

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

MÉTODOS DE PROVA

1. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

Teorema: Para todos inteiros k , se $k > 0$ então $k^2 + 2k + 1$ é um número composto.

Prova: Suponha que k é um número inteiro tal que $k > 0$. Se $k^2 + 2k + 1$ é composto, então $k^2 + 2k + 1 = r \cdot s$, para inteiros r e s tal que $1 < r < (k^2 + 2k + 1)$ e $1 < s < (k^2 + 2k + 1)$. Já que $k^2 + 2k + 1 = r \cdot s$ e ambos r e s estão necessariamente entre 1 e $k^2 + 2k + 1$, então $k^2 + 2k + 1$ não é primo. Assim, $k^2 + 2k + 1$ é composto, o que devia ser mostrado.

2. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

Teorema: A soma de quaisquer dois inteiros pares é igual a $4k$ para algum inteiro k .

Prova: Suponha que m e n são dois inteiros pares quaisquer. Pela definição de par $m = 2k$ para algum inteiro k e $n = 2k$ para algum inteiro k . Por substituição, $m + n = 2k + 2k = 4k$, o que devia ser provado.

3. Identifique o erro na prova do teorema abaixo.

Teorema: Seja n um número inteiro ímpar. Sabe-se que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$.

Prova: Suponha que n é um número inteiro ímpar. Sabe-se que $n = 2k + 1$ para algum inteiro k . Consequentemente,

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \frac{(2k+1)-1}{2} = \frac{2k}{2} = k.$$

Como $n = 2k + 1$, temos que $k = (n-1)/2$. Assim, por substituição temos que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$.

Esta prova incorreta usa a questão a ser provada. A igualdade $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ é o que deve ser provado. Ao substituir $2k+1$ por n nos dois lados da igualdade e assumindo que o resultado é verdadeiro, a prova assume a verdade da conclusão a ser provada.

4. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n , $4(n^2 + n + 1) - 3n^2$ é um quadrado perfeito.
5. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Existe um inteiro k tal que $k \geq 4$ e $2k^2 - 5k + 2$ é primo.
6. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n e m , se $n - m$ é par então $n^3 - m^3$ é par.
7. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. O quociente de dois números racionais é um número racional.
8. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não sem usar manipulação algébrica, ou seja, sem “resolver” a equação. Suponha que m seja um número inteiro. Prove se $17|m$ na equação:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot m \stackrel{?}{=} 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$$

9. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não:

$$\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } a|b \text{ e } a|c \text{ então } a|(b+c)$$

10. Suponha que você está participando de uma promoção de uma loja que dá um cartão com números quando um cliente faz uma compra. Se existem números nesse cartão que somam 100, então o cliente ganha um prêmio de R\$100,00. Um cliente recebe um cartão com os números

72	21	15	36	69	81	9	27	42	63
----	----	----	----	----	----	---	----	----	----

Sem fazer combinações de somas, mostre se o cliente irá ganhar o prêmio ou não.

11. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não: A soma de quatro números inteiros consecutivos não é divisível por 4.
12. Prove que para qualquer inteiro ímpar n , $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = (\frac{n-1}{2})(\frac{n+1}{2})$.
13. O resultado de $\frac{1}{6}$ é um número irracional? Explique.
14. Prove por contradição que para todos os números primos a , b e c , $a^2 + b^2 \neq c^2$.
15. Prove por contraposição que se a soma de dois números reais é menor que 50 então pelo menos um dos números é menor que 25.
16. Apresente um teorema cuja prova seja na forma geométrica.
17. Prove que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, então $x \neq 3$.
18. Prove que se $x > 0$ e $x < y$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, então $x^2 < y^2$.
19. Prove que $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ para quaisquer números reais x e y .
20. Prove por contradição que há uma infinidade de números primos.
21. Prove que se $n = ab$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}^+$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Prove ou apresente um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

O produto de quaisquer três números inteiros consecutivos é par.