Método de Newton y Variantes

Métodos Numéricos

Prof. Juan Pablo Concha y Eduardo Uribe

Conferencia 8

Conferencia 8

Metodología

Fórmula de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teorema

Sea $f(x) \in C^2([a,b])$. Si $\bar{x} \in [a,b]$ es tal $f(\bar{x}) = 0$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces existe un radio $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una suceción $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $\bar{x}$ desde cualquier punto inicial x_0 del intervalo $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$.

Motivación I

Inconvenientes del método

- No siempre converge.
- Necesita evaluar la derivada.
- Dificultad si la raíz es múltiple ($f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$)

Cambiar el cálculo de la derivada.

Sustituir en la fórmula de Newton-Raphson

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

la derivada $f'(x_{n-1})$ por una aproximación

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}} \Longrightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

Motivación II

Cambiar la tangente por la secante

x_n en vez de ser calculada como la raíz de la tangente a f en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ se toma como la raiz de la recta secante

$$y(x) = f(x_{n-1})\frac{x - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} + f(x_{n-2})\frac{x - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_{n-1}}$$

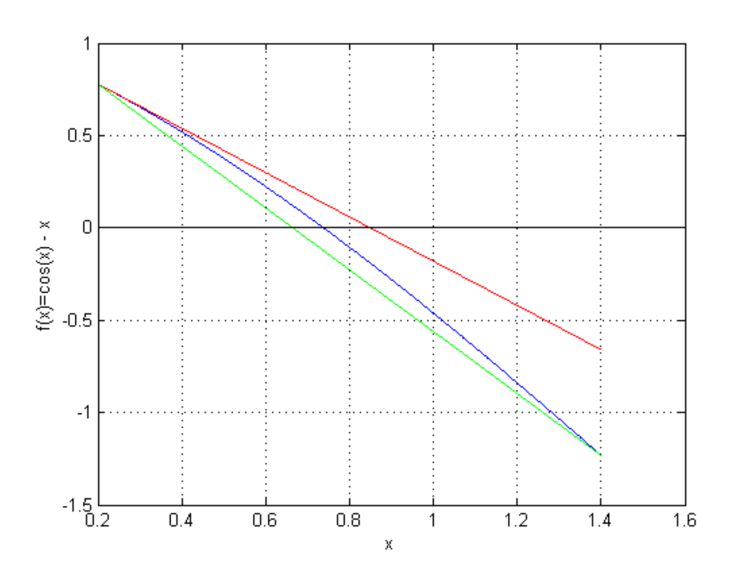
entre los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$. Por ende:

$$0 = f(x_{n-1})\frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} + f(x_{n-2})\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_{n-1}}$$

que resulta de nuevo en:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

Ejemplo 1 $f(x) = cos(x) - x$, $x_0 = 1.4$, $x_1 = 0.2$



Formulación del método de la secante

Características

- Se necesitan dos puntos iniciales x_0, x_{-1} que aproximen una raíz de f.
- A diferencia del método de falsa posición los puntos no tienen que encerrar una raíz

Pseudocódigo

DATOS:	x_0, x_{-1}: puntos iniciales; TOL y MAX
RESULTADO:	Solución aproximada x_n, o falla del algoritmo.
PASO 1:	$n = 1$
PASO 2:	Si $n > MAX$, ENTREGA("FALLO") y STOP
PASO 3:	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-1})}{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}$
PASO 4:	Si $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert \leq TOL$, ENTREGA($x_n$) y STOP
PASO 5:	$n = n + 1$ e IR A PASO 2

Relación con el método de falsa posición

Fórmula identica

Dado dos puntos x_0 y x_1 el punto siguiente se determina como:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

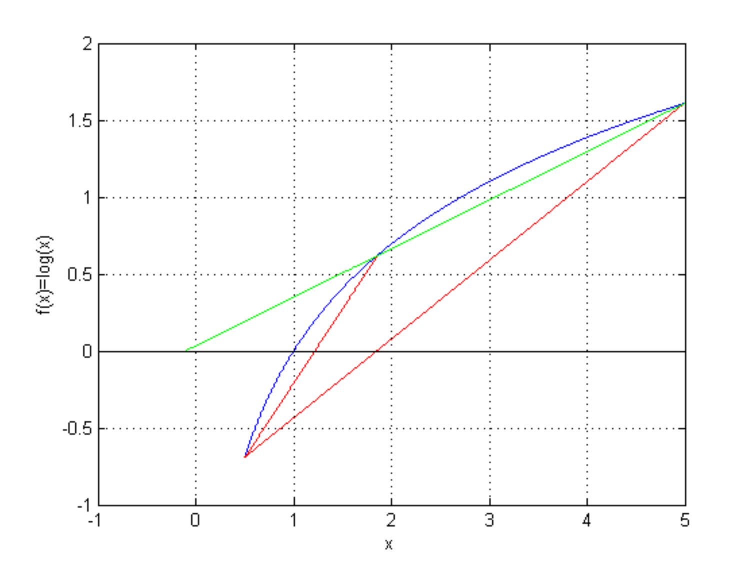
Puntos subsiguientes

Secante x_1 y x_2

Falsa Posición x_1 y x_2 si $f(x_1)f(x_2) < 0$, sino x_0 y x_2

- x_2 siempre está entre x_0 y x_1.
- Los dos puntos de cada iteración encierran la raíz.

Ejemplo 2: $f(x) = \ln x$, $x_0 = 0.5$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1.85463$



Ejemplo 3 (secante y falsa posición)

Datos

$$f(x) = \cos x - x; \quad x_0 = 0.5; \quad x_1 = \pi/4$$

Valores de las iteraciones

n	Secante	Falsa Posición
0	0.5	0.5
1	0.7853981634	0.7853981634
3	0.7363841388	0.7363841388
4	0.7390581392	0.7390581392
5	0.7390851493	0.7390848638
6	**0.7390851332**	0.7390851305
7	0.7390851332	**0.7390851332**

Multiplicidad de una raíz

Definición

Una raíz $\bar{x}$ de la ecuación $f(x) = 0$ se dice que tiene multiplicidad m si para $x \neq \bar{x}$ la función $f(x)$ puede escribirse como $f(x) = (x - \bar{x})^m q(x)$, y se cumple $lim_{x \to \bar{x}} q(x) \neq 0$.

Teorema (criterio sencillo)

La función suave f tiene una raíz $\bar{x}$ de multiplicidad m si

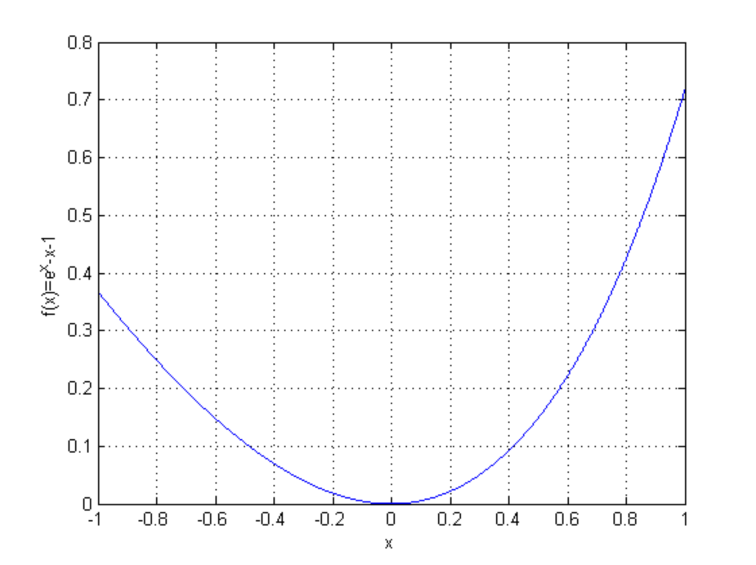
$$0 = f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \ldots = f^{(m-1)}(\bar{x})$$

pero $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$. El caso $m = 1$ se denomina raíz simple.

Ejemplo

$f(x) = e^x - x - 1$ tiene una raíz de multiplicidad 2 en $\bar{x} = 0$.

Ejemplo 4 $f(x) = e^x - x - 1$



Ejemplo 4. (Iteraciones del Método de Newton)

n	x_n	$e^{x_n} - x_n - 1$
0	1	0.7182818
1	0.5819767	0.2075957
2	0.319055	0.05677201
3	0.1679962	0.01493591
4	0.08634887	0.003837726
5	0.0437957	0.000973187
6	0.02205769	0.0002450693
7	0.01106939	6.149235e-005
8	0.005544905	1.540144e-005
9	0.002775014	3.853917e-006
10	0.001388149	9.639248e-007
11	0.0006942351	2.410369e-007
12	0.0003471577	6.026621e-008
13	0.0001735889	1.506742e-008

Convergencia no es cuadrática!!

Modificación del método de Newton

Observación

Si $\bar{x}$ es una raíz de orden m de $f(x)$ entonces también es una raíz, pero simple!, de $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ pues

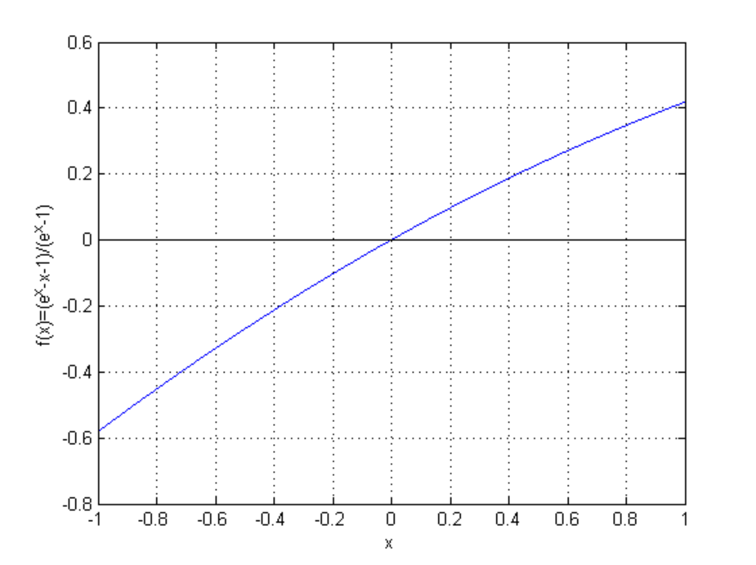
$$\mu(x) = \frac{(x-\bar{x})^m q(x)}{m(x-\bar{x})^{m-1} q(x) + (x-\bar{x})^m q'(x)}$$

y entonces

$$\mu(x) = (x-\bar{x}) \frac{q(x)}{mq(x) + (x-\bar{x}) q'(x)}$$

pero $q(\bar{x}) \neq 0$.

Ejemplo 4 $\mu(x) = f(x)/f'(x) = (e^x - x - 1)/(e^x - 1)$



Modificación del método de Newton

Formulación

Idea: Aplicar Newton a $\mu(x)$. O sea:

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)/f'(x)}{\{[f'(x)]^2 - [f(x)][f''(x)]\}/[f'(x)]^2}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$$

Formula de Newton-Raphson modificada

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})f'(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})^2 - f(x_{n-1})f''(x_{n-1})}$$

Ejemplo 4

Iteraciones

Método de Newton modificado para raíces múltiples

n	x_n	$e^{x_n} - x_n - 1$
0	1	0.7182818
1	-0.2342106	0.02540578
2	-0.00845828	3.567061e-005
3	-1.189018e-005	7.06879e-011
4	-4.226407e-011	0

Sistema de ecuaciones no lineales

Ejemplo:

Sistema de dos ecuaciones y dos variables

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 10 \\ y + 3xy^2 &= 57 \end{aligned}$$

si definimos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 + xy - 10 \\ v(x, y) &= y + 3xy^2 - 57 \end{aligned}$$

tenemos entonces:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 \\ v(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Generalización de Newton-Raphson

Fórmula de Newton-Raphson en una dimensión

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Fórmula de Newton-Raphson en dos dimensiones

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x_{n-1},y_{n-1})}{\partial x} & \frac{\partial u(x_{n-1},y_{n-1})}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_{n-1},y_{n-1})}{\partial x} & \frac{\partial v(x_{n-1},y_{n-1})}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ v(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: $x^2 + xy - 10 = 0,\ y + 3xy^2 - 57 = 0$

Iteraciones

Método de Newton en dos dimensiones

n	x_n	y_n	u_n	v_n
0	1.5	3.5	-2.5	1.625
1	2.036029	2.843875	-0.06437496	-4.756208
2	2.003733	3.026739	0.07972475	1.096227
3	1.99767	2.999865	-0.01657656	-0.0678963
4	2.000468	2.99879	0.000855497	-0.03212949
5	1.999981	3.000329	0.0005264687	0.01167365
6	1.999984	2.999967	-0.0001797555	-0.001654913
7	2.000005	2.999994	2.405237e-005	-9.018645e-005
8	1.999999	3.000003	1.771516e-006	9.963969e-005
9	2	2.999999	-1.571398e-006	-2.252926e-005
10	2	3	3.393686e-007	1.477433e-006

Ejercicios

1) Use el método de Newton para encontrar una raíz de la ecuación

$$x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0$$

Empezando con $x_0 = 0$, use el método de newton modificado a partir del mismo punto. ¿Cuál es la multiplicidad de la raíz buscada?

2) Resuelva usando el método de Newton para varias variables, el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_1 x_2^2 - x_1^3 = 1 \end{cases}$$

Para esto, tome como punto inicial $x^{(0)} = (1,\ 1)^T$ y realice dos iteraciones.

3) Considere la función $f(x) = 2x^2 - x + 6e^{-x} - 8$.
   a) Usando el método iterativo de Newton, comenzando con $x_0 = 0.3$. Encuentre una raíz negativa de $f(x) = 0$ con precisión de 10^{-4}, utilizando la máxima capacidad de dígitos de su calculadora.
   b) Usando el método iterativo de la Secante, comenzando con $x_0 = 0.3$ y $x_1 = 0$. Encuentre una raíz negativa de $f(x) = 0$ con precisión de 10^{-4}, utilizando la máxima capacidad de dígitos de su calculadora.
   c) Considerando los resultados obtenidos en a) y b) ¿Qué puede decir acerca de la convergencia de ambos métodos en este caso particular?