Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 09

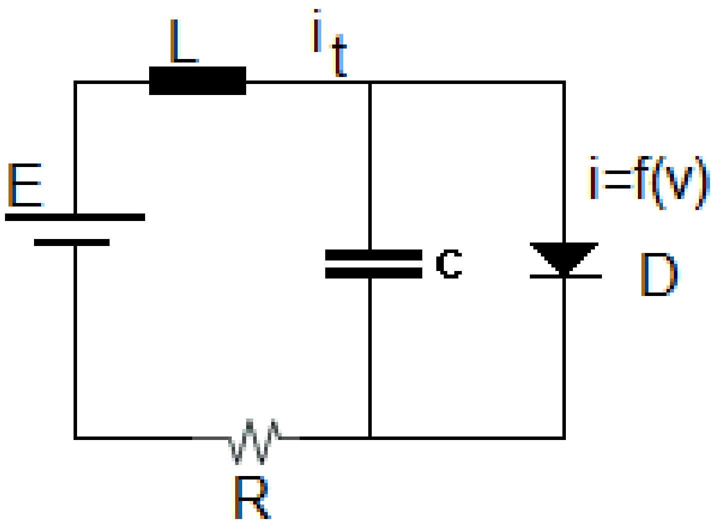
Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias - EDO

Introdução

Equações diferenciais aparecem com grande frequência em modelos que descrevem, quantitativamente, fenômenos em diversas área, como por exemplo mecânica, elétrica, etc.

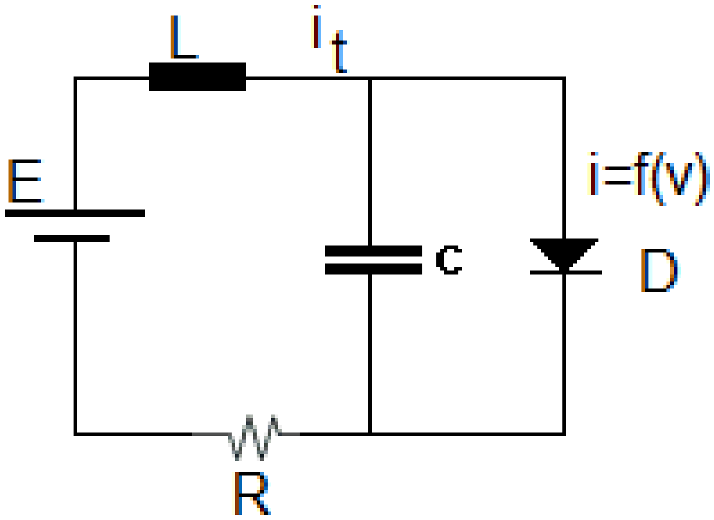
Introdução

Equações diferenciais aparecem com grande frequência em modelos que descrevem, quantitativamente, fenômenos em diversas área, como por exemplo mecânica, elétrica, etc.



Introdução

Equações diferenciais aparecem com grande frequência em modelos que descrevem, quantitativamente, fenômenos em diversas área, como por exemplo mecânica, elétrica, etc.



Equações diferenciais:

$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = E - Ri - v_c \\ -C\dfrac{dv}{dt} = i_t - f(v) \end{cases}$$

onde: E, R, C e L são constantes positivas.

Introdução

As equações do problema anterior são chamadas equações diferenciais, uma vez que envolvem derivadas das funções, e como envolvem apenas uma variável independente passam a ser chamadas de **Equações Diferenciais Ordinárias - EDO.**

Introdução

As equações do problema anterior são chamadas equações diferenciais, uma vez que envolvem derivadas das funções, e como envolvem apenas uma variável independente passam a ser chamadas de **Equações Diferenciais Ordinárias - EDO.**

Uma solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente que satisfaça a equação.

Introdução

As equações do problema anterior são chamadas equações diferenciais, uma vez que envolvem derivadas das funções, e como envolvem apenas uma variável independente passam a ser chamadas de **Equações Diferenciais Ordinárias - EDO.**

Uma solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente que satisfaça a equação.

Uma equação diferencial ordinária é dita linear se a função e suas derivadas aparecem linearmente na equação, ex:

$$xy' = x - y$$

Introdução

Uma equação diferencial possui uma família de soluções e não apenas uma. Portanto, para individualizar as soluções temos que impor condições suplementares.

Introdução

Uma equação diferencial possui uma família de soluções e não apenas uma. Portanto, para individualizar as soluções temos que impor condições suplementares.

Resumindo: uma equação de ordem M requer M condições adicionais a fim de ter uma única solução.

Introdução

Uma equação diferencial possui uma família de soluções e não apenas uma. Portanto, para individualizar as soluções temos que impor condições suplementares.

Resumindo: uma equação de ordem M requer M condições adicionais a fim de ter uma única solução.

Em geral, essas condições adicionais podem ser do tipo:

$$y(0) = 2$$

$$y'(4) = -9$$

$$y(2) + 5y'(3) = 6$$

Introdução

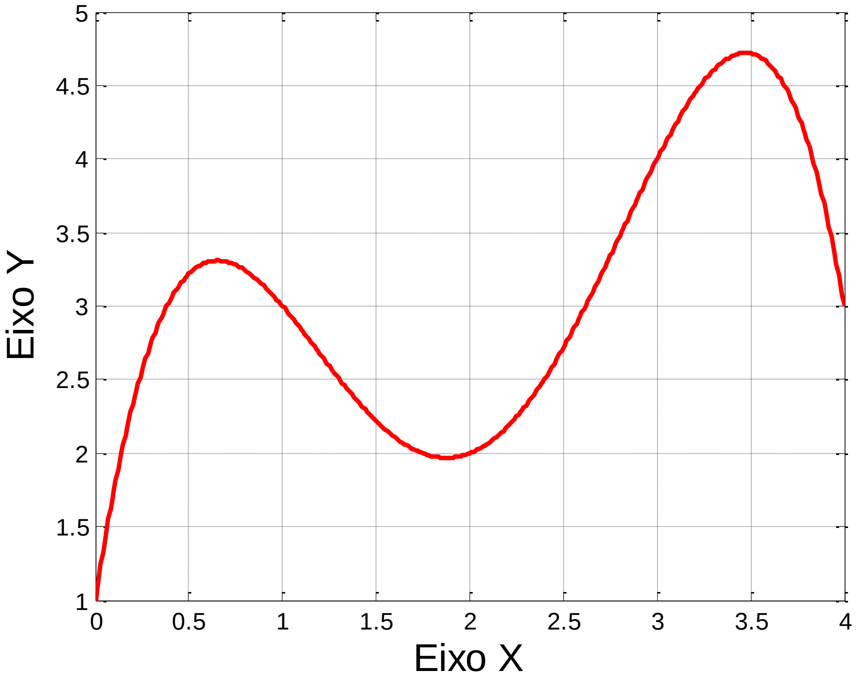
Seja a função:

$$y(\mathrm{x}) = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1$$

Introdução

Seja a função:

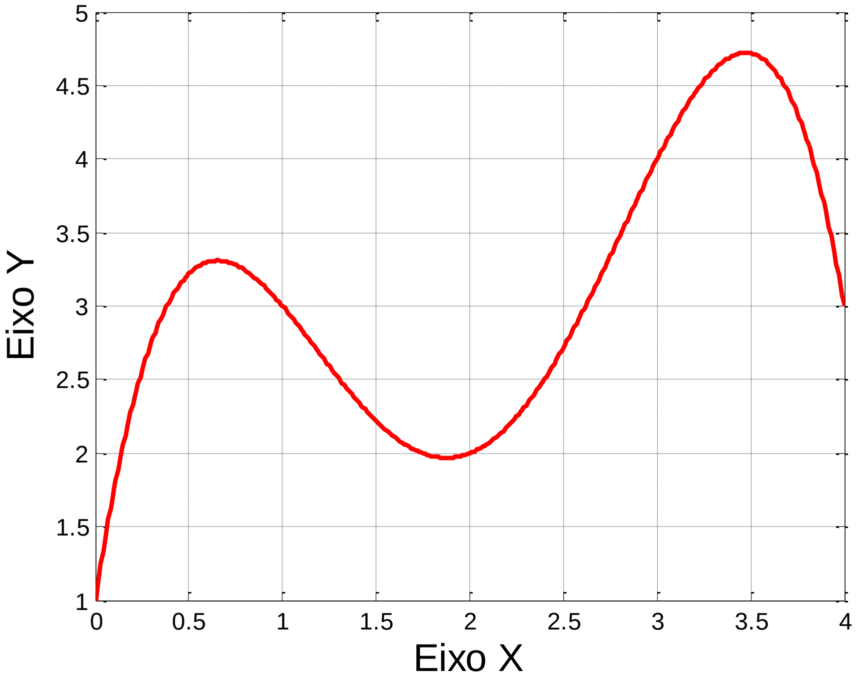
$$y(\mathrm{x}) = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1$$

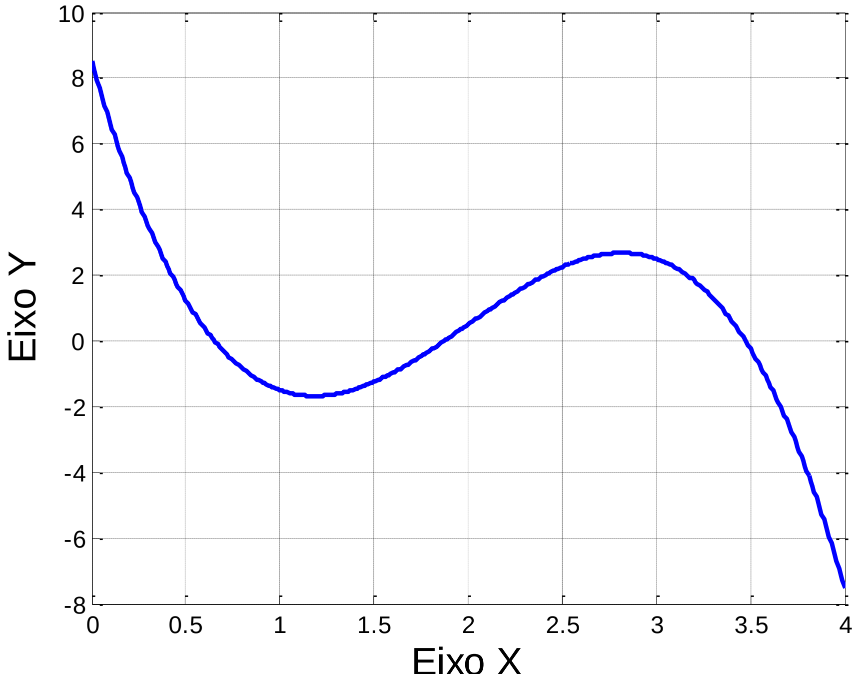


Introdução

Seja a função:

$$y(x) = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + 1$$

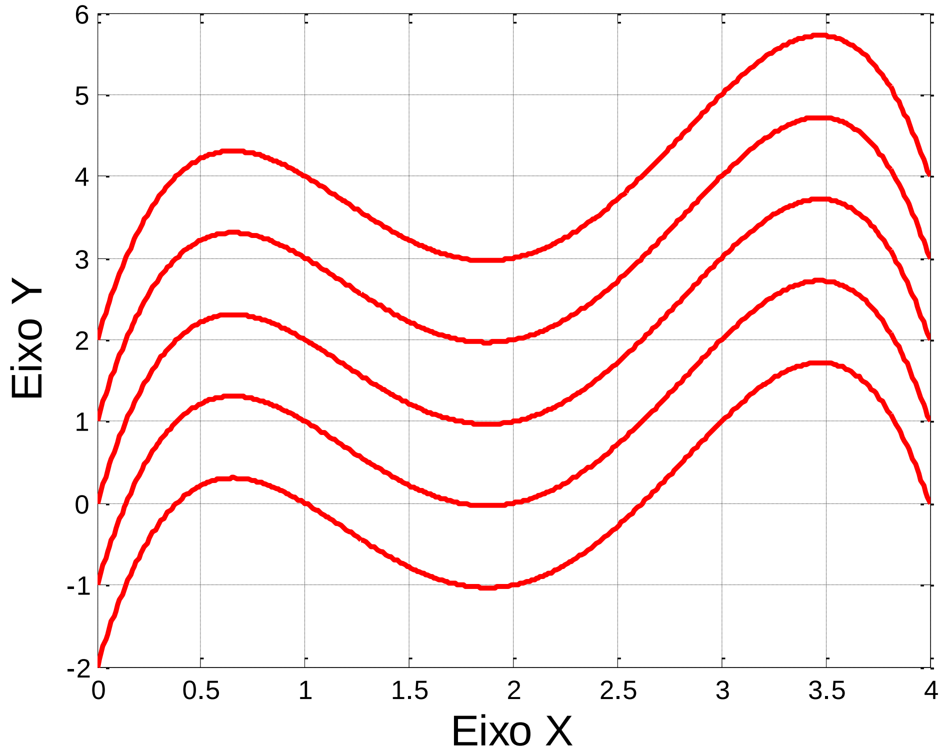




Introdução

Seja a função:

$$y(\mathrm{x}) = -0,5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8,5x + C \qquad para \quad C = -2:1:2$$



Introdução

Se dada uma equação de ordem M, a função, assim como suas derivadas até ordem M-1, são especificadas em um mesmo ponto, então temos um **problema de valor inicial,** como são os casos:

$$\begin{cases} y'(x) = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Introdução

Se dada uma equação de ordem M, a função, assim como suas derivadas até ordem M-1, são especificadas em um mesmo ponto, então temos um **problema de valor inicial,** como são os casos:

$$\begin{cases} y'(x) = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''' + (x+1)\,y'' + \cos(xy') - (x^2 - 1)\,y = x^2 + y^2 sen(x+y) \\ y(0) = 1.1 \qquad y'(0) = 2.2 \qquad y''(0) = 3.3 \end{cases}$$

Problemas de Valor Inicial

A razão mais forte para estudar métodos numéricos para aproximar soluções de PVI é a dificuldade de se encontrar, analiticamente, as soluções da equação. Os métodos que estudaremos aqui se baseiam em:

dado PIV: $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

construímos x_1, x_2, ..., x_n que, embora não necessariamente, serão igualmente espaçados, ou seja:

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Problemas de Valor Inicial

Com isso, podemos calcular as aproximações:

$$y_i \simeq y(x_i)$$

Problemas de Valor Inicial

Com isso, podemos calcular as aproximações:

$$y_i \simeq y(x_i)$$

Se calcularmos y_i usando apenas y_{i-1} teremos um **método de passo simples** ou **passo um**. Porém, se usarmos mais valores, teremos um método de **passo múltiplo**.

Problemas de Valor Inicial

Com isso, podemos calcular as aproximações:

$$y_i \simeq y(x_i)$$

Se calcularmos y_i usando apenas y_{i-1} teremos um **método de passo simples** ou **passo um**. Porém, se usarmos mais valores, teremos um método de **passo múltiplo**.

Com PVI de primeira ordem, temos uma aproximação inicial $y(x_0)$ para a solução. Assim, os métodos de passo um são classificados como auto iniciantes.

Problemas de Valor Inicial

Os métodos de passos múltiplos precisam de alguma estratégia (como usar métodos de passo simples) para obter as aproximações iniciais necessárias.

Problemas de Valor Inicial

Os métodos de passos múltiplos precisam de alguma estratégia (como usar métodos de passo simples) para obter as aproximações iniciais necessárias.

Outras características dos métodos de passo simples são:

1) Em geral, temos que calcular o valor de f(x,y) e suas derivadas em muitos pontos;

2) Existe grande dificuldade de se estimar os erros.

Problemas de Valor Inicial

Os métodos de passos múltiplos precisam de alguma estratégia (como usar métodos de passo simples) para obter as aproximações iniciais necessárias.

Outras características dos métodos de passo simples são:

1) Em geral, temos que calcular o valor de f(x,y) e suas derivadas em muitos pontos;

2) Existe grande dificuldade de se estimar os erros.

Os principais métodos numéricos de passo um para solução de EDO são:

- Método de Euler;
- Métodos de Range-Kutta.

Método de Euler

Um método numérico que podemos aplicar à solução aproximada de um PVI dado por:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é o **Método de Euler (ou ponto-inclinação),** o qual consiste em:

$$y_{(k+1)} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Método de Euler

Exemplo 1 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(4), utilizando o método de Euler.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

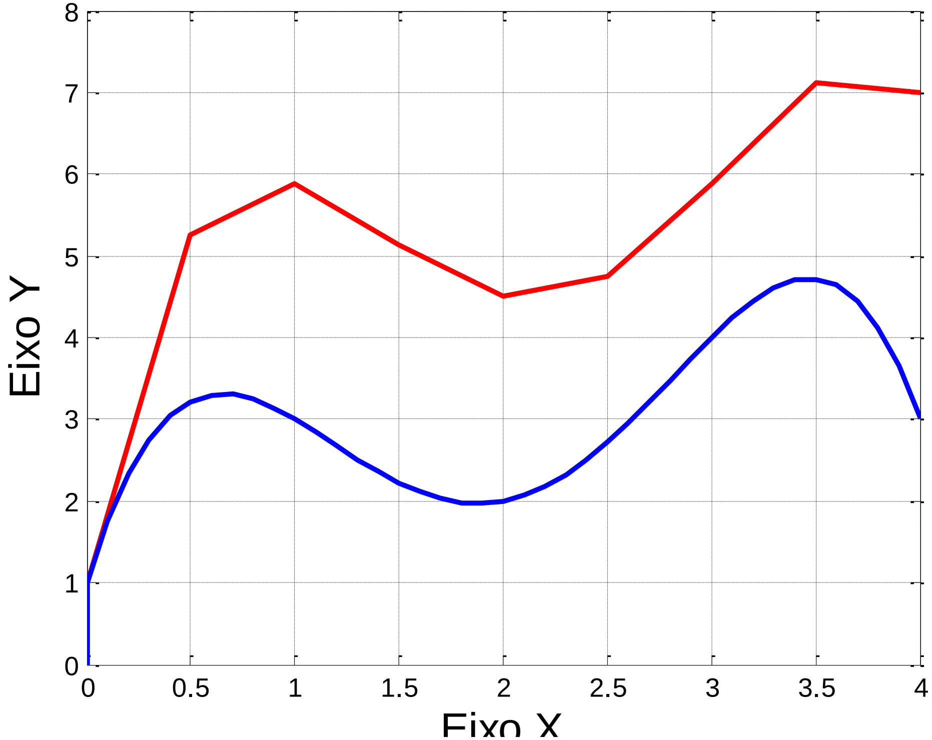
com h=0.5

Método de Euler

Exemplo 1 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(4), utilizando o método de Euler.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com h=0.5



Método de Euler

Exercícios 1 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(2.1), utilizando o método de Euler.

$$\begin{cases} xy' = x - y \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

com:

a) h=0.1

b) h=0.05

c) h=0.025

Método de Euler

Exercícios 2 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(1), utilizando o método de Euler.

$$\begin{cases} y' = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

com:

a) h=1

b) h=0.5

c) h=0.25

d) h=0.1

Método de Euler

Exercícios 3 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(1), utilizando o método de Euler.

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2, \quad x \in [0, 0.3] \end{cases}$$

com:

- h=0.1

Método de Runge-Kutta

O método de Euler é um método simples, porém computacionalmente pouco eficiente. Uma forma de melhorar o método de Euler é descrita conforme equação:

$$\begin{cases} \overline{y_{k+1}} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_k + h, \overline{y_{k+1}}\right)\right] \end{cases}$$

Este é o **método Heun**, também conhecido por **método de Euler Aperfeiçoado.** Por ser um método de 2ª ordem, o mesmo pode ser enquadrado na família dos **métodos de RK de 2ª ordem.**

Método de Runge-Kutta

Exercícios 4 – Seja o PVI abaixo, encontrar y(1), utilizando o método RK de 2ª ordem.

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

com:

- h=0.1

Ao final, comparar o método de Euler com o método RK de 2ª ordem e, também, com a solução exata do PVI.

Método de Runge-Kutta

Runge-Kutta de 3ª ordem – pode ser implementado pela equação:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

$$\textit{sendo}$$

$$k_1 = f\left(x_k, y_k\right)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + h, y_k + 2hk_2 - hk_1\right)$$

Método de Runge-Kutta

Runge-Kutta de 4ª ordem – pode ser implementado pela equação:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

sendo

$$k_1 = f\left(x_k, y_k\right)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(x_k + h, y_k + hk_3\right)$$