

Probabilidad y Estadística (C)

Trabajo Práctico: Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite.

Resolver los siguientes ítems utilizando R. Debe entregarse un archivo word o pdf con una breve introducción al tema y una descripción del trabajo realizado, sus resultados y conclusiones, que pueda entenderse sin necesidad de leer el presente documento ni el código de R. Además, adjuntar el script de R creado para resolver el ejercicio (éste no será corregido).

1. Para cada n entre 1 y 3000: generar observaciones x_1, \dots, x_n de X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$, con $\lambda = \dots$ y obtener

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

es decir, una observación \bar{x}_n de $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$.

Realizar un gráfico de n vs \bar{x}_n . ¿Qué observa? ¿A qué se debe?

Realice este cálculo fijando la semilla adentro y afuera del `for`. ¿Qué diferencia observa? ¿A qué se debe la diferencia entre los gráficos?

2. Para apreciar aún un poco más la Ley de los Grandes Números, realizar el siguiente experimento:
 - (a) Considerar dos observaciones x_1 y x_2 de variables aleatorias X_1 y X_2 independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$ y guardar el promedio de ambas, es decir, \bar{x}_2 . Repetir 1000 veces y a partir de los valores obtenidos realizar un histograma, un boxplot y un QQ-plot. ¿Qué características tienen?
 - (b) Aumentar a cinco las variables promediadas, es decir, considerar ahora $n = 5$ observaciones de variables aleatorias independientes con la misma distribución del ítem anterior y guardar \bar{x}_5 . Repetir 1000 veces y realizar un histograma, un boxplot y un QQ-plot para los valores obtenidos. Comparar con los obtenidos en el ítem anterior. ¿Qué se observa?
 - (c) Aumentar a $n = 30$ el número de observaciones de v.a.i.i.d. y repetir el ítem anterior. Repetir con $n = 500$.
 - (d) ¿Qué pasaría si se siguiera aumentando el tamaño de la muestra?
 - (e) Por último, hacer un boxplot de los 4 conjuntos de datos en el mismo gráfico (es decir, “boxplots paralelos”). ¿Cómo puede comparar lo que observa con lo observado en el punto 1.?
3. El teorema central del límite nos dice que cuando hacemos la siguiente transformación con los promedios:

$$\frac{\bar{X}_n - E(X_1)}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}},$$

la distribución de esta variable aleatoria se aproxima a la de la normal estándar si n es suficientemente grande. Comprobaremos mediante una simulación este resultado.

- (a) Calcular la esperanza y varianza de X_1 .
 - (b) Realizar la transformación mencionada en los 4 conjuntos de datos del ítem 2. y graficar boxplots paralelos y QQ-plots.
 - (c) Realizar 4 histogramas y a cada uno de ellos superponerle la densidad de la normal estándar. *Sugerencia:* una vez creado el histograma, utilizar la función `lines(grilla, dnorm(grilla))` con `grilla` un vector de valores posibles (y consecutivos) para el eje x .
 - (d) Explicar los resultados obtenidos.
4. Repetir los ítems anteriores generando ahora muestras de variables aleatorias independientes con distribución $Bi(n, p)$, con $n = \dots$ y $p = \dots$.