Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 03

Erros nas Aproximações Numéricas

Erros

Uma vez entendido que o conjunto de números representado em qualquer computador é **finito,** e portanto **discreto**, nos mostra que não é possível representar todos os números de um intervalo (a,b).

Erros

Uma vez entendido que o conjunto de números representado em qualquer computador é **finito,** e portanto **discreto**, nos mostra que não é possível representar todos os números de um intervalo (a,b). **Isso implica em erros!**

Erros

Uma vez entendido que o conjunto de números representado em qualquer computador é **finito,** e portanto **discreto**, nos mostra que não é possível representar todos os números de um intervalo (a,b). **Isso implica em erros!**

Os erros numéricos são causados pelo uso de aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas. Os erros podem ser calculados, normalmente, por:

Valor verdadeiro = Aproximação + Erro

Logo:

Erro = Valor verdadeiro – Aproximação

Erros

Principais fontes de erros:

- erros nos dados de entradas;
- erros no estabelecimento do modelo matemático;
- erros de arredondamento durante a computação;
- erros de truncamento;
- erros humanos.

Erros

Importância do conhecimento dos erros:

Simplesmente devido ao fato de que, com a existência de erros, de qualquer natureza, pode-se chegar a resultados distantes do que se esperaria, ou mesmo obter resultados que não têm nenhuma relação com a solução do problema original.

Erros

Importante:

Para muitos problemas de engenharia não é possível obter soluções analíticas, portanto, não se pode calcular exatamente os erros associados aos métodos numéricos.

Nestes casos, é preciso contentar-se com uma aproximação ou estimativa dos erros. A questão principal é:

O erro é tolerável?

Erros

Os erros associados tanto aos cálculos quanto às medidas podem ser caracterizados com relação a sua exatidão e precisão.

A exatidão se refere a quão próximo o valor calculado está do valor verdadeiro.

A precisão se refere a quão próximos os valores calculados individuais estão próximos uns dos outros.

Erros

Exemplo 1 – Qual é o valor da área de uma circunferência de raio 100m?

Erros

Exemplo 1 – Qual é o valor da área de uma circunferência de raio 100m?

Solução:

$$se\ \pi = 3.14 \qquad\qquad A = 31400m^2$$

Erros

Exemplo 1 – Qual é o valor da área de uma circunferência de raio 100m?

Solução:

$$se\ \pi = 3.14 \qquad A = 31400m^2$$

$$se\ \pi = 3.1416 \qquad A = 31416m^2$$

Erros

Exemplo 1 – Qual é o valor da área de uma circunferência de raio 100m?

Solução:

$$se\ \pi = 3.14 \qquad A = 31400m^2$$

$$se\ \pi = 3.1416 \qquad A = 31416m^2$$

$$se\ \pi = 3.141592 \qquad A = 31415.92m^2$$

Erros

Exemplo 1 – Qual é o valor da área de uma circunferência de raio 100m?

Solução:

$$se\ \pi = 3.14 \qquad A = 31400 m^2$$

$$se\ \pi = 3.1416 \qquad A = 31416 m^2$$

$$se\ \pi = 3.141592 \qquad A = 31415.92 m^2$$

Como justificar as diferenças entre os resultados?

Erro Absoluto

Definição: definimos erro absoluto como a diferença entre o valor exato de um número (X) e seu valor aproximado:

$$EA_x = x - \overline{x}$$

$\overline{X}$: é o valor aproximado de X.

Erro Absoluto

Definição: definimos erro absoluto como a diferença entre o valor exato de um número (X) e seu valor aproximado:

$$EA_x = x - \overline{x}$$

$\overline{X}$: é o valor aproximado de X.

OBS: normalmente apenas o valor aproximado de X é conhecido, e, neste caso, é impossível calcular o erro absoluto!

Erro Absoluto

Importante: um outro problema na definição do erro absoluto é que não se leva em conta a ordem de grandeza do valor que está sendo estimado.

Erro Absoluto

Importante: um outro problema na definição do erro absoluto é que não se leva em conta a ordem de grandeza do valor que está sendo estimado.

Por exemplo: Um erro de 1cm é muito mais significativo quando se mede um rebite do que quando se mede uma ponte!

Erro Absoluto

Se π está entre 3.14 e 3.15, pode-se dizer que:

$$\left|EA_{\pi}\right| = \left|\pi - \overline{\pi}\right| < 0.01$$

Erro Absoluto

Se π está entre 3.14 e 3.15, pode-se dizer que:

$$|EA_\pi| = |\pi - \overline{\pi}| < 0.01$$

Exemplo 2 – Dados dois números representados por:

$$\overline{X} = 2112.9 \quad tal\ que\ |EA_x| < 0.1$$

$$Logo,\ x \in (2112.8,\ 2113)$$

$$\overline{Y} = 5.3 \quad tal\ que\ |EA_y| < 0.1$$

$$Logo,\ y \in (5.2,\ 5.4)$$

Erro Absoluto

Se π está entre 3.14 e 3.15, pode-se dizer que:

$$|EA_{\pi}| = |\pi - \overline{\pi}| < 0.01$$

Exemplo 2 – Dados dois números representados por:

$$\overline{X} = 2112.9 \quad tal\ que\ |EA_x| < 0.1$$

$$Logo,\ x \in (2112.8,\ 2113)$$

$$\overline{Y} = 5.3 \quad tal\ que\ |EA_y| < 0.1$$

$$Logo,\ y \in (5.2,\ 5.4)$$

Pode-se dizer que ambos os números estão representados com a mesma precisão, sendo que os limites para os erros absolutos são os mesmos?

Erro Relativo

Solução:

Deve ser comparada a ordem de grandeza dos números X e Y, ficando fácil observar que a ordem de grandeza de X é maior que a ordem de grandeza de Y.

Erro Relativo

Solução:

Deve ser comparada a ordem de grandeza dos números X e Y, ficando fácil observar que a ordem de grandeza de X é maior que a ordem de grandeza de Y.

Logo, o erro absoluto não é parâmetro suficiente para descrever a precisão de cálculo. Por esta razão o **erro relativo** é mais amplamente utilizado.

Erro Relativo

Solução:

Deve ser comparada a ordem de grandeza dos números X e Y, ficando fácil observar que a ordem de grandeza de X é maior que a ordem de grandeza de Y.

Logo, o erro absoluto não é parâmetro suficiente para descrever a precisão de cálculo. Por esta razão o **erro relativo** é mais amplamente utilizado.

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{\overline{X}} = \frac{X - \overline{X}}{\overline{X}}$$

Erro Relativo

Solução do Exemplo 2:

$$\left|ER_x\right| = \frac{\left|EA_x\right|}{\left|\overline{X}\right|} < \frac{0.1}{2112.9} \approx 4.7 \times 10^{-5}$$

$$\left|ER_y\right| = \frac{\left|EA_y\right|}{\left|\overline{Y}\right|} < \frac{0.1}{5.3} \approx 0.02$$

Erro Relativo

Solução do Exemplo 2:

$$\left|ER_x\right| = \frac{\left|EA_x\right|}{\left|\bar{X}\right|} < \frac{0.1}{2112.9} \approx 4.7 \times 10^{-5}$$

$$\left|ER_y\right| = \frac{\left|EA_y\right|}{\left|\bar{Y}\right|} < \frac{0.1}{5.3} \approx 0.02$$

Portanto, pode-se dizer que o número X é representado com maior precisão que o número Y.

Arredondamento

Definição: arredondar um número X em ponto flutuante, por um com menor número de dígitos significativos, consiste em encontrar o número $\bar{X}$, tal que:

$$\left|\bar{X} - X\right|$$

seja o menor possível.

Arredondamento

Definição: arredondar um número X em ponto flutuante, por um com menor número de dígitos significativos, consiste em encontrar o número $\overline{X}$, tal que:

$$\left|\overline{X} - X\right|$$

seja o menor possível.

REGRA: em linhas gerais, para arredondar um número na base 10, deve-se apenas observar o primeiro dígito a ser descartado. Se este dígito for menor que 5, deixamos os dígitos inalterados; se é maior ou igual a 5 deve-se somar 1 ao último dígito remanescente.

Arredondamento

Erros de arredondamento: os erros de arredondamento se originam do fato de que o computador mantém apenas um número fixo de algarismo significativos.

Além disto, como os computadores usam uma representação na base 2, os mesmos não podem representar precisamente certos números exatos na base 10.

Truncamento

Definição: cancelamento. No truncamento os dígitos menos significativos são simplesmente descartados (cancelados).

Exemplo 3 – Representar o números abaixo no sistema em ponto flutuante f(10,3,4,4) utilizando truncamento:

a) 10.053

b) 2.71828

Truncamento

Definição: cancelamento. No truncamento os dígitos menos significativos são simplesmente descartados (cancelados).

Exemplo 3 – Representar o números abaixo no sistema em ponto flutuante f(10,3,4,4) utilizando truncamento:

a) 10.053 0.100×10^2

b) 2.71828 0.271×10^1

Erros

Exemplo 4 – Faça o seguinte cálculo no Matlab, mostrando o resultado com no mínimo 20 casas após a virgula:

X=30000*0.111

Erros

Exemplo 4 – Faça o seguinte cálculo no Matlab, mostrando o resultado com no mínimo 20 casas após a virgula:

X=30000*0.111

Posteriormente, faça um algoritmo para somar 30000 vezes o número 0.111 e compare os resultados.