Лабораторная работа 4
Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами

1. Создать СЛАУ (размерность не менее 10) с матрицей с заданным определителем и необходимыми свойствами (см. Указания)

Замечание 1. Матрица должна иметь специальные свойства (симметрия, положительная определенность и т.д.) только тогда, когда этого требует метод

2. (**+1балла**) Привести СЛАУ к виду удобному для итераций (по варианту для методов а и б), вычислить числовой коэффициент в условии выхода

$$B_k \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha_k} + Ax^{(k)} = b$$

   1. $\alpha_k = \|D_A\|^{-1}, \quad B_k = E$
   2. $\alpha_k = \|A\|^{-1}, \quad B_k = E$
   3. С оптимальным параметром ($\alpha_k = 2(\lambda_1 + \lambda_n)^{-1}, \quad B_k = E$)
   4. Якоби ($\alpha_k = 1, \quad B_k = D_A$)

3. (**+2балла**) Запрограммировать один из методов решения СЛАУ (по вариантам)
   - а. Метод простых итераций
   - б. Метод Зейделя
   - в. Метод релаксации
   - г. Градиентный метод
   - д. Метод Ричардсона (m>1)
   - е. Метод сопряженных градиентов

4. Найти решение СЛАУ запрограммированным методом, вычислить
   - а. Норму фактической ошибки $||x - x^*||$
   - б. Норму невязки $||Ax - b||$
   - в. Число итераций для достижения заданной точности

5. (**+2балла**) При проведении контрольных тестов построить зависимости
   - а. нормы фактической ошибки решения СЛАУ и нормы невязки от заданной точности
   - б. числа итераций от определителя матрицы при фиксированной точности

6. (**+1бонус**) Исследование метода
   - а. Нарушение условий применимости метода
   - б. Роль начального приближения
   - в. Влияние выбора нормы на результаты
   - г. Зависимость сходимости от параметра релаксации
   - д. Зависимость сходимости от параметра α
   - е. Проверка метода на матрице Гильберта

Указания о построении СЛАУ

Снова воспользуемся тем, что определитель диагональной матрицы D вычисляется просто $\det(D)=\Pi d_i$ (d_i так же являются собственными числами матрицы D).

Определенность матрицы A такая же как и определенность матрицы D, которая в свою очередь зависит от знаков d_i. Т.е. для положительной определенности матрицы необходимо, чтобы все d_i были положительны.

Для построения как симметричной, так и несимметричной матрицы подходят все три ранее известных способа, основанных на свойстве подобного преобразования.

	$D=\mathrm{diag}(d_i);\ \lambda(A)=\lambda(D);\ \det(A)=\det(D)$		
		$A=$	св-ва
1	B: $\det(B)\neq 0$	$B^{-1}DB$	$A\neq A^T$
2	Q: $Q^{-1}=Q^T$	$Q^{-1}DQ$	$A=A^T$
3	U: $\mathrm{diag}(U)=D$ $U_{ij}=0, i>j$	$Q^{-1}UQ$	$A\neq A^T$

1 способ. При помощи невырожденной матрицы B. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=B^{-1}DB$ будут те же самые с.ч. Матрица A в общем случае будет **не симметричной**. Положительная определенность зависит от знаков элементов диагональной матрицы D

2 способ. При помощи **ортогональной матрицы** Q. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TDQ$ будут те же самые с.ч. Особенность матрицы A в том, что она будет **симметричной**.

3 способ. Создание **несимметричной** матрицы при помощи **ортогональной** матрицы Q. Если есть треугольная (верхняя или нижняя) матрица B (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TBQ$ будут те же самые с.ч. и матрица при этом получится несимметричной

Создание ортогональной матрицы

Ортогональная матрица Q создается или ортогональным разложением любой невырожденной матрицы (в MatLab `[Q, r]=qr(rand(n))`) или на основе произвольного вектора w преобразованием Хаусхолдера $Q=E-2ww^T/||w||^2$

Создание матрицы с диагональным преобладанием

Чтобы получить диагональное преобладание вышеописанными способами построения, можно задать элементы диагональной матрицы в диапазоне одного порядка, но на 2 порядка больше, чем элементы вспомогательной матрицы (B или Q). Например, `d=diag(linspace(50,131,n))`, если элементы B или Q в пределах 1.

Изменение определителя матрицы

Нельзя пользоваться свойством определителя $\det(\alpha A)=\alpha\det(A)$, т.к. во всех алгоритмах в том или ином виде присутствует деление одних элементов матрицы на другие элементы, множитель сократится, и зависимости от определителя не получится.

Если уменьшать только один элемент матрицы, то с уменьшением определителя во столько же раз возрастет число обусловленности и неизвестно, что повлияет на метод сильнее.

Таким образом, получается, что для изменения определителя нужно за один раз изменять только один из диагональных элементов. И делать это можно только n-1 раз, после этого придем к изначальной матрице, умноженной на число.

Создание СЛАУ по известной матрице

Задать точное решение x^*

Вычислить правую часть СЛАУ $b=Ax^*$