

# Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

## Capítulo 11: Grafos Eulerianos

Preparado a partir do texto:

Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

# Outline

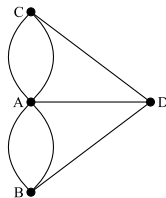
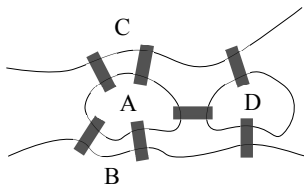
**1** Grafos Eulerianos

2 Digrafos Eulerianos

3 O Problema Chinês do Carteiro

# Introdução

No início do curso nós estudamos o problema das Pontes de Königsberg e representamos o problema através do seguinte grafo:



Queríamos saber se é possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar e passando por cada uma das pontes apenas uma vez.

**Em outras palavras queríamos encontrar no grafo acima um trajeto fechado que incluísse todas as arestas do grafo.**

# Definições

## Definição

*Um trajeto que inclua todas as arestas de um dado grafo  $G(V, A)$  é chamado de **trajeto euleriano**.*

*Seja  $G$  um grafo conexo. Dizemos que  $G$  é **euleriano** se possui um trajeto euleriano fechado.*

*Um grafo  $G$  não-euleriano é dito ser **semi-euleriano** se possui um trajeto euleriano.*

## Observação

*Note que em um grafo euleriano cada aresta é percorrida uma, e uma única, vez.*

# Definições

## Definição

*Um trajeto que inclua todas as arestas de um dado grafo  $G(V, A)$  é chamado de **trajeto euleriano**.*

*Seja  $G$  um grafo conexo. Dizemos que  $G$  é **euleriano** se possui um trajeto euleriano fechado.*

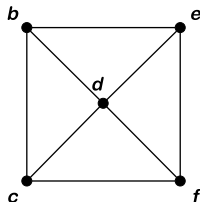
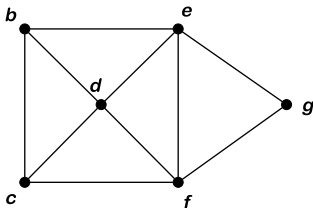
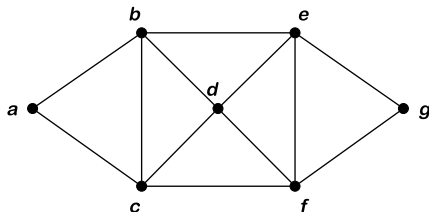
*Um grafo  $G$  não-euleriano é dito ser **semi-euleriano** se possui um trajeto euleriano.*

## Observação

*Note que em um grafo euleriano cada aresta é percorrida uma, e uma única, vez.*

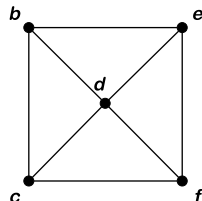
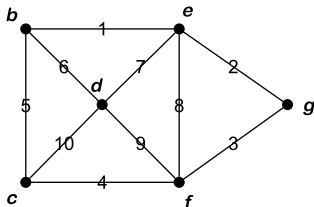
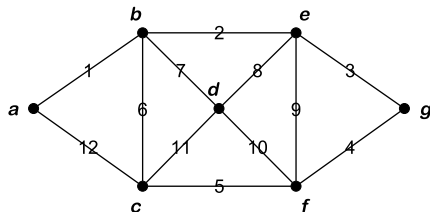
# Exemplos

A seguir temos exemplos de grafos euleriano, semi-euleriano e não-euleriano:



# Exemplos

A seguir temos exemplos de grafos euleriano, semi-euleriano e não-euleriano:



# Resultado auxiliar

## Lema

*Se  $G(V, A)$  é um grafo tal que  $d(v) \geq 2$  para todo  $v \in V$ , então  $G$  contém um ciclo.*

## Demonstração.

Se  $G$  possui laços ou arestas paralelas, não há o que provar.

Vamos supor que  $G$  é um grafo simples. Seja  $v_0 \in V$  um vértice arbitrário de  $G$ . Como  $d(v) \geq 2$  para todo  $v \in V$ , podemos construir um passeio  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \cdots$  indutivamente, escolhendo  $v_{i+1}$  como sendo qualquer vértice adjacente a  $v_i$  exceto  $v_{i-1}$ .

Como  $G$  possui uma quantidade finita de vértices, em algum momento escolheremos algum vértice, digamos  $v_k$ , pela segunda vez.

A parte do passeio entre a primeira e a segunda ocorrência de  $v_k$  constitui um ciclo.





# Condição necessária e suficiente

## Teorema (Euler, 1736)

*Um grafo conexo  $G(V, A)$  é euleriano se, e somente se, o grau de cada vértice de  $G$  é par.*

## Demonstração ( $\Rightarrow$ )

Seja  $T$  um trajeto euleriano fechado de  $G$ . Cada vez que um vértice  $v$  ocorre no trajeto  $T$ , há uma contribuição de duas unidades para o grau de  $v$  (uma aresta para chegar a  $v$  e outra para sair).

Isto vale não só para os vértices intermediários mas também para o vértice final, pois “saímos” e “entramos” no mesmo vértice no início e no final do trajeto.

Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em  $T$ , cada vértice possui grau par.

## Cont. da demonstração

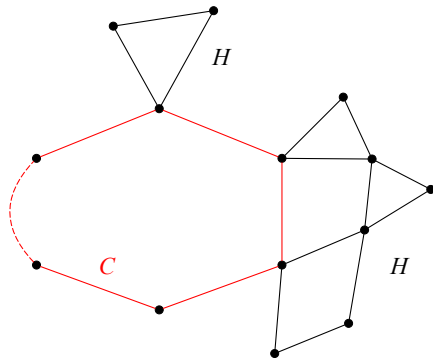
( $\Leftarrow$ )

A prova é por indução no número de arestas de  $G$ . Suponhamos que o grau de cada vértice de  $G$  é par. Como  $G$  é conexo,  $d(v) \geq 2$  para todo  $v \in V$ . Segue então do lema anterior que  $G$  contém um ciclo  $C$ .

Se  $C$  contém todas as arestas de  $G$ , o teorema está provado.

Se não, removemos de  $G$  as arestas de  $C$ , resultando num grafo  $H$ , possivelmente desconexo, com menos arestas do que  $G$ .

## Cont. da demonstração



## Cont. da demonstração

É fácil ver que todos os vértices de  $H$  possuem grau par. Logo, pela hipótese de indução, cada componente de  $H$  possui um trajeto euleriano fechado.

Além disso, pela conexidade de  $G$ , cada componente de  $H$  possui ao menos um vértice em comum com  $C$ .

Portanto, concatenando os trajetos euleriados fechados de cada componente de  $H$  com o ciclo  $C$  obtemos um trajeto euleriano fechado em  $G$ , ou seja,  $G$  é um grafo euleriano. □

## Corolário

*Um grafo conexo é euleriano se, e somente se, ele pode ser decomposto em circuitos disjuntos:*

$$G = \bigcup_i C_i, \quad C_i \cap C_j = \text{grafo nulo}.$$

## Corolário

*Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possui exatamente dois vértices de grau ímpar.*

# Algoritmo de Decomposição (Hierholzer, 1873)

Considere um grafo conexo  $G(V, A)$ , onde  $d(v)$  é par  $\forall v \in V$ .

**Passo 1:** Determine um circuito  $C_1$  em  $G$ .

Defina  $T_1 = C_1$  e  $G_1 = G$ .

Se  $T_1$  possui todas as arestas de  $G$ , pare.  $T_1$  é o trajeto procurado.

Tome  $k = 1$ .

**Passo 2:** Faça  $k = k + 1$ . Construa o subgrafo  $G_k(\bar{V}_k, \bar{A}_k)$  removendo de  $G_{k-1}$  as arestas pertencentes a

$T_{k-1}(V_{k-1}, A_{k-1})$ . Remova de  $G_k$  os vértices isolados.

**Passo 3:** Determine um vértice  $v \in \bar{V}_k \cap V_{k-1}$ . A partir de  $v$  determine um circuito  $C_k$  em  $G_k$ .

**Passo 4:** Determine  $T_k = T_{k-1} \cup C_k$ .

Se  $T_k$  possui todas as arestas de  $G$ , vá para o Passo 5.

Caso Contrário, retorne ao Passo 2.

**Passo 5:** Pare.  $T_k$  é o trajeto procurado e  $G = \bigcup_{i=1}^k C_i$ .

# Algoritmo de Fleury (Fleury, 1883)

Considere um grafo conexo  $G(V, A)$ , onde  $d(v)$  é par  $\forall v \in V$ .

Comece em qualquer vértice  $v$  e percorra as arestas de forma aleatória, seguindo sempre as seguintes regras:

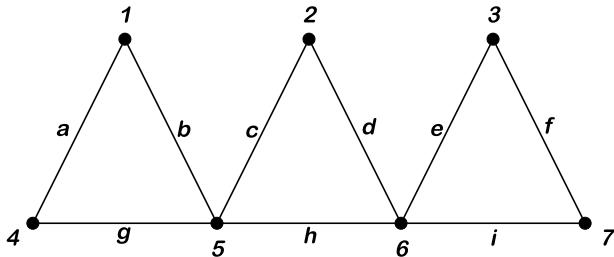
- Exclua as arestas depois de passar por elas;
- Exclua os vértices isolados, caso ocorram;
- Passe por uma ponte<sup>1</sup> somente se não houver outra alternativa.

---

<sup>1</sup>Uma aresta é dita ser uma **ponte** se a sua remoção torna o grafo desconexo.

# Exemplo

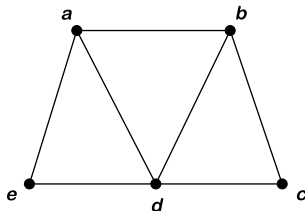
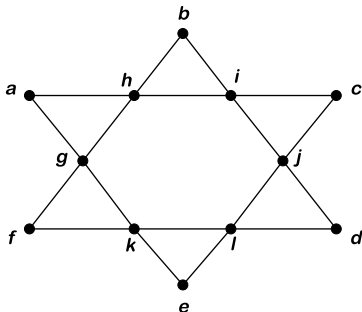
Aplique o Algoritmo de Fleury para encontrar um trajeto euleriano no grafo abaixo a partir do vértice 5.





# Exercícios

Verifique se os grafos abaixo são eulerianos. Se possível exiba um trajeto euleriano.



# Outline

1 Grafos Eulerianos

2 Digrafos Eulerianos

3 O Problema Chinês do Carteiro

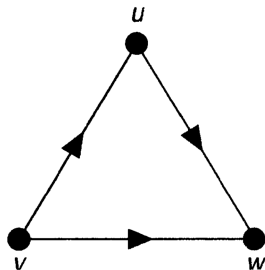
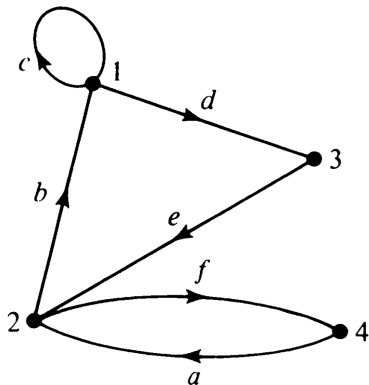
## Definição

Um trajeto orientado que inclua todas as arestas de um dado digrafo  $G(V, A)$  é chamado de **trajeto euleriano**.

Seja  $G$  um digrafo conexo (fortemente ou fracamente). Dizemos que  $G$  é **euleriano** se possui um trajeto euleriano fechado.

Um digrafo  $G$  não-euleriano é dito ser **semi-euleriano** se possui um trajeto euleriano.

# Exemplos



# Teorema de Euler para digrafos

## Teorema

*Um digrafo  $D(V, A)$  é euleriano se, e somente se,  $D$  é balanceado (i.e.,  $d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V$ ).*

## Corolário

*Um digrafo  $D(V, A)$  é semi-euleriano se, e somente se, existem dois vértices  $x, y \in V$  tais que*

$$d_s(x) - d_e(x) = 1, \quad d_e(y) - d_s(y) = 1$$

*e*

$$d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V \setminus \{x, y\}.$$

*Demonstrações: Exercício.*

# Teorema de Euler para digrafos

## Teorema

*Um digrafo  $D(V, A)$  é euleriano se, e somente se,  $D$  é balanceado (i.e.,  $d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V$ ).*

## Corolário

*Um digrafo  $D(V, A)$  é semi-euleriano se, e somente se, existem dois vértices  $x, y \in V$  tais que*

$$d_s(x) - d_e(x) = 1, \quad d_e(y) - d_s(y) = 1$$

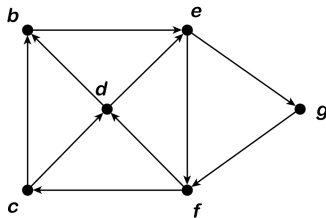
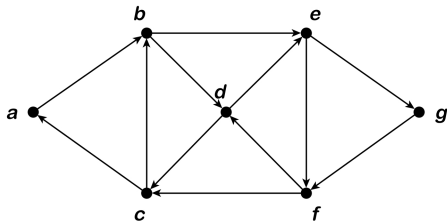
*e*

$$d_e(v) = d_s(v) \forall v \in V \setminus \{x, y\}.$$

*Demonstrações: Exercício.*

# Exercícios

Determine se os grafos abaixo são eulerianos ou semi-eulerianos (em caso positivo, exiba os trajetos euleriano e semi-euleriano).



- 1 Mostre que um digrafo euleriano é necessariamente fortemente conexo.
- 2 Exiba um contra-exemplo para mostrar que nem todo digrafo fortemente conexo é euleriano.



# Outline

1 Grafos Eulerianos

2 Digrafos Eulerianos

3 O Problema Chinês do Carteiro

# Definição do problema

O Problema Chinês do Carteiro foi postulado em 1962 pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan:

*Considere um grafo valorado (ou rede)  $G$  tal que os pesos das arestas são não-negativos. Encontre um passeio fechado que percorra todas as arestas de  $G$  com peso total mínimo.*

## Aplicações:

- 1 Coleta de lixo;
- 2 Entregas;
- 3 Limpeza de ruas;
- 4 Checagem de páginas da internet:

# Definição do problema

O Problema Chinês do Carteiro foi postulado em 1962 pelo matemático chinês Mei-Ku Kwan:

*Considere um grafo valorado (ou rede)  $G$  tal que os pesos das arestas são não-negativos. Encontre um passeio fechado que percorra todas as arestas de  $G$  com peso total mínimo.*

## Aplicações:

- 1 Coleta de lixo;
- 2 Entregas;
- 3 Limpeza de ruas;
- 4 Checagem de páginas da internet:

***Checking a Web site:** Typically, a Web site consists of numerous pages, in turn containing links to each other. As is so often the case, most Web sites are notoriously poor at having their links maintained to the correct pages. This is often due to the simple reason that so many people are responsible for maintaining their part of a site. Apart from links that are broken (i.e., refer to nonexisting pages), it is often necessary to manually check how pages are linked to each other.*

*Graph theory can help by modeling a Web site as an undirected graph where a page is represented by a vertex and a link by an edge having weight 1. Note that we are not using a directed graph, as we may need to cross a link in reverse order, for example, when going back to the original page. If a site is to be manually inspected, then we are seeking a solution to navigate through a site, but with preferably crossing a link at most once. This is now the same as finding a directed walk containing all edges of minimal length.*

# Algoritmo [Gibbons, 1985]

Considere um grafo valorado conexo  $G$  em que o conjunto de vértices de grau ímpar é  $V_{\text{ímpar}} = \{v_1, \dots, v_{2k}\}$ , onde  $k \geq 1$ .

- 1 Para cada par  $(v_i, v_j) \in V_{\text{ímpar}} \times V_{\text{ímpar}}$  com  $v_i \neq v_j$ , encontre o caminho mínimo  $P_{i,j}$  entre  $v_i$  e  $v_j$ .
- 2 Construa um grafo completo com os  $2k$  vértices de  $V_{\text{ímpar}}$  em que o peso da aresta  $(v_i, v_j)$  é o peso do caminho mínimo  $P_{i,j}$ .
- 3 Determine o conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  de  $k$  arestas do grafo completo, duas a duas não-adjacentes, tal que a soma de seus pesos seja mínima.
- 4 Para cada aresta  $e = (v_i, v_j) \in E$ , duplique as arestas de  $P_{i,j}$  em  $G$ .

# Exemplo (Maarten van Steen)

