CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Lista de Exercícios - Assunto: R. da Cadeia e D. Direcional - Cálculo 2 (ERE)- EM e EC

Professor

1 - Use derivação implícita, considerando $z = f(x, y)$ para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{3z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y}{3z}$

b) $\mathrm{e}^z = xyz$ R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{\mathrm{e}^z - xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{\mathrm{e}^z - xy}$

2 - Determine a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto P dado:

a) $z = x^2 + y^2$ $P(3, 4, 25)$ R: $6x + 8y - z = 25$

b) $z = x^3 - y^3$ $P(3, 2, 19)$ R: $27x - 12y - z = 38$

c) $z = xy$ $P(1, -1, -1)$ R: $x - y + z = 1$

d) $z = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$ $P(0, 0, 1)$ R: $z = 1$

3 - Encontre a aproximação linear $L(x, y)$ das funções abaixo no ponto dado:

a) $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$ $(2, 3)$ R: $L(x, y) = 6x + 4y - 23$

b) $f(x, y) = x^2 \mathrm{e}^y$ $(1, 0)$ R: $L(x, y) = 2x + y - 1$

c) $f(x, y) = 4\,\mathrm{tg}^{-1}(xy)$ $(1, 1)$ R: $L(x, y) = 2x + 2y + \pi - 4$

4 - Use a regra da cadeia para encontrar $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$:

a) $z = xy^3 - x^2y$ $x = t^2 + 1$ $y = t^2 - 1$ R: $2t\left(y^3 - 2xy + 3xy^2 - x^2\right)$

b) $z = \mathrm{sen}\, x \cos y$ $x = \sqrt{t}$ $y = \dfrac{1}{t}$ R: $\dfrac{1}{2\sqrt{t}} \cos x \cos y + \dfrac{1}{t^2} \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$

c) $w = x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}$ $x = t^2$ $y = t - 1$ $z = 1 + 2t$ R: $\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\left(2t + \dfrac{x}{z} - \dfrac{2xy}{z^2}\right)$

5 - Use a regra da cadeia para encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$:

a) $z = (x - y)^5$ $x = s^2t$ $y = st^2$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 5(x - y)^4(2st - t^2)$; $\dfrac{\partial z}{\partial t} = 5(x - y)^4(s^2 - 2st)$

b) $z = \ln(3x + 2y)$ $x = s\,\mathrm{sen}\, t$ $y = t \cos s$

R:: $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{3\,\mathrm{sen}\, t - 2t\,\mathrm{sen}\, s}{3x + 2y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{3s \cos t + 2\cos s}{3x + 2y}$

c) $z = \mathrm{e}^r \cos\theta$ $r = st$ $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \mathrm{e}^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \mathrm{e}^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{s^2 + t^2}}\right)$

6 - Seja f uma função diferenciável em x, y e $g(u, v) = f(\mathrm{e}^u + \mathrm{sen}\, v, \mathrm{e}^u + \cos v)$. Considere a tabela:

	f	g	f_x	f_y
(0,0)	3	6	4	8
(1,2)	6	3	2	5

Calcule: $g_u(0,0)$ e $g_v(0,0)$. R: $g_u(0,0) = 7$ e $g_v(0,0) = 2$

7 - Determine a derivada direcional da função no ponto dado e na direção do vetor v:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$ $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\vec{v} = (-6, 8)$ R: $\dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$

b) $g(r,s) = \operatorname{tg}^{-1}(rs)$ $(1,2)$ $\vec{v} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$ R: $\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$

c) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$ $(1,2,3)$ $\vec{v} = (2,-1,2)$ R: 1

8 - Determine a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{xy}$ em $P(2,8)$ na direção do ponto $Q(5,4)$. R: $\dfrac{2}{5}$

9 - Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção que isso ocorre:

a) $f(x,y) = 4y\sqrt{x}$ $(4,1)$ R: $\sqrt{65}$; $\vec{i} + 8\vec{j}$

b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ $(1,0)$ R: 1 ; $\vec{j}$

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z}$ $(8,1,3)$ R: $\dfrac{3}{4}$; $\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

Bons Estudos!!!