

**LISTA DE EXERCÍCIOS 8**  
**RELAÇÕES**

**Definição 1** [*Composição de relações*]. Seja  $R$  uma relação do conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  e  $S$  uma relação do conjunto  $B$  para um conjunto  $C$ . A **composição** de  $R$  e  $S$  é a relação formada por pares ordenados  $(a, c)$ , onde  $a \in A, c \in C$ , para os quais existe um elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in S$ . A composição de  $R$  e  $S$  é representada por  $S \circ R$ .

**Definição 2** [*Relação Irreflexiva*]. Seja  $R$  uma relação definida no conjunto  $A$ . Uma relação  $R$  é chamada irreflexiva se  $\forall a \in A, (a, a) \notin R$ .

**Definição 3** [*Relação Assimétrica*]. Seja  $R$  uma relação do conjunto  $A$  para um conjunto  $B$ . Uma relação  $R$  é chamada assimétrica se  $(a, b) \in R$  então  $(b, a) \notin R$ . Nesse sentido, uma relação assimétrica é anti-simétrica e irreflexiva.

**Definição 4** [*Relação Complementar*]. Seja  $R$  uma relação do conjunto  $A$  para um conjunto  $B$ . A relação complementar  $\bar{R}$  é o conjunto de pares ordenados  $\{(a, b) | (a, b) \notin R\}$ .

**Lista de Relações:** As relações abaixo estão definidas no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

- (A)  $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- (B)  $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (C)  $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$
- (D)  $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- (E)  $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (F)  $R_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

- 
1. Como foi dito na introdução do material de relações, o mundo está “povoado” por relações: família, emprego, governo, negócios, etc. O exemplo abaixo mostra isso:

Antes de começar uma reunião sobre o relacionamento entre duas empresas parceiras num determinado negócio, dois homens começam uma conversa onde um deles fala sobre sua relação familiar. A seguir, está o relato o que esse homem fez:

“Há alguns anos atrás, eu conheci uma jovem viúva com uma filha já nos seus quase 20 anos. Nós nos casamos. Mais tarde, meu pai se casou com minha enteada.

Depois disso, minha enteada teve um filho.

Isso não foi nada até minha esposa e eu termos um filho.

Apresente um diagrama que mostre as relações dessa história bizarra. (Este é apenas um exercício de “curiosidade”).

2. Determine se cada relação da lista de relações acima é:

- (a) Reflexiva
- (b) Irreflexiva
- (c) Simétrica
- (d) Anti-simétrica
- (e) Assimétrica
- (f) Transitiva
- (g) Relação de equivalência

(h) Relação de ordem parcial

3. Determine a relação  $\overline{R}$  para cada relação da lista de relações acima.

4. Determine se cada relação  $\overline{R}$  da lista de relações acima é:

- (a) Reflexiva
- (b) Irreflexiva
- (c) Simétrica
- (d) Anti-simétrica
- (e) Assimétrica
- (f) Transitiva

5. Determine a composição das relações  $R_i \circ R_2, i = 1 \dots 6$ .

6. Seja  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  e defina a relação binária  $R$  em  $A$  como:

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x|y.$$

Desenhe o grafo dirigido da relação  $R$ .

7. Seja  $A = \{2, 4\}$  e  $B = \{6, 8, 10\}$  e defina as relações binárias  $R$  e  $S$  como:

$$\forall (x, y) \in A \times B, xRy \Leftrightarrow x|y,$$

$$\forall (x, y) \in A \times B, xSy \Leftrightarrow y - 4 = x.$$

Liste os pares ordenados que estão em  $A \times B, R, S, R \cup S, R \cap S$ .

8. Mostre se a relação binária  $D$  é reflexiva, simétrica, transitiva. Seja a relação  $D$  definida sobre  $\mathbb{R}$  como:

$$x, y \in \mathbb{R}, xDy \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

9. Determine se a relação  $R$  no conjunto de todas as páginas Web é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva, onde  $(x, y) \in R$ , sse:

- (a) Todas as pessoas que visitam a página Web  $x$  também visitam a página Web  $y$ .
- (b) Não existem *links* comuns na página Web  $x$  e na página Web  $y$ .
- (c) Existe pelo menos um *link* em comum na página Web  $x$  e na página Web  $y$ .
- (d) Existe uma página Web que inclui *links* para a página Web  $x$  e para a página Web  $y$ .

10. Qual é a composição das relações  $R$  e  $S$  onde  $R$  é a relação de  $\{1, 2, 3\}$  para  $\{1, 2, 3, 4\}$  com  $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$  e  $S$  é a relação de  $\{1, 2, 3, 4\}$  para  $\{0, 1, 2\}$  com  $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ ?

11. Seja o conjunto  $A = \{0, 1\}$ . Quantas relações binárias distintas podem ser definidas sobre o conjunto  $A$ ?

12. Liste as relações do exercício 11.

13. Determine se cada relação do exercício 12 é:

- (a) Reflexiva
- (b) Irreflexiva
- (c) Simétrica
- (d) Anti-simétrica
- (e) Assimétrica
- (f) Transitiva

14. Determine a relação complementar das relações do exercício 12.

15. Considere as relações dos exercícios 12 e 14. Faça uma tabela, como a que está abaixo, indicando se cada uma das seis propriedades é verdadeira ou falsa. Utilizando essa tabela, tente estabelecer uma relação entre as propriedades de  $R$  e de  $\overline{R}$ .

| # Relação | Propriedades de $R$ |             |           |                |             |            | Propriedades de $\overline{R}$ |             |           |                |             |            |
|-----------|---------------------|-------------|-----------|----------------|-------------|------------|--------------------------------|-------------|-----------|----------------|-------------|------------|
|           | Reflexiva           | Irreflexiva | Simétrica | Anti-simétrica | Assimétrica | Transitiva | Reflexiva                      | Irreflexiva | Simétrica | Anti-simétrica | Assimétrica | Transitiva |
| 1         |                     |             |           |                |             |            |                                |             |           |                |             |            |
| $\vdots$  |                     |             |           |                |             |            |                                |             |           |                |             |            |
| $n$       |                     |             |           |                |             |            |                                |             |           |                |             |            |

16. Quantas relações binárias existem em um conjunto com  $n$  elementos que são:
- Simétricas
  - Anti-simétricas
  - Assimétricas
  - Irreflexivas
  - Reflexivas e simétricas
  - Nem reflexivas nem irreflexivas
17. Liste os pares ordenados nas relações de equivalência produzidos pelas partições do conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ :
- $\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
  - $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$
  - $\{0, 1, 2\}, \{3, 4, 5\}$