Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 10
Integração Numérica

Introdução

Integrar numericamente uma função y=f(x) num dado intervalo [a, b] consiste em integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime f(x) no dado intervalo.

Introdução

Integrar numericamente uma função $y=f(x)$ num dado intervalo [a, b] consiste em integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime $f(x)$ no dado intervalo.

Se for dado o conjunto de pares ordenados $(x_0,f(x_0)$, $x_1,f(x_1)$, ..., $x_n,f(x_n))$, podemos utilizar como polinômio de aproximação para a função $f(x)$, no intervalo [a, b], o seu polinômio de interpolação.

Introdução

Integrar numericamente uma função $y=f(x)$ num dado intervalo [a, b] consiste em integrar um polinômio $P_n(x)$ que aproxime $f(x)$ no dado intervalo.

Se for dado o conjunto de pares ordenados $(x_0,f(x_0), x_1,f(x_1), ..., x_n,f(x_n))$, podemos utilizar como polinômio de aproximação para a função $f(x)$, no intervalo [a, b], o seu polinômio de interpolação.

A principal vantagem da utilização do polinômio está relacionada com o fato de que $f(x)$ pode ser uma função difícil de integrar, ou para a qual a integração seja impossível.

Introdução

Consideraremos integrais na forma:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx$$

onde $\omega(x)$ é chamada função peso.

Introdução

Consideraremos integrais na forma:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx$$

onde $\omega(x)$ é chamada função peso.

Inicialmente, a integral numérica pode ser resolvida através de **Fórmulas de Quadratura Interpolatória,** dada por:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \simeq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

onde os coeficientes deve satisfazer:

$$\int_a^b \omega(x) x^i \, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^i$$

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

Exercício: Seja [a, b] = [0, 2] e $x_0=0$, $x_1=1$ e $x_2=3/2$. Determinar a fórmula de quadratura que seja exata para todo polinômio de grau menor ou igual a 2, considerando inicialmente $\omega(x)=1$.

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

Exercício: Seja [a, b] = [0, 2] e $x_0=0$, $x_1=1$ e $x_2=3/2$. Determinar a fórmula de quadratura que seja exata para todo polinômio de grau menor ou igual a 2, considerando inicialmente $\omega(x)=1$.

Solução: para satisfazer $f(x)=x^0$, $f(x)= x^1$ e $f(x)= x^2$ temos:

$$\int_0^2 x^0 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^0$$

$$\int_0^2 x^1 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^1$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^2$$

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

Exercício: Seja [a, b] = [0, 2] e $x_0=0$, $x_1=1$ e $x_2=3/2$. Determinar a fórmula de quadratura que seja exata para todo polinômio de grau menor ou igual a 2, considerando inicialmente $\omega(x)=1$.

Solução: para satisfazer $f(x)=x^0$, $f(x)= x^1$ e $f(x)= x^2$ temos:

$$\int_0^2 x^0 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^0$$

$$\int_0^2 x^1 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^1$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^2$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ 0 \quad + A_1 + \dfrac{3}{2} A_2 = 2 \\ 0 \quad + A_1 + \dfrac{9}{4} A_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

Exercício: Seja [a, b] = [0, 2] e $x_0=0$, $x_1=1$ e $x_2=3/2$. Determinar a fórmula de quadratura que seja exata para todo polinômio de grau menor ou igual a 2, considerando inicialmente $\omega(x)=1$.

Solução: para satisfazer $f(x)=x^0$, $f(x)= x^1$ e $f(x)= x^2$ temos:

$$\int_0^2 x^0 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^0 \qquad \begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ 0 \;\; + A_1 + \frac{3}{2} A_2 = 2 \\ 0 \;\; + A_1 + \frac{9}{4} A_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \qquad A_0 = \frac{4}{9}$$

$$\int_0^2 x^1 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^1 \qquad A_1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^2 \qquad A_2 = \frac{8}{9}$$

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

$$\int_0^2 f(x)\,d(x) = \frac{4}{9} f(x_0) + \frac{2}{3} f(x_1) + \frac{8}{9} f(x_2)$$

Fórmulas de Quadratura Interpolatória

$$\int_0^2 f(x)\,d(x) = \frac{4}{9} f(x_0) + \frac{2}{3} f(x_1) + \frac{8}{9} f(x_2)$$

Seja $f(x)=x^2 - 2$, aplique a fórmula de quadratura, para encontrar o resultado da integração.

Regra do Trapézio

As Fórmulas de **Newton-Cotes do tipo fechado** consideram $a=x_0$ e $b=x_1$, onde os argumentos x_k são igualmente espaçados de uma quantidade fixa h ($h=x_{k+1} - x_k$) e a função peso constante e igual a 1.

Regra do Trapézio

As Fórmulas de **Newton-Cotes do tipo fechado** consideram $a=x_0$ e $b=x_1$, onde os argumentos x_k são igualmente espaçados de uma quantidade fixa h ($h=x_{k+1} - x_k$) e a função peso constante e igual a 1.

1º Caso) Desta forma, considerando dois pontos consecutivos e um polinômio de 1ª ordem, a solução é dada por:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,d(x) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

conhecida como **Regra do Trapézio.**

Regra do Trapézio Generalizada

Se o intervalo de integração for muito grande, pode-se aumentar o número de pontos e dividir o intervalo [a, b] em N sub-intervalos (segmentos), dados por:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Assim, teremos a **Regra do Trapézio Generalizada** dada por:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\,d(x) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1})\big) + f(x_N) \right]$$

Regra do Trapézio Generalizada

Exercício – Calcular utilizando a regra do trapézio, considerando h=0.2, a integral:

$$\int_0^{1.2} e^x \cos(x)\, dx$$

Compare o resultado com o valor exato da integral.

OBS: Padrão do Matlab é radianos.

Regra de 1/3 de Simpson

2º Caso) Integração considerando três pontos consecutivos utilizando polinômio de 2ª ordem. Neste caso, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)d(x) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

conhecida como **Regra de 1/3 de Simpson**.

Regra de 1/3 de Simpson

2º Caso) Integração considerando três pontos consecutivos utilizando polinômio de 2ª ordem. Neste caso, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)d(x) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

conhecida como **Regra de 1/3 de Simpson**.

A generalização desta regra pode ser feita dividindo-se o intervalo por:

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

OBS: deve ser múltiplo de 2 por precisamos sempre de 3 pontos para aplicar a regra.

Regra de 1/3 de Simpson

Portanto, a regra de 1/3 de Simpson generalizada é:

$$\int_{x_0}^{x_{2N}} f(x)\,d(x) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots +$$

$$+ 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

Regra de 1/3 de Simpson

Portanto, a regra de 1/3 de Simpson generalizada é:

$$\int_{x_0}^{x_{2N}} f(x)\,d(x) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots +$$

$$+ 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

Exercício – Resolva o exercício anterior utilizando a Regra de 1/3 de Simpson. Compare com o valor exato da integração.

Regra de 3/8 de Simpson

3º Caso) Integração considerando quatro pontos consecutivos utilizando polinômio de 3ª ordem. Neste caso, temos:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)d(x) = \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + f(x_3)\right]$$

Exercício – Resolva o exercício anterior utilizando a Regra de 3/8 de Simpson. Compare com o valor exato da integração.

Regra de 3/8 de Simpson

Generalizada de 3/8 de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_{3N}} f(x)\,d(x) = \frac{3}{8}h\Big[f(x_0) + 3\big(f(x_1) + f(x_2)\big) + 2f(x_3) + 3\big(f(x_4) + f(x_5)\big) + \ldots +$$

$$+ 2f(x_{3N-3}) + 3\big(f(x_{3N-2}) + f(x_{3N-1})\big) + f(x_{3N})\Big]$$

Onde h deverá ser:

$$h = \frac{(b-a)}{3N}$$

De tal forma que $a=x_0$ e $b=x_{3N}$