Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 08
Métodos de Interpolação Polinomial

Introdução

Definição de “interpolação”:

Na matemática, denomina-se interpolação o método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos.

Introdução

Os problemas de **interpolação** e **aproximação** surgem ao se aproximar uma função F(x) por outra G(x) mais apropriada ao usos que dela se deseja fazer.

Introdução

Os problemas de **interpolação** e **aproximação** surgem ao se aproximar uma função F(x) por outra G(x) mais apropriada ao usos que dela se deseja fazer.

A aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas da análise numérica. Os principais motivos são:

• Polinômios são facilmente computáveis;

• Suas derivadas e integrais são novos polinômios;

• Suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade.

Introdução

Importante:

Quando um erro substancial estiver associado aos dados amostrados, a interpolação polinomial é inapropriada e pode produzir resultados insatisfatórios quando usada para prever valores intermediários.

Introdução

Importante:

Quando um erro substancial estiver associado aos dados amostrados, a interpolação polinomial é inapropriada e pode produzir resultados insatisfatórios quando usada para prever valores intermediários.

Neste caso, uma estratégia mais adequada seria determinar uma função de aproximação que ajuste a forma ou a tendência geral dos dados, sem necessariamente passar por todos os pontos individuais.

Polinômio de Interpolação

Definição: Chama-se polinômio de interpolação, de uma função $y=f(x)$, sobre o conjunto de pontos distintos x_0, x_1, x_2, x_3,...., x_N, ao polinômio de grau máximo N que coincide com $f(x)$ em x_0, x_1, x_2,..., x_N. Tal polinômio será designado por $P_N(x)$.

Polinômio de Interpolação

Definição: Chama-se polinômio de interpolação, de uma função y=f(x), sobre o conjunto de pontos distintos x_0, x_1, x_2, x_3,...., x_N, ao polinômio de grau máximo N que coincide com f(x) em x_0, x_1, x_2,..., x_N. Tal polinômio será designado por $P_N(x)$.

Teorema Weierstrass: Dados N+1 pontos distintos x_0, x_1, x_2,..., x_N e N+1 valores y_0, y_1, y_2,..., y_N existe somente um polinômio $P_N(x)$, de grau menor ou igual a N, tal que:

$$P_N(x_k) = y_k$$

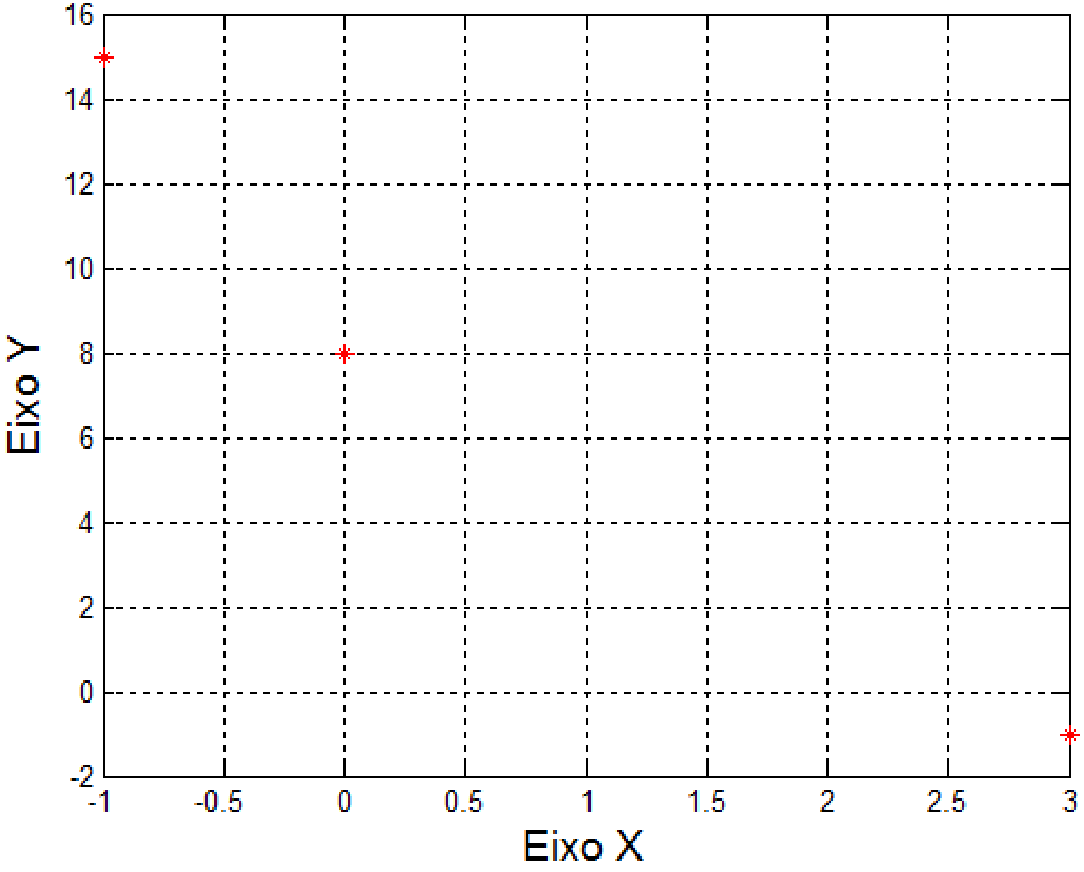
Polinômio de Interpolação

Exemplo: Dada a seguinte tabela, determinar o polinômio de interpolação para a função definida por este conjunto de pontos.

$x_{(k)}$	$f(x_k)$
-1	15
0	8
3	-1

Polinômio de Interpolação

Graficamente, tem-se:



Polinômio de Interpolação

Solução:

Como N=3, o polinômio deverá ter grau N-1 = 2, isto é:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ tal\ que\ P_2(x_k) = y_k$$

Equação Geral para grau 2:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Polinômio de Interpolação

Solução:

Explicitamente, na forma matricial, fica sendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Polinômio de Interpolação

Solução:

Substituindo-se valores de x e y, chega-se a:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 & = 15 \\ a_0 & = 8 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = -1 \end{cases}$$

Polinômio de Interpolação

Solução:

Substituindo-se valores de x e y, chega-se a:

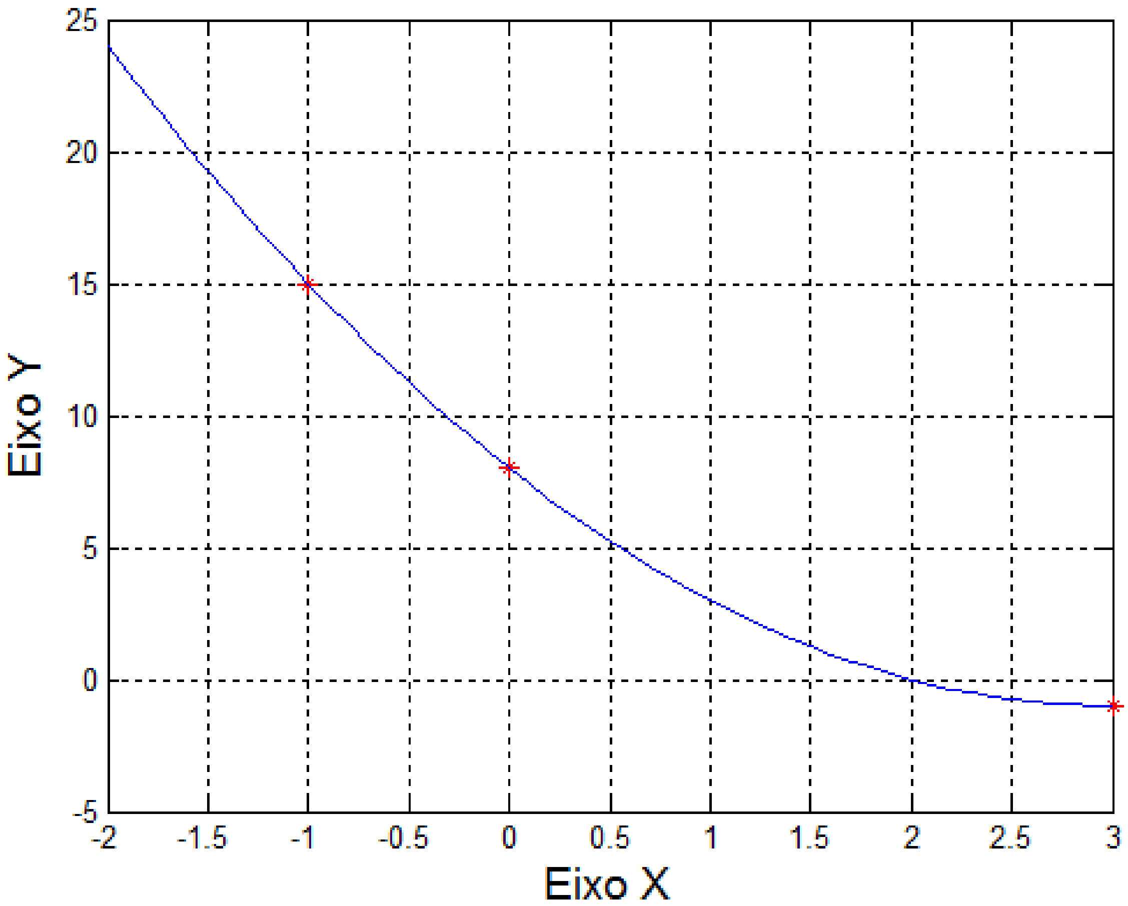
$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 & = 15 \\ a_0 & = 8 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear de equações, obtém-se:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

Polinômio de Interpolação

Solução:



Polinômio de Interpolação

Exercícios: Dada a tabela abaixo, encontrar o polinômio interpolador e, com isso, calcular f(1) e f(3):

$x_{(k)}$	$f(x_k)$
-1	4
0	1
2	-1

Forma de Lagrange

Seja x_0, x_1, x_2,..., x_N N+1 pontos distintos e y=f(x).

Podemos representar P(x) na forma:

$$P_N(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i)$$

onde $L_{(k)}$ são polinômios de grau N, dados por:

$$L_K(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Forma de Lagrange

Onde, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{N} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{N} (x_k - x_j)}$$

Forma de Lagrange

Exemplo: Dada a tabela, calcular polinômio interpolador de grau 2, onde:

$x_{(k)}$	$f(x_k)$
-1	15
0	8
3	-1

Forma de Lagrange

Exercício: Dada a tabela, calcular f(0.25) utilizando um polinômio de grau 2, onde:

$$f\left(x\right) = xe^{3x}$$

$x_{(k)}$	$f(x_k)$
0	0
0.1	1.3499
0.2	1.8221
0.3	2.4596
0.4	3.3201
0.5	4.4817

Newton com Diferenças Divididas

Para a construção do polinômio de interpolação por este método, precisamos da notação de diferenças divididas de uma função, onde temos que:

$$P_N(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} d_0^{(i)} \prod_{j=0}^{i-1} \left(x - x_j\right)$$

$$d_i^{(n)} = \frac{d_{i+1}^{(n-1)} - d_i^{(n-1)}}{x_{i+n} - x_i}$$

Newton com Diferenças Divididas

Exercício: Obter o polinômio interpolador para os pontos da tabela abaixo:

$x_{(k)}$	$f(x_k)$
-2	4
-1	-1
0	2
1	1
2	8

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$
-2	4
-1	-1
0	2
1	1
2	8

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$	$d_i^{(1)} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
-2	4	
-1	-1	
0	2	
1	1	
2	8	

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$	$d_i^{(1)} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
-2	4	$\dfrac{(-1-4)}{(-1+2)} = -5$
-1	-1	$\dfrac{(2+1)}{(0+1)} = 3$
0	2	$\dfrac{(1-2)}{1-0} = -1$
1	1	$\dfrac{(8-1)}{(2-1)} = 7$
2	8	

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$	$d_i^{(1)} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$d_i^{(2)} = \dfrac{d_{i+1}^{(1)} - d_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$
-2	4	$\dfrac{(-1-4)}{(-1+2)} = -5$	$\dfrac{(3+5)}{(0+2)} = 4$
-1	-1	$\dfrac{(2+1)}{(0+1)} = 3$	$\dfrac{(-1-3)}{(1+1)} = -2$
0	2	$\dfrac{(1-2)}{1-0} = -1$	$\dfrac{(7+1)}{(2-0)} = 4$
1	1	$\dfrac{(8-1)}{(2-1)} = 7$	
2	8		

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$	$d_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$d_i^{(2)} = \frac{d_{i+1}^{(1)} - d_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$	$d_i^{(3)} = \frac{d_{i+1}^{(2)} - d_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$
-2	4	$\frac{(-1-4)}{(-1+2)} = -5$	$\frac{(3+5)}{(0+2)} = 4$	$\frac{(-2-4)}{(1+2)} = -2$
-1	-1	$\frac{(2+1)}{(0+1)} = 3$	$\frac{(-1-3)}{(1+1)} = -2$	$\frac{(4+2)}{(2+1)} = 2$
0	2	$\frac{(1-2)}{1-0} = -1$	$\frac{(7+1)}{(2-0)} = 4$	
1	1	$\frac{(8-1)}{(2-1)} = 7$		
2	8			

Newton com Diferenças Divididas

Sistemática da criação da tabela de diferenças divididas:

x_i	$d_i^{(0)}$	$d_i^{(1)} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$d_i^{(2)} = \dfrac{d_{i+1}^{(1)} - d_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i}$	$d_i^{(3)} = \dfrac{d_{i+1}^{(2)} - d_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}$	$d_i^{(4)} = \dfrac{d_{i+1}^{(3)} - d_i^{(3)}}{x_{i+4} - x_i}$
-2	4	$\dfrac{(-1-4)}{(-1+2)} = -5$	$\dfrac{(3+5)}{(0+2)} = 4$	$\dfrac{(-2-4)}{(1+2)} = -2$	$\dfrac{(2+2)}{(2+2)} = 1$
-1	-1	$\dfrac{(2+1)}{(0+1)} = 3$	$\dfrac{(-1-3)}{(1+1)} = -2$	$\dfrac{(4+2)}{(2+1)} = 2$	
0	2	$\dfrac{(1-2)}{1-0} = -1$	$\dfrac{(7+1)}{(2-0)} = 4$		
1	1	$\dfrac{(8-1)}{(2-1)} = 7$			
2	8				

Newton com Diferenças Divididas

Solução:

$$P_4(x) = y_0 + d_0^1(x - x_0) + d_0^2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ d_0^3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + d_0^4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Newton com Diferenças Divididas

Solução:

$$P_4(x) = y_0 + d_0^1(x-x_0) + d_0^2(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ d_0^3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + d_0^4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Resposta:

$$P_4(x) = x^4 - 3x^2 + x + 2$$

Regressão por Mínimos Quadrados

Uma forma de aproximação que se ajusta à tendência geral dos dados, sem necessariamente passar pelos pontos individuais, é chamada de **Regressão por Mínimos Quadrados.**

Regressão por Mínimos Quadrados

Uma forma de aproximação que se ajusta à tendência geral dos dados, sem necessariamente passar pelos pontos individuais, é chamada de **Regressão por Mínimos Quadrados.**

O exemplo mais simples de aproximação por mínimos quadrados é ajustar uma reta a um conjunto de pares de observação (x,y), sendo:

Regressão por Mínimos Quadrados

Uma forma de aproximação que se ajusta à tendência geral dos dados, sem necessariamente passar pelos pontos individuais, é chamada de **Regressão por Mínimos Quadrados.**

O exemplo mais simples de aproximação por mínimos quadrados é ajustar uma reta a um conjunto de pares de observação (x,y), sendo:

$$y = a_1 x + a_0$$

Regressão por Mínimos Quadrados

As equações normais, que permitem determinar os coeficientes, são:

$$a_1 = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

Onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as médias de x e y, respectivamente.

Regressão por Mínimos Quadrados

Exercício: Ajuste uma reta aos pontos dados na tabela abaixo, utilizando regressão por mínimos quadrados.

xi	yi
1	0,5
2	2,5
3	2,0
4	4,0
5	3,5
6	6,0
7	5,5

Regressão por Mínimos Quadrados

Exercício: Ajuste uma reta aos pontos dados na tabela abaixo, utilizando regressão por mínimos quadrados.

	xi	yi	xi.yi	xi.xi		
	1	0,5	0,5	1		
	2	2,5	5,0	4		
	3	2,0	6,0	9		
	4	4,0	16,0	16		
	5	3,5	17,5	25		
	6	6,0	36,0	36		
	7	5,5	38,5	49	Média xi	Média yi
Somatório	28	24	119,5	140	4	3,42857

Regressão por Mínimos Quadrados

Exercício: Ajuste uma reta aos pontos dados na tabela abaixo, utilizando regressão por mínimos quadrados.

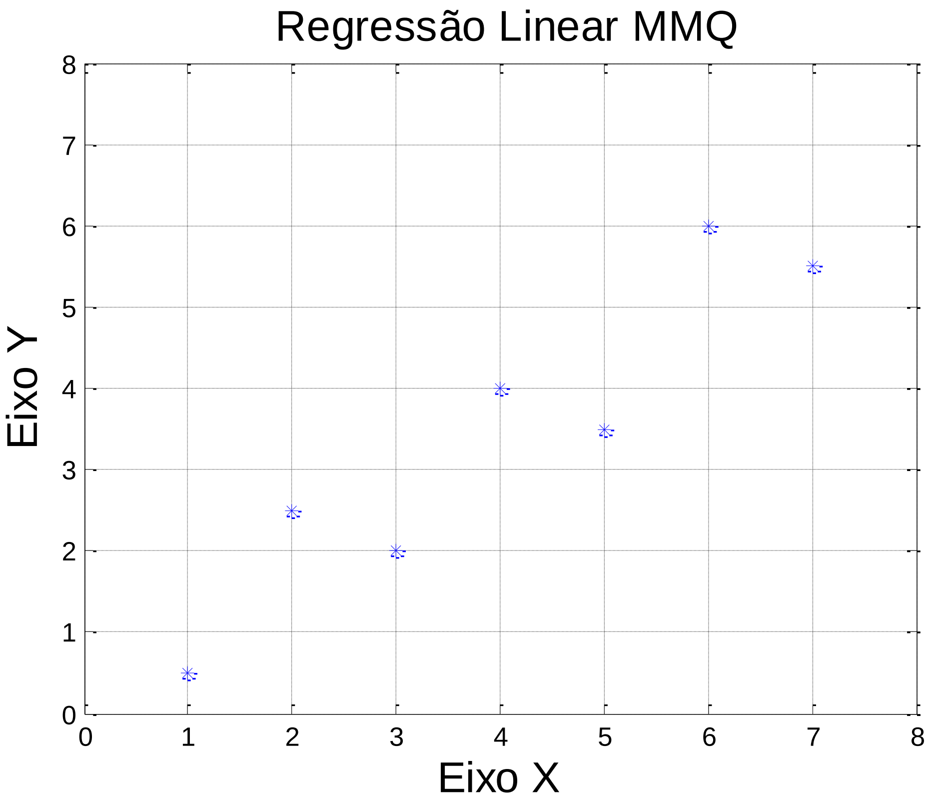
$$a_1 = \frac{7(119,5) - 28(24)}{7(140) - (28)^2} = 0,84$$

$$a_0 = 3,42857 - 0,84(4) = 0,07$$

$$y = 0,84x + 0,07$$

Regressão por Mínimos Quadrados

Exercício: Ajuste uma reta aos pontos dados na tabela abaixo, utilizando regressão por mínimos quadrados.



Regressão por Mínimos Quadrados

Exercício: Ajuste uma reta aos pontos dados na tabela abaixo, utilizando regressão por mínimos quadrados.