Ley de Gauss y Potencial Eléctrico

Material de Apoyo para el Curso de Física II (ICF-190)

LEY DE GAUSS

PROBLEMA RESUELTO 1

Un cascarón esférico de radio a tiene carga total $+Q$ distribuída uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico dentro y fuera del cascarón

Solución

La distribución de carga es de simetría esférica y la densidad de carga está dada por

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{1}$$

donde A es el área del cascarón esférico.

Debido a la geometría del cascarón, campo eléctrico $\vec{E}$ tiene dirección radial y hacia fuera, como muestra la Fig. 1

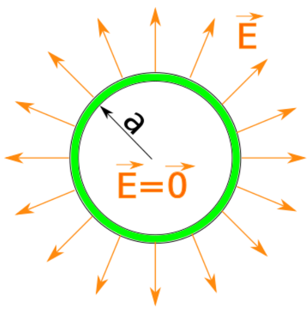


Fig. 1: *Campo eléctrico de un cascarón esférico de radio a.*

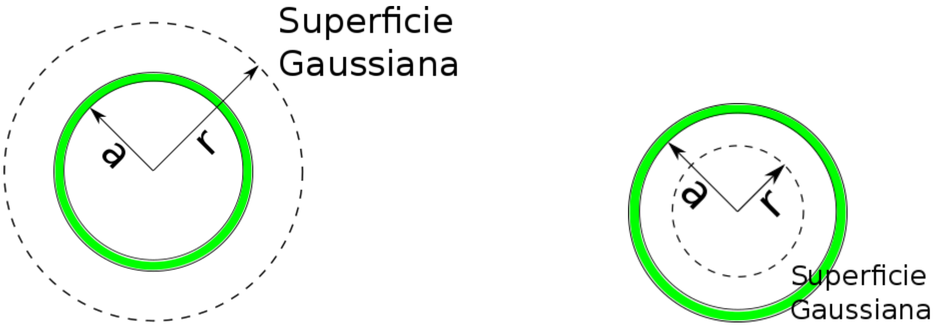
Para resolver, dividiremos el problema en dos regiones $r \leqslant a$ y $r \geqslant a$, y utilizaremos la ley de Gauss dada por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \tag{2}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie gaussiana que estemos considerando.

Caso 1: $r \leqslant a$

Como superficie gaussiana escogemos una esfera de radio $r \leqslant a$



(a) (b)

Fig. 2: *Superficies Gaussianas para calcular el campo eléctrico del cascarón de radio a*

La carga encerrada por la superficie gaussiana es $Q_{enc} = 0$, porque la carga se encuentra sobre la superficie del cascarón esférico. Así, la ecuación de la ley de Gauss nos queda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{0}{\epsilon_0} \tag{3}$$

De esto, concluimos que

$$\vec{E} = \vec{0}, \qquad r \leqslant a \tag{4}$$

Caso 2: $r \geqslant a$.

Para este caso, escogemos una superficie gaussiana que encierre la superficie de carga, como muestra la Fig.**??**. En este caso, la carga encerrada por la superficie gaussiana es toda la carga del cascarón, es decir

$$q_{enc} = Q \tag{5}$$

Como el campo eléctrico va en la misma dirección que el vector normal a la superficie gaussiana, dentro de la integral de la ley de Gauss sólo nos quedan las magnitudes de estas cantidades vectoriales. Además, el campo eléctrico es constante en la superficie, por lo que puede salir de la integral.

Entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6)$$

$$E \oint dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (7)$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (8)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad r \geqslant a \quad (10)$$

Para comprobar que nuestra solución es correcta, recordemos que el campo eléctrico es una función vectorial continua, por lo que el valor $r = a$ debe ser el mismo ya sea con el campo calculado en la caso 1 o en el caso 2.

Así

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r \leqslant R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

PROBLEMA RESUELTO 2

Un cilindro muy largo de radio R tiene una densidad de carga volumétrica uniforme rho. Dentro tiene una cavidad cilíndrica de radio R/3, cuyo eje es paralelo al eje del cilindro cargado. La sección transversal de este cilindro y su cavidad se muestran en la Fig.6

a) Calcule la carga total en un segmento de cilindro de largo L.

b) Calcule la fuerza que ejerce el cilindro con cavidad sobre una partícula con carga $-q$ ubicada como se muestra en la Fig.6.

c) Calcule el campo eléctrico generado en el punto P, ubicado en el eje de la cavidad.

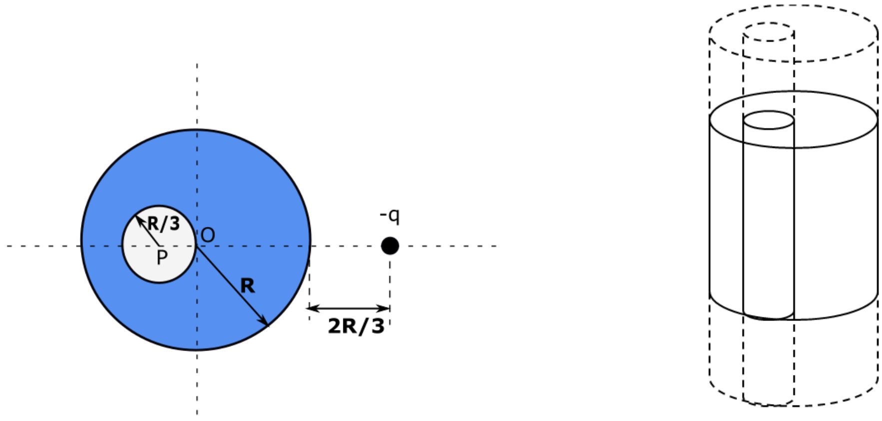
d) Calcule el campo eléctrico en el punto O, ubicado en el eje del cilindro de radio R.

Solución

a) La carga total de un segmento de cilindro de largo L, está dada por

$$Q_{total} = Q - Q'$$

donde Q es la carga del cilindro y Q' es la carga de la cavidad.



(a) (b)

Fig. 3: *Sección transversal del cilindro y de su cavidad*

Calculamos primero la carga total contenida en el cilindro completo

$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r dr d\theta dz = 2\pi\rho \frac{R^2}{2} L \Rightarrow \boxed{Q = \pi R^2 L\rho}$$

Y ahora calculamos la carga encerrada en la cavidad

$$Q' = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R/3} (-\rho) r dr d\theta dz = \pi \frac{R^2}{3} L(-\rho) \Rightarrow \boxed{Q' = -\frac{\pi R^2 L\rho}{9}}$$

Así, la carga total es

$$Q_{total} = Q - Q' = \pi R^2 L\rho \left(1 - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow \boxed{Q_{total} = \frac{8}{9}\pi R^2 L\rho}$$

b) Para calcular la fuerza que ejerce el cilindro con cavidad sobre una partícula con carga $-q$, debemos calcular el campo eléctrico que genera tanto el cilindro como la cavidad en el punto donde se ubica la carga, y utilizando este resultado, calculamos la fuerza que siente la carga.

1) **Campo debido al cilindro**:

Suponemos una superficie gaussiana cilíndrica con su eje en el mismo eje del cilindro, de radio $r > R$, como muestra la figura. Calculamos el campo debido al cilindro utilizando ley de Gauss.

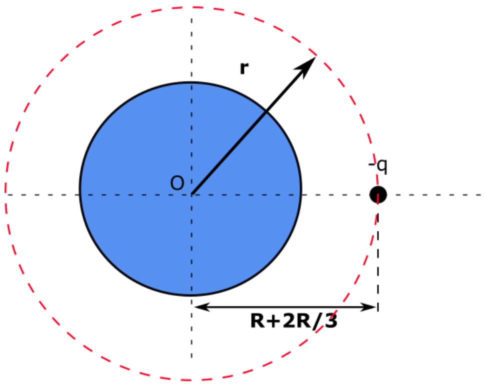


Fig. 4: *Superficie gaussiana respecto al cilindro para calcular el campo eléctrico*

En las tapas del cilindro, el flujo es cero porque el vector normal a la superficie y el vector campo eléctrico son perpendiculares, entonces sólo en el manto del cilindro hay flujo. Así

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ E_1(2\pi r L) &= \frac{\pi R^2 L \rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1(r) = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \quad \hat{r}}$$

2) **Campo debido a la cavidad:**

Nuevamente suponemos una superficie gaussiana cilíndrica, pero esta vez, la superficie estará centrada en el eje de la cavidad, como muestra la Fig.5.

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ E_2(2\pi r L) &= \frac{-\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 L \rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(r) = -\frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \frac{1}{9} \quad \hat{r}}$$

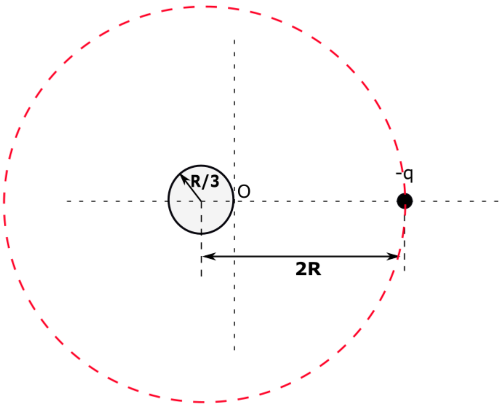


Fig. 5: *Superficie gaussiana respecto al cilindro para calcular el campo eléctrico*

El campo total en la posición de la carga, será la suma de las contribuciones del cilindro y la cavidad en el punto donde se encuentra la carga, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{total} &= \vec{E}_1(\frac{5R}{3}) + \vec{E}_2(2R) \\
&= \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 \frac{5R}{3}}\hat{r} + \left(-\frac{R^2\rho}{18\epsilon_0(2R)}\right) \quad \hat{r} \\
&= \frac{\rho R}{\epsilon_0}\left[\frac{3}{10} - \frac{1}{36}\right] \quad \hat{r} \\
&= \frac{\rho R}{2\epsilon_0}\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{18}\right] \quad \hat{r}
\end{aligned}$$

Asumiendo que la carga se encuentra en el eje x, $\hat{r} = \hat{i}$.

Finalmente, la fuerza que siente la carga es

$$\vec{F} = (-q)\vec{E}_{total}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{q\rho R}{2\epsilon_0}\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{18}\right] \quad \hat{i}}$$

c) Para calcular el campo eléctrico en el punto P, ubicado en el eje de la cavidad, utilizamos los resultados obtenidos en b)

$$\vec{E}_1(r) = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r} \quad \hat{r} \qquad\qquad \vec{E}_2(r) = -\frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r}\frac{1}{9} \quad \hat{r}$$

En el punto P

$$\vec{E}_1(r) = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r}(-\hat{i})$$

Evaluando el campo eléctrico 1 en $R/3$ (posición del punto P respecto al eje del cilindro)

$$\vec{E}_1(r) = \frac{R^2\rho}{6\epsilon_0 r}(-\hat{i})$$

Y evaluando el campo eléctrico 2

$$\vec{E}_2(r) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{E}_{total}(P) &= \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) \\ &= -\frac{\rho R}{6\epsilon_0} \quad \hat{i} + 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{total}(P) = -\frac{\rho R}{6\epsilon_0} \quad \hat{i}}$$

d) Calculamos el campo debido al cilindro y debido a la cavidad en el punto O.

(a) (b)

Fig. 6: *Superficies gaussianas para calcular el campo eléctrico debido al cilindro y la cavidad en el punto O.*

1) Para el cilindro

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

donde $Q = \pi r^2 L\rho$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_1(2\pi r L) &= \frac{\pi r^2 L\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_1(r) &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Evaluando $\vec{E}_1$ en r=0

$$\boxed{\vec{E}_1(0) = 0}$$

2) Para la cavidad

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{Q'_{enc}}{\epsilon_0}$$

donde $Q' = -\frac{\pi R^2 L\rho}{9}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_2(2\pi \frac{R}{3} L) &= -\frac{\pi}{\epsilon_0}\frac{R^2}{9} L\rho \\ \vec{E}_2(r) &= -\frac{R\rho}{6\epsilon_0} \quad \hat{r} \end{aligned}$$

Evaluando $\vec{E}_2$ en el punto O

$$\boxed{\vec{E}_2(0) = -\frac{R\rho}{6\epsilon_0}} \quad \hat{r}$$

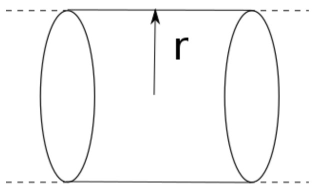
Así, el campo total en el punto O es

$$\begin{aligned} \vec{E}_{total}(0) &= \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) \\ &= 0 - \frac{R\rho}{6\epsilon_0} \quad \hat{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{total}(0) = -\frac{R\rho}{6\epsilon_0} \quad \hat{r}}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1

Considere un cilindro infinito cargado de radio R, como muestra la figura. La densidad de carga del cilindro está dada por $\rho(r) = br \;\; r < R$, donde r es la distancia desde el eje del cilindro y b es una constante. Encuentre el campo eléctrico debido a esta distribución en todo punto del espacio.



Solución

Como la distribución define dos regiones del espacio, utilizamos en cada una de estas regiones la Ley de Gauss.

Para la región $r \leqslant R$, escogemos un cilindro de radio r y largo l. Con esto, calculamos el flujo que atraviesa a nuestra sección gaussiana. En este caso, sólo tendremos flujo por el manto del cilindro y no en las tapas, debido a que en estas últimas, el vector campo eléctrico es perpendicular al vector normal a la superficie gaussiana. Entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(2\pi rl) \tag{11}$$

Como la densidad de carga no es uniforme, se debe calcular la carga encerrada por la superficie gaussiana.

$$Q_{enc} = \int_0^r \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dz dr = \frac{2\pi lbr^3}{3} \tag{12}$$

Así, con y , la ley de Gauss nos queda

$$E(2\pi rl) = \frac{2\pi lbr^3}{3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{br^2}{3\epsilon_0}\hat{r} \qquad r \leqslant R \tag{13}$$

Para la región $r \geqslant R$, escogemos un cilindro de radio r y longitud l. Nuevamente, sólo el manto del cilindro aportará en la ley de Gauss, entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(2\pi rl) \tag{14}$$

Ahora, la carga encerrada por la superficie gaussiana es toda la contenida en el cilindro de radio r y largo l, así

$$Q_{enc} = \int_0^R \int_0^l \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dz dr = \frac{2\pi lbR^3}{3} \tag{15}$$

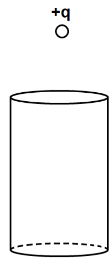
Así, con y , la ley de Gauss nos queda

$$E(2\pi r l) = \frac{2\pi l b R^3}{3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{bR^3}{3\epsilon_0 r}\hat{r} \qquad r \geqslant R \tag{16}$$

Finalmente, tenemos

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{br^2}{3\epsilon_0}\hat{r} & \text{si } r \leqslant R \\ \frac{bR^3}{3\epsilon_0 r}\hat{r} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 2



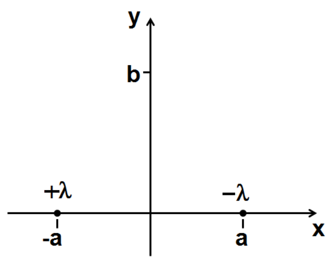
Para el cilindro cerrado que se muestra en la Fig., el campo eléctrico generado por la carga +q produce un flujo de $-17 \quad Nm^2/C$ en la tapa de arriba y un flujo de $+8 \quad Nm^2/C$ en la tapa de abajo. Encuentre el flujo en el manto del cilindro.

Solución

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{total}} &= \Phi_{\text{tapa sup}} + \Phi_{\text{tapa inf}} + \Phi_{\text{manto}} = 0 \\ \Phi_{\text{manto}} &= -\Phi_{\text{tapa sup}} - \Phi_{\text{tapa inf}} \\ &= (17-8)\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}} \\ &= 9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}} \end{aligned}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 3

Dos líneas infinitas paralelas y cargadas que se muestran saliendo de la página, paralelas al eje z, están separadas una distancia 2a, como muestra la Fig.. La línea de la izquierda tiene una densidad lineal de carga positiva $+\lambda$ y la otra tiene una densidad lineal de carga negativa $-\lambda$. Encuentre el campo eléctrico que producen ambas líneas en el punto (a,b).



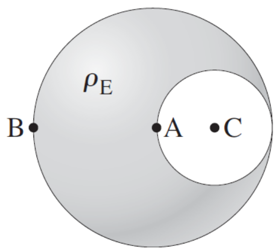
Solución

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= Q_{\text{encerrada}} = \lambda L \\ \epsilon_0 E 2\pi r L &= \lambda L \\ \vec{\mathbf{E}} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\left(4a^2+b^2\right)}\left[2a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}\right] \\ \vec{\mathbf{E}}_2 &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b}\hat{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{2a}{4a^2+b^2}\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{b}{4a^2+b^2} - \frac{1}{b}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2+b^2}\left[2a\hat{\mathbf{i}} - \frac{4a^2}{b}\hat{\mathbf{j}}\right]\end{aligned}$$

PROBLEMA DESAFIO 1.1

Una esfera de radio r_0 tiene una densidad de carga volumétrica rho. Dentro de la esfera se perfora una cavidad esférica de radio $r_0/2$ y se deja hueca, como se muestra en la figura. Los puntos A y C están en el centro de sus respectivas esferas. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos A y B. Considere que la densidad de carga de la cavidad es $-\rho$.



PROBLEMA DESAFIO 1.2

Dos largas placas planas de metal están separadas una distancia que es muy pequeña comparada con su largo y su ancho. A los conductores se les imparten cargas opuestas con densidad de carga uniforme $\pm\sigma$. Ignore los efectos de borde y con base en la ley de Gauss demuestre

a) que para puntos lejanos de los bordes el campo eléctrico entre las placas es $E = \sigma/\epsilon_0$

b) que en cualquier lado afuera de las placas el campo eléctrico es cero.

c) ¿Cómo cambiarían sus resultados si las dos placas fueran no conductoras?

POTENCIAL ELÉCTRICO

PROBLEMA RESUELTO 1

Un cáscarón esférico grueso de radio interno a y radio externo b, tiene una densidad volumétrica de carga $\rho(r) = C/r^2$, donde $C > 0$ es una constante. Si se considera que $V(\infty) = 0$, determine el potencial en el centro del cascarón.

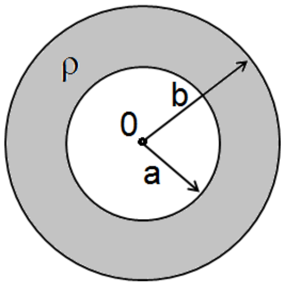


Fig. 7: *Cascarón esférico con densidad de carga $\rho(r) = C/r^2$.*

Solución

Para resolver este problema primero debemos obtener el campo eléctrico en cada región determinada por el cascarón. Para obtener el campo utilizaremos la Ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \tag{17}$$

donde Q_{enc} es la carga encerrada por la superficie gaussiana que estemos considerando.

Región I, donde $r \geqslant b$:

$$Q_{enc} = 4\pi \int_a^b \rho(r) r^2 dr = 4\pi \int_a^b \frac{C}{\cancel{r^2}} \cancel{r^2} dr = 4\pi C(b-a) \tag{18}$$

(note que, en este caso, la superficie gaussiana encierra toda la carga del cascarón).

Por otro lado

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint dS = E 4\pi r^2, \tag{19}$$

donde $\oint dS$ es el área de la superficie gaussiana y r su radio.

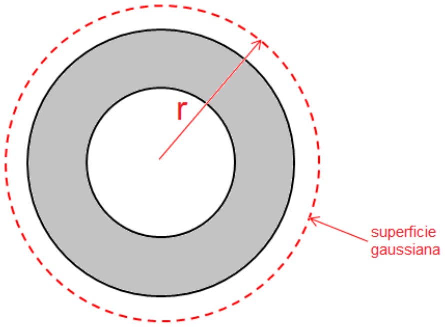


Fig. 8: *Superficie gaussiana de radio $r > b$, que encierra toda la carga del cascarón.*

Reemplazando (18) y (19) en (17) obtenemos

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}(b-a), \tag{20}$$

es decir el módulo del campo eléctrico es

$$E(r) = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}, \tag{21}$$

y como su dirección es radial, lo escribimos como vector y usamos el subíndice I para indicar la región

$$\vec{E}_I(r) = \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2}\ \hat{r}, \tag{22}$$

Región II, $a \leqslant r \leqslant b$:

$$Q'_{enc} = 4\pi \int_a^r \rho(r) r'^2 dr' = 4\pi \int_a^r \frac{C}{\cancel{r'^2}} \cancel{r'^2} dr' = 4\pi\rho(r-a). \tag{23}$$

(note que utilizamos r' para no confundirla con r que es el radio de la superficie gaussiana).

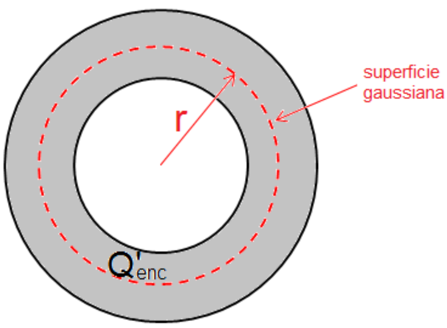


Fig. 9: *Superficie gaussiana de radio $r < b$, que encierra una carga Q'_{enc}.*

Por lo tanto obtenemos que

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi C}{\epsilon_0}(r-a), \tag{24}$$

es decir

$$\vec{E}_{II}(r) = \frac{C(r-a)}{\epsilon_0\, r^2}\,\hat{r}, \tag{25}$$

Región III, $r \leqslant a$:

$Q_{enc} = 0$

Por lo tanto el campo eléctrico $\vec{E}_{III}(r)$ en esta región es cero.

Para obtener el potencial en el punto 0, utilizamos la expresión

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot dr\hat{r}, \tag{26}$$

es decir,

$$V(0) = -\int_{\infty}^{0} \vec{E} \cdot dr\hat{r} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E_I} \cdot dr\hat{r} - \int_{b}^{a} \overrightarrow{E_{II}} \cdot dr\hat{r} - \int_{a}^{0} \overrightarrow{E_{III}} \cdot dr\hat{r}. \tag{27}$$

Ahora resolvemos cada una de las integrales

$$V(0) = -\int_{\infty}^{b} \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, r^2} dr - \int_{b}^{a} \frac{C(r-a)}{\epsilon_0\, r^2} dr - \int_{a}^{0} 0\, dr. \tag{28}$$

Resolviendo

$$V(0) = \left[\frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, b}\right] - \left[\frac{C}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{C(b-a)}{\epsilon_0\, b}\right] - [0] \tag{29}$$

Por lo tanto

$$V(0) = \frac{C}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{30}$$

PROBLEMA RESUELTO 2

Una varilla que se ubica en el eje x entre $x = 0$ y $x = L$, tiene una distribución lineal de carga no uniforme $\lambda = Ax$. Encuentre el potencial eléctrico en el punto P, que se ubica en el eje x negativo a una distancia a del origen del sistema coordenado.

Solución

El potencial eléctrico dV debido a un elemento de carga dq está dado por

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \tag{31}$$

donde $dq = \lambda(x)dx = Axdx$. De acuerdo con esto el potencial eléctrico que produce la varilla en el punto P es

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int_0^L \frac{\lambda(x)}{x+a} dx = k_e A \int_0^L \frac{x}{x+a} dx = k_e A \left[x - a \log|x+a| \right]_0^L \quad . \tag{32}$$

Por lo tanto el potencial en el punto P es

$$V = k_e A \left(L - a \log\left(\frac{L}{a} + 1 \right) \right) \quad . \tag{33}$$

Notar que si se considera $r = x$, entonces la integral debe ir desde el valor a hasta el valor $a + L$ y en consecuencia $\lambda(x) = A(x - a)$. De este modo se obtiene

$$V = k_e \int_a^{L+a} \frac{\lambda(x)}{x} dx = k_e A \int_a^{L+a} \frac{x-a}{x} dx = k_e A \int_a^{L+a} \left(1 - \frac{a}{x}\right) dx = k_e A \left(x - a \log|x| \right)_a^{L+a} \quad . \tag{34}$$

Y obtenemos el mismo resultado

$$V = k_e A \left(L - a \log\left(\frac{L}{a} + 1 \right) \right) \quad . \tag{35}$$

PROBLEMA SEMI-RESUELTO 1

Una varilla cargada uniformemente, tiene una carga Q y ha sido doblada de modo que forma un semicírculo de radio R. Encuentre el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta el centro del semicírculo.

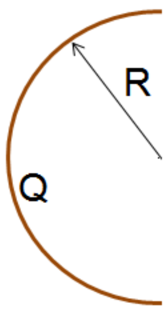


Fig. 10: *Semicírculo de radio R y carga Q.*

Solución

Para obtener trabajo que hace un agente externo para traer una carga q desde infinito al centro del semicírculo debemos utilizar:

$$W_{\infty \rightarrow centro} = \Delta U = q\Delta V = q(V_{centro} - V(\infty)) \tag{36}$$

Obtenemos el potencial en el centro integrando sobre el semicírculo:

$$V_{centro} = \int K_e \frac{dq}{R} = K_e \int_0^{\pi} \left(\frac{Q}{\pi R}\right) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} d\theta = K_e \frac{Q}{R} \tag{37}$$

donde

$$dq = \lambda dl = \left(\frac{Q}{\pi R}\right) R d\theta. \tag{38}$$

Por lo tanto

$$W_{\infty \rightarrow centro} = K_e \frac{q\,Q}{R} \tag{39}$$

PROBLEMA DESAFIO 2.1

Un aro cargado uniformemente de radio R, tiene una carga Q. Encuentre el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta el centro del aro. Compare este resultado con el obtenido en el Problema semi-resuelto 2, también compare con el trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde el infinito hasta una distacia R de una carga Q.

PROBLEMA DESAFIO 2.2

Un cilindro sólido de longitud infinita tiene un radio y una densidad volumétrica de carga $\rho = Ar$, donde $A > 0$ es una constante. Encuentre el trabajo que hace el campo eléctrico producido por el cilindro, para llevar una carga q desde una distancia $2R$ hasta una distancia $4R$, ambas respecto del centro de cilindro.