Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 05
Lógica Booleana e Simplificação de Circuitos Lógicos

Teoremas Booleanos:

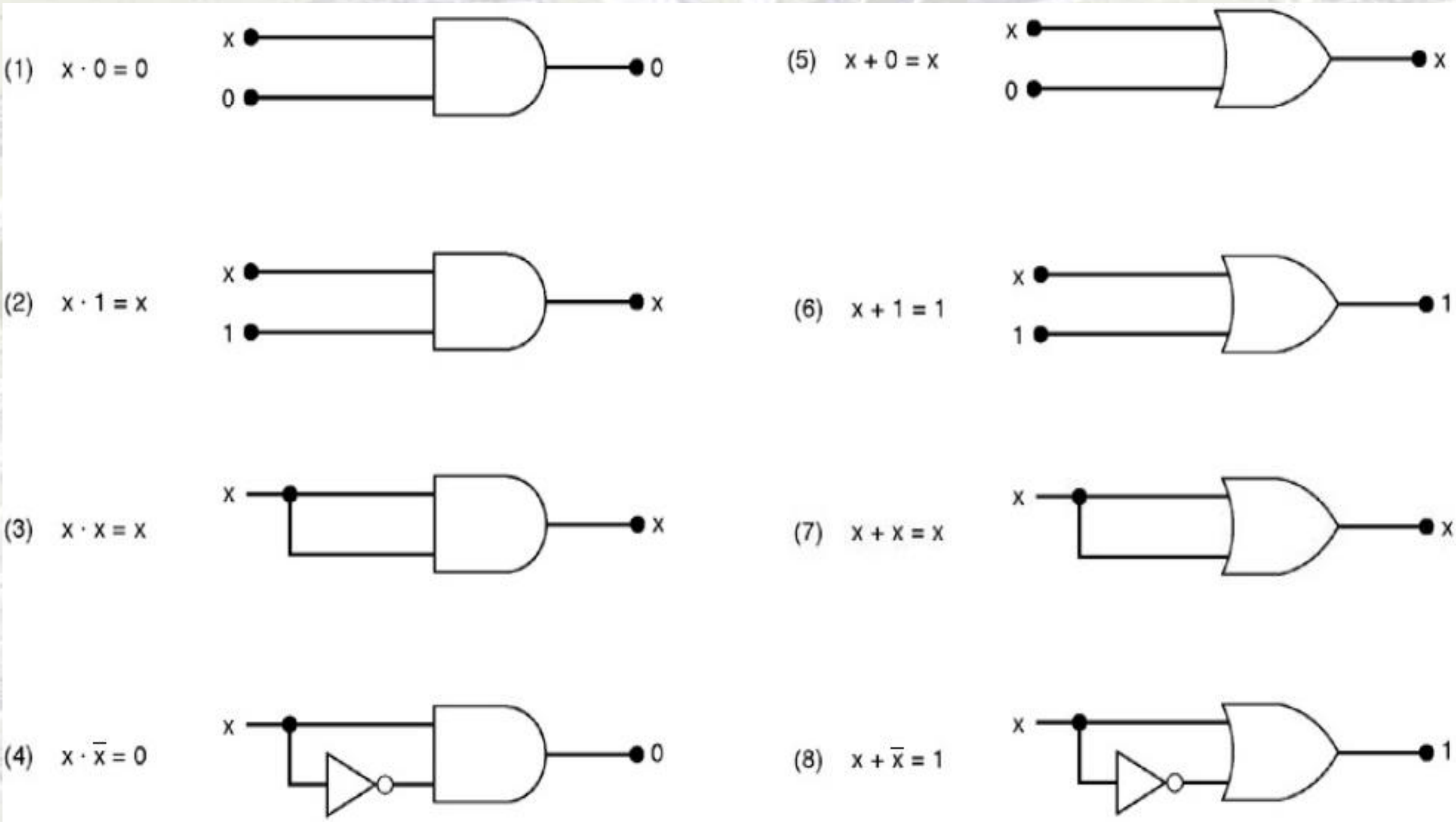
Teoremas Booleanos

Vimos como a Álgebra Booleana pode ser usada para ajudar na análise de um circuito lógico e como expressar matematicamente a operação do circuito. Prosseguimos no uso da Álgebra Booleana investigando **teoremas Booleanos**, que poderão nos ajudar a **simplificar expressões lógicas e circuitos lógicos**.

Começaremos com os teoremas para uma variável lógica, acompanhados de um circuito lógico para demonstrar sua validade.

Em seguida, serão apresentados os teoremas com mais de uma variável lógica.

Postulados Adição e Multiplicação



Postulados Adição e Multiplicação

Teoremas com 1 variável lógica

Ressalta-se que a variável *x* em que se aplica os teoremas de (1) a (8) pode ser uma expressão que contenha mais de uma variável.

Postulados Adição e Multiplicação

Teoremas com 1 variável lógica

Ressalta-se que a variável *x* em que se aplica os teoremas de (1) a (8) pode ser uma expressão que contenha mais de uma variável.

Por exemplo, se tivéssemos a expressão $A\bar{B}\left(\overline{A\bar{B}}\right)$, poderíamos considerar $x = A\bar{B}$ e aplicar o teorema (4):

Teorema (4): $x \cdot \bar{x} = 0$

Assim: $A\bar{B}\left(\overline{A\bar{B}}\right) = 0$

Postulados Adição e Multiplicação

Teoremas com 1 variável lógica

Ressalta-se que a variável *x* em que se aplica os teoremas de (1) a (8) pode ser uma expressão que contenha mais de uma variável.

Por exemplo, se tivéssemos a expressão $A\bar{B}\left(\overline{A\bar{B}}\right)$, poderíamos considerar $x = A\bar{B}$ e aplicar o teorema (4):

Teorema (4): $x \cdot \bar{x} = 0$

Assim: $A\bar{B}\left(\overline{A\bar{B}}\right) = 0$

A mesma ideia pode ser aplicada no uso de qualquer um desses teoremas !

Leis ou Propriedades

Teoremas com mais de uma variável lógica

Leis Comutativas

$$(09) \quad x + y = y + x$$

$$(10) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Leis Associativas

$$(11) \quad x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$

$$(12) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$$

Lei Distributiva

$$(13a) \quad x \cdot (y + z) = xy + xz$$

$$(13b) \quad (w + x) \cdot (y + z) = wy + xy + wz + xz$$

Os teoremas (09) a (13) têm equivalência na Álgebra convencional !

Identidades Auxiliares:

Teoremas (14) e (15)

$$(14) \quad x + xy = x$$

$$(15a) \quad x + \overline{x}y = x + y$$

$$(15b) \quad \overline{x} + xy = \overline{x} + y$$

Identidades Auxiliares:

Teoremas (14) e (15)

$$(14) \quad x + xy = x$$

$$(15a) \quad x + \overline{x}y = x + y$$

$$(15b) \quad \overline{x} + xy = \overline{x} + y$$

Provando o Teorema (14):

$$x + xy = x \cdot 1 + x.y$$

$$= x \cdot (1 + y) \qquad \textbf{Lei Distributiva}$$

$$= x \cdot 1 \qquad \textbf{Postulado 6}$$

$$= x \qquad \textbf{Postulado 2}$$

Identidades Auxiliares:

$$(15a) \quad x + \overline{x}y = x + y$$

Provando o Teorema (15a):

$x + \overline{x}y = x \cdot (1 + y) + \overline{x}y$	**Postulado 6**
$= x + xy + \overline{x}y$	**Lei Distributiva**
$= x + y \cdot (x + \overline{x})$	**Lei Distributiva**
$= x + y \cdot (1)$	**Postulado 8**
$= x + y$	**Postulado 2**

Teoremas de DeMorgan

Dois dos mais importantes teoremas da álgebra Booleana foram uma contribuição do matemático Augustus DeMorgan.

Os **teoremas de DeMorgan** são extremamente úteis na simplificação de expressões nas quais um produto, ou uma soma, de variáveis aparece negado (barrado).

Teoremas de DeMorgan

1º Teorema – O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$(16) \quad \left(\overline{\mathrm{x} + \mathrm{y}}\right) = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Teoremas de DeMorgan

1º Teorema – O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$(16)\quad \left(\overline{\mathrm{x}+\mathrm{y}}\right)=\bar{x}\cdot\bar{y}$$

2º Teorema – O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

$$(17)\quad \left(\overline{x\cdot y}\right)=\bar{x}+\bar{y}$$

Teoremas de DeMorgan

1º Teorema – O complemento da soma é igual ao produto dos complementos.

$$(16) \quad \left(\overline{x + y}\right) = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

2º Teorema – O complemento do produto é igual a soma dos complementos.

$$(17) \quad \left(\overline{x \cdot y}\right) = \bar{x} + \bar{y}$$

Para provar esses teoremas basta montar a tabela verdade!

Teoremas de DeMorgan

Teorema DeMorgan para mais de 2 variáveis!

Considere o complemento da soma lógica para três variáveis lógicas:

$$\overline{x+y+z} = \overline{(x+y)} \cdot \overline{z}$$

Teoremas de DeMorgan

Teorema DeMorgan para mais de 2 variáveis!

Considere o complemento da soma lógica para três variáveis lógicas:

$$\overline{x+y+z} = \overline{(x+y)}\cdot\overline{z}$$

$$= \boxed{\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}}$$

Expressão semelhante ao teorema para 2 variáveis !!

Teoremas de DeMorgan

Teorema DeMorgan para mais de 2 variáveis!

Considere o complemento da soma lógica para três variáveis lógicas:

$$\overline{x+y+z} = \overline{(x+y)} \cdot \overline{z}$$

$$= \boxed{\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}}$$

Expressão semelhante ao teorema para 2 variáveis !!

De forma semelhante, temos que:

$$\overline{x \cdot y \cdot z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

Postulados Complementação

Finalmente, o postulado da complementação é dado por:

$$1^o)\ A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A} = 1$$

$$2^o)\ A = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A} = 0$$

Deste postulado chega-se a:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$Assim,$$

$$A = 1,\ \overline{A} = 0,\ \overline{\overline{A}} = 1$$

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$ **Evidenciar A**

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$ **Evidenciar A**

$$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$$ **Propriedade Associativa**

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$ **Evidenciar A**

$$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$$ **Propriedade Associativa**

$$S = A\left[BC + \left(\overline{C} + \overline{B}\right)\right]$$ **Postulado da Complementação**

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$ **Evidenciar A**

$$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$$ **Propriedade Associativa**

$$S = A\left[BC + \left(\overline{C} + \overline{B}\right)\right]$$ **Postulado da Complementação**

$$S = A\left[BC + \overline{\overline{\left(\overline{C} + \overline{B}\right)}}\right]$$ **Teorema de DeMorgan**

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$	**Evidenciar A**
$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$	**Propriedade Associativa**
$S = A\left[BC + \left(\overline{C} + \overline{B}\right)\right]$	**Postulado da Complementação**
$S = A\left[BC + \overline{\overline{\left(\overline{C} + \overline{B}\right)}}\right]$	**Teorema de DeMorgan**
$S = A\left(BC + \overline{BC}\right)$	**Postulado da Adição**

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$

Evidenciar A

$$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$$

Propriedade Associativa

$$S = A\left[BC + \left(\overline{C} + \overline{B}\right)\right]$$

Postulado da Complementação

$$S = A\left[BC + \overline{\overline{\left(\overline{C} + \overline{B}\right)}}\right]$$

Teorema de DeMorgan

$$S = A\left(BC + \overline{BC}\right)$$

Postulado da Adição

$$S = A(1)$$

Postulado da Multiplicação

Simplificação de Expressões Lógicas

Utilizando os conceitos da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e circuitos lógicos.

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo.

$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$	**Evidenciar A**
$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$	**Propriedade Associativa**
$S = A\left[BC + \left(\overline{C} + \overline{B}\right)\right]$	**Postulado da Complementação**
$S = A\left[BC + \overline{\overline{\left(\overline{C} + \overline{B}\right)}}\right]$	**Teorema de DeMorgan**
$S = A\left(BC + \overline{BC}\right)$	**Postulado da Adição**
$S = A(1)$	**Postulado da Multiplicação**
$S = A$	

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 1 – Simplifique a expressão:

$$S = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C$$

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 1 – Simplifique a expressão:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$$

Neste caso, podemos colocar duas variáveis em evidências:

$$S = \overline{A}\,\overline{C}\left(B + \overline{B}\right) + A\overline{B}C$$

$$S = \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 2 – Prove que:

$$S = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,C + \bar{A}\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,B\,\bar{C} = \bar{C} + \bar{A}\,B$$

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 2 – Prove que:

$$S = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,C + \bar{A}\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,B\,\bar{C} = \bar{C} + \bar{A}\,B$$

1) Qual é a variável mais comum entre os termos?

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 2 – Prove que:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} = \overline{C} + \overline{A}\,B$$

1) Qual é a variável mais comum entre os termos?

2) Novamente! Qual é a variável mais comum?

Simplificação de Expressões Lógicas

Exercícios 3 – Prove que:

$$\left(A+B+C\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)=A\oplus B+C$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

O **mapa de Karnaugh** é um método gráfico usado para simplificar uma equação lógica ou para converter uma tabela-verdade no seu circuito lógico correspondente, de uma forma simples e metódica.

Tabela-Verdade

A	B	X	
0	0	1	$\rightarrow \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$\rightarrow AB$

Expressão

$$\left\{ X = \overline{A}\,\overline{B} + AB \right\}$$

Mapa de Karnaugh

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	0	1

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplos com mais variáveis:

Tabela-Verdade

A	B	C	X
0	0	0	1 → $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	1 → $\overline{A}\,\overline{B}C$
0	1	0	1 → $\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1 → $AB\overline{C}$
1	1	1	0

Expressão

$$\left\{ \begin{aligned} X = {} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C \\ & + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} \end{aligned} \right\}$$

Mapa de Karnaugh

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1
$\overline{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\overline{B}$	0	0

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplos com mais variáveis:

Tabela-Verdade

A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\rightarrow \bar{A}B\bar{C}D$
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	1	$\rightarrow AB\bar{C}D$
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	$\rightarrow ABCD$

Expressão

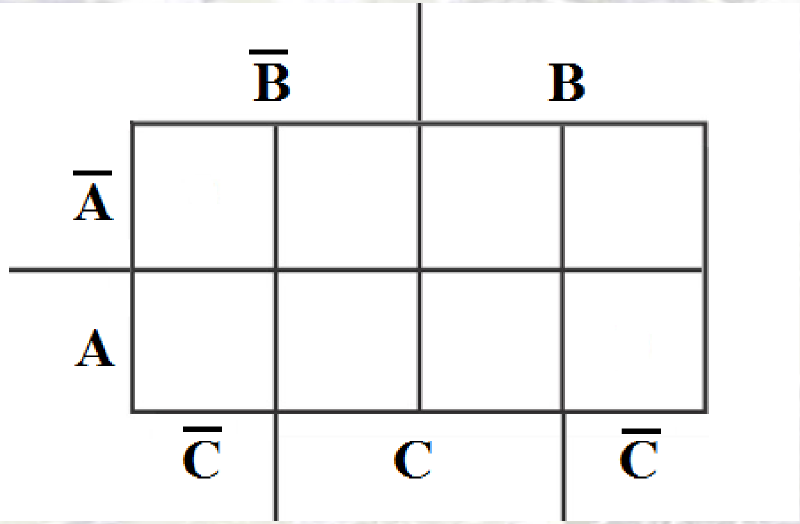
$$\left\{ \begin{array}{l} X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D \\ \quad + AB\bar{C}D + ABCD \end{array} \right\}$$

Mapa de Karnaugh

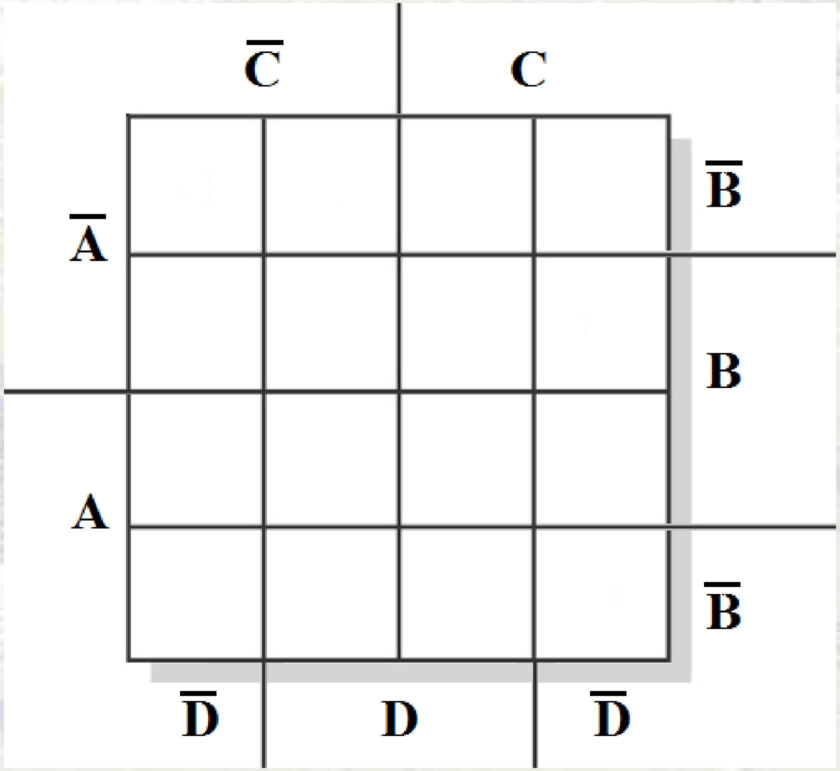
	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	0	0
$\bar{A}B$	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

Outras Formas de Apresentação

Mapa para 3 variáveis:



Mapa para 4 variáveis:



Outras Formas de Apresentação

Mapa para 3 variáveis:

$AB \backslash C$	0	1
00		
01		
11		
10		

$AB \backslash C$	0	1
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
11	$AB\bar{C}$	ABC
10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

Outras Formas de Apresentação

Mapa para 4 variáveis:

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Pontos mais importantes do Mapa de Karnaugh:

1. A tabela-verdade fornece o valor da saída *X* para cada combinação de valores de entrada. O mapa fornece a mesma informação em um formato diferente. **Assim, cada linha na tabela-verdade corresponde a um quadrado no mapa.**

2. Os quadrados no mapa são organizados de forma que **quadrados adjacentes horizontalmente, ou verticalmente, diferem em apenas uma variável.**

3. Uma vez que um mapa tenha sido preenchido com 0s e 1s, a expressão na forma de soma-de-produtos para uma **saída *qualquer,* pode ser obtida fazendo-se a operação OR dos quadrados que contêm 1.**

Mapas de Veitch-Karnaugh

A expressão para a saída pode ser simplificada combinando, adequadamente, os quadrados do mapa de Karnaugh que contêm 1s. O processo de combinação desses 1s é denominado **agrupamento**.

Mapas de Veitch-Karnaugh

A expressão para a saída pode ser simplificada combinando, adequadamente, os quadrados do mapa de Karnaugh que contêm 1s. O processo de combinação desses 1s é denominado **agrupamento**.

Agrupamento de dois quadrados: Agrupando um par de 1s adjacentes, elimina-se **a variável (uma variável)** que aparece nas formas complementada e não-complementada, ou seja, aquela que apresenta um variação.

Mapas de Veitch-Karnaugh

A expressão para a saída pode ser simplificada combinando, adequadamente, os quadrados do mapa de Karnaugh que contêm 1s. O processo de combinação desses 1s é denominado **agrupamento**.

Agrupamento de dois quadrados: Agrupando um par de 1s adjacentes, elimina-se **a variável (uma variável)** que aparece nas formas complementada e não-complementada, ou seja, aquela que apresenta um variação.

Exemplo:

$$X = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

$$= B\overline{C}\left(\overline{A} + A\right)$$

$$= B\overline{C}$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

A expressão para a saída pode ser simplificada combinando, adequadamente, os quadrados do mapa de Karnaugh que contêm 1s. O processo de combinação desses 1s é denominado **agrupamento**.

Agrupamento de dois quadrados: Agrupando um par de 1s adjacentes, elimina-se **a variável (uma variável)** que aparece nas formas complementada e não-complementada, ou seja, aquela que apresenta um variação.

Exemplo:

$$X = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\overline{B}$	0	0
$\overline{A}B$	1	0
AB	1	0
$A\overline{B}$	0	0

$X = B\overline{C}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo, utilizando Mapas de Karnaugh.

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo, utilizando Mapas de Karnaugh.

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		
A		

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo, utilizando Mapas de Karnaugh.

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	1

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: Simplifique a expressão abaixo, utilizando Mapas de Karnaugh.

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	1

$$S = A + B$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplos:

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	1	1
AB	0	0
$A\bar{B}$	0	0

$X = \bar{A}B$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	0	0
$A\bar{B}$	1	0

$X = \bar{B}\bar{C}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$\bar{A}\bar{B}C$

$X = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{D}$

$A\bar{B}\bar{D}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Agrupamento de quatro quadros (quartetos ou quadras)

Agrupando um quarteto de 1s adjacentes em um mapa de Karnaugh, elimina-se **duas variáveis** que aparecem nas formas complementada e não complementada.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Agrupamento de quatro quadros (quartetos ou quadras)

Agrupando um quarteto de 1s adjacentes em um mapa de Karnaugh, elimina-se **duas variáveis** que aparecem nas formas complementada e não complementada.

Exemplo:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C$$

$$= \overline{A}C\left(\overline{B} + B\right) + AC\left(B + \overline{B}\right)$$

$$= \overline{A}C + AC$$

$$= C\left(\overline{A} + A\right)$$

$$= C$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Agrupamento de quatro quadros (quartetos ou quadras)

Agrupando um quarteto de 1s adjacentes em um mapa de Karnaugh, elimina-se **duas variáveis** que aparecem nas formas complementada e não complementada.

Exemplo:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C$$

$$= \overline{A}C\left(\overline{B} + B\right) + AC\left(B + \overline{B}\right)$$

$$= \overline{A}C + AC$$

$$= C\left(\overline{A} + A\right)$$

$$= C$$

	$\overline{C}$	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	1
$\overline{A}B$	0	1
AB	0	1
$A\overline{B}$	0	1

$$X = C$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplos:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$X = AB$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$X = BD$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	1	0	0	1
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = A\bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	0	1
$\bar{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	0	1

$X = \bar{B}\bar{D}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Agrupamento de oito quadrados (octetos)

Agrupando-se um octeto de 1s adjacentes em um mapa de Karnaugh, elimina-se **três variáveis** que aparecem nas formas complementada e não-complementada.

Exemplos:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	0
$\bar{A}B$	1	1	1	1
AB	1	1	1	1
$A\bar{B}$	0	0	0	0

$\boxed{X = B}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	1	1	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

$\boxed{X = \bar{C}}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Outras possibilidades:

Exemplos:

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$\overline{A}B$	0	0	0	0
AB	0	0	0	0
$A\overline{B}$	1	1	1	1

$\boxed{X = \overline{B}}$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	0	0	1
$\overline{A}B$	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
$A\overline{B}$	1	0	0	1

$\boxed{X = \overline{D}}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Processo Completo de Simplificação:

Quando uma variável aparece nas formas complementada e não-complementada em um agrupamento, tal variável é eliminada da expressão. As variáveis que não se alteram para todos os quadros do agrupamento têm de permanecer na expressão final.

Deve ficar claro que um grupo maior de 1s elimina mais variáveis (simplifica mais a saída). Para ser exato, um grupo de dois 1s elimina uma variável, um grupo de quatro 1s elimina duas variáveis, um grupo de oito 1s elimina três variáveis, um grupo de dezesseis 1s elimina 4 variáveis. Esse princípio será usado para se obter a expressão lógica simplificada a partir do mapa de Karnaugh que contém qualquer combinação de 1s e 0s.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Processo Completo de Simplificação:

1. Construa o mapa e coloque os 1s nos quadros que correspondem aos 1s na tabela-verdade (ou aos termos da expressão). Coloque 0s nos demais quadrados;
2. Agrupe os termos isolados;
3. Agrupe os pares;
4. Agrupe as quadras, octetos, etc...;
5. ***Busque usar o menor número de agrupamentos, certificando-se de que nenhum 1 ficou de fora***.
6. Forme a soma (OR) de todos os termos gerados por cada agrupamento.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: A partir do mapa abaixo, obtenha a expressão simplificada.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	1	0

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: A partir do mapa abaixo, obtenha a expressão simplificada.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	$\boxed{1}$
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	1	0

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: A partir do mapa abaixo, obtenha a expressão simplificada.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	$\boxed{1}$
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	1	0

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: A partir do mapa abaixo, obtenha a expressão simplificada.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	1
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\overline{B}$	0	0	1	0

Mapas de Veitch-Karnaugh

Exemplo: A partir do mapa abaixo, obtenha a expressão simplificada.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	0	0	1
$\bar{A}B$	0	1	1	0
AB	0	1	1	0
$A\bar{B}$	0	0	1	0

$$X = \underbrace{\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}_{\text{Termo isolado}} + \underbrace{ACD}_{\text{Par}} + \underbrace{BD}_{\text{Quadra}}$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Preenchendo o Mapa de Karnaugh a partir da expressão da saída:

Use o mapa K para simplificar a expressão:

$$Y = \overline{C}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + D\right) + A\overline{B}C + \overline{D}$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Preenchendo o Mapa de Karnaugh a partir da expressão da saída:

Use o mapa K para simplificar a expressão:

$$Y = \overline{C}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + D\right) + A\overline{B}C + \overline{D}$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{D}$$

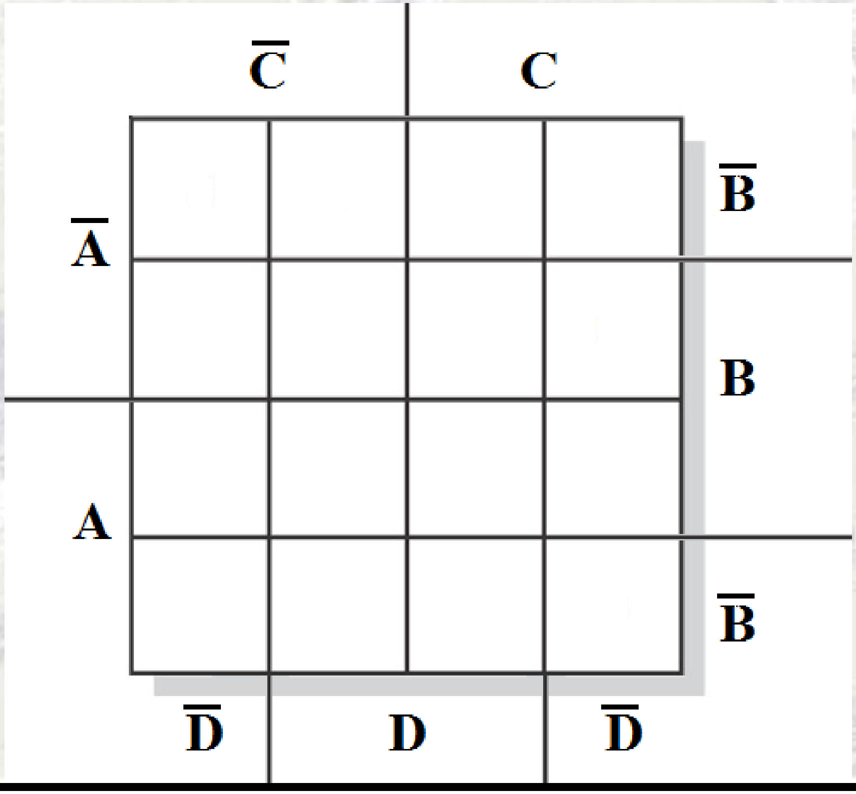
Mapas de Veitch-Karnaugh

Preenchendo o Mapa de Karnaugh a partir da expressão da saída:

Use o mapa K para simplificar a expressão:

$$Y = \overline{C}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + D\right) + A\overline{B}C + \overline{D}$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{D}$$



Mapas de Veitch-Karnaugh

Preenchendo o Mapa de Karnaugh a partir da expressão da saída:

Use o mapa K para simplificar a expressão:

$$Y = \overline{C}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + D\right) + A\overline{B}C + \overline{D}$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{D}$$

		$\overline{C}$		C		
$\overline{A}$		1	1		1	$\overline{B}$
		1	1		1	B
A		1	1		1	
		1	1	1	1	$\overline{B}$
		$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

Mapas de Veitch-Karnaugh

Preenchendo o Mapa de Karnaugh a partir da expressão da saída:

Use o mapa K para simplificar a expressão:

$$Y = \overline{C}\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + D\right) + A\overline{B}C + \overline{D}$$

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D + A\overline{B}C + \overline{D}$$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1		1
$\overline{A}B$	1	1		1
AB	1	1		1
$A\overline{B}$	1	1	1	1

Expressão simplificada:

$$Y = \overline{D} + \overline{C} + A\overline{B}$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Alguns circuitos lógicos podem ser projetados de forma que existam certas condições de entrada para as quais não existem níveis de saída especificada – **normalmente essas condições de entrada nunca ocorrerão**.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Alguns circuitos lógicos podem ser projetados de forma que existam certas condições de entrada para as quais não existem níveis de saída especificada – **normalmente essas condições de entrada nunca ocorrerão**.

Para estas condições de entrada, a saída não é especificada nem como 0 nem como 1, e sim por um ***X*** que indica que aquela **condição não importa *(don’t-care)***.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Exemplo:

A	B	C	z	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	x	"don't
1	0	0	x	care"
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Neste caso, o projetista está livre para fazer a saída ser 0 ou 1, como melhor lhe convir, de forma a obter a expressão mais simples.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Exemplo:

A	B	C	z	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	x	irrelevante
1	0	0	x	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Exemplo:

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\left.\begin{array}{l} x \\ x \end{array}\right\}$ irrelevante

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

Mapas de Veitch-Karnaugh

Condições de “don’t-care”:

Exemplo:

A	B	C	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	x
1	0	0	x
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

irrelevante

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	x
AB	1	1
$A\bar{B}$	x	1

$\Rightarrow$

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	0	0
$\bar{A}B$	0	0
AB	1	1
$A\bar{B}$	1	1

$\boxed{z = A}$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Casos que não admitem simplificação:

A expressão das funções OU Exclusivo e Coincidência são:

$$S = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$S = A \odot B = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	0

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	0	1

Mapas de Veitch-Karnaugh

Casos que não admitem simplificação:

A expressão das funções OU Exclusivo e Coincidência são:

$$S = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$S = A \odot B = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	0

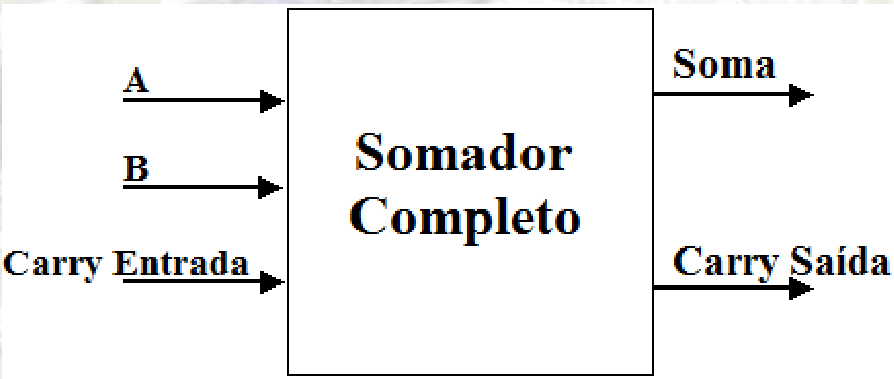
	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	0
A	0	1

Através dos Mapas de Karnaugh, notamos que as expressões encontram-se na forma de máxima simplificação, não havendo outra possibilidade.

Mapas de Veitch-Karnaugh

Casos que não admitem simplificação:

Exemplo: Circuito somador completo (Full Adder)



A	B	Te	Soma	Ts
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$Soma = \overline{A}\,\overline{B}\,T_E + \overline{A}\,B\,\overline{T_E} + A\,\overline{B}\,\overline{T_E} + A\,B\,T_E$$

$$T_s = \overline{A}\,B\,T_E + A\,\overline{B}\,T_E + A\,B\,\overline{T_E} + A\,B\,T_E$$

Mapas de Veitch-Karnaugh

Casos que não admitem simplificação:

Exemplo: Circuito somador completo (Full Adder)

Simplificando, chega-se a:

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	0	1
A	1	0	1	0
	$\bar{T}_E$	T_E	T_E	$\bar{T}_E$

$$Soma = A \oplus B \oplus T_E$$

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	0	1	0
A	0	1	1	1
	$\bar{T}_E$	T_E	T_E	$\bar{T}_E$

$$T_s = B\,T_E + A\,T_E + A\,B$$

Boa Prova !