Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

15 сентября 2023 г.

Содержание

Постановка задачи

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - алгебраическая или трансцендентная функция.

- алгебраическая - полином или может быть приведена путем замены к полиному
- трансцендентная - содержит трансцендентные функции и не может быть путем замены приведена к полиному

Требуется найти $x^* : f(x^*) = 0$.

Проблемы

1. Алгебраические уравнения разрешимы только до 4й степени. В общем случае для уравнений выше 4й степени формул нет (т. Абеля).
2. Трансцендентные уравнения в общем случае неразрешимы. Пример: $x - \cos(x) = 0$.
3. Заранее неизвестно, есть ли корни и сколько их. Пример: $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ - бесконечное количество корней.

Алгоритм решения $f(x) = 0$

1. Этап отделения – есть ли у уравнения корни, сколько их и определение промежутков, на которых эти корни лежат.

   Большинство численных методов требуют знания промежутков, где заведомо имеется корень и притом единственный.
2. Этап уточнения – нахождение корня с заданной точностью ϵ.

   Задана точность $\epsilon > 0$, требуется найти $\tilde{x}$:

$$|\tilde{x} - x^*| < \epsilon. \quad (1)$$

   Это и будет корень с точностью ϵ.

Содержание

Графический способ

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \phi_1(x) = \phi_2(x)$

Преимущества: наглядность, простота.

Недостатки:

- если корни расположены близко друг к другу, а шаг для построения графика выбран неверно, то корни можно пропустить.
  $(x-1)(x-1.0001) = 0$, график построен с шагом 0.01.
- если функция вычисляется долго ($f(x)$ - решение какой-то задачи), то построение графика займет много времени.
  $f(x) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^g f(\alpha, \beta, \gamma, x) d\alpha d\beta d\gamma$

Аналитический способ

Теорема Больцано-Коши

Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда отрезок (a,b) содержит по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$.

Теорема

Пусть $f \in C^{(1)}([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$ и $f'(x)$ знакопостоянна на (a,b). Тогда отрезок $[a,b]$ содержит единственный корень уравнения $f(x) = 0$.

Случай алгебраического уравнения

Теорема о верхней границе положительных корней

Пусть $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $a_0 > 0$. Тогда для любого положительного корня x^* верно

$$x^* \leq 1 + \sqrt[m]{\frac{|a'|}{a_0}}, \tag{2}$$

где m - номер первого отрицательного коэффициента в ряду $a_1, a_2, \ldots$, и a' - наибольший по модулю отрицательный коэффициент.

Замечание

Нижнюю границу положительных корней, а также верхнюю и нижнюю границы отрицательных корней можно найти, если произвести замены $x = \frac{1}{y}$, $x = -y$, $x = -\frac{1}{y}$.

Доказательство.

Будем искать верхнюю границу корней правее 1.

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0x^n + (a_1x^{n-1} + \ldots) + a_mx^{n-m} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\
&\geq a_0x^n + a_mx^{n-m} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \\
&\geq a_0x^n - |a'|(x^{n-m} + \ldots + 1) \\
&= a_0x^n - |a'|\frac{x^{n-m+1} - 1}{x-1} \\
&> a_0x^n - |a'|\frac{x^{n-m+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n-m+1}}{x-1}(a_0(x-1)x^{m-1} - |a'|) \\
&> \frac{x^{n-m+1}}{x-1}(a_0(x-1)^m - |a'|)
\end{aligned}
$$

При $x > 1 + \sqrt[m]{\frac{|a'|}{a_0}}$ $P_n(x) > 0$, т.е. корней нет. $\square$

Содержание

Метод половинного деления (the bisection method)

Алгоритм

while $|b-a| > 2\epsilon$

$\quad c = \frac{a+b}{2}$

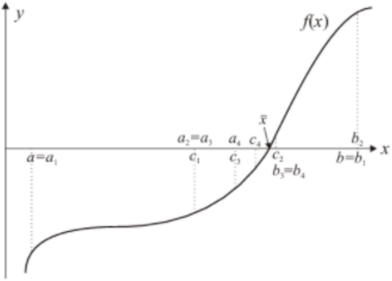
$\quad$ if $f(a)f(c) < 0$

$\quad\quad b = c$

$\quad$ else

$\quad\quad a = c$

$x = \frac{a+b}{2}$



Условия применимости

1. $f \in C([a,b])$
2. $f(a)f(b) < 0$

Упражнение

Дано $f(x)$, $[a,b]$, ϵ. Определить количество итераций.

Метод половинного деления (the bisection method)

Преимущества метода

1. Минимальные требования к функции.
2. Гарантированное нахождение корня с заданной точностью.
3. Простота реализации.

Недостатки метода

1. Медленная сходимость.
2. Не является монотонным.

Метод Ньютона (the Newton's method), или метод касательных

Пусть $x^{(k)}$ - текущее приближение к корню x^*. Разложение f в ряд Тейлора в окрестности $x^{(k)}$

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^{(k)})^2 \qquad (3)$$

Решим уравнение $f(x) = 0$, отбросив квадратичное слагаемое в (3)

$$0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \qquad (4)$$

Формула Ньютона

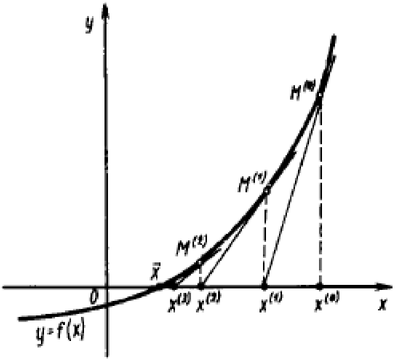
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad (5)$$

Метод Ньютона, геометрическая интерпретация

Уравнение касательной к графику f в точке $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$

$$y = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \qquad (6)$$

Найдем абсциссу точки пересечения касательной (6) с осью Ox и назовем ее следующим приближением $x^{(k+1)}$ к корню x^*.
Получим формулу (5).



Теорема о сходимости метода Ньютона

Пусть

1. $f \in C^{(2)}([a, b])$
2. $f(a)f(b) < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[a, b]$
4. $x^{(0)} : f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$ (условие Фурье)

Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, построенная по методу Ньютона (5), монотонно сходится к корню $x^* \in (a, b)$.

Доказательство

Пусть $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда $f(a) < 0, f(b) > 0$ и в качестве $x^{(0)}$ можно взять любую точку из $(x^*, b]$, причем $f(x^{(0)}) > 0$.

Покажем, что последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ убывает и ограничена снизу.

Теорема о сходимости метода Ньютона (2)

$$f(x^*) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x^{(0)})^2$$
$$\Rightarrow f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x^* - x^{(0)}) < 0$$
$$\Rightarrow x^* < x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = x^{(1)} < x^{(0)} \text{ и } f(x^{(1)}) > 0.$$

По индукции: $x^* < x^{(k+1)} < x^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Перейдем к пределу слева и справа при $k \to \infty$ в выражении (5)

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ - корень.

Теорема о скорости сходимости метода Ньютона

Пусть $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0$ и $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| < \infty, \forall x \in [a,b]$.
Если $\forall k x^{(k)} \in [a,b]$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ - корень уравнения, то $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|x^* - x^{(k+1)}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x^{(k)}|^2 \tag{7}$$

$$|x^* - x^{(k+1)}| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|^2 \tag{8}$$

Замечание

Неравенство (7) показывает скорость сходимости итерационного процесса.
Неравенство (8) - апостериорная оценка погрешности, может быть использована в качестве критерия окончания итерационного процесса.

Теорема о скорости сходимости метода Ньютона (2)

Доказательство.

Ряд Тейлора:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x^{(k)})^2 = 0$$

Формула Ньютона:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow x^* - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x^{(k)})}(x^* - x^{(k)})^2$$

$$|x^* - x^{(k+1)}| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_k)}{f'(x^{(k)})}\right|(x^* - x^{(k)})^2 \leq \frac{M_2}{2m_1}(x^* - x^{(k)})^2$$

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{f''(\tilde{\xi}_k)}{2}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$$

$$f(x^{(k+1)}) = \frac{f''(\tilde{\xi}_k)}{2}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$$

$$|f(x^{(k+1)})| \leq \frac{M_2}{2}(x^{(k+1)} - x^{(k)})^2$$

Формула Лагранжа:

$$f(x^*) - f(x^{(k+1)}) = f'(\tau)(x^* - x^{(k+1)})$$

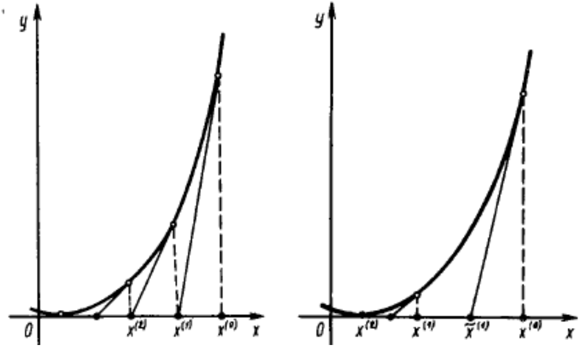
$$|x^* - x^{(k+1)}| = \left|\frac{f(x^{(k+1)})}{f'(\tau)}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x^{(k+1)} - x^{(k)}|^2$$

□

Метод Ньютона, кратный корень

Пусть $m > 1$ - кратность корня уравнения $f(x) = 0$. Формула (5) модифицируется

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \tag{9}$$



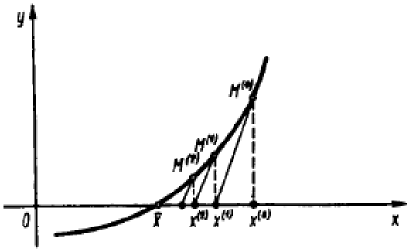
Модифицированный метод Ньютона

Откажемся от вычисления производной f' на каждой итерации:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})} \qquad (10)$$

Это позволяет сократить время итерации, но падает скорость сходимости.

Вместо касательных строятся прямые параллельные первой касательной.



Замечание

Значение производной в (10) можно пересчитывать после нескольких итераций.

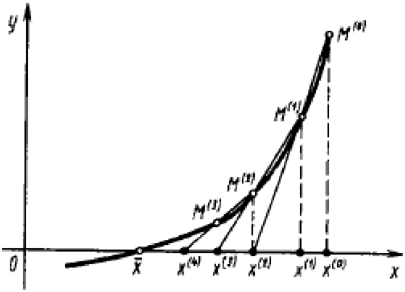
Метод секущих (Secant method)

Откажемся от вычисления $f'(x^{(k)})$, заменив приближенным выражением

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}} \qquad (11)$$

Формула метода секущих

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} \qquad (12)$$

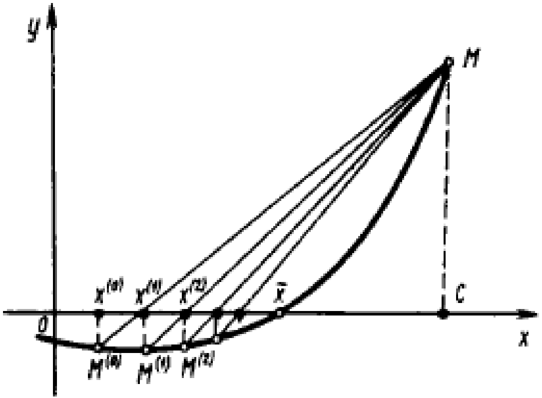


Метод секущих. Замечания

1. Метод секущих является двухшаговым.
2. На первом шаге берутся две точки, удовлетворяющие условию Фурье.
3. Одна итерация по методу секущих требует только одного нового вычисления значения функции f, а метод Ньютона - двух (f и f'). Однако скорость сходимости метода секущих несколько ниже по сравнению с методом Ньютона.
4. Начиная с некоторого k погрешности вычислений начинают превосходить погрешность метода по причине вычитания близких значений. Важно остановить процесс раньше.

Метод хорд (Chord method)

Проводится прямая, соединяющая две крайние точки (хорда). Выбирается тот промежуток, на котором есть корень.



Теорема о сходимости метода хорд

Пусть

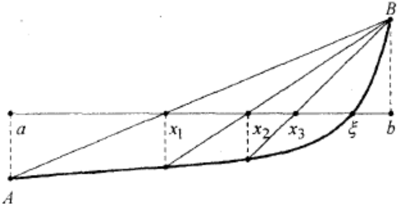
1. $f \in C^{(2)}([a, b])$
2. $f(a)f(b) < 0$
3. f', f'' знакопостоянны на $[a, b]$
4. стартовая точка $x^{(0)} : f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) < 0$
5. неподвижный конец $\bar{x} : f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$

Тогда

1. Последовательность
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - \bar{x}}{f(x^{(k)}) - f(\bar{x})} \tag{13}$$
сходится.
2. Справедлива оценка погрешности
$$|x^* - x^{(k+1)}| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x^{(k+1)} - x^{(k)}|, \tag{14}$$
где $m_1 = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ и $M_1 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Метод хорд. Замечания

1. Можно расчитывать на довольно быструю сходимость метода хорд, если f близка к линейной. Для линейной функции метод хорд дает корень за один шаг.
2. Метод хорд может проигрывать даже методу половинного деления.



3. Метод хорд и метод Ньютона (и его модификации) сходятся к корню с разных сторон $\Rightarrow$ можно двумя методами находить корень без использования оценки погрешности, сужая интервал как в методе половинного деления. При этом надо учесть, что неподвижная точка в методе хорд будет меняться. Такой подход называется комбинированным методом.

Метод обратной квадратической интерполяции (Inverse quadratic interpolation)

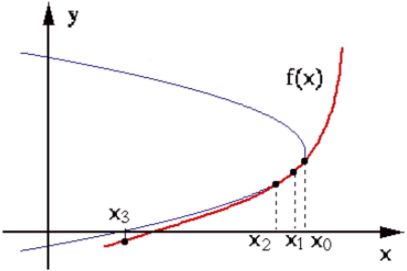
На каждом шаге метода есть 3 приближения: $x^{(k-2)}$, $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$. Строится парабола вида

$$x(y) = ay^2 + by + c. \tag{15}$$

Новое приближение $x^{(k+1)}$ определяется как точка пересечения параболы с осью абсцисс

$$ay^2 + by + c|_{y=0} = c. \tag{16}$$

Далее $x^{(k-2)}$ отбрасывается и процесс продолжается.



Метод обратной квадратической интерполяции

Обозначим $f_k := f(x^{(k)})$. Уравнение параболы, проходящей через 3 точки: $(f_{k-2}, x^{(k-2)})$, $(f_{k-1}, x^{(k-1)})$ и $(f_k, x^{(k)})$

$$x(y) = x^{(k-2)} \frac{(y - f_{k-1})(y - f_k)}{(f_{k-2} - f_{k-1})(f_{k-2} - f_k)} + x^{(k-1)} \frac{(y - f_{k-2})(y - f_k)}{(f_{k-1} - f_{k-2})(f_{k-1} - f_k)} + x^{(k)} \frac{(y - f_{k-1})(y - f_{k-2})}{(f_k - f_{k-1})(f_k - f_{k-2})}.$$

Рекуррентная формула

$$x^{(k+1)} = x^{(k-2)} \frac{f_{k-1} f_k}{(f_{k-2} - f_{k-1})(f_{k-2} - f_k)} + x^{(k-1)} \frac{f_{k-2} f_k}{(f_{k-1} - f_{k-2})(f_{k-1} - f_k)} + x^{(k)} \frac{f_{k-1} f_{k-2}}{(f_k - f_{k-1})(f_k - f_{k-2})}. \tag{17}$$

Метод обратной квадратической интерполяции. Замечания

1. Если два значения функции случайно совпали, то продолжение итераций невозможно.
2. Используется в качестве составной части метода Брента: комбинация метода половинного деления, метода секущих и метода обратной квадратичной интерполяции (функция fzero в MATLAB).

Понятие скорости сходимости итерационного процесса

Скорость сходимости - одна из важнейших характеристик итерационных методов.

Определение

Последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится к x^* по меньшей мере с p-м порядком, если $\exists C > 0, p \geq 1$

$$|x^* - x^{(k+1)}| \leq C|x^* - x^{(k)}|^p \tag{18}$$

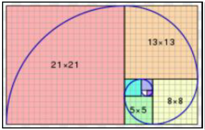
при всех $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого $k = k_0$.

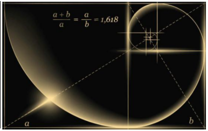
$p = 1$ - линейная сходимость, или сходимость со скоростью геометрической прогрессии.

$p > 1$ - сверхлинейная сходимость.

Скорость сходимости итерационных процессов

1. Метод Ньютона: $p = 2$. Квадратично сходящийся процесс, или метод второго порядка. Следует из неравенства (7).
2. Модифицированный метод Ньютона: $p = 1$. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии.
3. Метод хорд: $p = 1$. Сходимость со скоростью геометрической прогрессии.
4. Метод секущих: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Сверхлинейная сходимость.

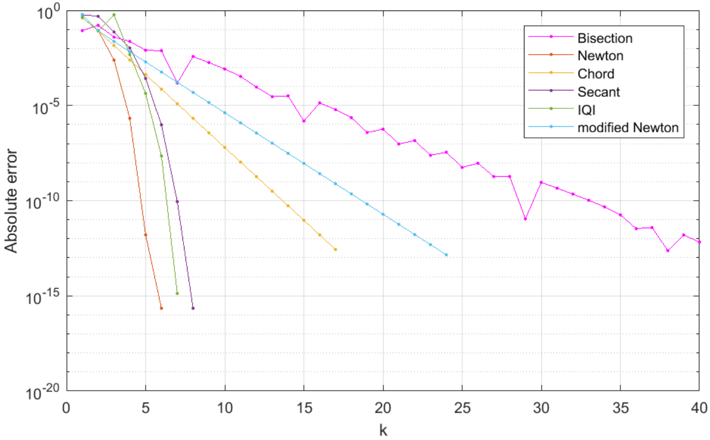




5. Метод обратной квадратичной интерполяции: $p \approx 1.84$.

Пример

Требуется вычислить $\sqrt{2}$.
Будем решать уравнение $x^2 - 2 = 0$ на отрезке $[1, 2]$, зададим $\epsilon = 10^{-12}$.



Содержание

Метод простых итераций (fixed-point iterations)

Пусть имеется уравнение

$$f(x) = 0, \tag{19}$$

где $x \in [a, b], f \in C([a, b])$ и $f(a)f(b) < 0$.
Предположим, что уравнение (19) можно записать в виде

$$x = \phi(x). \tag{20}$$

Будем предполагать, что $\phi \in C([a, b])$.
Построим последовательность $\{x^{(k)}\}$ по рекуррентной формуле

$$x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}). \tag{21}$$

Если последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится к x^*, то x^* - это корень уравнения (19).

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

Pick $x_1 = 2$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{1.5} = 1.6666$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{1.6666} = 1.6$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{1.6} = 1.625$$

$$x_6 = 1 + \frac{1}{1.625} = 1.612538462$$

Converging to 1.618 ...

$$x^2 - x = 1$$

$$x(x-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{x-1}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - 1}$$

Pick $x_1 = 1.6$

$$x_2 = \frac{1}{1.6 - 1} = 1.6666$$

$$x_3 = \frac{1}{1.6666 - 1} = 1.5$$

$$x_4 = \frac{1}{1.5 - 1} = 2$$

$$x_5 = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

Not converging

1. Как привести уравнение (19) к виду (20)?
2. Когда последовательность (21) сходится?
3. Как сформулировать условие окончания вычислений?

Теорема 1 (о сходимости метода простых итераций)

Пусть $\phi \in C^{(1)}([a, b])$ и

1. $\phi(x) \in [a, b]$ для $\forall x \in [a, b]$
2. $\exists q : |\phi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$

Тогда

1. Уравнение (20) имеет единственный корень x^* на $[a, b]$
2. Корень x^* является пределом последовательности (21), начинающейся с любого $x^{(0)} \in [a, b]$
3. Справедлива оценка

$$|x^* - x^{(k)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k)} - x^{(k-1)}|. \tag{22}$$

Метод простых итераций

Условие $\phi(x) \in [a, b]$ для $\forall x \in [a, b]$ проверять сложно. На практике используется другая теорема.

Теорема 2 (о сходимости метода простых итераций)

Пусть $\phi \in C^{(1)}([a, b])$ и

1. $\exists q : |\phi'(x)| \leq q < 1$ для $\forall x \in [a, b]$
2. корень $x^* \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$, где $\alpha = a + \frac{b-a}{3}$, $\beta = b - \frac{b-a}{3}$

Тогда $\forall x^{(0)} \in [\alpha, \beta]$

1. Корень x^* является пределом последовательности (21)
2. Справедлива оценка (22).

Метод простых итераций

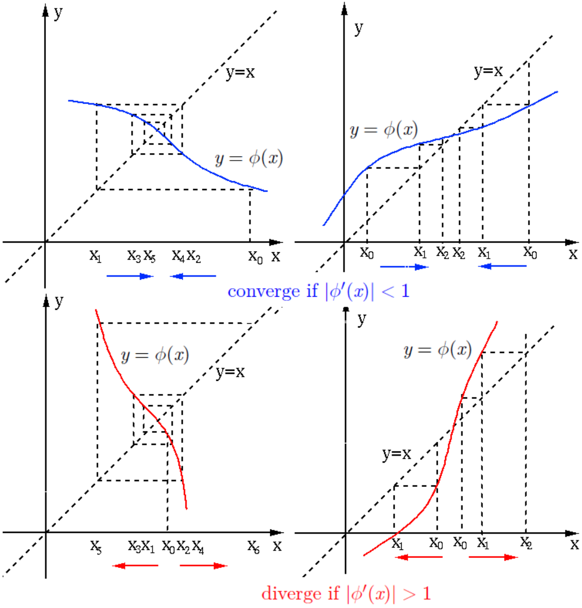
Доказательство.

Пусть $\bar{S}(x^*, \delta) := [x^* - \delta, x^* + \delta]$, где $\delta = \frac{b-a}{3}$.
$\bar{S}(x^*, \delta) \subset [a, b]$. Покажем, что ϕ отображает $\bar{S}$ на себя.
Пусть $x' \in \bar{S}$ и $x'' = \phi(x')$. Тогда
$|x'' - x^*| = |\phi(x') - \phi(x^*)| = |\phi'(\eta)||x' - x^*| \leq q\delta \leq \delta \Rightarrow x'' \in \bar{S}$.
Условия теоремы 1 выполнены $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.
$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \phi(x^{(k)}) - \phi(x^*) + \phi(x^*) - x^{(k)} =$
$\phi'(\eta)(x^{(k)} - x^*) - (x^{(k)} - x^*) = (\phi'(\eta) - 1)(x^{(k)} - x^*)$
$|x^{(k)} - x^*| = \frac{1}{|\phi'(\eta)-1|}|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \frac{1}{1-q}|\phi(x^{(k)}) - \phi(x^{(k-1)})| \leq$
$\frac{q}{1-q}|x^{(k)} - x^{(k-1)}|$ $\square$

Замечение (об окончании итерационного процесса)

$$\frac{q}{1-q}|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \epsilon \Leftrightarrow |x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \frac{1-q}{q}\epsilon. \qquad (23)$$

Геометрическая интерпретация метода



Приведение уравнения к виду, удобному для итераций

Два подхода:

1. Частный подход.

$$x^3 - 2x^2 + 5 = 0 \to x = \frac{1}{2x}(x^3 + 5).$$

2. Общий подход.
   Пусть f' непрерывна и знакопостоянна на $[a, b]$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x - \alpha f(x), \alpha \neq 0$, т.е. $\phi(x) = x - \alpha f(x)$.
   $|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha f'(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha f'(x) < 2$
   $\Rightarrow sign(\alpha) = sign(f'(x))$ и $|\alpha| < \frac{2}{M_1}$, где $M_1 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha f(x^{(k-1)}). \qquad (24)$$

Если α не зависит от k, то процесс называется стационарным, иначе - нестационарным.

Связь метода простых итераций с другими методами

1. Метод Ньютона (5), нестационарный процесс

$$\alpha_k f'(x^{(k)}) = 1 \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{1}{f'(x^{(k)})}. \qquad (25)$$

2. Модифицированный метод Ньютона (10), стационарный процесс

$$\alpha = \frac{1}{f'(x^{(0)})}. \qquad (26)$$

Содержание

Метод Вегстейна (Wegstein's method)

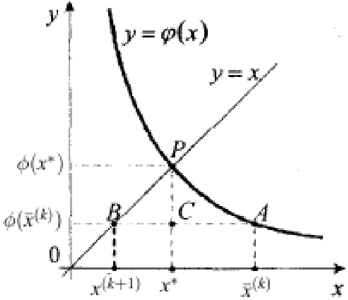
Пусть $\bar{x}^{(k)}$ - k-е приближение по методу Вегстейна,
$x^{(k+1)} = \phi(\bar{x}^{(k)})$ - приближение по методу простых итераций.

$$PC = BC \Rightarrow \phi(x^*) - \phi(\bar{x}^{(k)}) = \phi'(\theta_k)(x^* - \bar{x}^{(k)}) = x^* - x^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow x^* = x^{(k+1)} - \frac{x^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}}{1 - \frac{1}{\phi'(\theta_k)}}$$

$$\phi'(\theta_k) \approx \frac{\phi(\bar{x}^{(k)}) - \phi(\bar{x}^{(k-1)})}{\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}} = \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}}$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \frac{(x^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)})}{(x^{(k+1)} - x^{(k)}) - (\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)})} = \frac{x^{(k+1)}\bar{x}^{(k-1)} - x^{(k)}\bar{x}^{(k)}}{x^{(k+1)} + \bar{x}^{(k-1)} - x^{(k)} - \bar{x}^{(k)}}$$



Подход Эйткена к ускорению итерационного процесса (Aitken's acceleration)

Рассмотрим последовательность, которая обладает линейной скоростью сходимости

$$\alpha_k = \alpha_0 + \beta^k \gamma, |\beta| < 1. \tag{27}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha_0$.
Предел α_0 можно вычислить, зная 3 последовательных элемента

$$\beta^k = \frac{\alpha_k - \alpha_0}{\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha_k - \alpha_0}{\alpha_{k-1} - \alpha_0} = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_0}{\alpha_k - \alpha_0} \tag{28}$$

Тогда

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_k^2 - \alpha_{k+1}\alpha_{k-1}}{2\alpha_k - \alpha_{k+1} - \alpha_{k-1}} \tag{29}$$

Подход Эйткена к ускорению итерационного процесса

Вернемся к итерационному процессу, для которого справедливо

$$x^{(k)} = x^* + \epsilon^{(k)}, \epsilon^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{30}$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)\epsilon^{(k-1)} + \frac{\phi''(x^*)}{2}(\epsilon^{(k-1)})^2 + \dots \tag{31}$$

Отбросим нелинейность в (31), учтем (30) и $x^* = \phi(x^*)$

$$\epsilon^{(k)} \approx \phi'(x^*)\epsilon^{(k-1)} \approx (\phi'(x^*))^2\epsilon^{(k-2)} \approx \dots \approx (\phi'(x^*))^k\epsilon^{(0)} \tag{32}$$

Равенство (30) с учетом (32)

$$x^{(k)} \approx x^* + (\phi'(x^*))^k\epsilon^{(0)}, \tag{33}$$

причем $|(\phi'(x^*))| \le q < 1$.

Подход Эйткена к ускорению итерационного процесса

Применим (29) к элементам последовательности $\{x^{(k)}\}$

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k+1)}x^{(k-1)}}{2x^{(k)} - x^{(k+1)} - x^{(k-1)}} \qquad (34)$$

Алгоритм

$x^{(0)}, x^{(1)} = \phi(x^{(0)}), x^{(2)} = \phi(x^{(1)})$

Пока (1)

  Вычислить $\tilde{x}^{(2)}$ по формуле (34)

  $x^{(3)} = \phi(\tilde{x}^{(2)})$

  Если $|x^{(3)} - \tilde{x}^{(2)}| > \frac{1-q}{q}\epsilon$

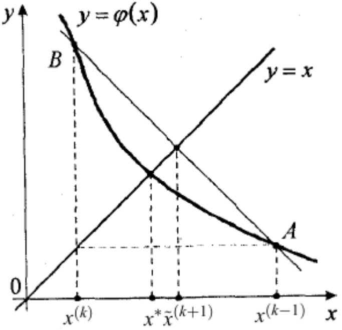
    $x^{(0)} = \tilde{x}^{(2)}, x^{(1)} = x^{(3)}$

    $x^{(2)} = \phi(x^{(1)})$

  Иначе

    Закончить вычисления

Геометрическая интерпретация метода



Как построить метод с порядком сходимости p?

Если существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$ отличный от 0, то согласно (18) метод имеет порядок сходимости p.

Для метода простых итераций:

$$x^* + \epsilon^{(k)} = \phi(x^* + \epsilon^{(k-1)}) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)\epsilon^{(k-1)} + o(\epsilon^{(k-1)}).$$

Будем считать, что $\phi'(x^*) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \phi'(x^*) \neq 0 \Rightarrow p = 1.$$

Общий подход, $p = 2$

Построим итерационный процесс с показателем скорости сходимости $p = 2$.

$$\epsilon^{(k)} = \phi'(x^*)\epsilon^{(k-1)} + \frac{1}{2}\phi''(x^*)(\epsilon^{(k-1)})^2 + o((\epsilon^{(k-1)})^2).$$

Преобразуем исходное уравнение:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \underbrace{x + \alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)(f(x))^2}_{\phi(x)},$$

где $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ - некоторые функции.
Чтобы $\phi'(x^*) = 0$ достаточно потребовать:

$$\alpha_1(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Тогда $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Получили метод Ньютона.

Общий подход, $p = 3$

Построим итерационный процесс с показателем скорости сходимости $p = 3$.

$$\epsilon^{(k)} = \phi'(x^*)\epsilon^{(k-1)} + \frac{1}{2}\phi''(x^*)(\epsilon^{(k-1)})^2 + \frac{1}{6}\phi^{(3)}(x^*)(\epsilon^{(k-1)})^3 + o((\epsilon^{(k-1)})^3)$$

Чтобы $\phi'(x^*) = 0$ достаточно потребовать $\alpha_1(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.
Чтобы $\phi''(x^*) = 0$ достаточно потребовать $\alpha_2(x) = -\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}$.
Тогда

$$\phi(x) = x - \frac{1}{f'(x)}f(x) - \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}(f(x))^2$$

Упражнение

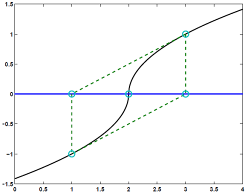
Вывести выражение для $\alpha_2(x)$.

Заключение

1. На практике можно использовать универсальный критерий остановки
$$f(x^{(k)} - \epsilon)f(x^{(k)} + \epsilon) < 0. \tag{35}$$
2. Условия сходимости быстро сходящихся методов (метод Ньютона, его модификаций и др.) не всегда удается обеспечить $\Rightarrow$ гибридный подход:
   - начать с надежным медленно сходящимся методом (например, метод половинного деления), подключить быстро сходящийся метод на финише.
   - начать с быстро сходящимся методом, корректировать значения медленным надежным методом. Например, алгоритм ZEROIN и функция fzero в MATLAB.

Упражнения

1. Путем численного эксперимента показать, что скорость сходимости метода Ньютона падает до линейной в случае кратного корня.
2. Придумать функцию f и отрезок $[a, b]$, для которых метод Ньютона зацикливается.



3. Изучить алгоритм работы fzero. Придумать примеры, когда при указании начального приближения (не отрезка) в fzero корень не находится.