Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 07
Sistemas de Equações Lineares

Introdução

Um sistema linear com M equações e N variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

a_{ij} são os coeficientes, x_j as variáveis e b_i as constantes.

Introdução

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de X, caso eles existam, que satisfaçam as M equações simultaneamente. Usando a notação matricial, o sistema linear pode ser representado por:

$$Ax = b$$

Introdução

A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de X, caso eles existam, que satisfaçam as M equações simultaneamente. Usando a notação matricial, o sistema linear pode ser representado por:

$$Ax = b$$

onde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$

Introdução

Possíveis soluções para sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

Solução única: (1,1)

Introdução

Possíveis soluções para sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

Solução única: (1,1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Múltiplas soluções.

Introdução

Possíveis soluções para sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

Solução única: (1,1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

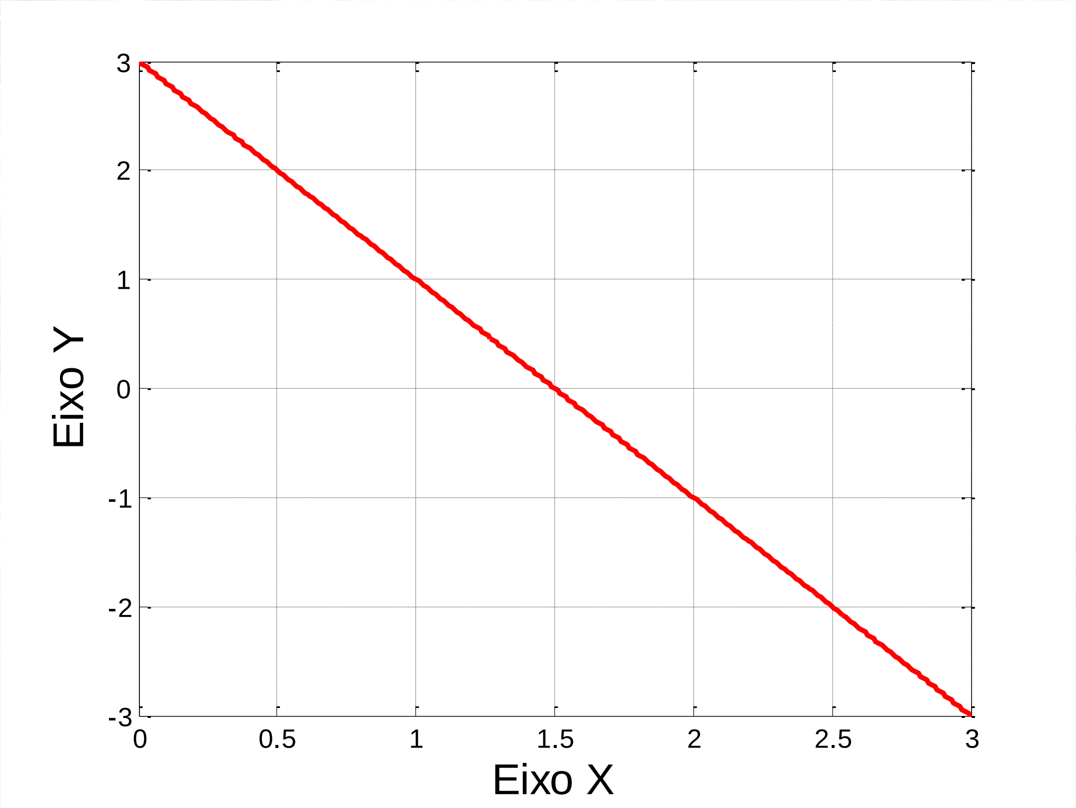
Múltiplas soluções.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Não possui solução.

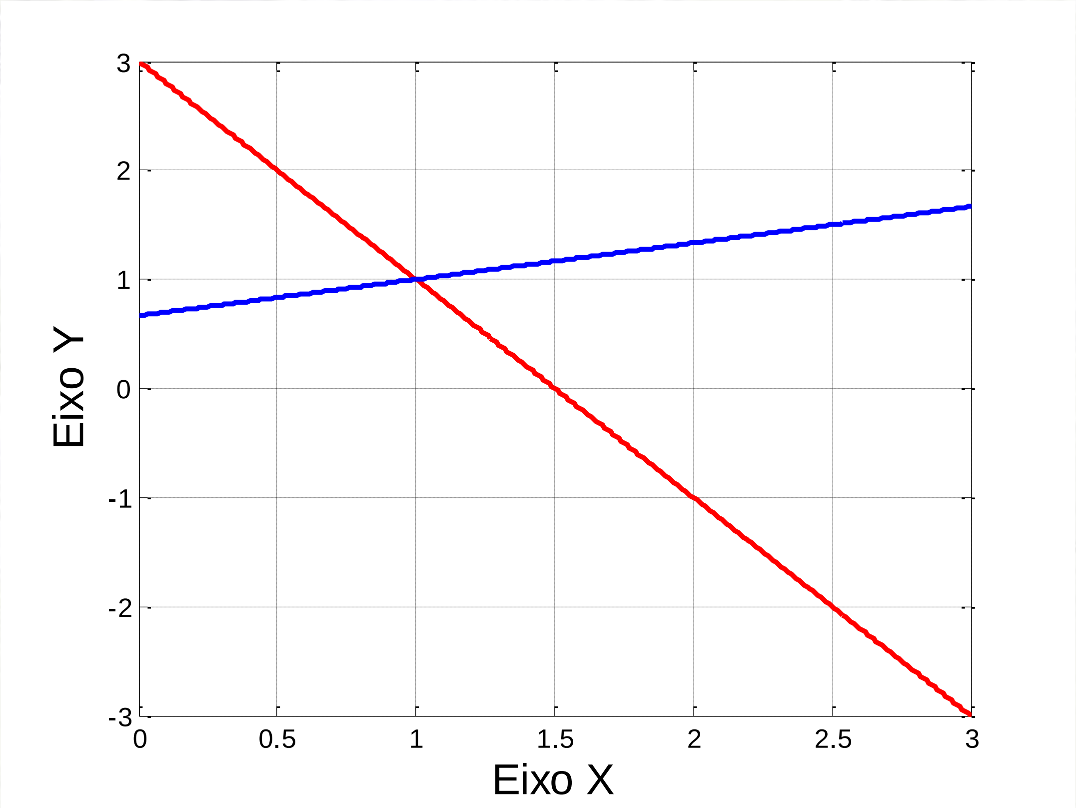
Introdução

Exemplo com solução única:



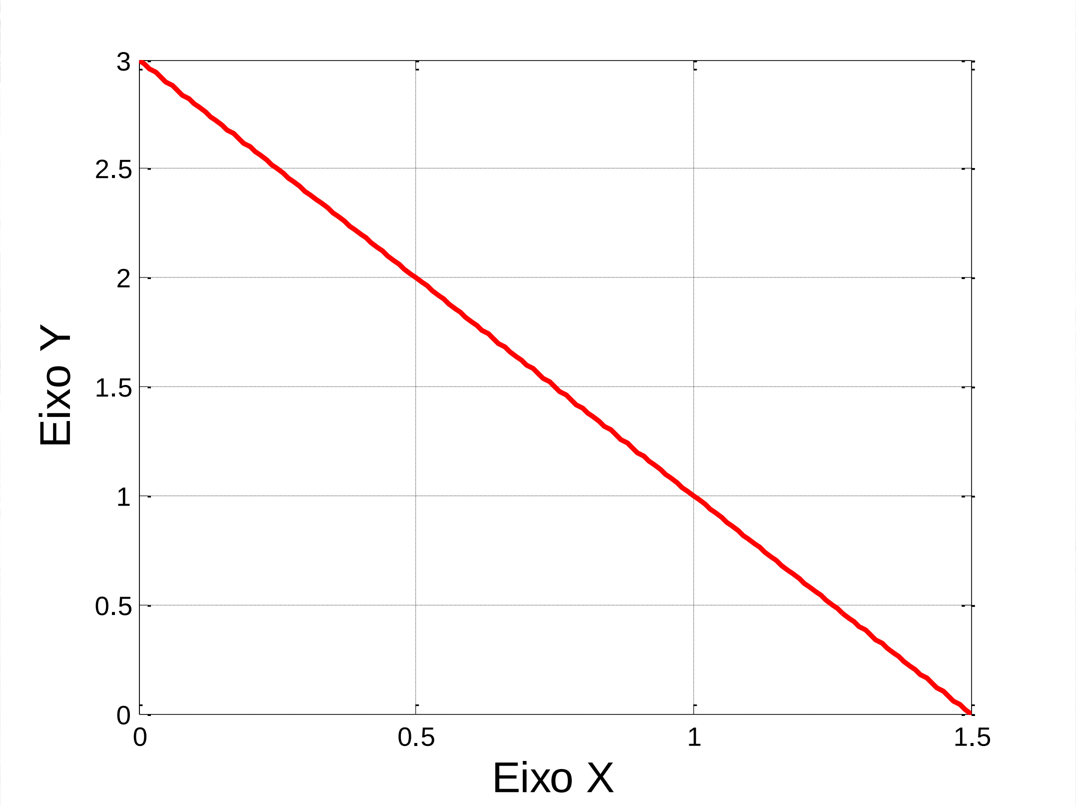
Introdução

Exemplo com solução única:



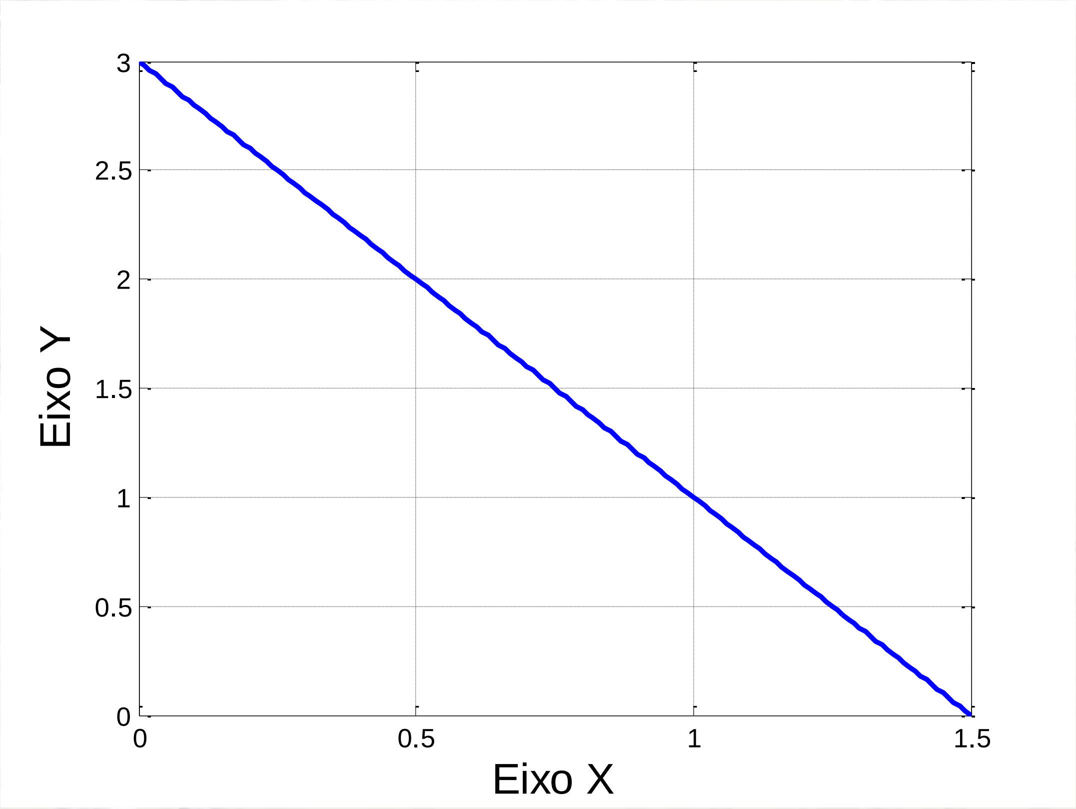
Introdução

Exemplo com múltiplas soluções:



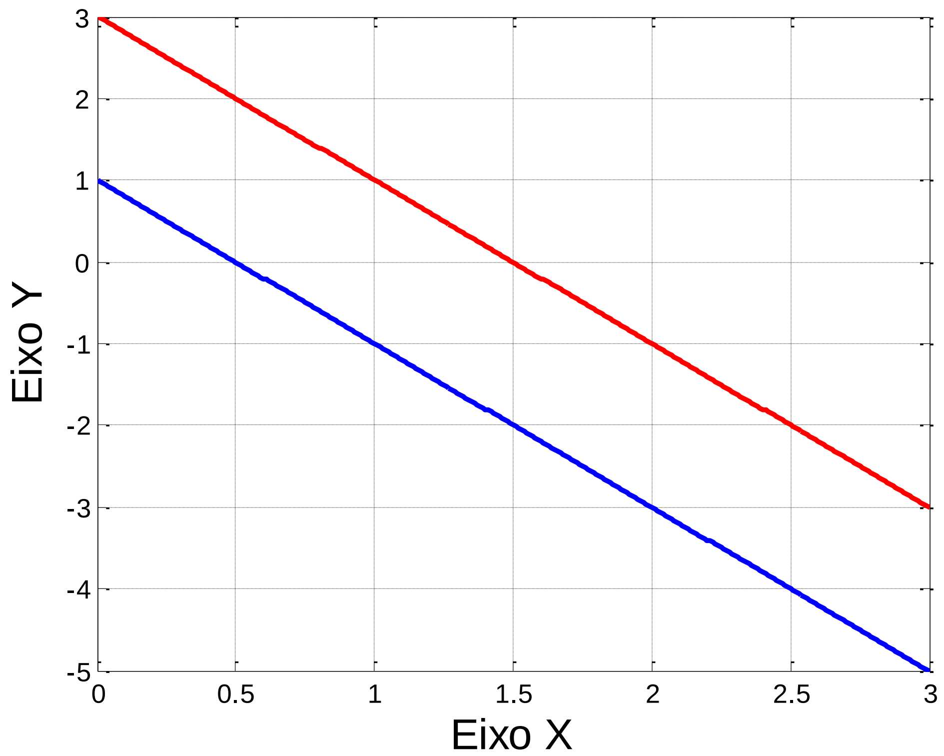
Introdução

Exemplo com múltiplas soluções:



Introdução

Exemplo para caso sem solução:



Introdução

Exemplo – Calcule x1, x2 e x3 que satisfaça o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Introdução

Exemplo – Calcule x1, x2 e x3 que satisfaça o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Para os sistemas lineares com solução única o valor de X pode se dado diretamente por: $x = A^{-1}b$

No entanto, destacam-se vários métodos diretos e indiretos que eliminam o cálculo da matriz inversa.

Introdução

Exemplo – Calcule x1, x2 e x3 que satisfaça o sistema linear de equações:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para os sistemas lineares com solução única o valor de X pode se dado diretamente por: $x = A^{-1}b$

No entanto, destacam-se vários métodos diretos e indiretos que eliminam o cálculo da matriz inversa.

Método Direto – Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é um procedimento usado para resolver sistemas de equações lineares, colocando-o na forma **triangular superior**, que é então resolvida empregando-se a substituição regressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Método Direto – Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é um procedimento usado para resolver sistemas de equações lineares, colocando-o na forma **triangular superior**, que é então resolvida empregando-se a substituição regressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Método Direto – Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss é um procedimento usado para resolver sistemas de equações lineares, colocando-o na forma **triangular superior**, que é então resolvida empregando-se a substituição regressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Uma das principais dificuldades é se o elemento pivô for igual a zero.

Método Direto – Eliminação de Gauss

A forma **triangular inferior** também poderá ser obtida podendo ser resolvida empregando-se a substituição progressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Método Direto – Eliminação de Gauss

A forma **triangular inferior** também poderá ser obtida podendo ser resolvida empregando-se a substituição progressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Método Direto – Eliminação de Gauss

A forma **triangular inferior** também poderá ser obtida podendo ser resolvida empregando-se a substituição progressiva, sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

A forma **diagonal**: (Gauss-Jordan)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear Ax=b em x=Cx+g, supondo a_{ii} diferente de zero, onde:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}\right) \end{cases}$$

Isolando o vetor x mediante a separação pela diagonal.

Método iterativo de Gauss-Jacobi

Desta forma temos x=Cx+g, onde:

$$c = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & \dots & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & \dots & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado X inicial, obter X futuro através da equação recursiva.

Método iterativo de Gauss-Jacobi

Exercício: Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$$

sendo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

Critério de Convergência: Critério das linhas, onde:

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \right)}{|a_{kk}|}$$

Método iterativo de Gauss-Jacobi

Critério de Convergência: Critério das linhas, onde:

$$\alpha_k = \frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right|\right)}{\left|a_{kk}\right|}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0.3 \qquad \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 \qquad \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5$$

$$\alpha_{\max} = 0.5 < 1$$

Método iterativo de Gauss-Seidel

Da mesma forma, o sistema linear é posto no formato Cx+g. A diferença está no fato de que os valores "futuros" já calculados, são utilizados instantaneamente.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_{1_{(K+1)}} - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_{1_{(K+1)}} - a_{32}x_{2_{(K+1)}} - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_{1_{(K+1)}} - a_{n2}x_{2_{(K+1)}} - \ldots - a_{n\,n-1}x_{n-1_{(K+1)}}\right) \end{cases}$$

Método iterativo de Gauss-Seidel

Exercícios – Resolver o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel, sendo tol=0.001.

$$\begin{cases} 5x + y + z = 5 \\ 3x + 4y + z = 6 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

com:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$