Métodos Iterativos

Métodos Numéricos

Prof. Juan Alfredo Gómez

Conferencia 16

Conferencia 16

Metodología

Transformación a problema de punto fijo

Para resolver un sistema $Ax = b$ con una técnica iterativa se reformula el problema como la búsqueda del punto fijo de una aplicación lineal

$$x = Tx + c$$

y se aplica el algoritmo:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Ejemplos

Si queremos resolver $Ax = b$ podemos usar

$$x = (A + I)x - b$$

ó en caso $A = K + S$ con $det(K) \neq 0$, también

$$x = -K^{-1}Sx + K^{-1}b$$

Formulación Matricial

Notación:

Consideremos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como la siguiente suma $A = D + L + U$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación

Si $a_{ii} \neq 0,\ \forall i = 1 \ldots n$ entonces existen D^{-1} y $(D+L)^{-1}$.

Formulación Matricial

Fórmula utilizada en el método de Jacobi

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1 \dots n$$

De manera equivalente

$$a_{ii} x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, i = 1 \dots n$$

En forma matricial

$$Dx^k = -Lx^{(k-1)} - Ux^{(k-1)} + b = -(L+U)x^{(k-1)} + b$$

Iteración de punto fijo (Método de Jacobi)

$$x^k = T_J x^{(k-1)} + c_J \dashrightarrow \begin{array}{rcl} T_J & = & -D^{-1}(L+U) \\ c_J & = & D^{-1}b \end{array}$$

Formulación Matricial

Fórmula utilizada en el método de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1 \dots n$$

De manera equivalente

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, i = 1 \dots n$$

En forma matricial

$$(D + L)x^k = -Ux^{(k-1)} + b$$

Iteración de punto fijo (Método de Gauss-Seidel)

$$x^k = T_{GS} x^{(k-1)} + c_{GS} \dashrightarrow \begin{array}{rcl} T_{GS} & = & -(D+L)^{-1} U \\ c_{GS} & = & (D+L)^{-1} b \end{array}$$

Convergencia para iteraciones de punto fijo lineales

Teorema (Caracterización de la convergencia)

La sucesión $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{n}$ generada por la iteración de punto fijo

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k \geq 1$$

converge para todo punto inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ a la única solución de $x = Tx+c$ si y solo si $\rho(T) < 1$.

Proposición (Cotas de proximidad de la solución)

Si $||T|| < 1$ para alguna norma matricial inducida, entonces la sucesión $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k \geq 1$ converge desde todo punto inicial $x^{(0)}$ a la única solución de $x = Tx + c$ y se cumple que:

$$(i) \quad ||x^{(k)} - x|| \leq ||T||^k ||x^{(0)} - x||$$

$$(ii) \quad ||x^{(k)} - x|| \leq \frac{||T||^k}{1 - ||T||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||$$

Convergencia en el caso de Jacobi y Gauss-Seidel

Teorema

Si A tiene la diagonal estrictamente dominante, entonces los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen siempre.

Observaciones (para $Ax^* = b$)

Es deseable que $\rho(T) < 1$ sea pequeño pues

$$||x^{(k)} - x^*|| \approx [\rho(T)]^k ||x^{(0)} - x^*||$$

Teorema (Caso en que Gauss-Seidel es siempre mejor)

Si $a_{ik} \leq 0, \forall i \neq k$ y $a_{ii} > 0, i = 1 \ldots n$, entonces una y solo una de las siguientes condiciones se cumple:

a) $0 \leq \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$
b) $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$
c) $\rho(T_J) = \rho(T_{GS}) = 0$
d) $\rho(T_J) = \rho(T_{GS}) = 1$

Ejemplo

A con diagonal estrictamente dominante

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Matriz del Método de Jacobi

$$T_J = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1000 & -0.2000 & 0.0000 \\ 0.0909 & 0.0000 & 0.0909 & -0.2727 \\ -0.2000 & 0.1000 & 0.0000 & 0.1000 \\ 0.0000 & -0.3750 & 0.1250 & 0.0000 \end{bmatrix} \; ; \quad |\lambda(T_J)| = \begin{bmatrix} 0.4264 \\ 0.1040 \\ 0.1860 \\ 0.3445 \end{bmatrix}$$

Matriz del Método de Gauss-Seidel

$$T_{GS} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1000 & -0.2000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0091 & 0.0727 & -0.2727 \\ 0.0000 & -0.0191 & 0.0473 & 0.0727 \\ 0.0000 & -0.0058 & -0.0214 & 0.1114 \end{bmatrix} \; ; \quad |\lambda(T_{GS})| = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0898 \\ 0.0898 \end{bmatrix}$$

Criterio de convergencia

$$0 < 0.0898 = \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) = 0.4264 < 1$$

Ejemplo

Criterio de convergencia

$$0 < 0.0898 = \rho(T_{GS}) < \rho(T_J) = 0.4264 < 1$$

Velocidad aproximada de convergencia

$$||x^{(k)} - x^*|| \approx [\rho(T)]^k ||x^{(0)} - x^*||$$

Iteraciones

k	$\|\|x_J^{(k)} - x^*\|\|$	$[\rho(T_J)]^k \|\|x^{(0)} - x^*\|\|$	$\|\|x_{GS}^{(k)} - x^*\|\|$	$[\rho(T_{GS})]^k \|\|x^{(0)} - x^*\|\|$
0	2.6458	0.0000	2.6458	0.0000
1	1.0050	1.1282	0.5310	0.2376
2	0.3661	0.4811	0.0522	0.0213
3	0.1641	0.2052	0.0081	0.0019
4	0.0638	0.0875	0.0010	0.0002
5	0.0285	0.0373	0.0001	0.0000
6	0.0115	0.0159	0.0000	0.0000
7	0.0051	0.0068	0.0000	0.0000
8	0.0021	0.0029	0.0000	0.0000
9	0.0009	0.0012	0.0000	0.0000
10	0.0004	0.0005	0.0000	0.0000

Aspectos básicos

Definición

Supongamos que $\tilde{x}$ es una solución aproximada del sistema $Ax = b$, donde A es una matriz regular. El vector de residuo asociado a $\tilde{x}$, denotado por $r(\tilde{x})$ se define como:

$$r(\tilde{x}) = b - A\tilde{x}$$

Observaciones

- Evidentemente $\bar{x}$ resuelve el sistema $Ax = b$ si y solo si $r(\bar{x}) = 0$.
- El valor de $r(x^{(k)})$ puede ser utilizado para decidir si $x^{(k)}$ es "suficientemente" correcta.
- En condiciones "normales" un valor pequeño de $r(x^{(k)})$ debe implicar, la cercanía entre $x^{(k)}$ y $\bar{x}$, o sea, en general:

$$||r(x^{(k)})|| \approx 0 \Longrightarrow ||x^{(k)} - \bar{x}|| \approx 0$$

Ejemplo razonable

Sistema con solución $\bar{x}^T = (1, 2, -1, 1)$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\
-x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\
 & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15
\end{array}$$

Iteraciones del Método de Jacobi

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$\|\|x^{(k)} - \bar{x}\|\|$	$\|\|r(x^{(k)})\|\|$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.6458	31.7333
1	0.6000	2.2727	-1.1000	1.8750	1.0050	11.3537
2	1.0473	1.7159	-0.8052	0.8852	0.3661	4.9910
3	0.9326	2.0533	-1.0493	1.1309	0.1641	2.0299
4	1.0152	1.9537	-0.9681	0.9738	0.0638	0.8911
5	0.9890	2.0114	-1.0103	1.0214	0.0285	0.3686
6	1.0032	1.9922	-0.9945	0.9944	0.0115	0.1605
7	0.9981	2.0023	-1.0020	1.0036	0.0051	0.0671
8	1.0006	1.9987	-0.9990	0.9989	0.0021	0.0290
9	0.9997	2.0004	-1.0004	1.0006	0.0009	0.0122
10	1.0001	1.9998	-0.9998	0.9998	0.0004	0.0053

Ejemplo complicado

Sistema lineal con solución $\bar{x}^T = (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

Solución Aproximada $\tilde{x}^T = (3, 0)$

$$r(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{bmatrix}$$

Conclusión

$$||r(\tilde{x})||_\infty = 0.0002; \quad ||\tilde{x} - \bar{x}||_\infty = 2$$

Observaciones

- Las rectas $x_1 + 2x_2 = 3$ y $1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$ son casi paralelas
- El vector $(3, 0)$ pertenece a la primera y está muy cercano a $(3, -0.0001)$ que pertenecea la segunda.

Motivación y definición

Teorema

Supongamos que $\tilde{x}$ aproxima a la solución $\bar{x}$ del sistema $Ax = b$, donde A es una matriz regular, y que $r(\tilde{x})$ es el vector residual asociado. Entonces, para cualquier norma inducida se cumple que:

$$||\bar{x} - \tilde{x}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||r(\tilde{x})||$$

Si $\bar{x} \neq 0$ y $b \neq 0$ tambien se tiene:

$$\frac{||\bar{x} - \tilde{x}||}{||\bar{x}||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \frac{||r(\tilde{x})||}{||b||}$$

Definición

El número de condición de la matriz regular A respecto a la norma $||.||$ se define como

$$K(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

Otras Propiedades

Condicionamiento

Para toda matriz regular se cumple que: $K(A) \geq 1$. A es bien-condicionada si $K(A) \approx 1$ y mal-condicionada si $K(A) \gg 1$.

Teorema

Supongamos que $\tilde{x}$ es la solución del sistema $(A + \Delta A)x = (b + \Delta b)$ y aproxima a la solución $\bar{x}$ del sistema $Ax = b$. Si A es una matriz regular y tal que

$$||\Delta A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$$

entonces se cumple que:

$$\frac{||\bar{x} - \tilde{x}||}{||\bar{x}||} \leq \frac{K(A)||A||}{||A|| - K(A)||\Delta A||} \left(\frac{||\Delta b||}{||b||} + \frac{||\Delta A||}{||A||} \right)$$

Ejemplo

Matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix}$$

Por ende

$$||A||_\infty = 3.001; \quad ||A^{-1}||_\infty = 20000$$

Y

$$K(A) = 3.001 \cdot 20000 = 60002$$

Ejercicios

Considere los siguientes sistemas de ecuaciones

- $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & 4 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -5 \end{cases}$$

1. Calcule las matrices T_J y T_{GS}.
2. Determine si los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.
3. Calcule el número de condición de ambos sistemas.
4. Realice 5 iteraciones y calcule el vector residuo.