Método Master (ou Mestre)

teorema

- O método Máster provê uma "receita" para resolver recorrências do tipo **T(n) = a T(n/b) + f(n)** com a ≥1, b>1 constantes e f(n) função assintoticamente positiva.
- A ideia da recorrência é a divisão de um problema de tamanho **n** em **a** subproblemas, cada um de tamanho **n/b**.
- Os "a" subproblemas são resolvidos de forma recursiva, cada um com tempo T(n/b).
- O custo de dividir o problema e combinar os resultados dos subproblemas é descrito pela função f(n).

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + F(n)$$

$a \geq 1$

$b > 1$

$F(n) \geq 0$

O Teorema Máster:

- Seja T(n) = a T(n/b) + f(n)   a≥1, b>1, f(n) ≥ 0
  Então T(n) pode ser limitada assintoticamente como segue:
  i. Se $f(n) = O(n^{(\log_b a) - \varepsilon})$ para alguma constante ε > 0 então $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$
  ii. Se $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$ então $T(n) = \theta(n^{\log_b a}. \log n)$
  iii. Se $f(n) = \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon})$ para alguma constante ε > 0 e a.f(n/b) ≤ c.f(n) para alguma constante c < 1 então $T(n) = \theta(f(n))$

Exemplos:

$$\begin{cases} T(n) = 9T(n/3) + n \\ T(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(n) = T(2n/3) + 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(n) = 9\,T(n/3) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$a = 9 \quad b = 3 \quad F(n) = n$

i) $F(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$

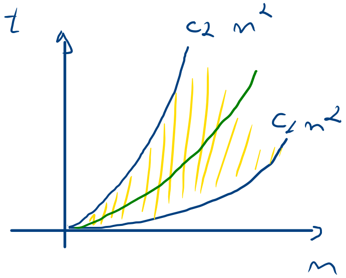
$n = O(n^{\log_3 9 - \varepsilon})$

$n = O(n^{2 - \varepsilon}) \quad \varepsilon = 1$

$n = O(n^1)$ V

$T(n) = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$

$c_1 n^2 \leq T(n) \leq c_2 \cdot n^2$



ii) $F(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$n = \Theta(n^{\log_3 9})$

$n = \Theta(n^2)$

$c_1 n^2 \leq n \leq c_2 n^2$

F

É impossível encontrar esta c_1

iii) $F(n) = \Omega(n^{(\log_b a + \varepsilon)})$

$n = \Omega(n^{2 + \varepsilon})$

$n \geq c\, |n^{(2+\varepsilon)}|$

F

E

$a \cdot F(n/b) \leq c \cdot F(n)$

$9 \cdot F(n/3) \leq c \cdot F(n)$

O Teorema Máster:

- Seja T(n) = a T(n/b) + f(n)   a≥1, b>1, f(n) ≥ 0
  Então T(n) pode ser limitada assintoticamente como segue:
  1. Se f(n) = O($n^{(\log_b a) - \varepsilon}$) para alguma constante ε > 0 então T(n) = θ($n^{\log_b a}$)
  2. Se f(n) = θ($n^{\log_b a}$) então T(n) = θ($n^{\log_b a}$. log n)
  3. Se f(n) = Ω($n^{(\log_b a) + \varepsilon}$) para alguma constante ε > 0 e a.f(n/b) ≤ c.f(n) para alguma constante c < 1 então T(n) = θ(f(n))

Exemplos:

$\begin{cases} T(n) = 9T(n/3) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} T(n) = T(2n/3) + 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$

iii $F(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$

$1 \geq c \cdot |n^{(0 + \varepsilon)}|$ F

$T(n) = T(\frac{2}{3}n) + 1$

$T(1) = 1$

$a = 1 \quad b = 3/2 \quad F(n) = 1$

i $F(n) = O(n^{\log_{3/2} a})$

$1 \leq c \cdot n^{(\log_{3/2} 1 - \varepsilon)}$ F

$1 \leq c \cdot n^{(0 - \varepsilon)}$ $1 \leq c \cdot \frac{1}{n}$

ii $F(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ V

$1 = \Theta(n^{\log_{3/2} 1})$

$1 = \Theta(n^0)$ $c_1 \cdot |1| \leq 1 \leq c_2 \cdot |1|$

$1 = \Theta(1)$

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log(n))$

$T(n) = \Theta(n^{\log_{3/2} 1} \cdot \log n) \Rightarrow \boxed{T(n) = \log n}$

O Teorema Máster:

- Seja $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ $a \geq 1$, $b > 1$, $f(n) \geq 0$
  Então $T(n)$ pode ser limitada assintoticamente como segue:
  i. Se $f(n) = O(n^{(\log_b a) - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ então $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$
  ii. Se $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$ então $T(n) = \theta(n^{\log_b a}.\ \log n)$
  iii. Se $f(n) = \Omega(n^{(\log_b a) + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$ então $T(n) = \theta(f(n))$

Exemplos:

$$\begin{cases} T(n) = 9T(n/3) + n \\ T(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(n) = T(2n/3) + 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$a = 2 \quad b = 2 \quad F(n) = n$

i) $n^2 \leq c \cdot |n^{(\log_2 2 - \varepsilon)}|$ F

$n^2 \leq c \cdot |n^{1-\varepsilon}| \quad \varepsilon > 0$

não possível com ε positivo

ii) $n^2 = \Theta(n^{\log_2 2})$ F

$n^2 = \Theta(n^1)$

$c_1 \cdot n \leq n^2 \leq c_2 \cdot n^1$

não é possível encontrar c_2

iii) $n^2 = \Omega(n^{(\log_2 2 + \varepsilon)})$ E

$n^2 \geq c \cdot |n^{1+\varepsilon}|$

possível p/ $c = 1$ e $\varepsilon = 1$
OK!

$a \cdot F(n/b) \leq c \cdot F(n)$

$2 \cdot \left|\frac{n}{2}\right|^2 \leq c \cdot n^2$

$\frac{1}{2} \cdot n^2 \leq c \cdot n^2$

possível $\forall\, c \geq \frac{1}{2}$

V

$T(n) = \Theta(n^2)$

$$\begin{cases} T(n) = 2\,T(n/2) + n^2 & p/ \ \forall\, n > 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$= 2\left[2\,T\left(\frac{n/2}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 2^2\,T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n^2}{2} + n^2 = 2^2\,T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{3}{2^1}n^2$$

$$= 2^2\left[2\,T\left(\frac{n/4}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + \frac{3}{2}n^2 = 2^3\,T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}n^2 = 2^3\,T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{7}{4}n^2$$

$$= 2^3\left[2\,T\left(\frac{n/8}{2}\right) + \left(\frac{n}{8}\right)^2\right] + \frac{7}{4}n^2 = 2^4 \cdot T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{8} + \frac{7}{4}n^2 = 2^4 \cdot T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{15}{2^3}n^2$$

$\vdots$ iterar K vezes

$$= 2^K \cdot T\left(\frac{n}{2^K}\right) + \frac{(2^K - 1)}{2^{(K-1)}} \cdot n^2$$

Fazendo $\frac{n}{2^K} = 1$ $\quad n = 2^K \quad 2^{\log_2 n} = 2^K$

$$\boxed{K = \log_2 n}$$

$$= 2^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{\left(2^{\log_2 n} - 1\right)}{2^{\log_2 n - 1}} n^2 = n + \frac{(n-1)}{2^{\log_2 n} \cdot 2^{-1}} \cdot n^2 = n + \frac{(n-1)}{n \cdot \frac{1}{2}} \cdot n^2$$

$$= n + \frac{2(n-1)}{\cancel{n}} \cdot n^{\cancel{2}} = n + 2n^2 - 2n = 2n^2 - n$$

$$T(n) = 2n^2 - n = O(n^2)$$