

# Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Итерационные методы

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

27 октября 2023 г.

# Содержание

## Характеристика итерационных методов решения СЛАУ

### Стационарные методы

### Ортогональные полиномы Чебышева

### Нестационарные методы

# Итерационные методы

Итерационные методы - альтернатива прямым методам, в частности, когда размерность системы велика.

Постановка задачи: найти решение СЛАУ

$$Ax = b \quad (1)$$

с точностью  $\epsilon$ , т.е.  $\|x^{(k)} - x^*\| < \epsilon$ .

Строится последовательность векторов  $\{x^{(k)}\}$

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(k)} = \Phi_k(A, b, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-r)}), \quad (2)$$

предел которой - решение задачи (1)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*. \quad (3)$$

# Классификационные признаки

1.  $r = 1$  – одношаговый метод,  $r > 1$  – многошаговый метод.
2.  $\Phi_k$  - линейная функция относительно  $x^{(i)} \Rightarrow$  метод называется линейным, в противном случае – нелинейным.
3.  $\Phi_k$  зависит от  $k \Rightarrow$  метод называется нестационарным, в противном случае – стационарным.

Будем рассматривать линейные одношаговые методы.

## Канонический вид линейных одношаговых итерационных методов

$$B_k \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha_k} + Ax^{(k)} = b, \quad (4)$$

где  $\alpha_k, B_k$  - канонические параметры, в общем случае зависят от  $k$ .

### Линейные одношаговые методы

1.  $\alpha_k = \alpha, B_k = B$  - стационарные методы, в противном случае - нестационарные.
2. метод называется явным, если известно  $B_k^{-1}$ , например,  $B_k = E$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k (Ax^{(k)} - b) \quad (5)$$

или  $B_k$  - диагональная матрица

$$B_k x^{(k+1)} = B_k x^{(k)} - \alpha_k (Ax^{(k)} - b), \quad (6)$$

где  $B_k$  называют предобуславливателем (с его помощью можно уменьшить количество итераций).

1. Как построить последовательность  $\{x^{(k)}\}$ ?
2. При каких условиях последовательность  $\{x^{(k)}\}$  будет сходиться?
3. При каких условиях предел последовательности  $\{x^{(k)}\}$  есть решение исходной задачи (1)?
4. Когда остановить итерационный процесс, чтобы получить решение с заданной точностью?

# Содержание

Характеристика итерационных методов решения СЛАУ

Стационарные методы

Ортогональные полиномы Чебышева

Нестационарные методы

# Метод простых итераций (МПИ)

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + g \quad (7)$$

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g, k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

## Теорема о сходимости МПИ (достаточные условия)

Если  $\|C\| < 1$ , то существует единственное решение (7), итерационная последовательность (8) сходится к нему при произвольном  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  и справедливы оценки

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (9)$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad (10)$$



## Теорема о сходимости МПИ. Доказательство

$$(8) \Rightarrow x^{(k+1)} - x^{(k)} = C(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \Rightarrow$$

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \|C\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)} + x^{(k+m-1)} - \dots - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \dots + \|x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\| + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \|C\|^m \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \dots + \|C\|^2 \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|C\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &= \frac{\|C\| (1 - \|C\|^m)}{1 - \|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \\ &\leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} (1 - \|C\|^m) \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \end{aligned}$$

## Теорема о сходимости МПИ. Доказательство

Зафиксируем  $m$ , а  $k \rightarrow \infty \Rightarrow$  последовательность  $x^{(k)}$  - фундаментальная последовательность  $\Rightarrow$  имеет предел  $x^*$  ( $\mathbb{R}^n$  - полное пространство)

$$x^* = Cx^* + g. \quad (12)$$

Доказать единственность  $x^*$  самостоятельно (от противного).

Справедливость (9) и (10) следует из

$$\left\| x^{(k+m)} - x^{(k)} \right\| \leq \frac{\|C\| (1 - \|C\|^m)}{1 - \|C\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq \frac{\|C\|^k (1 - \|C\|^m)}{1 - \|C\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|, \quad (13)$$

если зафиксировать  $k$ , а  $m \rightarrow \infty$ .

## Теорема о сходимости МПИ. Замечания

1. Априорная оценка (10) грубее апостериорной (9).
2. Апостериорная оценка (9) используется для остановки итерационного процесса

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \frac{1 - \|C\|}{\|C\|} \epsilon. \quad (14)$$

3. Если  $\|C\| \leq \frac{1}{2}$ , то в качестве критерия остановки можно использовать

$$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| < \epsilon. \quad (15)$$

4. Возможность привести исходную задачу к виду  $x = Cx + g$ ,  $\|C\| < 1$  связано с существованием и единственностью решения исходной задачи.

## Приведение СЛАУ к виду, удобному для итераций

$$Ax = b \Leftrightarrow 0 = -\alpha(Ax - b), \alpha \neq 0 \Leftrightarrow Bx = Bx - \alpha(Ax - b), \det(B) \neq 0$$

$$x = x - \alpha B^{-1}(Ax - b) \Leftrightarrow x = \underbrace{(E - \alpha B^{-1}A)}_C x + \alpha B^{-1}b \quad (16)$$

Каноническая форма метода

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha} + Ax^{(k)} = b \quad (17)$$

# Приведение СЛАУ к виду, удобному для итераций

1.  $B = E$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b) = \underbrace{(E - \alpha A)}_C x^{(k)} + \underbrace{\alpha b}_g. \quad (18)$$

Пусть  $A$  - симметричная положительно определенная матрица.

$\lambda_{\max}$  - максимальное собственное число  $A$ .

Условие  $\|C\|_2 < 1$  будет выполнено, если  $\alpha \in (0, 2/\lambda_{\max})$ .

Можно взять  $\alpha < 2/\|A\|$ .

## Приведение СЛАУ к виду, удобному для итераций

2.  $\alpha = 1, B = D = \text{diag}(A)$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}(Ax^{(k)} - b) = \underbrace{(E - D^{-1}A)}_C x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_g. \quad (19)$$

Если  $D = D_A$ , то получим метод Якоби.

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(x_2 - 3x_3 + 7) \\ x_2 = \frac{1}{5}(x_1 - 2x_3 + 6) \\ x_3 = \frac{1}{4}(-x_1 + 2x_2 + 3) \end{cases} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

## Метод Якоби (Jacobi iterations)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Если  $\|C\| = \|C\|_\infty$ , то достаточное условие сходимости МПИ примет вид

$$\|C\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad (21)$$

что эквивалентно условию диагонального преобладания

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

## Метод Якоби. Пример

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(1 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(5 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)})$$

Точное решение:  $x^* = (1, 1, 1)^\top$

Начальное приближение:  $x^{(0)} = (1, \frac{1}{3}, 1)^\top$

Первые 3 итерации:

$$x^{(1)} = (0.833 \quad 1.000 \quad 0.867)^\top$$

$$x^{(2)} = (1.033 \quad 0.900 \quad 1.033)^\top$$

$$x^{(3)} = (0.967 \quad 1.022 \quad 0.973)^\top$$

.....

$$x^* = (1 \quad 1 \quad 1)^\top$$



# Необходимые и достаточные условия сходимости МПИ

## Лемма

Если все собственные числа  $|\lambda_C| < 1$ , то  $\sum_{k=0}^{\infty} C^k = (E - C)^{-1}$ .

## Доказательство

$$S_k = E + C + \dots + C^k.$$

$$S_k(E - C) = E - C + C - C^2 + \dots + C^k - C^{k+1} = E - C^{k+1}. \quad (23)$$

Все собственные числа  $|\lambda_C| < 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} C^{k+1} = 0 \Rightarrow$  левая часть (23) имеет предел  
 $\Rightarrow S_k$  имеет предел.

Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S \Rightarrow S(E - C) = E \Rightarrow S = (E - C)^{-1}$ .

# Необходимые и достаточные условия сходимости МПИ

## Теорема

Последовательность  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$  сходится  $\Leftrightarrow$  все собственные числа  $|\lambda_C| < 1$ .

## Доказательство

$\Rightarrow$

Пусть  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ .

$$x^{(k)} - x^* = C(x^{(k-1)} - x^*) = C^2(x^{(k-2)} - x^*) = \dots = C^k(x^{(0)} - x^*). \quad (24)$$

$x^{(0)}$  - любой вектор. Пусть  $x^{(0)} - x^* = e^{(p)}$ . Тогда в правой части (24) останется  $p$ -й столбец  $C^k$ , который стремится к 0  $\Rightarrow C^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_C |\lambda_C| < 1$ .

$\Leftarrow$

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g = C(Cx^{(k-2)} + g) + g = C^2x^{(k-2)} + (E + C)g = \\ C^kx^{(0)} + (E + C + \dots + C^k)g \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (E - C)^{-1}g.$$

## Метод итераций Зейделя (Gauss-Seidel iterations)

МПИ:  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + g_2 \\ \dots = \dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + g_n \end{cases} \quad (25)$$

Метод Зейделя сводится к тому, что при вычислении компонент  $(k+1)$ -го вектора компоненты  $k$ -го заменить уже вычисленными  $(k+1)$ -ми элементами

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + g_2 \\ \dots = \dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{nn}x_n^{(k)} + g_n \end{cases} \quad (26)$$

## Схема Зейделя-Якоби. Пример

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(5 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)})$$

Точное решение:  $x^* = (1, 1, 1)^\top$

Начальное приближение:  $x^{(0)} = (1, \frac{1}{3}, 1)^\top$

Первые 3 итерации:

$$x^{(1)} = (0.833 \quad 0.944 \quad 1.022)^\top$$

$$x^{(2)} = (0.981 \quad 1.001 \quad 1.004)^\top$$

$$x^{(3)} = (0.999 \quad 1.001 \quad 1.000)^\top$$

.....

$$x^* = (1 \quad 1 \quad 1)^\top$$

## Метод итераций Зейделя

$$C = \underline{C} + \overline{\overline{C}}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Метод Зейделя:

$$x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g. \quad (28)$$

$$(E - \underline{C})x^{(k+1)} = \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g$$

$$\det(E - \underline{C}) = 1 \Rightarrow \exists (E - \underline{C})^{-1}$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(E - \underline{C})^{-1} \overline{\overline{C}}}_{B} x^{(k)} + \underbrace{(E - \underline{C})^{-1} g}_{f}. \quad (29)$$

## Необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя

Метод Зейделя (29) сходится  $\Leftrightarrow$  все собственные числа  $|\lambda_B| < 1$ , где  $B = (E - \underline{C})^{-1} \overline{\overline{C}}$ .

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) \\ &= -\det(\lambda E - (E - \underline{C})^{-1} \overline{\overline{C}}) \\ &= -\underbrace{\det((E - \underline{C})^{-1})}_1 \det(\lambda(E - \underline{C}) - \overline{\overline{C}}) \\ &= -\det(\lambda E - \lambda \underline{C} - \overline{\overline{C}}) \\ &= \det(\lambda \underline{C} + \overline{\overline{C}} - \lambda E).\end{aligned}\tag{30}$$

$$\det(\lambda \underline{C} + \overline{\overline{C}} - \lambda E) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \lambda c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda c_{n1} & \lambda c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix}\tag{31}$$

## Пример

Пусть исходная СЛАУ приведена к виду удобному для итераций

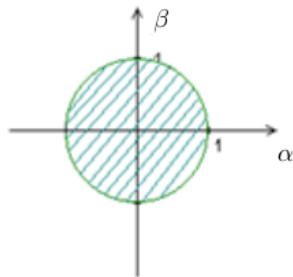
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Метод простых итераций:

$$\det(C - \lambda E) = (a - \lambda)^2 + \beta^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2.$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1.$$



## Пример (продолжение)

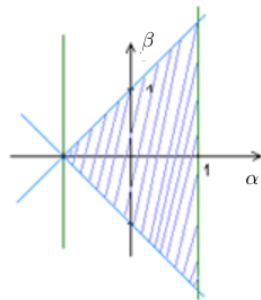
Метод итераций Зейделя:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -\beta \\ \lambda\beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \lambda\beta^2 = \lambda^2 + (-2\alpha + \beta^2)\lambda + \alpha^2.$$

### Теорема

Корни полинома  $x^2 + ax + b$  по модулю меньше единицы  $\Leftrightarrow |a| < 1 + b$  и  $|b| < 1$ .

$$\begin{cases} |\beta^2 - 2\alpha| < 1 + \alpha^2 \\ \alpha^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| < |1 + \alpha| \\ |\alpha| < 1 \end{cases}$$



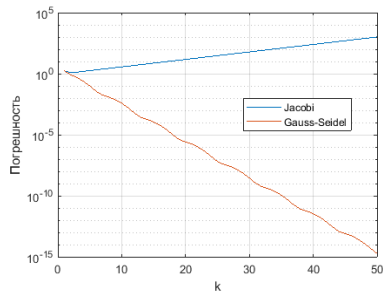


## Пример. Сходимость МПИ (схема Якоби) и метода Зейделя

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\max |\lambda_{C_1}| = 1.15 > 1$$

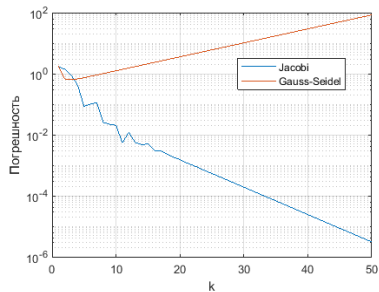
$$\max |\lambda_{B_1}| = 0.50 < 1$$



$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\max |\lambda_{C_2}| = 0.81 < 1$$

$$\max |\lambda_{B_2}| = 1.11 > 1$$

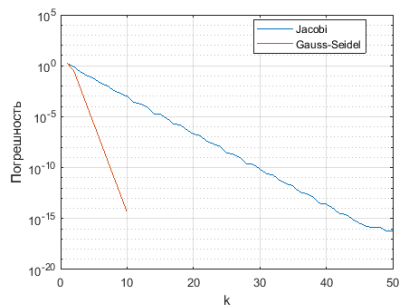


## Пример. Сходимость МПИ (схема Якоби) и метода Зейделя

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\max |\lambda_{C_3}| = 0.44$$

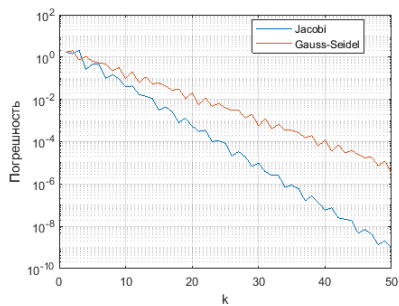
$$\max |\lambda_{B_3}| = 0.02$$



$$A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\max |\lambda_{C_4}| = 0.64$$

$$\max |\lambda_{B_4}| = 0.77$$



## Достаточное условие сходимости метода Зейделя

$\|C\|_{1,2,\infty} < 1 \Rightarrow$  метод Зейделя (29) сходится.

Ограничимся случаем бесконечной нормы:  $\|C\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}|$ ,  $\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$ .

### Доказательство

$\|C\|_{\infty} < 1 \Rightarrow \exists x^*$ :

$$x^* = Cx^* + g = \underline{C}x^* + \overline{\overline{C}}x^* + g. \quad (32)$$

$$x^{(k)} - x^* = \underline{C}(x^{(k)} - x^*) + \overline{\overline{C}}(x^{(k-1)} - x^*). \quad (33)$$

$$x_i^{(k)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^*) + \sum_{j=i}^n c_{ij}(x_j^{(k-1)} - x_j^*).$$

$$|x_i^{(k)} - x_i^*| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^*| + \sum_{j=i}^n |c_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^*|. \quad (34)$$

## Достаточное условие сходимости метода Зейделя

Введем обозначения

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}|, \beta_i = \sum_{j=i}^n |c_{ij}|. \quad (35)$$

(34), (35)  $\Rightarrow$

$$|x_i^{(k)} - x_i^*| \leq \alpha_i \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} + \beta_i \|x^{(k-1)} - x^*\|_{\infty}, \forall i. \quad (36)$$

$$\exists m : |x_m^{(k)} - x_m^*| = \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \Rightarrow$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \alpha_m \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} + \beta_m \|x^{(k-1)} - x^*\|_{\infty}. \quad (37)$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} \|x^{(k-1)} - x^*\|_{\infty} \leq \mu \|x^{(k-1)} - x^*\|_{\infty}, \quad (38)$$

где  $\mu = \max_i \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i}$ .

## Достаточное условие сходимости метода Зейделя

$$\forall i \quad \alpha_i + \beta_i = \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |c_{ij}| = \|C\|_{\infty} < 1.$$

$$\beta_i \leq \|C\|_{\infty} - \alpha_i < \|C\|_{\infty} - \alpha_i \|C\|_{\infty} \Rightarrow \frac{\beta_i}{1 - \alpha_i} < \|C\|_{\infty} < 1 \Rightarrow \mu < \|C\|_{\infty} < 1.$$

(38)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} &\leq \mu \|x^{(k-1)} - x^*\|_{\infty} \\ &\leq \mu^2 \|x^{(k-2)} - x^*\|_{\infty} \\ &\leq \dots \\ &\leq \mu^k \|x^{(0)} - x^*\|_{\infty} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \mu \|x^{(k-1)} - x^* \pm x^{(k)}\|_{\infty} \leq \mu \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} + \mu \|x^{(k)} - x^*\|_{\infty}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\mu}{1 - \mu} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \frac{\|C\|_{\infty}}{1 - \|C\|_{\infty}} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}. \tag{40}$$

## Метод Зейделя. Замечания

Для метода Зейделя в качестве критерия остановки можно использовать ту же оценку, что и в случае МПИ

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_{\infty} < \epsilon \frac{1 - \|C\|_{\infty}}{\|C\|_{\infty}}. \quad (41)$$

Однако условие

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_{\infty} < \epsilon \frac{1 - \mu}{\mu}. \quad (42)$$

является более точным.

## Метод релаксаций (Successive over-relaxation method, SOR)

$$x = Cx + g$$

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \pm x^{(k)} = x^{(k)} + \underbrace{(Cx^{(k)} + g - x^{(k)})}_{r^{(k)}} = x^{(k)} + r^{(k)}$$

Метод релаксаций

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)} \quad (43)$$

$\alpha_k = \alpha$  - стационарный метод релаксаций.

$$x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g \pm x^{(k)} = x^{(k)} + \Delta^{(k)}$$

Метод релаксаций для схемы Зейделя

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \beta \Delta^{(k)} \\ &= x^{(k)} + \beta (\underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g - x^{(k)}) \\ &= (1 - \beta)x^{(k)} + \beta (\underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g) \end{aligned} \quad (44)$$

## Метод релаксаций для схемы Зейделя-Якоби

$$Ax = b, A = \underline{A} + D_A + \overline{A}$$

$$x = -D_A^{-1}(\underline{A}x + \overline{A}x - b) = \underbrace{(-D_A^{-1}\underline{A} - D_A^{-1}\overline{A})}_C x + \underbrace{D_A^{-1}b}_g \quad (45)$$

$$\underline{C} = -D_A^{-1}\underline{A}, \overline{\overline{C}} = -D_A^{-1}\overline{A}$$

(44)  $\Rightarrow$

$$x^{(k+1)} = (1 - \beta)x^{(k)} + \beta(-D_A^{-1}\underline{A}x^{(k+1)} - D_A^{-1}\overline{A}x^{(k)} + D_A^{-1}b) \quad (46)$$

$\beta = 1$  - схема Зейделя-Якоби.



# Метод релаксаций

$$x^{(k+1)} = (1 - \beta)x^{(k)} + \beta \underbrace{\left( -D_A^{-1}(\underline{A}x^{(k+1)} + \overline{A}x^{(k)}) + D_A^{-1}b \right)}_{\text{метод Зейделя}} \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = (1 - \beta)x_1^{(k)} - \beta \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dots - \beta \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \beta \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\beta \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} + (1 - \beta)x_2^{(k)} - \dots - \beta \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \beta \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots = \dots \\ x_n^{(k+1)} = -\beta \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \beta \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \dots + (1 - \beta)x_n^{(k)} + \beta \frac{b_n}{a_{nn}} \end{array} \right. \quad (48)$$

## Пример. Метод релаксаций для схемы Зейделя-Якоби

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Точное решение:  $x^* = (1, 1, 1)^\top$

Пусть  $\beta = \frac{4}{3}$

Начальное приближение:  $x^{(0)} = (1, \frac{1}{3}, 1)^\top$

Первые 3 итерации:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}(5 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

$$x^{(1)} = (0.778 \quad 1.123 \quad 1.092)^\top$$

$$x^{(2)} = (1.085 \quad 1.037 \quad 0.957)^\top$$

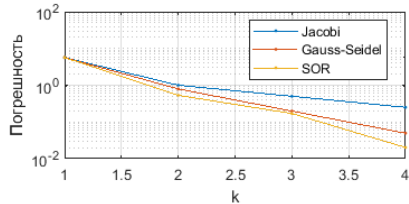
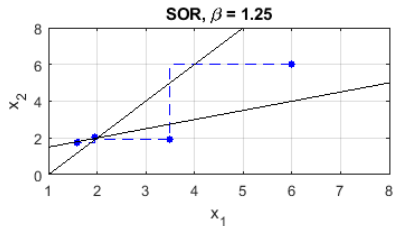
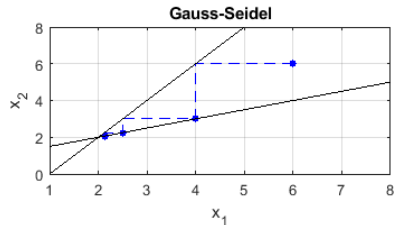
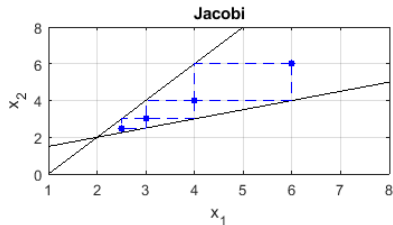
$$x^{(3)} = (0.999 \quad 0.968 \quad 1.006)^\top$$

.....

$$x^* = (1 \quad 1 \quad 1)^\top$$

# Геометрическая интерпретация методов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$



## Метод релаксаций. Каноническая форма

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \beta D_A^{-1} (\underline{A}x^{(k)} + D_A x^{(k-1)} + \overline{A}x^{(k-1)} - b)$$

$$D_A x^{(k)} - D_A x^{(k-1)} + \beta (\underline{A}x^{(k)} + (D_A + \overline{A})x^{(k-1)}) = \beta b$$

$$(D_A + \beta \underline{A})x^{(k)} - (D_A + \beta \underline{A})x^{(k-1)} + \beta \underline{A}x^{(k-1)} + \beta (D_A + \overline{A})x^{(k-1)} = \beta b$$

Каноническая форма метода релаксаций

$$(D_A + \beta \underline{A}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\beta} + Ax^{(k-1)} = b \quad (49)$$

# Сходимость стационарных итерационных процессов

Линейный одношаговый стационарный итерационный метод

$$B \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\alpha} + Ax^{(k-1)} = b \quad (50)$$

Будем рассматривать СЛАУ с симметричной ( $A = A^\top$ ) и положительно определенной матрицей  $A$  ( $A > 0$ ).

## Теорема

Пусть  $A = A^\top$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $Q = B - \frac{\alpha}{2}A > 0$ . Тогда последовательность  $x^{(k)}$  сходится к точному решению  $Ax = b$  при любом  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .

Определим энергетическое пространство  $H_A$ , в котором  $\|x\|_{H_A}^2 = (Ax, x)$ .

## Доказательство

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists x^* : x^* = A^{-1}b$ . Пусть  $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ . Тогда (50) примет вид

$$B \frac{e^{(k)} - e^{(k-1)}}{\alpha} + Ae^{(k-1)} = 0. \quad (51)$$

Пусть  $r^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k-1)}$ . Умножим (51) скалярно на  $r^{(k)}$

$$\frac{1}{\alpha} (Br^{(k)}, r^{(k)}) + (Ae^{(k-1)}, r^{(k)}) = 0. \quad (52)$$

$$\begin{aligned} (Ae^{(k-1)}, r^{(k)}) &= \left( A \frac{e^{(k)} + e^{(k-1)}}{2} - A \frac{e^{(k)} - e^{(k-1)}}{2}, r^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (A(e^{(k)} + e^{(k-1)}), r^{(k)}) - (Ar^{(k)}, r^{(k)}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (Ae^{(k)}, e^{(k)}) + (Ae^{(k-1)}, e^{(k)}) - (Ae^{(k)}, e^{(k-1)}) - (Ae^{(k-1)}, e^{(k-1)}) \right. \\ &\quad \left. - (Ar^{(k)}, r^{(k)}) \right] \end{aligned}$$

Перепишем (52)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha}(Br^{(k)}, r^{(k)}) + \frac{1}{2} \left[ (Ae^{(k)}, e^{(k)}) - (Ae^{(k-1)}, e^{(k-1)}) - (Ar^{(k)}, r^{(k)}) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \left( B - \frac{\alpha}{2}A \right) r^{(k)}, r^{(k)} \right) + \frac{1}{2} \|e^{(k)}\|_{H_A}^2 - \frac{1}{2} \|e^{(k-1)}\|_{H_A}^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

$$Q > 0 \Rightarrow \exists \gamma \neq 0 : (Qx, x) \geq \gamma \|x\|_2^2.$$

$$\frac{1}{\alpha} \gamma \|r^{(k)}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|e^{(k)}\|_{H_A}^2 \leq \frac{1}{2} \|e^{(k-1)}\|_{H_A}^2 \tag{55}$$

Последовательность  $\|e^{(k)}\|_{H_A}$  является невозрастающей и ограниченной снизу нулем  $\Rightarrow$  имеет предел.

$$\|r^{(k)}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$(51) \Rightarrow Ae^{(k-1)} = -B \frac{r^{(k)}}{\alpha} \Rightarrow e^{(k-1)} = -A^{-1} B \frac{r^{(k)}}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \left\| e^{(k-1)} \right\|_{H_A}^2 &= (Ae^{(k-1)}, e^{(k-1)}) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (Br^{(k)}, A^{-1} Br^{(k)}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|A^{-1}\|_2 \left\| Br^{(k)} \right\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \|A^{-1}\|_2 \|B\|_2^2 \left\| r^{(k)} \right\|_2^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned} \tag{56}$$

### Замечание

$r^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} \Rightarrow (56)$  можно использовать в качестве оценки погрешности.

### Замечание

$Ax = b \Leftrightarrow A^\top Ax = A^\top b$  - ухудшается обусловленность системы.



## Следствие. Метод релаксаций

Каноническая форма метода релаксаций

$$(D_A + \beta \underline{A}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\beta} + Ax^{(k-1)} = b \quad (57)$$

$$A = A^\top, A > 0 \Rightarrow D_A > 0$$

$$Q = B - \frac{\alpha}{2}A = (D_A + \beta \underline{A}) - \frac{\beta}{2}(\underline{A} + D_A + \overline{A}) = (1 - \frac{\beta}{2})D_A + \frac{\beta}{2}(\underline{A} - \overline{A})$$

$$\begin{aligned} (Qx, x) &= \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) (D_A x, x) + \frac{\beta}{2} ((\underline{A}x, x) - (\overline{A}x, x)) \\ &= \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) (D_A x, x) \end{aligned} \quad (58)$$

$$(Qx, x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \beta < 2$$

## Следствие. Метод итераций

$$Ax = b$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha(Ax^{(k-1)} - b) = (E - \alpha A)x^{(k-1)} + \alpha b$$

$$E \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\alpha} + Ax^{(k-1)} = b$$

$$Q = E - \frac{\alpha}{2}A$$

$$(Ax, x) \leq \|A\|_2 (x, x) \Rightarrow (Ex, x) \geq \frac{1}{\|A\|_2} (Ax, x)$$

$$\begin{aligned}(Qx, x) &= (Ex, x) - \frac{\alpha}{2}(Ax, x) \\ &\geq \frac{1}{\|A\|_2}(Ax, x) - \frac{\alpha}{2}(Ax, x) \\ &= \left( \frac{1}{\|A\|_2} - \frac{\alpha}{2} \right) (Ax, x)\end{aligned}\tag{59}$$

$$(Qx, x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|_2} = \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}$$

# Содержание

Характеристика итерационных методов решения СЛАУ

Стационарные методы

Ортогональные полиномы Чебышева

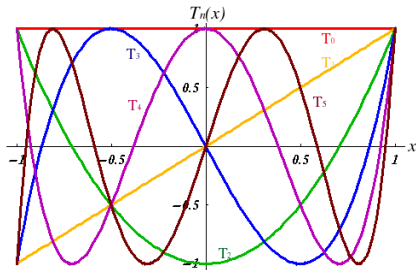
Нестационарные методы

# Полиномы Чебышева

Полином Чебышева степени  $n$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1]. \quad (60)$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x.$$



# Полиномы Чебышева. Свойства

## 1. Верно рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (61)$$

Пусть  $\phi = \arccos(x)$ . Тогда  $x = \cos(\phi)$  и  $T_n(x) = \cos(n\phi)$ .

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\phi) = \cos(n\phi)\cos(\phi) - \sin(n\phi)\sin(\phi) \\ T_{n-1}(x) &= \cos((n-1)\phi) = \cos(n\phi)\cos(\phi) + \sin(n\phi)\sin(\phi) \\ \Rightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2\cos(n\phi)\cos(\phi) = 2xT_n(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= \dots \end{aligned}$$

## Полиномы Чебышева. Свойства

2. Все корни полинома Чебышева вещественны, различны и лежат на промежутке  $[-1, 1]$ .

$$T_n(x) = 0 \Rightarrow \cos(n\phi) = 0 \Rightarrow n\phi_k = \frac{\pi}{2} \pm \pi k \Rightarrow \phi_k = \frac{\pi(1 \pm 2k)}{2n}, k = 0, 1, \dots$$

$$x_k = \cos(\phi_k) = \cos\left(\frac{\pi(1 \pm 2k)}{2n}\right)$$

$$x_k = \cos(\phi_k) = \cos\left(\frac{\pi(1 + 2k)}{2n}\right), k = 0, \dots, n - 1.$$

3. На отрезке  $[-1, 1]$  полином  $T_n(x)$  имеет  $n + 1$  экстремум.

$$|T_n(x)| = 1 \Rightarrow n\phi_k = \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\arccos(\bar{x}_k) = \frac{\pi k}{n} \Rightarrow \bar{x}_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), k = 0, \dots, n.$$

$$T_n(\bar{x}_k) = (-1)^k$$

Следствие:  $|T_n(x)| > 1$  при  $x \notin [-1, 1]$ .

## Полиномы Чебышева. Свойства

4. Полиномы Чебышева ортогональны с весом  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = C_{nm} \delta_{nm} \quad (62)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \cos(m\phi)}{\sin(\phi)} (-\sin(\phi)) d\phi$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+m)\phi) + \cos((n-m)\phi)) d\phi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases}$$

## Полиномы Чебышева. Свойства

5. Из всех многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом 1 нормированный многочлен Чебышева  $\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \dots$  наименее уклоняется от 0 на отрезке  $[-1, 1]$ .

Если  $P_n(x) = x^n + \dots$ , то  $\max_{[-1,1]} |P_n(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Предположим, что это не так, т.е.  $\exists P_n(x) : \max_{[-1,1]} |P_n(x)| = \frac{\alpha}{2^{n-1}}, 0 < \alpha < 1$ .

$$Q_{n-1}(x) = \bar{T}_n(x) - P_n(x).$$

$$\text{sign}(Q_{n-1}(\bar{x}_k)) = \text{sign}\left(\frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\bar{x}_k)\right) = (-1)^k$$

$Q_{n-1}(x)$  меняет свой знак в  $n + 1$  точке  $\Rightarrow Q_{n-1}(x)$  имеет по крайней мере  $n$  корней. Противоречие.



# Содержание

Характеристика итерационных методов решения СЛАУ

Стационарные методы

Ортогональные полиномы Чебышева

Нестационарные методы

## Метод Рундсона решения СЛАУ

Пусть  $A = A^\top, A > 0$  и  $\det(A) \neq 0$ . Тогда итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} - b) \quad (63)$$

при  $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$  сходится к решению  $Ax = b$ .

Заменим  $\alpha$  на  $\alpha_k$ . Процесс станет не стационарным.

Возьмем начальное приближение  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  и выполним  $m$  итераций, получим  $x^{(m)}$  и

$$e^{(m)} = x^{(m)} - x^*. \quad (64)$$

Подберем  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$  так, чтобы ошибка  $e^{(m)}$  была минимальна.

# Метод Рундсона решения СЛАУ

Базис из ортонормированных собственных векторов матрицы  $A$

$$\begin{aligned}Aw^{(j)} &= \lambda_j w^{(j)}, j = 1, \dots, n \\ (w^{(j)}, w^{(i)}) &= \delta_{ji} \\ \|w^{(j)}\| &= 1\end{aligned}\tag{65}$$

Любой вектор можно разложить по векторам базиса из ортонормированных собственных векторов матрицы  $A$

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x^* = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} w^{(j)}.\tag{66}$$

(63)  $\Rightarrow$

$$e^{(k+1)} = e^{(k)} - \alpha_k A e^{(k)} = (E - \alpha_k A) e^{(k)}\tag{67}$$

## Метод Рундсона решения СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n \beta_j^{(k+1)} w^{(j)} = (E - \alpha_k A) \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} w^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} (1 - \alpha_k \lambda_j) w^{(j)}.$$

$$\beta_j^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} (1 - \alpha_k \lambda_j) = \beta_j^{(k-1)} (1 - \alpha_{k-1} \lambda_j) (1 - \alpha_k \lambda_j) = \dots = \beta_j^{(0)} \prod_{s=0}^k (1 - \alpha_s \lambda_j).$$

$$\|e^{(m)}\| = \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j^{(m)} w^{(j)} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \left( \beta_j^{(0)} \prod_{s=0}^{m-1} (1 - \alpha_s \lambda_j) \right) w^{(j)} \right\|$$

$$\|e^{(m)}\| \leq \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(0)}| \underbrace{\left| \prod_{s=0}^{m-1} (1 - \alpha_s \lambda_j) \right|}_{\Psi_j} \leq M_m \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(0)}| = M_m \|e^{(0)}\|_1 \leq M_m c \|e^{(0)}\|,$$

где  $M_m = \max_j \Psi_j$ .

Подберем  $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$  так, чтобы  $M_m$  получилось минимальным.

## Метод Ричардсона решения СЛАУ

$P_m(\lambda) = \prod_{s=0}^{m-1} (1 - \alpha_s \lambda)$  - полином относительно  $\lambda$ .

$$M_m = \max_j \left| \prod_{s=0}^{m-1} (1 - \alpha_s \lambda_j) \right| = \max_j \left| P_m(\lambda_j) \right| \xrightarrow{\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}} \min \quad (68)$$

Пусть имеется оценка для собственных чисел  $A$ :  $\delta \leq \lambda_j \leq \Delta, j = 1, \dots, n$ .  
Вместо задачи (68) будем решать

$$\max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |P_m(\lambda)| \xrightarrow{\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}} \min \quad (69)$$

Сделаем замену переменной:  $\lambda = \frac{\delta + \Delta}{2} + \frac{\Delta - \delta}{2} t$ .

Тогда  $P_m(\lambda) = \bar{P}_m(t) = \mu T_m(t)$ , где  $T_m(t)$  - полином Чебышева.

## Метод Ричардсона решения СЛАУ

$$\lambda = 0 \text{ при } t = t_0 \Rightarrow t_0 = -\frac{\Delta + \delta}{\Delta - \delta} \Rightarrow |t_0| > 1 \Rightarrow |T_m(t_0)| > 1$$
$$P_m(0) = 1 = \mu T_m(t_0) \Rightarrow |\mu| = \frac{1}{|T_m(t_0)|} < 1.$$

Если  $t_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2m}\right)$ ,  $k = 1, \dots, m$  - корни полинома Чебышева  $T_m(t)$ , то

$$\lambda_k = \frac{\delta + \Delta}{2} + \frac{\Delta - \delta}{2} t_k \quad (70)$$

корни полинома  $P_m(\lambda) \Rightarrow (1 - \alpha_s \lambda_k) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_s = \frac{1}{\lambda_k} = \frac{2}{(\delta + \Delta) + (\Delta - \delta)t_k}. \quad (71)$$

При вычислении  $\alpha_s$  необходимо брать разные  $t_k$  ( $s = 0, \dots, m-1, k = 1, \dots, m$ ).

# Алгоритм метода Ричардсона

1. Задать  $m$
2. Вычислить  $t_k$  и  $\lambda_k, k = 1, \dots, m$
3. Вычислить  $\alpha_s, s = 0, \dots, m - 1$
4. Использовать (63), подставляя на каждой итерации  $\alpha_s$

$$(68) \Rightarrow M_m \leq \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |P_m(\lambda)| = \max_{t \in [-1, 1]} |\mu T_m(t)| = |\mu| < 1.$$

$$\|e^{(m)}\| \leq c M_m \|e^{(0)}\| \leq c |\mu| \|e^{(0)}\|$$

$$\|e^{(mp)}\| \leq c |\mu|^p \|e^{(0)}\| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

## Метод Ричардсона. Замечания

1. Целесообразно выбирать  $\alpha_s, s = 0, \dots, m - 1$  в следующем порядке.
2.  $m = 1$  - метод с оптимальным выбором итерационного параметра.

$$\alpha_0 = \alpha = \frac{2}{\delta + \Delta}. \quad (72)$$

В идеале

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}. \quad (73)$$

Причем  $\alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)} = \frac{2}{\|A\|_2}$ .



## Градиентный метод решения СЛАУ (the gradient method, the steepest descent method)

Пусть  $A = A^{\top}, A > 0$  и

$$Ax = b. \quad (74)$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists! x^* : Ax^* = b.$$

Определим квадратичную форму  $F(y)$

$$F(y) = (Ay, y) - 2(b, y). \quad (75)$$

### Теорема

$x^*$  - решение (74)  $\Leftrightarrow x^*$  сообщает минимум (75).

Эта теорема позволяет заменить задачу решения СЛАУ (74) на задачу нахождения минимума функции  $F(y)$  (75).

## Доказательство

$\Rightarrow$

Пусть  $x^*$  - решение (74). Тогда

$$\begin{aligned} F(y) &= (Ay, y) - 2(b, y) = (Ay, y) - 2(Ax^*, y) + (Ax^*, x^*) - (Ax^*, x^*) = \\ &= (A(y - x^*), y) - [(Ax^*, y) - (Ax^*, x^*)] - (Ax^*, x^*) = (A(y - x^*), y - x^*) - (Ax^*, x^*) \end{aligned}$$

$$F(y) = \|y - x^*\|_{H_A}^2 - \|x^*\|_{H_A}^2. \quad (76)$$

$\Leftarrow$

Пусть  $x^*$  сообщает минимум (75).

$u \in \mathbb{R}^n$  - фиксировано,  $\alpha \in \mathbb{R}, y = x^* + \alpha u$

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x^* + \alpha u) = (A(x^* + \alpha u), x^* + \alpha u) - 2(b, x^* + \alpha u) = \\ &= (Ax^*, x^*) + (Ax^*, \alpha u) + (A\alpha u, x^*) + (A\alpha u, \alpha u) - 2(b, x^*) - 2(b, \alpha u) \end{aligned}$$

$$F(x^* + \alpha u) = F(x^*) + 2\alpha(Ax^* - b, u) + \alpha^2(Au, u) = \phi(\alpha). \quad (77)$$

## Доказательство

Необходимое и достаточное условие минимума  $\phi(\alpha)$  в точке  $\alpha^*$

$$\begin{cases} \phi'(\alpha^*) = 0 \\ \phi''(\alpha^*) > 0 \end{cases} \quad (78)$$

(77)  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \phi'(\alpha) = 2\alpha(Au, u) + 2(Ax^* - b, u) \\ \phi''(\alpha) = 2(Au, u) \end{cases} \quad (79)$$

$$\Rightarrow (Ax^* - b, u) = 0, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть  $u = Ax^* - b \Rightarrow \|Ax^* - b\|^2 = 0 \Rightarrow x^*$  - решение (74).

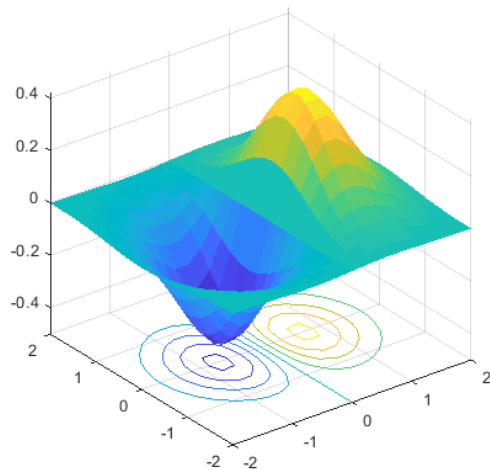
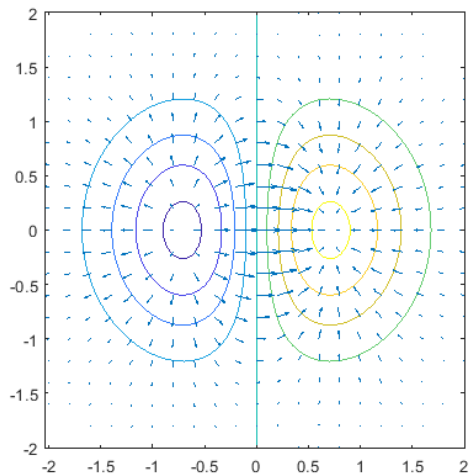
# Градиент функции

Градиент функции многих переменных  $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - это вектор

$$\nabla F(x) = \text{grad}F(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{\top}. \quad (80)$$

- ▶ Градиент функции в точке показывает направление наибольшего возрастания функции.
- ▶ Модуль градиента = скорость роста в направлении наибольшего возрастания.
- ▶ Градиент функции в точке перпендикулярен линии уровня.

# Градиент функции



## Градиентный метод решения СЛАУ

Каждое следующее приближение нужно получать, двигаясь в направлении, противоположном градиенту

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla F(x^{(k)}), \alpha_k > 0, \quad (81)$$

причем  $\alpha_k$  выбирать так, чтобы  $F(x^{(k+1)}) \xrightarrow{\alpha} \min$ .

$\nabla F(x^{(k)}) = 2(Ax^{(k)} - b) = g^{(k)}$  (проверить самостоятельно!).

$\nabla F(x^{(k)}) = -2r^{(k)}$ ,  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  - невязка (residual).

$$F(x^{(k+1)}) = F(x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}) = \phi(\alpha_k) \stackrel{(77)}{=} F(x^{(k)}) - 2\alpha_k \underbrace{(Ax^{(k)} - b, g^{(k)})}_{\frac{1}{2}g^{(k)}} + \alpha_k^2 (Ag^{(k)}, g^{(k)})$$

$$\phi'(\alpha_k) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_k = \frac{(g^{(k)}, g^{(k)})}{2(Ag^{(k)}, g^{(k)})} \quad (82)$$

# Сходимость градиентного метода

## Теорема

$A = A^\top > 0 \Rightarrow$  градиентный метод сходится при любом  $x^{(0)}$  и верна оценка

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_{H_A} \leq \left( \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right) \left\| x^{(k)} - x^* \right\|_{H_A}, \quad (83)$$

где  $0 < \delta < \lambda_j < \Delta, \forall j$ .

## Доказательство

Вычисление следующего приближения по градиентному методу

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)} = x^{(k)} - 2\alpha_k (Ax^{(k)} - b). \quad (84)$$

Определим  $y^{(k+1)}$  как

$$y^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{2}{\delta + \Delta} (Ax^{(k)} - b). \quad (85)$$

$$F(x^{(k+1)}) \leq F(y^{(k+1)}) \stackrel{(76)}{\Leftrightarrow} \|x^{(k+1)} - x^*\|_{H_A}^2 - \|x^*\|_{H_A}^2 \leq \|y^{(k+1)} - x^*\|_{H_A}^2 - \|x^*\|_{H_A}^2$$

Введем векторы ошибок:  $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$  и  $r^{(k)} = y^{(k)} - x^* \Rightarrow$

$$\|e^{(k+1)}\|_{H_A}^2 \leq \|r^{(k+1)}\|_{H_A}^2. \quad (86)$$

Выразим  $r^{(k+1)}$  через  $e^{(k)}$

$$r^{(k+1)} = e^{(k)} - \frac{2}{\delta + \Delta} (Ae^{(k)}) = \left( E - \frac{2}{\delta + \Delta} A \right) e^{(k)}. \quad (87)$$

$A = A^\top, A > 0 \Rightarrow A$  имеет базис из собственных векторов. Выберем из него ортонормированный базис  $w^{(j)}, j = 1, \dots, n$ .

$$e^{(k)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} w^{(j)} \Rightarrow Ae^{(k)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} \lambda_j w^{(j)}$$

$$\Rightarrow \|e^{(k)}\|_{H_A}^2 = (Ae^{(k)}, e^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \left( \beta_j^{(k)} \right)^2 \lambda_j$$



$$r^{(k+1)} = \left(E - \frac{2}{\delta+\Delta}A\right) \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} w^{(j)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} \left(E - \frac{2}{\delta+\Delta}A\right) w^{(j)}$$

$$\Rightarrow \|r^{(k+1)}\|_{H_A}^2 = \sum_{j=1}^n \left(\beta_j^{(k)}\right)^2 \left(1 - \frac{2\lambda_j}{\delta+\Delta}\right)^2 \lambda_j$$

Выберем  $M$  так, чтобы  $|1 - \frac{2\lambda_j}{\delta+\Delta}| \leq M, \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\|r^{(k+1)}\|_{H_A}^2 \leq M^2 \|e^{(k)}\|_{H_A}^2. \quad (88)$$

Докажем, что  $M < 1$ .

$\delta < \lambda_j < \Delta \Leftrightarrow -\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta} \leq 1 - \frac{2\lambda_j}{\delta+\Delta} \leq \frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}$  (проверить самостоятельно).

В качестве  $M$  можно взять  $\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}$ , которое меньше 1.

Тогда  $\|e^{(k+1)}\|_{H_A}^2 \stackrel{(86)}{\leq} \|r^{(k+1)}\|_{H_A}^2 \stackrel{(88)}{\leq} M^2 \|e^{(k)}\|_{H_A}^2 \leq \dots \leq M^{2(k+1)} \|e^{(0)}\|_{H_A}^2.$

$$\Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^*\|_{H_A}^2 \leq \left(\frac{\Delta-\delta}{\Delta+\delta}\right)^{2(k+1)} \|x^{(0)} - x^*\|_{H_A}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

## О скорости сходимости

$$\left\| e^{(k+1)} \right\|_{H_A} \leq M \left\| e^{(k)} \right\|_{H_A} \quad (89)$$

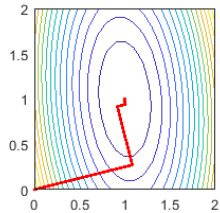
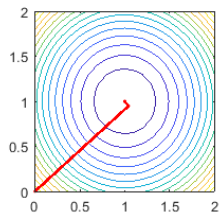
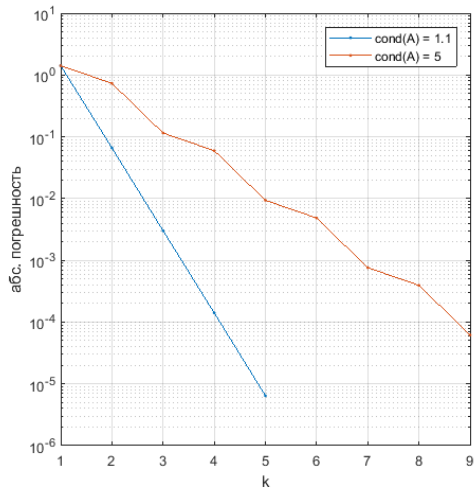
где  $M = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} = \frac{\frac{\Delta}{\delta} - 1}{\frac{\Delta}{\delta} + 1} = \frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1}$ .

## Об окончании итерационного процесса

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_{H_A} \leq M \left\| x^{(k)} - x^* \pm x^{(k+1)} \right\|_{H_A} \leq M \left\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \right\|_{H_A} + M \left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_{H_A}$$

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|_{H_A} \leq \frac{M}{1 - M} \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{H_A} \quad (90)$$

# Градиентный метод



# Метод сопряженных направлений (the Conjugate Gradient Method)

Градиентный метод - движение в направлении антиградиента  $F$ . Каждое новое направление ортогонально предыдущему.

Не существует ли более разумного способа выбора нового направления?

Рассмотрим движение в произвольном направлении  $p^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}. \quad (91)$$

$$F(x^{(k+1)}) = F(x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}) \stackrel{(77)}{=} F(x^{(k)}) + 2\alpha_k \underbrace{(Ax^{(k)} - b, p^{(k)})}_{\frac{1}{2}g^{(k)}} + \alpha_k^2 (Ap^{(k)}, p^{(k)}) = \phi(\alpha_k)$$

$$\phi'(\alpha_k) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_k = -\frac{(g^{(k)}, p^{(k)})}{2(Ap^{(k)}, p^{(k)})} = \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})} \quad (92)$$

Как определить направление  $p^{(k)}$ ?

## Сопряженные направления

Векторы  $x$  и  $y$  называются  $A$ -сопряженными ( $A$ -ортогональными), если

$$(x, Ay) = 0. \quad (93)$$

Направление  $p^{(k)}$  должно быть  $A$ -сопряженными всем предыдущим направлениям  $p^{(j)}, j = 0, \dots, k-1$

$$(p^{(k)}, Ap^{(j)}) = 0. \quad (94)$$

Будем искать  $p^{(k)}$  в виде

$$p^{(k)} = r^{(k)} - \beta_{k-1}p^{(k-1)}. \quad (95)$$

$$(p^{(k)}, Ap^{(k-1)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_{k-1} = \frac{(r^{(k)}, Ap^{(k-1)})}{(p^{(k-1)}, Ap^{(k-1)})}. \quad (96)$$

$(p^{(k)}, Ap^{(j)}) = 0, j = 0, \dots, k-2$  - проверить самостоятельно.

$$x^{(0)}, p^{(0)} = r^{(0)}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

$\alpha_k$  по формуле (92) и  $x^{(k+1)}$  по формуле (91)

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)}$$

$\beta_k$  по формуле (96) и  $p^{(k+1)}$  по формуле (95)

Пусть  $A = A^\top > 0$ . Тогда точное решение СЛАУ  $Ax = b$  по методу сопряженных направлений находится не более чем за  $n$  шагов.

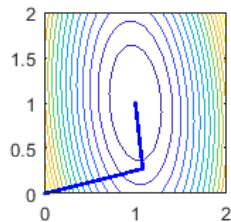
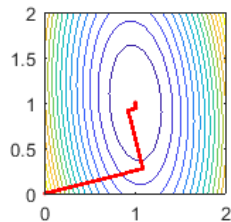
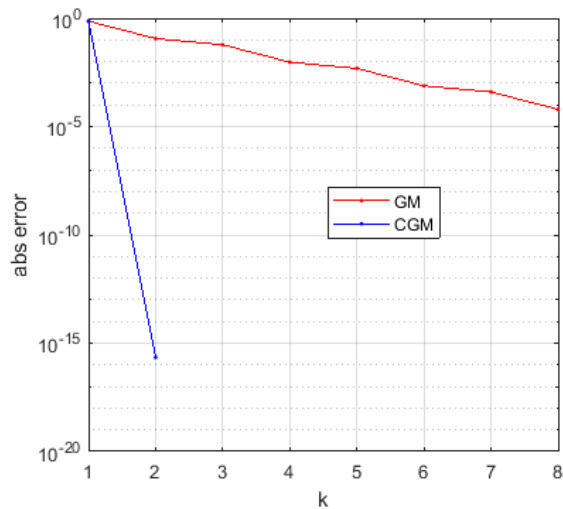
Метод может быть отнесен к прямым методам.

### Замечание

Метод сопряженных направлений применяется как итерационный

- ▶ ошибки округления
- ▶ число шагов для достижения желаемой точности может оказаться значительно меньшим  $n$ .

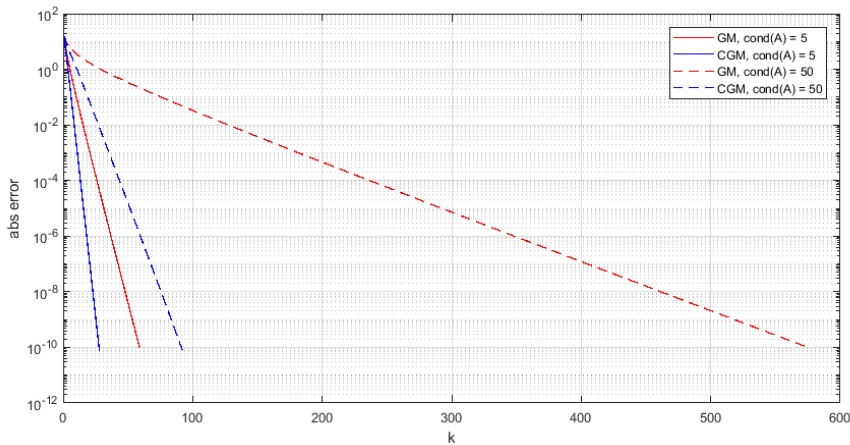
# Градиентный метод и метод сопряженных направлений



# Градиентный метод и метод сопряженных направлений

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$ ,  $\epsilon = 10^{-10}$ .

$\text{cond}(A) = 5$ ,  $\text{cond}(A) = 50$





## О критерии остановки в итерационных методах

$$\text{МПИ: } x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \Rightarrow e^{(k+1)} = Ce^{(k)} \Rightarrow \|e^{(k+1)}\| \leq \|C\| \|e^{(k)}\| \Rightarrow$$

$$\|e^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \quad (97)$$

$\|C\|$  можно оценить:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \Rightarrow$$

$$\|C\| \geq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|} = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}. \quad (98)$$

Учитывая (98) в (97), получим индикатор  $\epsilon_{k+1}$  для  $\|e^{(k+1)}\|$

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\delta_{k+1}^2}{\delta_k - \delta_{k+1}}. \quad (99)$$

# О критерии остановки в итерационных методах

## Замечание

$\epsilon_{k+1}$  не является верхней границей для  $\|e^{(k+1)}\|$ .

## Замечание

Если про ошибки на соседних итерациях известно, что  $\|e^{(k+1)}\| \leq q \|e^{(k)}\|$  (например, градиентный метод, формула (83)), то можно провести аналогичные рассуждения.

## О критерии остановки в итерационных методах

”Часто” останавливаются по невязке:  $\|r^{(k)}\| \leq \epsilon$ . Для абсолютной погрешности верно

$$\|x^* - x^{(k)}\| = \|A^{-1}b - x^{(k)}\| = \|A^{-1}r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \|r^{(k)}\| \leq \|A^{-1}\| \epsilon. \quad (100)$$

Пусть контролируется нормализованная невязка:  $\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \epsilon$ . Тогда справедлива оценка для относительной погрешности

$$\frac{\|x^* - x^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|r^{(k)}\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \text{cond}(A) \epsilon. \quad (101)$$

# О критерии остановки в итерационных методах

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$ ,  $\text{cond}(A) = 100$ .

Метод Зейделя.

