Лабораторная работа 6
Решение алгебраической проблемы собственных значений итерационными матодами

1. Создать полностью заполненную матрицу (размерность не менее 10) с заданным спектром
2. (**+2балла**) Запрограммировать метод для вычисления собственных чисел матрицы (по вариантам)
   а. Итерационный метод Якоби
      1. Ключевой элемент не выбирается специальным образом
      2. Ключевой элемент – максимальный
      3. Ключевой элемент – оптимальный
   б. Степенной метод
      1. для поиска максимального с.ч.
      2. со сдвигом для поиска минимального с.ч.
      3. с оптимальным сдвигом для поиска максимального с.ч.
      4. для поиска двух максимальных с.ч. разных по знаку
   в. Метод скалярных произведений
      1. – 4. См. вариант б
   г. Метод обратных итераций для поиска минимального с.ч.

Замечание 1. Создать две модификации алгоритма: без нормировки и с нормировкой (кроме вариантов а)

3. Найти с.ч. и с.в. запрограммированным методом, вычислить
   а. фактическую ошибку для с.ч. $||\lambda - \lambda^*||$
   б. фактическую ошибку для с.в. $||X - X^*||$
   в. Норму невязки $||Ax - \lambda X||$
   г. Число итераций для достижения заданной точности
4. (**+2балла**) При проведении контрольных тестов построить зависимости от заданной точности
   а. фактической ошибки $||\lambda - \lambda^*||$ для метода с нормировкой и без
   б. невязки $||Ax - \lambda x||$
   в. число итераций
5. (**+1бонус**) Исследование метода
   а. При хорошей и плохой отделимости с.ч. с изменением точности
   б. Применить метод для поиска 2ого с.ч.
   в. При различной отделимости с.ч. для фиксированной точности
   г. Влияние начального приближения
   д. Применить обратные итерации со сдвигом для уточнения с.ч. и с.в.

<u>Указания к 6 работе</u>

Создание матрицы с заданным спектром

Для построения матрицы с заданными собственными числами подходят все три ранее известных способа, основанных на свойстве подобного преобразования, т.к. оно не меняет спектр матрицы

	$D=\mathrm{diag}(d_i)$; $\lambda(A)=\lambda(D)$; $\det(A)=\det(D)$		
		$A=$	св-ва
1	B: $\det(B)\neq 0$	$B^{-1}DB$	$A\neq A^T$
2	Q: $Q^{-1}=Q^T$	$Q^{-1}DQ$	$A=A^T$
3	U: $\mathrm{diag}(U)=D$ $U_{ij}=0, i>j$	$Q^{-1}UQ$	$A\neq A^T$

<u>1 способ</u>. При помощи невырожденной матрицы B. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=B^{-1}DB$ будут те же самые с.ч. Матрица A в общем случае будет **не симметричной**. Положительная определенность зависит от знаков элементов диагональной матрицы D

<u>2 способ</u>. При помощи **ортогональной матрицы** Q. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TDQ$ будут те же самые с.ч. Особенность матрицы A в том, что она будет **симметричной**.

<u>3 способ</u>. Создание **несимметричной** матрицы при помощи **ортогональной** матрицы Q. Если есть треугольная (верхняя или нижняя) матрица B (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TBQ$ будут те же самые с.ч. и матрица при этом получится несимметричной

Создание ортогональной матрицы

Ортогональная матрица Q создается или ортогональным разложением любой невырожденной матрицы (в MatLab `[Q, r]=qr(rand(n))`) или на основе произвольного вектор-столбца w преобразованием Хаусхолдера $Q=E-2ww^T/||w||^2$

Отделимость собственных чисел

Многие методы поиска требуют единичную кратность с.ч. в спектре матрицы. Поэтому важным становится приближение двух или более с.ч. к одному значению – так называемая **отделимость** с.ч.

Краткий обзор методов

Постановка задачи. Дана квадратная матрица A. Нужно найти все или часть ее собственных чисел (с.ч.) и соответствующие им собственные вектора (с.в.), т.е. такие числа λ и вектор-столбцы x, что $Ax=\lambda x$ (определяющее соотношение). Найти с точностью $\mathcal{E}$, значит для вычисленных чисел λ (векторов x) и точных λ^* (x^*) должно выполняться неравенство $|\lambda-\lambda^*|<\mathcal{E}$ ($||x-x^*||<\mathcal{E}$)

метод Якоби (итерационный метод вращения)

Применяется для симметричных матриц потому, что они имеют ортогональный базис из с.в. Основан на свойстве подобных преобразований сохранять спектр матрицы. Подобные преобразования осуществляются с помощью матриц вращения, что на каждом шаге позволяет пересчитывать только две строки. В качестве условия останова можно использовать как неравенство $\sum_{i>j} a_{i,j}^2 < \mathcal{E}$, так и $\max(a_{i,j}^2, j = 1,..,n, i > j) < \mathcal{E}$, что показывает квадратичную сходимость метода. С.в. можно вычислить как произведение всех матриц вращения

Ключевой элемент – максимальный по модулю из поддиагональных элементов

Ключевой элемент выбирается оптимальным способом (в некотором смысле). Ключевой элемент стоит в строке с максимальной второй нормой и является максимальным в своей строке (по модулю)

Степенной метод

Применяется для матриц имеющих простую структуру. Основан на определяющем соотношении $Ax=\lambda x$. Для исключения аварийных ситуаций необходима нормировка вектора. Одновременно происходит поиск с.ч. и с.в. Можно рассматривать отношения не произвольных компонент векторов, а, например, максимальных, что соответствует бесконечной норме. Тогда в неравенстве для достижения заданной точности можно взять разность с.ч. на двух итерациях.

Сдвиг для поиска минимального с.ч.

Если матрицу A сдвинуть на число μ большее, чем максимальное с.ч. (например, любая из $||A||$), то с помощью алгоритма найдется максимальное с.ч. λ (<0) новой матрицы. Тогда число $\lambda+\mu$ будет минимальным с.ч. матрицы A.

Оптимальный сдвиг для улучшения сходимости

Если матрицу A сдвинуть на число $\mu=0.5(\lambda_2+\lambda_n)$, то отношение второго с.ч. к первому с.ч. определяющее скорость сходимости метода будет наименьшим.

2е максимальное с.ч. и соответствующий с.в.

Если максимальное с.ч. или его приближение уже найдены, то просто найти приближение для второго с.ч. λ_2 и его с.в. y

$$\lambda_2 = \frac{x_i^{(k+1)} - \lambda_1 x_i^{(k)}}{x_i^{(k)} - \lambda_1 x_i^{(k-1)}},\ y^{(k+1)} = x^{(k+1)} - \lambda_1 x^{(k)}$$

Два максимальных с.ч. разные по знаку

Если матрица имеет два максимальных с.ч. разных по знаку, то на каждой следующей итерации будут получаться числа другого знака. Чтобы исключить чередование знака вместо отношения компонент на каждой итерации, рассматриваются отношения на каждой четной или нечетной итерации

Метод скалярных произведений

Для симметричных положительно определенных матриц для ускорения сходимости степенного метода вместо отношения компонент векторов, можно рассматривать отношение соответствующих скалярных произведений

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{(x^{(k+1)}, x^{(k)})}{(x^{(k)}, x^{(k)})}$$

Если при этом нормировку вектора производить по второй норме, то в знаменателе появится единица, что значительно упростит вычисления. Метод с небольшими изменениями переносится на случай несимметричных матриц

Метод обратных итераций для поиска минимального с.ч.

С.ч. обратной матрицы обратны к с.ч. исходной матрицы. Соответственно, если найдем максимальное с.ч. обратной матрицы, то обратное к нему – это минимальное исходной матрицы. Обратная матрица **никогда** не ищется, а на каждой итерации решается СЛАУ (любым известным методом, лучше одним из разложений). Здесь также необходима нормировка

$x^{(k+1)}=A^{-1}x^{(k)}$ переходит в $Ax^{(k+1)}=x^{(k)}$

сдвиг для уточнения с.ч. и для поиска с.в. Если в качестве сдвига взять приближение к с.ч. и строить последовательность с помощью обратных итераций, то можно найти с.в. и уточнить данное с.ч.