Лабораторная работа 2.1
Приближение табличных функций

1. Даны функция (по вариантам).
2. (**+1балл**) Выбрать интервал непрерывности. Запрограммировать функцию, которая по заданным границам отрезка, количеству точек и функции получает сетку и сеточную функцию

[x_h, y_h] = nodes(a,b,n,f)

Предусмотреть выбор между равномерной и Чебышевской сетками

3. (**+1балл**) Запрограммировать вычисление значений полинома для приближения функции (по вариантам)
   а. Полином Лагранжа
   б. Метод Ньютона слева-направо (вперед)
   в. Метод Ньютона слева-направо (вперед)
   г. Полином Эрмита по формуле
   д. Полином Эрмита через разделенные разности

Замечание 1. Для полинома Ньютона отдельно вычислить разделенные разности

4. (**+1балл**) При проведении контрольных тестов построить
   а. для небольшого числа узлов (2..8) и отметить узлы
      – Графики функции и полинома на отрезке.
      – Зависимость фактической ошибки (разности функции и полинома) на отрезке.
   б. Зависимость максимальной ошибки от числа узлов.

Замечание 2. Ошибку на отрезке строить без логарифмического масштаба

Замечание 3. Для п.б ошибка для максимального числа узлов должна быть того же порядка, что и для минимального

5. В тестовом примере получить полином в каноническом виде (по степеням **x**) для небольшого числа узлов, вычислить ошибку в узлах и серединах между узлами
6. (**+1бонус**) Исследовать
   а. ошибку в фиксированной точке, дополнив график п.4б
   б. чебышевскую и равномерную сетки на примере построенных графиков
   в. теоретическую ошибку, дополнив второй график п.4а
   г. негладкую функцию на примере построенных графиков
   д. полином на примере построенных графиков

Варианты функции

1. $f(x) = x - \sin x - 0.25;$
2. $f(x) = x^3 - e^x + 1;$
3. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x;$
4. $f(x) = x^2 + 1 - \arccos x;$
5. $f(x) = \lg x + \frac{7}{2x+6};$
6. $f(x) = \operatorname{tg}(0.5x + 0.2) - x^2;$
7. $f(x) = 3x - \cos x - 1;$
8. $f(x) = x + \lg x + 0.5;$
9. $f(x) = x^2 - \arcsin(x - 0.2);$
10. $f(x) = x^2 + 4\sin x - 2;$
11. $f(x) = \operatorname{ctg} x + x^2;$
12. $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x + 0.1;$
13. $f(x) = x\ln(x+1);$
14. $f(x) = x^2 - \sin 10x;$
15. $f(x) = \operatorname{ctg} x - x;$
16. $f(x) = \operatorname{tg} 3x + 0.4 - x^2;$
17. $f(x) = x^2 + 1 - \operatorname{tg} x;$
18. $f(x) = x^2 - 1 - \ln x;$
19. $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2;$
20. $f(x) = (x+3)\cos x - 1;$
21. $f(x) = x^2\cos 2x + 1;$
22. $f(x) = \cos(x + 0.3) - x^2;$
23. $f(x) = 2^x(x-1)^2 - 2;$
24. $f(x) = x\ln(x+1) - 0.5.$

Указания к работе 2.1.

1. Постановка задачи. Дан набор точек (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n). Задача алгебраической интерполяции. Найти такой полином $\boldsymbol{P(x)}$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i)=y_i,\quad i=\overline{0,n}$

Условия на точки. Чтобы полином был единственным степень его должна быть на единицу меньше количества точек (***n*+1** – число точек, ***n*** – степень) и все точки должны быть попарно различны

1.2. Постановка для построения полинома Эрмита. Дан набор точек (x_0,y_0,y_0'), (x_1,y_1,y_1'), …, (x_n,y_n,y_n'), в который дополнительно входят значения производных в узлах. Задача найти такой полином $\boldsymbol{P(x)}$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i)=y_i,\quad i=\overline{0,n}$, и имеет в узлах заданные наклоны $P'(x_i)=y_i',\quad i=\overline{0,n}$

Здесь единственный полином будет степени на единицу меньше количества условий (**2*n*+2** – условия, **2*n*+1** – степень). Попарное различие так же является необходимым

Важно! Полином единственный, а методов построения может быть несколько

2. Методы построения

2.1. Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i\neq k}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

2.2. Формула Ньютона для интерполирования вперед

$$P_n(x)=y(x_0)+(x-x_0)y(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)y(x_0,x_1,x_2)+\ldots$$

$$\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})y(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{n} y(x_0,x_1,\ldots,x_i)\prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k)$$

2.3. Формула Ньютона для интерполирования назад

$$P_n(x)=y(x_n)+(x-x_n)y(x_n,x_{n-1})+(x-x_n)(x-x_{n-1})y(x_n,x_{n-1},x_{n-2})+\ldots$$

$$\ldots+(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)y(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{n} y(x_{n-i},x_{n-i+1},\ldots,x_n)\prod_{k=n-i+1}^{n}(x-x_k)$$

Разделенной разностью первого порядка называется величина $y(x_i,x_j)=\dfrac{y_j-y_i}{x_j-x_i}$.

Разделенные разности второго и третьего порядка определяются аналогично

$$y(x_i,x_j,x_k)=\frac{y(x_j,x_k)-y(x_i,x_j)}{x_k-x_i},\quad y(x_i,x_j,x_k,x_l)=\frac{y(x_j,x_k,x_l)-y(x_i,x_j,x_k)}{x_l-x_i}$$

	1пор	2пор	3пор	4пор	5пор
y_0	$y(x_0,x_1)$	$y(x_0,x_1,x_2)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$
y_1	$y(x_1,x_2)$	$y(x_1,x_2,x_3)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$	
y_2	$y(x_2,x_3)$	$y(x_2,x_3,x_4)$	$y(x_2,x_3,x_4,x_5)$		
y_3	$y(x_3,x_4)$	$y(x_3,x_4,x_5)$			
y_4	$y(x_4,x_5)$				
y_5					

Для полинома Ньютона слева-направо необходимо вычислить все разности в первой строке. Для полинома Ньютона справа-налево – все разности на диагонали. Всего для вычисления полинома нужно **(*n*+1)** разность (включая значение функции). Разности вычисляются заранее, до использования основной формулы

2.4. Полином Эрмита

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left\{(x-x_j)y'_j+\left(1-2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_j-x_k}\right)y_j\right\}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2$$

Степень полинома Эрмита почти в 2 раза выше, чем степень полиномов Лагранжа и Ньютона, если все они построены на сетках с одинаковым числом узлов

3. Сетки

Равномерная $x_i\in[a,b]\quad x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i,\quad i=\overline{0,n}$

Чебышевская $t_k\in[-1,1]\quad t_k=\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2(n+1)},\quad k=\overline{0,n}$ и $x_k\in[a,b]\quad x_k=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t_k,\quad k=\overline{0,n}$

Границы отрезка являются узлами равномерной сетки и НЕ принадлежат сетке Чебышева

5. Исследование зависимости **ошибки от количества узлов**. Ошибка зависит от значений производной исходной функции на отрезке, количества узлов и их расположения

$$\left|f(x)-P(x)\right|=\left|f^{(n+1)}(\eta)\right|\frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|}{(n+1)!}=\left|f^{(n+1)}(\eta)\right|\frac{\left|\omega_{n+1}(x)\right|}{(n+1)!}$$

На равномерных сетках при увеличении количества узлов дробь сначала уменьшается, но после некоторого количества узлов начинает увеличиваться.

На сетке Чебышева дробь с увеличением количества узлов уменьшается, поэтому поведение ошибки зависит только от значения производной

По построенному графику должно быть видно поведение ошибки:

- уменьшается до машинной точности и продолжает колебаться около эти значений
- уменьшается до определенных значений, потом с той же скоростью начинает увеличиваться, и в какой-то момент становится больше первоначальной ошибки
- уменьшается до машинной точности, колеблется около этих значений и медленно начинает расти (рост много медленней, чем убывание)

6. Сгущение сетки в некоторой области отрезка позволяет уменьшить ошибку в данном месте, а возможно и на всем отрезке. Пример сгущения узлов сетки около границ и центра

$x_i=b-\dfrac{[(n-i)h]^3}{(b-a)^2}=b-(b-a)\left(\dfrac{n-i}{n}\right)^3,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=b-a$	Сгущение у правой границы отрезка
$x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{(ih)^2}{(b-a)}=\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{b-a}{2}\left(\dfrac{i}{n}\right)^2,\quad i=\overline{0,n},\quad 2nh=b-a$	Симметричное сгущение в середине отрезка
$x_i=a+\dfrac{(ih)^2}{(b-a)}=a+(b-a)\left(\dfrac{i}{n}\right)^2,\quad i=\overline{0,n},\quad nh=b-a$	Сгущение у левой границы отрезка

7. Функция с нарушением гладкости (пример построения)

Есть функция $f(x)$. Хотим сделать у нее «угол» в точке t. Смещаем функцию, чтобы в точке t ее значение было 0, отражаем от горизонтали при помощи операции модуль и снова возвращаем на прежнее место

$$g(x)=\left|f(x)-f(t)\right|+f(t) \text{ или } g(x)=f(t)-\left|f(t)-f(x)\right|$$