Ciencias de la Computación I

Teoría de Grafos

Eduardo Contrera Schneider

Universidad de la Frontera

7 de noviembre de 2016

Los puentes de Königsberg

En el año 1736, el célebre matemático alemán Leonhard Euler publicó la solución a un problema que daría inicio a la teoría de Grafos. Es el llamado *problema de los puentes de Königsberg*, ciudad rusa (prusiana en ese entonces) ubicada al norte de Polonia.

Problema de los puentes de Königsberg

Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

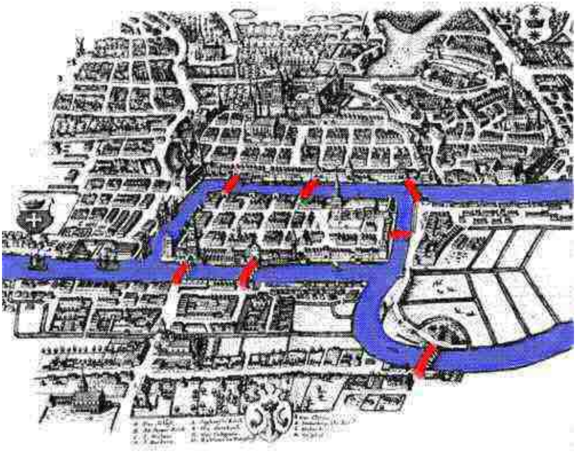

Figura: Los puentes de Königsberg

Grafos

Grafo

Sea V un conjunto finito no vacío, y sea $E \subseteq V \times V$. El par (V, E) es un grafo dirigido (sobre V), o digrafo, donde V es el conjunto de vértices, o nodos y E es su conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, E)$ para denotar tal digrafo.

En los grafos dirigidos, las aristas poseen dirección. Para cualquier arista (a, b) con $a, b \in V$, se dice que la arista es incidente con los vértices b, c; b es adyacente hacia c, mientras que c es adyancente desde b. Además, el vértice b es el origen, o fuente, de la arista (a, b) y el vértice b es el término, o vértice terminal.
Un par del estilo (a, a) es llamado lazo o bucle.

Grafo no dirigido

Cuando no importa la dirección de las aristas, consideramos el conjunto E como subconjunto de $V_2 = \{\{x, y\}|x, y \in V\}$ el conjunto de todos los subconjuntos de dos elementos de V. Una clase especial de grafos son los aquellos llamados completos.

Grafo Completo

El grafo completo K_n es el grafo de n vértices que contiene todas las aristas posibles, es decir, para cada par de vértices existe una arista que los une. Un grafo completo de n tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Caminos

Camino

Sean x, y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Un camino $x - y$ en G es una sucesión alternada finita (sin lazos)

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \ldots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

de vértices y aristas de G, que comienza en el vértice x y termina en el vértice y y que contiene las n aristas $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ donde $1 \leq i \leq n$.

La longitud de un camino está dada por la cantidad de aristas n que lo componen. Si $n = 0$ el camino se denomina trivial. Si $n > 1$ y $x = y$ se denomina *camino cerrado*. Para $n > 1$ y $x \neq y$ el camino es *abierto*.

Consideremos ahora un camino $x - y$ en un grafo no dirigido $G = (V, E)$.

1. Si no se repite ninguna arista en el camino $x - y$, entonces el camino es un *recorrido* $x - y$. Un recorrido $x - y$ cerrado es un *circuito*.
2. Cuando ningún vértice del camino $x - y$ se presenta más de una vez, el camino es un *camino simple* $x - y$. El término *ciclo* se usa para describir un camino simple cerrado $x - x$.

Cuando tratemos con circuitos, supondremos siempre la existencia de al menos una arista, entonces el circuito es un lazo (y el grafo tiene entonces lazos). Los circuitos con dos aristas son multigrafos, concepto que definiremos más adelante.
El término ciclo implicará siempre la presencia de al menos tres aristas distintas (del grafo).

Conexidad

Una propiedad interesante y muy requerida en la modelación de estructuras distintas con grafos es la siguiente:

Conexidad

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Decimos que G es *conexo* si existe un camino simple entre cualesquiera dos vértices distintos de G. Un grafo que no es conexo se dice *disconexo*.

Grafo no dirigido asociado

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Su grafo no dirigido asociado es el grafo obtenido de G si no se tienen en cuenta las direcciones de las aristas. Si se obtiene más de una arista no dirigida de una par de vértices distinto de G, entonces sólo una de estas aristas se dibuja en el grafo no dirigido asociado. Cuando este grafo asociado es conexo, consideramos que G es conexo.

Matrices de Información

Para poder manejar y guardar información sobre el grafo existen dos matrices muy especiales [3]. La matriz de incidencia de un grafo G se define como $A = (a_{v,e})_{v \in V(G), e \in E(G)}$ donde

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1 & si \quad v \in e \\ 0 & si \quad v \notin e \end{cases}$$

La matriz de adyacencia de un grafo G es una matriz cuyos elementos son 0 ó 1, definida como $A = (a_{i,j})_{i,j \in V(G)}$ tal que

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad \{i,j\} \in E(G) \\ 0 & si \quad \{i,j\} \notin E(G) \end{cases}$$