Método de gradiente conjugado

Métodos Numéricos

Conferencia 17

Conferencia 17

Matrices definidas positivas

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si es simétrica y cumple

$$x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0,$$

Proposición (Caracterización mediante valores propios)

Una matriz simétrica es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son estrictamente positivos.

Norma asociada a A

Si A es definida positiva la función $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$ es una norma

$$\begin{array}{ll}
(i) & \|x\|_A \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
(ii) & \|x\|_A = 0 \iff x = 0 \\
(iii) & \|\alpha x\|_A = |\alpha|\|x\|_A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\
(iv) & \|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A, \forall x, y \in \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Sistemas lineales

Definición

Dado un sistema de ecuaciones $Ax = b$ con solución $\bar{x} = A^{-1}b$ definimos, para una solución aproximada $\hat{x}$, los vectores

- Residuo: $r(\hat{x}) = b - A\hat{x}$
- Error: $e(\hat{x}) = \hat{x} - \bar{x}$

Proposición

El problema de encontrar la solución $\bar{x}$ de un sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$, con A positiva definida, es equivalente a encontrar el mínimo de cualquiera de las dos siguientes funciones:

- $\phi(x) = x^T Ax - 2b^T x = -x^T r(x)$
- $\psi(x) = \|e(x)\|_A = \sqrt{(x - \bar{x})^T A(x - \bar{x})}$

Ortogonalidad

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz definida positiva.

- Dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales respecto a A si $x^T A y = 0$.
- Un conjunto de vectores no nulos $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ se llama ortogonal respecto a A si todos son ortogonales entre sí:
$$v_i^T A v_j = 0, \quad i \neq j$$

Observaciones

- Si A es la matriz identidad, entonces la ortogonalidad se reduce a la condición $x^T A y = x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0$, lo cual geometricamente significa que los vectores forman un ángulo recto.
- Los vectores unitarios son un ejemplo de conjunto ortogonal.
- Todo conjunto de vectores ortogonales es independiente.

Ejemplo de ortogonalidad respecto a A

Datos y cálculos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1^T A v_2 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [4\ 3\ 0] \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_1^T A v_3 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = [4\ 3\ 0] \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_2^T A v_3 = \left[-\frac{3}{4}\ 1\ 0\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[0\ \frac{7}{4}\ -1\right] \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Algoritmo general de direcciones conjugadas

Teorema

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de vectores ortogonales respecto a la matriz definida positiva A y $x^0 = 0$ el vector inicial nulo. Si definimos

$$t_k = \frac{v_k^T(b - Ax_{k-1})}{v_k^T A v_k} = \frac{v_k^T r(x_{k-1})}{v_k^T A v_k}; \quad x_k = x_{k-1} + t_k v_k$$

para $k = 1, \ldots, n$, entonces $Ax_n = b$.

Teorema (ortogonalidad)

Los vectores residuales $r_k = r(x^k)$, $k = 1, \ldots, n$ del anterior algoritmo de direcciones conjugadas satisfacen que: $r_k^T v_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k$

Observación

Si tenemos una base ortogonal respecto a una matriz A definida positiva, podemos usar el anterior procedimiento como un algoritmo exacto de resolución del sistema $Ax = b$.

Regresando al mismo ejemplo para resolver $Ax = b$

Datos y base ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}; \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1 (Direcciones conjugadas): $x_0 = [0\ 0\ 0]$

$$r_0 = r(x_0) = b - Ax_0 = b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} \implies v_1^T r_0 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} = 24$$

$$v_1^T A v_1 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$t_1 = \frac{v_1^T r_0}{v_1^T A v_1} = \frac{24}{4} = 6 \implies x_1 = x_0 + t_1 v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regresando al mismo ejemplo para resolver $Ax = b$

Datos y base ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}; \; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2 (Direcciones conjugadas): $x_1 = [6\ 0\ 0]$

$$r_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$v_2^T A v_2 = [-\tfrac{3}{4}\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-\tfrac{3}{4}\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{7}{4}$$

$$v_2^T r_1 = [-\tfrac{3}{4}\ 1\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -24 \end{bmatrix} = 12 \implies t_2 = \frac{v_2^T r_1}{v_2^T A v_2} = \frac{12 \cdot 4}{7} = \frac{48}{7}$$

$$x_2 = x_1 + t_2 v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{48}{7} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Regresando al mismo ejemplo para resolver $Ax = b$

Datos y base ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}; \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3 (Direcciones conjugadas): $x_2 = \left[\frac{6}{7} \;\; \frac{48}{7} \;\; 0\right]$

$$r_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -\frac{48}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{120}{7} \end{bmatrix}$$

$$v_3^T A v_3 = \left[-\tfrac{3}{7} \;\; \tfrac{4}{7} \;\; 1\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[-\tfrac{3}{7} \;\; \tfrac{4}{7} \;\; 1\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \frac{24}{7}$$

$$v_3^T r_2 = \left[-\tfrac{3}{7} \;\; \tfrac{4}{7} \;\; 1\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{120}{7} \end{bmatrix} = -\frac{120}{7} \implies t_3 = \frac{v_3^T r_2}{v_3^T A v_3} = \frac{-120}{24} = -5$$

$$x_3 = x_2 + t_3 v_3 = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Regresando al mismo ejemplo para resolver $Ax = b$

Datos y base ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}; \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución $x_3 = [3\ 4\ \ -5]$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Ortogonalidad

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -24 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{120}{7} \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1^T v_1 = 0; \quad r_2^T v_1 = 0; \quad r_3^T v_2 = 0$$

Algoritmo de gradiente conjugado de Hestenes y Stiefel

Dada una matriz definida positiva A y un punto inicial x_0 calculamos:

$$r_0 = b - Ax_0; \quad v_1 = r_0$$

Realizamos los siguientes pasos con $k = 1, 2, 3 \ldots$ hasta que $r_{k-1} = 0$.

$$\begin{aligned}
t_k &= \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{v_k^T A v_k} \\
x_k &= x_{k-1} + t_k v_k \\
r_k &= r_{k-1} - t_k A v_k \\
s_k &= \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}} \\
v_{k+1} &= r_k + s_k v_k
\end{aligned}$$

Algoritmo de gradiente conjugado de Hestenes y Stiefel

Observación

El algoritmo de gradiente conjugado construye una base ortogonal $v_1, \ldots, v_n$ respecto a una matriz definida positiva A, utilizando los residuos del sistema $Ax = b$. Al mismo tiempo calcula los vectores x_k, $k = 1, \ldots, n$ tales que $Ax_n = b$.

Teorema

Consideremos que se aplica el algoritmo de gradiente conjugado al sistema $Ax = b$, con A definida positiva. Si $r_{k-1} \neq 0$, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$r_k^T r_j = 0, \quad (j < k)$$

$$v_{k+1}^T A v_j = 0, \quad (j < k)$$

$$\|e(x_k)\|_A \leq \|e(x_{k-1})\|_A$$

Aplicando Gradiente conjugado al mismo ejemplo

Datos y punto inicial

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}; \; x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; v_1 = r_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Paso 1

$$r_0^T r_0 = [24 \; 30 \; -24] \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} = 2052$$

$$v_1^T A v_1 = [24 \; 30 \; -24] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} = [1 \; 0 \; 0] \begin{bmatrix} 186 \\ 216 \\ -126 \end{bmatrix} = 13968$$

$$t_1 = \frac{r_0^T r_0}{v_1^T A v_1} = \frac{2052}{13968} = \frac{57}{388} = 0.1469..$$

$$x_1 = x_0 + t_1 v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1469 \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5258 \\ 4.4072 \\ -3.5258 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gradiente conjugado al mismo ejemplo

Datos y puntos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; v_1 = r_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 3.5258 \\ 4.4072 \\ -3.5258 \end{bmatrix}$$

Paso 1 (II)

$$r_0^T r_0 = 2052 \; Av_1 = \begin{bmatrix} 186 \\ 216 \\ -126 \end{bmatrix} \; t_1 = 0.1469$$

$$r_1 = r_0 - t_1 Av_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} - 0.1469 \begin{bmatrix} 186 \\ 216 \\ -126 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3247 \\ -1.7320 \\ -5.4897 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} = \frac{44.19}{2052} = 0.02154..$$

$$v_2 = r_1 + s_1 v_1 = \begin{bmatrix} -3.3247 \\ -1.7320 \\ -5.4897 \end{bmatrix} + 0.02154 \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8079 \\ -1.0859 \\ -6.0065 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gradiente conjugado al mismo ejemplo

Datos y puntos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = r_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Paso 1

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3.5258 \\ 4.4072 \\ -3.5258 \end{bmatrix} \quad r_1 = \begin{bmatrix} -3.3247 \\ -1.7320 \\ -5.4897 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2.8079 \\ -1.0859 \\ -6.0065 \end{bmatrix}$$

Paso 2

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2.8580 \\ 4.1490 \\ -4.9542 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0.1210 \\ -0.1241 \\ -0.0341 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.1191 \\ -0.1249 \\ -0.0384 \end{bmatrix}$$

Paso 3

$$x_3 = \begin{bmatrix} 2.99999 \\ 4.0000 \\ -4.9999 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0.36 \times 10^{-8} \\ 0.39 \times 10^{-8} \\ -0.141 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

Resultados de convergencia

Teorema (Convergencia finita)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz definida positiva que tiene m valores propios distintos ($m \leq n$), entonces el algoritmo de gradiente conjugado aplicado a $Ax = b$ converge en m pasos.

Notación

Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, denotemos por $\kappa(A)$ a su número de condición respecto a la norma 2. Se tiene que:

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \lambda_{max}(A) \cdot \lambda_{max}(A^{-1}) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

Teorema (Velocidad de convergencia)

Si se aplica el algoritmo de gradiente conjugado al sistema $Ax = b$ con A definida positiva, entonces se cumple para todo k:

$$\|e(x_k)\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}-1}{\sqrt{\kappa(A)}+1}\right)^k \|e(x_0)\|_A$$

Matriz de precondicionamiento

Observación

Sea C una matriz regular y A definida positiva. Se tiene que:

$$Ax = b \Leftrightarrow \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$$

donde

$$\tilde{A} = C^{-1}AC^{-T}; \quad \tilde{x} = C^{T}x; \quad \tilde{b} = C^{-1}b$$

y por definición $C^{-T} = (C^{T})^{-1} = (C^{-1})^{T}$

Motivación

- El algoritmo de gradiente conjugado precondicionado utiliza una matriz C, tal que $\tilde{A}$ tenga un mejor número de condición que A. Se resuelve entonces el sistema mejor condicionado $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ y se recupera la solución original usando $x = C^{-T}\tilde{x}$.
- Todas las operaciones pueden realizarse sin trabajar explícitamente con el sistema transformado.

Algoritmo de gradiente conjugado con precondicionamiento

Dada una matriz definida positiva A, un punto inicial x_0 y una matriz regular C calculamos:

$$r_0 = b - Ax_0; \quad w_0 = C^{-1} r_0; \quad v_1 = C^{-T} w_0$$

Realizamos para $k = 1, 2, 3 \ldots$ hasta que $w_{k-1} = 0$.

$$\begin{aligned}
t_k &= \frac{w_{k-1}^T w_{k-1}}{v_k^T A v_k} \\
x_k &= x_{k-1} + t_k v_k \\
r_k &= r_{k-1} - t_k A v_k \\
w_k &= C^{-1} r_k \\
s_k &= \frac{w_k^T w_k}{w_{k-1}^T w_{k-1}} \\
v_{k+1} &= C^{-T} w_k + s_k v_k
\end{aligned}$$

Ejemplo

Datos y solución

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 7.8597 \\ 0.4229 \\ -0.0736 \\ -0.5406 \\ 0.0106 \end{bmatrix}$$

Condición

$$vp(A) = \begin{bmatrix} 0.0571 \\ 3.7453 \\ 8.3384 \\ 60.0284 \\ 700.03081 \end{bmatrix} \quad \kappa(A) = \frac{700.03081}{0.0571} = 1.2260 \cdot 10^4$$

Matriz de precondicionamiento

$$C = \sqrt{Diag(A)} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{700} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Precondicionamiento

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{700} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = C^{-1}AC^{-T} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1118 & 0.2887 & 0.7906 & 0 \\ 0.1118 & 1.0000 & -0.0645 & 0.1768 & -0.0189 \\ 0.2887 & -0.0645 & 1.0000 & 0 & -0.0098 \\ 0.7906 & 0.1768 & 0 & 1.0000 & 0.0535 \\ 0 & -0.0189 & -0.0098 & 0.0535 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Condición

$$vp(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} 0.1564 \\ 0.8527 \\ 1.0088 \\ 1.1016 \\ 1.8805 \end{bmatrix} \quad \kappa(\tilde{A}) = \frac{1.8805}{0.1564} \approx 12$$

Ejemplo

Comparación

Método	Iteraciones	$\|\|x_k - x^*\|\|$
Jacobi	49	0.00305834
Gauss-Seidel	15	0.02445559
Gradiente conjugado	5	0.00629785
Gradiente conjugado precondicionado	4	0.00009312