Лабораторная работа 2
Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми методами

1. (**+1балл**) Создать СЛАУ (размерность не менее 10) с матрицей с заданным числом обусловленности (см. Указания)

Замечание 1. Матрица должна иметь специальные свойства (симметрия, положительная определенность и т.д.) только тогда, когда этого требует метод

2. (**+1балл**) Запрограммировать один из методов решения СЛАУ (по вариантам) с выбором главного элемента по столбцу[1)]
   а. Метод Гаусса
   б. Метод Гаусса с вычислением обратной матрицы
   в. Метод Жордана (без обратного хода) в прямом порядке
   г. Метод Жордана с вычислением обратной матрицы
   д. LU – разложение
   е. LDR – разложение
   ж. LDL^T разложение
   з. SS^T – разложение Холецкого (метод квадратных корней)

Замечание 1. Выбор главного элемента по строке (по всей матрице) увеличивает количество баллов на 0,5 (1) балла

3. Найти решение СЛАУ запрограммированным методом, вычислить
   а. Норму фактической ошибки $||x-x^*||$
   б. Норму невязки $||Ax-b||$
   в. Проверить выполнение неравенства $\|\delta x\| / \|x\| \le cond(A)\|\delta b\| / \|b\|$, задав возмущение правой части (см. Указания)

4. (**+2балла**) При проведении контрольных тестов построить зависимости нормы фактической ошибки решения СЛАУ и нормы невязки от числа обусловленности матрицы

5. (**+1бонус**) Исследование метода на специальных матрицах и сравнение со встроенными функциями
   а. Исследовать поведение метода на матрице Гильберта (число обусловленности матрицы Гильберта зависит от размерности). Как можно улучшить решение
   б. Проверить работу метода на тестовой матрице A (с нулевым определителем) и на матрице $B=10A$. В каком месте алгоритм дает сбой?

В MatLab исследовать на построенной матрице встроенную функцию
   в. lu()
   г. linsolve()
   д. chol()

Указания о построении СЛАУ

Число $cond(A)=||A||\cdot||A^{-1}||$ называется числом обусловленности матрицы. В общем случае, оно зависит от вида нормы. (Число обусловленности, вычисленное по 2й норме минимально). Воспользуемся тем, что число обусловленности диагональной матрицы D вычисляется просто $cond(D)=max(|d_i|)/min(|d_i|)$ и не зависит от вида нормы. С другой стороны, d_i являются собственными числами матрицы D.

Определенность матрицы A такая же как и определенность матрицы D, которая в свою очередь зависит от знаков d_i.

Дальнейшее построение основано на свойстве подобного преобразования, которое не изменяет с.ч. матрицы.

	$D=diag(d_i)$; $\lambda(A)=\lambda(D)$; $det(A)=det(D)$					
		$A=$	св-ва	$cond_1$	$cond_\infty$	$cond_2$
1	B: $det(B)\neq 0$	$B^{-1}DB$	$A\neq A^T$	зависит от B		
2	Q: $Q^{-1}=Q^T$	$Q^{-1}DQ$	$A=A^T$	$>cond(D)$	$>cond(D)$	$cond(D)$
3	U: $diag(U)=D$ $U_{ij}=0, i>j$	$Q^{-1}UQ$	$A\neq A^T$	$>cond(D)$	$>cond(D)$	$\sim cond(D)$

1 способ. При помощи. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=B^{-1}DB$ будут те же самые с.ч. Матрица A в общем случае будет **не симметричной**. Положительная определенность зависит от знаков элементов диагональной матрицы D

2 способ. При помощи **ортогональной матрицы** Q. Если есть диагональная матрица D (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TDQ$ будут те же самые с.ч. Особенность матрицы A в том, что она будет **симметричной**.

3 способ. Создание **несимметричной** матрицы при помощи **ортогональной** матрицы Q. Если есть треугольная (верхняя или нижняя) матрица B (с с.ч. на диагонали), то у матрицы $A=Q^TBQ$ будут те же самые с.ч. и матрица при этом получится несимметричной

Создание ортогональной матрицы

Ортогональная матрица Q создается или ортогональным разложением любой невырожденной матрицы (в MatLab $[Q, r]=qr(rand(n))$) или на основе произвольного вектора w преобразованием Хаусхолдера $Q=E-2ww^T/||w||^2$

Создание СЛАУ по известной матрице

Задать точное решение x^*

Вычислить правую часть СЛАУ $b=Ax^*$

Задание возмущения правой части

$\delta b=2(0.5-rand(n,1))b$