Teoria dos Grafos

Valeriano A. de Oliveira, Socorro Rangel, Silvio A. de Araujo

Departamento de Matemática Aplicada

Capítulo 12: Grafos Hamiltonianos

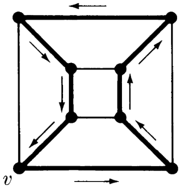
Preparado a partir do texto:
Rangel, Socorro. Teoria do Grafos, Notas de aula, IBILCE, Unesp, 2002-2013.

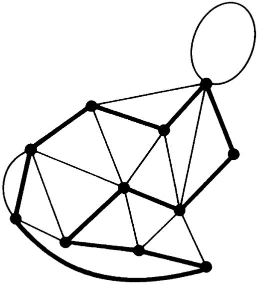
Outline

Introdução

Um trajeto euleriano é caracterizado pelo fato de incluir todas as arestas de um dado grafo, uma única vez.

Entretanto os vértices podem se repetir em um trajeto euleriano. Surge então a questão da possibilidade de se obter um trajeto fechado (não necessariamente euleriano) que inclua cada vértice uma única vez[1]; como por exemplo, nos grafos abaixo:





[1]Neste caso o trajeto será, na verdade, um circuito (com n arestas).

Definições

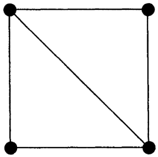
Definição

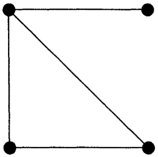
*Um **circuito hamiltoniano** em um grafo conexo é um circuito que contém todos os vértices do grafo.*

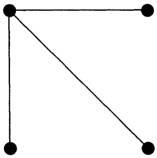
*Um grafo é chamado de **grafo hamiltoniano** se possui um circuito hamiltoniano.*

*Um grafo não-hamiltoniano é **semi-hamiltoniano** se possui um caminho que contém todos os seus vértices.*

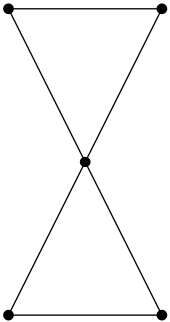
Exemplos:

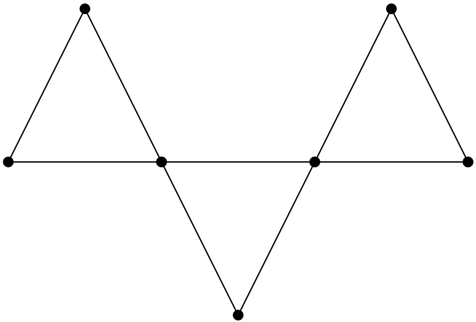






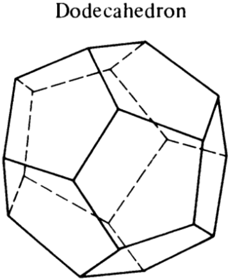
Os grafos abaixo não são hamiltonianos. Por que?

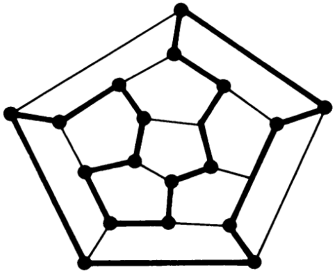




Quais são as condições necessárias e suficientes para definir se um grafo é hamiltoniano?

Esta é uma questão em aberto e foi formulada pelo matemático Sir William Hamilton em 1859.



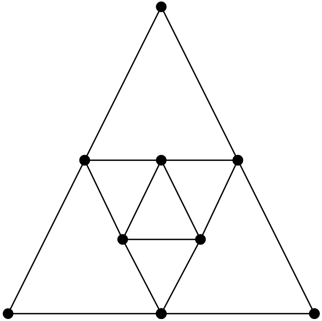


Algumas considerações podem ser feitas:

1. Arestas paralelas e laços não podem pertencer a um circuito hamiltoniano.
2. Se um vértice possui grau 2, as arestas a ele incidentes devem pertencer ao circuito hamiltoniano.
3. Nenhum subcircuito próprio, isto é, um circuito que não possui todos os vértices de G, pode ser formado durante a construção do circuito hamiltoniano.
4. Um vez incluído um vértice, todas as arestas a ele incidentes e que não foram inseridas no circuito podem ser desconsideradas.

Exercício

Verificar se o grafo abaixo é hamiltoniano:



Condição necessária e suficiente?

- No caso de grafos eulerianos temos uma condição necessária e suficiente.
- Porém, para grafos hamiltonianos não há. Na verdade, sabe-se pouco em geral sobre grafos hamiltonianos.
- A maioria dos teoremas são da forma: "Se G possui arestas suficientes, então G é hamiltoniano".
- Os dois teoremas mais celebrados estão enunciados a seguir.

Teorema de Ore (1960)

Teorema

Se $G(V, A)$ é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se

$$d(v) + d(w) \geq n$$

para cada par de vértices não-adjacentes v e w, então G é hamiltoniano.

Demonstração.

Procederemos por contradição. Suponha que G não é hamiltoniano, mas satisfaz a hipótese.

Vamos supor ainda que G é "quase hamiltoniano", no sentido de que a adição de qualquer outra aresta torna-o hamiltoniano.

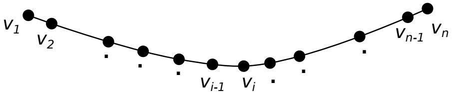
Se este não for o caso, adicionamos arestas extras até que o seja. Observe que a adição de arestas não quebra a hipótese.

Demonstração cont.

Sejam $v, w \in V$ vértices não-adjacentes (existe pelo menos um par, caso contrário, G seria completo e, por conseguinte, hamiltoniano).

Logo, a adição da aresta (v, w) torna G hamiltoniano, o que implica na existência de um caminho passando por todos os vértices:

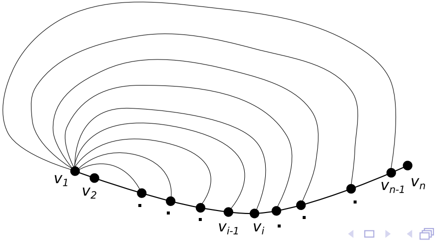
$$v = v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n = w.$$

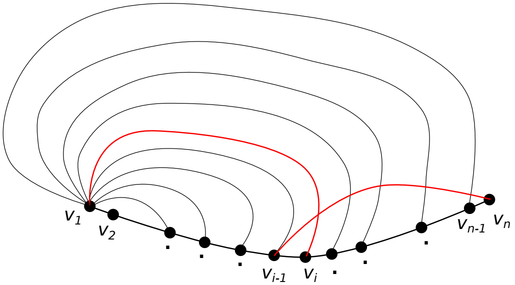


Demonstração cont.

Por hipótese, $d(v_1) + d(v_n) \geq n$, ou seja, existe um conjunto E com ao menos outras $n-2$ arestas incidentes em $\{v_1, v_n\}$.

Logo, existem vértices v_i e v_{i-1} tais que v_i é adjacente a v_1 e v_{i-1} é adjacente a v_n. De fato, se todas as arestas de E incidem, digamos, em v_1, teríamos ao menos um par de arestas paralelas, contradizendo o fato de G ser simples. Similarmente se todas incidem em v_n. Veja a figura.



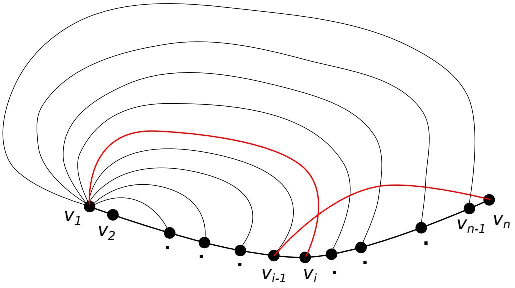


Demonstração cont.

Mas neste caso, temos um circuito hamiltoniano:

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to v_i \to v_1,$$

em contradição à suposição de que G não é hamiltoniano. $\square$



Demonstração cont.

Mas neste caso, temos um circuito hamiltoniano:

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to v_i \to v_1,$$

em contradição à suposição de que G não é hamiltoniano. $\square$

Teorema de Dirac (1952)

Teorema

Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se

$$d(v) \geq \frac{n}{2}$$

para cada vértice v, então G é hamiltoniano.

Demonstração.

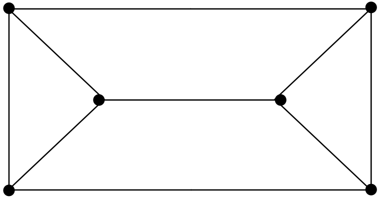
Temos que

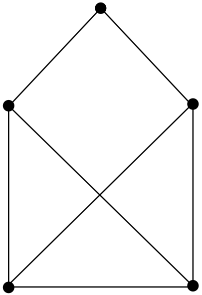
$$d(v) + d(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{2}{2} = n$$

para cada par de vértices v e w (adjacentes ou não-adjacentes). Segue do Teorema de Ore que G é hamiltoniano. $\square$

Exercício

Verificar os dois teoremas através dos seguintes grafos:





Condição Necessária

Teorema

Se $G(V, A)$ é um grafo hamiltoniano, então para todo subconjunto não-vazio, $S \subseteq V$, o grafo $G - S$ possui no máximo $|S|$ componentes.

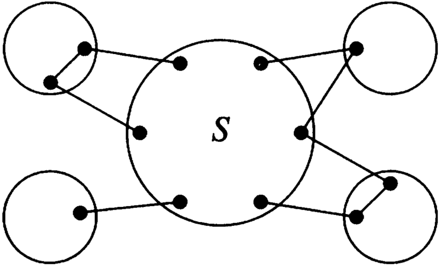
Demonstração.

Sejam $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, e C um ciclo hamiltoniano de G.

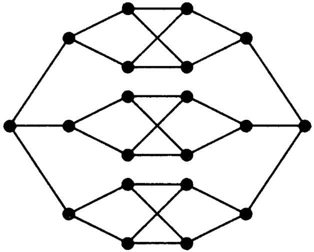
Ao percorrer as arestas de C, quando passamos por um componente de $G - S$, ao deixar este componente, temos, necessariamente, que passar por algum vértice de S.

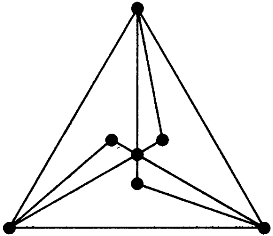
A cada passagem por um componente de G temos que usar um vértice diferente de S ao deixarmos o componente.

Consequentemente, a quantidade de vértices de S deve ser maior ou igual ao número de componentes de G. $\square$


S

Exemplos





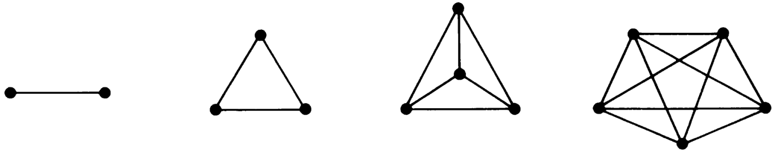
Para que tipo de grafo podemos garantir a existência de um circuito hamiltoniano?

Definição

*Um **grafo completo** é um grafo simples tal que existe uma aresta entre cada par de vértices.*

Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Exemplos:

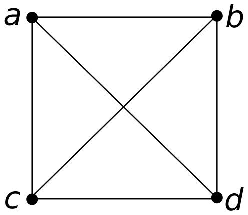


K_2 K_3 K_4 K_5

Como obter um circuito hamiltoniano em um grafo completo K_n, com $n \geq 3$?

Numere os vértices do grafo de 1 a n. Como existe uma aresta entre cada par de vértices, a sequência $1, 2, \ldots, n$ é um circuito hamiltoniano.

Quantos circuitos hamiltonianos um grafo completo possui? Vamos examinar o K_4:



Os circuitos $\{a, b, c, d, a\}$ e $\{a, d, c, b, a\}$ são diferentes ou iguais?

Partindo do vértice 1, temos $n-1$ escolhas de arestas para fazer.

Em seguida, a partir do vértice 2, temos $n-2$ arestas para escolher;

e assim por diante até a escolha da última aresta.

Ou seja, há $(n-1)!$ possibilidades; e se considerarmos que circuitos do tipo

$$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}, v_{i_1}\}$$

são iguais ao circuito

$$\{v_{i_1}, v_{i_n}, v_{i_{n-1}}, \ldots, v_{i_2}, v_{i_1}\},$$

teremos que o número total de circuitos é dado por $(n-1)!/2$.

Teorema

Em um grafo completo com n vértices existem $(n-1)/2$ circuitos hamiltonianos aresta-disjuntos, se $n \geq 3$ é ímpar.

Demonstração.

Ver página 33 de [N. Deo, Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science, Prentice-Hall, 1974]. $\square$

Outline

Colocação do Problema

Um viajante necessita visitar um certo número de cidades durante uma viagem e retornar ao lugar de origem de tal maneira que cada cidade é visitada exatamente uma vez e que a distância total percorrida seja a menor possível. Dada a distância entre as cidades, que rota ele deve escolher?

Como resolver este problema?

Vamos representar o problema acima através de um grafo valorado. Seja V o conjunto de cidades, A o conjunto das estradas interligando as cidades e o valor de cada aresta como sendo a distância entre as respectivas cidades.

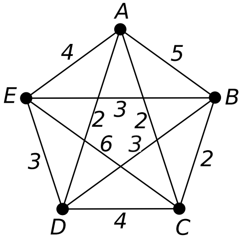
Colocação do Problema

> *Um viajante necessita visitar um certo número de cidades durante uma viagem e retornar ao lugar de origem de tal maneira que cada cidade é visitada exatamente uma vez e que a distância total percorrida seja a menor possível. Dada a distância entre as cidades, que rota ele deve escolher?*

Como resolver este problema?

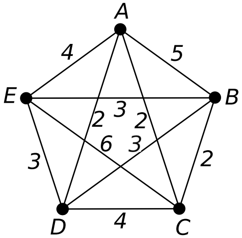
Vamos representar o problema acima através de um grafo valorado. Seja V o conjunto de cidades, A o conjunto das estradas interligando as cidades e o valor de cada aresta como sendo a distância entre as respectivas cidades.

Vamos supor que o viajante deseja visitar 5 cidades cujas estradas existentes entre cada par de cidades estejam representadas através do seguinte grafo:



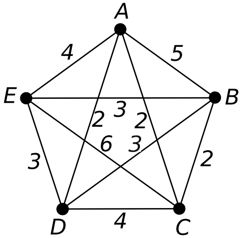
Em princípio, este problema pode ser resolvido determinando-se todas as rotas possíveis e escolhendo a que resultar na menor distância percorrida. Neste exemplo, uma possível rota é dada por: $\{A, B, C, D, E, A\}$ cuja distância é $5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 18km$. A rota ótima é: $\{A, C, B, E, D, A\}$ cuja distância é $12km$.

Vamos supor que o viajante deseja visitar 5 cidades cujas estradas existentes entre cada par de cidades estejam representadas através do seguinte grafo:



Em princípio, este problema pode ser resolvido determinando-se todas as rotas possíveis e escolhendo a que resultar na menor distância percorrida. Neste exemplo, uma possível rota é dada por: $\{A, B, C, D, E, A\}$ cuja distância é $5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 18km$. A rota ótima é: $\{A, C, B, E, D, A\}$ cuja distância é $12km$.

Vamos supor que o viajante deseja visitar 5 cidades cujas estradas existentes entre cada par de cidades estejam representadas através do seguinte grafo:



Em princípio, este problema pode ser resolvido determinando-se todas as rotas possíveis e escolhendo a que resultar na menor distância percorrida. Neste exemplo, uma possível rota é dada por: $\{A, B, C, D, E, A\}$ cuja distância é $5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 18km$. A rota ótima é: $\{A, C, B, E, D, A\}$ cuja distância é $12km$.

- Esta técnica é eficiente?

  Considere um problema que envolva 10 cidades.

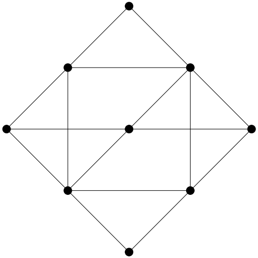
  O número máximo de possíveis rotas seria de $9! = 362.880$.

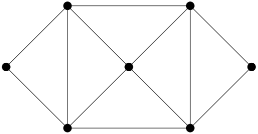
  Uma máquina equipada com um programa que conseguisse examinar 1 milhão de rotas por segundo levaria $0,36s$ para encontrar a melhor rota.

  Se dobrássemos o número de cidades, teríamos que examinar $19! = 1,22 \times 10^{17}$ rotas e o mesmo programa levaria aproximadamente 3.800 anos para encontrar a melhor rota!

Exercícios

1. Quais dos grafos abaixo é hamiltoniano e/ou euleriano? Exiba um circuito hamiltoniano e/ou trajeto euleriano em caso positivo.





2. Dê um exemplo de um grafo não hamiltoniano com n vértices tal que $d(v) \geq (n-1)/2$.
3. Dê um exemplo de um grafo hamiltoniano que não satisfaça o Teorema de Dirac.
4. Dê um exemplo de um grafo que seja euleriano e hamiltoniano.

Outline

Definições

Definição

Um digrafo D é dito ser ***hamiltoniano*** *se possuir um circuito* *orientado* *que inclua todos os seus vértices.*

Um digrafo não-hamiltoniano é dito ser ***semi-hamiltoniano*** *se possuir um caminho* *orientado* *que inclua todos os seus vértices.*

Pouco sabe-se sobre digragos hamiltonianos.

Muitos teoremas para grafos hamiltonianos não são generalizados facilmente para digrafos.

Teoremas

Teorema (Teorema de Dirac (para digrafos))

Seja D um digrafo simples com n vértices. Se

$$d_s(v) \geq \frac{n}{2} \qquad e \qquad d_e(v) \geq \frac{n}{2}$$

para todo vértice v de D, então D é hamiltoniano.

Teorema (Teorema de Ore (para digrafos))

Seja D um digrafo simples com n vértices. Se

$$d_s(v) + d_e(w) \geq n$$

para todo par de vértices não-adjacentes v e w de D, então D é hamiltoniano.