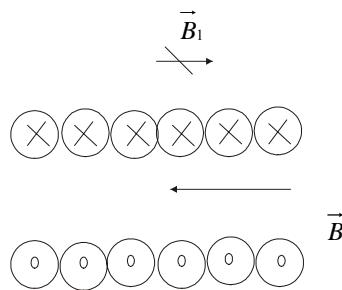
MAGNETOSTÁTICA.- FUNDAMENTOS

Problema 1

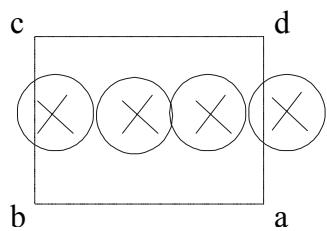
a.- En el interior de un solenoide de N espiras y longitud L (L suficientemente grande)

Hipótesis:

Suponemos que $\vec{B} = \vec{0}$ en el exterior del solenoide



También suponemos que \vec{B} será constante a lo largo del interior.



$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B} d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B} d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B} d\vec{l} + \int_{da} \vec{B} d\vec{l}$$

$$\int_{ab} \vec{B} d\vec{l} = Bl$$

$\int_{bc} \vec{B} d\vec{l} = 0$ porque, o bien \vec{B} es perpendicular a $d\vec{l}$ (en puntos interiores del solenoide), o el campo es cero (en puntos exteriores al solenoide)

$$\int_{cd} \vec{B} d\vec{l} = 0 \text{ porque el campo es cero (puntos exteriores al solenoide)}$$

$$\int_{da} \vec{B} d\vec{l} = 0 \text{ estaríamos en un caso similar al de } \int_{bc} \vec{B} d\vec{l}$$

Así que la integral a lo largo de la trayectoria cerrada vale:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = Bl$$

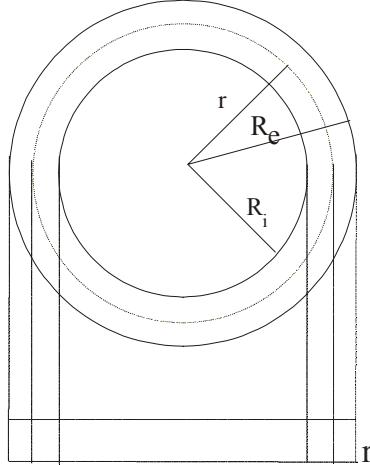
Y aplicando ahora la ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 Inl$$

donde nl es el numero de espiras que existe en nuestra sección de longitud l , ya que n es la densidad de espiras (numero de espiras por unidad de longitud). Con lo que la densidad de flujo magnético queda: $B = \mu_0 In$

Sustituyendo $n = \frac{N}{L}$, siendo N el número total de espiras y L la longitud del solenoide, se tiene que: $B = \mu_0 I \frac{N}{L}$

b.- En el interior de una bobina toroidal de N espiras y radio externo medio a



Para puntos del interior de la bobina, $R_i < r < R_e$, \vec{B} es tangente a circunferencias concéntricas y su módulo sólo depende de la distancia al centro, r . Así, tomando una trayectoria circular con el toroide:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r$$

Ley de Ampere nos dice que: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$, con lo que,

$$B 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Suponiendo el toroide es muy estrecho, $r \approx R_i \approx R_e \approx a$, siendo a el radio medio, se tiene que: $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a}$

c.- Por un hilo conductor infinito

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

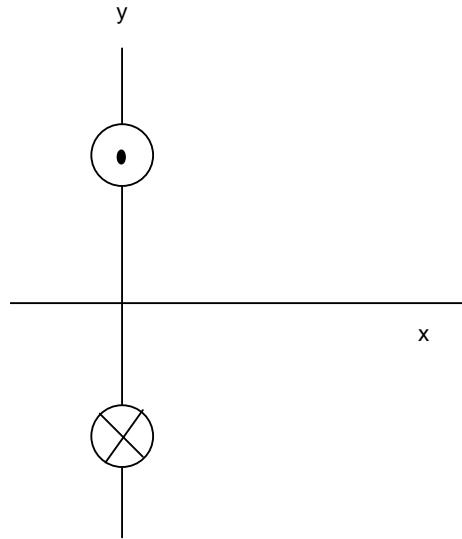
y como \vec{B} es paralelo a $d\vec{l}$

$$\oint B dl = \mu_0 I \Rightarrow B \oint dl = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I$$

Teniendo en cuenta el carácter vectorial: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi$

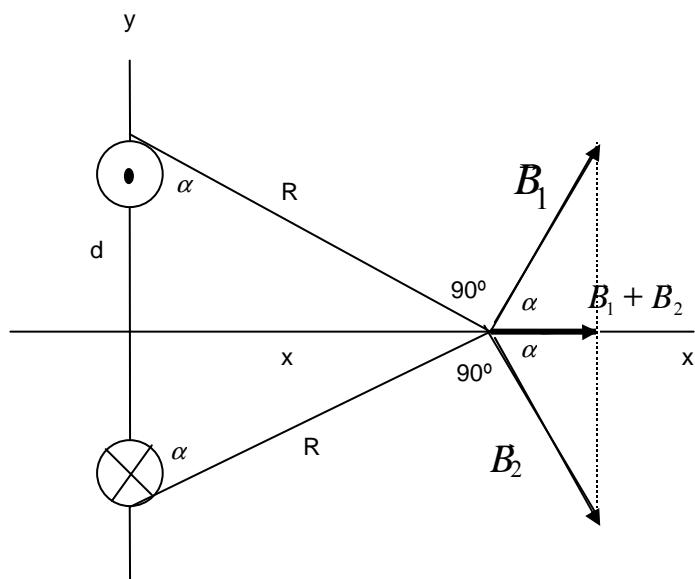
Problema 2

a)



Para resolver este problema utilizaremos la ley de Biot – Savart y el principio de superposición. Examinaremos por separado la contribución de cada corriente, y las sumaremos. La ley de Biot-Savart nos dice :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2}$$



En primer lugar se hará la representación de las contribuciones de los dos conductores en un punto genérico del eje x. Como vemos, la componente Y de la suma de las contribuciones se anula, y sólo nos quedará componente en X.

Las igualdades entre los ángulos se deben a que el vector \mathbf{a}_R y \mathbf{B} han de ser perpendiculares, por las propiedades del producto vectorial.

Sabemos que la densidad de flujo magnético para un hilo infinito por el que circula una corriente I vale

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi R}:$$

donde R es la distancia entre el hilo y el punto donde queremos calcular el campo. En nuestro caso:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Como sólo queda la componente en el eje X:

$$\vec{B} = (B_1 \cdot \cos \alpha + B_2 \cos \alpha) \vec{a}_x$$

$$\cos \alpha = d/R$$

Y teniendo en cuenta que las dos corrientes, y por tanto el módulo de la densidad de flujo magnético debido a ellas, son iguales:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Id}{\pi R^2}$$

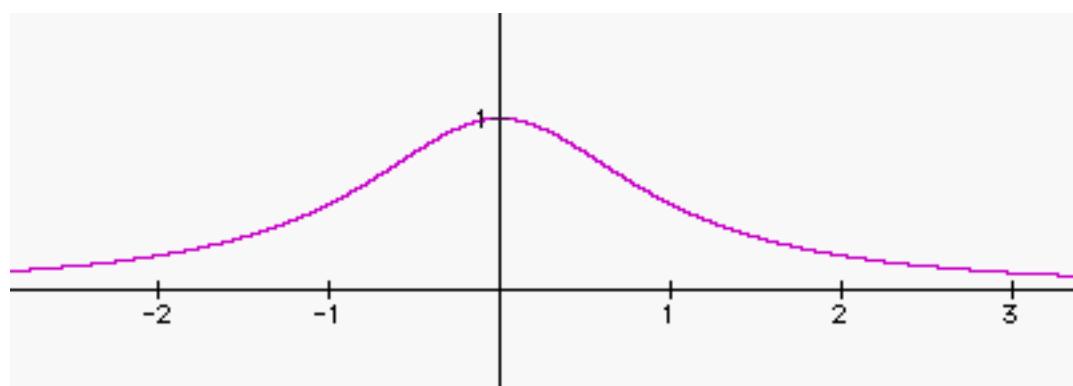
$$R = \sqrt{x^2 + d^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Id}{\pi(x^2 + d^2)}$$

El punto máximo se encontrara donde el divisor sea más pequeño, es decir, donde $x=0$:

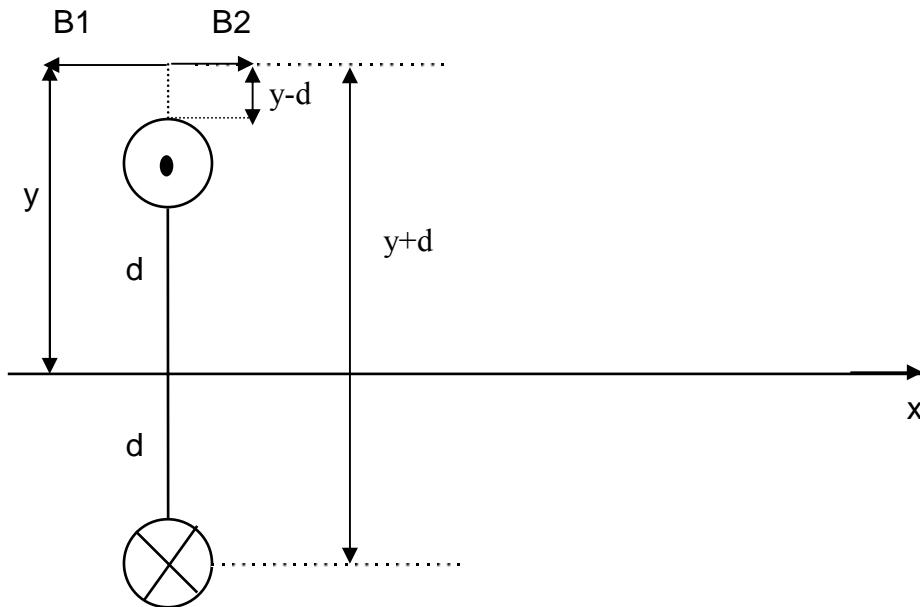
$$\vec{B}_{\text{máx}} = \frac{\mu_0 Id}{\pi d^2}$$

Representación de $B(x)$



b)

Haremos una nueva representación para ver las contribuciones de las dos corrientes. En este apartado también utilizaremos el principio de superposición. Las direcciones de B_1 y B_2 las hemos obtenido utilizando la regla de la mano derecha. Utilizando la ley de Biot-Savart al igual que en el apartado anterior, obtenemos :



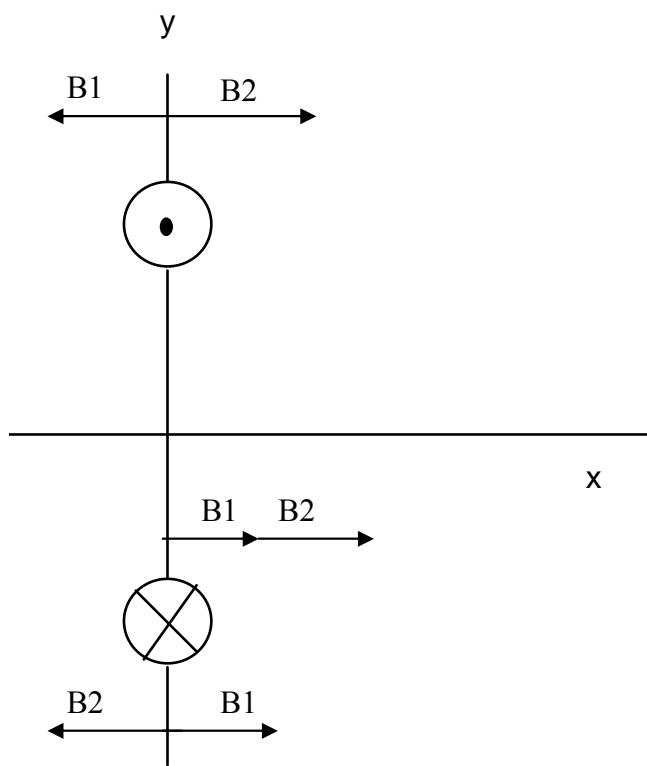
Por superposición :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y-d)} \vec{a}_x \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(y+d)} \vec{a}_x$$

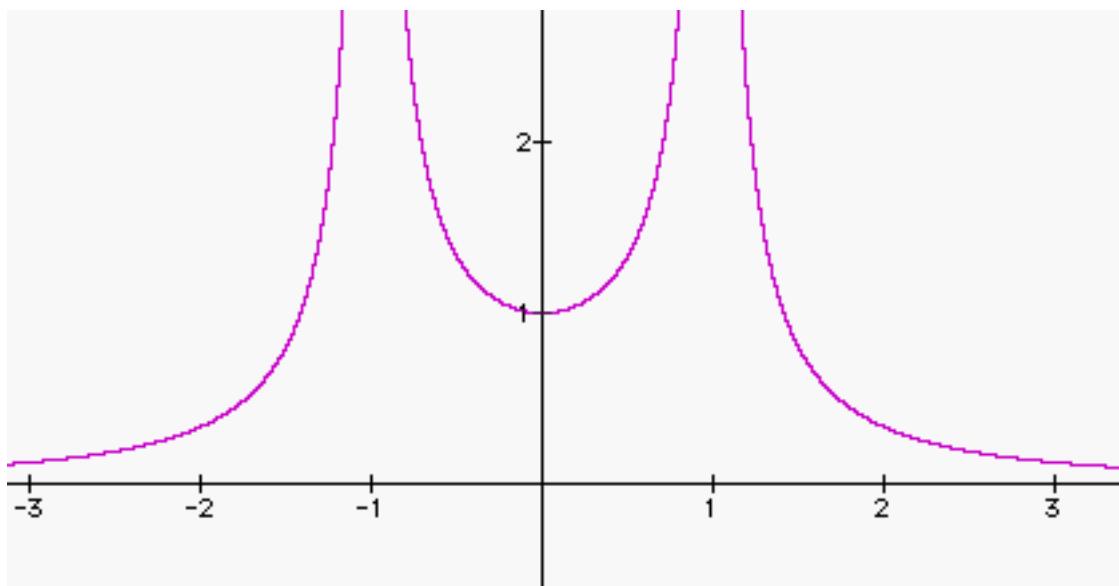
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 Id}{\pi(d^2 + y^2)} \vec{a}_x$$

$$|B| = \frac{\mu_0 Id}{\pi |d^2 - y^2|}$$

Esta fórmula es válida para cualquier punto del eje y. A continuación hacemos la composición de todas las componentes de B en cualquier punto del eje y.



Representación de $B(y)$



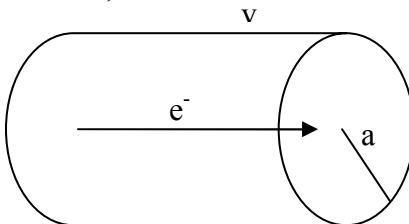
Problema 3

a) La densidad espacial de carga será constante y uniforme. Su valor es

$$\rho = \frac{Q}{V} = ne^- = -ne = 5 \cdot 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = -8 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3$$

La densidad de corriente o cantidad de electricidad que pasa por la unidad de superficie, normal a la dirección de propagación, en la unidad de tiempo, será la contenida en un cilindro de sección recta unidad y longitud v , cuyo valor es

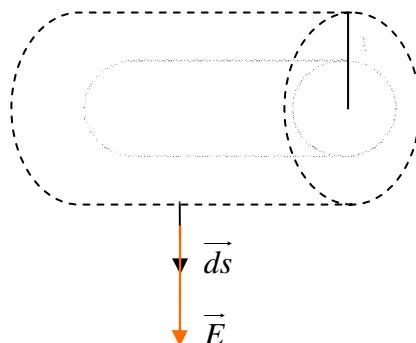
$$j = vp = -nev = -8 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^7 = 0,16 \text{ A/m}^2$$



La intensidad de la corriente será

$$I = jS = -nev\pi a^2 = 0,16 \cdot \pi \cdot 10^{-6} = 0,5 \mu\text{A}$$

b) Aplicando Gauss a una superficie cilíndrica de radio r y longitud l , debe verificarse



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Como \vec{E} y $d\vec{s}$ son paralelos entre sí ocurre

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds = E \oint ds = E 2\pi r l$$

Y por otro lado

$$Q = \pi a^2 l \rho = -\pi a^2 \ln e$$

Con lo cual es

$$E 2\pi r l = -\frac{\pi a^2 \ln e}{\epsilon_0}$$

De donde

$$E = \frac{a^2 n e}{2 r \epsilon_0}$$

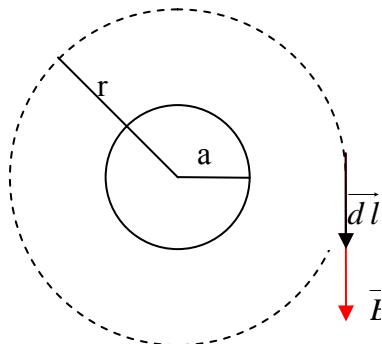
Como nos piden el campo eléctrico en la superficie, hacemos $r=a$, así

$$E = \frac{n e}{2 \epsilon_0} a = \frac{8 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-3}}{10^{-9}} = 0,45 \text{ V/m}$$

$$18\pi$$

c) Aplicando la ley de Ampère a una circunferencia sección recta del haz, debe verificarse

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$



Con esto, teniendo en cuenta que \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos, y considerando el radio r de la circunferencia igual al del cilindro para simplificar, tenemos,

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = 2\pi r B$$

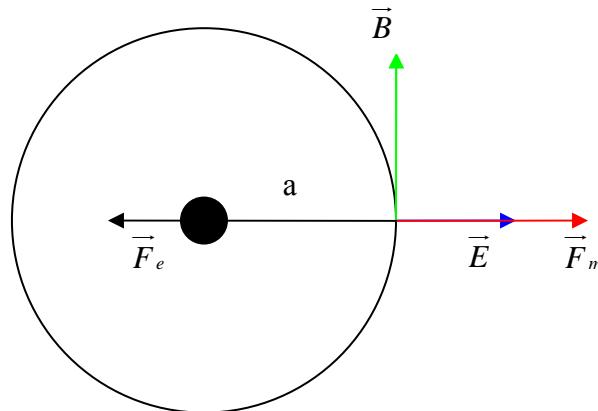
Con lo cual, teniendo en cuenta el valor de I ya hallado, la ley de Ampère se expresa

$$2\pi r B = -\mu_0 n e v \pi r^2$$

De donde

$$B = -\frac{\mu_0}{2} \rho v a = 2\pi \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 100,531 \text{ pT}$$

d) La fuerza de origen eléctrico sobre un electrón de la superficie del haz es



La fuerza eléctrica será de sentido contrario al del campo eléctrico, pues es entre dos cargas del mismo signo.

$$\vec{F}_e = -e \vec{E} = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,45 = -7,2 \cdot 10^{-20} \text{ N}$$

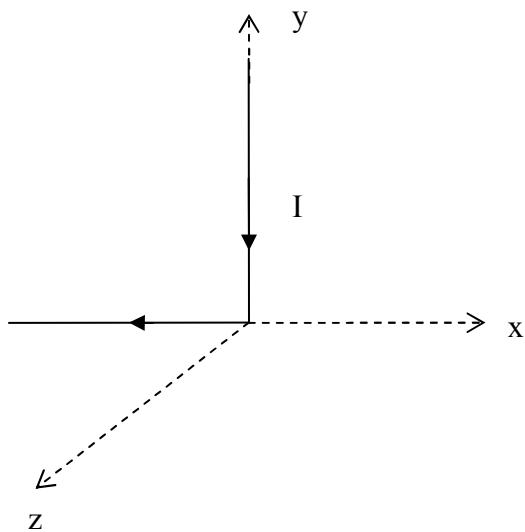
Y la fuerza de origen magnético, que se puede hallar mediante la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta el sentido de la velocidad de los electrones y que la carga es negativa,

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = evB\vec{u}_r = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 100,531 \cdot 10^{-12} = 3,22 \cdot 10^{-22} \text{ N}$$

pues \vec{B} y \vec{v} son perpendiculares entre sí, siendo el cociente de sus módulos

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = 4,4 \cdot 10^{-3}$$

Problema 4

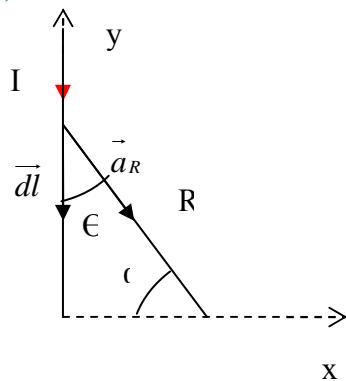


Mediante la fórmula de Biot-Savart, y utilizando superposición, hallamos la densidad de flujo magnético descomponiendo el circuito en los tramos siguientes: 1) Corriente rectilínea sobre la parte positiva del eje Y. 2) Corriente rectilínea sobre la parte negativa del eje X. Siendo entonces:

$$B_T = B_1 + B_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2}$$

1) Para el tramo de hilo vertical tenemos:



Observando la figura podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$d\vec{l} \times \vec{a}_R = -dy \cdot \sin \theta \vec{a}_z$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}$$

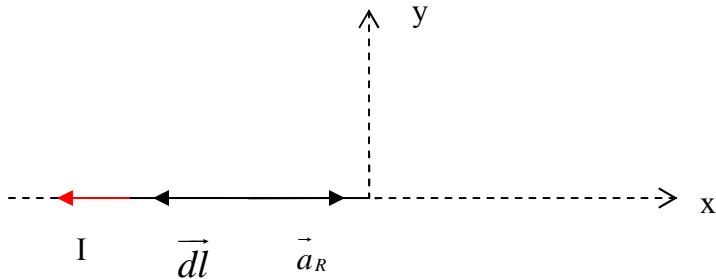
$$R = \frac{x}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{R} \rightarrow y = R \sin \alpha = x \tan \alpha \rightarrow dy = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Quedando entonces

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a}_z \int \frac{\cos \alpha dy}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{a}_z \int \frac{\cos \alpha \frac{xd\alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \vec{a}_z \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \vec{a}_z$$

2) En este tramo \vec{dl} es paralelo a \vec{a}_R , por tanto $\vec{dl} \times \vec{a}_R = 0$, así $\vec{B}_2 = 0$.

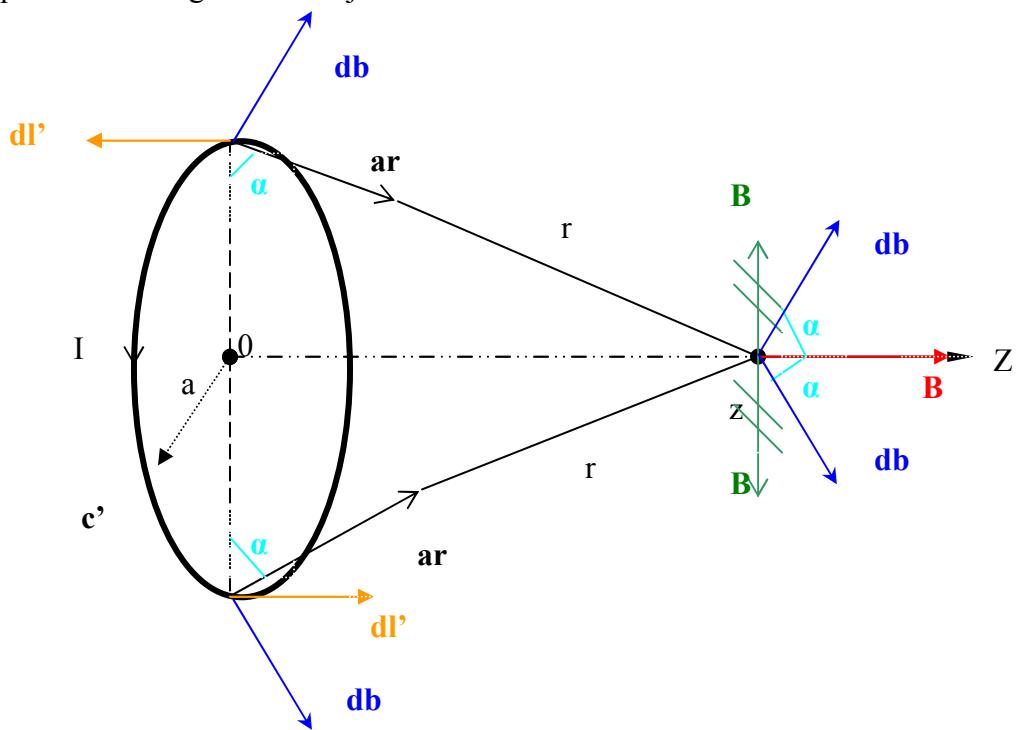


Entonces, la densidad de flujo total será igual a la densidad de flujo magnético originada por el tramo vertical.

$$\boxed{\vec{B}_T = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \vec{a}_z}$$

Problema 5

Si partimos del siguiente dibujo:



Para calcular el campo \mathbf{B} en el eje de la esfera aplicamos la ley de Bio – Savart.

$$\mathbf{B} = \mu_0 I / 4\pi \int \mathbf{dl}' \times \mathbf{ar} / r^2$$

$$d\mathbf{b} = (\mu_0 I / 4\pi) \cdot d\mathbf{l}' \times \mathbf{ar} / r^2$$

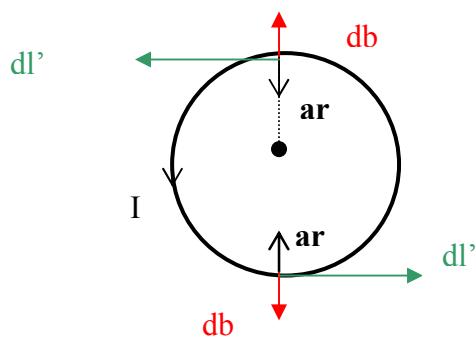
donde :

r es la distancia del punto fuente (donde circula la corriente) al punto campo (donde queremos hallar el campo).

\mathbf{ar} es el vector unitario cuya dirección va del punto fuente al punto campo.

La componente vertical se anula, pues por la simetría del problema sólo queda componente horizontal, en el eje Z .

Si miramos el dibujo de frente podremos observar que $d\mathbf{l}'$ y \mathbf{ar} son siempre perpendiculares entre sí.



Hablamos entonces de una densidad de flujo efectiva que valdrá:

$$\mathbf{db}_{\text{efec}} = |\mathbf{db}| \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{az} ; \quad \text{siendo } \cos \alpha = a/r$$

Como \mathbf{dl}' y \mathbf{ar} son perpendiculares, entonces : $|\mathbf{db}| = (\mu_0 \cdot I / 4\pi) \cdot dl' \cdot \sin 90^\circ / r^2$

$$\mathbf{B} = \int \mathbf{db}_{\text{efec}} = \int \underbrace{\left(\mu_0 \cdot I \cdot a / 4\pi r^3 \right)}_{\text{cte}} \mathbf{az} \cdot dl' , \quad \text{la cte sale fuera de la integral}$$

$$\mathbf{B} = \left(\mu_0 I a / 4\pi r^3 \right) \int dl'$$

siendo $\int dl'$ la longitud de la circunferencia que vale $2\pi a$. Entonces sustituyendo ese valor y simplificando obtenemos:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot I / 2 r^3$$

Como $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ entonces el resultado final es:

$$\boxed{\mathbf{B} = \left[\mu_0 \cdot I \cdot a^2 / 2 (a^2 + z^2)^{3/2} \right] \cdot az}$$

Nota: En el centro de la espira ($z=0$) , el campo magnético vale

$$\boxed{\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2a) az}$$

Problema 6

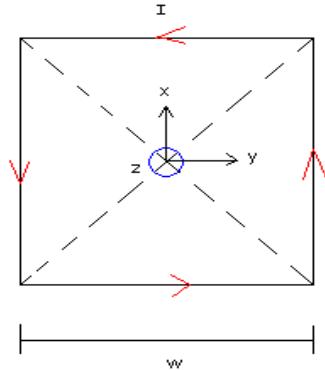


Figura 1

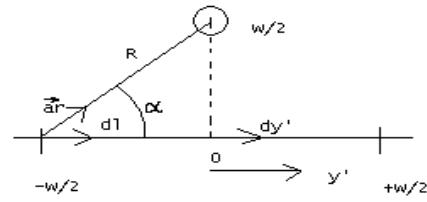


Figura 2

Haciendo un análisis previo, en la Figura 1, del sentido que lleva la corriente en los lados del cuadrado, vemos que cada uno realiza un aporte a la densidad de flujo magnético total en el mismo sentido, el eje z positivo. Por esta razón el problema lo podemos estudiar de una manera más simplificada, como la densidad de flujo magnético debida a un solo lado, representado en la Figura 2, y obtener el resultado final sin más que multiplicar por 4.

Calculemos, pues, la densidad de flujo producida por un hilo finito de longitud w , a una distancia $w/2$ de su centro. En la Figura 2 hemos hecho un desplazamiento del origen de coordenadas, y' , que inicialmente habíamos fijado en el centro del cuadrado de la Figura 1. De esta manera simplificamos los límites de integración que posteriormente aparecerán.

Tenemos que utilizar la Ley de Biot-Savart, que expresa la densidad de flujo magnético debido a un hilo conductor por el que circula una corriente I .

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_c \frac{dl \vec{a}_R}{R^2}$$

Particularizando los términos de la ecuación para nuestro caso,

$$R = \sqrt{(y')^2 + (w/2)^2} \quad dl \vec{a}_R = |dl| \parallel \vec{a}_R \parallel \sin(\alpha) \vec{a}_z = dy' \cdot \frac{w/2}{R} \vec{a}_R$$

queda finalmente:

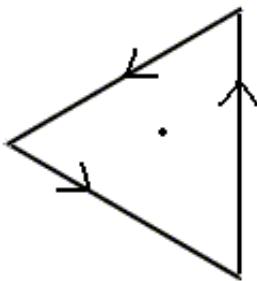
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-w/2}^{+w/2} \frac{dy'}{2((y')^2 + (w/2)^2)^{3/2}} \vec{a}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{w} \frac{y'}{\sqrt{(y')^2 + (w/2)^2}} \Bigg|_{-w/2}^{+w/2} \vec{a}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu_0 I}{w\pi} \vec{a}_z$$

Por lo que la densidad de flujo de la espira cuadrada vale:

$$\vec{B}_{Total} = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{w\pi} \vec{a}_z$$

Problema 7

Por un filamento conductor con forma de triángulo equilátero de lado a , fluye una corriente constante I . Calcular la intensidad del campo magnético en el centro del triángulo.

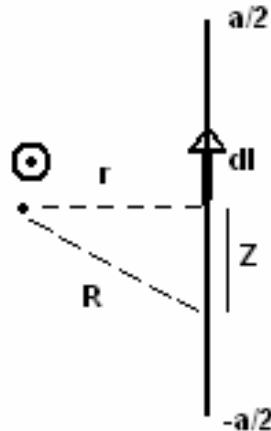


Para hallar \vec{B} usamos el teorema de superposición. Para ello hallaremos \vec{B} en uno de los lados y después multiplicaremos por tres.

$$d\vec{l} = dz \vec{a}_z$$

$$C \equiv Z \int_{-a/2}^{a/2}$$

$$R = \sqrt{Z^2 + r^2}$$



El método que usaremos será calcular el potencial magnético vector y después hallar el rotacional del mismo para calcular \vec{B} .

Como el problema no nos dice nada, supondremos que el triángulo se encuentra en el vacío.

Calculamos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dz \vec{a}_z}{\sqrt{Z^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{4\pi} \cdot \ln \left(Z + \sqrt{Z^2 + r^2} \right) \Big|_{-a/2}^{a/2}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \ln \left(\frac{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2}}{\frac{-a}{2} + \sqrt{\left(\frac{-a}{2}\right)^2 + r^2}} \right) \vec{a}_z$$

Ya podemos hallar \vec{B} calculando el rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{a}_\phi \cdot \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}} \vec{a}_\phi$$

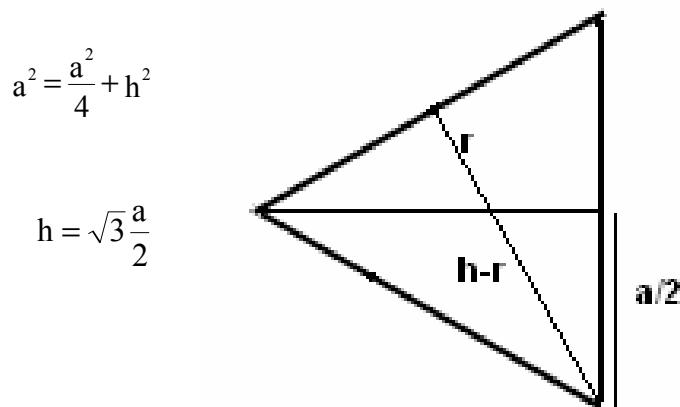
Ahora hallamos \vec{B} en los tres lados, lo cual se nos queda

$$\vec{B}_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot \vec{B} = \frac{3}{4} \frac{I \cdot a}{\pi r \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}} \vec{a}_\phi$$

Con esto, calculamos la intensidad magnética del conjunto

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{\text{TOTAL}}}{\mu_0} = \frac{3}{4} \frac{I \cdot a}{\pi r \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}} \vec{a}_\phi$$

Para simplificar el resultado, usaremos el teorema de Pitágoras



$$(h - r)^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} \quad \longrightarrow \quad \left(\sqrt{3} \frac{a}{2} - r \right)^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$3 \frac{a^2}{4} - \sqrt{3} ar + r^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$$



$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

De tal forma, volviendo a la formula que estábamos desarrollando de la intensidad magnética llegamos a que:

$$\vec{H} = \frac{3I}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}}} \vec{a}_\phi$$

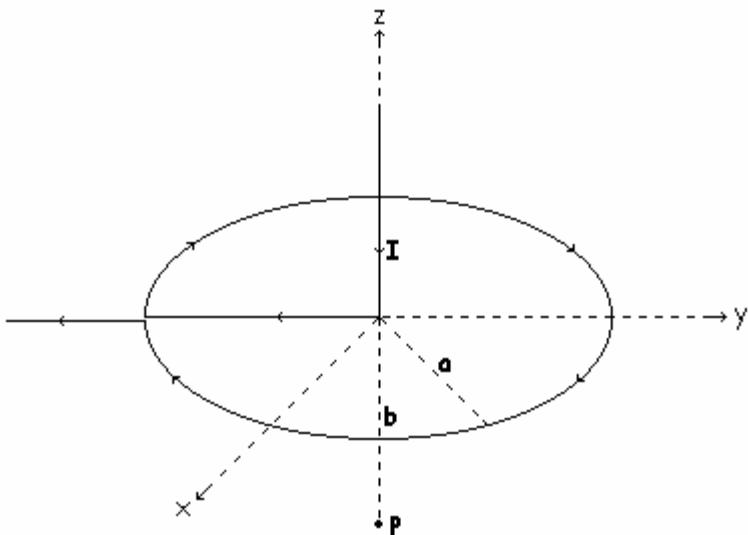
$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{4a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

SUSTITUYENDO $\rightarrow \vec{H} = \frac{3I}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}} \vec{a}_\phi$

En definitiva, el resultado final queda

$$\vec{H} = \frac{9I}{2\pi a} \vec{a}_\phi \quad A \text{ m}^{-1}$$

Problema 8



Ley de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{c'} \frac{d\vec{l}'}{R^2} \times \vec{a}_R$$

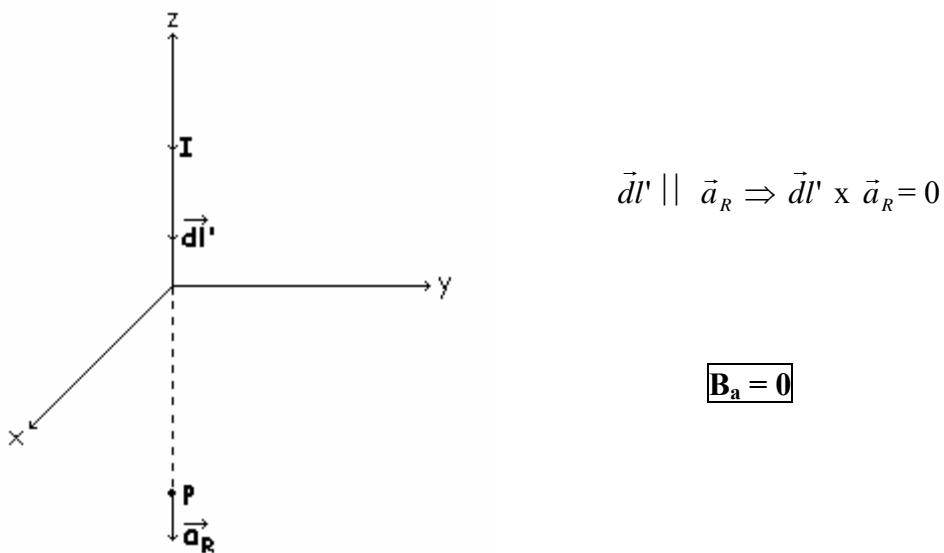
$R \equiv$ distancia del punto fuente al punto campo

$\vec{a}_R \equiv$ vector unitario del punto fuente al punto campo

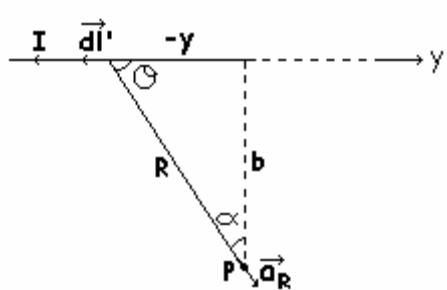
El circuito se divide en tres tramos:

- a) Corriente rectilínea sobre el eje z positivo
- b) Corriente rectilínea sobre el eje y negativo
- c) Corriente sobre la circunferencia de radio a

- a) Corriente rectilínea sobre el eje z positivo:



- b) Corriente rectilínea sobre el eje y negativo:



$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b}{R} \Rightarrow R = \frac{b}{\cos \alpha} \\ \operatorname{sen} \alpha &= \frac{-y}{R} \Rightarrow y = -R \operatorname{sen} \alpha = -b \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -b \operatorname{tag} \alpha \\ \Rightarrow dy &= -b \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}\end{aligned}$$

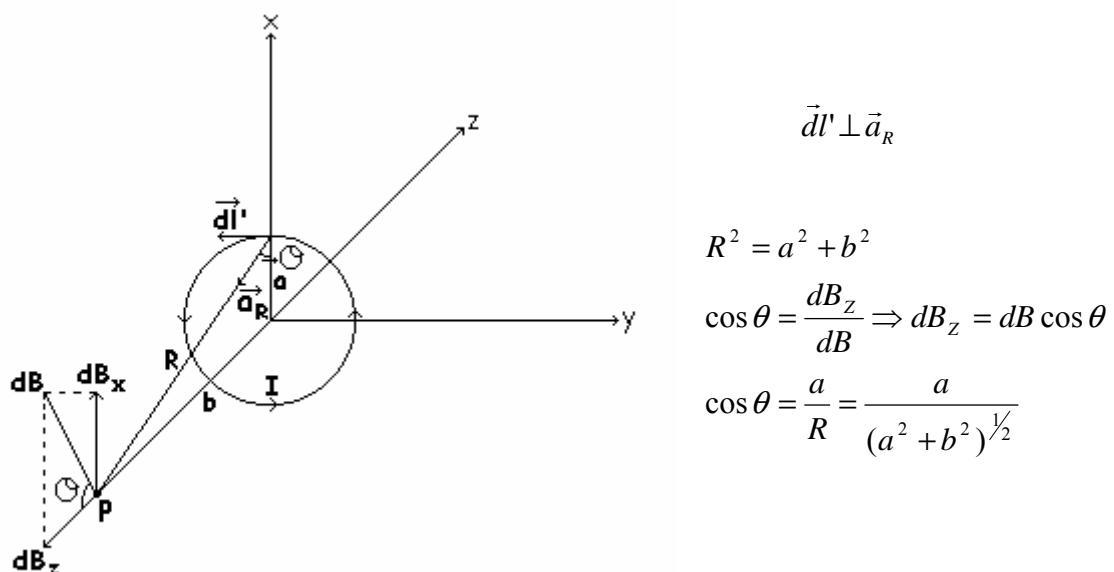
$$dl' \times \vec{a}_R = -dy \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} \theta \vec{a}_x = -dy \operatorname{cos} \alpha \vec{a}_x$$

$$\vec{B}_b = \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{a}_x \int_C \frac{\cos \alpha}{R^2} dy = \frac{\mu_o I}{4\pi} \vec{a}_x \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{b^2} \frac{b}{\cos^2 \alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi b} \vec{a}_x \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \vec{a}_x \operatorname{sen} \alpha \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \vec{a}_x$$

$$\boxed{\vec{B}_b = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \vec{a}_x}$$

c) Corriente sobre la circunferencia de radio a:



$$\begin{aligned}R^2 &= a^2 + b^2 \\ \cos \theta &= \frac{dB_z}{dB} \Rightarrow dB_z = dB \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{a}{R} = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

Por simetría, las componentes dB_x se cancelan con los elementos dl' situados en la parte opuesta del circuito.

$$dB=\frac{\mu_oI}{4\pi}\frac{\left|\vec{dl}'x\vec{a}_R\right|}{R^2}=\frac{\mu_oI}{4\pi}\frac{dl}{a^2+b^2}$$

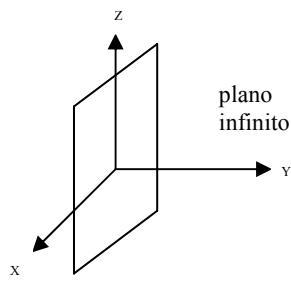
$$B_z = \oint\limits_{C'} dB \cos \theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint\limits_{C'} \frac{dl \cos \theta}{a^2 + b^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_o I a}{4\pi(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \oint dl = \frac{\mu_o I a}{4\pi(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi a = \frac{\mu_o I a^2}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\vec{B}_c=-\frac{\mu_o I a^2}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{a}_z}$$

$$\boxed{\vec{B}_T=\vec{B}_a+\vec{B}_b+\vec{B}_c=\frac{\mu_o I}{4\pi}\Bigg[\frac{1}{b}\vec{a}_x-\frac{2\pi a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{a}_z\Bigg]}$$

Problema 9



En primer lugar, como nos piden que estudiemos la densidad de flujo magnético para ambos lados del plano, distinguimos dichas regiones:

- (a) Para $Y>0$
- (b) Para $Y<0$

(a) En este caso aplicaremos la Ley de Biot-Savart, la cual transformaremos primero para poder aplicarla a distribuciones superficiales.

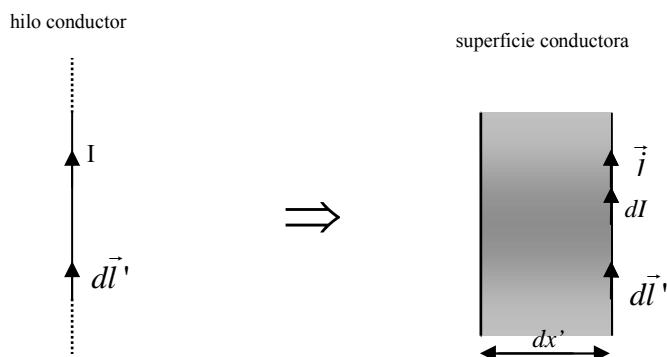
En la parte de teoría vimos la expresión aplicada a distribuciones lineales (hilos conductores), que tiene la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi} \oint_{c'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

En notación diferencial:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} \quad (*)$$

Como tenemos una distribución superficial de corriente en el plano $y=0$, entonces nos interesará tener la expresión de la Ley de Biot-Savart para superficies. A partir de la expresión anterior válida para hilos conductores, obtendremos la expresión para superficies, dando una anchura dx' a un hilo conductor, tal que:



Así, la corriente infinitesimal y la superficie infinitesimal, en una superficie conductora, a partir de este dibujo serán:

$$dI = j \cdot dx'$$

$$ds' = dx' \cdot dl'$$

Ahora, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (*), e intercambiando I por dI , se tiene:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot dI}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_o \cdot j \cdot dx'}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l}' \times \vec{a}_R}{R^2}$$

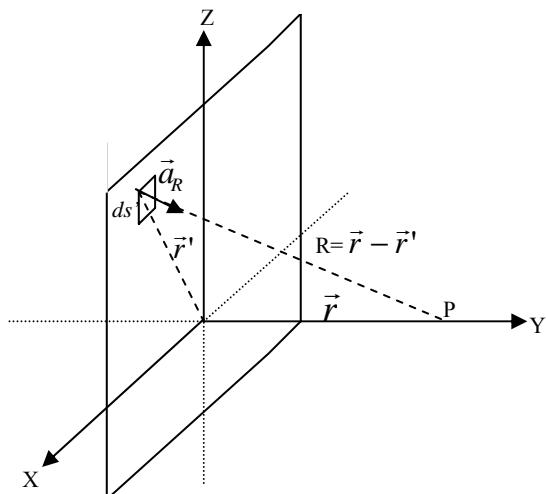
Aquí observamos que los vectores $d\vec{l}'$ y \vec{j} tienen la misma dirección y el mismo sentido. Entonces podremos darle a j el carácter vectorial, y quitárselo a $d\vec{l}'$, e intercambiarlos en el producto vectorial:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot dl' \cdot dx'}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{j} \times \vec{a}_R)}{R^2} \implies d\vec{B} = \frac{\mu_o \cdot ds'}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{j} \times \vec{a}_R)}{R^2} \implies \text{integrando esta expresión}$$

$$\implies \vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \int_{S'} \frac{(\vec{j} \times \vec{a}_R)}{R^2} \cdot ds' \quad \text{Ley de Biot-Savart para superficies conductoras.}$$

Esta será la expresión que utilizaremos para resolver el problema, que además viene dada en función de la densidad superficial de corriente, que es un dato que nos da el enunciado.

Por tanto, tomando un elemento infinitesimal de superficie y estudiándolo respecto un punto P cualquiera en el eje y>0 :



Realizando los cambios:

$$R = \vec{r} - \vec{r}' \quad \text{y} \quad \vec{a}_R = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Entonces, podremos expresar la ecuación anterior de la forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{S'} \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{s}' \quad (**)$$

Observando el dibujo, se tiene que:

$$\begin{array}{l|l} \vec{r} = y \cdot \vec{a}_y & \vec{r} - \vec{r}' = y \cdot \vec{a}_y - x' \vec{a}_x - z' \vec{a}_z \\ \vec{r}' = x' \vec{a}_x + z' \vec{a}_z & |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{y^2 + x'^2 + z'^2} \end{array}$$

Producto vectorial

$$\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') = K_0 \cdot \vec{a}_z \times (y \cdot \vec{a}_y - x' \vec{a}_x - z' \vec{a}_z) = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & 0 & K_0 \\ -x' & y & -z' \end{vmatrix} = -K_0 x' \vec{a}_y - K_0 y \vec{a}_x = K_0 (-y \vec{a}_x - x' \vec{a}_y)$$

Como existe simetría respecto al eje Z, a la hora de integrar en la expresión, los términos en x' positivos se van a cancelar con los términos en x' negativos, y por tanto, va a desaparecer la componente del eje Y.

A continuación, sustituyendo todos los datos en la expresión (**), se obtiene:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0 (-y \vec{a}_x) \cdot dx' \cdot dz'}{(y^2 + x'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \text{Como existe simetría respecto al eje Z,}$$

podremos tomar los límites de la variable x en el intervalo $[0, +\infty)$, y multiplicar por 2:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{2 \cdot \mu_0}{4\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_0 (-y \vec{a}_x) \cdot dx' \cdot dz'}{(y^2 + x'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{-\mu_0 \cdot K_0 \cdot y}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(y^2 + x'^2 + z'^2)^{3/2}} \right) \cdot dx' \cdot \vec{a}_x = \\ &= \frac{-\mu_0 \cdot K_0 \cdot y}{2\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left[\frac{z'}{(x'^2 + y^2)(y^2 + x'^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx' \cdot \vec{a}_x = \frac{-\mu_0 \cdot K_0 \cdot y}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx' \cdot \vec{a}_x}{(x'^2 + y^2)} = \\ &= \frac{-\mu_0 \cdot K_0 \cdot y}{\pi} \left[\frac{1}{y} \operatorname{arctg} \left(\frac{x'}{y} \right) \right]_0^{+\infty} \vec{a}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 K_0 \vec{a}_x} \quad (\text{T}) \end{aligned}$$

Para $y < 0$, se obtiene el mismo resultado, pero con signo opuesto, pues como ya hemos comprobado, existe simetría en el eje Z:

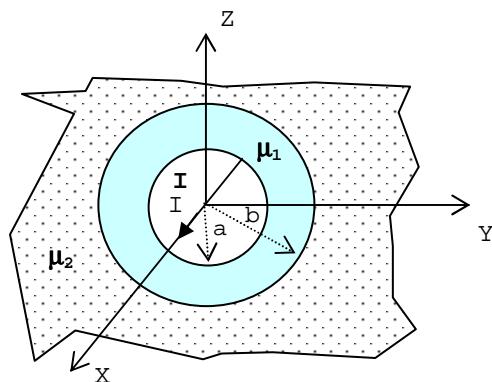
$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K_0 \vec{a}_x} \quad (\text{T})$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.

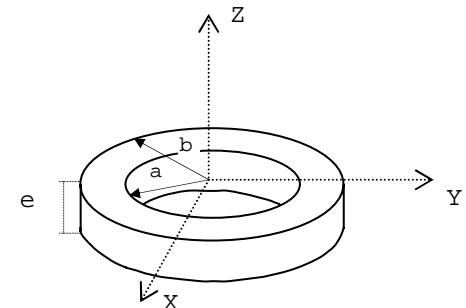
Magnetostática-Materiales y Energía

- 1) Tenemos una arandela de radio interior a , radio exterior b , y espesor e ($e \ll a$), como muestra la figura. La arandela está imanada uniformemente, con $\mathbf{M} = M \mathbf{a}_z$. Calcular:

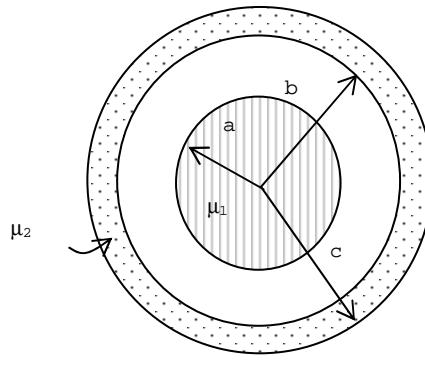
- a) Las densidades de corriente de imanación.
- b) La densidad de flujo magnético \mathbf{B} en el eje z ($z \gg e$).



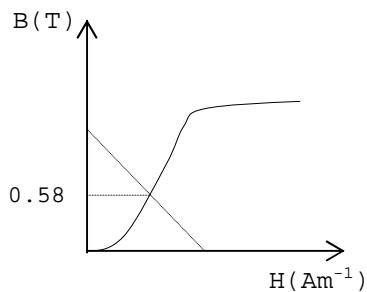
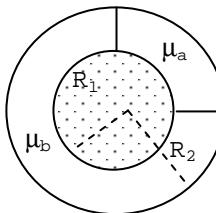
- 3) Dos cilindros indefinidos coaxiales, cuyos radios están indicados en la figura, son de un material conductor con permeabilidades respectivas μ_1 y μ_2 . Por los cilindros circulan corrientes del mismo valor pero con sentidos contrarios. Se suponen uniformes las densidades de corriente. Calcular la densidad de flujo magnético \mathbf{B} en función de la distancia al eje, así como la energía magnética en las distintas regiones si la longitud del cable es L .



- 2) En un medio magnético indefinido se practica un hueco cilíndrico, indefinido en la dirección del eje X. El hueco se recubre con una capa cilíndrica de otro material. La sección transversal del sistema se muestra en la figura. Sobre el eje X situamos un conductor uniforme filiforme indefinido por el que circula una corriente I . Las permeabilidades de los dos materiales son $\mu_1=10\mu_0$ y $\mu_2=100\mu_0$. Calcular los vectores \mathbf{H} , \mathbf{B} y \mathbf{M} en los distintos medios.



- 4) Tenemos un sistema de conductores coaxiales indefinidos, de radios R_1 y R_2 . Por el conductor de radio R_1 circula una corriente I y por el otro una corriente igual pero de sentido contrario. En el espacio entre conductores existe dos zonas de material con permeabilidades μ_a y μ_b . Calcular los vectores H y B en el espacio entre conductores.



- 5) Disponemos de un toroide con una ranura de espesor $d=2$ mm. El radio medio es $R=10$ cm. y su sección tiene un radio de 1 cm. Sobre el toroide se arrollan 1000 espiras por las que circula una corriente $I=2$ A. El toroide se ha construido con un material cuya curva de primera imanación se muestra en la figura. Suponemos que antes de aplicar la corriente el material estaba desimanado. Además, se supone que no hay dispersión de líneas de campo y que la sección es la misma para el flujo en material y ranura. Calcular la densidad de flujo magnético \mathbf{B} en la ranura o entrehierro.

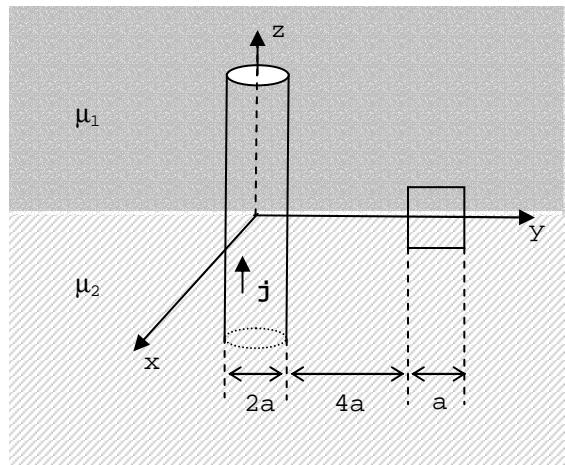
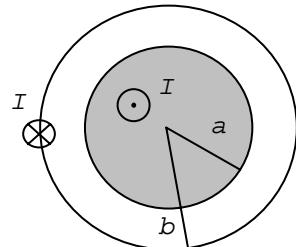
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.

Magnetostática-Materiales y Energía

6) Hallar:

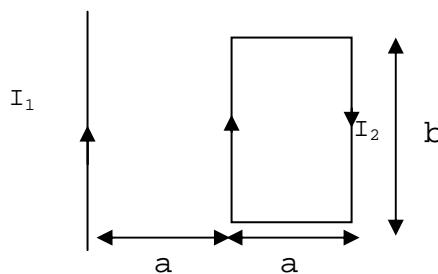
- a) La autoinducción de un solenoide alargado de longitud l , número de espiras N y radio R .
- b) Coeficiente de inducción mutua y de acoplamiento entre dos solenoides coaxiales de longitudes l_a y l_b ($l_a > l_b$), número de espiras N_a y N_b respectivamente, y considerando ambos radios iguales con valor R .

7) Una línea de transmisión coaxial, llena de aire, tiene un conductor interior sólido de radio a , y un conductor externo superficial de radio b . Calcular la energía y la inductancia por unidad de longitud de la línea.

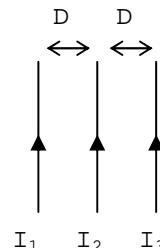


8) Por el conductor rectilíneo indefinido de radio a , indicado en la figura, circula una corriente cuya densidad es $\vec{j} = j_o r^2 \vec{a}_z$. Una espira cuadrada, de lado a , está situada a una distancia $5a$ del eje de la corriente. El medio de permitividad μ_1 ocupa el espacio de $z > 0$, y el de permitividad μ_2 el espacio de $z < 0$. Calcular la corriente que fluye por el conductor, la energía del sistema, y el coeficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira cuadrada.

9) Un conductor rectilíneo infinitamente largo transporta la corriente I_1 . Un circuito conductor rectangular de lados a y b está recorrido por la corriente I_2 y situado como se indica en la figura. Determinar la fuerza resultante sobre el citado circuito.



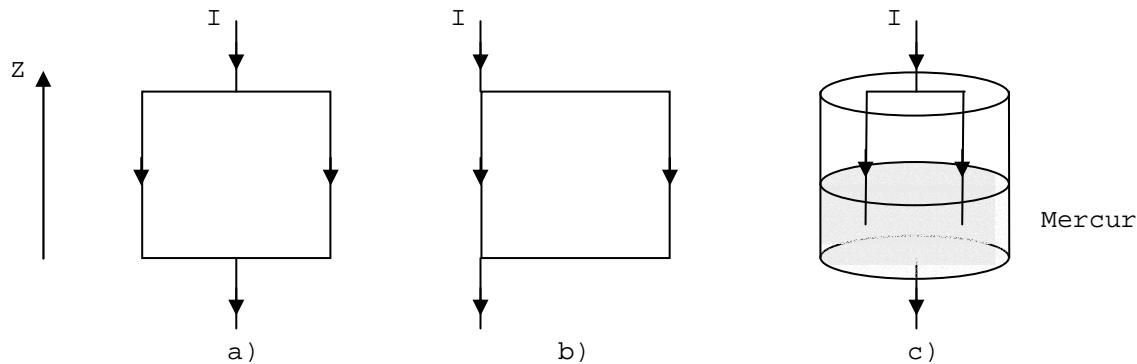
10) Tres conductores rectilíneos infinitamente largos, paralelos, coplanarios y separados entre sí la distancia D , están recorridos por corrientes I_1 , I_2 e I_3 del mismo sentido, como se indica en la figura. Calcular: a) La densidad de flujo magnético, B , que cada conductor crea en los puntos ocupados por los otros dos. b) La fuerza por unidad de longitud que aparece sobre cada uno de los conductores.



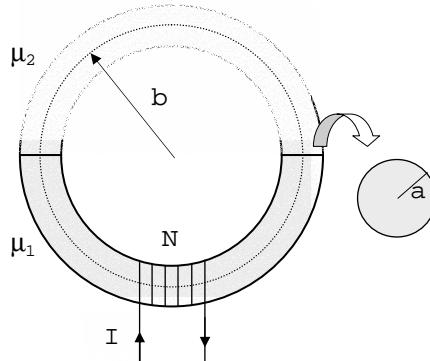
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.

Magnetostática-Materiales y Energía

- 11) Tenemos tres tipos de espiras situadas en un campo cuya inducción magnética es $\vec{B} = B_o \hat{a}_z$. Las tres soportan una corriente I, y pueden girar alrededor del eje z ¿Cuál de las tres gira? Razonar la respuesta.



- 12) Sobre un toroide se arrollan N espiras por las que circula una corriente I. El toroide tiene un radio medio b, y su sección un radio a ($b \gg a$). Se compone de dos mitades, cuyos materiales respectivos tienen permeabilidades μ_1 y μ_2 . El plano que separa los dos materiales es perpendicular a la circunferencia de radio b. Calcular la inducción magnética y la densidad de flujo magnético en el interior del toroide.



Problema 1

a) Las densidades de corriente de magnetización vienen dadas por:

$$\text{Densidad de corriente superficial: } \vec{j}_{ms} = \vec{M} \times \vec{a}_n$$

$$\text{Densidad de corriente en volumen: } \vec{j}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{a}_n$$

Como el vector de magnetización es constante, $\vec{j}_{mv} \equiv \vec{0}$. Es decir, no existen corrientes de magnetización en volumen.

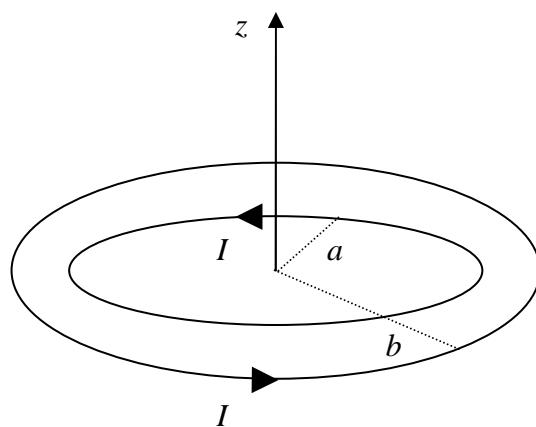
Por otro lado, en las superficies superior e inferior \vec{M} y \vec{a}_n son paralelos, por lo que en ellas tampoco existirán corrientes de magnetización. Sólo existen corrientes de magnetización en las superficies laterales, interna y externa. En ellas,

$$\begin{aligned}\vec{j}_{ms,ext} &= M \vec{a}_\phi \\ \vec{j}_{ms,int} &= -M \vec{a}_\phi\end{aligned}$$

siendo \vec{a}_ϕ el vector unitario coaxial de coordenadas cilíndricas. Al ser la espira muy delgada, las corrientes superficiales laterales de la arandela se asemejan a las de dos espiras circulares concéntricas, de valor

$$I = j_{ms,ext} = j_{ms,int} = Me$$

y con sentido contrario, tal como muestra la siguiente figura.



Así, para calcular la densidad de flujo magnético en el eje, podemos emplear la expresión correspondiente a una espira,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_\phi$$

a nuestras dos espiras equivalentes, y luego sumar ambas contribuciones (principio de superposición). Para la espira exterior se tiene que,

$$\vec{B}_{\text{espira,ext}} = \frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

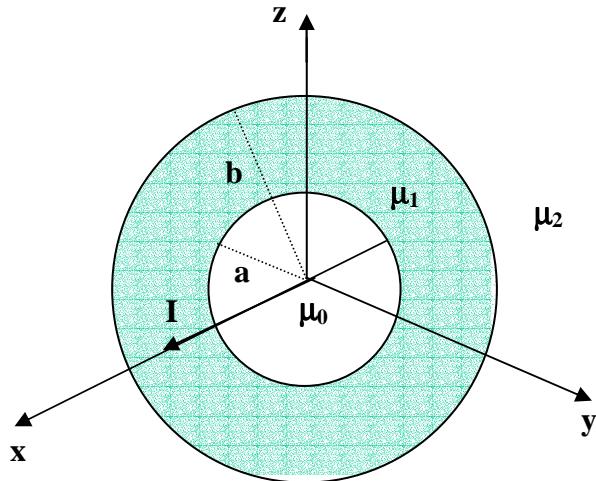
y para la interior:

$$\vec{B}_{\text{espira,int}} = -\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z$$

Con lo que la densidad de flujo magnético total vale:

$$\vec{B}_{\text{total}} = \left[\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \frac{\mu_o M e}{2} \cdot \vec{a}_z$$

Problema 2



La única corriente libre es la del hilo conductor. Aplicando la Ley de Ampere a una circunferencia centrada en el eje del sistema, de radio r :

$$\oint_c \vec{H} d\vec{l} = I_{libre}$$

En C, \mathbf{H} es paralelo a $d\mathbf{l}$, y el módulo de \mathbf{H} es constante, así, éste puede salir fuera de la integral:

$$\oint_c \vec{H} d\vec{l} = \oint_c H dl \cos 0^\circ = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot H$$

Por otro lado: $I_{libre} = I$. Con lo que:

$$2\pi r H = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi = \vec{H}_0 = \vec{H}_1 = \vec{H}_2$$

El resultado de la Ley de Ampere es independiente de la región en la que estemos. Distinguimos tres regiones: una en el intervalo $0 < r < a$ con permeabilidad μ_0 ; otra para $a < r < b$ con permeabilidad μ_1 y otra para $r > b$ con μ_2).

Para hallar la densidad de flujo magnético, \mathbf{B} , es necesario solamente aplicar la ecuación $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ en cada región. Así:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \cdot \vec{H}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{para la primera región})$$

$$\vec{B}_1 = \mu_1 \cdot \vec{H}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi = \frac{5\mu_0 I}{\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{para la segunda región})$$

$$\vec{B}_2 = \mu_2 \cdot \vec{H}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi = \frac{50\mu_0 I}{\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{para la tercera región})$$

Para hallar el vector de magnetización, \mathbf{M} , utilizaremos en cada región la expresión:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{M} - \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \vec{H}$$

Con lo que:

$$\vec{M}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{H}_0 = 0 \quad (\text{para la primera región})$$

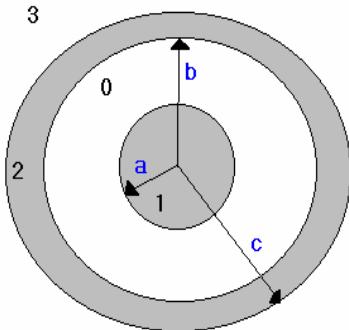
$$\vec{M}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} - \vec{H}_1 = \frac{9I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{para la segunda región})$$

$$\vec{M}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \vec{H}_2 = \frac{99I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \quad (\text{para la tercera región})$$

Nota. Sabemos que el problema está bien hasta aquí porque el vector de magnetización en el vacío es nulo.

Problema 3

Por la ley de Ampere generalizada:



$$\vec{H} \rightarrow \vec{B} \rightarrow w_m$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = H \oint_C dl = H 2\pi r$$

donde, para todas las regiones, C es una circunferencia concéntrica de radio r :

$$H 2\pi r = I_{libre}$$

0

$$I_{libre} = I$$

$$\vec{H}_0 = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

1

$$\left. \begin{array}{l} \pi a^2 \rightarrow I \\ \pi r^2 \rightarrow I_{libre} \end{array} \right\} I_{libre} = \frac{r^2}{a^2} I$$

$$\vec{H}_1 = \frac{r}{2\pi a^2} I \vec{a}_\phi \Rightarrow \vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1 \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_1 r}{2\pi a^2} I \vec{a}_\phi$$

2

$$\left. \begin{array}{l} I \rightarrow (\pi c^2 - \pi b^2) \\ I^* \rightarrow (\pi r^2 - \pi b^2) \end{array} \right\} I^* = \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I$$

$$I_{libre} = I - I^* = I - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} \vec{a}_\phi \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_2 I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} \vec{a}_\phi$$

3 $I_{libre} = 0 \Rightarrow \vec{H}_3 = 0 \Rightarrow \vec{B}_3 = 0$

Energía

$$w_m = \frac{1}{2} \int_{\infty}^b \frac{B^2}{\mu} dv \Rightarrow w_i = \frac{1}{2} \int_{v_i}^{\infty} \frac{B_i^2}{\mu_i} dv$$

$$dv = l 2\pi r dr \quad \forall \text{ región}$$

0

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B_0^2}{\mu_0} 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r^2} r dr \Rightarrow w_0 = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

1

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{B_1^2}{\mu_1} 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\mu_1 r^3 l}{2\pi a^4} I^2 dr \Rightarrow w_1 = \frac{\mu_1 l I^2}{16\pi}$$

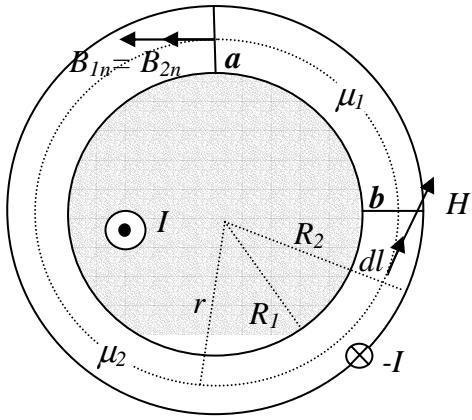
2

$$w_2 = \frac{1}{2} \int_b^c \frac{B_2^2}{\mu_2} 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \int_b^c \frac{\mu_2 I^2 l (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} dr \Rightarrow w_2 = \frac{\mu_2 I^2 l}{4\pi} \left[\frac{c^4 \ln \frac{c}{b}}{(c^2 - b^2)^2} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]$$

3

$$w_3 = \frac{1}{2} \int_c^\infty \frac{B_3^2}{\mu_3} 2\pi r l dr \Rightarrow w_3 = 0$$

Problema 4



Para resolver el problema utilizamos el teorema de Ampere y la continuidad de la componente normal de \mathbf{B} en las intercaras entre los dos materiales, \mathbf{a} y \mathbf{b} (ver figura).

Aplicando el Teorema de Ampere generalizado a una circunferencia de radio r concéntrica, al ser la intensidad del campo magnético en ella tangente de módulo constante, teniendo en cuenta los dos materiales:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\pi}{2} H_1 + \frac{3\pi}{2} H_2 \right) \cdot r ; \quad I_{libre} = I$$

$$\text{con lo que: } \left(\frac{\pi}{2} H_1 + \frac{3\pi}{2} H_2 \right) \cdot r = I \quad (1)$$

Por otro lado se cumple la continuidad de las componentes normales de \mathbf{B} en las dos intercaras: $B_{n1} = B_{n2}$

Como los vectores \vec{B}_1 y \vec{B}_2 son normales a las intercaras, la componente normal coincide con su módulo:

$$B_{n1} = B_1 = \mu_1 \cdot H_1 \quad B_{n2} = B_2 = \mu_2 \cdot H_2$$

$$\text{Con lo que: } \mu_1 \cdot H_1 = \mu_2 \cdot H_2 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviéndolo se llega a que:

$$\vec{H}_1 = \frac{2I\mu_2}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \cdot \frac{1}{r} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{H}_2 = \frac{2I\mu_1}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \cdot \frac{1}{r} \vec{a}_\phi$$

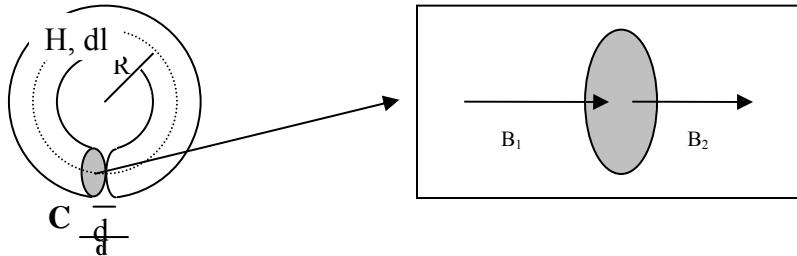
Y para las densidades de flujo magnético:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{2I\mu_2\mu_1}{\pi(\mu_2 + 3\mu_1)} \cdot \frac{1}{r} \vec{a}_\phi$$

Problema 5

Para encontrar la inducción magnética aplicamos el teorema de Ampère a un camino cerrado concéntrico, de radio igual al radio medio del toroide. Además, tendremos en cuenta la relación no lineal entre B y H dada por la curva de imanación.

En las intercaras toroide-ranura aplicamos la continuidad de las componentes normales de B . Si suponemos que no hay dispersión de las líneas de campo en la ranura, B sólo tiene componente normal en las mencionadas intercaras, con lo que B es uniforme en todas las zonas. Es decir, en las intercaras toroide-ranura se cumple que:



$$B_{1n} = B_1$$

$$B_{2n} = B_2$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B = B_1 = B_2$$

La aplicación del teorema de Ampère conduce a la ecuación siguiente,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1(2\pi R - d) + H_2 d = NI \quad (1)$$

donde H_1 y H_2 son las intensidades del campo magnético en el toroide y la ranura respectivamente.

Por otro lado, en la ranura:

$$B_2 = \mu_0 H_2 = B_1 \quad (2)$$

Despejando H_2 en la Ecuación (2) y llevándolo a la Ecuación (1) obtenemos,

$$H_1(2\pi R - d) = \frac{-d}{\mu_0} B_1 + NI$$

Con lo que:

$$B_1 = -\mu_0 \frac{(2\pi R - d)}{d} H_1 + \mu_0 \frac{NI}{d} \quad (3)$$

que, sustituyendo los valores que nos da el problema (N , I , d , R), lleva a la siguiente ecuación:

$$B_1 = -3'95 \times 10^{-4} H_1 + 1'25 \quad (4)$$

Como se indica en la figura del enunciado, representando dicha ecuación en la gráfica de la curva de imanación, la solución del problema viene dada por la intersección entre dicha curva y la recta representada. La densidad de flujo magnético del material en el interior del solenoide vale:

$B = 0'58 \text{ T}$

Problema 6

- a) Para una espira la autoinductancia se calcula como:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

donde ϕ es el flujo magnético a través de una espira, e I la corriente que la atraviesa.

Generalizando, para un solenoide de N espiras la autoinductancia será:

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

siendo ϕ el flujo magnético a través del solenoide, e I la corriente que fluye por él.

Si el solenoide es lo suficientemente alargado y con un número elevado de espiras, podemos considerar que la densidad de flujo magnético en su interior es constante, en la misma dirección que el eje del solenoide y con el sentido dado por la regla de la mano derecha con la corriente. Así, el flujo magnético en el solenoide será:

$$\phi = B \cdot S$$

donde S es el área de la sección transversal del solenoide, de valor πR^2 , siendo R el radio interno del solenoide. Para calcular la densidad de flujo magnético en el solenoide, aplicamos la ley de Ampere a una trayectoria rectangular cerrada con uno de los lados dentro del solenoide, paralelo a su eje, y de longitud la de éste, l . Este lado interno es el único que contribuye a la circulación, por lo que se llega a que:

$$B \cdot l = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

Con lo que el flujo magnético en el solenoide vale:

$$\phi = \frac{N\mu_0 I \pi R^2}{l}$$

Y la autoinductancia:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 R^2}{l}$$

- b) Sea a el subíndice empleado para indicar el solenoide largo, y b el corto. El coeficiente de inducción mutua puede expresarse como:

$$L_{ab} = \frac{N_b \phi_a}{I_a}$$

donde ϕ_a es el flujo magnético del solenoide a en b , o sea

$$\phi_a = B_a \pi R^2$$

Aplicando al solenoide *a* la expresión obtenida en el apartado anterior para la densidad de flujo magnético en el interior de un solenoide, se llega a que

$$\phi_a = \frac{\mu_0 N_a I_a \pi R^2}{l_a}$$

$$L_{ab} = \frac{\mu_0 N_b N_a \pi R^2}{l_a}$$

El coeficiente de acoplamiento se define como:

$$K = \frac{L_{ab}}{\sqrt{L_a L_b}}$$

siendo L_a y L_b los coeficientes de autoinducción de las bobinas *a* y *b* respectivamente. Procediendo de forma análoga a como se obtuvo el coeficiente de inducción mutua, se llega a que

$$L_a = \frac{\mu_0 N_a^2 \pi R^2}{I_a} \text{ y } L_b = \frac{\mu_0 N_b^2 \pi R^2}{I_b}$$

con lo que, tras simplificar, el coeficiente de acoplamiento vale

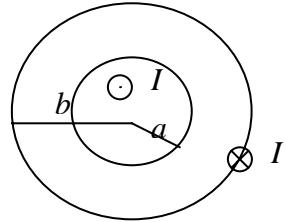
$$K = \sqrt{\frac{l_b}{l_a}}$$

Problema 7

Para calcular tanto la energía como la inductancia por unidad de longitud, calculamos primero la densidad de flujo de magnético, \vec{B} , en todas las regiones.

Sabemos que:

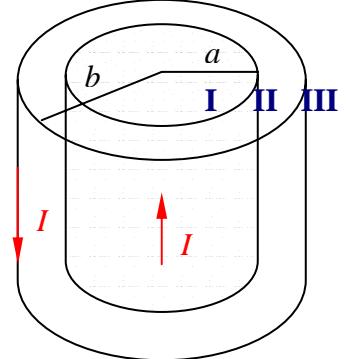
$$I_c = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$



I_c : corriente que atraviesa S

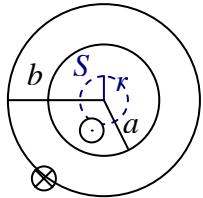
S: superficie a través de la cual circula la corriente. Elegiremos círculos concéntricos de radio r

\vec{j} : vector densidad de corriente



Nota: Para las tres regiones se va a cumplir que $\vec{j} \parallel \vec{ds}$

- Región I ($r < a$):



$$I_c(r) = \int_S \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_S j \cdot ds = j \int_S ds = j \pi r^2$$

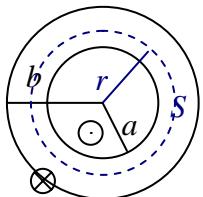
Como para $r = a$:

$$I_c(a) = j \pi a^2 = I ; \quad j = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\text{Por tanto, } I_c(r) = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{a^2} I$$

- Región II ($a < r < b$):

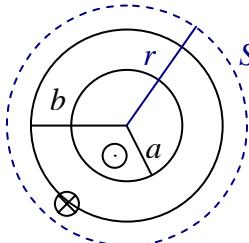
En este caso la corriente I_c es constante, igual a toda la que circula por el conductor interior.



$$I_c = I$$

- Región III ($r > b$):

Como las corrientes por los conductores tienen sentidos contrarios:



$$I_c = I - (-I) = 0$$

Ahora calculamos \vec{B} por la ley de Ampere generalizada:

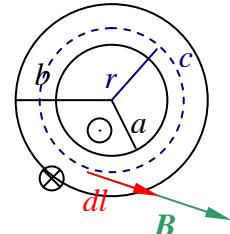
$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_c$$

\vec{H} : Vector intensidad de campo magnético. En medios lineales: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

Y si el medio es además homogéneo tenemos: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_c$

El sentido del recorrido de C (y por tanto de $d\vec{l}$) y el de \vec{B} . Los fijamos atendiendo a la regla de la mano derecha con la corriente, según se indica en la figura.

Como vemos, $\vec{B} \parallel d\vec{l}$. Además, por simetría, el módulo de \vec{B} solo dependerá de su distancia al centro.



Tenemos entonces que para cualquier región: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi r = \mu I_c$.

Así:

- Región I:

$$B \cdot 2\pi r = \mu \frac{r^2}{a^2} I; \quad \vec{B} = \frac{\mu r I}{2\pi a^2} \vec{a}_\phi$$

- Región II:

$$B \cdot 2\pi r = \mu I; \quad \vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

- Región III:

$$B \cdot 2\pi r = \mu \cdot 0; \quad \vec{B} = \vec{0}$$

Calculemos ahora la energía magnetostática mediante la expresión: $W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{H} \cdot \vec{B} dv$

En nuestro caso, como $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ (medio lineal y homogéneo):

$$W = \frac{1}{2\mu} \int_{\infty} B^2 dv = \frac{1}{2\mu} \int_I B^2 dv + \frac{1}{2\mu} \int_{II} B^2 dv + \frac{1}{2\mu} \int_{III} B^2 dv$$

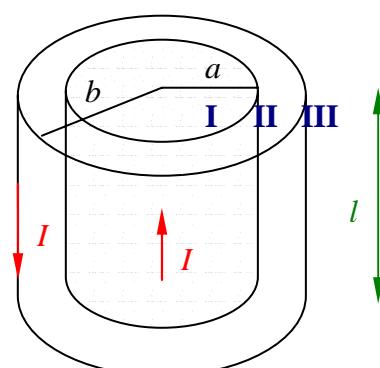
Suponiendo que la línea tiene una longitud l , el elemento infinitesimal de longitud vale:

$$dv = 2\pi r l dr$$

Entonces para cada región se tiene que:

- Región I:

$$\begin{aligned} W_I &= \frac{1}{2\mu} \int_I B^2 dv = \frac{1}{2\mu} \int_0^a \frac{\mu^2 r^2 I^2}{2^2 \pi^2 a^4} \cdot 2\pi r l dr = \\ &= \frac{\mu I^2 l}{4\pi a^4} \int_0^a r^3 dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi a^4} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\mu I^2 l}{16\pi} \end{aligned}$$



- Región II:

$$\begin{aligned} W_{II} &= \frac{1}{2\mu} \int_{II} B^2 \cdot dv = \frac{1}{2\mu} \int_a^b \frac{\mu^2 I^2}{2^2 \pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l \cdot dr = \\ &= \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

- Región III:

$$W_{III} = \frac{1}{2\mu} \int_{III} B^2 \cdot dv = 0$$

$$\text{Entonces } W = W_I + W_{II} + W_{III} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{Luego la energía por unidad de longitud vale: } (W/l) = \frac{\mu I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) Jm^{-1}$$

Para calcular la inductancia empleamos la relación que liga la energía magnética de un circuito con ella: $W = \frac{1}{2} LI^2$

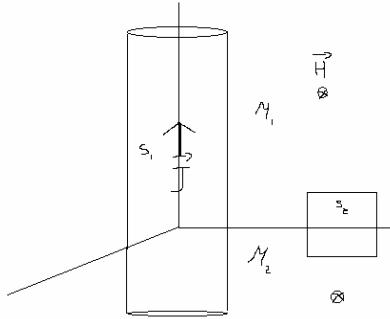
Despejando:

$$L = 2 \frac{W}{I^2} = L = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{Por lo que la inductancia por unidad de longitud será: } (L/l) = \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) Hm^{-1}$$

Problema 8

a) Cálculo de la corriente



Para calcular la corriente total utilizamos la definición de intensidad de corriente:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

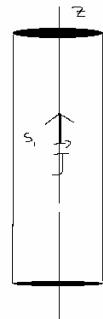
en donde \vec{J} es el vector densidad de corriente, y S cualquier superficie atravesada por la corriente. En nuestro caso S sería una de las tapas del cilindro.

En las tapas $\vec{J} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot ds$. Con lo que,

$$I = \int_{S_{\text{tapa}}} J r^2 ds = \int_{S_{\text{tapa}}} J_o r^2 2\pi r dr$$

donde se ha tenido en cuenta que en cilíndricas,

$$ds = 2\pi r dr$$



Ahora bien, debemos distinguir dos zonas:

a) Fuera del cilindro.

$$I_{\text{ext}} = \int_0^a J_o r^2 2\pi r dr = \frac{J_o \pi a^3}{2}$$

b) Dentro del cilindro.

$$I_{\text{int}} = \int_0^r J_o r^2 2\pi r dr = \frac{J_o \pi r^3}{2}$$

Cálculo del coeficiente de inducción mutua:

$$L = \phi / I_{\text{ext}}$$

donde ϕ es el flujo magnético que atraviesa la espira, debido a I_{ext} :

$$\int_{S_{\text{espira}}} \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s}$$

Para el cálculo de B utilizamos ley de ampere generalizada, teniendo en cuenta que el medio no es homogéneo. Además, por la simetría del problema, la intensidad del campo magnético es tangente a la superficie de separación entre los dos materiales que conforman el medio. Con lo que,

$$\begin{aligned} H_{1z} - H_{2z} &= J_s = 0 \Rightarrow H_{1z} = H_{2z} \\ H_{1z} &= H_1 \\ H_{2z} &= H_2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H_1 = H_2 = H$$

La intensidad del campo magnético no va a depender del material en que se encuentre, tan sólo de la distancia a la corriente. Aplicando entonces la ley de Ampere generalizada a una circunferencia concéntrica con el eje del conductor, y de radio r :

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = I$$

Con lo que,

$$\vec{H}_{\text{int}} = \frac{I_{\text{int}}}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{H}_{\text{ext}} = \frac{I_{\text{ext}}}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

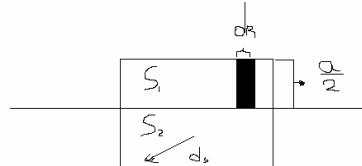
La densidad de flujo magnético en la espira es distinta en cada material. Así, con H_{out} ,

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_1 H_{\text{ext}} \text{ para } z > 0 \\ B_2 &= \mu_2 H_{\text{ext}} \text{ para } z < 0 \end{aligned}$$

Y el flujo magnético a través de la espira vendrá dado por:

$$\phi = \int_{S_1} \mu_1 \vec{H}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \mu_2 \vec{H}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s}$$

donde $S \equiv S_1 + S_2$ es:



y $ds = (a/2)dr$. Como la intensidad del campo magnético es perpendicular a la superficie rectangular que rodea la espira, es paralela a ds , con lo que

$$\vec{H}_{\text{ext}} \parallel d\vec{s} \Rightarrow \vec{H}_{\text{ext}} \cdot d\vec{s} = H_{\text{ext}} \cdot ds$$

y el flujo magnético viene dado por:

$$\phi = \int_{S_1}^{6a} \mu_1 H_{\text{ext}} \frac{a}{2} dr + \int_{S_2}^{6a} \mu_2 H_{\text{ext}} \frac{a}{2} dr$$

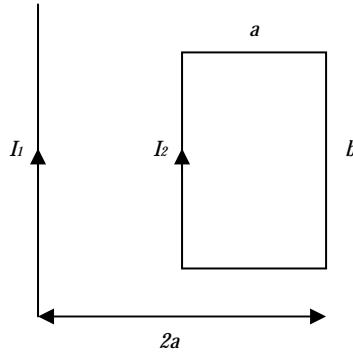
Sustituyendo obtenemos:

$$\phi = [J_o a^5 \ln(6/5) (\mu_1 + \mu_2)] / 8$$

Luego:

$$L = \phi / I_{\text{ext}} = [a \cdot (\mu_1 + \mu_2) \ln(6/5)] / 4\pi$$

Problema 9



Tenemos que calcular la fuerza resultante sobre el circuito de la figura. Para ello lo primero que tenemos que saber es el campo magnético producido por el hilo rectilíneo. De la teoría sabemos que el campo producido por un hilo rectilíneo infinito es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{a}_\phi$$

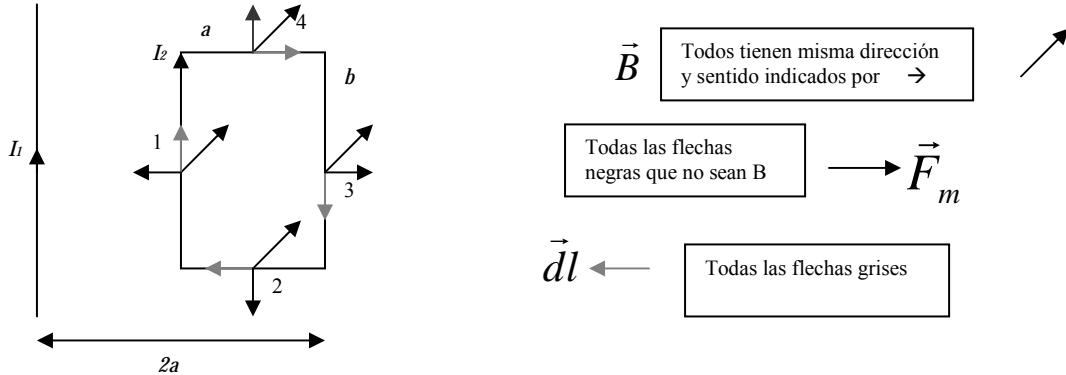
siendo la corriente I , I_1 en nuestro caso, y R la distancia al hilo infinito.

Teniendo la expresión del campo tenemos que buscar la expresión de la fuerza que ejerce un conductor sobre otro y viene dada por:

$$\vec{F}_m = I \int \vec{dl} \times \vec{B}$$

donde I es en esta expresión la corriente I_2 de la espira, \vec{B} el campo magnético que existe a través de la espira, debido a I_1 , $d\vec{l}$ es el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la espira y con el sentido de la corriente I_2 .

Ahora vamos a calcular las fuerzas que se producen en cada lado del circuito:



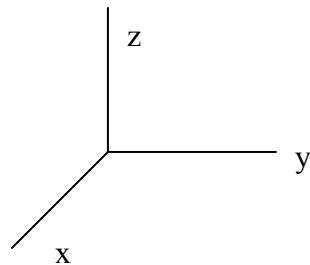
Aplicando sobre cada lado la expresión de la fuerza, obtenemos la fuerza magnética total resultante. Ahora nos fijamos en la fuerza 2 y 4. Como vemos en el dibujo tienen la misma dirección pero sentido contrario con lo que se restan. Pero si nos fijamos más aún vemos que el módulo es también el mismo pues B varía de igual forma en un lado que en otro, debido a que la distancia a hilo recto infinito es la misma. Así, las fuerzas magnéticas 2 y 4 se anulan.

$$\vec{F}_{m4} = -\vec{F}_{m2}$$

Nos quedan entonces las \vec{F}_{m_1} y \vec{F}_{m_3} , cuyas direcciones son las mismas pero sus sentidos son contrarios, al igual que pasa con las fuerzas anteriores. Sin embargo, esta vez los módulos no van a ser iguales debido a los lados 1 y 3 no se encuentran a la misma distancia del hilo recto infinito. Es obvio que el modulo de \vec{F}_{m_1} va a ser mayor que \vec{F}_{m_3} , debido a que el campo \vec{B} es más fuerte cuanto más cerca del hilo infinito. Hallamos dichas fuerzas y las restamos para obtener la fuerza resultante.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m_1} &= I_2 \int \vec{dl} \times \vec{B} = -I_2 \int dl B \vec{a}_y = -I_2 B \int dl \vec{a}_y = -I_2 B l \vec{a}_y = -I_2 B b \vec{a}_y = -\mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{2\pi a} \vec{a}_y \\ \vec{F}_{m_3} &= I_2 \int \vec{dl} \times \vec{B} = I_2 \int dl B \vec{a}_y = I_2 B \int dl \vec{a}_y = I_2 B l \vec{a}_y = I_2 B b \vec{a}_y = \mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{2\pi 2a} \vec{a}_y \\ \vec{F}_m &= \vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_3} = -\mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{2\pi a} \vec{a}_y + \mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{4\pi a} \vec{a}_y = \mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{\pi a} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \vec{a}_y \\ &= -\mu_0 I_1 I_2 \frac{b}{4\pi a} \vec{a}_y\end{aligned}$$

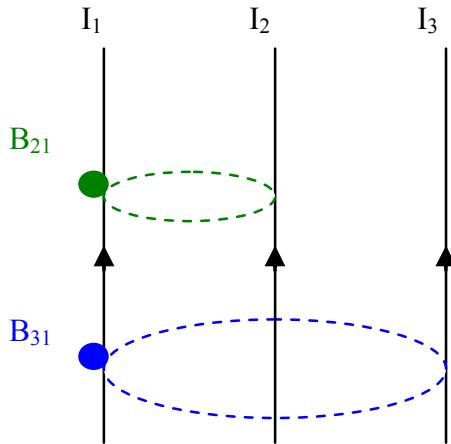
Nota: Utilizamos coordenadas cartesianas para indicar la dirección y sentido de las fuerzas.



Problema 10

(a) La densidad de flujo magnético sobre cada uno de los conductores:

CONDUCTOR 1



Como se trata de un hilo infinito, mediante la Ley de Ampére:

$$\oint_C \vec{B} dl = \mu_0 I$$

Llegábamos a la expresión:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

Para un hilo conductor rectilíneo por el que circula una corriente I .

En nuestro caso, la densidad de flujo en el conductor 1 será la suma de la densidad de flujo del conductor 2 sobre el 1 y la del conductor 3 sobre el 1. Así que:

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{21} + \vec{B}_{31}$$

Por tanto, calcularemos \vec{B}_{21} mediante la expresión antes citada:

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$$

Para darle carácter vectorial a la densidad de flujo nos vamos al dibujo y nos fijamos en el sentido de la corriente. Por la regla de la mano derecha, vemos que la densidad de flujo es perpendicular al plano yz , y con sentido hacia fuera. Por tanto, tendrá el sentido del eje positivo de las x :

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \vec{a}_x$$

Calculamos a continuación la densidad de flujo del conductor 3 sobre el 1:

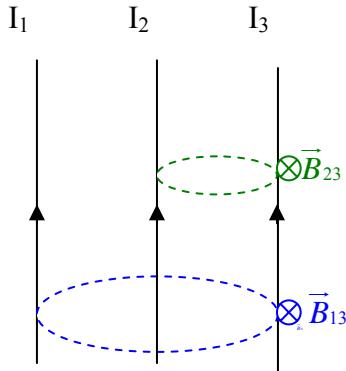
$$\vec{B}_{31} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 I_3}{4\pi d} \vec{a}_x$$

Si sumamos ambas expresiones y sacamos factor común:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi d} [I_3 + 2I_2] \vec{a}_x$$

Obtendremos la densidad de flujo magnético en el conductor 1.

CONDUCTOR 3



Por simetría, para el conductor 3 obtendremos:

$$\vec{B}_{23} = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \vec{a}_x$$

Si le damos carácter vectorial veremos que al ir la corriente hacia arriba, por la regla de la mano derecha, la densidad de flujo es perpendicular al plano yz y hacia adentro(en el sentido negativo del eje de las x).

Para la densidad de 1 sobre 3 :

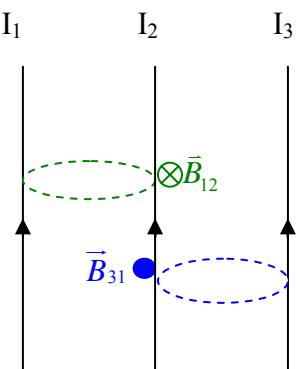
$$\vec{B}_{13} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(2d)} \vec{a}_x = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi d} \vec{a}_x$$

Si sumamos ambas expresiones y sacamos factor común:

$$\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0}{4\pi d} [I_1 + 2I_2] \vec{a}_x$$

Obtendremos la densidad de flujo para el conductor 3.

CONDUCTOR 2



Calcularemos:

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{32}$$

Por tanto:

$$\vec{B}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{a}_x$$

Para darle carácter vectorial nos fijamos en el sentido de la corriente. Como va hacia arriba, por la regla de la mano derecha, la densidad de flujo será perpendicular al plano yz y hacia adentro. Por tanto, en el sentido negativo del eje de las x.

Para el caso de \vec{B}_{32} será en el sentido positivo del eje de las x, ya que la densidad de flujo será perpendicular al plano yx y hacia fuera.

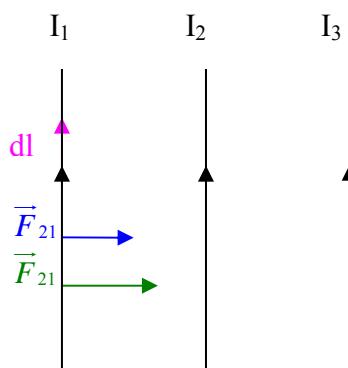
$$\vec{B}_{32} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi d} \vec{a}_x$$

Sumamos y sacamos factor común:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi d} [I_3 - I_1] \vec{a}_x$$

(b) La fuerza por unidad de longitud que aparece sobre cada uno de los conductores.

CONDUCTOR 1



La fuerza en el conductor 1 será la suma de la fuerza que ejerce el conductor 2 sobre el 1 y la que ejerce el 3 sobre el 1.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$

La calcularemos mediante la expresión de la fuerza magnética en un conductor:

$$\vec{F} = I \int_C \vec{dl} \times \vec{B}$$

El \vec{dl} tendrá la dirección y sentido de la corriente. Calculamos \vec{F}_{21} :

$$F_{21} = I_1 \int_C dl \cdot B_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_C dz$$

Donde hemos tenido en cuenta que el diferencial de longitud (\vec{dl}) es perpendicular a \vec{B} y además que $dl = dz$.

Por tanto, tenemos que:

$$\frac{\vec{F}_{21}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{a}_y$$

Para darle carácter vectorial tenemos en cuenta que se trata de dos corrientes paralelas en el mismo sentido, con lo que la fuerza tendrá el sentido positivo del eje de las y.

La contribución del conductor 3 será:

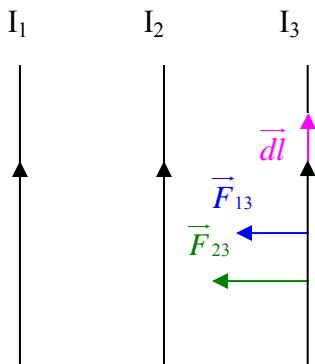
$$\frac{\vec{F}_{31}}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{4\pi d} \vec{a}_y$$

Si sumamos y sacamos factor común:

$$\frac{\vec{F}_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi d} [I_3 + 2I_2] \vec{a}_y$$

Obtendremos la fuerza por unidad de longitud para el conductor 1.

CONDUCTOR 3



Para el caso del conductor 3, por analogía con el conductor 1, calcularemos la fuerza por la expresión del caso anterior, para la fuerza por unidad de longitud del conductor 2 sobre el 3 obtendremos:

$$\frac{\vec{F}_{23}}{l} = -\frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi d} \vec{a}_y$$

Para darle carácter vectorial, como en el caso anterior, teniendo en cuenta la regla de la mano derecha y teniendo en cuenta que se trata de dos corrientes paralelas del mismo sentido y que, además los conductores 1 y 2 están situados a la izquierda del conductor 3, obtendremos que la fuerza irá en el sentido negativo del eje de las y, como podemos observar en la figura.

Para la contribución del conductor 1 obtendremos:

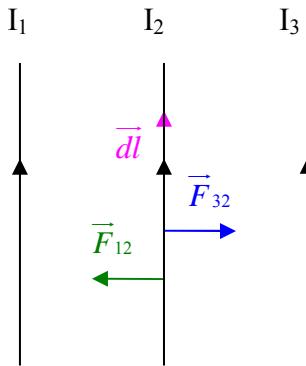
$$\frac{\vec{F}_{13}}{l} = -\frac{\mu_0 I_1 I_3}{4\pi d} \vec{a}_y$$

Si sumamos y sacamos factor común:

$$\frac{\vec{F}_3}{l} = -\frac{\mu_0 I_3}{4\pi d} [I_1 + 2I_2] \vec{a}_y$$

Obtendremos la fuerza por unidad de longitud para el conductor 3.

CONDUCTOR 2



Para el caso del conductor 2, utilizaremos las mismas expresiones que en los casos anteriores. Para la fuerza por unidad de longitud del conductor 3 sobre el 2, obtendremos:

$$\frac{\vec{F}_{32}}{l} = \frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi d} \vec{a}_y$$

Para darle carácter vectorial tendremos en cuenta la regla de la mano derecha y que el conductor 3 está situado a la derecha del conductor 2, donde queremos calcular la fuerza. Obtendremos que la fuerza irá en el sentido positivo del eje de las y, como podemos observar en la figura.

Para la contribución del conductor 1 obtendremos:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{l} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{a}_y$$

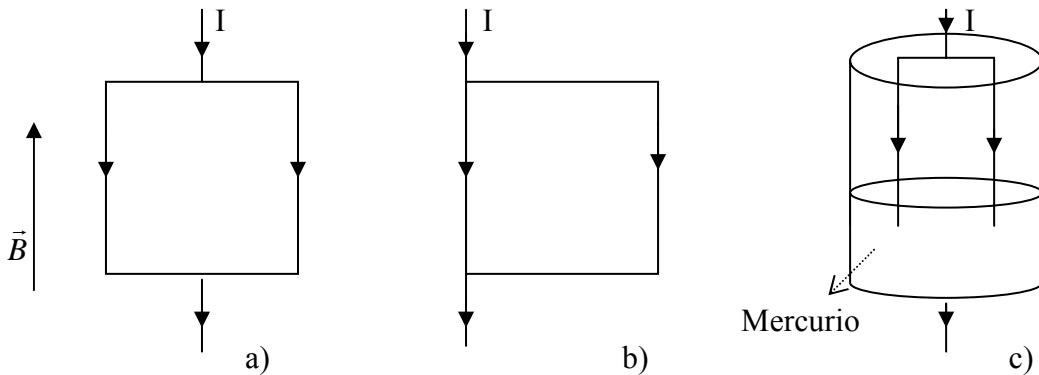
Para darle carácter vectorial tendremos en cuenta la regla de la mano derecha y que el conductor 1 está situado a la izquierda del conductor 2, donde queremos calcular la fuerza. Obtendremos que la fuerza irá en el sentido negativo del eje de las y, como podemos observar en la figura.

Si sumamos y sacamos factor común:

$$\frac{\vec{F}_2}{l} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} [I_3 - I_1] \vec{a}_y$$

Obtendremos la fuerza por unidad de longitud para el conductor 2

Problema 11

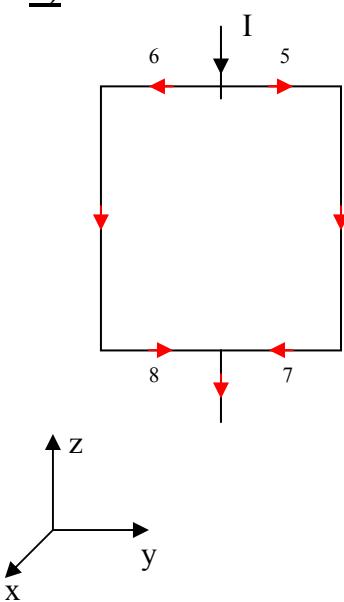


Como sabemos, cuando tenemos un conductor por el que circula una corriente I en una región del espacio donde existe un campo magnético, sobre dicho conductor aparecerá una fuerza magnética que viene determinada por:

$$\vec{F}_m = \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Nos piden que averigüemos qué espira gira, por lo que tendremos que realizar un análisis del sentido de las fuerzas en cada sector del circuito, y luego interpretar si éstas se van a compensar, o van a hacer que la espira gire.

a)



En el dibujo podemos observar la dirección y sentido de los $d\vec{l}$ (vectores en rojo).

Comencemos nuestro estudio por los conductores verticales:

En todos ellos se va a cumplir que $d\vec{l} = dz \cdot a\vec{z}$ (Ver Nota(1)) y como \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos, $d\vec{l} \times \vec{B} = 0$, por lo que $\vec{F}_m = 0$;

Nota(1): tener en cuenta que si queremos colocar $d\vec{l}$ en forma de módulo-vector, dicho módulo es $-dz$, porque un elemento diferencial es un incremento infinitesimal, así que como vamos en el sentido decreciente de las z entonces dz por si solo será negativo. Por otro lado su carácter vectorial será $-a\vec{z}$, por lo que simplificando quedará $d\vec{l} = dz \cdot a\vec{z}$.

Nota(2): $d\vec{l}$ siempre va en el mismo sentido de la corriente.

Continuamos por el conductor 5:

$$\text{En él } d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y} \text{ y } d\vec{l} \times \vec{B} = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

Llevando este resultado a la integral obtenemos que:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = \frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot a_x}{4} N$$

Tener en cuenta que la corriente que pasa por el conductor es $I/2$, ya que suponiendo conductores óhmicos y como ambas ramas tienen la misma longitud, entonces la resistencia que provocaran al paso de corriente es la misma.

Conductor 6:

Nuevamente el proceso es el mismo:

$$d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y} \quad (\text{ver nota (1)})$$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = -dy \cdot B_0 \cdot (-a\vec{x}) = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

Por lo que:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_0^{-\frac{L}{2}} dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = -\frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot a\vec{x}}{4} N$$

Conductor 7:

$$d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y} \quad (\text{ver nota (1)})$$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = -dy \cdot B_0 \cdot (-a\vec{x}) = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^0 dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = -\frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot a\vec{x}}{4} N$$

Conductor 8:

$$d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y}$$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

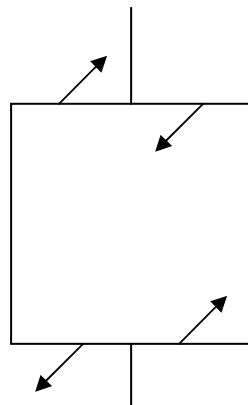
Por tanto:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_{\frac{L}{2}}^0 dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = \frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot a\vec{x}}{4} N$$

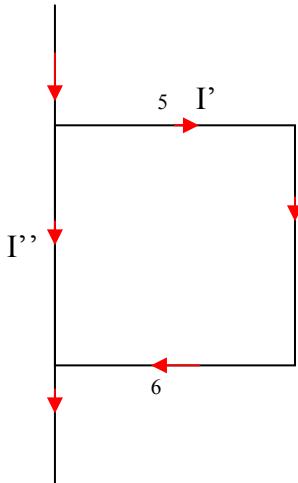
Como se puede observar tanto las fuerzas sobre los conductores 5 y 7 como las de 6 y 8 se van a compensar porque tienen el mismo módulo y sentido contrario. Por tanto esta espira **NO GIRA**.

Notar que las fuerzas sobre cada conductor son constantes debido a que el campo es fijo.

El diagrama de fuerzas quedaría de la siguiente manera:



b) El procedimiento va a ser totalmente análogo:



En primer lugar hay que tener en cuenta la corriente I' . Suponiendo conductores óhmicos la resistividad que provocan al paso de la corriente es:

$$R = \frac{L}{\sigma \cdot S}$$

donde L es la longitud, σ es la conectividad y S es la sección. Tenemos dos ramas, una de longitud L y otra de $3L$, entonces como la conductividad y la sección es la misma, la resistencia de cada conductor será R y $3R$. Por tanto, haciendo un divisor de corriente, obtenemos que $I' = \frac{I}{4}$ de donde se deduce

$$\text{que por el otro conductor irá } I'' = \frac{3I}{4}.$$

Nuevamente en los conductores verticales el producto vectorial va a ser cero, ya que $d\vec{l}$ y \vec{B} son paralelos:

$$d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

Y entonces:

$$\vec{F}_m = 0$$

Conductor 5:

$$d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y}$$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

Por tanto:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{4} \int_0^L dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = \frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot \vec{a}_x}{4} N$$

Conductor 6:

$$d\vec{l} = dy \cdot a\vec{y} \quad (\text{ver nota (1)})$$

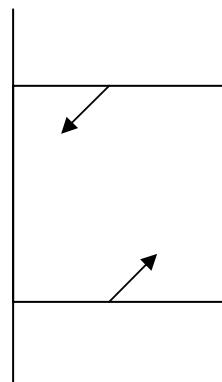
$$d\vec{l} \times \vec{B} = -dy \cdot B_0 \cdot (-a\vec{x}) = dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x}$$

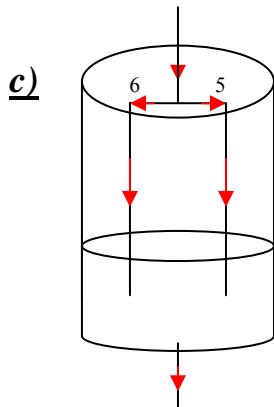
Por lo que:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{4} \int_L^0 dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = -\frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot \vec{a}_x}{4} N$$

Como se observa, las fuerzas sobre el conductor 5 y el 6 se compensan, ya que son de sentido contrario, por lo que la espira NO GIRA.

El diagrama de fuerzas sería:





El estudio de esta espira se puede realizar a partir de los resultados obtenidos en a).

En los conductores verticales no van a aparecer fuerzas.

Las expresiones de las fuerzas que aparecen sobre 5 y 6 son exactamente las mismas que en 5 y 6 de a):

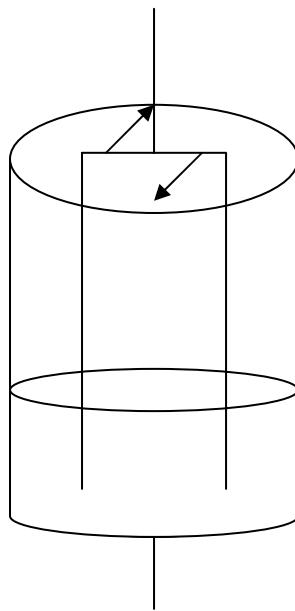
Conductor 5:

$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = \frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot \vec{a}_x}{4} N$$

Conductor 6:

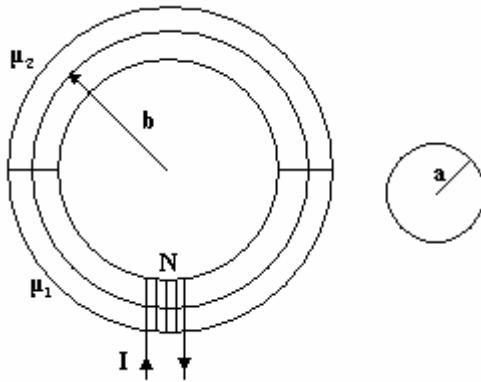
$$\vec{F}_m = \frac{I}{2} \int_0^{-\frac{L}{2}} dy \cdot B_0 \cdot a\vec{x} = -\frac{I \cdot B_0 \cdot L \cdot \vec{a}_x}{4} N$$

Tener en cuenta que el mercurio es un conductor líquido, es decir va a permitir que la corriente circule por él y a la vez no va a influenciar sobre el movimiento de la espira.
El diagrama de fuerzas sería:



Como se puede observar esta espira **SÍ GIRA.**

Problema 12



Resolveremos el problema sabiendo que el sistema es un circuito magnético, para ello primero calcularemos las reluctancias de ambos materiales que llamaremos R_1 y R_2 para el material μ_1 y μ_2 respectivamente. La reluctancia viene dada por la longitud del material partida del producto de su permeabilidad y su sección (para el caso de un toroide), por tanto:

$$R_1 = \frac{b}{\mu_1 a^2} \quad R_2 = \frac{b}{\mu_2 a^2}$$

Como ambas reluctancias están colocadas en serie (el flujo que las atraviesa es el mismo, esto es así ya que $b \gg a$ y a las condiciones de continuidad), la reluctancia total del circuito será la suma de ambas reluctancias y por tanto el flujo por el circuito será:

$$\Phi = \frac{NI\mu_1\mu_2a^2}{(\mu_1 + \mu_2)b}$$

Por otro lado como el flujo a través del toroide es constante también la densidad de flujo magnético lo será, y además al ser la sección del toroide constante, tenemos que:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B \cdot ds = B \int ds = B \pi a^2$$

Y finalmente tenemos:

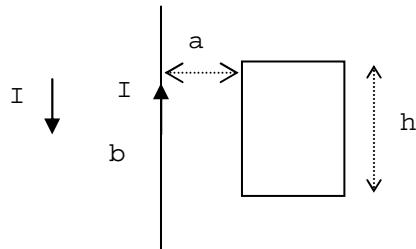
$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{NI\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)\pi b} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{H}_1 = \vec{B}_1 / \mu_1 = \frac{NI\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)\pi b} \vec{a}_\phi$$

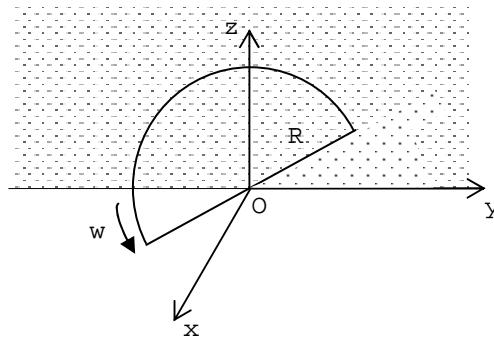
$$\vec{H}_2 = \vec{B}_2 / \mu_2 = \frac{NI\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\pi b} \vec{a}_\phi$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electromagnetismo

- 1) Calcular la fuerza electromotriz inducida en una espira por un par de hilos paralelos de gran longitud, por los que circula una corriente igual pero con sentidos contrarios.

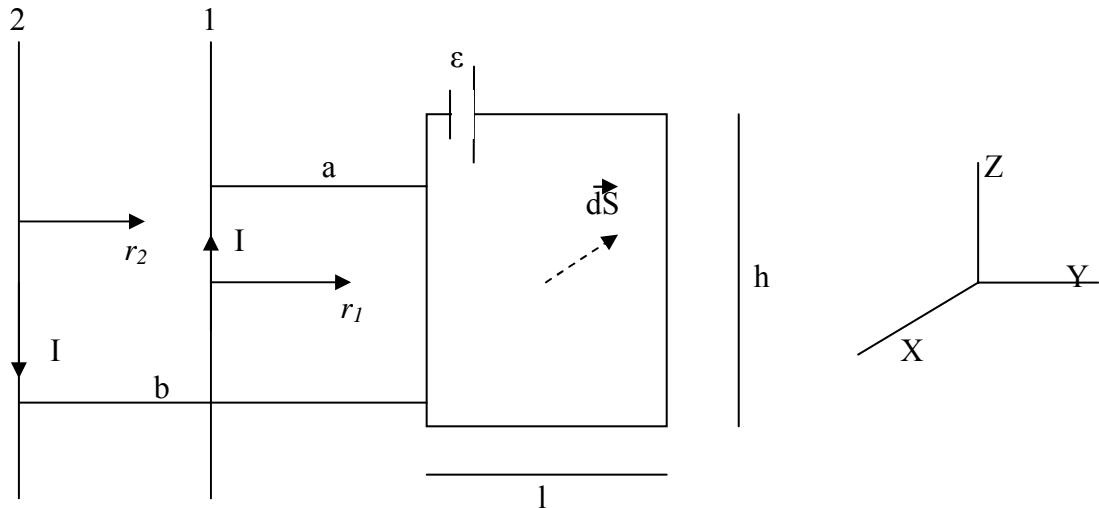


- 2) En un semiespacio $z > 0$ existe un campo magnético, $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$, constante. Un circuito plano, contenido en el plano $x=0$, está formado por una semicircunferencia de radio R y centro O , limitada por un diámetro, construidos con un material conductor homogéneo, cuya resistencia por unidad de longitud es $\rho = \frac{l}{2 + \pi}$. Este circuito gira en su plano alrededor de O con velocidad angular constante, $\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \vec{a}_x$ (rad/s), estando inicialmente el diámetro coincidiendo con el eje X , y la semicircunferencia en la región $z > 0$. Calcular:
- El flujo del campo magnético $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$ a través del circuito. Representar gráficamente su valor en función del tiempo.
 - La fuerza electromotriz inducida en el circuito.
 - La intensidad de la corriente eléctrica que circula por el circuito, indicando su sentido, en función del tiempo. Representarla gráficamente, tomando como sentido positivo el contrario al de las agujas del reloj.
 - La fuerza que el campo magnético $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$ ejerce sobre el circuito.



Problema 1

Calcular la fuerza electromotriz inducida en una espira por un par de hilos paralelos de gran longitud, por los que circula una corriente igual pero con sentidos contrarios.



$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} ; \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 ; \quad \phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 , \quad \phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (-\vec{a}_x) \quad \text{(Dedujimos las direcciones y sentidos de los campos}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (\vec{a}_x) \quad \text{atendiendo a los sentidos de las corrientes)}$$

$$\phi_1 = \int_a^{a+l} \frac{-\mu_0 I}{2\pi r_1} (-h \cdot dr_1) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{2\pi r_1} \ln\left(\frac{a+l}{a}\right); \quad \phi_2 = \int_b^{b+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} (-h \cdot dr_2) = \frac{-\mu_0 \cdot I \cdot h}{2\pi r_1} \ln\left(\frac{b+l}{b}\right)$$

$$d\vec{S} = h dr (-\vec{a}_x)$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b(a+l)}{a(b+l)}\right)$$

$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{-\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b(a+l)}{a(b+l)}\right) \frac{dI}{dt}$$

Problema 2

a) $\omega = \frac{\pi}{2} (\text{rad/s})$, y también $\omega = \frac{\alpha}{t}$,

siendo α el ángulo recorrido en función del tiempo t como se indica en el dibujo :

La formula del flujo es:

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s B \cdot ds = B \int_s ds = B \cdot S \quad \text{siendo } S \text{ la}$$

superficie del circuito atravesada por el campo.

Se considera que B es paralelo a ds , por lo que su producto escalar es igual al producto de sus módulos.

Además, como B tiene modulo constante lo podemos sacar de la integral.

La superficie S en cada instante será, aplicando una regla de 3 con una circunferencia (ángulo 2π)

$$S = \frac{\pi - \alpha}{2} \cdot R^2, \text{ entonces sustituyendo: } \phi = \frac{\pi - \alpha}{2} \cdot BR^2 \text{ (Wb)}$$

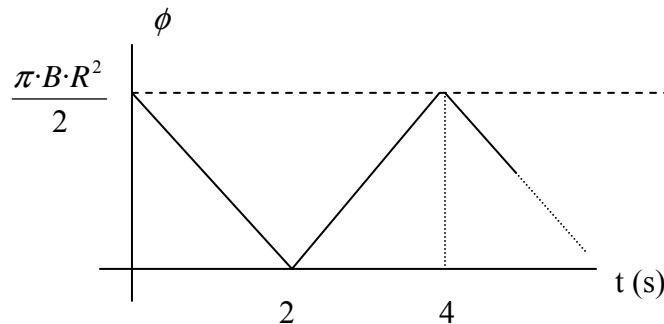
$$\text{De la formula anterior de } \omega = \frac{\alpha}{t}, \text{ obtenemos } \alpha = \omega t, \text{ y sustituyendo } \omega, \alpha = \frac{\pi \cdot t}{2}$$

Entonces $\phi = \frac{\pi(2-t)}{4} \cdot BR^2$, con $t \in [0,2]$ (estos valores de t son para completar media vuelta, es decir, que la espira salga del campo.)

A partir de $t = 0$, instante en el que la espira se encuentra completamente dentro del campo, el desplazamiento la va sacando de él, por lo que la expresión del flujo es decreciente hasta $t = 2$, instante en el que la espira está completamente fuera del campo (y el flujo se anula).

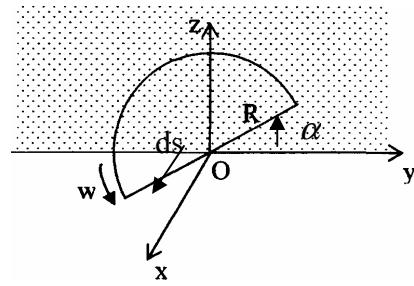
Para $t \in [2,4]$ se obtiene una expresión similar, pero el flujo es ahora creciente, dado que la espira va entrando en el campo.

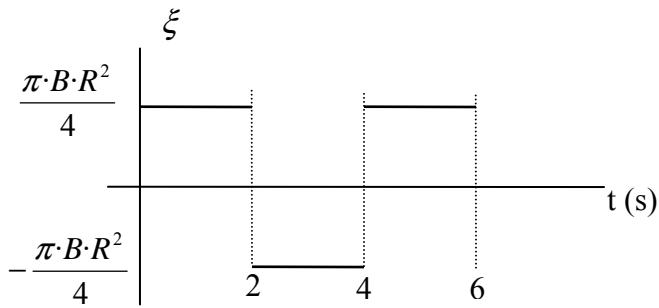
En adelante la grafica será periódica.



b) La expresión de la fuerza electromotriz inducida viene dada por la variación del flujo respecto al tiempo:

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi \cdot B \cdot R^2}{4} \text{ (V)}$$



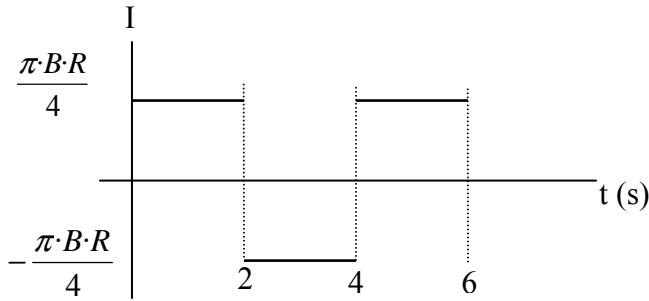


c) La corriente viene dada por la ley de Ohm, que dice que la intensidad es la relación entre la tensión y la resistencia del conductor, siendo la tensión la f.e.m:

$I = \frac{\xi}{\mathfrak{R}}$, y la resistencia es $\mathfrak{R} = \rho \cdot (\pi R + 2R) = R$, siendo $(\pi R + 2R)$ la longitud de la espira (πR es la longitud de la semicircunferencia y $2R$ el diámetro)

Con lo que queda:

$$I = \frac{\frac{\pi \cdot B \cdot R^2}{4}}{\frac{1}{2+\pi} \cdot (\pi R + 2R)} = \frac{\pi \cdot B \cdot R}{4} \quad (\text{A})$$



d) Dividimos el camino de la espira en 2 partes, a la semicircunferencia la llamaremos C_1 , y al diámetro lo llamaremos C_2 .

La formula de la fuerza magnética es:

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = I \left[\int_{C_1} d\vec{l} \times \vec{B} + \int_{C_2} d\vec{l} \times \vec{B} \right]$$

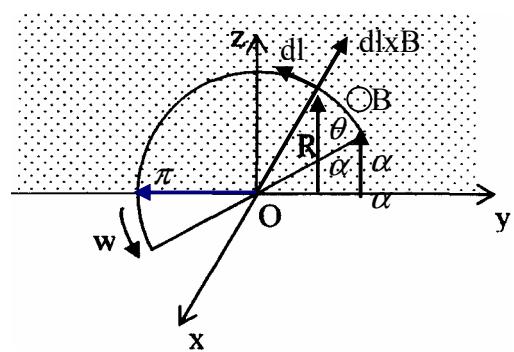
- En C_1 ,

Cuando $0 < \alpha < \pi$,

pasando a coordenadas polares :

$d\vec{l} \times \vec{B} = dl \cdot B \cdot \sin 90^\circ \cdot \vec{a}_r$ (en el sentido que obtenemos mediante la regla de la mano derecha)

$$\vec{a}_r = \cos \theta \cdot \vec{a}_y + \sin \theta \cdot \vec{a}_z$$



$$dl = R \cdot d\theta \text{ (Utilizando la formula del arco)}$$

Con lo que nos queda, sustituyendo:

$$d\vec{l} \cdot \vec{x} \cdot \vec{B} = B \cdot R (\cos \theta \cdot \vec{a}_y + \sin \theta \cdot \vec{a}_z) \cdot d\theta$$

y por otro lado tenemos que $\theta \in [\alpha, \pi]$, como vemos en el dibujo.

$$\vec{F}_1 = \int_{C_1} d\vec{l} \cdot \vec{x} \cdot \vec{B} = \int_{\alpha}^{\pi} B \cdot R (\cos \theta \cdot \vec{a}_y + \sin \theta \cdot \vec{a}_z) \cdot d\theta = B \cdot R \left[\sin \theta \cdot \vec{a}_y - \cos \theta \cdot \vec{a}_z \right]_{\alpha}^{\pi} = 2B \cdot R (-\sin \alpha \cdot \vec{a}_y + \cos \alpha \cdot \vec{a}_z)$$

Cuando $\pi < \alpha < 2\pi$, la semicircunferencia está subiendo, y tendremos que:
 $\theta \in [0, \alpha - \pi]$

- En C_2 :

Hay que recordar que el campo B solo existe para $y > 0$, por lo tanto, cuando $\alpha = 0$, la línea del diámetro se encuentra sobre y , y la fuerza es nula.

En otro caso:

$$d\vec{l} \cdot \vec{x} \cdot \vec{B} = dl \cdot B \cdot \sin(90^\circ) [\sin \alpha \cdot \vec{a}_y - \cos \alpha \cdot \vec{a}_z]$$

Ahora, cuando $0 < \alpha < \pi$, los límites de integración son $l \in [0, R]$,

Por lo que la integral queda:

$$\vec{F}_2 = \int_{C_2} d\vec{l} \cdot \vec{x} \cdot \vec{B} = \int_0^R dl \cdot B (\sin \alpha \cdot \vec{a}_y - \cos \alpha \cdot \vec{a}_z) = B \cdot R (\sin \alpha \cdot \vec{a}_y - \cos \alpha \cdot \vec{a}_z)$$

Cuando $2\pi > \alpha > \pi$, tenemos la misma situación pero a la inversa, y la fuerza será igual pero de signo contrario, ya que el diferencial de l irá en sentido contrario.

Sumando:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = I \cdot B \cdot R (-\sin \alpha \cdot \vec{a}_y + \cos \alpha \cdot \vec{a}_z) (N)$$

