

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

15 апреля 2022 г.

Содержание

Постановка задачи

Понятие сходимости и устойчивости вычислительных схем

Одношаговые методы

Конечно-разностные методы

Методы решения краевых задач

Постановка задачи

Дифференциальное уравнение n -го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где $y(x)$ - неизвестная функция.

Уравнение (1), разрешенное относительно старшей производной

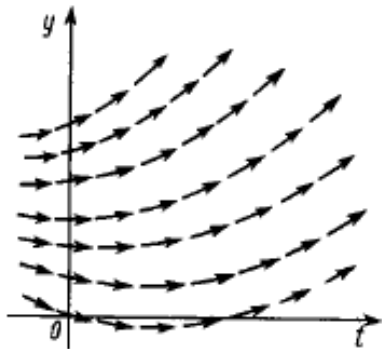
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Общее решение: $y(x) = y(c_1, \dots, c_n)$ - n -параметрическое семейство.

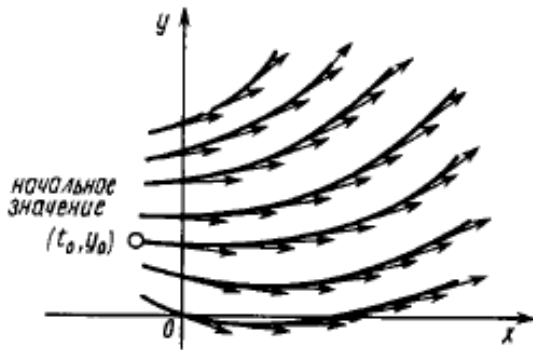
Пусть через любую точку проходит единственная интегральная кривая.

Чтобы выделить единственное решение, нужно задать n условий.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 1-го порядка: $y' = f(x, y)$
 $f(x, y)$ задаёт поле направлений.



а)



б)

Пусть задача решается на конечном отрезке $[a, b]$.

1. Все условия заданы в одной точке $[a, b] \rightarrow$ задача Коши, или задача с начальными условиями.
2. Условия заданы в разных точках $[a, b] \rightarrow$ краевая задача.

Пример

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b]. \quad (3)$$

1. $y(b) = \alpha_1, y'(b) = \alpha_2$ - задача Коши.
2. $y'(a) = \alpha_1, y(b) + y'(b) = \alpha_2$ - краевая задача.

Задача Коши (the Cauchy problem, or the initial value problem)

Будем рассматривать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ и функция $f(x, y)$ непрерывна на D . Если f удовлетворяет условию Липшица на D по y , т.е.

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (5)$$

для любых (x, y_1) и (x, y_2) из D , то (4) имеет единственное решение $y^*(x)$.

Численные методы решения задачи Коши

$x^h = \{x_k\}_{k=0}^n$, $x_k = a + kh$ - равномерная сетка.

Определение

Приближенное решение с точностью ϵ - табличная функция $y^h = \{y_k\}_{k=0}^n$, определенная на сетке $x^h \subset [a, b]$

$$|y_k - y^*(x_k)| \leq \epsilon. \quad (6)$$

Определение

Вычислительную формулу для нахождения y_k

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}). \quad (7)$$

будем называть вычислительной схемой, или методом решения.

Классификационные признаки

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}).$$

1. $r = 1$ - одношаговая схема.
 $r > 1$ - многошаговая, или r -шаговая схема - нужны значения в $r - 1$ точке.
2. Φ_f не содержит y_k - явная схема.
 y_k входит в Φ_f - неявная схема. На каждом шаге нужно решать уравнение.

Примеры методов:

- ▶ Явный метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$
- ▶ Неявный метод Эйлера: $y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k)$
- ▶ Метод Адамса 2-го порядка: $y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}[3f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})]$

Приведение уравнения n -го порядка к системе уравнений 1-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Введем новые переменные

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & // \quad f_1 \\ y_2' = y_3 & // \quad f_2 \\ \dots & \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & // \quad f_n \end{cases} \quad (9)$$

Задача Коши

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y), x \in [a, b] \\ Y(a) = Y_0 \end{cases} \quad (10)$$

$$Y = [y_1, \dots, y_n]^\top, F = [f_1, \dots, f_n]^\top.$$

Пример

Осциллятор Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad (11)$$

где $y = y(x)$ - координата точки.

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases} \quad (12)$$

Начальные условия

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Содержание

Постановка задачи

Понятие сходимости и устойчивости вычислительных схем

Одношаговые методы

Конечно-разностные методы

Методы решения краевых задач

- ▶ $y^*(x)$ - точное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (14)$$

- ▶ $\{y_k\}_{k=0}^n$ - точное решение по вычислительной схеме

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}). \quad (15)$$

- ▶ $\{\tilde{y}_k\}_{k=0}^n$ - решение с учётом ошибок вычислений.

1. ошибка дискретизации = погрешность метода

$$\epsilon_k = y_k - y^*(x_k). \quad (16)$$

2. вычислительная ошибка

$$\delta_k = \tilde{y}_k - y_k. \quad (17)$$

3. полная ошибка

$$\Delta_k = \tilde{y}_k - y^*(x_k). \quad (18)$$

Цель - получить решение с заданной точностью ϵ : $|\Delta_k| \leq \epsilon$.

$$|\Delta_k| = |\tilde{y}_k - y^*(x_k) \pm y_k| \leq |\epsilon_k| + |\delta_k|. \quad (19)$$

При уменьшении h

- ▶ ошибка дискретизации ϵ_k уменьшается
- ▶ вычислительная ошибка δ_k растет, т.к. увеличивается количество вычислений.

Сходимость и устойчивость

Сходимость схемы определяется поведением ошибки дискретизации ϵ_k .

Определение

Вычислительная схема сходится, если $\epsilon_k \xrightarrow[kh=const]{h \rightarrow 0} 0$

Устойчивость схемы определяется поведением вычислительной ошибки δ_k .

Определение

Вычислительная схема называется устойчивой, если

$$|\delta_k| \leq C |\delta_{k_0}|, \quad (20)$$

где C не зависит от h , k_0 и $k = k_0 + m$, $m > 0$.

$k_0 h = const$, $kh = const$.

(20) - скорость роста вычислительной погрешности ограничена.

Замечания

1. Ошибка аппроксимации

$$e_k = y^*(x_k) - \Phi_f(h, x_k, y^*(x_k), y^*(x_{k-1}), \dots, y^*(x_{k-r})) \quad (21)$$

показывает, насколько точное решение не удовлетворяет вычислительной схеме. Если $e_k = \mathcal{O}(h^{q+1})$, то вычислительная схема аппроксимирует ОДУ с порядком q .

- 2. Ошибка аппроксимации e_k и ошибка дискретизации ϵ_k связаны между собой.
 $y^*(x_k) = y_k - \epsilon_k$ подставить в (21)...
- 3. Следует различать устойчивость схемы и устойчивость решения ОДУ.

Пример неустойчивой задачи

$$\begin{cases} y' = 2y - 2x + 1 - 2\sqrt{3}, x \in [0, 10] \\ y(0) = y_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad (22)$$

Общее решение: $y(x) = ce^{2x} + x + \sqrt{3}$.

Искомое частное решение: $y^*(x) = x + \sqrt{3}$ и $y^*(10) = 10 + \sqrt{3} = 11.73205081$.

Пусть $\tilde{y}_0 = y_0 + \delta$, $\delta \ll 1$

$$\tilde{y}(x) = \delta e^{2x} + x + \sqrt{3} = \delta e^{2x} + y^*(x)$$

$$\tilde{y}(10) = \delta e^{20} + 10 + \sqrt{3}.$$

Если $\delta = 10^{-8}$, то $\Delta y(10) = 4.85165195$.

Ошибка, связанная с округлением исходных данных, более 40%.

Содержание

Постановка задачи

Понятие сходимости и устойчивости вычислительных схем

Одношаговые методы

Конечно-разностные методы

Методы решения краевых задач

Метод Эйлера (the Euler method)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (23)$$

Равномерная сетка: $x_k = a + kh, k = 0, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$.

$x, x + h \in [a, b]$

Разложим в ряд Тейлора $y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$.

Пусть $x = x_k \Rightarrow y(x_k + h) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)$.

Отбросим $\mathcal{O}(h^2)$ и заменим $y(x_k)$ на y_k

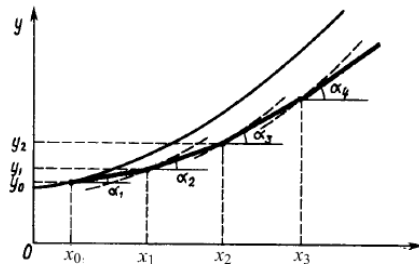
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (24)$$

Геометрическая интерпретация

1. в точке x_0 строится касательная к интегральной кривой

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \quad (25)$$

2. y_1 - значение $y(x)$ в точке x_1



На каждом шаге переходим на новую интегральную кривую.

Метод Эйлера - явный, одношаговый метод.

Устойчивость метода Эйлера

Вычисленное значение по схеме Эйлера (24)

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k). \quad (26)$$

Ошибка вычислений

$$\begin{aligned} |\delta_{k+1}| &= |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| = |\tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k) - y_k - hf(x_k, y_k)| \\ &\leq |\delta_k| + h|f(x_k, \tilde{y}_k) - f(x_k, y_k)| \leq |\delta_k| + hL|\delta_k| = (1 + hL)|\delta_k| \end{aligned} \quad (27)$$

Для любых допустимых k и m

$$\begin{aligned} |\delta_{k+m}| &\leq (1 + hL)|\delta_{k+m-1}| \leq (1 + hL)^2|\delta_{k+m-2}| \leq \dots \\ &\leq (1 + hL)^m|\delta_k| \leq e^{hLm}|\delta_k| = e^{(x_{k+m}-x_k)L}|\delta_k| \leq e^{(b-a)L}|\delta_k| \end{aligned} \quad (28)$$

Константа $C = e^{(b-a)L}$ не зависит от h , k и m .

Идея методов Рунге-Кутты

Задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$x, x + h \in [a, b]$$

$$y(x + h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^s}{s!}y^{(s)}(x)}_{\Delta_s y(x)} + \mathcal{O}(h^{s+1}) \quad (29)$$

$$\Delta_s y(x) = \frac{h}{1!}f(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{d}{dx}f(x, y) + \dots + \frac{h^s}{s!} \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}f(x, y)$$

Заменим $\Delta_s y(x)$ некоторой функцией $\delta_s y(x, h)$, которая удовлетворяет условию

$$\Delta_s y(x) = \delta_s y(x, h) + \mathcal{O}(h^{s+1}). \quad (30)$$

Будем искать $\delta_s y(x, h)$ в виде линейной комбинации значений f

$$\delta_s y(x, h) = h \sum_{i=1}^l \rho_i f(x + \delta x_i, y + \delta y_i). \quad (31)$$

Подберем $l, \rho_i, \delta x_i, \delta y_i$ так, чтобы (30) выполнялось.

В (29) отбросим $\mathcal{O}(h^{s+1})$, $x \rightarrow x_k, x + h \rightarrow x_{k+1}$

$$y_{k+1} = y_k + \delta_s y(x, h). \quad (32)$$

s - порядок метода, l - шаговость, или стадийность метода.

Как строить $\delta_s y(x, h)$?

Выбираем l . Будем искать $\delta_s y(x, h)$ в виде

$$\delta_s^l y(x, h) = h \sum_{i=1}^l \rho_i K_i, \quad (33)$$

где

$$\begin{cases} K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21}K_1) \\ K_3 = f(x + \alpha_3 h, y + h\beta_{31}K_1 + h\beta_{32}K_2) \\ \dots \\ K_l = f\left(x + \alpha_l h, y + h \sum_{j=1}^{l-1} \beta_{lj} K_j\right) \end{cases} \quad (34)$$

Тогда $y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^l \rho_i K_i$.

Коэффициенты $\rho_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ выбираются из условия (30): обеспечение порядка аппроксимации s .

Их часто записывают в виде таблицы Бутчера

0					
α_2	β_{21}				
α_3	β_{31}	β_{32}			
\dots	\dots	\dots	\dots		
α_l	β_{l1}	β_{l2}	\dots	$\beta_{l,l-1}$	
	ρ_1	ρ_2	\dots	ρ_{l-1}	ρ_l

1. Метод Эйлера - одностадийный метод Рунге-Кутты 1-го порядка.
2. Классический 4-х стадийный метод Рунге-Кутты 4-го порядка

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$K_1 = f(x_k, y_k)$$

$$K_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Замечание

Метод Рунге-Кутты s -го порядка на каждом шаге совершает погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$. Стадийность l - количество вычислений функции f для расчета нового узлового значения y_k .

Методы Рунге-Кутты 2-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (35)$$

Разложим в ряд Тейлора $y(x+h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x)}_{\Delta_2 y(x)} + \mathcal{O}(h^3)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y) \\ y''(x) &= \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f'_x + f f'_y \end{aligned}$$

$$\Delta_2 y(x) = hf + \frac{h^2}{2}(f'_x + f f'_y) \quad (36)$$

Будем строить 2-х стадийный метод Рунге-Кутты ($l = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \\ \hline & \rho_1 & \rho_2 \end{array} \quad \begin{cases} K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21}K_1) \end{cases} \quad (37)$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h[\rho_1 K_1 + \rho_2 K_2] = h[\rho_1 f(x, y) + \rho_2 f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21}f(x, y))] \\ f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21}f(x, y)) = f + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x} + h\beta_{21}f \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h(\rho_1 + \rho_2)f + h^2 \alpha_2 \rho_2 f'_x + h^2 \beta_{21} \rho_2 f f'_y + \mathcal{O}(h^3) \quad (38)$$

Коэффициенты выбираются из условия

$$\Delta_2 y(x) = \delta_2^2 y(x, h) + \mathcal{O}(h^3) \quad (39)$$

(36), (38) \Rightarrow

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 1 & // hf \\ \alpha_2 \rho_2 = \frac{1}{2} & // h^2 f'_x \\ \beta_{21} \rho_2 = \frac{1}{2} & // h^2 f'_{xy} \end{cases} \quad (40)$$

Число уравнений меньше числа неизвестных.

Пусть $\rho_2 = p \Rightarrow \rho_1 = 1 - p$ и $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2p}$

$x \rightarrow x_k, x + h \rightarrow x_{k+1} \Rightarrow$ общая формула методов Рунге-Кутты 2-го порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(1 - p)f(x_k, y_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}, y_k + \frac{h}{2p}f(x_k, y_k)\right) \quad (41)$$

p может быть любым (отличным от 0), однако...

- ▶ $x_k + \frac{h}{2p}$ лежит внутри $[x_k, x_k + h] \Rightarrow p \geq \frac{1}{2}$
- ▶ если $f(x, y) = f(x)$, то $y'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$y(x_k + h) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx h(1 - p)f(x_k) + hp f\left(x_k + \frac{h}{2p}\right) \quad (42)$$

Получили квадратурную формулу.

$$hp \geq 0, h(1 - p) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq 1.$$

В итоге

$$\frac{1}{2} \leq p \leq 1. \quad (43)$$

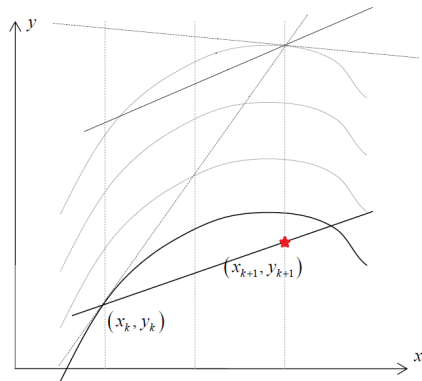
Модифицированный метод Эйлера, или метод средней точки ($p = 1$)

$$\begin{cases} y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}), \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (44)$$



Метод Эйлера-Коши, или метод Хойна ($p = \frac{1}{2}$)

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2} \end{cases} \quad (45)$$



Практическое использование методов Рунге-Кутты

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$H = \frac{b-a}{N}$. Нужно получить сеточную функцию в узлах $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$.

Пусть используется метод Рунге-Кутты s -го порядка. Шаг H как правило большой \Rightarrow локальная ошибка $\mathcal{O}(H^{s+1})$ будет большой.

Каждый шаг делят на m частей \Rightarrow шаг интегрирования $h = \frac{H}{m}$ и локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$.

Контроль локальной погрешности. Правило Рунге.

Если y_k взять как точное, то y_{k+2}^* - точное значение, лежащее на интегральной кривой, которая проходит через (x_k, y_k) .

$$y_{k+2}^{(2h)} = y_{k+2}^* + \epsilon_{k+2}^{(2h)} = y_{k+2}^* + c_k^{(2h)} (2h)^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

$$y_{k+2}^{(h)} = y_{k+2}^* + \epsilon_{k+2}^{(h)} = y_{k+2}^* + 2c_k^{(h)} h^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

Если h мало, то $c_k^{(2h)} \approx c_k^{(h)} \approx c$

$$y_{k+2}^{(2h)} = y_{k+2}^* + 2ch^{s+1}2^s + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

$$y_{k+2}^{(h)} = y_{k+2}^* + 2ch^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

$$y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)} = 2ch^{s+1}(2^s - 1) + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

Оценка локальной погрешности метода

$$\epsilon_{k+2}^{(h)} \approx 2ch^{s+1} \approx \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \quad (46)$$

- ▶ Если (46) меньше ϵ , то метод дает желаемый результат.
- ▶ Если (46) сильно меньше ϵ , то шаг можно увеличить.

Можно сделать уточнение

$$\bar{y}_{k+2} = y_{k+2}^{(h)} - \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \quad (47)$$

Поправка Ричардсона повышает порядок локальной погрешности на 1, т.е. $\mathcal{O}(h^{s+2})$.

$$\begin{cases} y' = 2x - 3y & x \in [0, 0.2] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y^*(x) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}e^{-3x}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & h & 0.1 & h & 0.2 & h=0.1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ a=x_0 & & x_1 & & x_2 & & b=x_2 \end{array}$$

М. Жулева.

$$y^*(0.2) \approx 0.58$$

$$y_2^{(0.2)} = y_0 + 2h \cdot (2x_0 - 3y_0) = 1 + 2 \cdot 0.1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = 0.4$$

$$\varepsilon_2^{(0.2)} = y_2^{(0.2)} - y^*(0.2) = -0.18$$

$$y_1^{(0.1)} = y_0 + h \cdot (2x_0 - 3y_0) = 0.7$$

$$y_2^{(0.1)} = y_1^{(0.1)} + h \cdot (2x_1 - 3y_1^{(0.1)}) = 0.7 + 0.1 \cdot (2 \cdot 0.1 - 3 \cdot 0.7) = 0.51$$

$$\varepsilon_2^{(0.1)} = y_2^{(0.1)} - y^*(0.2) = -0.07$$

$$\frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2 - 1} = 0.4 - 0.51 = \boxed{-0.11}$$

$$\bar{y}_2 = y_2^{(0.1)} - \frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2 - 1} = 0.62$$

$$\bar{y}_2 - y^*(0.2) = 0.04$$

Оценка погрешности и сходимость методов Рунге-Кутты

Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

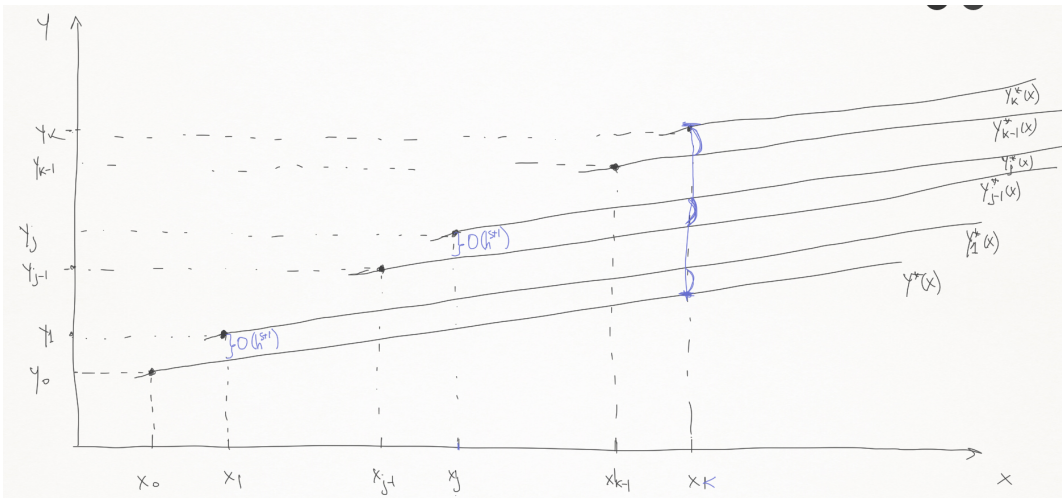
решается l -стадийным методом Рунге-Кутты порядка s

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^l \rho_i K_i, h = \frac{b-a}{n}. \quad (48)$$

Шаговая погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$.

Оценим погрешность метода

$$\epsilon_k = y_k - y^*(x_k). \quad (49)$$



$y_j^*(x)$ - точное решение задачи Коши с начальным условием $y(x_j) = y_j$.

$$\epsilon_k = y_k - y^*(x_k) = y_k^*(x_k) - y_0^*(x_k) \pm \sum_{j=1}^{k-1} y_j^*(x_k) =$$

$$y_k^*(x_k) - y_{k-1}^*(x_k) + y_{k-1}^*(x_k) - y_{k-2}^*(x_k) + \dots + y_1^*(x_k) - y_0^*(x_k) = \sum_{j=1}^k (y_j^*(x_k) - y_{j-1}^*(x_k))$$

Оценим результирующую погрешность $y_j^*(x_k) - y_{j-1}^*(x_k)$ через начальную погрешность $y_j^*(x_j) - y_{j-1}^*(x_j)$.

$$[t, T] \subset [a, b].$$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - не пересекаются.

Пусть $y_2(t) > y_1(t)$ (для определенности). Тогда $y_2(x) > y_1(x)$, $\forall x$

$$y_2' = f(x, y_2) \text{ и } y_1' = f(x, y_1)$$

$$(y_2 - y_1)' = f(x, y_2) - f(x, y_1) = f_y(x, \tilde{y})(y_2 - y_1) \text{ и } y_1(x) \leq \tilde{y}(x) \leq y_2(x)$$

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} = f_y(x, \tilde{y}) dx$$

$$\ln(y_2 - y_1)|_t^T = \int_t^T f_y(x, \tilde{y}) dx$$

$$y_2(T) - y_1(T) = (y_2(t) - y_1(t)) e^{\int_t^T f_y(x, \tilde{y}) dx}$$

$$|y_2(T) - y_1(T)| \leq |y_2(t) - y_1(t)| e^{\int_t^T |f_y(x, \tilde{y})| dx} \leq |y_2(t) - y_1(t)| e^{L(T-t)}. \quad (50)$$

$$|\epsilon_k| \leq \sum_{j=1}^k |y_j^*(x_k) - y_{j-1}^*(x_k)| \leq \sum_{j=1}^k \underbrace{|y_j^*(x_j) - y_{j-1}^*(x_j)|}_{\text{локальная погрешность}} e^{L(x_k - x_j)} = \sum_{j=1}^k |c_j| h^{s+1} e^{L(x_k - x_j)} \quad (51)$$

$$\forall j \ |c_j| \leq \bar{c} \Rightarrow$$

$$|\epsilon_k| \leq h^{s+1} \bar{c} e^{L(x_k - x_0)} k = h^s \bar{c} (x_k - x_0) e^{L(x_k - x_0)} \leq h^s D, \quad (52)$$

где $D = \bar{c}(b - a)e^{L(b-a)}$

Методы Рунге-Кутты являются сходящимися, т.к.

$$\forall k \ |\epsilon_k| \leq Dh^s \xrightarrow[kh=const]{h \rightarrow 0} 0. \quad (53)$$

Порядок глобальной погрешности на 1 меньше чем порядок локальной погрешности.

Содержание

Постановка задачи

Понятие сходимости и устойчивости вычислительных схем

Одношаговые методы

Конечно-разностные методы

Методы решения краевых задач

Конечно-разностные методы решения задачи Коши для ОДУ

Общий вид

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^r b_j \underbrace{f(x_{k-j}, y_{k-j})}_{f_{k-j}}, \quad (54)$$

a_j, b_j - константы, $a_0 \neq 0, a_r \neq 0$.

- ▶ r - шаговость метода, $r \geq 2$
- ▶ $b_0 = 0 \Rightarrow y_k = \Phi(h, x_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r})$ - явная формула
 $b_0 \neq 0$ - неявная формула
- ▶ нужны стартовые (разгонные) точки
- ▶ $a_0 = 1, a_1 = -1, a_j = 0, j \geq 2$ - методы Адамса.

Способ получения: интегрирование уравнения $y' = f(x, y)$ по промежутку $[x_{k-p}, x_k]$ ($p \geq 1$) с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.

$p = 1$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k - y_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y(x))}_{F(x)} dx \quad (55)$$

1. формула левых прямоугольников \rightarrow явный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \quad (56)$$

2. формула правых прямоугольников \rightarrow неявный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k) \quad (57)$$

3. формула трапеций

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2} (f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)) \quad (58)$$

(58) - уравнение вида $x = \phi(x)$, где x - это y_k . Зададим $y_k^{(0)}$ и

$$y_k^{(j+1)} = y_{k-1} + \frac{h}{2} \left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(j)}) \right), j = 0, 1, \dots \quad (59)$$

$$|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{h}{2} f(x_k, y_k) \right) \right| = \frac{h}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq \frac{h}{2} L < 1 \Rightarrow h < \frac{2}{L}. \quad (60)$$

Сходимость можно обеспечить за счет выбора h . Меньше $h \Rightarrow$ быстрее сходимость.

$y_k^{(0)}$ - по явной формуле Эйлера

$$y_k^{(0)} = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}). \quad (61)$$

(59), (61) - метод Эйлера с итерационной обработкой.

$p = 2$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-2}, x_k]$

$$y_k = y_{k-2} + \int_{x_{k-2}}^{x_k} f(x, y(x)) dx \quad (62)$$

1. формула левых прямоугольников с шагом $2h$

$$y_k = y_{k-2} + 2hf(x_{k-2}, y_{k-2}) = y_{k-2} + 2hf_{k-2} \quad (63)$$

2. формула Симпсона

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k) \quad (64)$$

3. обобщенная формула трапеций (по двум промежуткам)

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{2}(f_{k-2} + 2f_{k-1} + f_k) \quad (65)$$

Методы Адамса

Решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x)) dx = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x) dx. \quad (66)$$

Будем строить r -шаговый метод.

Идея: аппроксимируем $F(x)$ интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

$L_m(x)$ - интерполяционный полином по $\{\bar{x}_j, F_j\}_{j=0}^m$

- ▶ $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула
- ▶ $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$$F(x) = L_m(x) + R_m(x) \Rightarrow$$

$$y_k = y_{k-1} + \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x) dx}_{I_2 - \text{пренебрежём}} . \quad (67)$$

Замена переменной $x = \bar{x}_0 + ht$

$$I_1 = \int_{\bar{x}_{r-1}}^{\bar{x}_r} L_m(x) dx = h \int_{r-1}^r L_m(\bar{x}_0 + ht) dt. \quad (68)$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа на равномерной сетке

$$I_1 = h \int_{r-1}^r \sum_{j=0}^m F_j \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt, \quad (69)$$

где $\bar{\omega}(t) = t(t-1) \dots (t-m) = \prod_{j=0}^m (t-j)$.

$$I_1 = h \sum_{j=0}^m \underbrace{\left[\frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \int_{r-1}^r \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt \right]}_{\beta_j} F_j = h \sum_{j=0}^m \beta_j F_j.$$

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f_{k-r+j}. \quad (70)$$

- $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r-1} \underline{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \quad (71)$$

где $\underline{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-1-j}}{(r-1-j)!j!} \int_{r-1}^r \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{t-j} dt.$

- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^r \bar{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \quad (72)$$

где $\bar{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-j}}{(r-j)!j!} \int_{r-1}^r \frac{t(t-1)\dots(t-r)}{t-j} dt.$

Локальная погрешность

Остаточный член формулы Лагранжа

$$R_m(x) = \frac{F^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} \omega(x), \quad (73)$$

где $\omega(x) = \prod_{j=0}^m (x - x_j)$

$$x_j = \bar{x}_0 + hj \Rightarrow \omega(x) \rightarrow h^{m+1} \bar{\omega}(t).$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x) dx = h^{m+2} \int_{r-1}^r \frac{F^{(m+1)}(\xi(x(t)))}{(m+1)!} \bar{\omega}(t) dt \\ &= \frac{h^{m+2}}{(m+1)!} \int_{r-1}^r F^{(m+1)}(\eta(t)) \bar{\omega}(t) dt = c_m h^{m+2}. \end{aligned} \quad (74)$$

- ▶ явная формула, $m = r - 1 \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \underline{c}^{(r)} h^{r+1}$
- ▶ неявная формула, $m = r \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \bar{c}^{(r)} h^{r+2}$

Замечание

На практике неявные формулы предпочтительней (точнее, устойчивее). Но нужно решать уравнение.

Предиктор-корректор: сначала явная, затем неявная.

Для согласования локальной погрешности нужно использовать разношаговые схемы: шаговость явной схемы на 1 больше чем неявной.

Метод неопределённых коэффициентов построения конечно-разностных формул

Пусть решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Общий вид конечно-разностного метода

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^r b_j f_{k-j}. \quad (75)$$

Идея построения - сделать погрешность аппроксимации как можно меньше.

$y(x)$ - точное решение, подставим в (75). Если разность $\mathcal{O}(h^{q+1})$, то порядок аппроксимации q

$$e_k = \sum_{j=0}^r a_j \underbrace{y(x_k - jh)}_{x_{k-j}} - h \sum_{j=0}^r b_j f(x_k - jh, y(x_k - jh)). \quad (76)$$

$$y(x_k - jh) = y(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} (-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1})$$

$$f(x_k - jh, y(x_k - jh)) = y'(x_k - jh) = y'(x_k) + \frac{y''(x_k)}{1!} (-jh) + \dots + \frac{y^{(m)}(x_k)}{(m-1)!} (-jh)^{m-1} + \mathcal{O}(h^m)$$

Подставим в (76)

$$e_k = \sum_{j=0}^r a_j \left[y(x_k) + \sum_{i=1}^m \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} (-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \right] - h \sum_{j=0}^r b_j \left[\sum_{i=1}^m \frac{y^{(i)}(x_k)}{(i-1)!} (-jh)^{i-1} + \mathcal{O}(h^m) \right]$$

$$\begin{aligned}
e_k &= y(x_k) \sum_{j=0}^r a_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^r a_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} (-1)^i j^i h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^r b_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} i (-1)^i j^{i-1} h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&= h^0 y(x_k) \underbrace{\sum_{j=0}^r a_j}_{=0} + \sum_{i=1}^m h^i \sum_{j=0}^r \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} (-1)^i \underbrace{(j^i a_j + i j^{i-1} b_j)}_{=0} + \mathcal{O}(h^{m+1})
\end{aligned} \tag{77}$$

Для порядка аппроксимации m нужно потребовать

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^r a_j = 0 \\ \sum_{j=0}^r (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0 \end{cases} \tag{78}$$

Перепишем (75), x - произвольная точка

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^r a_j y(x - jh) = \sum_{j=0}^r b_j f(x - jh, y(x - jh)). \quad (79)$$

При $h \rightarrow 0$ левая часть (79) $\rightarrow y'(x)$, а значит правая часть $\rightarrow f(x, y)$, т.к. данная конечно-разностная схема аппроксимирует ДУ.

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^r a_j y(x - jh) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^r a_j (y(x) - jhy'(x) + \mathcal{O}(h^2)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} y'(x), \text{ если}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^r a_j = 0 \\ \sum_{j=0}^r ja_j = -1 \end{cases} \quad (80)$$

$$\sum_{j=0}^r b_j f(x - jh, y(x - jh)) = \sum_{j=0}^r b_j f(x - jh, y(x) + \mathcal{O}(h)) =$$

$$\sum_{j=0}^r b_j (f(x, y) + (-jh)f'_x + \mathcal{O}(h)f'_y + \mathcal{O}(h^2)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x, y), \text{ если}$$

$$\sum_{j=0}^r b_j = 1. \quad (81)$$

(80), (81) - условия согласованности.

(78) при $i = 1$: $\sum_{j=0}^r (ja_j + b_j) = 0 \Leftrightarrow (80)$.

СЛАУ уже неоднородная

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^r a_j = 0 \\ \sum_{j=0}^r j a_j = -1 \\ \sum_{j=0}^r b_j = 1 \\ \sum_{j=0}^r (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0, i = 2, \dots, m \end{array} \right. \quad (82)$$

Локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{m+1})$, порядок аппроксимации m .

Замечания

1. Метод неопределенных коэффициентов можно использовать и для построения методов Адамса. Нужно взять $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_j = 0, j \geq 2$ и найти b_j . Если взять $b_0 = 0$, то получим явную схему, иначе - неявную.
2. Для обеспечения численной устойчивости примерно половину коэффициентов необходимо зафиксировать.
3. Метод неопределённых коэффициентов не покрывает все возможные конечно-разностные схемы. Если построили какую-то схему, то с помощью (82) можно проверить/определить порядок аппроксимации. Второе и третье условие в (82) получены искусственно, поэтому проверяется последнее при $i = 1$.

Пример

$$r = 2, b_0 = 0$$

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = h(b_1 f_{k-1} + b_2 f_{k-2}). \quad (83)$$

Будем строить схему с порядком аппроксимации $m = 3$. (82) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = -1 \\ b_1 + b_2 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + 4a_2 + 4b_2 = 0 \leftarrow i = 2 \\ a_1 + 3b_1 + 8a_2 + 12b_2 = 0 \leftarrow i = 3 \end{array} \right. \quad (84)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{6}, a_1 = \frac{4}{6}, a_2 = -\frac{5}{6}, b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}). \quad (85)$$

Для всех ДУ, решением которых является кубический полином, схема (85) даёт точный результат.

Конечно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_r y_{k-r} = b_k, \quad (86)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_r \neq 0$,

$b_k = b(k)$ - известная функция целочисленного аргумента,

$y_k = y(k)$ - неизвестная функция целочисленного аргумента,

называется линейным конечно-разностным уравнением порядка r с постоянными коэффициентами.

Если $b_k \equiv 0$, то уравнение называется однородным.

Общее решение (86)

$$y_k = \bar{y}_k + \tilde{y}_k, \quad (87)$$

где \bar{y}_k - частное решение (86), \tilde{y}_k - общее решение однородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

Однородное уравнение имеет r линейно независимых решений $\{\tilde{y}_k^{(j)}\}_{j=1}^r$.

Будем искать решение однородного уравнения в виде $y_k = z^k, z \neq 0$

$$a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_r z^{k-r} = 0 = z^{k-r} \underbrace{(a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r)}_{P_r(z)}, \quad (88)$$

где $P_r(z)$ - характеристический полином конечно-разностного уравнения (86).

1. все корни z_j различны $\Rightarrow z_1^k, \dots, z_r^k$
2. корень z_j имеет кратность $p \Rightarrow z_j^k, k z_j^k, \dots, k^{p-1} z_j^k$

Частное решение неоднородного уравнения

Пусть $b_k = Q_m(k)$ - полином степени m .

Определение

Если среди корней характеристического уравнения $P_r(z) = 0$ имеется корень $z_j = 1$, то такой корень называется существенным.

- ▶ если существенных корней нет

$$\bar{y}_k = R_m(k) = \beta_0 k^m + \dots + \beta_m. \quad (89)$$

- ▶ если $z_j = 1$ - корень кратности q

$$\bar{y}_k = k^q R_m(k). \quad (90)$$

Пример

Будем решать конечно-разностное уравнение

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = A(3k - 4). \quad (91)$$

Характеристическое уравнение: $P_r(z) = z^2 + 4z - 5 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -5$.

Общее решение однородного уравнения

$$\tilde{y}_k = c_1(z_1)^k + c_2(z_2)^k = c_1 + c_2(-5)^k. \quad (92)$$

$A(3k - 4)$ - полином степени 1, $z_1 = 1$ - существенный корень кратности 1

$$\bar{y}_k = k(\beta_0 k + \beta_1). \quad (93)$$

Подставим (93) в (91)

$$k(\beta_0 k + \beta_1) + 4(k-1)(\beta_0(k-1) + \beta_1) - 5(k-2)(\beta_0(k-2) + \beta_1) = A(3k-4) \quad (94)$$

$$12\beta_0 k + 6\beta_1 - 16\beta_0 = A(3k-4) \quad (95)$$

$$\beta_0 = \frac{A}{4}, \beta_1 = 0.$$

Общее решение уравнения (91)

$$y_k = c_1 + c_2(-5)^k + \frac{A}{4}k^2. \quad (96)$$

Оценка погрешности явного метода Адамса

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Явный метод Адамса

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=1}^r b_j f_{k-j}, \quad f_{k-j} = f(x_{k-j}, y_{k-j}) \quad (97)$$

$y^*(x)$ - точное решение

$$y^*(x_k) = y^*(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y^*(x))}_{L_{r-1} + R_{r-1}} dx = y^*(x_{k-1}) + h \sum_{j=1}^r b_j f_{k-j}^* + R_k, \quad (98)$$

где $f_{k-j}^* = f(x_{k-j}, y^*(x_{k-j}))$, $|R_k| \leq ch^{r+1} = g$.

Погрешность метода: $\epsilon_k = y_k - y^*(x_k)$.

Вычтем (98) из (97)

$$\epsilon_k = \epsilon_{k-1} + h \sum_{j=1}^r b_j (f_{k-j} - f_{k-j}^*) - R_k \quad (99)$$

$$|\epsilon_k| \leq |\epsilon_{k-1}| + h \sum_{j=1}^r |b_j| |f_{k-j} - f_{k-j}^*| + g$$

$$|f_{k-j} - f_{k-j}^*| = |f(x_{k-j}, y_{k-j}) - f(x_{k-j}, y^*(x_{k-j}))| \leq L |y_{k-j} - y^*(x_{k-j})| = L |\epsilon_{k-j}|$$

$$|\epsilon_k| \leq |\epsilon_{k-1}| + hL \sum_{j=1}^r |b_j| |\epsilon_{k-j}| + g \quad (100)$$

На основе (100) построим конечно-разностное уравнение

$$E_k = E_{k-1} + hL \sum_{j=1}^r |b_j| E_{k-j} + g \quad (101)$$

Если удастся подобрать такое решение конечно-разностного уравнения (101)

$$|\epsilon_k| \leq E_k, \forall k, \quad (102)$$

то E_k будет оценкой погрешности метода Адамса.

Решение уравнения (101)

$$E_k = c_1 z_1^k + \dots + c_r z_r^k + E_k^*. \quad (103)$$

Стартовые точки - другой метод $\Rightarrow \epsilon_0, \dots, \epsilon_{r-1}$ - "внешние" ошибки.

Пусть $\epsilon = \max_{k=0, \dots, r-1} |\epsilon_k|$. Выберем c_1, \dots, c_r так, чтобы

$$\epsilon \leq E_k, k = 0, \dots, r-1 \quad (104)$$

и покажем, что в таком случае справедливо (102).

База индукции - неравенство (104).

Индукционный переход.

Пусть $|\epsilon_k| \leq E_k, k = 0, \dots, m-1$. Покажем, что $|\epsilon_m| \leq E_m$

$$E_m \pm \epsilon_m = \underbrace{(E_{m-1} \pm \epsilon_{m-1})}_I + h \sum_{j=1}^r \underbrace{(|b_j|LE_{m-j} \pm b_j(f_{m-j} - f_{m-j}^*))}_{II} + \underbrace{g \mp R_m}_{III} \quad (105)$$

$I \geq 0$ по индукционному предположению.

$III \geq 0$, т.к. $|R_k| \leq g, \forall k$.

$$\begin{aligned} |\epsilon_{m-j}| \leq E_{m-j} &\Leftrightarrow L|\epsilon_{m-j}| \leq LE_{m-j} \Rightarrow |f_{m-j} - f_{m-j}^*| \leq LE_{m-j} \\ &\Rightarrow LE_{m-j} \pm (f_{m-j} - f_{m-j}^*) \geq 0 \Rightarrow |b_j|LE_{m-j} \pm b_j(f_{m-j} - f_{m-j}^*) \geq 0. \end{aligned}$$

Покажем, что характеристический полином $P_r(z)$ уравнения (101) имеет корень на $(1, 1 + hLB)$, где $B = \sum_{j=1}^r |b_j|$.

$$P_r(1) = 1 - 1 - hLB < 0$$

$$P_r(1 + hLB) = (1 + hLB)^k - (1 + hLB)^{k-1} - hL \sum_{j=1}^r |b_j| (1 + hLB)^{k-j} =$$

$$(1 + hLB)^{k-1} hLB - hL \sum_{j=1}^r |b_j| (1 + hLB)^{k-j} = hL [(1 + hLB)^{k-1} |b_j| - |b_j| (1 + hLB)^{k-j}] > 0.$$

$\exists z_1 \in (1, 1 + hLB): P_r(z_1) = 0$. Тогда

$$E_k = c_1 z_1^k + E_k^* \tag{106}$$

где E_k^* - частное решение, константы c_2, \dots, c_r положили равными 0.

g - полином нулевой степени, 1 не является существенным корнем $\Rightarrow E_k^* = D$

$$D = D + hLBD + g \Rightarrow D = -\frac{g}{hLB} = -\frac{ch^r}{LB}. \quad (107)$$

Тогда решение уравнения (101)

$$E_k = c_1 z_1^k - \frac{ch^r}{LB}. \quad (108)$$

Выберем c_1 так, чтобы (104) было выполнено, т.е.

$$c_1 = \epsilon + \frac{ch^r}{LB}. \quad (109)$$

Подставим (109) в (108)

$$|\epsilon_k| \leq E_k = \left(\epsilon + \frac{ch^r}{LB} \right) z_1^k - \frac{ch^r}{LB} = \epsilon z_1^k + \frac{ch^r}{LB} (z_1^k - 1). \quad (110)$$

$$z_1^k < (1 + hLB)^k \leq e^{khLB} = e^{(x_k - x_0)LB}$$

Оценка погрешности явного метода Адамса

$$|\epsilon_k| \leq \epsilon e^{(x_k - x_0)LB} + \frac{ch^r}{LB} \left(e^{(x_k - x_0)LB} - 1 \right). \quad (111)$$

1е слагаемое - вклад ошибок в стартовых точках.

2е слагаемое - накопление локальных погрешностей метода Адамса.

Если $\epsilon = \mathcal{O}(h^q)$, то q должно быть больше r , т.к. итоговый порядок погрешности - минимум из q и r .

Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

решается конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^r b_j f_{k-j}. \quad (112)$$

Как накапливается вычислительная погрешность?

Как коэффициенты влияют на накопление вычислительной погрешности?

Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

- ▶ 0-устойчивость: изучение поведения ошибки при постоянной (конечной) длине отрезка. Количество вычислений растёт за счет уменьшения шага.
- ▶ Абсолютная устойчивость: решаем на $[0, T]$, T может стремиться к бесконечности. Количество вычислений растет за счёт увеличения интервала.

0-устойчивость. Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = 2x, x \in [0, l] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Точное решение $y^*(x) = x^2$.

$$x_k = kh, k = 0, \dots, n, y^*(x_k) = x_k^2.$$

Будем решать конечно-разностным методом

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}), \quad (113)$$

который даёт точный результат для всех полиномов степени 3.

$$2h(2f_{k-1} + f_{k-2}) = 2h(4h(k-1) + 2h(k-2)) = 4h^2(3k-4)$$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k-4) \quad (114)$$

Согласно (96) общее решение уравнения (114)

$$y_k = c_1 + c_2(-5)^k + h^2 k^2. \quad (115)$$

Пусть y_0 и y_1 заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

$\Rightarrow y_k = h^2 k^2$, т.е. совпадает с точным, если все вычисления выполняются ТОЧНО.

На практике y_1 вычисляется, т.е.

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 + \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 + \epsilon = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{\epsilon}{6}, c_2 = -\frac{\epsilon}{6}.$$

Если $\epsilon = \alpha h^q$, то численное решение

$$\tilde{y}_k = \frac{\alpha h^q}{6} - \frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k + h^2 k^2. \quad (116)$$

$$h^2 k^2 = x_k^2 = y^*(x_k), \quad \frac{\alpha h^q}{6} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k \xrightarrow[h \rightarrow 0]{kh = \text{const}} \pm \infty.$$

Чем мельче шаг h , тем больше погрешность. Схема накапливает ошибку, численно неустойчива.

Пусть y_0, y_1 заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases}$$

НО каждое вычисление по схеме производится с ошибкой

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k - 4) + \delta. \quad (117)$$

Решим уравнение (117). Частное решение, отвечающее δ , будем искать в виде βk

$$\beta k + 4\beta(k - 1) - 5\beta(k - 2) = \delta \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{6}. \quad (118)$$

Тогда общее решение уравнения (117)

$$y_k = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(-5)^k + h^2 k^2 + \frac{\delta}{6} k. \quad (119)$$

Константы определим из начальных условий

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = \tilde{c}_1 - 5\tilde{c}_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.$$

Решение уравнения (117)

$$y_k = h^2 k^2 + \frac{\delta}{6} k. \quad (120)$$

$$y_k \xrightarrow[h \rightarrow 0]{kh = \text{const}} ?$$

Первое слагаемое стремится к y_k^* , а второе стремится к бесконечности. Схема имеет тенденцию к накоплению ошибки.

Не все схемы с хорошим порядком аппроксимации пригодны для практического использования.

Рассмотрим модельную задачу: $y' = 0$. Точное решение $y^* = \text{const}$.

Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = 0. \quad (121)$$

$y^* = \text{const}$ удовлетворяет (121) в силу 1го условия согласованности.

При численном решении будем получать \tilde{y}_k

$$\tilde{y}_k = y_k^* + \epsilon_k. \quad (122)$$

Подставив (122) в (121), получим конечно-разностное уравнение относительно ϵ_k

$$\sum_{j=0}^r a_j \epsilon_{k-j} = 0. \quad (123)$$

Для поиска общего решения (123) необходимо найти корни характеристического полинома

$$P_r(z) = a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r. \quad (124)$$

Если z_j - корень кратности p_j , то ему соответствуют решения

$$z_j^k, k z_j^k, \dots, k^{p_j-1} z_j^k. \quad (125)$$

Корневое условие

Все корни характеристического полинома лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе единичного круга нет кратных корней.

Утверждение (условие 0-устойчивости)

Для того чтобы конечно-разностная схема была 0-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось корневое условие.

Теорема Далквиста

Конечно-разностная схема

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^r b_j f_{k-j} \quad (126)$$

с порядком аппроксимации q не может быть устойчивой, если

- ▶ $q > r$ для явной схемы,
- ▶ $q > r + 1$ для неявной схемы и нечетного r ,
- ▶ $q > r + 2$ для неявной схемы и четного r .

Все коэффициенты нельзя задать так, чтобы получить максимальный порядок аппроксимации. Часть коэффициентов должна быть зафиксирована из условия достижения 0-устойчивости.

Абсолютная устойчивость

Рассмотрим модельную задачу: $y' = \lambda y$. Точное решение $y^*(x) = ce^{\lambda x}$.

Если $Re(\lambda) < 0$, то $y^*(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^r a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^r b_j \lambda y_{k-j} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^r (a_j - h\lambda b_j) y_{k-j} = 0. \quad (127)$$

Характеристический полином

$$\chi(z) = \sum_{j=0}^r (a_j - \lambda h b_j) z^{r-j} = 0. \quad (128)$$

Если корни (128) $z_j = z_j(\lambda h)$ удовлетворяют корневому условию, то схема (127) называется абсолютно устойчивой.

Примеры

Одношаговые методы $\Rightarrow r = 1$

$$\chi(z) = (a_0 - \lambda h b_0)z + (a_1 - \lambda h b_1) = 0. \quad (129)$$

Явный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \quad (130)$$

$$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 0, b_1 = 1$$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 0)z + (-1 - \lambda h \cdot 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 1 + \lambda h. \quad (131)$$

$|1 + \lambda h| < 1$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- ▶ $\lambda > 0$ - неравенство не может быть выполнено ни для какого $h > 0$,
- ▶ $\lambda < 0 \Rightarrow 0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$.

Неявный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_k, y_k) \quad (132)$$

$$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 1, b_1 = 0$$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 1)z + (-1 - \lambda h \cdot 0) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{1 - \lambda h}. \quad (133)$$

$$|1 - \lambda h| > 1.$$

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- ▶ $\lambda < 0$ - неравенство выполняется при любых $h > 0$,
- ▶ $\lambda > 0 \Rightarrow h \geq \frac{2}{\lambda}$.

Метод трапеций

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2} (f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)) \quad (134)$$

$$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}$$

$$\chi(z) = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)z + \left(-1 - \frac{\lambda h}{2}\right) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}. \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \lambda h = \alpha + \beta i &\Rightarrow \left| \frac{2 + \alpha + \beta i}{2 - \alpha - \beta i} \right| < 1 \\ \Rightarrow \sqrt{(2 + \alpha)^2 + \beta^2} &\leq \sqrt{(2 - \alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow \alpha \leq 0. \end{aligned}$$

Если область абсолютной устойчивости включает в себя левую полуплоскость, то схема называется А-устойчивой.

Замечания

1. В общем случае $y' = f(x, y)$ в роли параметра λ фигурирует $f'_y(x, y)$

$$f(x, y) = f(x, y_k) + f'_y(x, y_k)(y - y_k) + \dots \quad (136)$$

2. В случае многошаговых методов характеристический полином имеет несколько корней. Для каждого корня определяется область устойчивости.
3. Анализ абсолютной устойчивости методов Рунге-Кутты более сложный.

Содержание

Постановка задачи

Понятие сходимости и устойчивости вычислительных схем

Одношаговые методы

Конечно-разностные методы

Методы решения краевых задач

Постановка задачи

Рассмотрим линейное ОДУ 2го порядка с переменными коэффициентами

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (137)$$

$$p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b]).$$

Дифференциальный оператор $L = p \frac{d^2}{dx^2} + q \frac{d}{dx} + r$. Тогда $(137) \Leftrightarrow L(y) = f$.

Общий вид граничных условий (ГУ)

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (138)$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0.$$

Особенности решения краевых задач

Краевая задача = ДУ (137) + ГУ (138)

- ▶ может не иметь решения
- ▶ может иметь бесконечное число решений
- ▶ может иметь единственное решение

При решении краевой задачи

- ▶ либо ставят условия на коэффициенты уравнения для обеспечения единственности решения,
- ▶ либо выявляют ситуацию, когда решение не существует или не единственно.

Будем рассматривать методы, которые сводят краевую задачу к решению задачи Коши.

Метод суперпозиции

Общее решение уравнения (137)

$$y(x) = u(x) + c_1 v(x) + c_2 w(x), \quad (139)$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения,
 $c_1 v(x) + c_2 w(x)$ - общее решение однородного уравнения.
 $v(x)$ и $w(x)$ должны быть линейно независимыми.

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \\ L(w) = 0 \end{cases} \quad (140)$$

На u, v, w сформулируем НУ так, чтобы автоматически выполнялись ГУ (138).
Вместо краевой задачи будем решать 3 задачи Коши.

Зададим однородные НУ для $u(x)$

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \quad (141)$$

Если НУ линейно независимы, то и решения будут линейно независимы. Зададим такие НУ для v и w

$$\begin{cases} v(a) = 1 \\ v'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w(a) = 0 \\ w'(a) = 1 \end{cases} \quad (142)$$

(140) + (141) + (142) $\rightarrow u^h, v^h, w^h$ - сеточные функции.

Тогда $y^h = u^h + c_1 v^h + c_2 w^h$

Определим c_1, c_2 так, чтобы удовлетворить ГУ (138)

$$\begin{cases} \alpha_0 \underbrace{[u(a)]}_{=0} + c_1 \underbrace{[v(a)]}_{=1} + c_2 \underbrace{[w(a)]}_{=0} + \alpha_1 \underbrace{[u'(a)]}_{=0} + c_1 \underbrace{[v'(a)]}_{=0} + c_2 \underbrace{[w'(a)]}_{=1} = A \\ \beta_0 [u(b) + c_1 v(b) + c_2 w(b)] + \beta_1 [u'(b) + c_1 v'(b) + c_2 w'(b)] = B \end{cases} \quad (143)$$

(143) - СЛАУ относительно c_1, c_2 .

- ▶ Если нет решений, то и краевая задача не имеет решений.
- ▶ Если бесконечное число решений, то одну константу задаем произвольно и получаем параметрическое семейство.

Метод трудоёмкий, т.к. нужно решить 3 задачи Коши для ОДУ 2го порядка.

Модификация метода суперпозиции

Сократим количество решаемых задач. Решение (137) будем искать в виде

$$y(x) = u(x) + cv(x), \quad (144)$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, $v(x)$ - решение однородного уравнения

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \quad (145)$$

Подберем НУ для u и v так, чтобы первое ГУ (138) выполнялись $\forall c$

$$\alpha_0[u(a) + cv(a)] + \alpha_1[u'(a) + cv'(a)] = A \quad (146)$$

$$(146) \text{ при } c = 0: \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A$$

$$\begin{cases} u(a) = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \\ u'(a) = \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \end{cases} \quad (147)$$

Тогда (146) с учетом (147)

$$c[\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a)] = 0 \quad (148)$$

Возьмём $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} v(a) = \mu \alpha_1 \\ v'(a) = -\mu \alpha_0 \end{cases} \quad (149)$$

(154) + (147) + (149) $\rightarrow u^h, v^h$ - сеточные функции.

Тогда $y^h = u^h + cv^h$

Константу c определим из второго ГУ (138)

$$\beta_0[u(b) + cv(b)] + \beta_1[u'(b) + cv'(b)] = B. \quad (150)$$

$$c[\beta_0v(b) + \beta_1v'(b)] = B - [\beta_0u(b) + \beta_1u'(b)] \Rightarrow c = \dots$$

Если множитель при c равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Метод суперпозиции имеет большую свободу выбора НУ для решения задач Коши. Модифицированный метод проще, т.к. нужно решать только 2 задачи Коши.

Метод факторизации, или метод расщепления

Предположим, что существуют такие $s(x)$ и $t(x)$, что решение ОДУ 2го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (151)$$

может быть представлено как решение ОДУ 1го порядка

$$y'(x) = s(x)y(x) + t(x). \quad (152)$$

Если сконструируем функцию

$$y(x) = u(x) + cv(x), \quad (153)$$

для которой

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \quad (154)$$

то эта функция будет решением (151) \Rightarrow она должна быть решением (152) $\forall c$.

Подставим (153) в (152): $u' + cv' = s(u + cv) + t, \forall c$

$$\begin{cases} u' = su + t \\ v' = sv \end{cases} \quad (155)$$

v должно удовлетворять условию (154).

$$v'' = s'v + sv' = s'v + s^2v$$

$$\begin{aligned} L(v) &= pv'' + qv' + rv \\ &= p(s'v + s^2v) + q(sv) + rv \\ &= v(ps' + ps^2 + qs + r) = 0 \end{aligned} \quad (156)$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно s

$$ps' + ps^2 + qs + r = 0. \quad (157)$$

u должно удовлетворять условию (154).

$$u'' = s'u + su' + t' = s'u + s(su + t) + t'$$

$$\begin{aligned} L(u) &= pu'' + qu' + ru \\ &= p(s'u + s(su + t) + t') + q(su + t) + ru \\ &= u \underbrace{(ps' + ps^2 + qs + r)} + pst + pt' + qt = f \end{aligned} \tag{158}$$

ОДУ 1го порядка относительно t

$$pt' + pst + qt = f. \tag{159}$$

$$(152) \Rightarrow y'(a) = s(a)y(a) + t(a)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$$

$$\text{Если } \alpha_1 \neq 0, \text{ то } y'(a) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} y(a) + \frac{A}{\alpha_1}$$

$$\begin{cases} s(a) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \\ t(a) = \frac{A}{\alpha_1} \end{cases} \quad (160)$$

$$(157) + (160) \rightarrow s^h$$

$$(159) + (160) \rightarrow t^h$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 [s(b)y(b) + t(b)] = B$$

$$y(b)[\beta_0 + \beta_1 s(b)] = B - \beta_1 t(b) \Rightarrow y(b) = \dots \quad (161)$$

Если множитель при $y(b)$ равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Если $\alpha_1 = 0$, но $\beta_1 \neq 0$, то можем привлечь ГУ на правом конце.

Замечание

Если задачи Коши решаются численно, то получаем сеточные функции. Необходимо позаботиться, чтобы для вычисления t^h были необходимые значения s^h . Аналогично для y^h .

Если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \quad (162)$$

Возьмем другое ОДУ для $y(x)$

$$z(x)y'(x) = y(x) + w(x), \quad (163)$$

где $z(x), w(x)$ - неизвестные функции.

Подставим (153) в (163): $z(u' + cv') = u + cv + w, \forall c$

$$\begin{cases} zu' = u + w \\ zv' = v \end{cases} \quad (164)$$

v должно удовлетворять условию (154).

$$z'v' + zv'' = v' \times z$$

$$z^2v'' = (1 - z')v'z = (1 - z')v$$

$$\begin{aligned} z^2L(v) &= z^2[pv'' + qv' + rv] \\ &= p[(1 - z')v] + zqv + z^2rv \\ &= v[p(1 - z') + qz + rz^2] = 0 \end{aligned} \tag{165}$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно z

$$p(1 - z') + qz + rz^2 = 0. \tag{166}$$

u должно удовлетворять условию (154).

$$z'u' + zu'' = u' + w' \quad | \times z$$

$$z' \underbrace{zu'} + z^2 u'' = \underbrace{zu'} + zw'$$

$$z^2 u'' = (1 - z')(u + w) + w'z$$

$$\begin{aligned} z^2 L(u) &= z^2 [pu'' + qu' + ru] \\ &= p[(1 - z')(u + w) + w'z] + qz(u + w) + z^2 ru \\ &= u \underbrace{[p(1 - z') + qz + rz^2]} + p(1 - z')w + pw'z + qzw = z^2 f \end{aligned} \tag{167}$$

$$(166) \Rightarrow p(1 - z') = -qz - rz^2$$

$$-(qz + rz^2)w + pw'z + qzw = z^2f \quad (168)$$

ОДУ 1го порядка относительно w

$$pw' - rzw = zf. \quad (169)$$

$$(163) \Rightarrow z(a)y'(a) = y(a) + w(a)$$

$$y(a) = A$$

$$\begin{cases} z(a) = 0 \\ w(a) = -A \end{cases} \quad (170)$$

$$(166) + (170) \rightarrow z^h, (169) + (170) \rightarrow w^h$$

$$y(b) = B \rightarrow y^h.$$

Метод конечных разностей (МКР) решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \quad (171)$$

Построим равномерную сетку на $[a, b]$: $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Запишем ОДУ в узлах сетки

$$p_k y''(x_k) + q_k y'(x_k) + r_k y(x_k) = f_k, k = 0, \dots, n \quad (172)$$

где $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $r_k = r(x_k)$, $f_k = f(x_k)$.

Аппроксимация производных конечно-разностными выражениями

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \\ y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{cases} \quad (173)$$

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + \mathcal{O}(h^4) \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (174)$$

$$y(x+h) - y(x-h) = 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (175)$$

В (174), (175) заменим x на x_k и подставим в (172)

$$p_k \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1}))}{h^2} + q_k \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}))}{2h} + r_k y(x_k) + \mathcal{O}(h^2) = f_k \quad (176)$$

В (176) отбросим $\mathcal{O}(h^2)$, заменим $y(x_k)$ на y_k

$$p_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + q_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + r_k y_k = f_k, k = 1, \dots, n-1 \quad (177)$$

ГУ \Rightarrow

$$\begin{cases} y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \quad (178)$$

(177), (178) - СЛАУ $\rightarrow \{y_k\}_{k=0}^n$.

$$\begin{cases} \left(p_k - \frac{q_k}{2}h\right)y_{k-1} + (h^2r_k - 2p_k)y_k + \left(p_k + \frac{q_k}{2}h\right)y_{k+1} = h^2f_k, k = 1, \dots, n-1 \\ y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \quad (179)$$

Теорема

Если $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) \geq \frac{h}{2}|q(x)| \\ r(x) \leq 0 \end{cases} \quad (180)$$

то СЛАУ (179) имеет единственное решение и вычислительная погрешность $\mathcal{O}(h^2)$.

Граничные условия общего вида

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \alpha_0 y(b) + \alpha_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (181)$$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A. \quad (182)$$

Аналогично для 2го ГУ

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \quad (183)$$

(177), (182), (183) - МКР 1го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h)$.

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \\ y(x+2h) = y(x) + 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \quad (184)$$

$$4y(x+h) - y(x+2h) = 3y(x) + 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$y'(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (185)$$

$x \rightarrow x_0, x+h \rightarrow x_1, x+2h \rightarrow x_2$, отбросим $\mathcal{O}(h^2)$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \quad (186)$$

Упражнение

Получить аналогичное соотношение для ГУ на правом конце.

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \rightarrow$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A \quad (187)$$

(177), (187), (...) - МКР 2го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h^2)$.

Замечания

1. Матрица СЛАУ уже не трёхдиагональная. Для приведения к трёхдиагональному виду из 1го уравнения исключают y_2 с помощью 2го уравнения.
2. Если ДУ более высокого порядка, то нужно привлекать больше точек для аппроксимации производных.
3. Если ДУ нелинейное, то и система будет нелинейной.

Упражнения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + y^2$ неявным методом Эйлера с шагом $h = 0.2$ на интервале $[1, 2]$ при условии $y(2) = 1$.
2. Построить метод Адамса для $r = 3$ методом неопределённых коэффициентов.
3. Определить порядок аппроксимации формул (63), (64), (65) с помощью условий (82).
4. Являются ли методы Рунге-Кутты и методы Адамса 0-устойчивыми?