Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

Departamento de Matemática y Est.

Cálculo Multivariable (IME186) - 2014

Problemas Propuestos

Integrales múltiples, línea y superficie

1. Sea $R_{xy} = \int_2^{\sqrt{2}/2} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} xydydx$
   a) Bosqueje la región de integración.
   b) Invierta el orden de integración.
   c) Calcule R_{xy} en coordenadas rectangulares o polares.

2. Calcule la integral iterada: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}dxdy$

3. Exprese como una sola integral iterada y halle su valor
$$\int_1^2 \int_1^y \frac{\ln x}{x}dxdy + \int_2^4 \int_{y/2}^2 \frac{\ln x}{x}dxdy$$

4. Calcule $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$, donde D es el triángulo determinado por la recta $x+y=2$ y los ejes coordenados.

5. Calcule $\iint_R (x+y)^2 e^{x-y}dxdy$ donde R es la región acotada por $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=1$.

6. Halle $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}dydx$

7. Sea $R_{yx} = \int_0^4 \int_{y/4}^{\sqrt{y}} (x+y)\, dxdy$.
   a) Invierta el orden de integración.
   b) Exprese R_{yx} como una integral triple.
   c) Grafique el dominio de integración

8. Sea $R_{yx} = \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{2y+4}}^0 \left(-\frac{y}{2}\right) dxdy$.
   a) Grafique el dominio de integración.
   b) Invierta el orden de integración.

9. Halle $I = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2+x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\, dydx$

10. Sea D la región del primer octante, dentro de $x^2+y^2=4$ y fuera de $25\left(x^2+y^2\right)=z^2$.
    a) Exprese D en coordenadas cilíndricas.
    b) Calcule: $\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

11. Sea R la región acotada del espacio, dentro de la superficie: $16x^2+16y^2-z^2=0$ y bajo la superficie $x^2+y^2-z+3=0$.
    a) Grafique R.
    b) Exprese R en coordenadas cilíndricas.
    c) Calcule R.

12. Sea S la región dentro del cilindro $x^2-4x+y^2=0$, sobre el plano xy, y bajo el cono $3x^2+3y^2-z^2=0$, e $I = \iiint_S zdxdydz$
    a) Exprese I como integral iterada en coordenadas cilíndricas o bien esféricas.
    b) Calcule I

13. Sea W la región en el primer octante acotada por los planos $x=0$, $z=0$, $x+y=2$, $x+2y=6$ y el cilindro $x^2+y^2=4$.
    a) Grafique W.
    b) Exprese $\iiint_W f(x,y,z)\, dxdydz$ como integral iterada.

14. Sean S la región de $\mathbb{R}^3$ acotada inferiormente por $z^2=16\left(x^2+y^2\right)$ y superiormente por $z-3=x^2+y^2$, e $I = \iiint_S x^2ydxdydz$. Exprese I como integral iterada en coordenadas cilíndricas.

15. Sean D la región de $\mathbb{R}^3$ acotada por las superficies $8x^2+8y^2-z^2=0$, $x^2+y^2+z-6=0$, $I = \iiint_D \left(x^2+y^2\right) dxdydz$
    a) Grafique D.
    b) Exprese I como integral iterada en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

16. Sea D la región del plano, sobre el eje xy, acotada por las curvas $x^2+y^2-3x=0$, $x^2+y^2-3x=3\sqrt{x^2+y^2}$
    a) Grafique D en el plano xy.
    b) Calcule el área de D.

17. Considere $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \int_0^{-y} f(x,y,z)\, dzdydx$.
    a) Grafique la región de integración.

b) Transfórmela en otra integral iterada cambiando el orden de integración.

18. Calcule $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, si

$$D=\left\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2},\ 0\le z\le 2\right\}$$

19. Calcule $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dzdydx$, $a>0$

1. Integrales de Línea

1. Sea C la curva determinada por la intersección de las superficies : $\left.\begin{aligned} x^2+y+z^2-1 &= 0 \\ 2x-y &= 0\end{aligned}\right\}$; parametrice y grafique C.

2. Sea C la parte de la curva: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x-y &= 0\end{aligned}\right\}$ que está sobre el plano xy, orientada de modo que el punto inicial está en el primer cuadrante del plano

   a) Grafique C

   b) Parametrice C, indicando punto inicial y punto final.

3. Sea $\vec{F}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ función vectorial y C la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ x+z &= 1\end{aligned}\right\}$ recorrida en sentido antihorario al mirar desde el origen. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

4. Calcule $\int_C x\,dL$ si C es la curva: $x^2+y^2-4y+3=0$

5. Calcule $\int_C xydx+xdy$, donde C es el arco de la parábola $y=x^2$, desde el punto $(2,4)$ al punto $(1,1)$.

6. Sea C la curva definida por $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x-y &= 0\end{aligned}\right\}$

   a) Parametrice y grafique C.

   b) Sea $f(x,y,z)=\sqrt{2y^2+z^2}$, calcule $\oint_C f dL$

   c) Dé una interpretación física al valor obtenido en b.

7. Sea $\vec{F}(x,y)=(\sin(y),x\cos(y)+3)$

   a) Pruebe que $\vec{F}$ es campo gradiente.

   b) Halle potencial de $\vec{F}$

   c) Calcule, usando $a)$ y $b)$, el valor de $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ donde C es la curva $\left.\begin{aligned} x &= t^3-2t \\ y &= 5t+3\end{aligned}\right\} t\in[0,1]$

8. Sea C la parte de la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ contenida en el primer cuadrante, orientada en sentido antihorario.

   a) Muestre que la siguiente integral es independiente de la trayectoria y calcule:

$$\int_C (e^x\cos y-e^y\sin x)dx+(e^y\cos x-e^x\sin y)dy$$

9. Sea $I=\int_C (2x-3y)\,dx+(3x-2y)dy$, donde C es la parte de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, que está en el primer cuadrante, que va desde $(2,0)$ a $(0,3)$.

   a) Calcule I, directamente.

   b) Pruebe que I es independiente de la trayectoria.

   c) Calcule I, usando b.

10. Sea C la parte de la curva $\left.\begin{aligned} 9x^2+4y^2-36 &= 0 \\ \sqrt{5}x-2z &= 0\end{aligned}\right\}$ contenida en el primer octante orientada de modo que la abscisa crece.

    a) Parametrice y grafique C.

    b) Sea $\vec{F}(x,y,z)=(x+2y+az,2bx-z,cy-z^2)$. Determine valores de a, b, c de modo que $\vec{F}$ sea campo gradiente.

    c) Calcule el trabajo necesario para que $\vec{F}$ traslade una partícula a lo largo de C, haciendo uso de la parte b).

11. Sean $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{y-3},\frac{-x^2}{(y-3)^2},z\right)$ y C el menor arco de la curva: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x+y+z &= 1\end{aligned}\right\}$, que va desde el punto $A(1,0,0)$ al punto $B(0,1,0)$.

    a) Pruebe que $\vec{F}$ es campo gradiente en algún conjunto de $\mathbb{R}^3$ (Indique cual).

    b) Halle potencial de $\vec{F}$.

    c) ¿Es $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ independiente de la trayectoria?

    d) Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al trasladar una partícula desde A a B a lo largo de C.

12. Considere el campo en $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

    a) Muestre que $\vec{F}$ es campo gradiente.

b) ¿Qué se puede concluir, a partir de a), respecto al valor de una integral $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C_1 es una curva seccionalmente suave que une los puntos P_1 y P_2?, ¿ Y para una integral $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C_2 es una curva cerrada seccionalmente suave?

c) Calcule $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C_1 es la curva

$$\left.\begin{array}{ll} x & = t^2+1 \\ y & = 2t^3-3 \\ z & = t+5 \end{array}\right\}, t \in [0,1]$$

d) Calcule $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C_2 es la curva

$$\left.\begin{array}{rl} x^{2/3}+y^{2/3} & = 1 \\ z & = 1 \end{array}\right\}$$

13. Evalúe $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$, donde C es una curva orientada simple que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

14. Sea C el triángulo en $\mathbb{R}^3$ de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,3)$ (orientada en ese orden) y $\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$.

    a) Parametrice y grafique C.

    b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ al trasladar una partícula a lo largo de C.

15. Sea C la curva $\left.\begin{array}{rl} x^2+y^2+z^2 & = a^2 \\ x-z & = 0 \end{array}\right\}$. Si un alambre tiene la forma de la curva C, y su densidad en el punto (x,y,z) está dada por $\delta(x,y,z) = \sqrt{2x^2+y^2}$. Determine la masa del alambre.

16. Calcule la longitud del arco de la hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = abt$, desde el punto $(a,0,0)$ hasta el punto $(-a,0,ab\pi)$.

17. Sobre una partícula en el punto (x,y,z) actúa la fuerza: $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$

    a) Halle el trabajo efectuado al mover una partícula desde el punto $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,0)$ a lo largo de la mitad superior de la circunferencia unitaria de centro el origen en el plano xy.

    b) Hallar el trabajo al mover una partícula desde $(1,0,0)$ hasta $(-1,0,0)$ a lo largo del eje x.

    c) Los resultados a) y b) son diferentes. ¿Cómo podría haberse supuesto esto, sin calcular las integrales?

18. Sea C la curva $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0,6\pi]$.

    a) Bosqueje C.

    b) Un alambre A tiene la forma de la curva C y en cada punto (x,y,z) la densidad está dada por $\delta(x,y,z) = 1+z$. Calcule la masa de A.

    c) Sean $\vec{F}(x,y,z) = (e^x\, cosy, -e^x\, seny, 2)$ e $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

    i) Pruebe que I es independiente de la trayectoria.

    ii) Calcule el potencial de $\vec{F}$

    iii) Calcule I, usando i) e ii.

    iv) ¿Qué interpretación física tiene el resultado de iii?

2. Integrales de Superficie

1. Sea S la superficie definida por $\vec{r} : [0,9] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$

   a) Exprese S en forma implícita.

   b) Grafique S.

2. Sea S la superficie definida por $\vec{r} : [0,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(u,v) = (u\, cosv, u, u\, sinv)$

   a) Determine si $(1,2,1) \in S$.

   b) Exprese S en forma implícita y grafiquela.

3. Sea S la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de $z = 4-y^2$; $0 \leq y \leq 2$, alrededor del eje y.

   a) Exprese implícitamente y parametrice S.

4. Calcule $\iint_S \sqrt{x^2+z^2}dS$, donde S es la superficie lateral del cilindro: $x^2+z^2 = 16$, $-1 \leq y \leq 2$

5. Sea S la superficie $z = x^2+y^2$, $1 \leq z \leq 4$

   a) Parametrice y grafique S.

   b) Calcule $\iint_S \frac{z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}dS$

6. Sea S la superficie definida por

   $$x = \frac{2v\cos u}{3},\ y = \frac{2v\sin u}{3},\ z = v,\ (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,3]$$

   a) Exprese S en forma implícita y grafique.

   b) Calcule $\iint_S xdydz + ydzdx - zdxdy$

7. Sea la región $R = \left\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2, z \geq 0\right\}$ y S la superficie frontera de R.

   a) Calcule $\iint_S \left(z^2+2\right) dxdy$

   b)¿Qué interpretación física tiene el resultado obtenido en a)?

8. Sea S la parte de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ cortada por el plano $y = 1$
a) Calcule $\iint_S zdxdy$
b) Interprete físicamente el resultado obtenido en a).

9. La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ se corta por el plano $z = 3$. Sea S la parte menor resultante. Calcule $\iint_S xzdydz + yzdzdx + dxdy$

10. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ con $0 \leq z \leq 2$. Calcule el área de S.

11. Sean $F(x, y, z) = y - 1$, $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5$, $H(x, y, z) = y + z - 3$.

    a) Sea R la región del espacio, acotada por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ y S la superficie frontera de R.
    i) Grafique S.
    ii) Calcule $\iint_S zdxdy$
    iii) Interprete físicamente el resultado.
    b) Sea $M = \{(x, y, z) \ / \ G(x, y, z) = 0, H(x, y, z) \geq 0\}$
    i) Grafique M y escriba la integral doble que expresa la masa de M (no calcule), si la densidad en cada punto es igual a su distancia al plano xz.

12. Sean $D = \left\{(x, y, z) \ / \ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ región de $\mathbb{R}^3$ y S la superficie frontera de D. Calcule el flujo a través de S de un fluido con campo de velocidades $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$

13. Calcule el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$, contenida en el primer octante y bajo $z = 1$, usando integral de superficie.

3. Teorema de Green, Gauss, Stokes

1. Use teorema de Green para calcular $\oint_C (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy$ donde C es la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. Sea $\vec{F}(x, y) = (e^x \sin y, e^{2x} \cos y)$ y R el rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
a) Pruebe que es posible aplicar el Teorema de Green a $\vec{F}$ en R.
b) Use el teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, donde C es la frontera de R.

3. Calcule $\oint_C (4 - e^{\sqrt{x}})dx + (\sin y + 3x^3)dy$, si C es la frontera de la región

    $R = \left\{(x, y) \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}$

4. Sea C el triángulo de vértices $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Hallar $I = \oint_C (y - \sin x)\, dx + \cos x dy$.
a) Directamente.
b) Usando el Teorema de Green.

5. Pruebe que el área de una elipse de semiejes a y b es πab, usando Teorema de Green.

6. Sean $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$, $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$

    a) Explique porqué no es posible usar el Teorema de Green si C es la curva $x^2 + y^2 = 1$. Calcule I directamente.

    b) Compruebe que es posible aplicar el teorema de Green si C es la curva $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, calcule I haciendo uso de él.

    c) Calcule I, si C es la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

7. Sean C_1 el arco de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, con $x \leq -1$, y C_2 el segmento de recta $x + 1 = 0$, con $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, y C la curva cerrada $C_1 \cup C_2$ y $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$
a) Parametrice la curva C, orientada positivamente. Exprese, sin calcular, mediante integrales simples, la integral de línea: $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$

    c) Use Teorema de Green para calcular I. Para ello:

    i) Considere C' una circunferencia centrada en el origen, de algún radio apropiado y aplique Teorema de Green a $\vec{F}$ en la región comprendida entre C y C'

    ii) Obtenga el valor de I.

8. Sea S la superficie del cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ con la cara correspondiente a $x = 1$ removida. Use Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$

9. Sean $R = \{(x, y, z) \ / \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq a, \ 0 \leq z \leq a\}$ región de $\mathbb{R}^3$, S frontera y $\vec{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$.
a) Compruebe que R, S y $\overrightarrow{f}$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Gauss.
b) Use Teorema de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$.
c) ¿Qué interpretación física tiene el valor de la integral de superficie propuesta en b)?

10. Sean $R = \left\{(x, y, z) \ / \ 9x^2 + 9y^2 \leq 4z^2, \ 0 \leq z \leq z\right\}$. Sea S la superficie frontera de R. $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$

a) Use Teorema de Gauss para expresar I como integral iterada triple en coordenadas cilíndricas.

b) ¿Qué interpretación física tiene el valor de I?

11. Verificar el Teorema de la divergencia si:

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

donde S es la cara exterior de la frontera del cubo. $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

12. Sea $I = \iint_S zdxdy$, donde S es la superficie frontera de la región $R \subset \mathbb{R}^3$, acotada por $y = 1$, $x^2 + z^2 + y - 5 = 0$.

a) Calcule I, directamente.

b) Calcule I, usando Teorema de Gauss.

c) ¿Qué interpretación física puede dar al valor de I?

13. Usar el teorema de Stokes para hallar $\oint_C 3ydxxzdy + yz^2 dz$, donde C es el borde (Considere C orientada antihorario mirando desde el origen).

14. Sea C : $\left.\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 & = 1 \\ x + z & = 1 \end{array}\right\}$ orientada en sentido horario al mirar desde el origen.

a) Parametrice y grafique C.

b) Use Stokes para calcular $\oint_C ydx + zdy + xdz$.

c) Sea C' la parte de C contenida en el primer octante y $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$. Muestre que $\int_{C'} \vec{F} \cdot \vec{dr}$ es independiente de la trayectoria y halle su valor.

15. Sea C la curva: $\left.\begin{array}{rl} x + z & = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 16 \end{array}\right\}$ orientada en sentido antihorario al mirar desde el origen.

a) Parametrice la curva.

b) Calcule $\int_C dL$ a partir del gráfico.

c) Sea $I = \int_C ydx + zdy + xdz$.

i) ¿Es independiente de la trayectoria?

ii) Calcule I directamente.

iii) Calcule I, usando el Teorema de Stokes.

16. Sea S la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 25$, $1 \le x \le 4$.
a) Calcule la masa de una lámina que tiene la forma de S, si la densidad en cada punto es la distancia al eje x.
b) Sea S' la superficie S anterior, a la que se agrega como tapa el plano $x = 1$. Use Teorema de Stokes para calcular: $\iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{N} dS$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (y^3, z, x)$.

17. Sean $I = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$, con C el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 2, 3)$ (orientada en ese orden), $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

a) Parametrice la curva C.

b) Calcule I, directamente.

c) ¿Qué interpretación física tiene I?

d) Transforme I en una integral de superficie, usando Teorema de Stokes y calcule.

e) ¿Qué interpretación física tiene el resultado obtenido en d)?

18. Sea S la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$; $z \ge 0$. Si $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, verifique el Teorema de Stokes para $\vec{F}$ y S.

19. Sea S la superficie del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$.
a) Use Teorema de Gauss para calcular: $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dS$, si $\vec{F}(x, y, z) = (xz, -y, -x^2 y)$.

20. Sean $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 1$ y $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$
a) Si S es la superficie $F(x, y, z) = 0$, $z \ge 0$, verifique el Teorema de Stokes para $\vec{F}$ y S.
b) Considere la región $D = \{(x, y, z) \ / \ F(x, y, z) \le 0, \ / \ z \ge 0\}$ y S' su frontera. Use Teorema de Gauss para calcular $\iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{N} dS$