Estimación de parámetros

Análisis estadístico de datos

1. Considerar una variable aleatoria X normal con media μ y varianza σ^2 ambas desconocidas. En un experimento se observaron los siguientes valores de X: 18.9, 17.4, 20.8, 18.3, y 17.0. A partir de los datos, estimar sin sesgo μ y σ^2.

2. Simular una muestra de tres variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 que siguen una distribución normal estándar. Calcular la media muestral $\bar{X}$, estimador de la media poblacional. Repetir este procedimiento 10000 veces y contruir un histograma de frecuencia de $\bar{X}$. A partir de los datos simulados estimar el sesgo y varianza de $\bar{X}$ y comparar con los valores esperados. Graficar el histograma y superponer la función de densidad de probabilidad de $\bar{X}$. *Nota: no ajustar el histograma.*

3. Considerar una variable aleatoria X que sigue una distribución normal con una media μ desconocida y una desviación estándar $\sigma = 4.5$. En un experimento se observa el valor $x = 37.2$. Encontrar la función de verosimilitud de $L(\mu)$. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de μ ($\hat{\mu}$). Calcular la verosimilitud máxima $L_{\max} = L(\hat{\mu})$. Calcular el cociente de verosimilitudes $\lambda(\mu) = L(\mu)/L_{\max}$ y graficar la función de costo $J(\mu) = -2\ln\lambda(\mu)$.

4. Una moneda cargada se lanza $n = 12$ veces de la cuáles salen $k = 8$ caras. Considerar la función de masa de probabilidad binomial del número de caras $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Graficar la función de verosimilitud del parámetro p para los valores dados de n y k ($L(p)$). Calcular el estimador de máxima verosimilitud de p en función de n y k derivando $L(p)$ ($\hat{p}$). Calcular la máxima verosimilitud $L_{\max} = L(\hat{p})$. Calcular el cociente de verosimilitudes $\lambda(p) = L(p)/L_{\max}$ y graficar la función de costo $J(p) = -2\ln\lambda(p)$.

5. Un experimento mide tres veces una variable normal X obteniendo los valores $x_1 = 3.38$, $x_2 = 5.06$ y $x_3 = 7.67$. Escribir la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2, x_3)$. Considerando que la media μ es desconocida y la desviación estándar es $\sigma = 1.4$, encontrar y graficar la función de verosimilitud $L(\mu)$. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de μ. Calcular el cociente de verosimilitudes $\lambda(\mu) = L(\mu)/L_{\max}$ y graficar la función de costo $J(\mu) = -2\ln\lambda(\mu)$.

6. Calcular el estadístico T^2 de una muestra de variables normales (1.78, 2.57, 2.13) con media poblacional $\mu = 2.05$. Calcular la función de verosimilitud en función de la varianza $L(\sigma^2)$. Calcular la función de costo asociada. Graficar ambas funciones indicando la posición del estimador de máxima verosimilitud de la varianza.

7. Considerar la variable $X = (X_1, X_2)$ que sigue una distribución normal bivariada con desviaciones estándares $\sigma_1 = 2.3$, $\sigma_2 = 1.7$ y correlación $\rho = -0.78$. Calcular la función de verosimilitud de los parámetros μ_1 y μ_2 para los valores observados $x_1 = 7.9$ y $x_2 = 13.4$ ($L(\mu_1, \mu_2)$). Calcular los estimadores de máxima verosimilitud de μ_1 y μ_2 y evaluar la verosimilitud máxima $L_{\max}$. Calcular el cociente de verosimilitudes $\lambda(\mu_1, \mu_2) = L(\mu_1, \mu_2)/L_{\max}$ y graficar la función de costo $J(\mu_1, \mu_2) = -2 \ln \lambda(\mu_1, \mu_2)$.