

LISTA DE EXERCÍCIOS 4
SEQUÊNCIAS E INDUÇÃO MATEMÁTICA

1. O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável, ou seja, é possível atribuir (associar) a cada número racional um número natural. Abaixo, os números racionais positivos estão representados na forma de um par ordenado onde o primeiro número representa o numerador e o segundo o denominador. Começando do número racional 1 — par ordenado $(1, 1)$ — é possível associar o número natural 1 e, seguindo o sentido das setas, atribuir o próximo número natural definindo assim uma sequência de enumeração. Dado o número racional positivo $\frac{p}{q}$, qual é o número natural correspondente?



2. Prove por indução matemática que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

3. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2, n \geq 1.$$

4. Prove por indução matemática que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2, n \geq 1.$$

5. Prove por indução matemática que

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

6. Prove por indução matemática que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

7. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

\forall inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

8. Ache a fórmula fechada para o produto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

\forall inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

9. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

\forall inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

10. Ache a fórmula fechada para a soma

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i},$$

\forall inteiros $n \geq 2$ e prove o seu resultado por indução matemática.

11. Prove o seguinte predicado $P(n)$ usando indução matemática:

$P(n)$: Qualquer número inteiro positivo $n \geq 8$ pode ser escrito como a soma de 3's e 5's.

12. Suponha que temos selos de 4 e 7 centavos. Prove que é possível ter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando somente esses selos.
13. Prove por indução matemática que $n^2 < 2^n$, para todos inteiros $n \geq 5$.
14. Seja a seqüência a_1, a_2, a_3, \dots definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_k &= 7a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $a_n = 3 \cdot 7^{n-1}$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

15. Seja a seqüência a_1, a_2, a_3, \dots definida como

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_k &= a_{k-2} + 2a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que a_n é ímpar para todos os inteiros $n \geq 1$.

16. Seja a seqüência g_0, g_1, g_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} g_0 &= 12 \\ g_1 &= 29 \\ g_k &= 5g_{k-1} - 6g_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $g_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

17. Seja a seqüência h_0, h_1, h_2, \dots definida como

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= 2 \\ h_2 &= 3 \\ h_k &= h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3}, \forall \text{ inteiros } k \geq 3 \end{aligned}$$

Prove por indução matemática que $h_n \leq 3^n$ para todos os inteiros $n \geq 0$.

18. Seja a seqüência x_0, x_1, x_2, \dots definida como

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 1 \\x_k &= 5x_{k-1}^3 + 7x_{k-2}, \forall \text{ inteiros } k \geq 2\end{aligned}$$

Prove por indução matemática que se k é múltiplo de 3 então x_k é par.

19. Seja a seqüência a_0, a_1, a_2, \dots definida como

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\a_1 &= 0 \\a_k &= a_{k-1} + 3^k(k-1), \forall \text{ inteiros } k \geq 2\end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k -ésimo termo e prove por indução matemática.

20. Seja a seqüência a_0, a_1, a_2, \dots definida como

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\a_1 &= 1 \\a_k &= k - a_{k-1}, \forall \text{ inteiros } k \geq 1\end{aligned}$$

Ache a fórmula fechada para o k -ésimo termo e prove por indução matemática.

21. Prove por indução matemática que $\forall n \geq 1, 3^n - 2$ é ímpar.