Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 04
Zeros Reais de Funções Reais

Introdução

Um dos problemas que ocorrem frequentemente em trabalhos científicos é o cálculo de zeros (também chamada raízes) de equações na forma:

f(x) = 0

onde f(x) pode ser uma equação:

- polinomial: $x^5 - 4x^3 + 10x - 100 = 0$
- transcendental: $x\,tg(x) - 1 = 0$
- algébrica: $\dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 2}} - 20x = 0$

Zeros da Função

Definição: Um número α é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x)=0 se $\mathbf{f(\alpha) = 0}$.

Zeros da Função

Definição: Um número α é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x)=0 se $\mathbf{f(\alpha) = 0}$.

Em alguns casos, os valores de α que anulam f(x) podem ser reais ou complexos. Inicialmente, somente os zeros reais da função f(x) serão estudos.

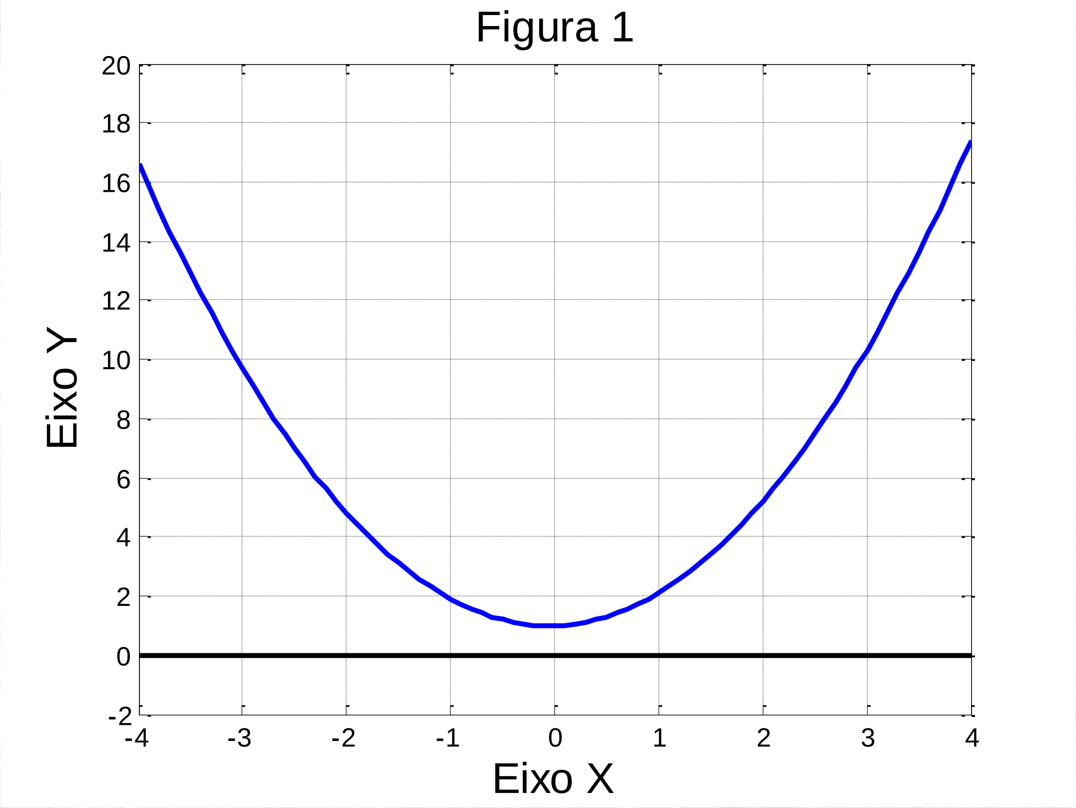
Zeros da Função

Definição: Um número α é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x)=0 se **f(α) = 0**.

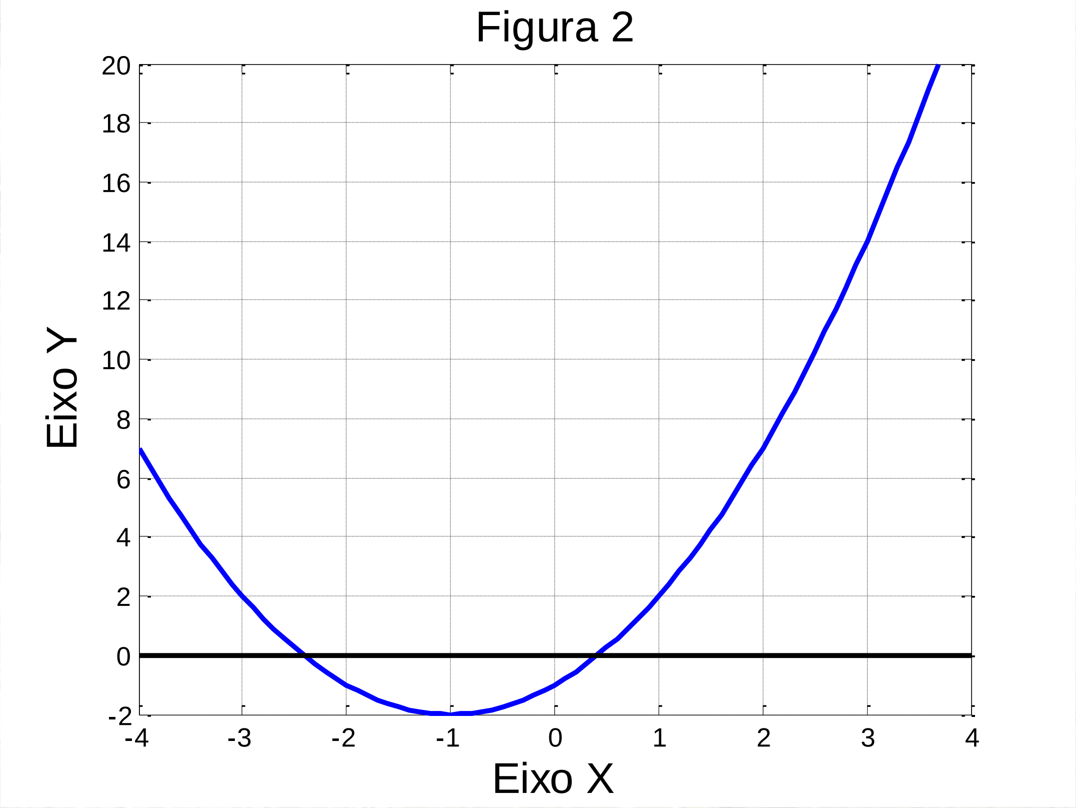
Em alguns casos, os valores de α que anulam f(x) podem ser reais ou complexos. Inicialmente, somente os zeros reais da função f(x) serão estudos.

Como obter raízes reais de uma equação qualquer?

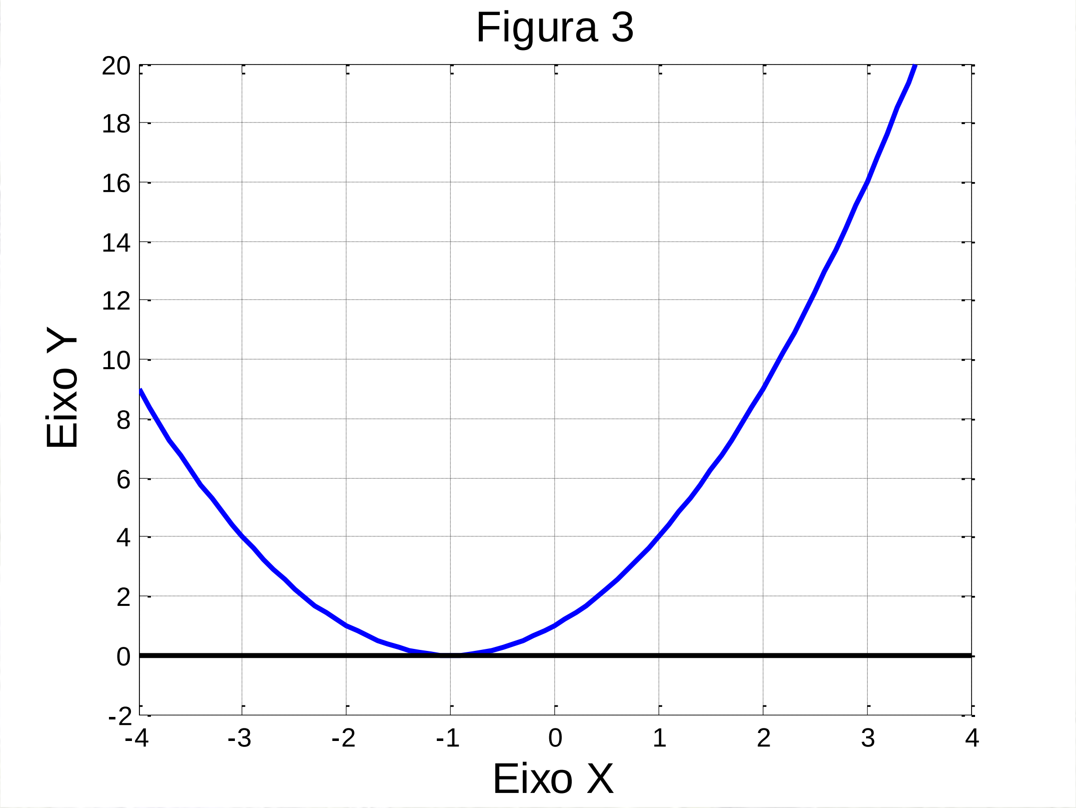
Zeros da Função – Análise Gráfica



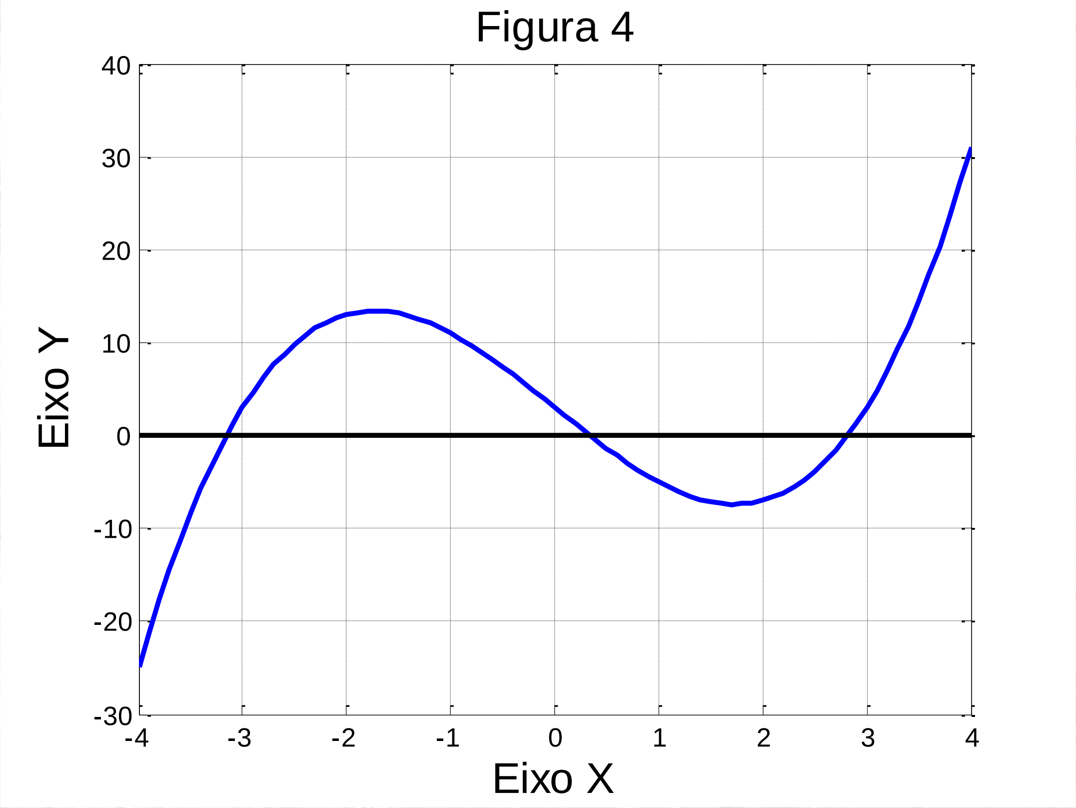
Zeros da Função – Análise Gráfica



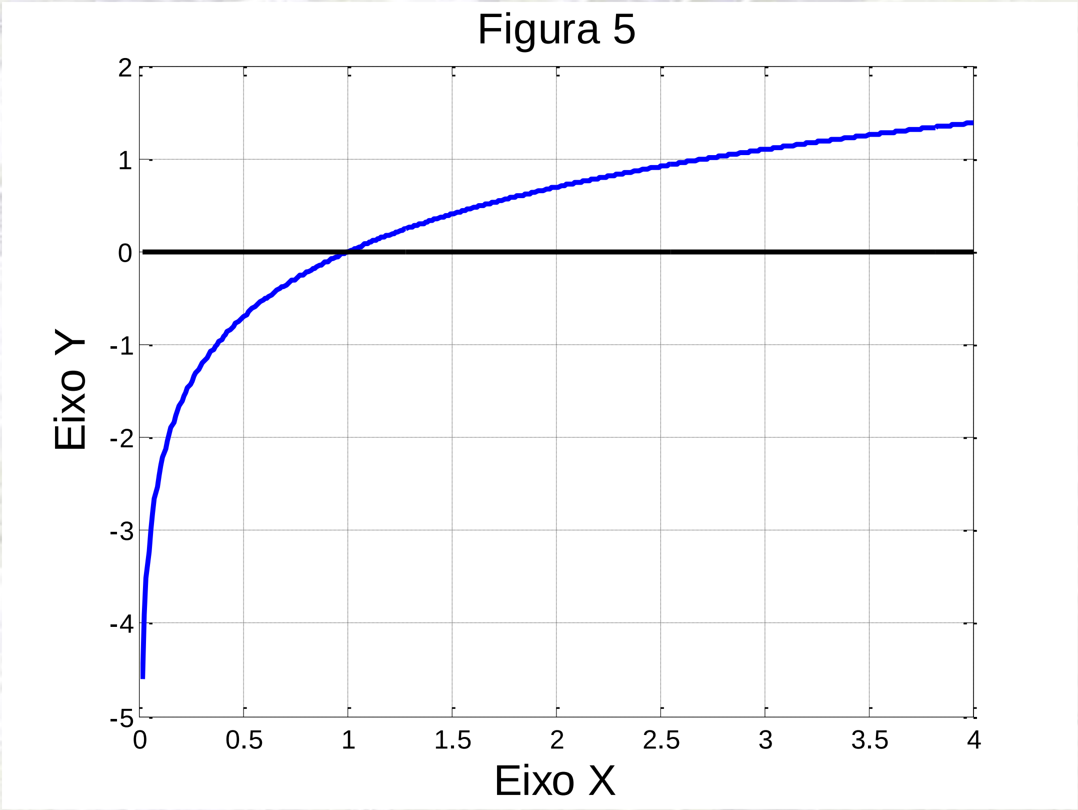
Zeros da Função – Análise Gráfica



Zeros da Função – Análise Gráfica



Zeros da Função – Análise Gráfica



Métodos Númericos

A ideia central do uso de **métodos numéricos** é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

Métodos Númericos

A ideia central do uso de **métodos numéricos** é partir de uma aproximação inicial para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

Existem dois grupos de métodos numéricos, sendo:

1) Métodos de confinamento, onde se identifica um intervalo que inclui a raiz;

2) Métodos abertos, onde estima-se um valor inicial (chute inicial) para a solução. Este métodos são, usualmente, mais eficazes, mas às vezes podem não levar à solução.

Métodos de confinamento

Fases de implementação:

Fase 1) Localização ou isolamento das raízes de f(x), que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;

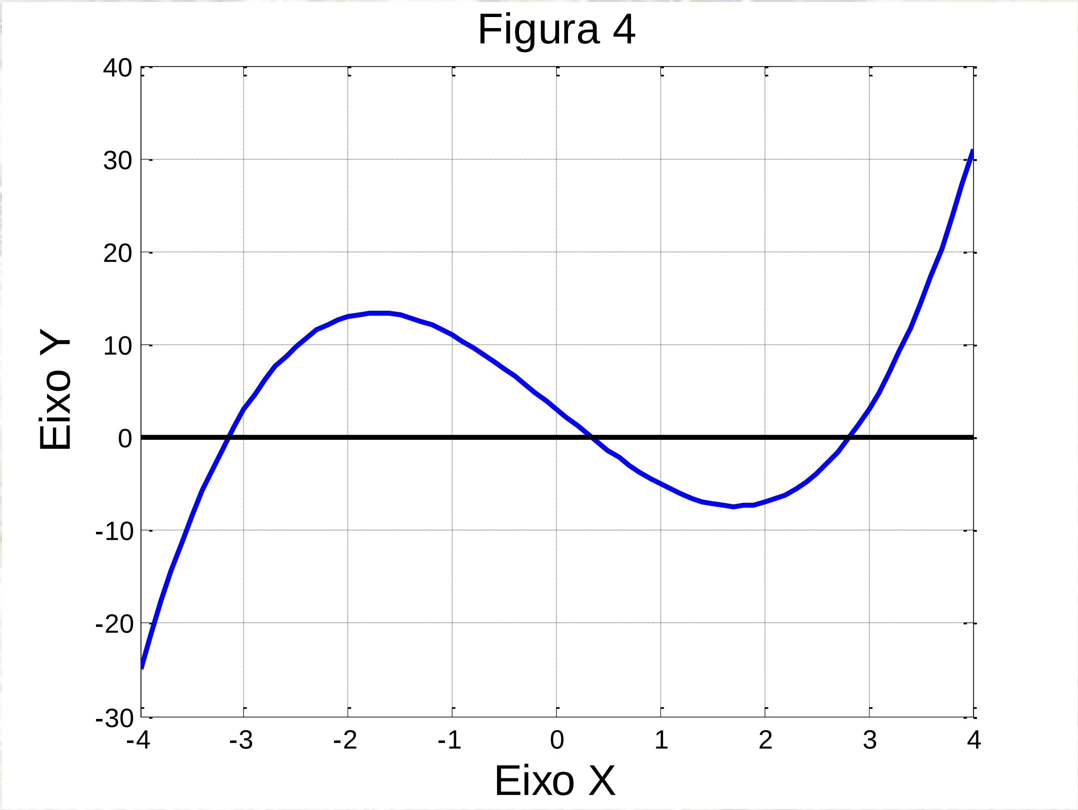
Métodos de confinamento

Fases de implementação:

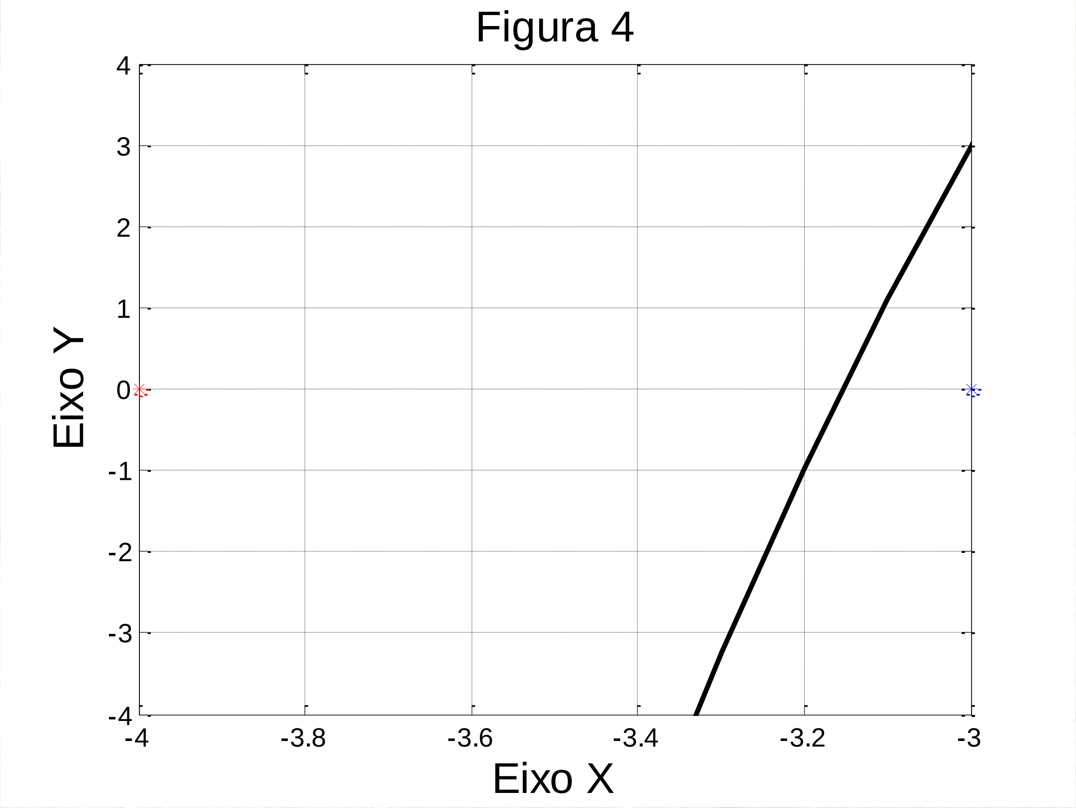
Fase 1) Localização ou isolamento das raízes de f(x), que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;

Fase 2) Refinamento, que consiste em, escolhidas as aproximações iniciais no intervalo (a, b) encontrado, melhorá-las sucessivamente, até se obter uma aproximação suficiente dentro da precisão prefixada.

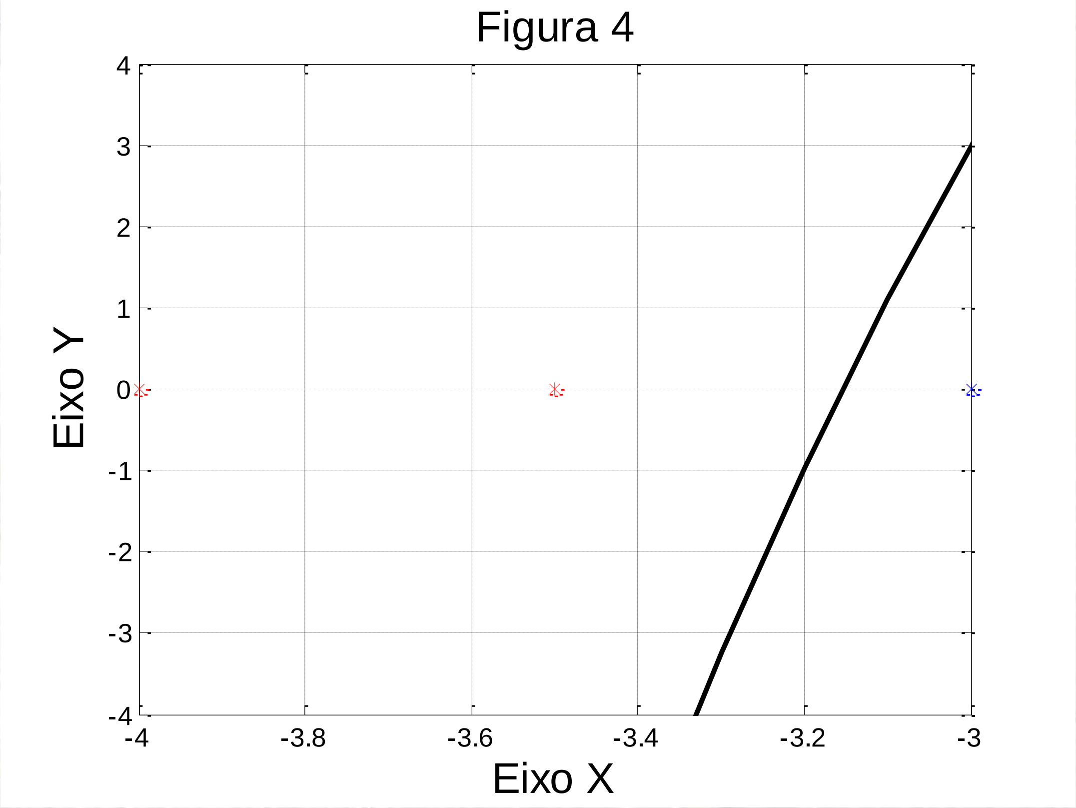
Métodos de confinamento



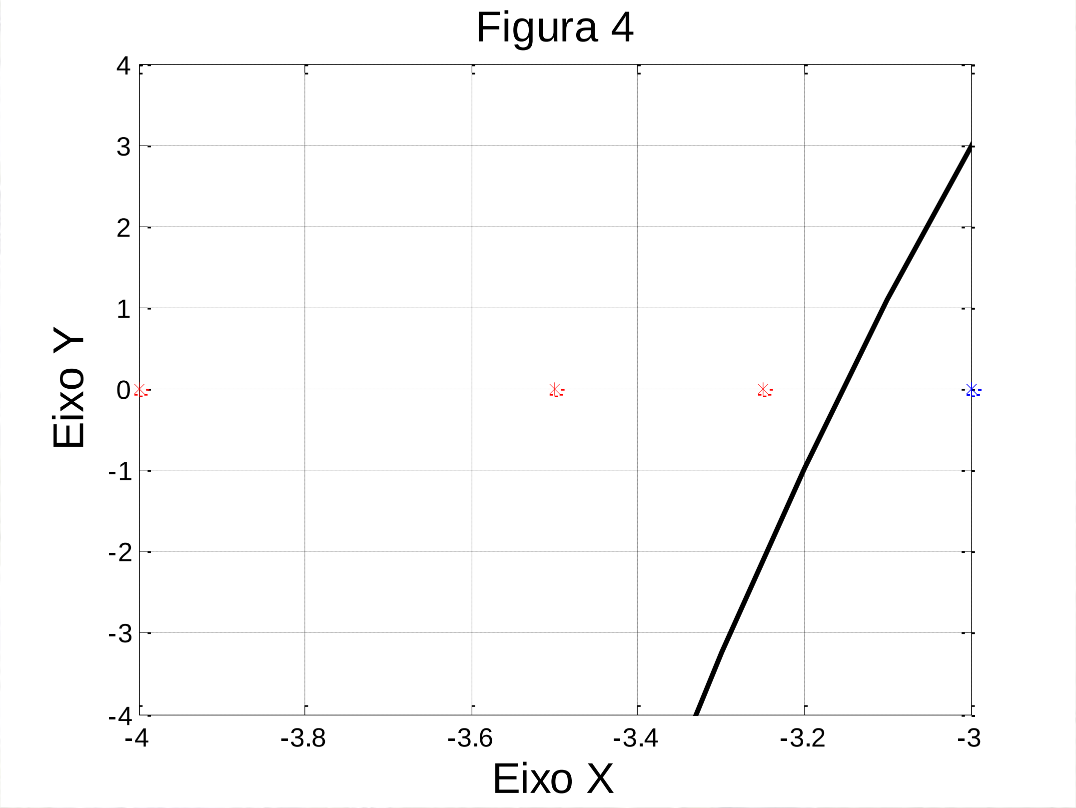
Métodos de confinamento



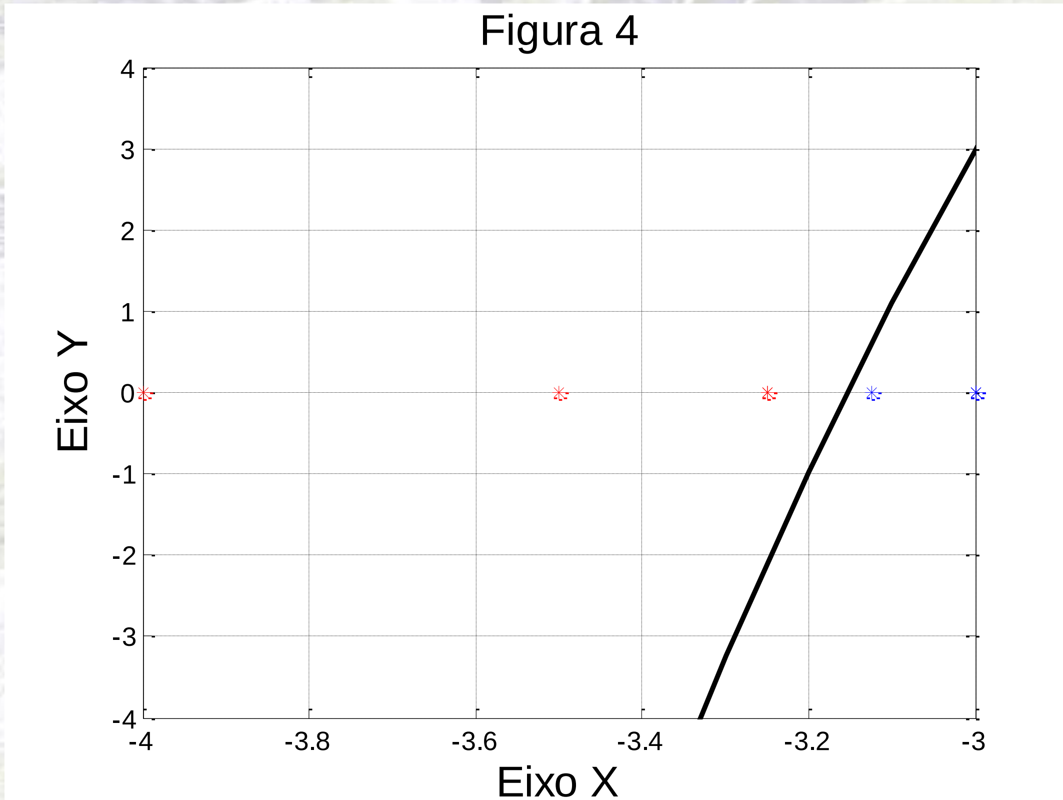
Métodos de confinamento



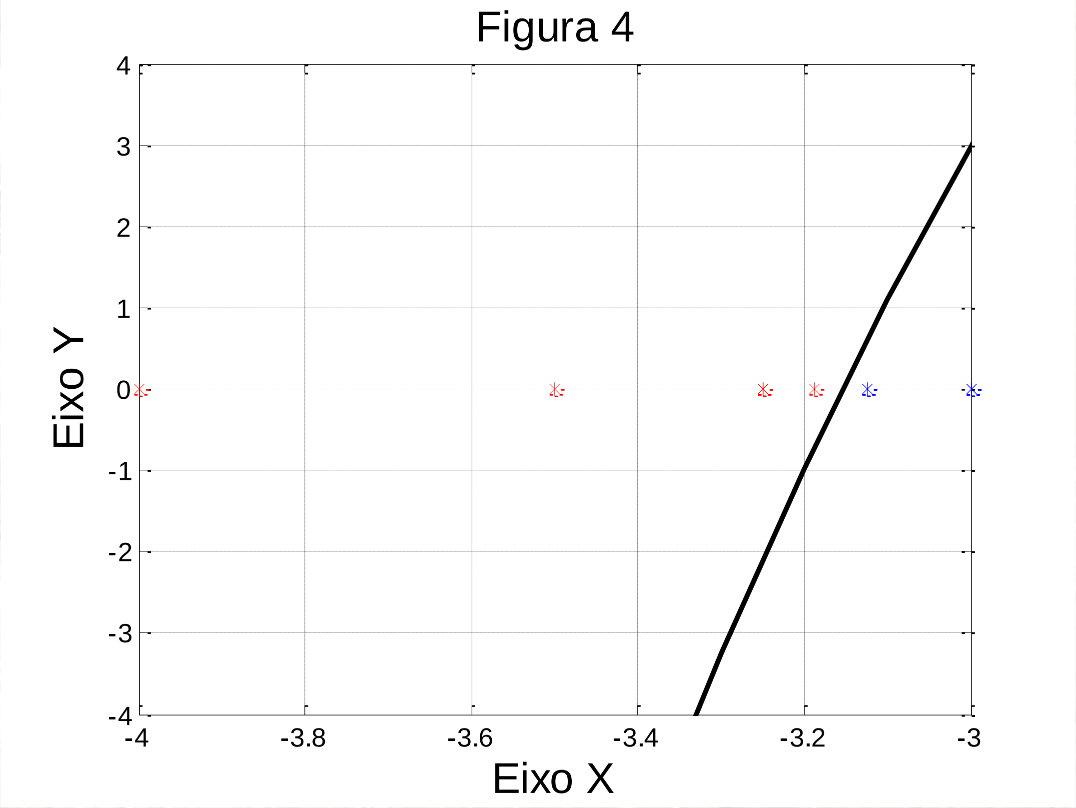
Métodos de confinamento



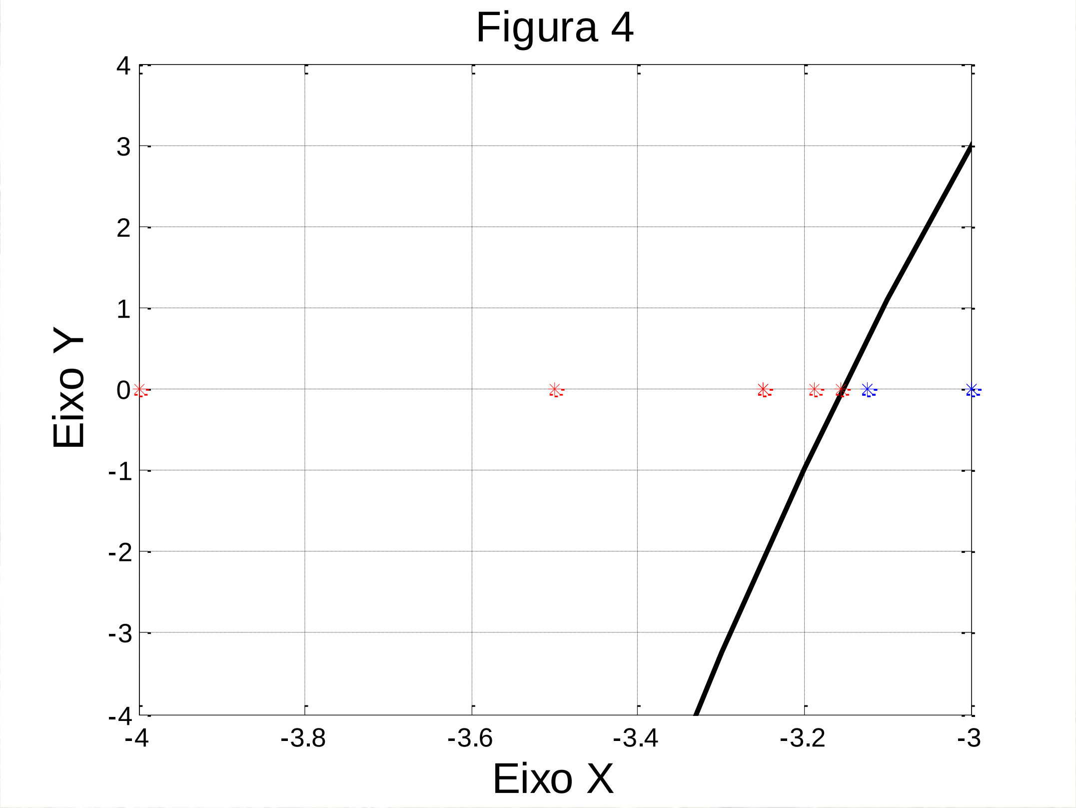
Métodos de confinamento



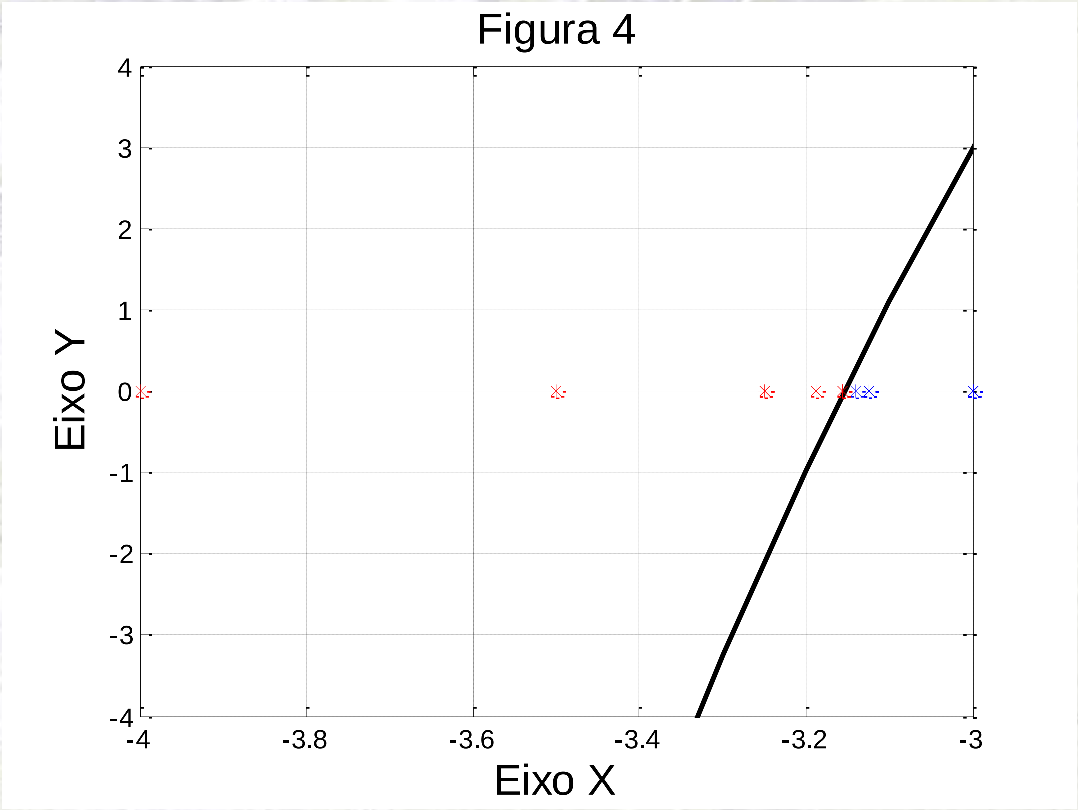
Métodos de confinamento



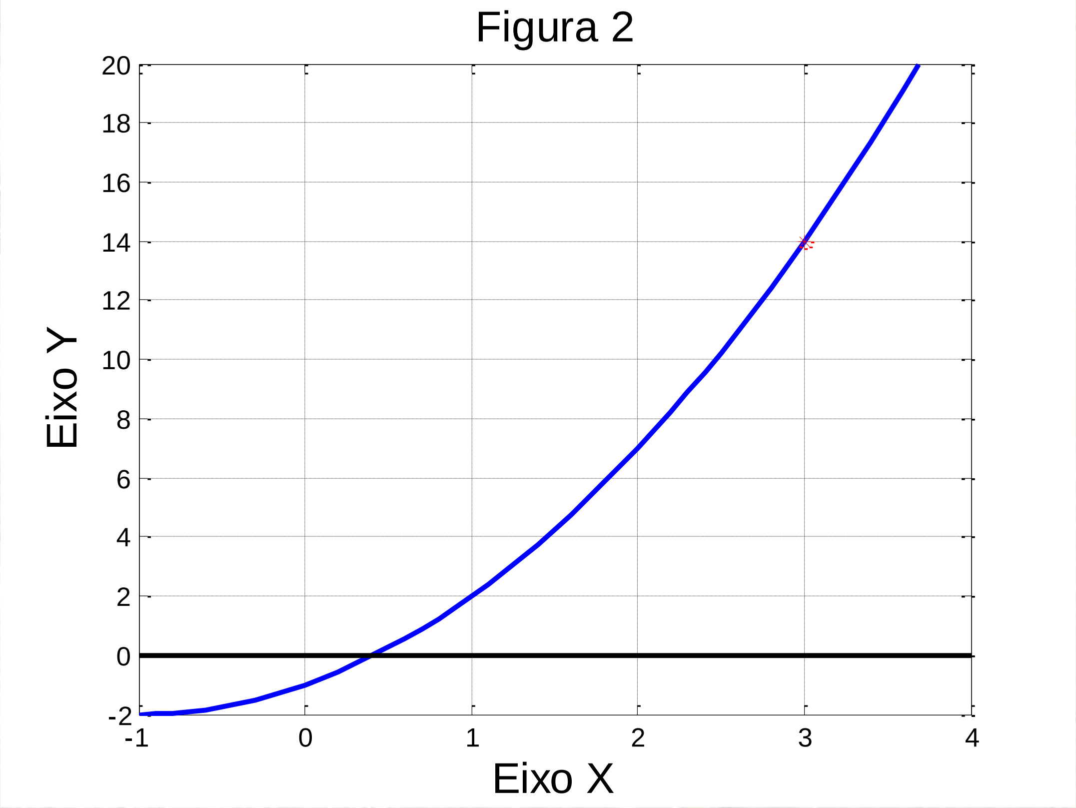
Métodos de confinamento



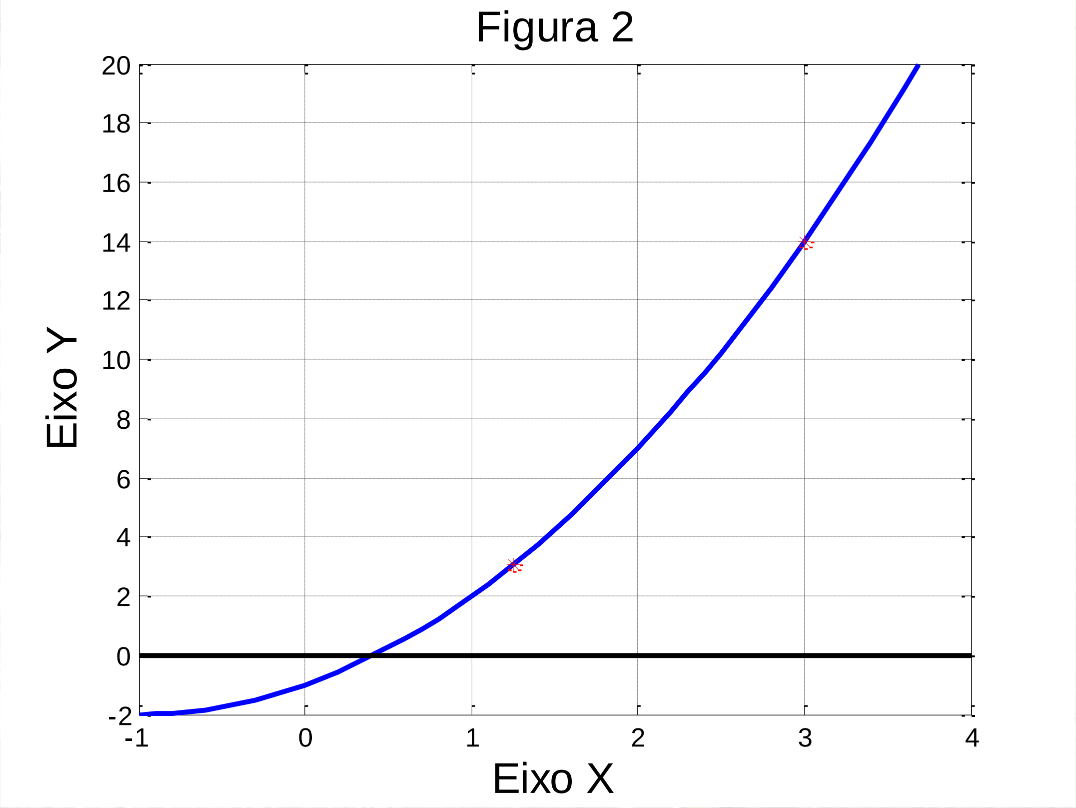
Métodos de confinamento



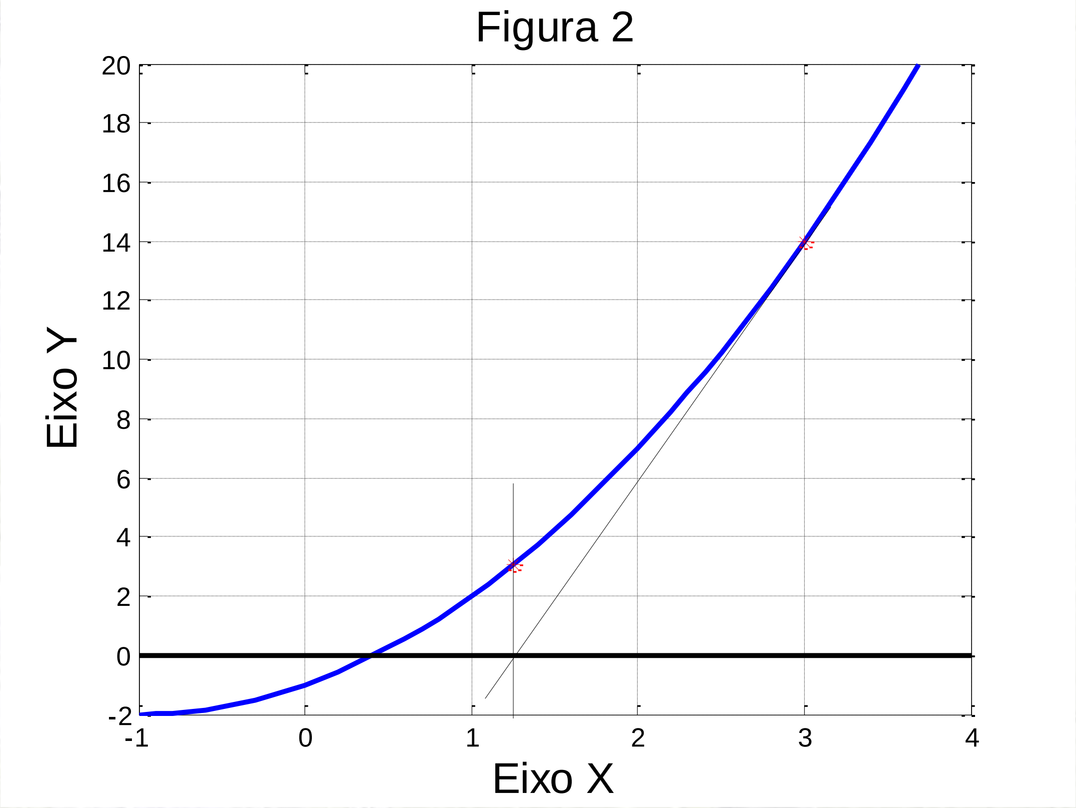
Métodos abertos



Métodos abertos



Métodos abertos



Métodos Númericos

Fase 1: Isolamento das raízes

Teorema 1 – Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a,b]. *Se f(a)f(b)<0 então existe pelo menos um ponto* $x=\alpha$ *entre a e b que é zero de f(x).*

Métodos Númericos

Fase 1: Isolamento das raízes

Teorema 1 – Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a,b]. *Se $f(a)f(b)<0$ então existe pelo menos um ponto $x=\alpha$ entre a e b que é zero de f(x).*

Observações:

- *Se $f'(x)$ existir e preservar sinal em (a,b), então este intervalo contém um único zero de f(x).*
- *Um ponto α é uma raiz de multiplicidade m da equação $f(x)=0$, se $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$, com $g(\alpha) \neq 0$.*

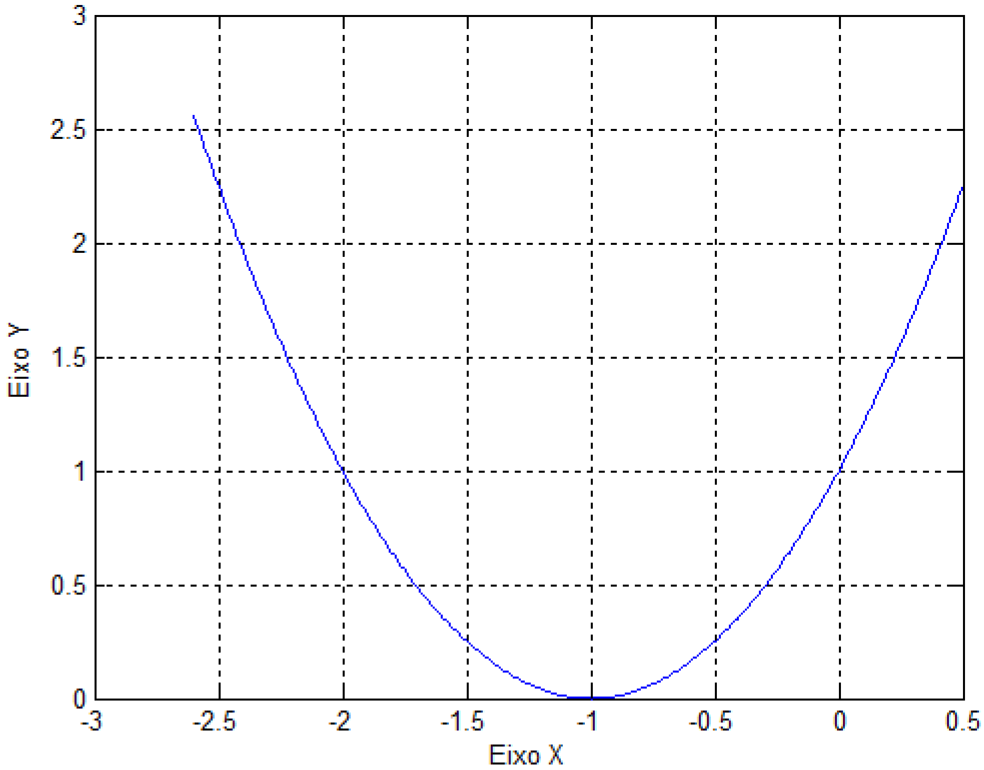
Exemplo – 1: Determine as raízes da equação:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$$

Métodos Númericos

Exemplo – 1: Determine as raízes da equação:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$$



Métodos Númericos

Como pode ser observado, a análise gráfica da função f(x) ou da equação f(x)=0 é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz.

Métodos Númericos

Como pode ser observado, a análise gráfica da função f(x) ou da equação f(x)=0 é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz.

Para tanto, é suficiente utilizar um dos processos:

• esboçar o gráfico da função f(x) e localizar as abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x;

• a partir da equação f(x)=0, obter a equação equivalente g(x) e h(x), esboçar os gráficos das funções g(x) e h(x) no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam.

Métodos Númericos

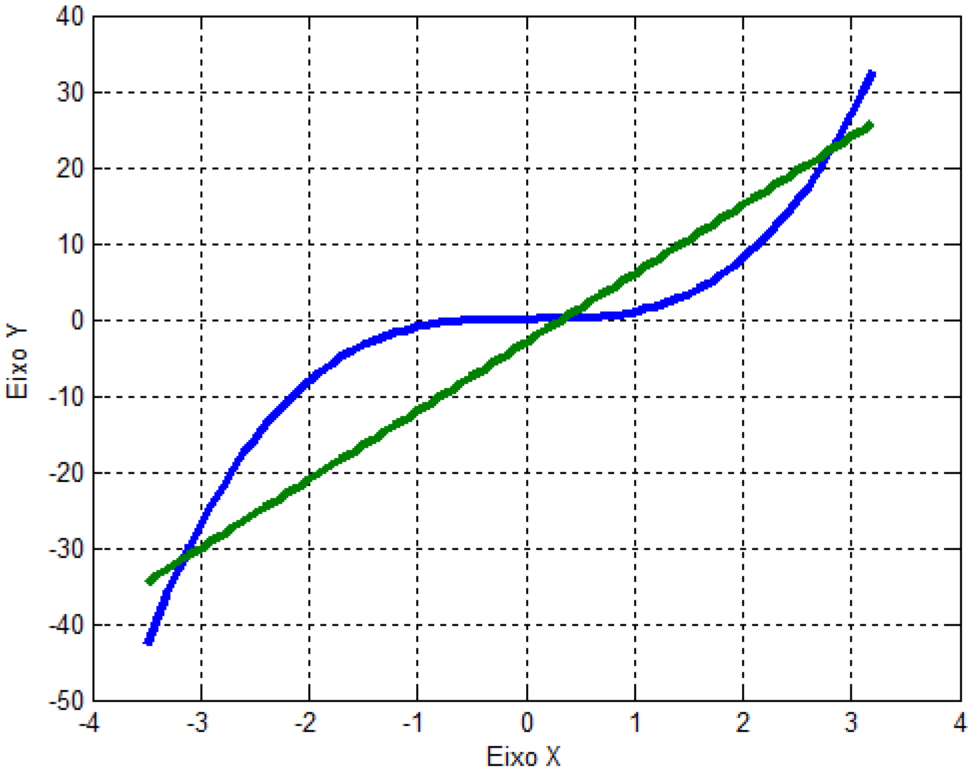
Exemplo – 2: Esboçar o gráfico de:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \qquad x^3 = 9x - 3$$

Métodos Númericos

Exemplo – 2: Esboçar o gráfico de:

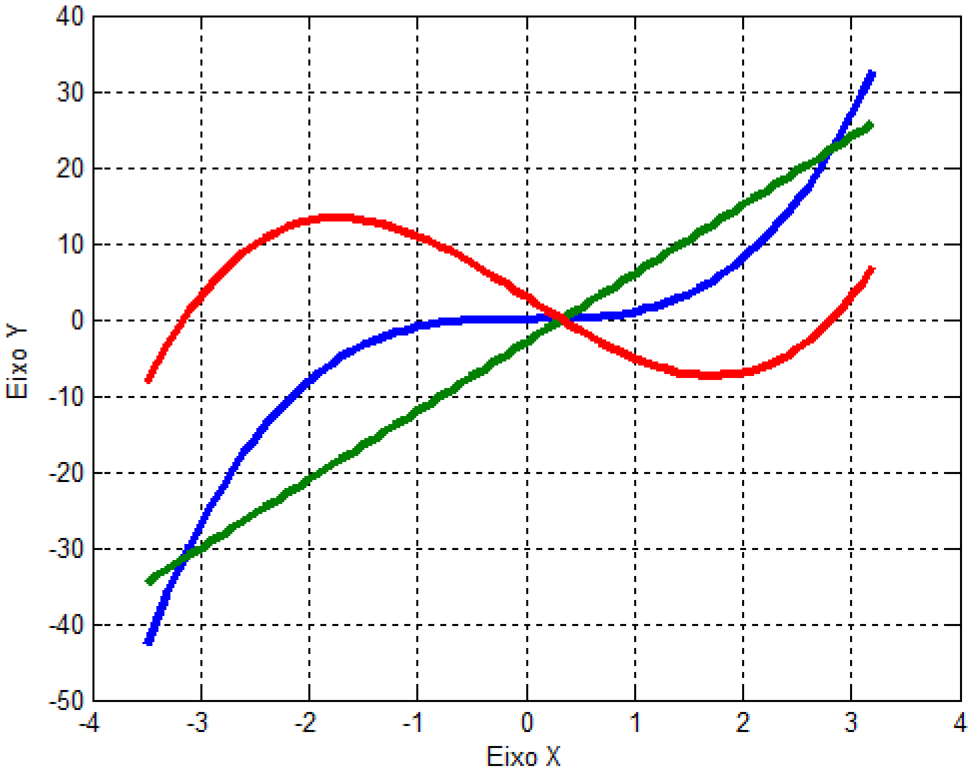
$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \qquad x^3 = 9x - 3$$



Métodos Númericos

Exemplo – 2: Esboçar o gráfico de:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \qquad x^3 = 9x - 3$$



Métodos Númericos

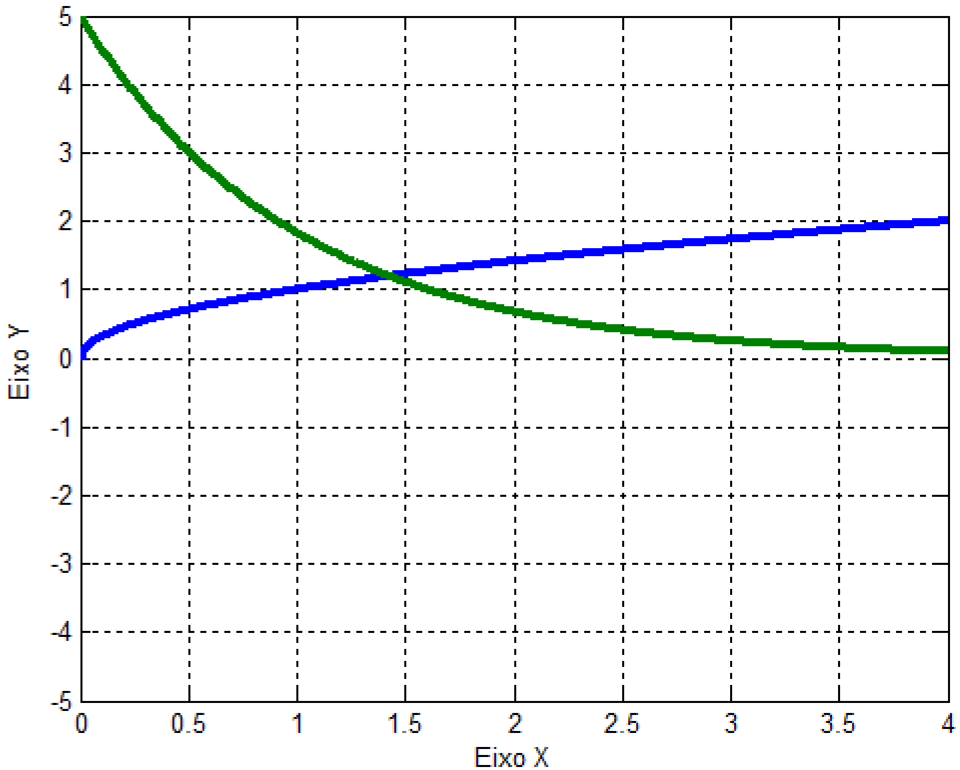
Exemplo – 3: Esboçar o gráfico de:

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} \qquad \sqrt{x} = 5e^{-x}$$

Métodos Númericos

Exemplo – 3: Esboçar o gráfico de:

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} \qquad \sqrt{x} = 5e^{-x}$$



Métodos Númericos

Exemplo – 3: Esboçar o gráfico de:

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} \qquad \sqrt{x} = 5e^{-x}$$