Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Прямые методы

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

22 сентября 2023 г.

Линейная алгебра

Видео-курс по линейной алгебре by Prof. Gilbert Strang (MIT)
https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/

Вычислительная линейная алгебра:

1. решение систем линейных алгебраических уравнений
2. определение собственных значений и собственных векторов

”75% всех расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений.”

Методы решения СЛАУ:

1. прямые (точные) - ”точные” значения неизвестных за конечное число арифметических операций
2. итерационные - строится последовательность векторов, сходящаяся к решению.

Содержание

Постановка задачи

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, ..., n, \qquad (1)$$

где x_j - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты системы и b_i компоненты вектора правой части.
В матричной форме

$$Ax = b, \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица коэффициентов, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ - вектор правой части и $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ - вектор неизвестных.

Требуется найти x.

Корректность задачи

Если матрица A - неособенная, т.е. $det(A) \neq 0$, то система (2) имеет решение, причем единственное.

$det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.
Домножим (2) слева и справа на A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b, \tag{3}$$

или

$$x = A^{-1}b. \tag{4}$$

Понятие приближенного решения

Пусть x^* - точное решение системы (2), $\tilde{x}$ - решение, полученное с помощью численного метода.

Как оценить погрешность, если решение - это вектор?

Определение

Пусть x^* - точное решение системы (2). Тогда $\tilde{x}$ называется приближенным решением с точностью ϵ, если

$$\|x^* - \tilde{x}\| < \epsilon, \tag{5}$$

где $\|\cdot\|$ - некоторая векторная норма.

$\|x^* - \tilde{x}\|$ - абсолютная погрешность,
$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|}$ - относительная погрешность.

Норма вектора

В $\mathbb{R}^n$ задана норма, если каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ сопоставлено вещественное число $\|x\|$, называемое нормой вектора x и обладающее следующими свойствами:

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Норма вектора

Определение

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}$, причем $p \geq 1$. Тогда p-я норма вектора x есть

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

Частные случаи:

- Манхэттеновская норма, $p = 1$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Евклидова норма, $p = 2$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$
- бесконечная норма, $p = \infty$: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Норма вектора

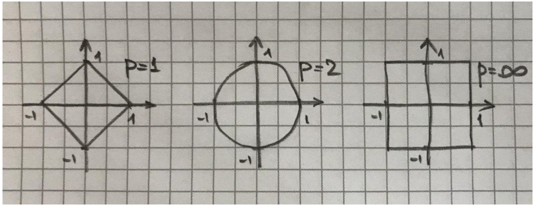
Пример

$x = (3, 4)^\intercal$

$\|x\|_1 = 7$, $\|x\|_2 = 5$, $\|x\|_\infty = 4$

Пример

$\|x\|_p = 1, p = 1, 2, \infty$



MATLAB

norm(x), norm(x, 1), norm(x, Inf)

Содержание

СЛАУ с диагональной матрицей

Большинство прямых методов основано на приведении СЛАУ к простейшим СЛАУ (диагональная или треугольная матрица коэффициентов).

A - диагональная матрица (diagonal matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1/d_1 \\ x_2 &= b_2/d_2 \\ x_3 &= b_3/d_3 \end{aligned}$$

Если размерность системы n, то решение можно найти за n делений.

СЛАУ с треугольной матрицей

A - нижняя треугольная матрица (lower triangular matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= b_1/l_{11} \\ x_2 &= (b_2 - l_{21}x_1)/l_{22} \\ x_3 &= (b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2)/l_{33} \end{aligned}$$

Метод прямой подстановки (forward substitution method)

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right), i = 2, \dots, n. \tag{7}$$

Упражнение

Вычислительная сложность метода прямой подстановки - $O(n^2)$.

СЛАУ с треугольной матрицей

A - верхняя треугольная матрица (upper triangular matrix)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= b_3/u_{33} \\ x_2 &= (b_2 - u_{23}x_3)/u_{22} \\ x_1 &= (b_3 - l_{13}x_3 - u_{12}x_1)/u_{11} \end{aligned}$$

Метод обратной подстановки (backward substitution method)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{u_{nn}}, \\ x_i &= \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right), i = n-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Вычислительная сложность метода обратной подстановки - $O(n^2)$.

СЛАУ с трехдиагональной матрицей

A - трехдиагональная матрица

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & c_n \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

Причем $b_1 = 0$, $d_n = 0$

Уравнение под номером i содержит только 3 неизвестных x_{i-1}, x_i, x_{i+1}:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i \tag{9}$$

СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки (Thomas Algorithm)

Пусть $\exists \delta_i, \lambda_i$:

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, i = 1, \dots, n \tag{10}$$

$$x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1} \tag{11}$$

(11) $\rightarrow$ (9) : $b_i(\delta_{i-1}x_i + \lambda_{i-1}) + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i$

$$x_i = -\frac{d_i}{b_i\delta_{i-1} + c_i} x_{i+1} + \frac{r_i - b_i\lambda_{i-1}}{b_i\delta_{i-1} + c_i} \tag{12}$$

(10), (12) $\Rightarrow$ рекуррентные соотношения для δ_i and λ_i:

$$\delta_i = -\frac{d_i}{b_i\delta_{i-1} + c_i}, \lambda_i = \frac{r_i - b_i\lambda_{i-1}}{b_i\delta_{i-1} + c_i}, i = 1, \dots, n \tag{13}$$

Метод прогонки (Thomas Algorithm)

1. Прямой ход

$$i = 1 : b_1 = 0 \implies \delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}, \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}$$

$$i = 2, \ldots, n-1 : \text{формула } (13)$$

$$i = n : d_n = 0 \implies \delta_n = 0, \lambda_n = \frac{r_n - b_n \lambda_{n-1}}{b_n \delta_{n-1} + c_n}$$

2. Обратный ход

$$i = n : x_n = \lambda_n$$

$$i = n-1, \ldots, 1 : \text{формула (10) для вычисления } x_i$$

Метод прогонки требует выполнения $\mathcal{O}(n)$ арифметических операций.

Корректность и устойчивость метода прогонки

Возможные проблемы

1. Деление на 0 в формуле (13).
2. Нарастание погрешностей при вычислении x_i по формуле (10), если $|\delta_i| > 1$.

Достаточные условия

Метод прогонки будет корректным и устойчивым, если коэффициенты матрицы A удовлетворяют условиям диагонального преобладания

$$|c_i| > |b_i| + |d_i| \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Содержание

Элементарные операции над строками

$Ax = b$, $(A|b)$ - расширенная матрица (augmented matrix).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

1. Перестановка строк

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2. Домножение на ненулевое число

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 := 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

3. Сложение строк

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 := R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Подматрицы и миноры

Определение

Пусть A - матрица размерности $n \times n$. Матрица $A_k = A(1:k, 1:k)$ называется ведущей главной подматрицей порядка k.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Определение

Ведущий k-й угловой минор A - это определитель ведущей главной подматрицы A_k

$$d_k = \det A_k.$$

Метод Гаусса (the Gaussian Elimination Method)

$$(A|b) \xrightarrow{\text{прямой ход}} (U|\tilde{b}) \xrightarrow{\text{обратный ход}} x^*$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Прямой ход (forward elimination):

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}}_{A} \,\middle|\, \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{2} R_1} \\ \xrightarrow{R_3 - \frac{2}{2} R_1} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - \frac{-3}{3} R_2} \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}}_{U} \,\middle|\, \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right)$$

2. Обратный ход (backward substitution): $\begin{cases} 3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$

Метод Гаусса

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$, $Ax = b$. Пусть $A^{(1)} := A$, $b^{(1)} := b$, $A^{(1)}x = b^{(1)}$.

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{matrix}}_{A^{(1)}} & \begin{matrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{matrix} \end{array}\right) \quad \begin{aligned} & a_{11}^{(1)} \neq 0, m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, \dots, n \\ & a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \\ & b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, i,j = 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{matrix}}_{A^{(2)}} & \begin{matrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{matrix} \end{array}\right) \quad \begin{aligned} & a_{22}^{(2)} \neq 0, m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, i = 3, \dots, n \\ & a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)}, \\ & b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)}, i,j = 3, \dots, n \end{aligned}$$

Метод Гаусса

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \xrightarrow[a_{11}^{(1)}\neq 0]{\{m_{i1}\}_{i=2}^{n}} \left(A^{(2)}|b^{(2)}\right) \to \ldots \to \left(A^{(k)}|b^{(k)}\right) \xrightarrow[a_{kk}^{(k)}\neq 0]{\{m_{ik}\}_{i=k+1}^{n}} \left(A^{(k+1)}|b^{(k+1)}\right) \to \ldots \to$$
$$\left(A^{(n)}|b^{(n)}\right), U = A^{(n)}, \tilde{b} = b^{(n)}$$

$a_{kk}^{(k)}$ - ведущие элементы, должны быть отличными от 0.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \det A \neq 0\,, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса прерывается на втором шаге, т.к. $a_{22}^{(2)} = 0$.

Метод Гаусса

Условия применимости метода Гаусса

Если $d_k \neq 0$ for $k = 1, \dots, n-1$, то $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Вычислительная сложность

Для нахождения решения с помощью метода Гаусса требуется $O(n^3)$ арифметических операций.

Что будет, если ведущие элементы ненулевые, но близки к нулю?

Метод Гаусса. Неустойчивость

Решим СЛАУ на 5-разрядной десятичной ЭВМ методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$$

$$(5 + (2.5 \cdot 10^3)(6))x_3 = (2.5 + (2.5 \cdot 10^3)(6.001)) \tag{14}$$

$$(5 + 1.5000 \cdot 10^4)x_3 = (2.5 + 1.50025 \cdot 10^4) \tag{15}$$

$$1.5005 \cdot 10^4 x_3 = 1.5004 \cdot 10^4 \tag{16}$$

$x_3 = \frac{1.5004 \cdot 10^4}{1.5005 \cdot 10^4} = 0.99993$

$-0.001x_2 + (6)(0.99993) = 6.001 \Rightarrow x_2 = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{-1.0 \cdot 10^{-3}} = -1.5$

$10x_1 + (-7)(-1.5) = 7 \Rightarrow x_1 = -0.35$

Получили $(-0.35, -1.5, 0.99993)^T$, точное решение - $(0, -1, 1)^T$.

Причина неустойчивости метода Гаусса - возможность неограниченного роста (по модулю) элементов промежуточных матриц $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots, A^{(n)}$.

Минимизируем возрастание элементов матриц на каждом шаге

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \tag{17}$$

за счет выбора ведущего элемента $a_{kk}^{(k)}$.

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

На шаге k прямого хода:

```
выбрать ведущий элемент как максимальный по модулю в столбце $A^{(k)}(k:n,k)$,
т.е. найти $m \geq k : |a_{mk}| = \max_{i \geq k} |a_{ik}|$
если $a_{mk} \neq 0$
    поменять местами $k$-ую и $m$-ую строки расширенной матрицы $(A|b)$
иначе
    остановиться
```

Алгоритм с выбором ведущего элемента

1. позволяет сократить погрешность, вызванную ошибками округления.
2. увеличивает вычислительные затраты на $O(n^2)$ операций, что практически не влияет на общую трудоемкость.

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array}\right)$$

$$\left(6 + \left(\frac{10^{-3}}{2.5}\right)(5)\right)x_3 = \left(6.001 + \left(\frac{10^{-3}}{2.5}\right)(2.5)\right) \tag{18}$$

$$6.002x_3 = 6.002x_3 \tag{19}$$

$x_3 = 1$
$2.5x_2 + (5)(1) = 2.5 \Rightarrow x_2 = -1$
$10x_1 + (-7)(-1) = 7 \Rightarrow x_1 = 0.$

Полученное решение совпало с точным.

Обусловленность вычислительного алгоритма

Чувствительность результата работы алгоритма к малым, но неизбежным ошибкам округления - обусловленность вычислительного алгоритма.

Хорошо обусловленный алгоритм - малые относительные погрешности округления (порядка ϵ_M) приводят к малой относительной вычислительной погрешности $\delta(\tilde{x})$ результата $\tilde{x}$.

Количественная мера степени обусловленности - число обусловленности K

$$\delta(\tilde{x}) \leq K \cdot \epsilon_M. \tag{20}$$

Выбор ведущего элемента по столбцу позволяет улучшить обусловленость вычислительного алгоритма.

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице

Ведущий элемент можно искать по всей матрице - схема полного выбора:

☺ скорость роста элементов существенно замедляется по сравнению с выбором по столбцу.

☹ скорость работы алгоритма падает, т.к. поиск по всей матрице требует $O(n^3)$ операций сравнения.

Содержание

Норма матрицы

Величина

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|y\|=1} \|Ay\| \tag{21}$$

называется нормой матрицы A, подчиненной векторной норме.

Замечание

Норма матрицы - максимальный коэффициент растяжения векторов под действием матрицы.

Матричная норма (22) обладает теми же свойствами, что и векторная норма. В дополнение верно:

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \, , \forall A, x$
2. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, , \forall A, B$

Упражнение

Доказать данные неравенства.

Подчиненные нормы

- $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sqrt{\lambda_j(A^\intercal A)}$, где $\lambda_j(A^\intercal A)$ - собственное число матрицы $A^\intercal A$.

Замечание

Вычисление $\|A\|_2$ - сложная задача. Можно воспользоваться неравенством

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \,, \tag{22}$$

где $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ - норма Фробениуса.

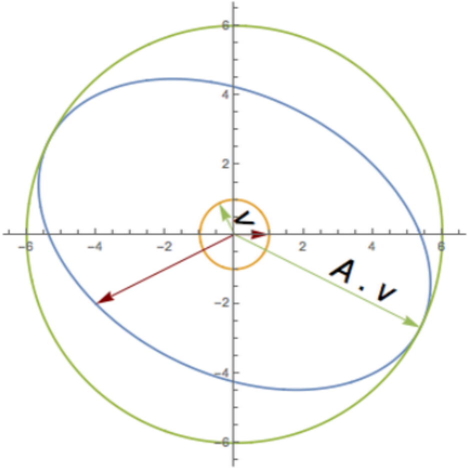
Другие неравенства можно найти в книге Quarteroni et al.

Подчиненные нормы. Пример

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max(4+2, 4+4) = 8$$
$$\|A\|_\infty = \max(4+4, 2+4) = 8$$
$$\|A\|_F = \sqrt{4^2+4^2+2^2+4^2} \approx 7.2$$
$$\|A\|_2 = 6$$

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$



Число обусловленности матрицы (the condition number of a matrix)

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11 \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101 \end{cases}$$

$\det A = 1 \cdot 1001 - 100 \cdot 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение: $x_1 = 1, x_2 = 1.$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11.01 \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101 \end{cases}$$

$x_1 = 11.01, x_2 = 0.$

Малые изменения входных данных → большие изменения в решении.

Число обусловленности матрицы

$Ax = b \to A(x + \delta x) = b + \delta b$
δb - возмущение входных данных, δx - возмущение решения.

$\|b\| \leq \|A\| \, \|x\|$, $\|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \, \|\delta b\| \Rightarrow \|b\| \, \|\delta x\| \leq \|A\| \, \|x\| \left\|A^{-1}\right\| \, \|\delta b\|$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{относительная погрешность } x} \leq \|A\| \, \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = cond(A) \underbrace{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}_{\text{относительная погрешность } b} \tag{23}$$

Определение

Число обусловленности матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| . \tag{24}$$

Пример (продолжение)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1001 & -10 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max(1 + 10, 100 + 1001) = 1101,$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max(1001 + 10, 100 + 1) = 1011$$

$$\Rightarrow cond_\infty(A) = 1101 \cdot 1011 > 10^6$$

$$\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \approx 10^{-5}$$

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 11.01$$

Число обусловленности матрицы. Свойства.

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = k_{max}$$

$\left\|A^{-1}\right\| = \max_{y\neq 0} \frac{\left\|A^{-1}y\right\|}{\|y\|} = \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \frac{1}{\min\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \frac{1}{k_{min}}$, k_{min} - минимальный коэффициент растяжения.

$\Rightarrow cond(A) = \frac{k_{max}}{k_{min}}$ - отношение максимального коэффициента растяжения векторов под действием A к минимальному коэффициенту.

1. $cond(E) = 1$
2. $cond(A) \geq 1$
   $E = AA^{-1}$
   $1 \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$
3. $cond(\alpha A) = cond(A)$
   $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Число обусловленности матрицы

Число обусловленности матрицы отражает чувствительность решения задачи $Ax = b$ к изменениям входных данных (матрица A и вектор b).

Матрица A называется *плохо обусловленной (ill-conditioned)*, если $cond(A)$ "велико" (зависит от конкретной задачи), в противном случае матрица A - *хорошо обусловленная (well-conditioned)*.

Упражнение

Пусть матрица A получила некоторое возмущение δA

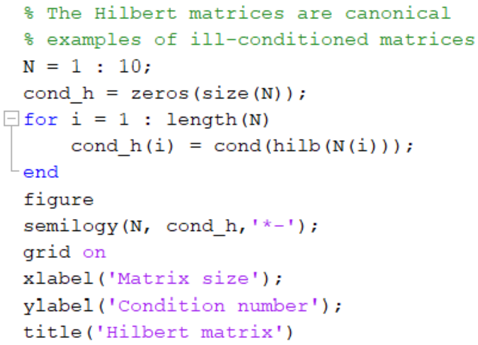
$$Ax = b \to (A + \delta A)(x + \delta x) = b.$$

Вывести оценку, подобную (23).

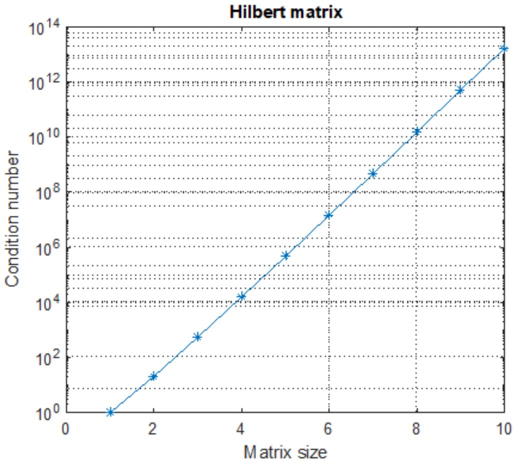
Пример плохо обусловленной матрицы

Матрица Гильберта H - квадратная матрица с элементами

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$



```
% The Hilbert matrices are canonical
% examples of ill-conditioned matrices
N = 1 : 10;
cond_h = zeros(size(N));
for i = 1 : length(N)
    cond_h(i) = cond(hilb(N(i)));
end
figure
semilogy(N, cond_h,'*-');
grid on
xlabel('Matrix size');
ylabel('Condition number');
title('Hilbert matrix')
```



Содержание

LDR-факторизация

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Ax = b$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение.

$$A = LDR \tag{25}$$

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{нижняя унитреугольная}}, D = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}}_{\text{диагональная}}, R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{верхняя унитреугольная}}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow L(D(Rx)) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Lz &= b \quad \text{//метод прямой подстановки} \\ Dy &= z \\ Rx &= y \quad \text{//метод обратной подстановки} \end{cases}$$

LDR-факторизация

Теорема

Пусть все угловые миноры матрицы A отличны от 0. Тогда $\exists!\, L, D, R$, такие что

$$A = LDR,$$

где D - диагональная матрица, L и R - нижняя и верхняя унитреугольные матрицы.

Методы, основанные на LDR разложении

1. LDR разложение
2. LU разложение, причем $U = DR$, $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$

   $$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly & = b \\ Ux & = y \end{cases}$$
3. $LDL^\top$ разложение. Пусть A - симметричная матрица. Тогда $A = LDL^\top$.
4. Схема Холецкого, или метод квадратного корня (The Cholesky factorization). Пусть A - симметричная и положительно определенная матрица. Тогда $A = SS^\top$, где S - нижняя треугольная матрица.

   $$Ax = b \Leftrightarrow S(S^\top x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} Sy & = b \\ S^\top x & = y \end{cases}$$

LDR-факторизация

$$A = LDR \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}d_k r_{kj} \tag{26}$$

Шаг 1. $a_{11} = \sum_{k=1}^{n} l_{1k}d_k r_{k1} = l_{11}d_1r_{11} \Rightarrow d_1 = a_{11}$

$$j > 1 : a_{1j} = l_{11}d_1r_{1j} + \underbrace{l_{12}d_2r_{2j} + \dots}_{=0} = l_{11}d_1r_{1j} \Rightarrow r_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_1}$$

$$i > 1 : a_{i1} = l_{i1}d_1r_{11} + \underbrace{l_{i2}d_2r_{21} + \dots}_{=0} = l_{i1}d_1r_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_1}$$

Шаг 2. $a_{22} = \underbrace{l_{21}d_1r_{12}}_{\text{уже найдены}} + l_{22}d_2r_{22} + \underbrace{l_{23}d_3r_{32} + \dots}_{=0} \Rightarrow d_2 = a_{22} - l_{21}d_1r_{12}$

$$j > 2 : a_{2j} = l_{21}d_1r_{1j} + l_{22}d_2r_{2j} + 0 \Rightarrow r_{2j} = \frac{a_{2j} - l_{21}d_1r_{1j}}{d_2}$$

$$i > 2 : a_{i2} = l_{i1}d_1r_{12} + l_{i2}d_2r_{22} + 0 \Rightarrow l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}d_1r_{12}}{d_2}$$

…

LDR-факторизация. Шаг *m*

$$a_{mm} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{km}}_{\text{уже найдены}} + l_{mm} d_m r_{mm} + 0 \Rightarrow d_m = a_{mm} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{km} \tag{m.1}$$

$$j > m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{kj}}_{\text{уже найдены}} + l_{mm} d_m r_{mj} + 0 \Rightarrow r_{mj} = \frac{a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} d_k r_{kj}}{d_m} \tag{m.2}$$

$$i > m : a_{im} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} d_k r_{km}}_{\text{уже найдены}} + l_{im} d_m r_{mm} + 0 \Rightarrow l_{im} = \frac{a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} d_k r_{km}}{d_m} \tag{m.3}$$

Вычислительная сложность

Для нахождения *LDR* разложения требуется порядка $\frac{2n^3}{3}$ арифметических операций.

$LDL^\top$-факторизация

$A = A^\top \Rightarrow R = L^\top$.

Для нахождения коэффициентов матриц L и D используются формулы (m.1) и (m.3).

Вычислительная сложность

Этот метод более экономичный, так как учитывает симметричность матрицы. Вычислительные затраты уменьшаются примерно вдвое по сравнению с LDR-факторизацией. Для нахождения $LDL^\top$ разложения требуется порядка $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций.

LU-факторизация

Теорема о LU разложении

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Если все угловые миноры матрицы A отличны от 0, то существует единственная нижняя унитреугольная матрица L и единственная верхняя треугольная матрица U , такие что $A = LU$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Вычислительная сложность

Для нахождения LU разложения требуется порядка $\frac{2n^3}{3}$ арифметических операций.

Доказательство теоремы

База: $n = 1$. Для ведущей главной подматрицы A_1 матрица $L = 1$ и матрица $U = a_{11}$.
Индукционный переход. Пусть для A_{k-1} существует единственное LU-разложение

$$A_{k-1} = L_{k-1}U_{k-1}. \tag{27}$$

Докажем, что для A_k тоже существует LU разложение и оно единственно.

$$A_k = \left[\begin{array}{c:c} A_{k-1} & f_{k-1} \\ \hdashline g_{k-1}^\top & a_{kk} \end{array}\right], L_k = \left[\begin{array}{c:c} L_{k-1} & \mathbf{0} \\ \hdashline x_{k-1}^\top & 1 \end{array}\right], U_k = \left[\begin{array}{c:c} U_{k-1} & y_{k-1} \\ \hdashline \mathbf{0}^\top & u_{kk} \end{array}\right], \tag{28}$$

где $f_{k-1}, g_{k-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ - известны, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_{k-1}, y_{k-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ - нужно найти.

Доказательство теоремы (продолжение)

$$A_k = \left[\begin{array}{c:c} A_{k-1} & f_{k-1} \\ \hdashline g_{k-1}^{\top} & a_{kk} \end{array}\right] = L_k U_k = \left[\begin{array}{c:c} L_{k-1} U_{k-1} & L_{k-1} y_{k-1} \\ \hdashline x_{k-1}^{\top} U_{k-1} & x_{k-1}^{\top} y_{k-1} + u_{kk} \end{array}\right]. \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{k-1} & = L_{k-1} U_{k-1} \\ f_{k-1} & = L_{k-1} y_{k-1} \\ g_{k-1}^{\top} & = x_{k-1}^{\top} U_{k-1} \\ a_{kk} & = x_{k-1}^{\top} y_{k-1} + u_{kk} \end{cases} . \tag{30}$$

$det(L_{k-1}) \neq 0 \Rightarrow \exists!\, y_{k-1},$

$det(U_{k-1}) \neq 0 \Rightarrow \exists!\, x_{k-1},$

u_{kk} находится из последнего равенста в системе (30).

LU-факторизация

$$A = LU \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \tag{31}$$

Шаг 1. $j \geq 1 : a_{1j} = l_{11} u_{1j} + \underbrace{l_{12} u_{2j} + \ldots}_{=0} \Rightarrow u_{1j} = a_{1j}$

$i > 1 : a_{i1} = l_{i1} u_{11} + \underbrace{l_{i2} u_{21} + \ldots}_{=0} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$

<...>

Шаг m. $j \geq m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}}_{\text{уже известно}} + l_{mm} u_{mj} + 0 \Rightarrow u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}$

$i > m : a_{im} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}}_{\text{уже известно}} + l_{im} u_{mm} + 0 \Rightarrow l_{im} = \frac{a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}}{u_{mm}}$

Положительно определенная матрица

Определение

Симметричная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *положительно определенной*, если $x^\top Ax > 0$ для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Пример

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ и $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^\top$.

$$x^\top Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 = (2x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

$\Rightarrow A$ - положительно определенная матрица.

Схема Холецкого, или метод квадратного корня

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - симметричная и положительно определенная матрица. Тогда существует единственная нижняя треугольная матрица S, такая что $A = SS^\top$.

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая факторизация называется разложением Холецкого.

Вычислительная сложность

Для нахождения разложения Холецкого требуется порядка $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций.

Разложение Холецкого

$$A = SS^{\top} \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{kj}^{\top} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} s_{jk} \tag{32}$$

Шаг 1. $a_{11} = s_{11}^2 + \underbrace{s_{12}^2 + \ldots}_{=0} \Rightarrow s_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$$j > 1 : a_{1j} = s_{11} s_{j1} + \underbrace{s_{12} s_{j2} + \ldots}_{=0} \Rightarrow s_{j1} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}$$

<...>

Шаг m. $a_{mm} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2}_{\text{уже известно}} + s_{mm}^2 + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} s_{mk}^2}_{=0} \Rightarrow s_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum_{k=1}^{m-1} s_{mk}^2}$

$$j > m : a_{mj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} s_{mk} s_{jk}}_{\text{уже известно}} + s_{mm} s_{jm} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} s_{mk} s_{jk}}_{=0} \Rightarrow s_{jm} = \frac{a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} s_{mk} s_{jk}}{s_{mm}}$$

Метод Гаусса и LU разложение

Прямой ход метода Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\displaystyle \xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_1}]{R_2 - \frac{4}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{5}{4}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

LU разложение матрицы A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

- LU разложение существует не для любой невырожденной матрицы.
- Как улучшить устойчивость метода, использующего LU разложение?

→ LU разложение с выбором ведущего элемента...

Матрица перестановки

Матрица перестановки получается из единичной матрицы перестановкой строк.

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножение слева на матрицу P_{12} меняет местами 1-ю и 2-ю строки матрицы A:

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

LUP разложение

$PA = LU$, P - матрица перестановок $\Rightarrow LUx = Pb$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{2}{4} R_1} \\ \xrightarrow{R_3 - \frac{1}{4} R_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{-1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{2}{4} & -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{2}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Содержание

Методы ортогонализации

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $det(A) \neq 0$. Тогда

$$A = QR, \tag{33}$$

где Q - ортогональная матрица, т.е. $Q^\top = Q^{-1}$, R - правая (верхняя) треугольная матрица.

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^\top b. \tag{34}$$

Свели исходную задачу к решению СЛАУ с правой треугольной матрицей.

Скалярное произведение и норма в пространстве $\mathbb{R}^n$

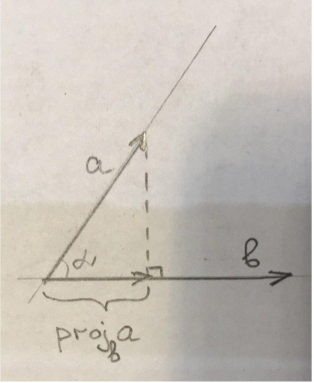
$$(x, y) = x^\top y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \|x\|^2 = (x, x). \tag{35}$$

Ортогональные векторы

$$(x, y) = 0. \tag{36}$$

Проекция вектора a на вектор b

$$proj_b a = \|a\| \, cos(\alpha) \frac{b}{\|b\|} = \frac{(a, b)}{(b, b)} b. \tag{37}$$



Метод Грама-Шмидта

$det(A) \neq 0 \Rightarrow$ все столбцы матрицы A линейно независимы.

$A = [a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)}]$, где $a^{(i)}$ - i-ый столбец матрицы A.

Столбцы $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ образуют базис в n-мерном пространстве, так как они линейно независимы и их количество совпадает с размерностью пространства.

Построим ортонормированный базис $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}$

$$(q^{(i)}, q^{(j)}) = \delta_{ij} \tag{38}$$

на основе $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ по алгоритму Грама-Шмидта.

Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

Первый вектор ортонормированного базиса

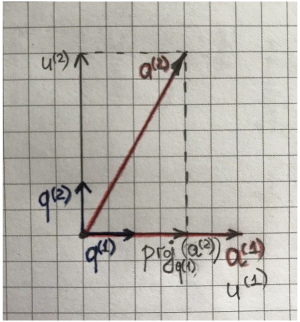
$$u^{(1)} = a^{(1)}, q^{(1)} = \frac{u^{(1)}}{\|u^{(1)}\|} = \rho_{11} a^{(1)}. \qquad (39)$$

Второй вектор ортонормированного базиса

$$u^{(2)} = a^{(2)} - proj_{q^{(1)}}(a^{(2)}) = a^{(2)} - (a^{(2)}, q^{(1)}) q^{(1)}. \qquad (40)$$

Тогда

$$q^{(2)} = \frac{u^{(2)}}{\|u^{(2)}\|} = \rho_{22} a^{(2)} + \rho_{21} a^{(1)}. \qquad (41)$$



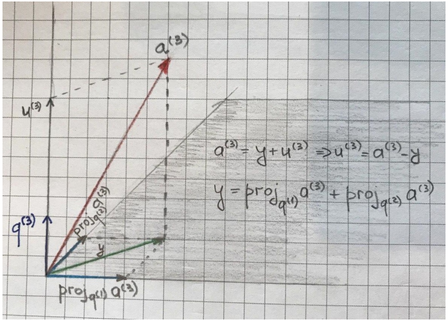
Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

Третий вектор ортонормированного базиса

$$u^{(3)} = a^{(3)} - proj_{q^{(1)}}(a^{(3)}) - proj_{q^{(2)}}(a^{(3)}) = a^{(3)} - (a^{(3)}, q^{(1)})q^{(1)} - (a^{(3)}, q^{(2)})q^{(2)}. \quad (42)$$

Тогда

$$q^{(3)} = \frac{u^{(3)}}{\|u^{(3)}\|} = \rho_{33}a^{(3)} + \rho_{32}a^{(2)} + \rho_{31}a^{(1)}. \quad (43)$$



Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^3$

(39), (41), (43) $\Rightarrow$

$$\underbrace{[q^{(1)}q^{(2)}q^{(3)}]}_{Q} = \underbrace{[a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}]}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{32} \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \tag{44}$$

Тогда решение x можно найти так

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^\top b \Leftrightarrow x = R^{-1}Q^\top b. \tag{45}$$

Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

Пусть векторы $q^{(1)}, \dots, q^{(i-1)}$ ортонормированного базиса уже построены

$$(q^{(j)}, q^{(k)}) = \delta_{jk}, q^{(j)} = \sum_{k=1}^{j} \rho_{jk} a^{(k)}, j, k < i. \tag{46}$$

Построим i-ый базисный вектор

$$u^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} proj_{q^{(j)}} a^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} (a^{(i)}, q^{(j)}) q^{(j)} = a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} q^{(j)}. \tag{47}$$

Тогда

$$q^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{\left\|u^{(i)}\right\|} = \underbrace{\frac{1}{\left\|u^{(i)}\right\|}}_{=\rho_{ii}} a^{(i)} - \rho_{ii} \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \left(\sum_{k=1}^{j} \rho_{jk} a^{(k)} \right) = \rho_{ii} a^{(i)} + \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\left(-\rho_{ii} \sum_{j=k}^{i-1} \gamma_{ij} \rho_{jk} \right)}_{=\rho_{ik}} a^{(k)}. \tag{48}$$

Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

i-ый базисный вектор

$$q^{(i)} = \sum_{k=1}^{i} \rho_{ik} a^{(k)}, \rho_{ik} = -\rho_{ii} \sum_{j=k}^{i-1} \gamma_{ij} \rho_{jk}, k < i. \qquad (49)$$

Проверим, что $q^{(i)}$ ортогонален $q^{(k)}, k < i$

$$(q^{(i)}, q^{(k)}) = \rho_{ii} \left(u^{(i)}, q^{(k)} \right) = \rho_{ii} (a^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} q^{(j)}, q^{(k)}) = \rho_{ii} \left(\gamma_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} (q^{(j)}, q^{(k)}) \right).$$

Метод Грама-Шмидта. Случай $\mathbb{R}^n$

Пусть Q - матрица, составленная из векторов ортонормированного базиса

$$Q = [q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(n)}]. \tag{50}$$

За матрицу R^{-1} обозначим матрицу, составленную из ρ_{ij}

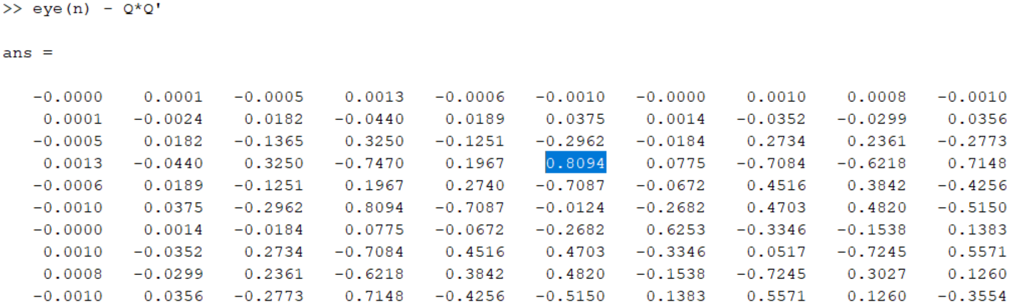
$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \dots & \rho_{n1} \\ 0 & \rho_{22} & \dots & \rho_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \tag{51}$$

Из (46) следует, что $Q = AR^{-1}$. Учитывая (34), получаем решение

$$x = R^{-1} Q^{\top} b = R^{-1} (AR^{-1})^{\top} b. \tag{52}$$

Метод Грама-Шмидта. Плохая численная устойчивость

Возьмем матрицу Гильберта размерности 10×10 и построим ортонормированный базис по алгоритму Грама-Шмидта.



```
>> eye(n) - Q*Q'

ans =

   -0.0000    0.0001   -0.0005    0.0013   -0.0006   -0.0010   -0.0000    0.0010    0.0008   -0.0010
    0.0001   -0.0024    0.0182   -0.0440    0.0189    0.0375    0.0014   -0.0352   -0.0299    0.0356
   -0.0005    0.0182   -0.1365    0.3250   -0.1251   -0.2962   -0.0184    0.2734    0.2361   -0.2773
    0.0013   -0.0440    0.3250   -0.7470    0.1967    0.8094    0.0775   -0.7084   -0.6218    0.7148
   -0.0006    0.0189   -0.1251    0.1967    0.2740   -0.7087   -0.0672    0.4516    0.3842   -0.4256
   -0.0010    0.0375   -0.2962    0.8094   -0.7087   -0.0124   -0.2682    0.4703    0.4820   -0.5150
   -0.0000    0.0014   -0.0184    0.0775   -0.0672   -0.2682    0.6253   -0.3346   -0.1538    0.1383
    0.0010   -0.0352    0.2734   -0.7084    0.4516    0.4703   -0.3346    0.0517   -0.7245    0.5571
    0.0008   -0.0299    0.2361   -0.6218    0.3842    0.4820   -0.1538   -0.7245    0.3027    0.1260
   -0.0010    0.0356   -0.2773    0.7148   -0.4256   -0.5150    0.1383    0.5571    0.1260   -0.3554
```

$$\max_{ij} |I - Q^\top Q| = 0.8.$$

Модифицированный метод Грама-Шмидта

Вместо (47) последовательно вычислять

$$\begin{aligned} a_1^{(i)} &= a^{(i)} - proj_{q^{(1)}} a^{(i)} \\ a_2^{(i)} &= a_1^{(i)} - proj_{q^{(2)}} a_1^{(i)} \\ \dots \\ a_{i-1}^{(i)} &= a_{i-2}^{(i)} - proj_{q^{(i-1)}} a_{i-2}^{(i)} \end{aligned} \tag{53}$$

Причем $a_{i-1}^{(i)}$ и есть $u^{(i)}$ (проверить самостоятельно).

Для матрицы Гильбера размерности 10 × 10: $\max\limits_{ij} |I - Q^\top Q| \approx 7 \cdot 10^{-5}$.

Матрица вращения

Матрица вращения

$$T_{ij}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & -s & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & s & \dots & c & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{54}$$

где $c = \cos(\phi)$, $s = \sin(\phi)$.
$T_{ij}x$ - вращение вектора x в плоскости Ox_ix_j на угол ϕ.

$T_{ij}T_{ij}^{\top} = E \Rightarrow T_{ij}$ - ортогональная матрица.

Матрица вращения. Свойства

1. Умножение матрицы вращения на вектор меняют только 2 его компоненты

$$y = T_{ij}x, \quad \begin{aligned} y_i &= cx_i - sx_j \\ y_j &= sx_i + cx_j \\ y_k &= x_k, k \neq i, j. \end{aligned} \tag{55}$$

   При этом $\|x\|_2 = \|y\|_2$.
2. Аналогичное утверждение справедливо и для умножения строки на матрицу вращения, т.к. $y^\top = x^\top T_{ij}$.
3. $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Существует последовательность матриц вращения, которая преобразует вектор x в вектор естественного базиса

$$(T_{1n} \dots T_{13} T_{12})x = \alpha \cdot e^{(1)}. \tag{56}$$

Матрица вращения. Свойства

Выберем ϕ так, чтобы $y_j = 0$

$$sin(\phi)x_i + cos(\phi)x_j = 0 \Rightarrow tg(\phi) = -\frac{x_j}{x_i}. \tag{57}$$

$$x = x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x^{(1)} = T_{12}x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ 0 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x^{(2)} = T_{13}x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{58}$$

$T_1 = T_{1n} \dots T_{13}T_{12}$ и $T_1 x = \alpha e^{(1)}$.

Упражнение

Пусть $x = (0, 1, \sqrt{3})^\top$. Построить последовательность матриц вращений, которая преобразовывает x в вектор пропорциональный $e^{(1)} = (1, 0, 0)^\top$.

Метод вращений

Пусть c_{12} и s_{12} - некоторые отличные от 0 числа.
Новое 1-е уравнение - линейная комбинация 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами c_{12} и s_{12}.
Новое 2-е уравнение - линейная комбинация 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами $-s_{12}$ и c_{12}.

$$\begin{aligned} (c_{12}a_{11} + s_{12}a_{21})x_1 + \ldots + (c_{12}a_{1n} + s_{12}a_{2n})x_n &= c_{12}b_1 + s_{12}b_2 \\ (-s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21})x_1 + \ldots + (-s_{12}a_{1n} + c_{12}a_{2n})x_n &= -s_{12}b_1 + c_{12}b_2 \end{aligned} \tag{59}$$

Условия на c_{12} и s_{12}

$$(-s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21}) = 0, c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1. \tag{60}$$

Тогда

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, s_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}. \tag{61}$$

Метод вращений

Данное преобразование эквивалентно умножению A и b на T_{12} слева

$$T_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

T_{12} - матрица вращения в плоскости Ox_1x_2 на угол ϕ_{12} такой, что $\cos(\phi_{12}) = c_{12}$, $\sin(\phi_{12}) = s_{12}$.

Метод вращений

Исключим x_1 из 3-го уравнения с помощью c_{13} и s_{13}

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}}, s_{13} = \frac{a_{31}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}}. \tag{63}$$

Это эквивалентно умножениею СЛАУ слева на T_{13}

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Метод вращений

После $n-1$ таких преобразований

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots &\quad \ldots \\
a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}
\end{aligned} \tag{65}$$

В матричной записи

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \tag{66}$$

где $A^{(1)} = T_{1n}\ldots T_{13}T_{12}A$, $b^{(1)} = T_{1n}\ldots T_{13}T_{12}b$.

Метод вращений

Второй шаг метода вращений - исключение x_2 из всех уравнений, начиная с 3-го. В результате выполнения $n-2$ подшагов СЛАУ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + a_{13}^{(n-1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\
a_{22}^{(n-1)}x_2 + a_{23}^{(n-1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= b_2^{(n-1)} \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\
a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}
\end{aligned} \tag{67}$$

В матричной форме

$$A^{(2)}x = b^{(2)}, \tag{68}$$

где $A^{(2)} = T_{2n} \ldots T_{24}T_{23}A^{(1)}$, $b^{(2)} = T_{2n} \ldots T_{24}T_{23}b^{(1)}$.

Метод вращений

После завершения $n-1$ шага система имеет вид

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + a_{13}^{(n-1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)} \\
a_{22}^{(n-1)}x_2 + a_{23}^{(n-1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= b_2^{(n-1)} \\
a_{33}^{(n-1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(n-1)}x_n &= b_3^{(n-1)} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{69}$$

В матричной записи

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}, \tag{70}$$

где $A^{(n-1)} = T_{n-1,n}A^{(n-2)}$, $b^{(n-1)} = T_{n-1,n}b^{(n-2)}$.

Метод вращений

Матрица системы $A^{(n-1)}$ - верхняя треугольная, причем

$$A^{(n-1)} = TA, \tag{71}$$

где $T = T_{n-1,n} \dots T_{2n} \dots T_{23} T_{1n} \dots T_{12}$ - матрица результирующего вращения.

Матрица T ортогональна как произведение ортогональных матриц.
Обозначим $Q = T^{-1} = T^{\top} \Rightarrow$ получили QR-разложение матрицы A.

Обратный ход метода вращений проводится точно так же, как и для метода Гаусса.

Метод вращений. Замечания

☺ Длина любого вектора-столбца расширенной матрицы системы остается такой же, как у соответствующего столбца исходной системы

$$\left(a_{1j}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{2j}^{(1)}\right)^2 = a_{1j}^2 + a_{2j}^2. \tag{72}$$

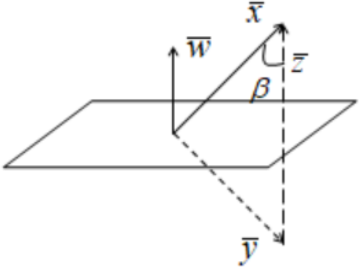
$\Rightarrow$ не будет наблюдаться роста элементов $\Rightarrow$ метод вращений обладает хорошей обусловленностью.

☹ Вычислительные затраты выше чем у метода Гаусса.

Упражнение

Доказать равенство (72).

Матрица отражения



Нормаль w задает гиперплоскость.
y - отражение вектора x относительно гиперплоскости

$$y = Px, \tag{73}$$

где P - матрица отражения.
$y = x - z$
$z = \|z\| \frac{w}{\|w\|}, \; \|z\| = 2\cos(\beta)\,\|x\| = 2\frac{w^\top x}{\|w\|\|x\|}\,\|x\| = 2\frac{w^\top x}{\|w\|}$
$y = x - \frac{2}{\|w\|^2} ww^\top x = \left(E - \frac{2}{\|w\|^2} ww^\top\right) x$

$$P = E - \frac{2}{\|w\|^2} ww^\top = E - 2uu^\top, \tag{74}$$

где $u = \frac{w}{\|w\|}$.

Свойства матриц отражения

1. $P = P^\top$

   $p_{ij} = \ldots = p_{ji}$.
2. $P^{-1} = P = P^\top$

   $PP = (E - 2uu^\top)(E - 2uu^\top) = \ldots = E$.
3. Если $x \neq y$ и $\|x\| = \|y\| \neq 0$, то $\exists P : y = Px$.

   В качестве w нужно взять $x - y$.

Следствие

Любой вектор $x \neq \mathbf{0}$ с помощью матрицы отражения может быть преобразован в вектор пропорциональный первому вектору естественного базиса

$$Px = \alpha e^{(1)}, e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^\top. \qquad (75)$$

Свойства матриц отражения

Зададим α следующим образом

$$\alpha = \begin{cases} -sign(x_1)\left\|x\right\|, & x_1 \neq 0 \\ \pm\left\|x\right\|, & x_1 = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Тогда $y = (\alpha, 0, \ldots, 0)^\top \Rightarrow w = (x_1 - \alpha, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$P = E - \frac{2}{\underbrace{\left\|w\right\|^2}_{\beta}} ww^\top, \tag{77}$$

где $\frac{1}{\beta} = \frac{\|w\|^2}{2} = \frac{1}{2}(x-y, x-y) = \frac{1}{2}\left(\left\|x\right\|^2 + \left\|y\right\|^2 - 2(x,y)\right) = \left\|x\right\|^2 + |x_1|\|x\|.$

Матрица отражения

Упражнение

Пусть $x = (2, -1, 2)^\top$. Построить матрицу отражения, преобразующую x в вектор пропорциональный $e^{(1)} = (1, 0, 0)^\top$.

Замечание

При умножении матрицы отражения P на матрицу A можно сократить трудоемкость вычисления результата. Вместо $\sim n^3$ арифметических операций, можно получить за $\sim n^2$

$$PA = A - \beta(w(w^\top A)). \tag{78}$$

Умножение матрицы отражения P на вектор x можно реализовать за $\sim n$ операций вместо n^2

$$Px = x - \beta(x, w)w. \tag{79}$$

Метод отражений

$A = A^{(n)} = (a_{(1)}^{(n)}, \ldots, a_{(n)}^{(n)})$ - представление матрицы по столбцам: верхний индекс – размерность, нижний – номер столбца.

Построим P_1: $P_1 a_{(1)}^{(n)} = r_{11} e_{(1)}^{(n)}$. Тогда

$$P_1 A = A_1 = \left[\begin{array}{c:c} R^{(1)} & B^{(1,n-1)} \\ \hdashline \mathbf{0} & A^{(n-1)} \end{array}\right] \tag{80}$$

$A^{(n-1)} = (a_{(1)}^{(n-1)}, \ldots, a_{(n-1)}^{(n-1)})$. Построим $P_2^{(n-1)}$: $P_2^{(n-1)} a_{(1)}^{(n-1)} = r_{22} e_{(1)}^{(n-1)}$ и

$$P_2 = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & P_2^{(n-1)} \end{array}\right] \tag{81}$$

Тогда

$$P_2 A_1 = A_2 = \left[\begin{array}{c:c} R^{(2)} & B^{(2,n-2)} \\ \hdashline \mathbf{0} & A^{(n-2)} \end{array}\right] \tag{82}$$

Метод отражений

$$A_k = \left[\begin{array}{c:c} R^{(k)} & B^{(1,n-k)} \\ \hdashline \mathbf{0} & A^{(n-k)} \end{array}\right] \tag{83}$$

$A^{(n-k)} = (a^{(n-k)}_{(1)}, \ldots, a^{(n-k)}_{(n-k)})$. Построим $P^{(n-k)}_{k+1}$: $P^{(n-k)}_{k+1} a^{(n-k)}_{(1)} = r_{k+1,k+1} e^{(n-k)}_{(1)}$ и

$$P_{k+1} = \left[\begin{array}{c:c} E^{(k)} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & P^{(n-k)}_{k+1} \end{array}\right] \tag{84}$$

Тогда

$$P_{k+1} A_k = A_{k+1} = \left[\begin{array}{c:c} R^{(k+1)} & B^{(k+1,n-k-1)} \\ \hdashline \mathbf{0} & A^{(n-k-1)} \end{array}\right] \tag{85}$$

$P_1 \cdot (A|b) = (A_1|b^{(1)}) \to P_2 \cdot (A_1|b^{(1)}) = (A_2|b^{(2)}) \to \ldots P_{n-1} \cdot (A_{n-2}|b^{(n-2)}) = (R|f)$
Свели исходную задачу к $Rx = f$.

Метод ортогонализации

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ - точное решение задачи $Ax = b$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} Y &= (x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ A_i &= (a_{i1}, \ldots, a_{in}, -b_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{86}$$

Тогда СЛАУ может быть переписана в виде n условий ортогональности

$$(Y, A_i) = 0, i = 1, \ldots, n. \tag{87}$$

Решить СЛАУ = найти вектор Y ортогональный всем векторам A_i.

Метод ортогонализации

Будем строить последовательность подпространств $\mathbb{R}^{n+1} = E^{(0)} \supset E^{(1)} \supset \ldots \supset E^{(n)}$: векторы из $E^{(k)}$ ортогональны $A_1, \ldots, A_k$.

Для $E^{(0)}$ возьмем стандартный ортонормированный базис $e_i^{(0)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^\top$.

Базис подпространства $E^{(k)}$

$$e_i^{(k)} = e_i^{(k-1)} - \frac{(A_k, e_i^{(k-1)})}{(A_k, e_k^{(k-1)})} e_k^{(k-1)}, i = k+1, \ldots, n. \tag{88}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
e_1^{(0)} & e_2^{(0)} & e_3^{(0)} \ldots & e_n^{(0)} & e_{n+1}^{(0)} & E^{(0)} & & \\
 & e_2^{(1)} & e_3^{(1)} \ldots & e_n^{(1)} & e_{n+1}^{(1)} & E^{(1)} & A_1 \\
 & & e_3^{(2)} \ldots & e_n^{(2)} & e_{n+1}^{(2)} & E^{(2)} & A_1, A_2 \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & e_n^{(n-1)} & e_{n+1}^{(n-1)} & E^{(n-1)} & A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \\
 & & & & e_{n+1}^{(n)} & E^{(n)} & A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n
\end{array}$$

Метод ортогонализации

Проверим, что векторы из $E^{(k)}$ ортогональны $A_1, \dots, A_k$:

1. базис $E^{(k)}$ - линейная комбинация базиса $E^{(k-1)}$ $\Rightarrow$ векторы из $E^{(k)}$ ортогональны $A_1, \dots, A_{k-1}$.
2. $(A_k, e_i^{(k)}) = (A_k, e_i^{(k-1)}) - \frac{(A_k, e_i^{(k-1)})}{(A_k, e_k^{(k-1)})}(A_k, e_k^{(k-1)}) = 0, i = k+1, \dots, n.$

Лемма (доказать самостоятельно)

Вектор $e_i^{(k)}$ имеет не более $k+1$ отличных от 0 компонент. Отличными от 0 могут быть компоненты с номерами $1, \dots, k$ и i.

Следствие

Вектор $e_i^{(k)}$ получается из $e_i^{(k-1)}$ изменением компонент $1, \dots, k$, т.к. остальные компоненты у вектора $e_k^{(k-1)}$ нулевые $\Rightarrow$ у всех $e_{n+1}^{(k)}$ $(n+1)$-я компонента равна 1 $\Rightarrow$ $e_{n+1}^{(n)}$ - искомое решение.