Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

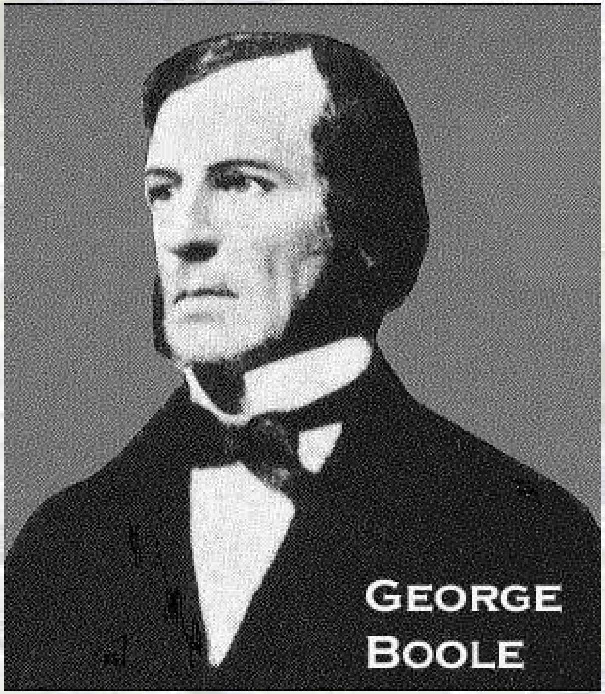
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 03

Funções Lógicas, Portas Lógicas e Circuitos Lógicos

Introdução

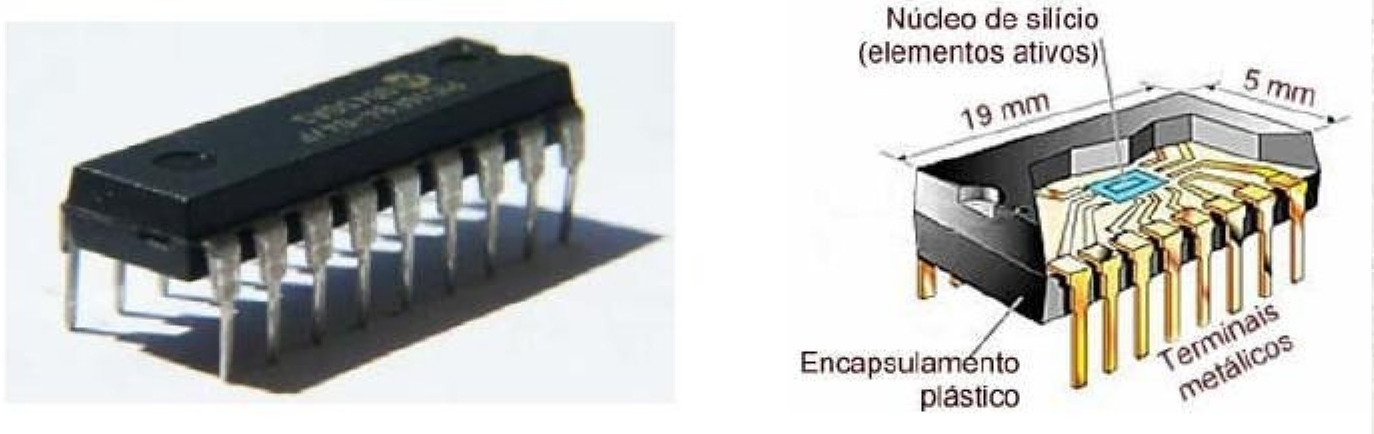
Definição "Lógicas": Lógicas são linguagens formais para a representação de conhecimento, que permite que conclusões possam ser tomadas.



George Boole (1815-1864): Matemático Britânico que através de trabalhos publicados a partir de 1847 sobre Análise Matemática da Lógica divulgou idéias sobre Lógica Simbólica - assim, a Lógica apresentada por Aristóteles poderia ser apresentada por Equações Algébricas. Seu trabalho de 1954, intitulado ***"Uma investigação das leis do pensamento"***, descreve o modo como tomamos decisões lógicas com base em circunstâncias **verdadeiras** ou **falsas**.

Circuitos Lógicos:

O modo como um circuito digital responde a uma entrada é denominado ***lógica*** do circuito. Por esta razão, os circuitos digitais são também chamados de **circuitos lógicos**. Os dois termos são usados indistintamente.



Circuito integrado

Circuitos Lógicos:

A **Álgebra Booleana** é uma ferramenta matemática que nos permite descrever relações entre as **entradas** e as **saídas** dos circuitos lógicos como uma equação algébrica (**uma expressão Booleana**).

Circuitos Lógicos:

A Álgebra Booleana é uma ferramenta matemática que nos permite descrever relações entre as entradas e as saídas dos circuitos lógicos como uma equação algébrica (uma expressão Booleana).

A principal diferença entre a **álgebra Booleana** e a **álgebra convencional** é que as constantes e variáveis podem assumir apenas dois valores possíveis: **0 e 1**.

Circuitos Lógicos:

A Álgebra Booleana é uma ferramenta matemática que nos permite descrever relações entre as entradas e as saídas dos circuitos lógicos como uma equação algébrica (uma expressão Booleana).

A principal diferença entre a **álgebra Booleana** e a **álgebra convencional** é que as constantes e variáveis podem assumir apenas dois valores possíveis: 0 e 1.

As **variáveis Booleanas** não representam efetivamente números, mas sim o estado da variável monitorada – indica um **nível lógico**.

Circuitos Lógicos:

A Álgebra Booleana é uma ferramenta matemática que nos permite descrever relações entre as entradas e as saídas dos circuitos lógicos como uma equação algébrica (uma expressão Booleana).

A principal diferença entre a **álgebra Booleana** e a **álgebra convencional** é que as constantes e variáveis podem assumir apenas dois valores possíveis: **0 e 1**.

As **variáveis Booleanas** não representam efetivamente números, mas sim o estado da variável monitorada – indica um **nível lógico**.

Em nosso estudo, **letras** serão usadas como **símbolos para representar as variáveis lógicas**.

Circuitos Lógicos:

A Álgebra Booleana é uma ferramenta matemática que nos permite descrever relações entre as entradas e as saídas dos circuitos lógicos como uma equação algébrica (uma expressão Booleana).

A principal diferença entre a **álgebra Booleana** e a **álgebra convencional** é que as constantes e variáveis podem assumir apenas dois valores possíveis: **0 e 1**.

As **variáveis Booleanas** não representam efetivamente números, mas sim o estado da variável monitorada – indica um **nível lógico**.

Em nosso estudo, **letras** serão usadas como **símbolos para representar as variáveis lógicas**.

A álgebra booleana tem, de fato, apenas três operações básicas:

OR (OU), **AND (E)** e **NOT (INVERSOR)**.

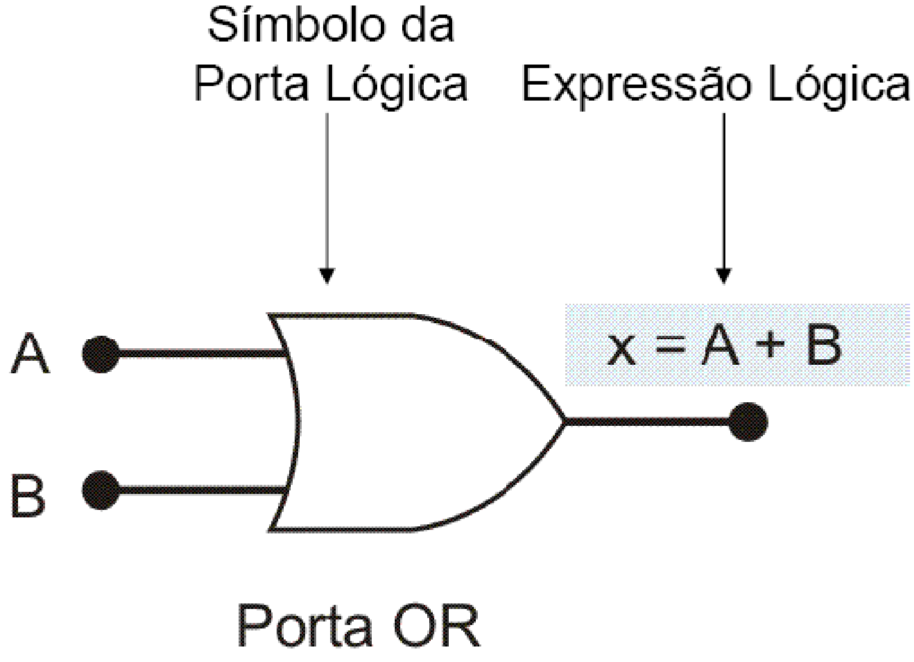
Portas Lógicas:

Função OR (“OU”) e a Porta OR

OR

A	B	x = A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a)



(b)

Diagrama de Tempo:

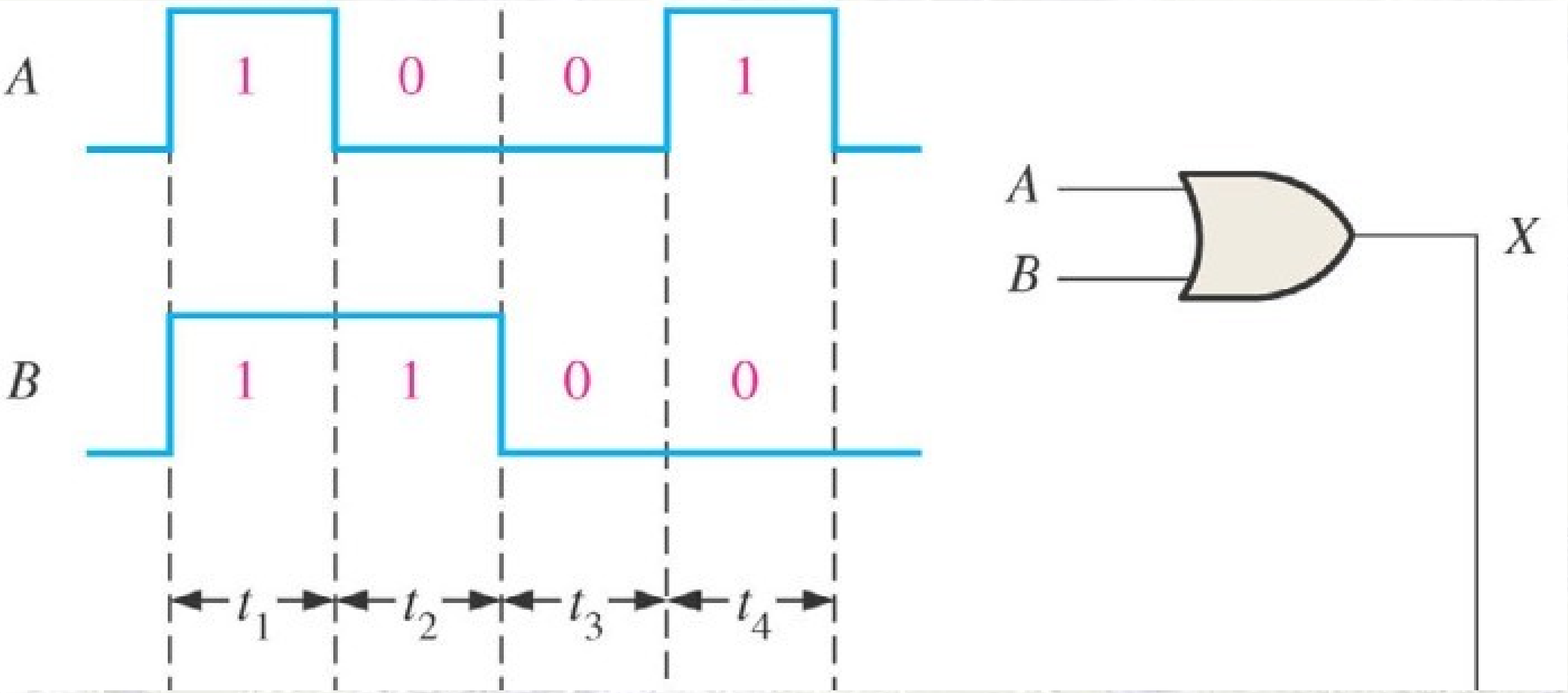


Diagrama de Tempo:

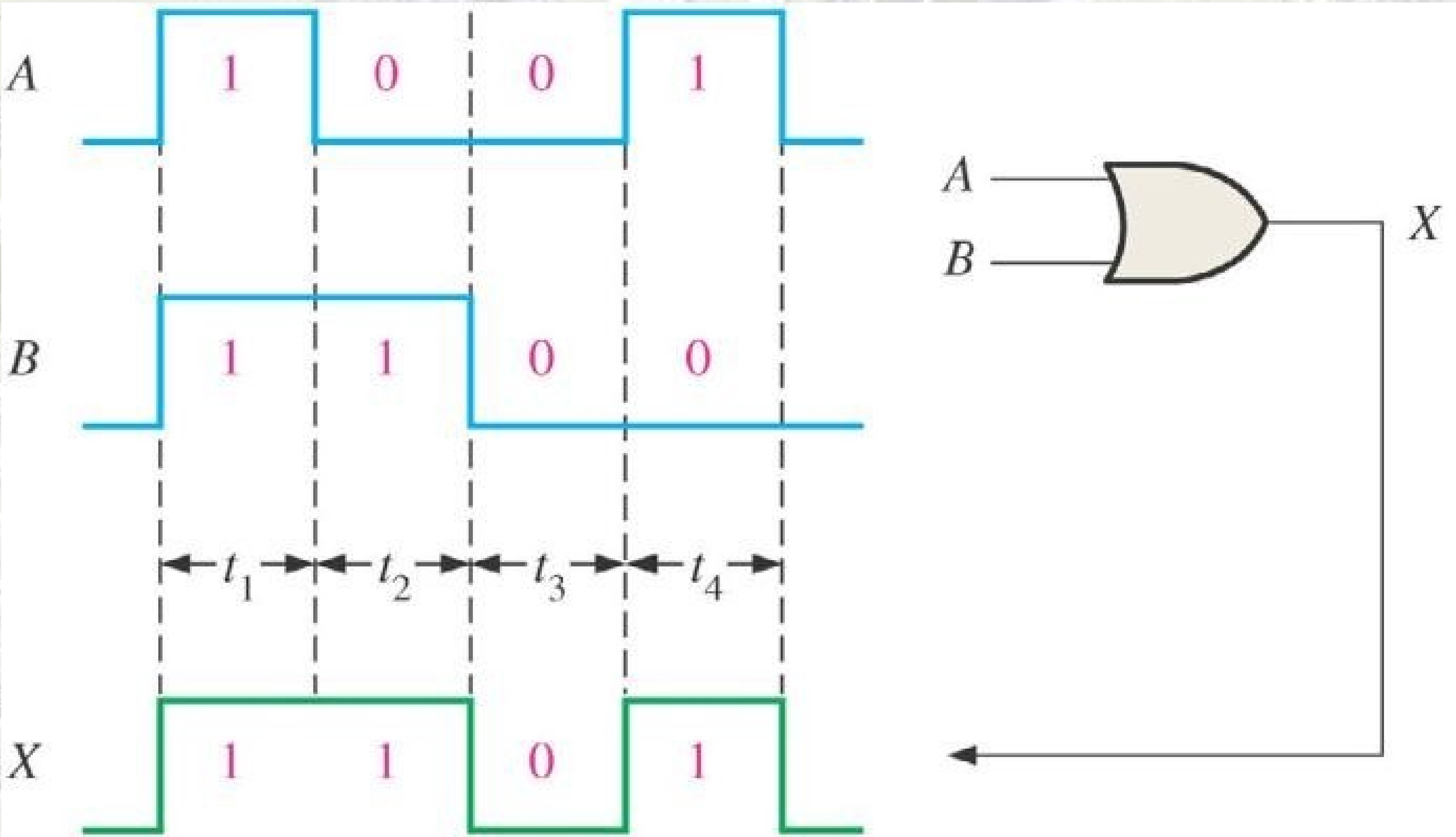


Diagrama de Tempo:

Exercício 1: Obtenha a forma de onda na saída para:

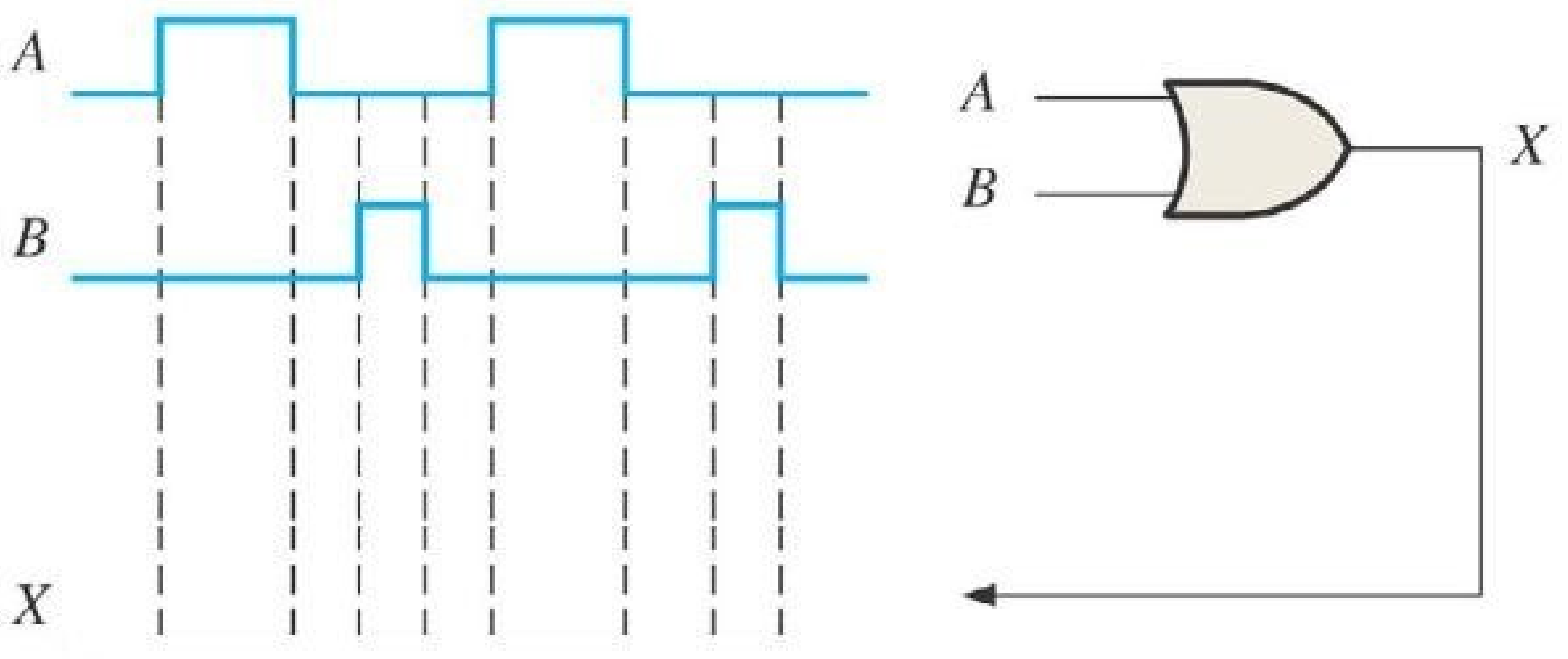
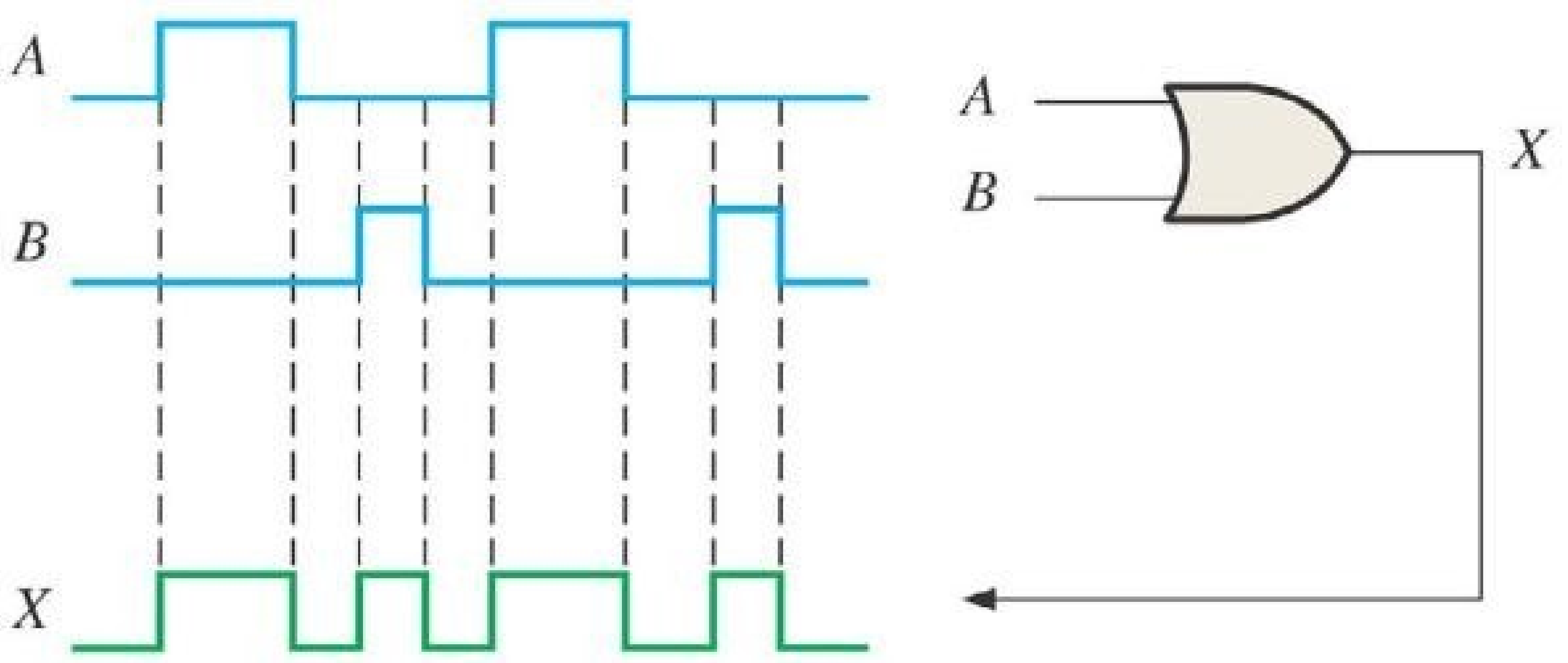


Diagrama de Tempo:

Exercício 1: Obtenha a forma de onda na saída para:



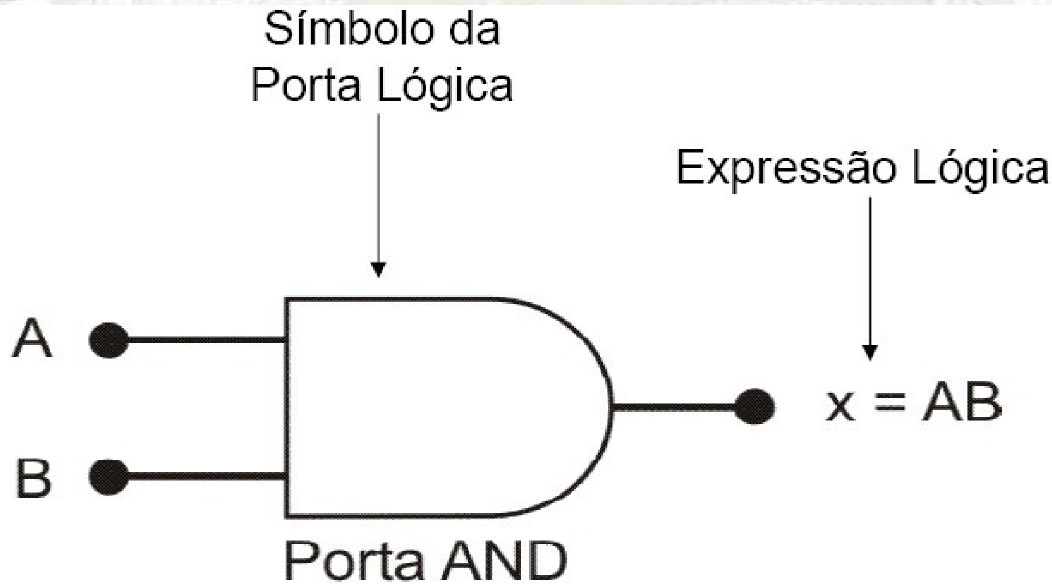
Portas Lógicas:

Função AND (“E”) e a Porta AND

AND

A	B	$x = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a)



(b)

Diagrama de Tempo:

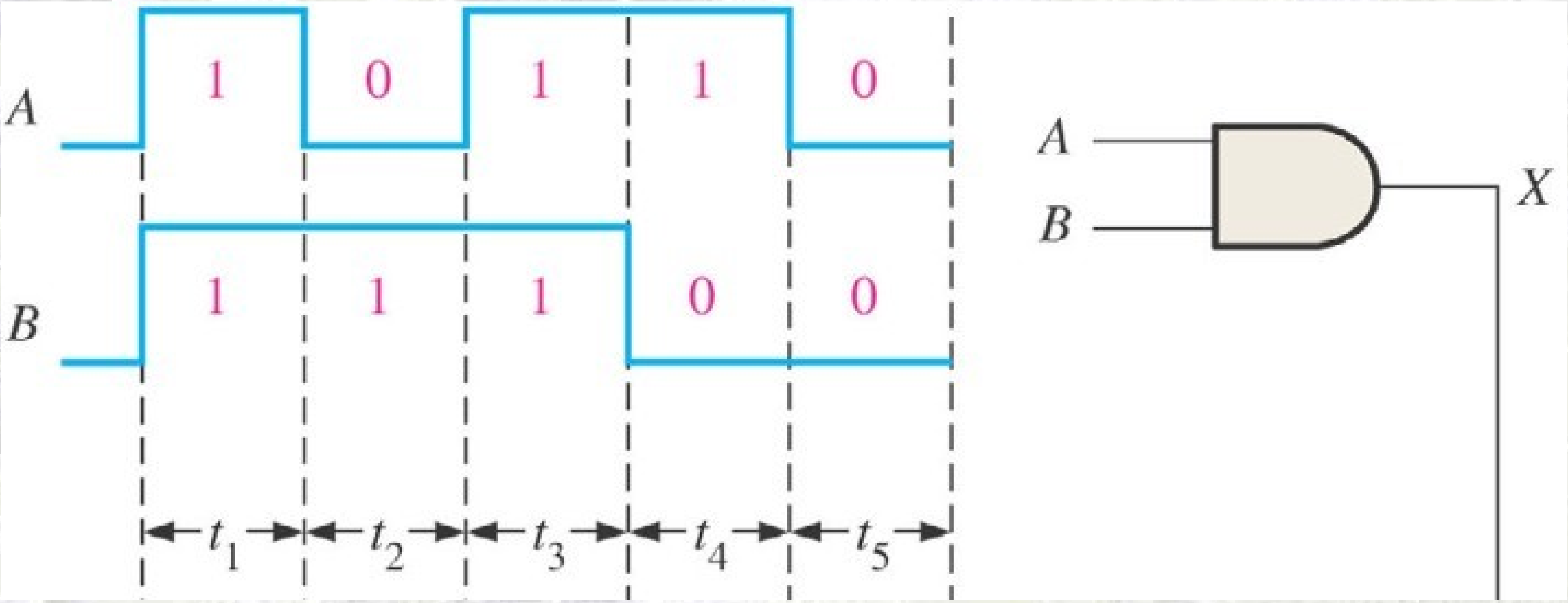


Diagrama de Tempo:

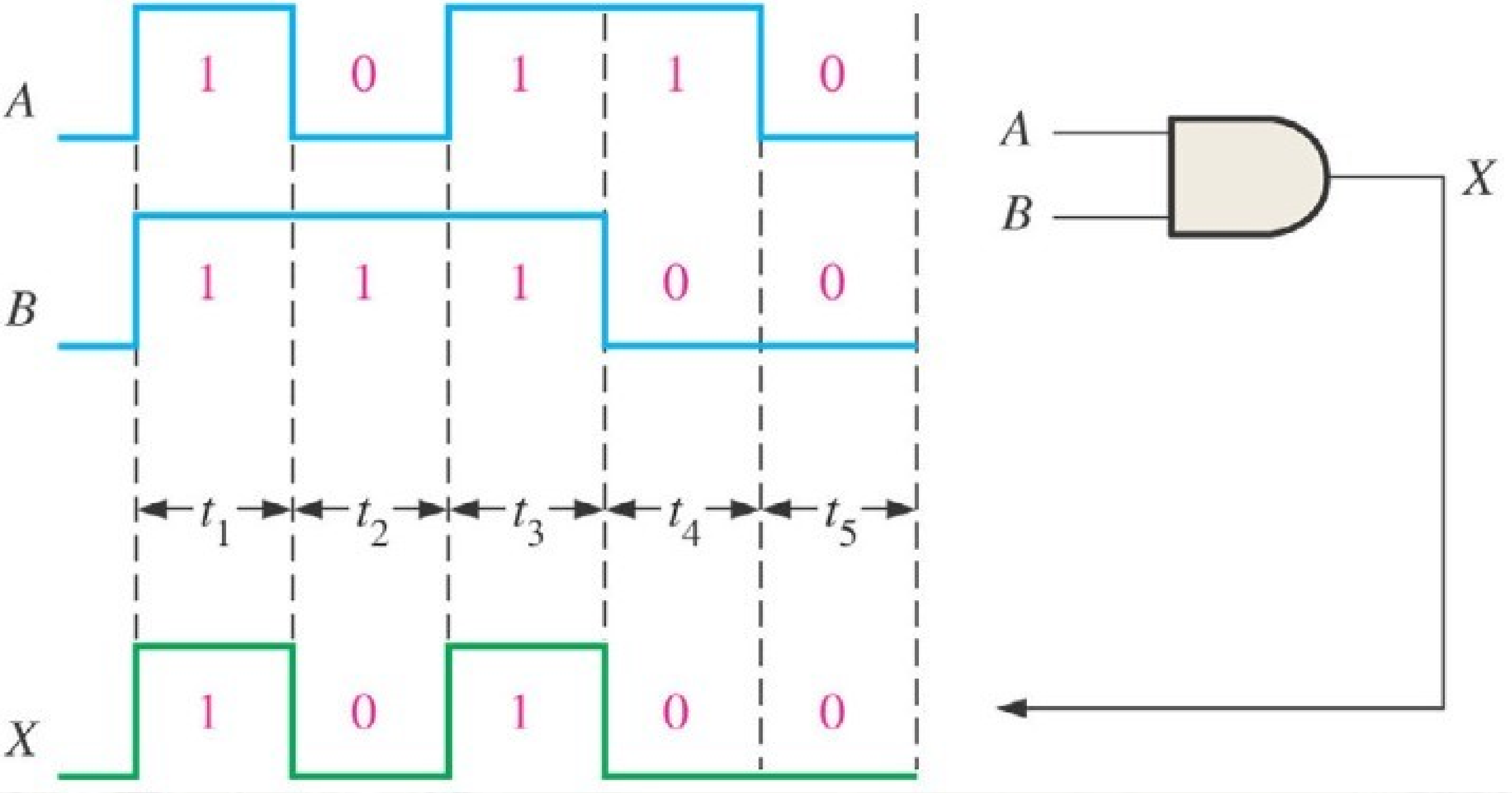


Diagrama de Tempo:

Exercício 2: Obtenha a forma de onda na saída para:

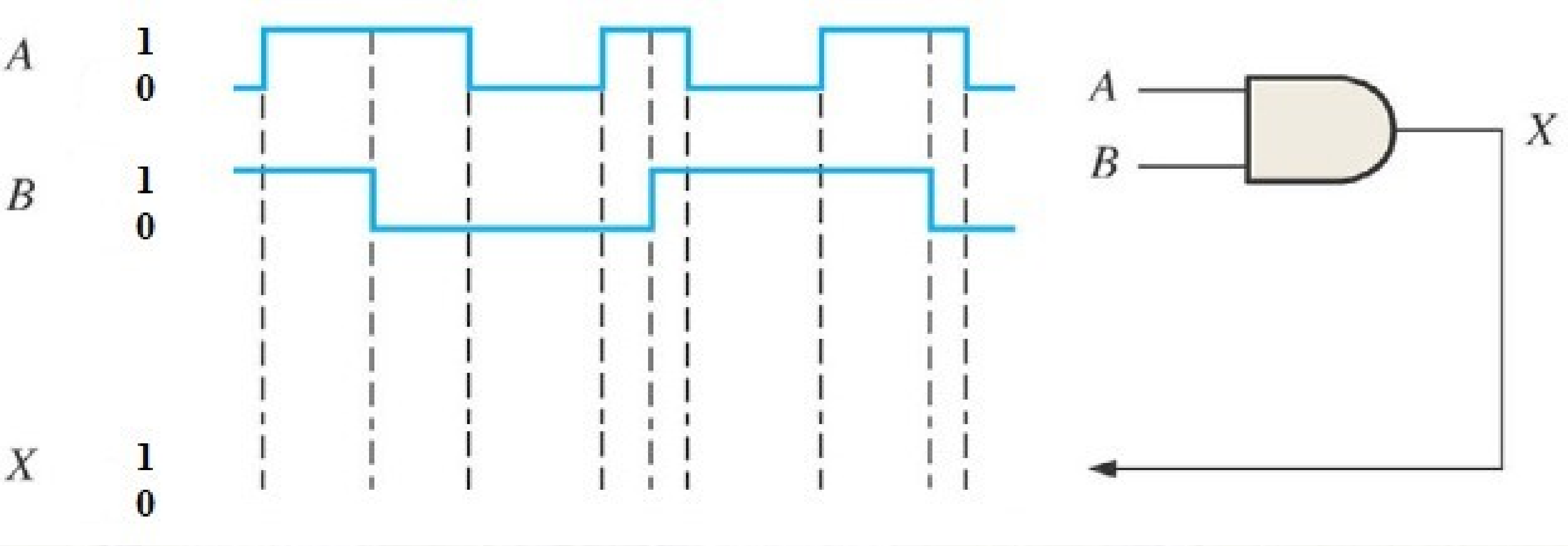
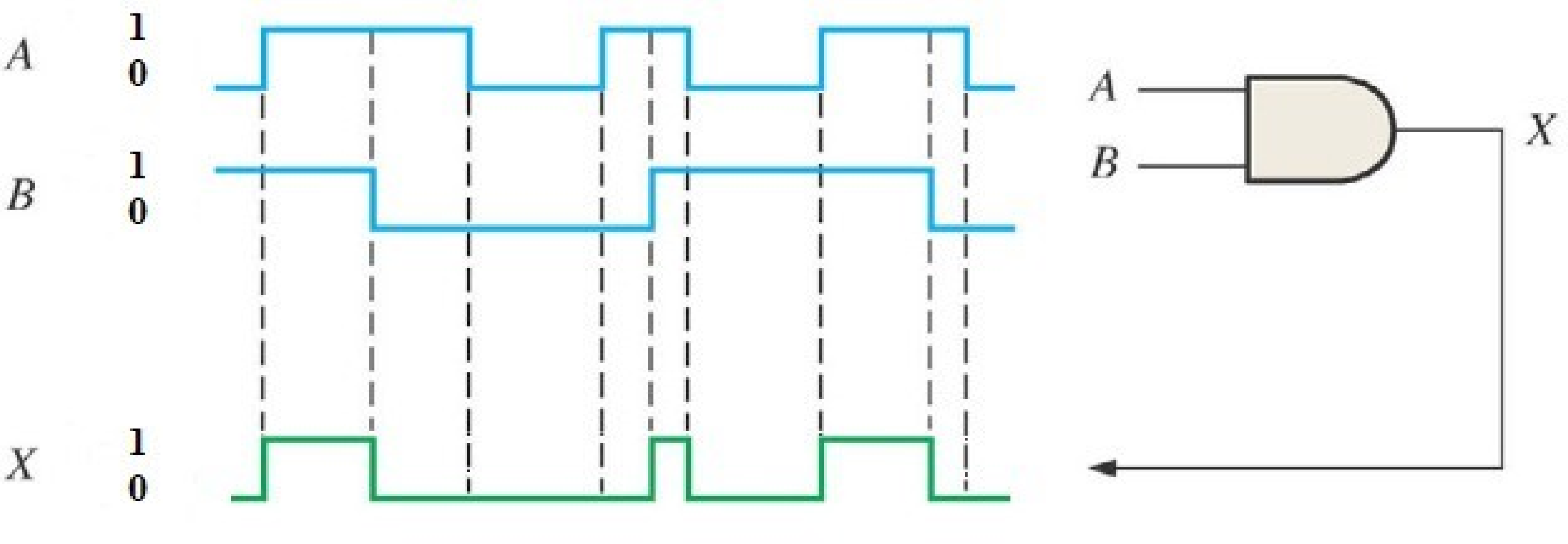


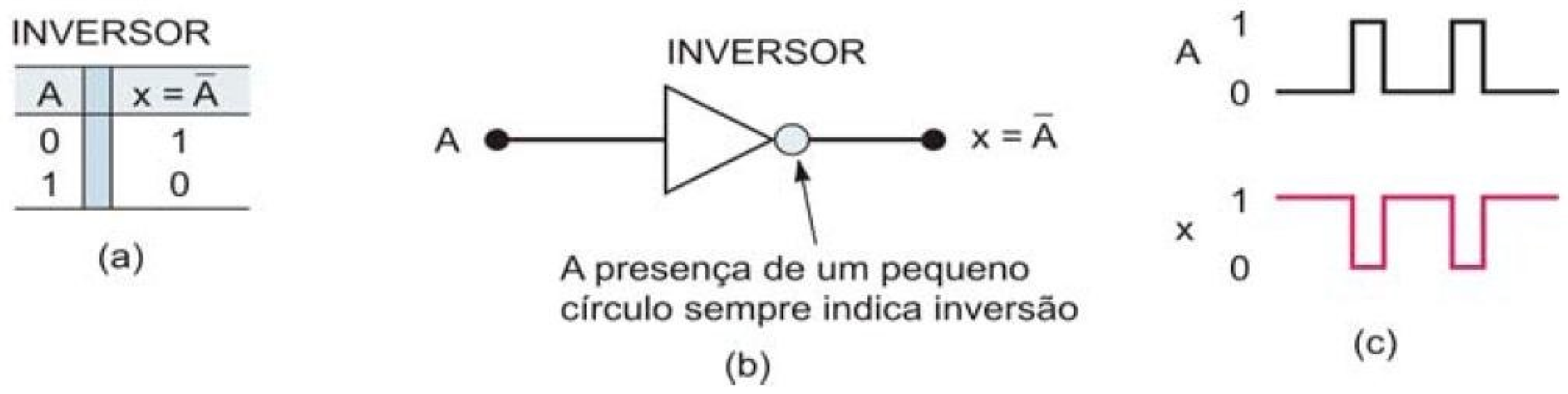
Diagrama de Tempo

Exercício 2: Obtenha a forma de onda na saída para:



Portas Lógicas:

Função NOT (“NÃO”) ou Inversor



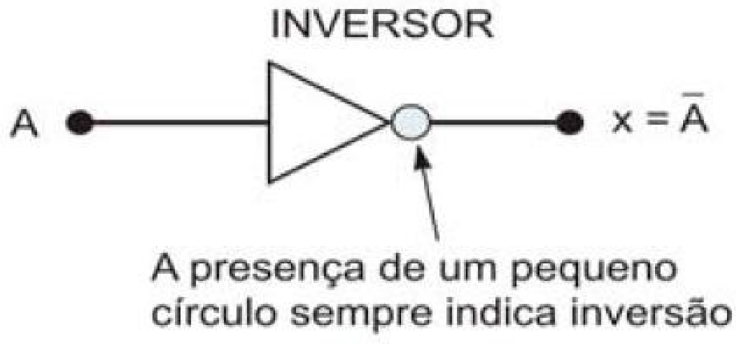
Portas Lógicas:

Função NOT (“NÃO”) ou Inversor

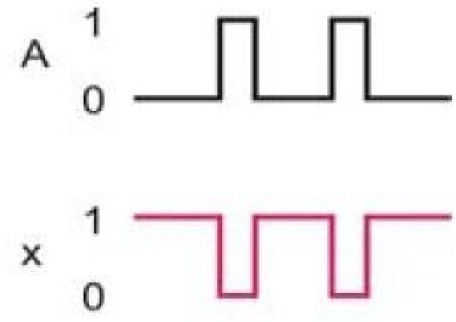
INVERSOR

A	$x = \bar{A}$
0	1
1	0

(a)



(b)



(c)

Com as operações OR, AND e NOT pode-se descrever qualquer circuito lógico !

Portas Lógicas:

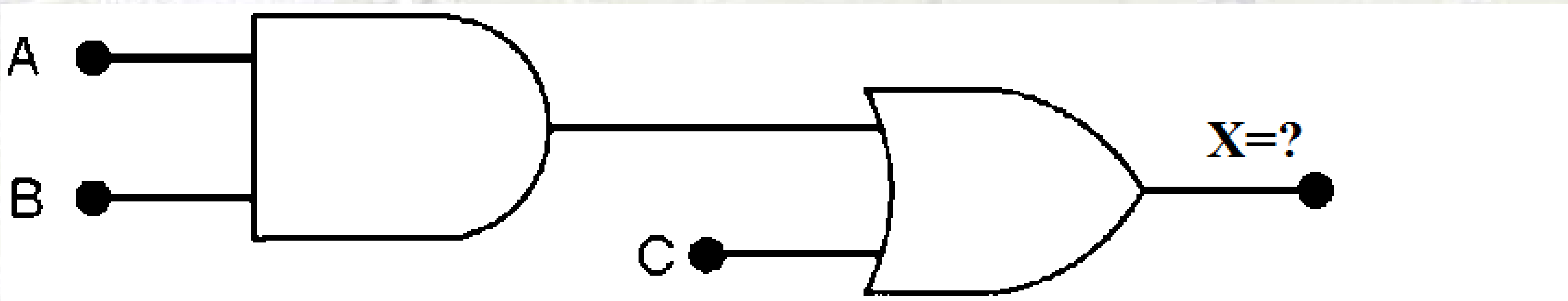
Resumo das Operações Booleanas

As regras para as operações OR, AND e NOT com duas entradas podem ser resumidas como segue:

OR	AND	NOT
$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$\overline{0} = 1$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$	$\overline{1} = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$	
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$	

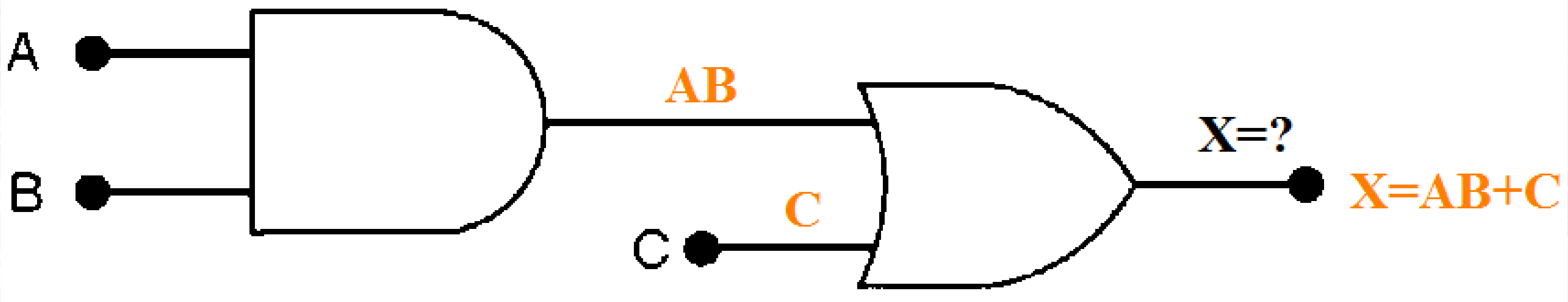
Circuitos Lógicos:

Qualquer circuito lógico, não importando sua **complexidade**, pode ser descrito usando as três operações Booleanas básicas, porque as portas **OR, AND** e **NOT** são os blocos fundamentais dos sistemas digitais.



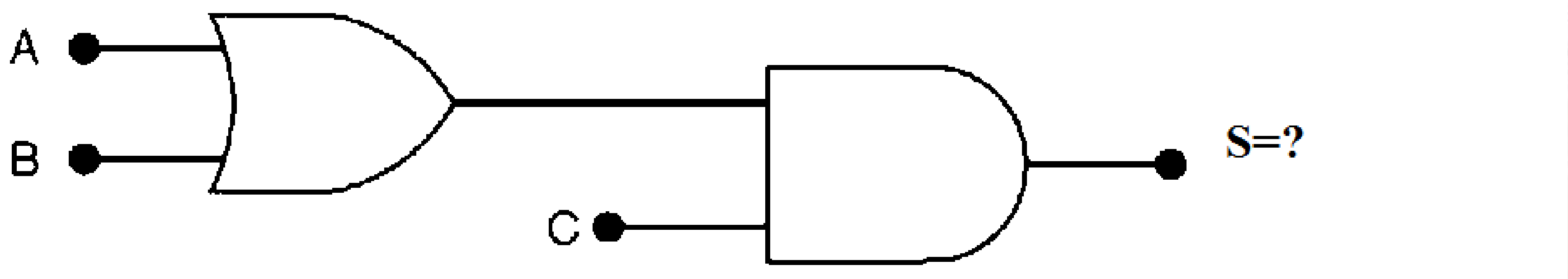
Circuitos Lógicos:

Qualquer circuito lógico, não importando sua **complexidade**, pode ser descrito usando as três operações Booleanas básicas, porque as portas **OR, AND** e **NOT** são os blocos fundamentais dos sistemas digitais.



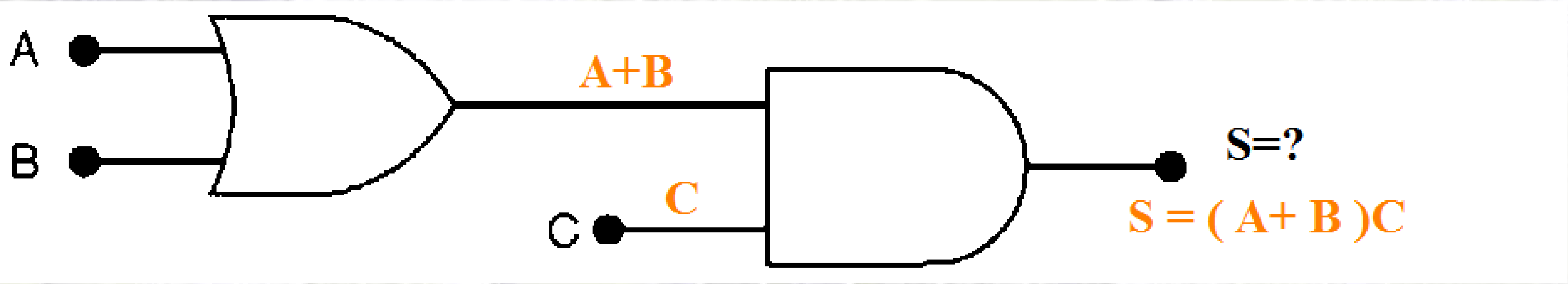
Circuitos Lógicos:

Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:



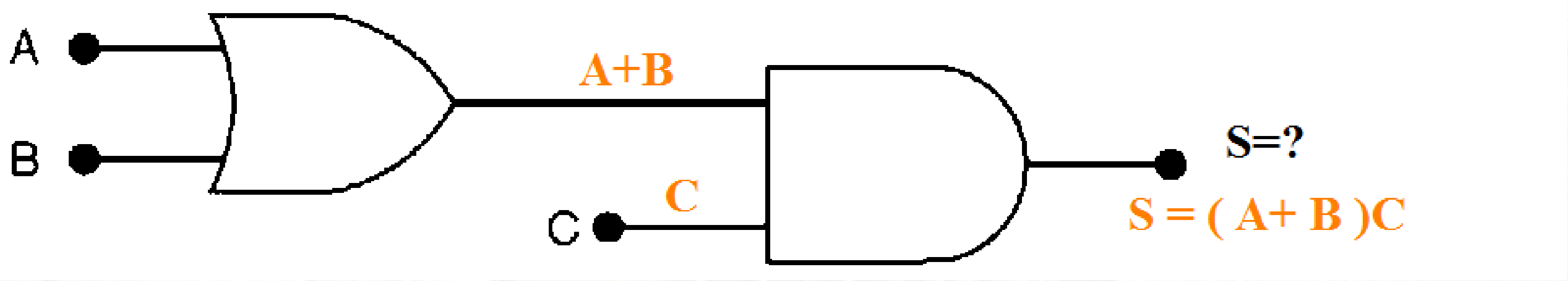
Circuitos Lógicos:

Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:



Circuitos Lógicos:

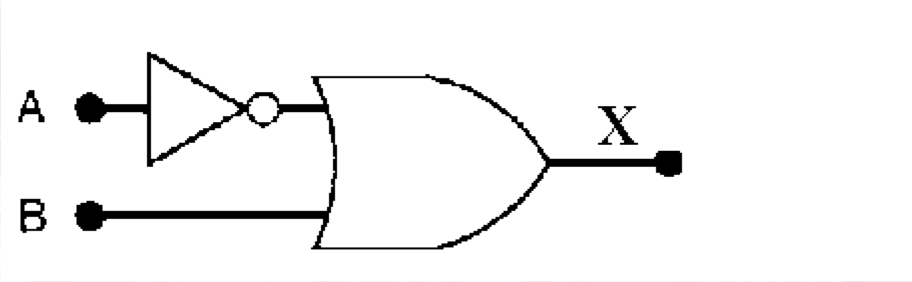
Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:

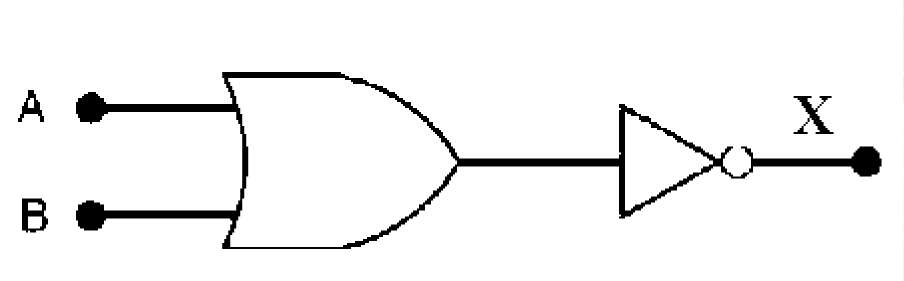


Circuito lógico cuja expressão requer parênteses.

Circuitos Lógicos:

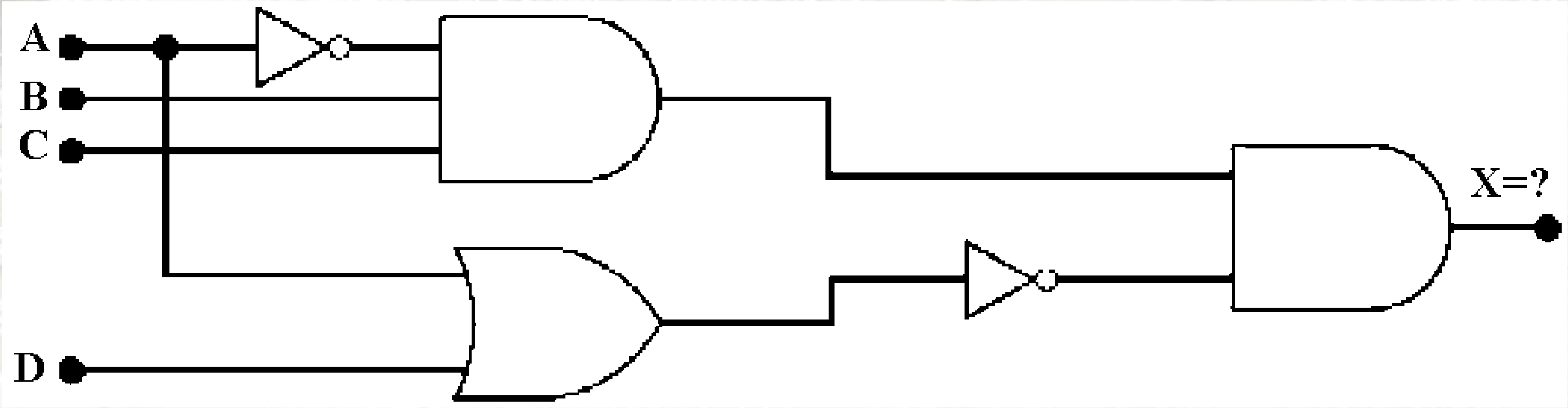
Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:





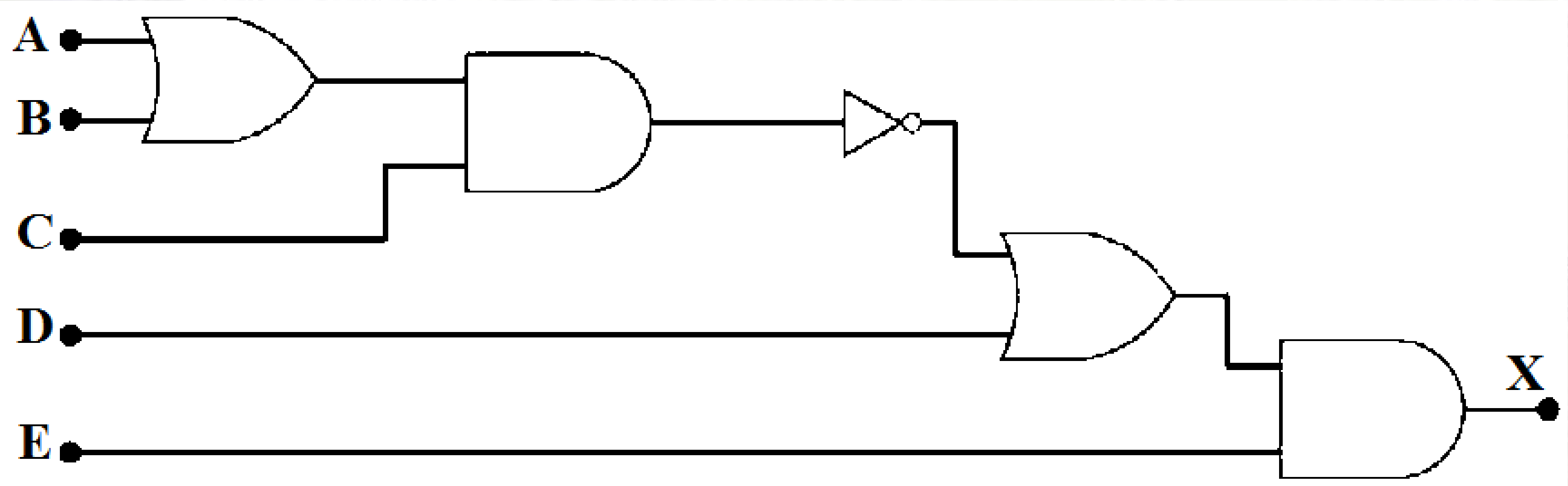
Circuitos Lógicos:

Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:



Circuitos Lógicos:

Exercícios 3: Obtenha a expressão na saída (S) do circuito lógico abaixo:



Nível de Saída dos Circuitos:

Uma vez de posse da **expressão Booleana** para a saída de um circuito, podemos obter o **nível lógico** da saída para qualquer conjunto de níveis lógicos de entrada.

Exemplo 1: Seja as entradas: A = 0, B = 1, C = 1 e D = 1. Qual é o nível lógico na saída do circuito lógico?

$$X = \overline{A}BC\left(\overline{A + D}\right)$$

Nível de Saída dos Circuitos:

Uma vez de posse da **expressão Booleana** para a saída de um circuito, podemos obter o **nível lógico** da saída para qualquer conjunto de níveis lógicos de entrada.

Exemplo 1: Seja as entradas: A = 0, B = 1, C = 1 e D = 1. Qual é o nível lógico na saída do circuito lógico?

$$X = \overline{A}BC\left(\overline{A + D}\right)$$

$$X = \overline{0} \cdot 1 \cdot 1\left(\overline{0 + 1}\right)$$

Nível de Saída dos Circuitos:

Uma vez de posse da **expressão Booleana** para a saída de um circuito, podemos obter o **nível lógico** da saída para qualquer conjunto de níveis lógicos de entrada.

Exemplo 1: Seja as entradas: A = 0, B = 1, C = 1 e D = 1. Qual é o nível lógico na saída do circuito lógico?

$$X = \overline{A}BC\left(\overline{A+D}\right)$$

$$X = \overline{0}\cdot 1\cdot 1\left(\overline{0+1}\right)$$

$$X = 1\cdot 1\cdot 1\left(\overline{1}\right)$$

Nível de Saída dos Circuitos:

Uma vez de posse da **expressão Booleana** para a saída de um circuito, podemos obter o **nível lógico** da saída para qualquer conjunto de níveis lógicos de entrada.

Exemplo 1: Seja as entradas: A = 0, B = 1, C = 1 e D = 1. Qual é o nível lógico na saída do circuito lógico?

$$X = \overline{A}BC\left(\overline{A+D}\right)$$

$$X = \overline{0}\cdot 1\cdot 1\left(\overline{0+1}\right)$$

$$X = 1\cdot 1\cdot 1\left(\overline{1}\right)$$

$$X = 1\cdot(0) \qquad \therefore \qquad X = 0$$

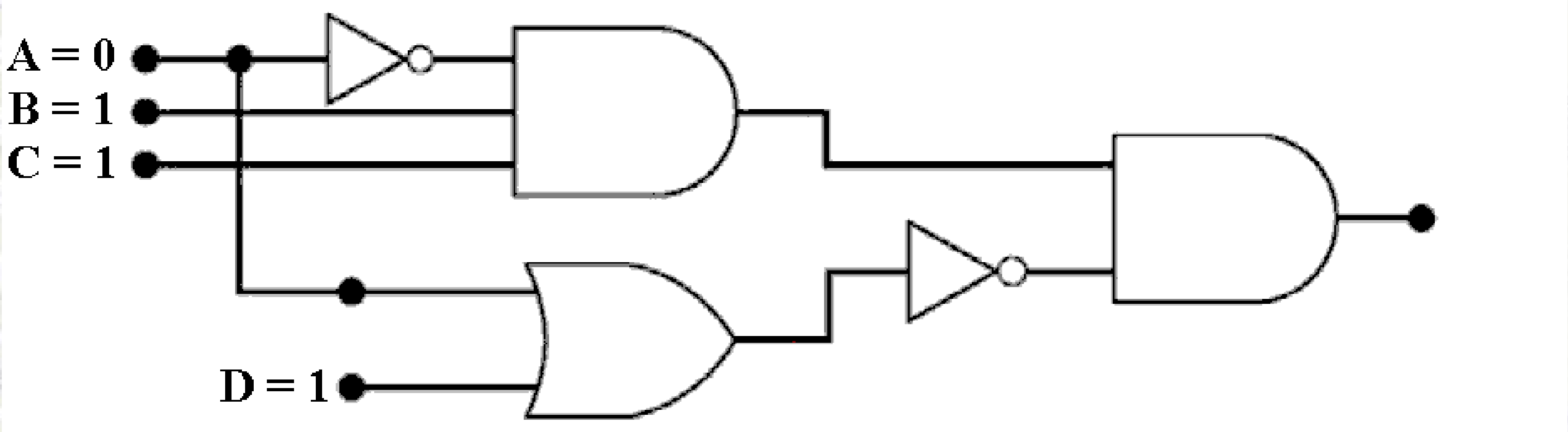
Nível de Saída dos Circuitos:

Exercício 4: Seja A = 0, B = 0, C = 1, D = 1 e E = 1.
Calcule o valor da saída S, dada por:

$$S = \left[D + \overline{\left(A + B \right) C} \right] E$$

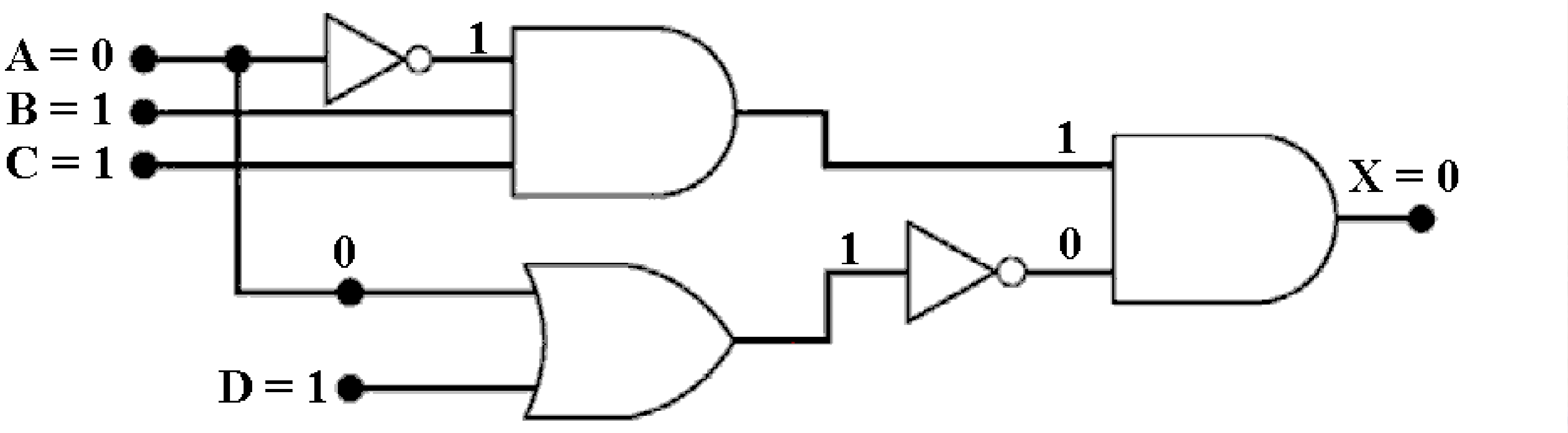
Nível de Saída dos Circuitos:

O nível lógico da saída, em função dos níveis lógicos especificados para as entradas, pode ser determinado diretamente a partir do diagrama do circuito sem usar a expressão Booleana. Esta técnica é muitas vezes utilizada para a análise de defeitos, ou teste de um sistema lógico.



Nível de Saída dos Circuitos:

O nível lógico da saída, em função dos níveis lógicos especificados para as entradas, pode ser determinado diretamente a partir do diagrama do circuito sem usar a expressão Booleana. Esta técnica é muitas vezes utilizada para a análise de defeitos, ou teste de um sistema lógico.



Implementando Circuitos Lógicos a partir de Expressões:

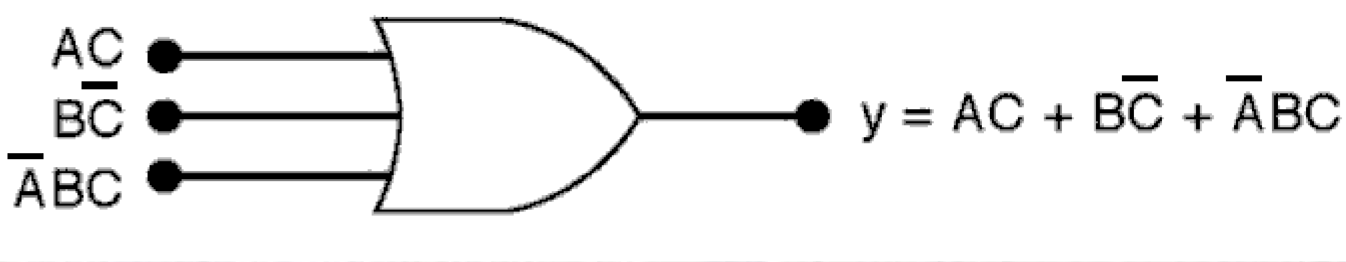
Quando a operação de um circuito é definida por uma **expressão Booleana**, podemos desenhar o diagrama do circuito lógico a partir da expressão.

$$Y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$$

Implementando Circuitos Lógicos a partir de Expressões:

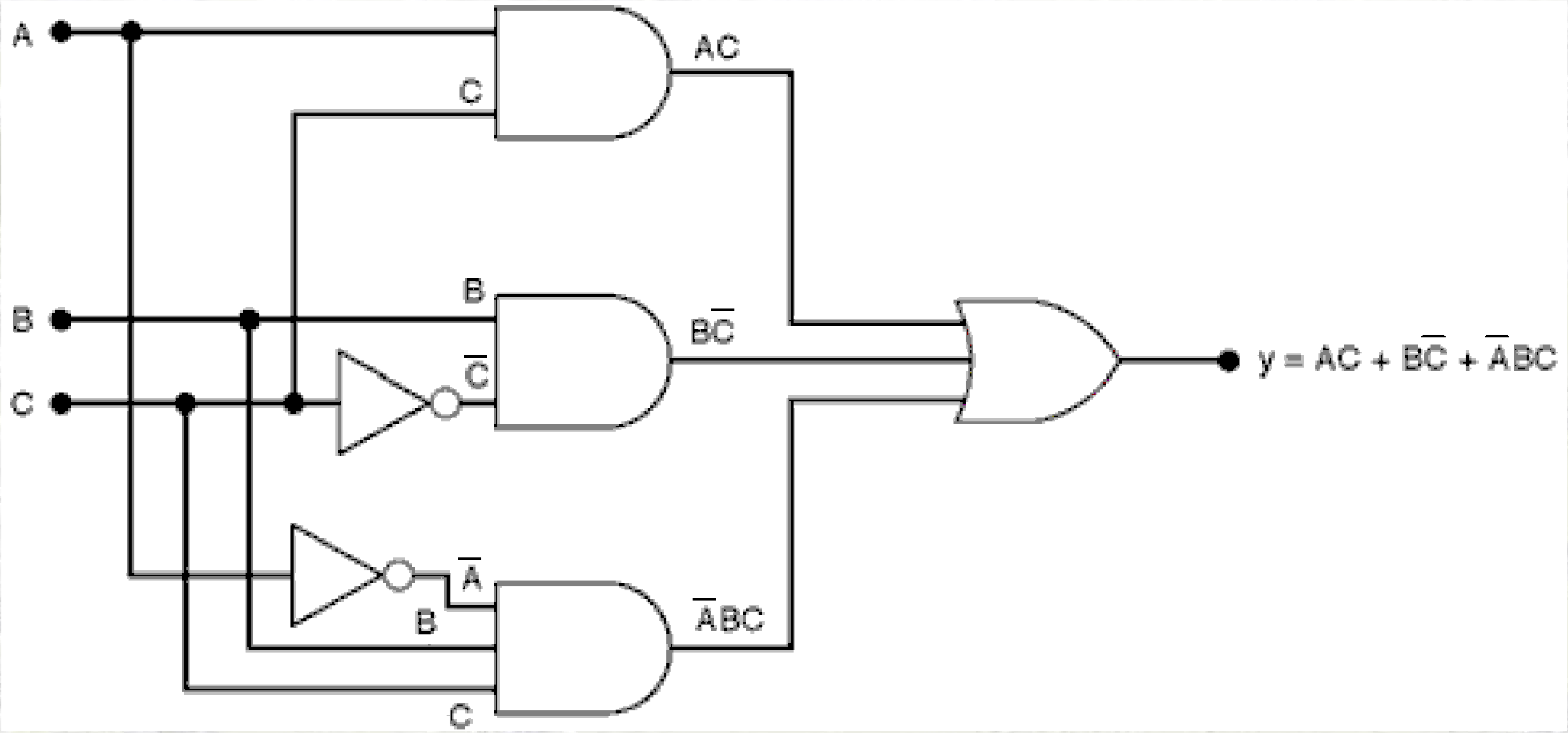
Quando a operação de um circuito é definida por uma **expressão Booleana**, podemos desenhar o diagrama do circuito lógico a partir da expressão.

$$Y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$$



Implementando Circuitos Lógicos a partir de Expressões:

$$Y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC$$



Implementando Circuitos Lógicos a partir de Expressões:

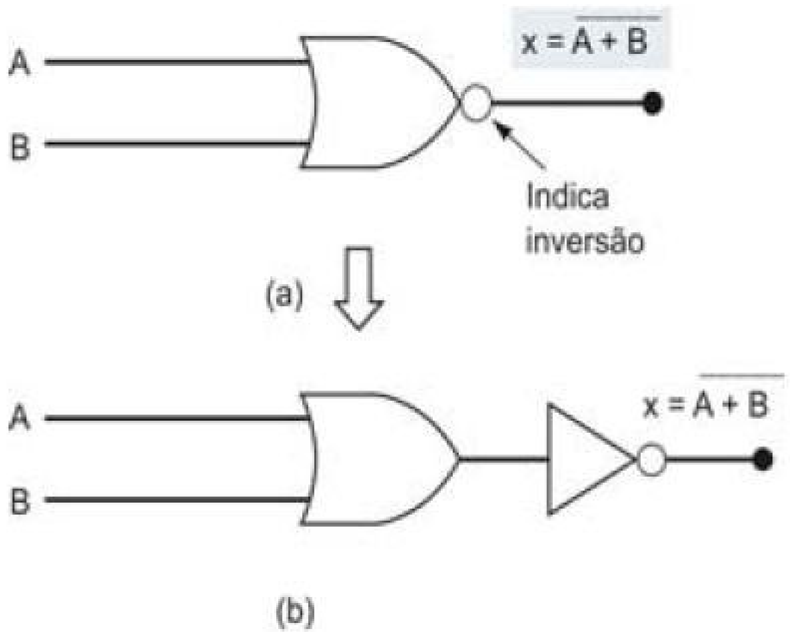
Exercício 5: Construir o circuito lógico que representa a expressão abaixo:

$$S = (A + C)(\overline{B} + C)$$

Funções Lógicas:

Porta Lógica NOR (“NÃO-OU”)

Dois outros tipos de portas lógicas, as portas NAND e NOR, são muito usados em circuito digitais.



		OR	NOR
A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

(c)

Diagrama de Tempo:

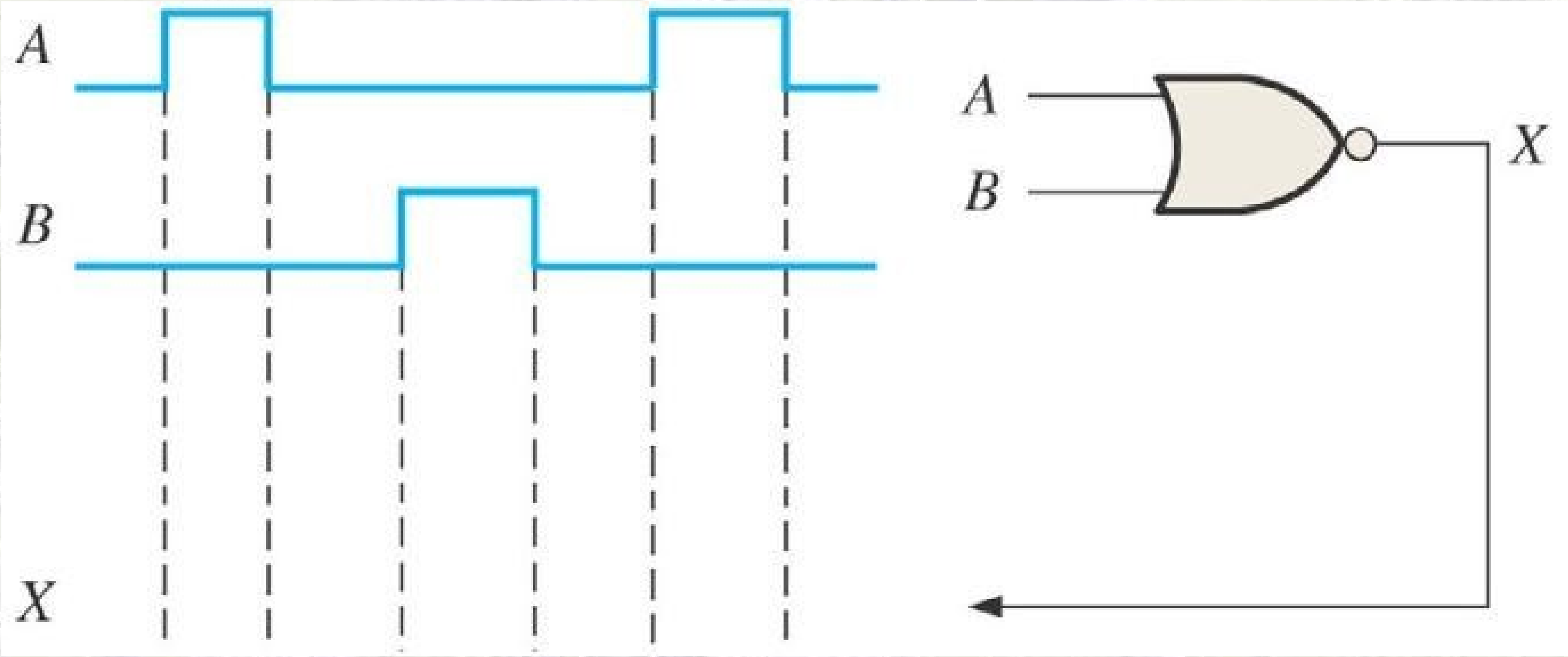
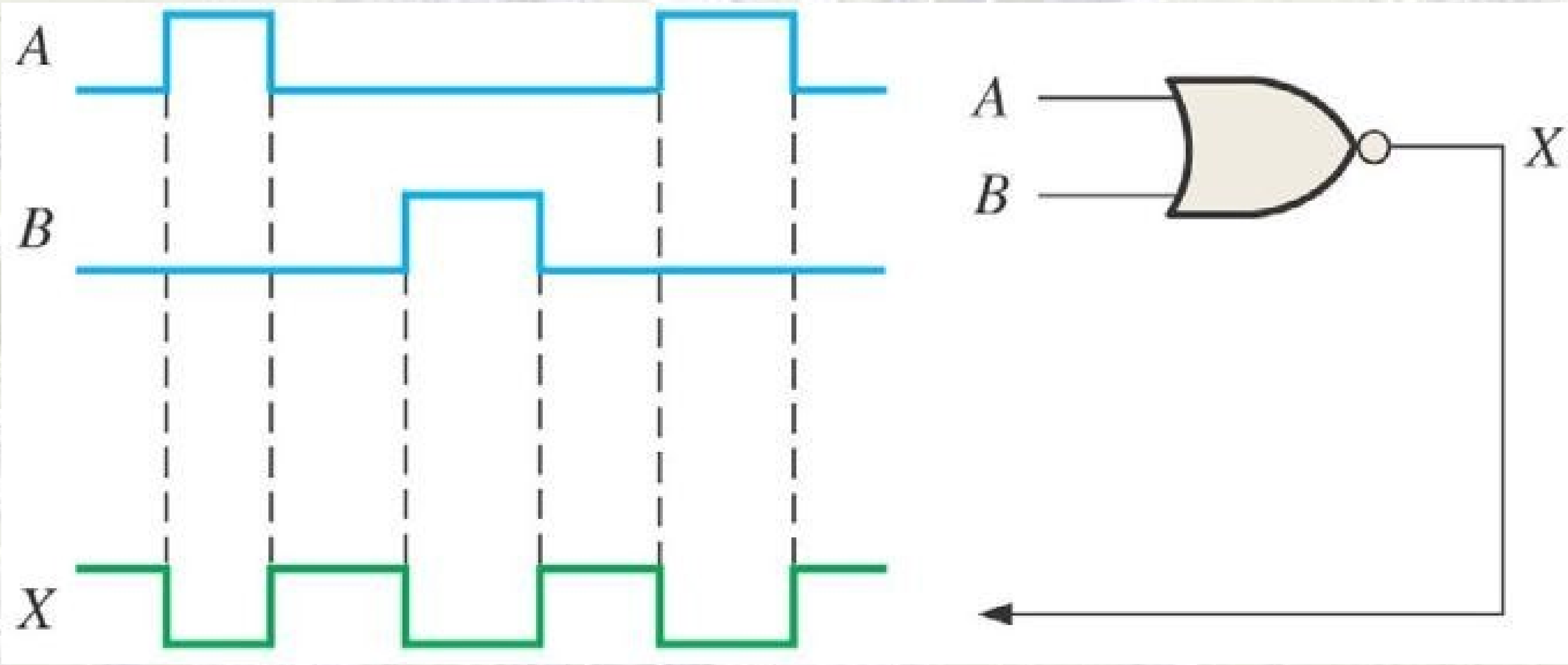
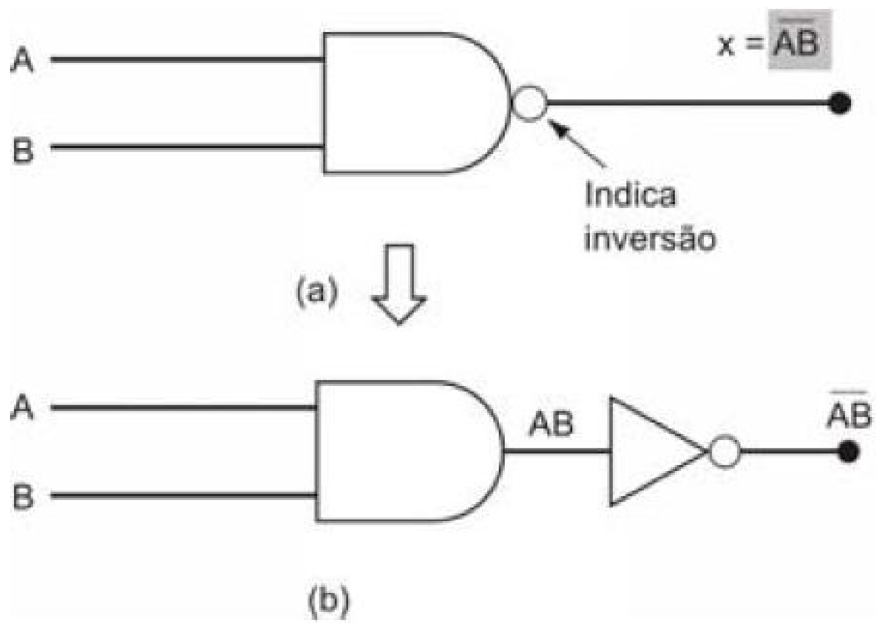


Diagrama de Tempo:



Funções Lógicas:

Porta Lógica NAND (“NÃO-E”)



		AND	NAND
A	B	AB	$\overline{AB}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

(c)

Diagrama de Tempo:

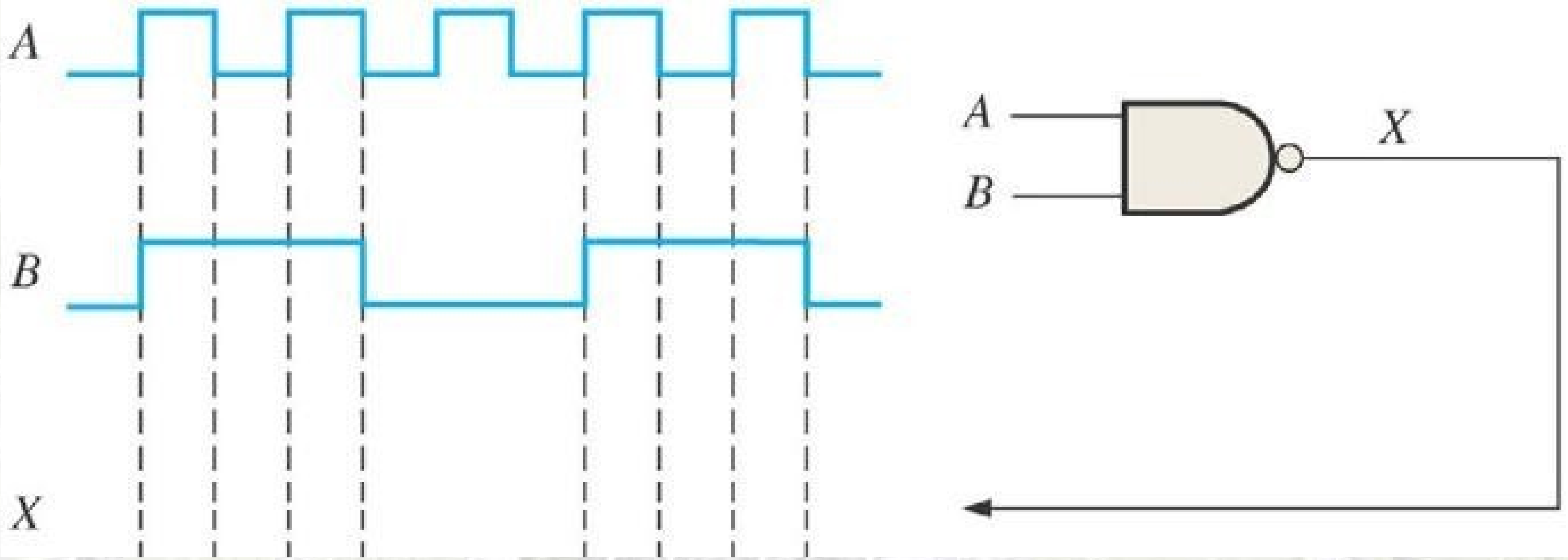
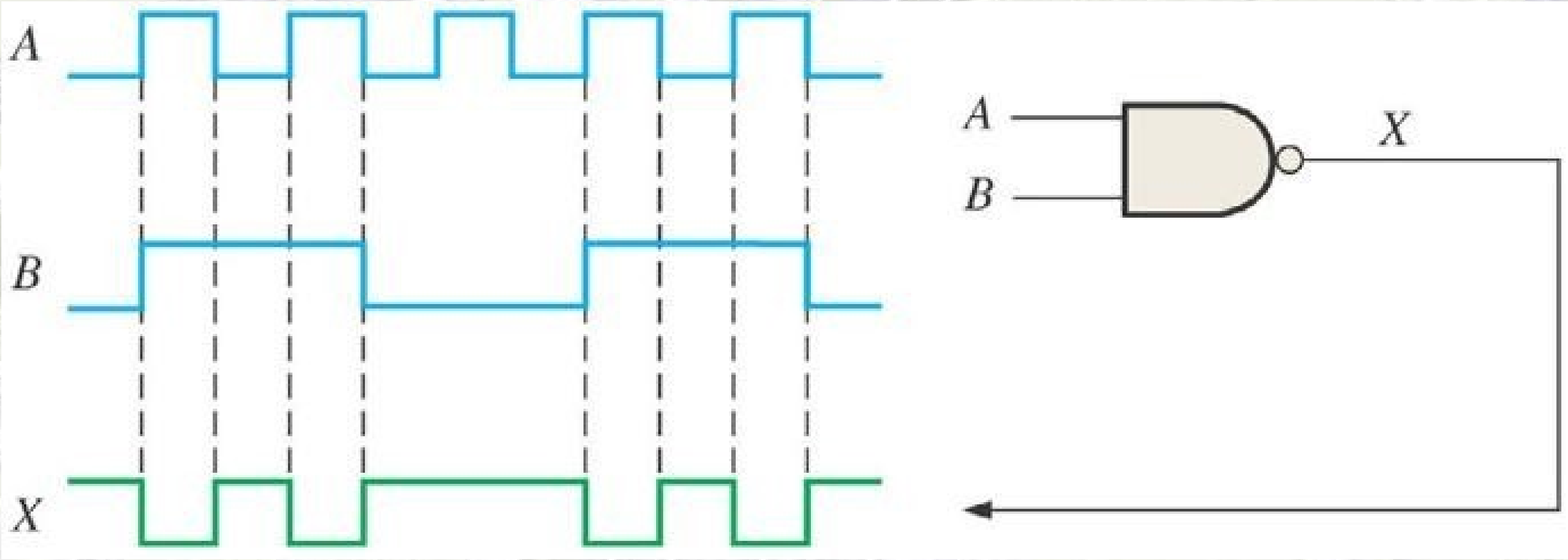
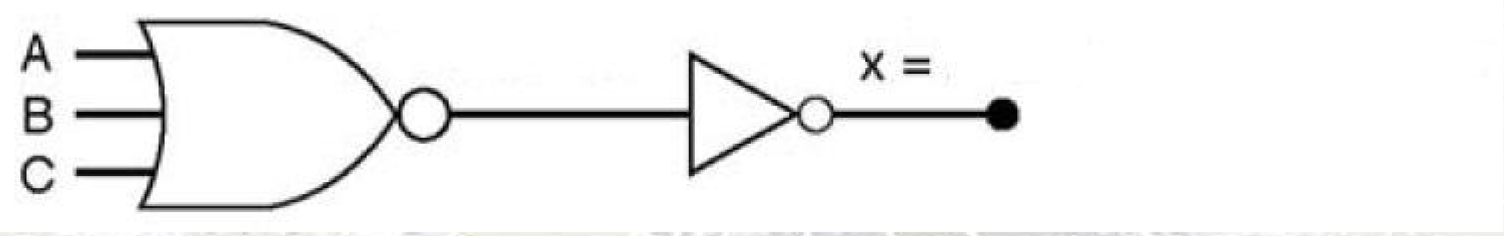


Diagrama de Tempo:



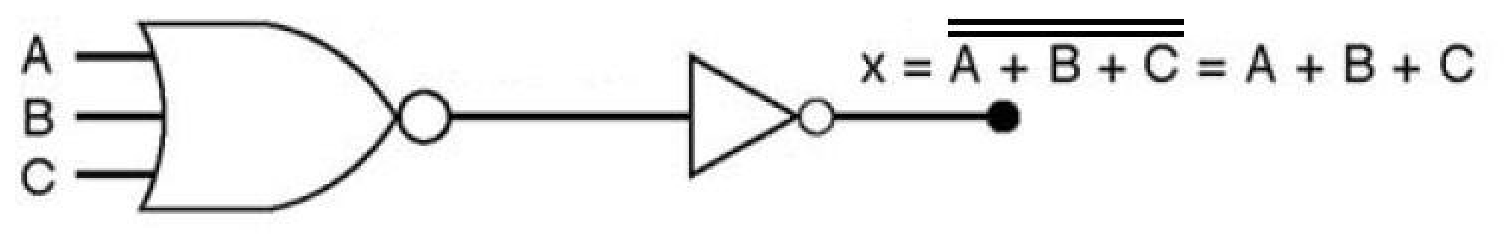
Funções Lógicas:

Exercício 6: Determine a expressão na saída do circuito lógico abaixo utilizando porta NOR:



Funções Lógicas:

Exercício 6: Determine a expressão na saída do circuito lógico abaixo utilizando porta NOR:



Funções Lógicas:

Exercício 7: Implemente usando portas lógicas **NAND** e **NOR** a expressão abaixo.

$$X = \overline{AB\left(\overline{C + D}\right)}$$

Tabelas Verdade:

Uma maneira de fazer o estudo de uma função booleana é através da **tabela verdade**:

Exemplo: Obtenha a tabela verdade da expressão abaixo:

$$S = A\overline{B}C + A\overline{D} + \overline{A}BD$$

Tabelas Verdade:

$$S = A\overline{B}C + A\overline{D} + \overline{A}BD$$

A	B	C	D	$A\overline{B}C$	$A\overline{D}$	$\overline{A}BD$	S
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

Tabelas Verdade:

Exercícios 8: Prove as identidades abaixo, montando as tabelas verdade:

$$a)\quad \overline{A}\cdot\overline{B} \neq \overline{A\cdot B}$$

$$b)\quad \overline{A}+\overline{B} \neq \overline{A+B}$$

$$c)\quad \overline{A}\cdot\overline{B} = \overline{A+B}$$

$$d)\quad \overline{A}+\overline{B} = \overline{A\cdot B}$$

Expressões Lógicas Obtidas de Tabelas Verdade:

Para solucionar, extraímos os casos onde a expressão é **verdadeira** (X = 1):

ABC	X
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	0
111	1

Expressões Lógicas Obtidas de Tabelas Verdade:

Para solucionar, extraímos os casos onde a expressão é **verdadeira** (X = 1):

ABC	X
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	0
111	1

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

Expressões Lógicas Obtidas de Tabelas Verdade:

Exercícios 9: Obtenha a expressão lógicas para a tabela verdade:

a)

A B C	X
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Expressões Lógicas Obtidas de Tabelas Verdade:

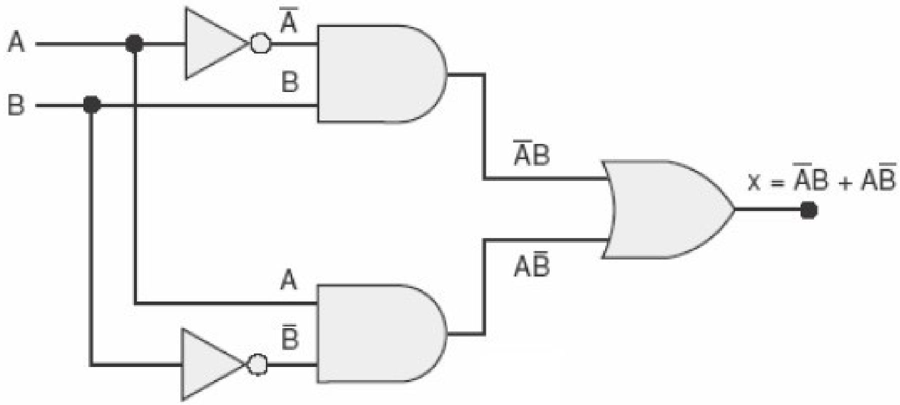
Exercícios 9: Obtenha a expressão lógicas para a tabela verdade:

b)

ABCD	X
0000	1
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	1
0111	0
1000	0
1001	1
1010	0
1011	0
1100	1
1101	0
1110	0
1111	0

Funções Lógicas:

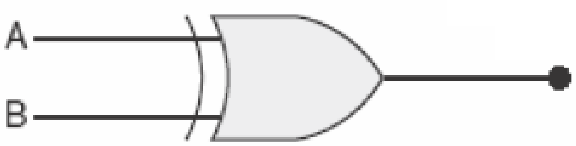
Circuitos Exclusive-OR (EXOR)



A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Esse circuito produz uma saída em nível ALTO sempre que duas entradas estiverem em níveis opostos.

Símbolos para a porta XOR



$x = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

Funções Lógicas:

Circuitos Exclusive-OR – Particularidades!!!

Uma porta EX-OR (OU-EXCLUSIVO) tem apenas duas entradas; não existem portas EX-OR de três ou quatro entradas. Uma forma abreviada algumas vezes usada para indicar uma saída EX-OR é:

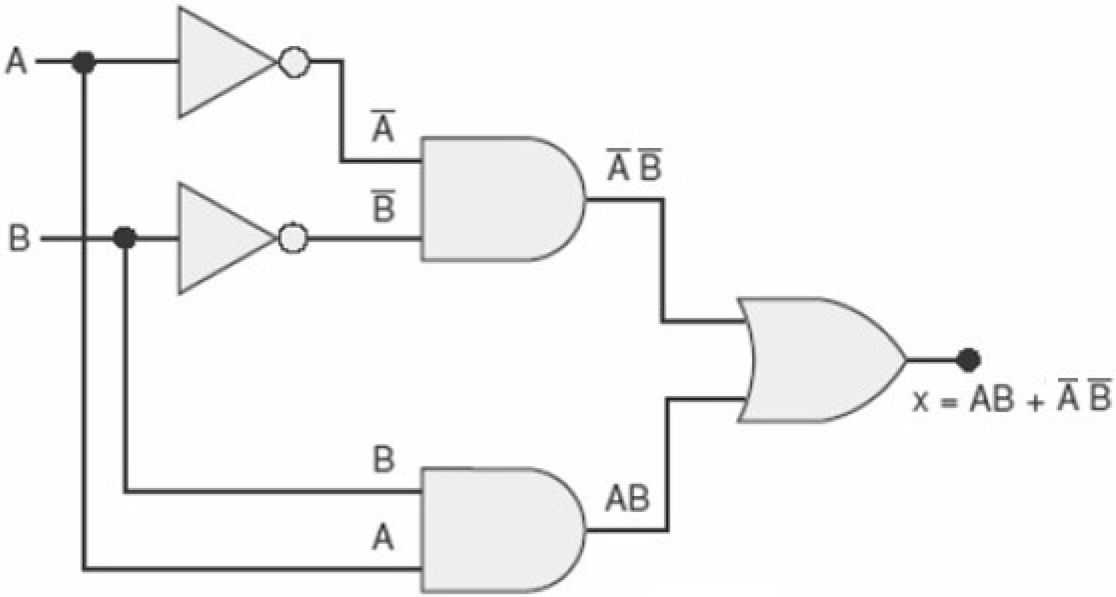
$$x = A \oplus B$$

Existem disponíveis alguns CIs contendo portas EX-OR, como os seguintes que são chips quádruplos destas portas:

- **74LS86** - chip quádruplo EX-OR (família TTL)

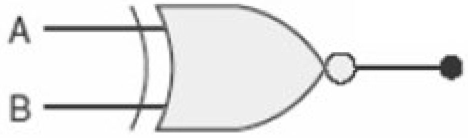
Funções Lógicas:

Circuitos Exclusive-NOR (EXNOR)



A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Símbolos para a porta XNOR



$$x = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\,\bar{B}$$

Funções Lógicas:

Circuitos Exclusive-NOR

Uma forma abreviada de indicar a expressão de saída de uma porta EX-NOR é:

$$x = A \odot B$$

- **74LS266** - chip quádruplo EX-NOR (família TTL)

Devido ao fato de fornecer 1 à saída quando houver uma coincidência nos valores das variáveis de entrada, esta porta lógica ficou conhecida como "circuito coincidência".