高量往年考试题

梁天笑[1] 盛炳开[2] 梁浩[3]

2019 年 1 月 14 日

目　录

1　2004 年习题～2010 年习题

1.1　2004 年习题

1　试证明幺正算符 U 与复共轭算符 K 的乘积为反幺正算符。

证明：$\because$

$$(UK)\sum_n c_n\psi_n = U\sum_n c_n^* K\psi_n = \sum_n c_n^*(UK)\psi_n \tag{1.1}$$

$\therefore UK$ 具有反线性。下面需要证明 $(UK)^{-1} = (UK)^\dagger$。

$\because$

$$(UK)(UK)^\dagger = UK\cdot KU^\dagger = UK^2U^\dagger = UU^\dagger = 1, \text{其中} K^2 = 1$$

$\therefore$ 可得 $(UK)^{-1} = KU^\dagger$。

又 $\because$

$$\begin{aligned}\int \psi^*(UK)\phi\,\mathrm{d}\tau = \int \psi^* U\phi^*\,\mathrm{d}\tau = \int (U^\dagger\psi)^*\phi^*\,\mathrm{d}\tau \\ = \int \psi^* K(U^\dagger\phi)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.2}$$

$\therefore$ 可得 $(UK)^\dagger = KU^\dagger$，即有 $(UK)^\dagger = (UK)^{-1}$，UK 为反幺正算符。

2　已知在 $\hat{s}_z$ 表象中，$\hat{s}_x = \dfrac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\hat{s}_y = \dfrac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$，求 $\hat{s}_y$ 在 $\hat{s}_x$ 表象中的矩阵表示。

解：$\hat{s}_x$ 在 $\hat{s}_z$ 表象中对应的本征基矢为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，变换矩阵的表达形式为 $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，

$\therefore$

$$\hat{s}_y = U\,\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}U^{-1} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$\hat{s}_y$ 在 $\hat{s}_x$ 表象中的矩阵表示为 $\dfrac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$。

3 试证明在空间转动变换下 $I = \sum_m Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)$ 保持不变，式中 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 为球谐函数。

证明：在空间转动变换下

$$\begin{aligned}\sum_m Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta',\phi') &= \sum_m \sum_{m'm''} D_{m'm}^{l*}(\alpha\beta\gamma)Y_{lm}^*(\theta,\phi)D_{m''m}^{l}(\alpha\beta\gamma)Y_{lm}(\theta,\phi) \\ &= \sum_m \sum_{m'm''} \delta_{m'm''}Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi) \\ &= \sum_m Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)\end{aligned}$$

$\therefore$ 在空间转动变换下 $I = \sum_m Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)$ 保持不变。

4 试利用一阶张量投影定理计算电子磁矩在 $|jm\rangle = \sum_{m_l m_s} C_{lm_l\frac{1}{2}m_s}^{jm} |lm_l\rangle \left|\frac{1}{2}m_s\right\rangle$ 态上的平均值。电子的磁矩算符为 $\mu = \mu_0(g_L\boldsymbol{l} + g_S\boldsymbol{s})$，其中 $\mu_0 = -\dfrac{e}{2m_ec}$；$g_L = 1$ 和 $g_S = 2$ 分别为电子的轨道和自旋朗德因子，m_e 为电子静止质量。

解：由 $Wignet - Eckart$ 定理

$$\langle jm|\,\mu\,|jm\rangle = C_{lm1M}^{jm}\,\langle j\|\,\mu_0\,\|j\rangle \tag{1.4}$$

其中 $m = m + M$，$\therefore M = 0$。

$\therefore$ 由投影定理

$$\begin{aligned}\langle jm|\,\mu\,|jm\rangle = \langle jm|\,\mu_0\,|jm\rangle &= \frac{\langle jm|\,\hat{J}_0\,|jm\rangle\,\langle jm|\,\hat{J}\cdot\hat{\mu}\,|jm\rangle}{j(j+1)\hbar^2} \\ &= m\hbar\frac{\langle jm|\,\hat{J}\cdot\hat{\mu}\,|jm\rangle}{j(j+1)\hbar^2}\end{aligned} \tag{1.5}$$

又 $\because$

$$\hat{J}\cdot\hat{\mu} = \mu_0(g_L\hat{J}\cdot\hat{L} + g_S\hat{J}\cdot\hat{S})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu_0[g_L(\hat{J}^2+\hat{L}^2-\hat{S}^2)+g_S(\hat{J}^2+\hat{S}^2-\hat{L}^2)] \\
&= \frac{1}{2}\mu_0[(g_L+g_S)\hat{J}^2+(g_L-g_S)(\hat{L}^2-\hat{S}^2)]
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

∴

$$
\begin{aligned}
\langle jm|\,\mu_0\,|jm\rangle &= m\hbar\frac{\langle jm|\,\hat{J}\cdot\hat{\mu}\,|jm\rangle}{j(j+1)\hbar^2} \\
&= \frac{\mu_0 m\hbar}{2j(j+1)}\{g_L[j(j+1)+l(l+1)-s(s+1)]+g_s[j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)]\} \\
&= \frac{\mu_0 m\hbar}{2}\left[(g_L+g_S)+(g_L-g_S)\frac{l(l+1)-s(s+1)}{j(j+1)}\right]
\end{aligned}
$$

5 两个角动量 $\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2$ 耦合成总角动量 $\boldsymbol{J}$，试推导出约化矩阵元 $\left\langle j_1'j_2'J\left\|\hat{T}_L(1)\right\|j_1j_2J\right\rangle$ 的表达式，式中 $|j_1j_2J\rangle=\sum\limits_{m_1m_2}C^{JM}_{j_1m_1j_2m_2}\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle$，$\hat{T}_L(1)$ 为作用于第一个角动量的不可约张量算符。

解：由 $Wignet-Eckart$ 定理

$$
\left\langle j_1'j_2'J\left\|\hat{T}_L(1)\right\|j_1j_2J\right\rangle=\frac{\left\langle j_1'j_2'J\left|\hat{T}_L(1)\right|j_1j_2J\right\rangle}{C^{JM}_{JMj_1m_1}}
\tag{1.7}
$$

对 $C^{JM}_{JMj_1m_1}$ 有 $J=J+j_1$ 和 $M=M+m_1$，所以 $j_1=m_1=0$，$C^{JM}_{JMj_1m_1}=C^{JM}_{JM00}=1$。

对 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{j}_1+\boldsymbol{j}_2$，当 $j_1=0$ 时，$j_2=J$。

∴

$$
|j_1j_2J\rangle=|0JJ\rangle=C^{JM}_{00JM}\,|00\rangle\,|JM\rangle=|00\rangle\,|JM\rangle
\tag{1.8}
$$

∴

$$
\begin{aligned}
\left\langle j_1'j_2'J\left\|\hat{T}_L(1)\right\|j_1j_2J\right\rangle &= \left\langle j_1'j_2'J\left|\hat{T}_L(1)\right|j_1j_2J\right\rangle=\left\langle j_1'j_2'J\left|\hat{T}_L(1)\right|0JJ\right\rangle \\
&= \sum_{m_1'm_2'}C^{JM}_{j_1'm_1'j_2'm_2'}\left\langle j_1'm_1'\left|\hat{T}_L(1)\right|00\right\rangle\langle j_2'm_2'|JM\rangle \\
&= \sum_{m_1'm_2'}C^{JM}_{j_1'm_1'j_2'm_2'}\left\langle j_1'm_1'\left|\hat{T}_L(1)\right|00\right\rangle\delta_{j_2'J}\delta_{m_2'M}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{m_1'} C^{JM}_{j_1'm_1'JM} \left\langle j_1'm_1' \left| \hat{T}_L(1) \right| 00 \right\rangle$$

类似，在 $C^{JM}_{j_1'm_1'JM}$ 中，$j_1' = m_1' = 0$，$C^{JM}_{j_1'm_1'JM} = 1$。

$$\therefore \left\langle j_1'j_2'J \left\| \hat{T}_L(1) \right\| j_1j_2J \right\rangle = \left\langle 00 \left| \hat{T}_L(1) \right| 00 \right\rangle$$

6 设两个独立的谐振子组成一个体系，以 n_1, n_2 分别表示二者的量子数，以 $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ 分别表示二者的产生消灭算符，粒子数表象中的归一化本征态记为 $|n_1n_2\rangle$。令 $a = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$，定义算符 $\hat{\boldsymbol{J}} = \dfrac{1}{2}\hat{a}^\dagger\sigma\hat{a}$，其中 σ 为泡利矩阵。**(1)** 写出 $\boldsymbol{J}$ 的各个分量的表达式。**(2)** 证明如此定义的 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 满足角动量算符的全部代数性质。**(3)** 求出 $\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\boldsymbol{J}}_z$ 的本征值。

解:

(1)

$$\begin{aligned}
\hat{J}_x &= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) \\
\hat{J}_y &= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\right)\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) \\
\hat{J}_z &= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] &= \hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x = \frac{i}{4}\left[(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) - (\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)\right] \\
&= \frac{i}{4}\Big(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 \\
&\quad + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\Big)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

又 $\because$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 &= \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right] = \hat{a}_1^\dagger\left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right] + \left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right]\hat{a}_2 \\
&= \hat{a}_1^\dagger\left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\right]\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\left[\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1\right]\hat{a}_2 \\
&= \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] &= \frac{i}{4}\cdot 2\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right) = \frac{i}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \\
&= i\hat{J}_z
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

$\therefore \left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hat{J}_z$，类似有 $\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hat{J}_x$ 和 $\left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hat{J}_y$。所以

$$
\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad i,j,k = x,y,z
$$

$\therefore \hat{\boldsymbol{J}}$ 满足角动量算符的全部代数性质。

(3)

$$
\begin{aligned}
\left\langle n_1n_2\middle|\hat{J}_z\middle|n_1n_2\right\rangle &= \left\langle n_1n_2\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)\middle|n_1n_2\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle n_1n_2\left|(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)\right|n_1n_2\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}(n_1 - n_2)
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle n_1n_2\middle|\hat{J}^2\middle|n_1n_2\right\rangle &= \left\langle n_1n_2\middle|\left(\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) + \hat{J}_z^2\right)\middle|n_1n_2\right\rangle \\
&= \left\langle n_1n_2\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right)\middle|n_1n_2\right\rangle + \left\langle n_1n_2\middle|\hat{J}_z^2\middle|n_1n_2\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

$\because \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 = \hat{a}_1^\dagger(1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)\hat{a}_1$

$\therefore$

$$
\left\langle n_1n_2\middle|\frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right)\middle|n_1n_2\right\rangle = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 2n_1n_2) \tag{1.15}
$$

$\therefore$

$$
\left\langle n_1n_2\middle|\hat{J}^2\middle|n_1n_2\right\rangle = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) + \frac{1}{4}(n_1 + n_2)^2 \tag{1.16}
$$

7 写出单电子相对论性 $Dirac$ 方程中算符 α 和 β 所满足的代数关系。α 和 β 的矩阵表示不是唯一的，在 $Weyl$ 表象中，取 $\beta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$，其中 I 为二阶单位矩阵，试推导出在这一表象中 α 的矩阵表示。

解:

$$\beta^2=1 \quad \alpha_i^2=1 \quad \{\alpha_i,\alpha_j\}=\delta_{ij} \quad \{\alpha_i,\beta\}=0 \text{ 其中} i,j=x,y,z$$

设 $\alpha_i=\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}$，代入 $\{\alpha_i,\beta\}=0$，得

$$\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_i & A_i\\ D_i & C_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_i & D_i\\ A_i & B_i\end{bmatrix}=0 \tag{1.17}$$

$\therefore \alpha_i=\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ -B_i & -A_i\end{bmatrix}$，代入 $\{\alpha_i,\alpha_j\}=\delta_{ij}$，得

$$\begin{vmatrix}A_i^2+B_i^2 & \\ & A_i^2-B_i^2\end{vmatrix}=1 \tag{1.18}$$

$\therefore B_i^2=0, A_i^2=1$，选取 $A_i=\sigma_i$，$\therefore \alpha_i=\begin{bmatrix}\sigma_i & \\ & -\sigma_i\end{bmatrix} \quad i=x,y,z$。

8 求 $Dirac$ 粒子在深为 V_0，宽为 a 的一维方势阱中的能级。

解：已知 $V=\begin{cases}-V_0 & 0<x<a\\ 0 & x>a \text{ 或 } x<0\end{cases}$，设该粒子波函数为 $\boldsymbol{\Psi}$，由能量本征方程

$$\hat{H}\boldsymbol{\Psi}=E_n\boldsymbol{\Psi}=(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\boldsymbol{\beta}-V_0)\boldsymbol{\Psi} \tag{1.19}$$

$\therefore$ 有

$$\begin{vmatrix}mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc^2\end{vmatrix}\boldsymbol{\Psi}=(E_n+V_0)\boldsymbol{\Psi} \tag{1.20}$$

若存在非零解，则有

$$\begin{vmatrix}mc^2-(E_n+V_0) & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc^2-(E_n+V_0)\end{vmatrix}\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{1.21}$$

$\therefore$

$$E_n=\begin{cases}-V_0+\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} & 0<x<a\\ -V_0-\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} & x>a \text{ 或 } x<0\end{cases} \tag{1.22}$$

9 试在 $Schrödinger$ 图像下计算一维自由粒子的传播子 $K(x''t'', x't')$。

解：由传播子满足的方程得

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})K(xt, x't') = i\hbar\delta(x - x')\delta(t - t') \tag{1.23}$$

由 $Schrödinger$ 方程出发，设 $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$，$Schrödinger$ 方程的形式解为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

时间演化算符 $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ 为幺正算符，建立 $|\psi(t'')\rangle$ 和 $|\psi(t')\rangle$ 的演化关系：

$$|\psi(t'')\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|\psi(t')\rangle$$

上式左乘 $\langle x''|$，并插入封闭关系 $\displaystyle\int \mathrm{d}\tau\,|x'\rangle\langle x'|$，得

$$\langle x''|\psi(t'')\rangle = \int \mathrm{d}x'^3\,\langle x''|\,e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}\,|x'\rangle\langle x'|\psi(t'')\rangle \tag{1.24}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\psi(x'', t'') &= \int \mathrm{d}x'^3\,\langle x''|\,e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}\,|x'\rangle\,\psi(x', t')\\ \psi(x'', t'') &= \int \mathrm{d}x'^3 K(x''t'', x't')\psi(x', t')\end{aligned} \tag{1.25}$$

其中 $K(x''t'', x't') = \left\langle x''\left|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}\right|x'\right\rangle$ 称为传播子。

1.2 2005 年习题

1 试证复数共轭算符 $\hat{K}$ 为反幺正算符，并求解其本征问题。

解：先证明 $\hat{K}$ 具有反线性：对 $\forall\psi \in R$

$$\hat{K}\psi = \psi^* \qquad \hat{K}\sum_i c_i\psi_i = \sum_i c_i^*\hat{K}\psi_i \tag{1.26}$$

$\because$

$$\hat{K}^2\psi = \psi \Rightarrow \hat{K}^2 = 1 \Rightarrow \hat{K}^{-1} = \hat{K} \tag{1.27}$$

又 $\because$

$$\begin{aligned}\int \psi^*\hat{K}\phi\,\mathrm{d}\tau &= \int \psi^*\phi^*\,\mathrm{d}\tau = \int (\hat{K}\psi)\phi^*\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \phi^*\psi^*\,\mathrm{d}\tau = \int (\hat{K}\phi^*)\psi\,\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.28}$$

$\therefore \hat{K}^\dagger = \hat{K} \Rightarrow \hat{K}^{-1} = \hat{K}^\dagger$，$\hat{K}$ 为反幺正算符。设 $\hat{K}$ 本征矢为 $|k\rangle$，对应本征值为 k

$$\hat{K}\,|k\rangle = k\,|k\rangle \tag{1.29}$$

$\therefore$

$$\hat{K}^2\,|k\rangle = |k\rangle = \hat{K}k\,|k\rangle = k^*\hat{K}\,|k\rangle = k^*k\,|k\rangle \tag{1.30}$$

$\therefore |k\rangle = k^*k\,|k\rangle$，则有 $k^*k = 1$，$\therefore k = e^{\pm im\alpha}$。

2 设 $\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)$ 和 $\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2)$ 分别为阶和阶不可约张量算符，求证由下式定义的算符为阶不可约张量算符：

$$\hat{T}_{LM}(\tau_1\tau_2) = \sum_{m_1m_2} C^{LM}_{l_1m_1l_2m_2}\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2)$$

解：在无穷小转动变换 $U(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta)$ 下

$$
\begin{aligned}
U\hat{T}_{LM}(\tau_1\tau_2)U^{-1} &= \sum_{m_1m_2} C^{LM}_{l_1m_1l_2m_2} U\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)U^{-1}U\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2)U^{-1} \\
&= \sum_{m_1m_2} C^{LM}_{l_1m_1l_2m_2} \sum_{\mu_1} D^{l_1}_{\mu_1m_1}\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1) \sum_{\mu_2} D^{l_2}_{\mu_2m_2}\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2) \\
&= \sum_{\mu_1\mu_2m_1m_2} C^{LM}_{l_1m_1l_2m_2} \sum_{L'\mu_1M'} C^{L'\mu}_{l_1\mu_1l_2\mu_2} C^{L'M'}_{l_1m_1l_2m_2} D^{L'}_{\mu M'}\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2) \\
&= \sum_{\mu_1\mu_2} \sum_{L'\mu_1M'} C^{L'\mu}_{l_1\mu_1l_2\mu_2} \delta_{LL'}\delta_{MM'} D^{L'}_{\mu M'}\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2) \\
&= \sum_{\mu} \sum_{\mu_1\mu_2} C^{L\mu}_{l_1\mu_1l_2\mu_2} D^{L}_{\mu M}\hat{T}_{l_1m_1}(\tau_1)\hat{T}_{l_2m_2}(\tau_2) \\
&= \sum_{\mu} D^{L}_{\mu M}\hat{T}_{LM}(\tau_1\tau_2)
\end{aligned}
$$

$\therefore \hat{T}_{LM}(\tau_1\tau_2)$ 是 L 阶不可约张量。

3 对一个由两个自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子组成的体系，定义算符

$$S_{12} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

证明:

(1) S_{12} 与算符 $\boldsymbol{S}^2$ 对易，这里 $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$。

(2) 对 $S = 0$，有 $S_{12}^2 = 2S_{12}$，而 $S = 1$ 时，$S_{12}^2 = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}S_{12}$。

(3) $S_{12}\chi_{00} = 0$，这里 $\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2)$，其中 $|\pm\rangle$ 为 σ_z 分别对应于本征值 ± 1 的本征态。

解:

(1) $\because \boldsymbol{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{\hbar^2}{4}\left(\boldsymbol{\sigma}_1^2 + \boldsymbol{\sigma}_2^2 + 2\right)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{\hbar^2}{2}(3I + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$

$\therefore$

$$\left[S_{12}, \boldsymbol{S}^2\right] = \left[S_{12}, \frac{\hbar^2}{2}(3I + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\right] = \frac{\hbar^2}{2}[S_{12}, \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] \tag{1.31}$$

其中

$$[S_{12}, \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2] = \frac{1}{r^2} 2I \left(r^2 I^{(1)} - r^2 I^{(2)} \right) = \frac{1}{r^2} 2I \left(r^2 - r^2 \right) = 0 \tag{1.32}$$

$\therefore S_{12}$ 与算符 $\boldsymbol{S}^2$ 对易。

(2)

$$\begin{aligned} S_{12}^2 &= \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^4} + \frac{1}{9} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)^2 - \frac{2}{3} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \\ &= I + \frac{1}{9} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)^2 - \frac{2}{3} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{S}^2 = \frac{\hbar^2}{2} (3I + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ 得

$$S = 0,\ \boldsymbol{S}^2 = \frac{\hbar^2}{2} (3I + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = -3I \tag{1.33}$$

$\therefore$

$$S_{12}^2 = 2I + 2\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} = 2\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 2S_{12}$$

以及

$$S = 1,\ \boldsymbol{S}^2 = \frac{\hbar^2}{2} (3I + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = 2\hbar^2 I \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = I \tag{1.34}$$

$\therefore$

$$S_{12}^2 = \frac{10}{9}I - \frac{2}{3}\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} = \frac{8}{9}I + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{2}{3}\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2} = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}S_{12}$$

(3) $S = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_2$，此时 $S_{12} = 0$，$\therefore S_{12}\chi_{00} = 0$。

4 令 $\hat{n} = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$，其中 α 为量子态标记，证明无论对玻色子还是费米子，均有

$$\left[\hat{n}, \hat{a}_\alpha^\dagger\right] = \hat{a}_\alpha^\dagger \quad [\hat{n}, \hat{a}_\alpha] = -\hat{a}_\alpha$$

解:

• 对玻色子有 $\left[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger\right] = 1 \Rightarrow \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = 1$

$\therefore$

$$\left[\hat{n}, \hat{a}_\alpha^\dagger\right] = \hat{n}\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \left(1 + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha\right) - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \\
&= \hat{a}_\alpha^\dagger
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
[\hat{n}, \hat{a}_\alpha] &= \hat{n}\hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha \hat{n} \\
&= \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = \left(1 + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha\right) \hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \\
&= -\hat{a}_\alpha
\end{aligned}
$$

• 对费米子有 $\left\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger\right\} = 1 \Rightarrow \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = 1$，以及 $\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha\} = 0, \left\{\hat{a}_\alpha^\dagger, \hat{a}_\alpha^\dagger\right\} = 0$
$\therefore \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger = 0$，进而有

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{n}, \hat{a}_\alpha^\dagger\right] &= \hat{n}\hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{n} \\
&= \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \left(1 + \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha\right) - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \\
&= \hat{a}_\alpha^\dagger - 2\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger
\end{aligned}
$$

同理有

$$
\begin{aligned}
[\hat{n}, \hat{a}_\alpha] &= \hat{n}\hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha \hat{n} \\
&= \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha - \left(1 - \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha\right) \hat{a}_\alpha \\
&= 2\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha - \hat{a}_\alpha = -\hat{a}_\alpha
\end{aligned}
$$

5 中微子是自旋为 $\dfrac{1}{2}$，静止质量极小的基本粒子。将中微子静止质量取为 0，试建立其相对论性波动方程，并讨论其守恒量。

解：中微子不带电，静止质量 $m \to 0$，$s = \dfrac{1}{2}$，由 $E^2 = c^2p^2$，对中微子而言

$$i\hbar\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\Psi} \tag{1.35}$$

由 $H\boldsymbol{\Psi} = E\boldsymbol{\Psi}$ 得 $H^2\boldsymbol{\Psi} = E^2\boldsymbol{\Psi} = c^2p^2\boldsymbol{\Psi}$，进而有 $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = p^2$，由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的代数关系可将 $\boldsymbol{\alpha}$ 取为 $\boldsymbol{\sigma}$

$\therefore$ 中微子的相对论性波动方程为

$$i\hbar\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{\Psi} \tag{1.36}$$

• 讨论中微子的守恒量：显然能量守恒，$H = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ 是一个守恒量。

$\because$

$$[H, \boldsymbol{p}] = 0 \quad \left[H, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\right] = 0 \tag{1.37}$$

$\therefore$ 中微子的动量算符 $\boldsymbol{p}$ 和螺旋量算符 $\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ 都是守恒量。

又 $\because$

$$[H, \boldsymbol{L}] \neq 0 \quad [H, P] \neq 0 \tag{1.38}$$

$\therefore$ 中微子的轨道角动量算符 $\boldsymbol{L}$ 和宇称算符 P 都不是守恒量。

对于总角动量 $\boldsymbol{J}$ 而言，虽然具有 $[H, \boldsymbol{J}] = 0$，但 $[\boldsymbol{J}, \boldsymbol{p}] \neq 0$，不能纳入力学量完全集，所以总角动量 $\boldsymbol{J}$ 不是守恒量。

综上所述，中微子的能量算符 H，动量算符 $\boldsymbol{p}$ 和螺旋量算符 $\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ 是一组守恒量。

6 试采用 $Feynman$ 的多边折线道方案计算一维自由粒子的传播子 $K(x''t'', x't')$，计算中，取 $C_N = \left(\dfrac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-N/2}$。

解：由多边折线道方法 $K_N(x''t'', x't') = C_N \int\cdots\int exp\left\{\dfrac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N$

$\therefore$

$$\begin{aligned} K_N(x''t'', x't') &= C_N \int\cdots\int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ &= \left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-N/2} \int\cdots\int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t'' - t')} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2(t''-t')\hbar}(x''-x')^2}$$

1.3 2006 年习题

1 称按规律

$$U(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)\hat{T}_{lm}(\tau)U^{-1}(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)=\hat{T}_{lm}(\tau')=\sum_{m'}D^{l}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)\hat{T}_{lm'}(\tau)$$

变换的 $2l+1$ 个算符 $\hat{T}_{lm}(\tau)$ $(m=l,l-1,\cdots,-l)$ 为 l 阶不可约张量算符，其中为 $U(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)$ 转动算符，$D^{l}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$ 为 D 函数。证明 $\hat{T}_{lm}(\tau)$ 满足 $\left[\hat{L}_z,\hat{T}_{lm}\right]=m\hbar\hat{T}_{lm}$，这里 $\hat{L}_z$ 为轨道角动量算符。

证明：对无穷小转动 $U(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)$ 有 $U(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)=1-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z$，$U^{-1}(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)=1+\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z$

$\therefore$

$$\left(1-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z\right)\hat{T}_{lm}\left(1+\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z\right)=\sum_{m'}\left\langle lm'\middle|1-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z\middle|lm\right\rangle\hat{T}_{lm'} \tag{1.39}$$

略去含有 $\mathrm{d}\theta^2$ 得高阶项，得

$$\hat{T}_{lm}-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{L}_z\hat{T}_{lm}+\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\hat{T}_{lm}\hat{L}_z=\sum_{m'}\left[\delta_{m'm}-im\,\mathrm{d}\theta\delta_{m'm}\right]\hat{T}_{lm'} \tag{1.40}$$

$\therefore$

$$\hat{T}_{lm}-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{L}_z,\hat{T}_{lm}\right]=\hat{T}_{lm}-im\,\mathrm{d}\theta\hat{T}_{lm} \tag{1.41}$$

$\therefore\left[\hat{L}_z,\hat{T}_{lm}\right]=m\hbar\hat{T}_{lm}$，得证。

2 设费米子体系的每个单粒子能级都是二重简并的，属于单粒子能级 ϵ_μ 的两个简并态用 $\mu,\bar{\mu}$ 标记，相应的产生、消灭算符记为 $a^\dagger_\mu,a_\mu,a^\dagger_{\bar{\mu}},a_\mu$。定义

$$S^\dagger_\mu=a^\dagger_\mu a^\dagger_{\bar{\mu}}\quad S_\mu=\left(S^\dagger_\mu\right)^\dagger=a_{\bar{\mu}}a_\mu\quad \hat{n}_\mu=a^\dagger_\mu a_\mu+a^\dagger_{\bar{\mu}}a_{\bar{\mu}}$$

说明算符 $S^\dagger_\mu$，S_μ 和 $\hat{n}_\mu$ 的意义。证明：$\left[S_\mu,S^\dagger_\nu\right]=(1-\hat{n}_\mu)\,\delta_{\mu\nu}$，$\left[\hat{n}_\mu,S^\dagger_\nu\right]=2S^\dagger_\mu\delta_{\mu\nu}$。

证明：$S^\dagger_\mu(S_\mu)$ 算符可在能级 ϵ_μ 上产生 (消灭) 一对粒子，$\hat{n}_\mu$ 是能级 ϵ_μ 上的粒子数算符。对

费米子体系有如下关系：

$$\left\{a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger\right\} = \left\{a_\mu, a_\nu\right\} = 0 \quad \left\{a_\mu, a_\nu^\dagger\right\} = \delta_{\mu\nu} \tag{1.42}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
\left[S_\mu, S_\nu^\dagger\right] &= \left[a_{\bar\mu} a_\mu, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] \\
&= a_{\bar\mu}\left[a_\mu, a_\nu^\dagger\right] a_{\bar\nu}^\dagger + \left[a_{\bar\mu}, a_\nu^\dagger\right] a_{\bar\nu}^\dagger a_\mu + a_{\bar\mu} a_\nu^\dagger \left[a_\mu, a_{\bar\nu}^\dagger\right] + a_\nu^\dagger \left[a_{\bar\mu}, a_{\bar\nu}^\dagger\right] a_\mu \\
&= a_{\bar\mu} a_\mu a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger - a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger a_{\bar\mu} a_\mu \\
&= a_{\bar\mu} a_{\bar\nu}^\dagger \delta_{\mu\nu} - a_\nu^\dagger a_\mu \delta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

当 $\mu \neq \nu$ 时，显然有 $\left[S_\mu, S_\nu^\dagger\right] = 0$；
当 $\mu = \nu$ 时，

$$\begin{aligned}
\left[S_\mu, S_\nu^\dagger\right] &= \left(a_{\bar\mu} a_{\bar\mu}^\dagger - a_\mu^\dagger a_\mu\right)\delta_{\mu\nu} = \left[1 - \left(a_{\bar\mu} a_{\bar\mu}^\dagger + a_\mu^\dagger a_\mu\right)\right]\delta_{\mu\nu} \\
&= \left(1 - \hat n_\mu\right)\delta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}
\left[\hat n_\mu, S_\nu^\dagger\right] &= \left[a_\mu^\dagger a_\mu, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] + \left[a_{\bar\mu}^\dagger a_{\bar\mu}, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] \\
&= a_\mu^\dagger \left[a_\mu, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] + \left[a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] a_\mu + a_{\bar\mu}^\dagger \left[a_{\bar\mu}, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] + \left[a_{\bar\mu}^\dagger, a_\nu^\dagger a_{\bar\nu}^\dagger\right] a_{\bar\mu} \\
&= \left(a_\mu^\dagger a_{\bar\mu}^\dagger + a_\mu^\dagger a_{\bar\mu}^\dagger\right)\delta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

当 $\mu \neq \nu$ 时，显然有 $\left[\hat n_\mu, S_\nu^\dagger\right] = 0$；
当 $\mu = \nu$ 时，$\left[\hat n_\mu, S_\nu^\dagger\right] = 2S_\mu^\dagger \delta_{\mu\nu}$。
综上所述，$\left[S_\mu, S_\nu^\dagger\right] = \left(1 - \hat n_\mu\right)\delta_{\mu\nu}$，$\left[\hat n_\mu, S_\nu^\dagger\right] = 2S_\mu^\dagger \delta_{\mu\nu}$。

3　直接写出 $Klein - Gordon$ 方程，由此导出相应的几率守恒方程，说明该方程存在的负几率困难，以及 $Pauli$ 对此给出的合理解释，并回答 $K - G$ 方程描述什么样的粒子。

解：自由粒子的 $Klein-Gordon$ 方程为

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\boldsymbol{r},t)=\left[-\hbar^2c^2\nabla^2+m^2c^4\right]\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1.43}$$

可写为协变形式

$$\left(\Box-\kappa^2\right)\Psi(x)=0 \tag{1.44}$$

其中 $\kappa=\dfrac{mc}{\hbar}$，$\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\mu}$，$\mu=1,2,3,4$，$x_\mu\equiv(\boldsymbol{r},ict)$。由自由粒子的 $Klein-Gordon$ 方程可得

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*(\boldsymbol{r},t)=\left[-\hbar^2c^2\nabla^2+m^2c^4\right]\Psi(\boldsymbol{r},t)^* \tag{1.45}$$

$\therefore$

$$-\hbar^2\left(\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2}\right)=-\hbar^2c^2\left(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\right) \tag{1.46}$$

即

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\left(\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*\right) \tag{1.47}$$

$\therefore\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，其中 $\rho=\dfrac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\Psi\dfrac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2}\right)$。但 ρ 不一定是正定的，不能解释为几率密度，这便是负几率困难的由来。

$Pauli$ 和 $Weisskopf$ 认为应该把 $Klein-Gordon$ 方程视为一个场方程，并把 $q\rho$ 和 $q\boldsymbol{J}$ 解释为电荷密度和电流密度，其中 q 为粒子电荷，可正可负。当今普遍认为 $Klein-Gordon$ 方程视为一个标量场方程，场量子自旋为 0，可以用来描述自旋为 0 的粒子，比如 π 介子。

4 设哈密顿量不显含时间，由含时薛定谔方程出发，证明可将体系状态波函数表为

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\int \mathrm{d}\tau' K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r'}t')\Psi(\boldsymbol{r'},t')$$

这里 $K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r'}t')=\left\langle\boldsymbol{r}\left|exp\left[-\dfrac{i}{\hbar}H(t-t')\right]\right|\boldsymbol{r'}\right\rangle$，称为传播子。设能量本征方程为 $H\left|n\right\rangle=E_n\left|n\right\rangle$，试在能量表象下写出 $K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r'}t')$ 的表达式。

解:

$$
\begin{aligned}
K(\boldsymbol{r''}t,\boldsymbol{r'}t') &= \sum_n \left\langle \boldsymbol{r''} \middle| exp\left[-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')\right] \middle| n \right\rangle \left\langle n \middle| \boldsymbol{r'} \right\rangle \\
&= \sum_n exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n(t''-t')\right]\phi_n(r'')\phi_n^*(r') \\
&= \sum_n \phi_n(r'',t'')\phi_n^*(r',t')
\end{aligned}
$$

1.4 2007 年习题

1 自旋不为零的粒子的时间反演算符可表为 $T = UK$，这里 $U = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_y}$，其中 S_y 为粒子自旋算符的 y 轴分量，K 为复共轭算符。

(1) 算符 U 表示一个什么样的操作？证明 T 为反幺正算符。**(2)** 证明对易子 $[U, K] = 0$，进而求出 T^2 的本征值。**(3)** 对自旋 $\dfrac{1}{2}$ 粒子，证明 $U = -i\sigma_y$，进而讨论 S_z 的本征态的时间反演态。

解：

(1) U 代表绕 y 轴旋转 π，是一个幺正算符。

$\because$

$$(UK)(UK)^\dagger = UK \cdot KU^\dagger = UK^2U^\dagger = UU^\dagger = 1, \text{其中} K^2 = 1$$

$\therefore$ 可得 $(UK)^{-1} = KU^\dagger$。

又 $\because$

$$\begin{aligned}\int \psi^*(UK)\phi \, \mathrm{d}\tau = \int \psi^* U\phi^* \, \mathrm{d}\tau = \int (U^\dagger\psi)^*\phi^* \, \mathrm{d}\tau \\ = \int \psi^* K(U^\dagger\phi) \, \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$\therefore$ 可得 $(UK)^\dagger = KU^\dagger$，即有 $T^\dagger = T^{-1}$，T 为反幺正算符。

(2) T 为反幺正算符，则有

$$\left[T, T^\dagger\right] = T^\dagger T - T^\dagger T = I - I = 0 \tag{1.48}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\left[T, T^\dagger\right] &= \left[UK, KU^\dagger\right] = U\left[K, KU^\dagger\right] + \left[U, KU^\dagger\right]K \\ &= U\left[K, K\right]U^\dagger + UK\left[K, U^\dagger\right] + K\left[U, U^\dagger\right]K + \left[U, K\right]U^\dagger K \\ &= UK\left[K, U^\dagger\right] + \left[U, K\right]U^\dagger K \\ &= UK\left[U, K\right]^\dagger + \left[U, K\right]U^\dagger K = 0\end{aligned} \tag{1.49}$$

$\therefore [U, K] = [U, K]^\dagger = 0$。

$\because$

$$T^2 = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_y} K e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_y} K = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi S_y} \tag{1.50}$$

对 N 个全同粒子体系，有

$$T^2 = \begin{cases} 1 & \text{玻色子或偶数个费米子} \\ -1 & \text{奇数个费米子} \end{cases} \tag{1.51}$$

$\therefore T^2$ 对应的本征值为 ± 1。

(3) 对自旋 $\dfrac{1}{2}$ 粒子，$U = e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_y}$，由谱分解定理得

$$\sigma_y = 1 \cdot \hat{P}_1 + (-1) \cdot \hat{P}_{-1} = |+\rangle_{yy}\langle +| - |-\rangle_{yy}\langle -| \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_y} |+\rangle_y &= e^{-\frac{i\pi}{2}} |+\rangle_y = -i\,|+\rangle_y \\ e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_y} |-\rangle_y &= e^{\frac{i\pi}{2}} |-\rangle_y = i\,|-\rangle_y \end{aligned} \tag{1.53}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i\pi}{2}\sigma_y} &= e^{-\frac{i\pi}{2}} |+\rangle_{yy}\langle +| + e^{\frac{i\pi}{2}} |-\rangle_{yy}\langle -| = -i\,|+\rangle_{yy}\langle +| + i\,|-\rangle_{yy}\langle -| \\ &= -i(|+\rangle_{yy}\langle +| - |-\rangle_{yy}\langle -|) = -i\sigma_y \end{aligned} \tag{1.54}$$

$\therefore U = -i\sigma_y$。

在 S_z 表象下，S_z 得本征态可表示为 $\xi_{m_s}(s_z)$，$m_s = \pm\dfrac{1}{2}$ 时分别对应 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$T\xi_{m_s}(s_z) = U\xi_{m_s}(s_z) = -i\sigma_y\xi_{m_s}(s_z) \tag{1.55}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} -i\sigma_y\xi_{\frac{1}{2}}(s_z)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ -i\sigma_y\xi_{-\frac{1}{2}}(s_z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.56}$$

$\therefore$ 对自旋 $\dfrac{1}{2}$ 粒子

$$T\xi_{m_s}(s_z) = (-1)^{\frac{1}{2}-m_s}\xi_{m_s}(s_z) \tag{1.57}$$

2 某原子核的态矢 $|JM\rangle$ 由外壳层上三个中子的单粒子态 $|j_i m_i\rangle$ $(i = 1,2,3)$ 按角动量耦合规则耦合而成，在二次量子化表象下可表为

$$|j_1 j_2 (j_{12}) j_3; JM\rangle = A \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12}} C^{j_{12}m_{12}}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_{12}m_{12}j_3 m_3} a^\dagger_{j_1 m_1} a^\dagger_{j_2 m_2} a^\dagger_{j_3 m_3} |0\rangle$$

式中 A 为归一化因子。试按以下三种情况分别计算的取值：**(1)**$j_1 \neq j_2 \neq j_3$；**(2)**$j_1 = j_2 \neq j_3$；**(3)**$j_1 = j_2 = j_3 = j$

解:

$$|j_1 j_2 (j_{12}) j_3; JM\rangle = A \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12}} C^{j_{12}m_{12}}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_{12}m_{12}j_3 m_3} a^\dagger_{j_1 m_1} a^\dagger_{j_2 m_2} a^\dagger_{j_3 m_3} |0\rangle = A \sum_{m_1 m_2 m_3 m_{12}} C^{j_{12}m_{12}}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_{12}m_{12}j_3 m_3} |j_1 j_2 j_3\rangle$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
\langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3; JM | j_1 j_2 (j_{12}) j_3; JM\rangle &= |A|^2 \sum_{m_1 m_{23}} \sum_{m_2 m_3 m_{23}} \langle j_1 j_2 j_3| C^{j_{12}m_{12}}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{j_{23}m_{23}}_{j_2 m_2 j_3 m_3} \\
&\quad C^{JM}_{j_{12}m_{12}j_3 m_3} C^{JM}_{j_1 m_1 j_{23} m_{23}} |j_1 j_2 j_3\rangle \\
&= |A|^2 \sum_{m_1 m_{23}} \sum_{m_2 m_3 m_{23}} C^{j_{12}m_{12}}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{j_{23}m_{23}}_{j_2 m_2 j_3 m_3} C^{JM}_{j_{12}m_{12}j_3 m_3} C^{JM}_{j_1 m_1 j_{23} m_{23}} \\
&= |A|^2 \sum_{m_1 m_{23}} U(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}) C^{JM}_{j_1 m_1 j_{23} m_{23}} C^{JM}_{j_1 m_1 j_{23} m_{23}} \\
&= |A|^2 U(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}) = 1
\end{aligned} \tag{1.58}$$

(1) 当 $j_1 \neq j_2 \neq j_3$ 时，$A = \pm \frac{1}{\sqrt{U(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})}}$，习惯选取 $A = \frac{1}{\sqrt{U(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})}}$；

(2) 引入 $6-j$ 符号

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \frac{U(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23})}{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}} \tag{1.59}$$

由 $6-j$ 符号的幺正性

$$\sum_{j_{23}}(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23} \end{Bmatrix}=1 \tag{1.60}$$

$\therefore$

$$\sum_{j_{23}}(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\frac{U^2(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})}{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}=\sum_{j_{23}}U^2(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})=1 \tag{1.61}$$

即有 $U^2(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})=\dfrac{1}{2j_{min}+1}$，其中 $j_{min}=min(j_2,j_3)$。

$\therefore A=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2j_{min}+1}}$

(3) 同 (2)，由 $6-j$ 符号的幺正性以及 $j_1=j_2=j_3=j$ 可得

$$\sum_{j_{12}}(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\begin{Bmatrix} j & j & j_{12} \\ j & J & j_{23} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j & j & j_{12} \\ j & J & j_{23} \end{Bmatrix}=1 \tag{1.62}$$

其中 $j_{12}=j_{23}$，取值范围是 $-2j,\cdots,2j$。

$\therefore$

$$\sum_{j_{23}}(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)\frac{U^2(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})}{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}=\sum_{j_{23}}U^2(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})=1 \tag{1.63}$$

即有 $U(j_1j_2Jj_3;j_{12}j_{23})^2=\dfrac{1}{2j+1}$。

$\therefore A=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2j+1}}$

3 对自由电子，

(1) 写出 $Dirac$ 方程；

(2) 将电子的态函数写为 $\psi=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$，在非相对论极限下，导出所满足的方程；

(3) 引入 $\gamma_i=-i\beta\alpha_i \quad i=1,2,3$，$\gamma_4=\beta$，将 $Dirac$ 方程改写为相对论协变形式。

解:

(1) 由 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi$，和能量本征方程 $\hat{H}\psi=E\psi$，其中 $\hat{H}=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta$，$E^2=c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta\right)\psi=\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2\beta\right)\psi \tag{1.64}$$

其中

$$\beta=\begin{bmatrix} I & \\ & -I\end{bmatrix} \qquad \alpha_i=\begin{bmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{bmatrix} \quad i=1,2,3 \tag{1.65}$$

(2) 将电子的态函数代入 $Dirac$ 方程

$\therefore$

$$\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta\right)\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1.66}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & mc^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1.67}$$

其中

$$\begin{vmatrix} mc^2-E & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & mc^2-E\end{vmatrix}=0 \tag{1.68}$$

(3)

$$-c\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x_4}=\left(-ic\hbar\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+mc^2\beta\right)\psi \quad (x_4=ict) \tag{1.69}$$

$\therefore$

$$\left(-i\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\beta\right)\psi=0 \tag{1.70}$$

对上式左乘 β，令 $\gamma_i=-i\beta\alpha_i,\gamma_4=\beta$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\right)\psi=0 \tag{1.71}$$

$\therefore$ $Dirac$ 方程相对论协变形式为

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\kappa\right)\psi=0 \quad \mu=1,2,3,4 \tag{1.72}$$

4 证明质量为 m 的一维自由粒子的传播子可表示为

$$K(x't', xt) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t'-t)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S(x't',xt)}$$

式中 $S(x't', xt)$ 为一个经典自由粒子从点运动到点的作用量。

解:

$$S(x''t'', x't') = \int_{t'}^{t''} L(x, \dot{x}, t)\,\mathrm{d}t \tag{1.73}$$

式中

$$L(x, \dot{x}, t) = T - V = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{x''-x'}{t''-t'}\right)^2 \tag{1.74}$$

$\therefore$ 由多边折线道方法 $K_N(x't', xt) = C_N \int \cdots \int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_{j}^{N}(x_j - x_{j-1})^2\right\}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N$

$$K(x't', xt) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t'-t)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S(x't',xt)}$$

1.5 2008 年习题

1 设有角动量 $\boldsymbol{J}$，其平方 $\boldsymbol{J}^2$ 和 z 分量 J_z 的共同本征态矢记为 $|jm\rangle$，有

$$\boldsymbol{J}^2 |jm\rangle = \eta_j \hbar^2 |jm\rangle \quad \hat{J}_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle \tag{1.75}$$

(1) 试证 η_j，若一定，则磁量子数 m 有最大值 $\overline{m}$ 和最小值 $\underline{m}$，讨论二者之间的关系；
(2) 引入算符 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$，证明，$\hat{J}_\pm$ 对的作用是使升（降）1；
(3) 由 **(2)** 可知，将 $\hat{J}_-$ 对 $|jm\rangle$ 逐次作用，能得到 m 的全部可取值，直至 $\underline{m}$。但有人认为，如此作用到最后，得到一个 $\underline{m}' \in (\underline{m}, \underline{m}+1)$ 也是合理的。这种说法对吗？为什么？

解：
(1)

$$\left\langle jm \middle| \boldsymbol{J}^2 - \hat{J}_z{}^2 \middle| jm \right\rangle = \left\langle jm \middle| \hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 \middle| jm \right\rangle \tag{1.76}$$

即有

$$\left(\eta_j - m^2\right) = \int \left|\hat{J}_x \psi_{jm}\right|^2 \mathrm{d}\tau + \int \left|\hat{J}_y \psi_{jm}\right|^2 \mathrm{d}\tau \geq 0 \tag{1.77}$$

$\therefore \sqrt{\eta_j} \neq m \neq \sqrt{\eta_j}$，$m$ 有最大值 $\overline{m}$ 和最小值 $\underline{m}$，二者关系见 (2)。
(2) 对 $\hat{J}_\pm$ 有 $\left[\boldsymbol{J}^2, \hat{J}_\pm\right] = 0$，$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{J}_\pm$。
$\therefore$

$$\hat{J}_z \hat{J}_\pm |jm\rangle = \left(\hat{J}_\pm \hat{J}_z \pm \hbar \hat{J}_\pm\right) |jm\rangle = (m \pm 1)\, \hat{J}_\pm |jm\rangle \tag{1.78}$$

其中 $\hat{J}_\pm |jm\rangle = \Gamma_\pm(m)\, |j, m \pm 1\rangle$。
利用 $\hat{J}_- \hat{J}_+ |j\overline{m}\rangle = 0$ 和 $\hat{J}_+ \hat{J}_- |j\underline{m}\rangle = 0$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ |j\overline{m}\rangle = \left(\boldsymbol{J}^2 - \hat{J}_z{}^2 - \hbar\hat{J}_z\right) |j\overline{m}\rangle$$
$$\Rightarrow \eta_j - \overline{m}^2 - \overline{m} = 0$$

类似有 $\eta_j - \underline{m}^2 + \underline{m} = 0$。

$\therefore$ 由上两式可得

$$\underline{m}^2 - \underline{m} = \overline{m}^2 + \overline{m} \tag{1.79}$$

$\therefore \overline{m} = -\underline{m} = j$，进而可得

$$\begin{cases} \underline{m} = \overline{m} - n \\ \overline{m} = -\underline{m} = j \end{cases} \tag{1.80}$$

其中 $-j = j - n, n = 2j; m = j, j-1, \cdots, -j; \eta_j = j(j+1)$。

对于 $\Gamma_+(m)$ 有

$$\left\langle jm \left| \hat{J}_- \hat{J}_+ \right| jm \right\rangle = |\Gamma_+(m)|^2 \langle jm|jm\rangle \tag{1.81}$$

又 $\because \hat{J}_- \hat{J}_+ = \boldsymbol{J}^2 - \hat{J}_z{}^2 - \hbar \hat{J}_z$

$\therefore$

$$|\Gamma_+(m)|^2 = [j(j+1) - m(m+1)]; \quad \text{同理有 } |\Gamma_-(m)|^2 = [j(j+1) - m(m-1)] \tag{1.82}$$

$\therefore$

$$\hat{J}_\pm |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle \tag{1.83}$$

(3) 不合理。由 (2) 中的结果可知 $m = j, j-1, \cdots, -j$，共有 $2j+1$ 个，不能得到 $\underline{m}' \in (-j, -j+1)$。

2 设 $\boldsymbol{T}_{LM}(\tau)$ $(M = L, L-1, \cdots, -L)$ 为一组 L 阶不可约张量算符，$\psi_{jm}(\tau)$ 为角动量本征函数，定义

$$\Psi_{JM_J}(\tau) = \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J} \boldsymbol{T}_{LM}(\tau) \psi_{jm}(\tau)$$

式中 $C_{jmLM}^{JM_J}$ 为 $C-G$ 系数。试证明如此定义的 $\Psi_{JM}(\tau)$ 也是角动量的本征函数。

证明：$J_z \psi_{jm}(\tau) = m\hbar \psi_{jm}(\tau)$，对一组 L 阶不可约张量算符有 $[J_z, \boldsymbol{T}_{LM}(\tau)] = M\hbar \boldsymbol{T}_{LM}(\tau)$

$\therefore$

$$J_z \Psi_{JM_J}(\tau) = \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J} \left[M\hbar \boldsymbol{T}_{LM}(\tau) + \boldsymbol{T}_{LM}(\tau) J_z \right] \psi_{jm}(\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J} \left[M\hbar \boldsymbol{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau) + \boldsymbol{T}_{LM}(\tau) m\hbar \psi_{jm}(\tau) \right] \\
&= (M+m)\,\hbar \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J} \boldsymbol{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau)
\end{aligned}
$$

$\therefore J_z \Psi_{JM_J}(\tau) = (M+m)\,\hbar \Psi_{JM_J}(\tau)$，$\Psi_{JM}(\tau)$ 也是角动量的本征函数。

3 试利用 $Wick$ 定理，计算单体算符 $\hat{T}$ 在 N 个全同粒子态函数上的平均值。

解：N 个全同粒子占据 m 个粒子态，有 $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{T} \right\rangle &= \left\langle \Psi_N \left| \hat{T} \right| \Psi_N \right\rangle = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha |t| \beta \rangle \left\langle n_1 n_2 \cdots n_i \cdots n_m \left| a_\alpha^\dagger a_\beta \right| n_1 n_2 \cdots n_i \cdots n_m \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha |t| \beta \rangle \sum_{\alpha_i} n_i \delta_{\alpha_i \alpha} \delta_{\beta \alpha_i} = \sum_{\alpha_i} \langle \alpha_i |t| \alpha_i \rangle n_i
\end{aligned}
\tag{1.84}
$$

4 $Dirac$ 在建立单电子相对论性运动方程时，有哪些物理上的考虑？这些物理考虑又是如何体现在 $Dirac$ 方程里的？给出必要的论证。以及 $Dirac$ 方程如何克服负能量困难？

解：

- 考虑了几率密度正定即 $\rho(\boldsymbol{r},t) \geq 0$；几率守恒 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{r},t) = 0$；以及相对论协变。同时考虑了电子的自旋，提出电子的波函数应记为多分量的形式。

具体表示为：自由电子 $Dirac$ 方程为

$$
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Psi} = \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + mc^2 \beta \right) \boldsymbol{\Psi} = \left(-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + mc^2 \beta \right) \boldsymbol{\Psi}
\tag{1.85}
$$

其中 $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + mc^2\beta$，上式可化为

$$
-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Psi}^\dagger = i\hbar c \left(\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\Psi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\alpha} \right) + mc^2 \boldsymbol{\Psi}^\dagger \beta
\tag{1.86}
$$

由上两式可得

$$i\hbar\left(\mathbf{\Psi}^\dagger\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{\Psi}^\dagger}{\partial t}\mathbf{\Psi}\right)=\mathbf{\Psi}^\dagger\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2\beta\right)\mathbf{\Psi}-\left(i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\mathbf{\Psi}^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Psi}+mc^2\mathbf{\Psi}^\dagger\beta\mathbf{\Psi}\right) \tag{1.87}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{\Psi}^\dagger\mathbf{\Psi}\right)=-c\left(\mathbf{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{\Psi}+\boldsymbol{\nabla}\mathbf{\Psi}^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Psi}\right)=-c\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Psi}\right) \tag{1.88}$$

进而得到几率流守恒方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0$，其中

$$\begin{aligned}\rho&=\mathbf{\Psi}^\dagger\mathbf{\Psi}\\ \boldsymbol{J}&=\mathbf{\Psi}^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Psi}\end{aligned} \tag{1.89}$$

显然有 $\rho(\boldsymbol{r},t)\geq 0$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{r},t)=0$ 成立，而对 $Dirac$ 方程有

$$-c\hbar\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial x_4}=\left(-ic\hbar\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+mc^2\beta\right)\mathbf{\Psi}\quad(x_4=ict) \tag{1.90}$$

$\therefore$

$$\left(-i\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\beta\right)\mathbf{\Psi}=0 \tag{1.91}$$

对上式左乘 β，令 $\gamma_i=-i\beta\alpha_i,\gamma_4=\beta$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\right)\mathbf{\Psi}=0 \tag{1.92}$$

$\therefore$ $Dirac$ 方程相对论协变形式为

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\kappa\right)\mathbf{\Psi}=0 \tag{1.93}$$

• $Dirac$ 方程为克服负能量困难引入了 $Dirac$ 海的概念，$Dirac$ 海总能量 E 和总电量 Q 均不可测，使所有负能级被电子填满，同时受泡利不相容原理限制正能级上的电子不能向下跃迁。负能海中每少一个电子，则有 $\triangle E=E'-E=\epsilon,\triangle Q=Q'-Q=q$，由此预测了正电子的存在。

5

(1) 简述传播子 $K(xt,x't')$ 的物理意义。

(2) 设一维自由粒子从 t' 时刻运动到 t 时刻，试采用多边折线道方案，分别将时间 (t', t) 间隔二等分和三等分，计算相应的传播子。计算中，可取 $C_N = \left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-N/2}$。

(3) 对你在 **2** 中得到的结果进行讨论。

解：$\epsilon = \frac{t-t'}{N} = \frac{T}{N} \to T = N\epsilon$

(1)　设粒子在初始时刻 t' 时刻处于空间上 x' 处，$K(xt, x't')$ 表示在之后的 $t(t > t')$ 时刻粒子处于 x 处的概率波幅。

(2)　• 二等分：$N = 2, T = 2\epsilon$

$$\begin{aligned}
K_2(xt, x't') &= C_2 \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_1-x')^2+(x-x_1)^2\right]} \, \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right) \sqrt{\frac{i\pi\hbar\epsilon}{m}} e^{\frac{im}{4\hbar\epsilon}(x-x')^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

$\therefore K_2(xt, x't') = \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}$

• 三等分：$N = 3, T = 3\epsilon$

$$\begin{aligned}
K_3(xt, x't') &= C_3 \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_1-x')^2+(x_2-x_1)^2+(x-x_2)^2\right]} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_1-x')^2} \, \mathrm{d}x_1 \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\left[(x_2-x_1)^2+(x-x_2)^2\right]} \, \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(x_1-x')^2} e^{\frac{im}{4\hbar\epsilon}(x-x_1)^2} \, \mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}
\end{aligned} \tag{1.95}$$

$\therefore K_3(xt, x't') = \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}$

(3)　由 (1)、(2) 结果可得 $K_2(xt, x't') = K_3(xt, x't') = \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}$，对于 N 等分有 $K_N(xt, x't') = \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2T\hbar}(x-x')^2}$。

6 设体系哈密顿量 $\hat{H}$ 显含时间，但瞬时本征方程成立，且瞬时本征函数 $\psi_n(t)$ 仍构成正交归一完备基。若将 t 时刻态函数展开为

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)}$$

这里 $\theta_n(t) \equiv \int_0^t E_n(t')\,\mathrm{d}t'$，试导出展开系数 $c_n(t)$ 所满足的运动方程。进而在绝热近似下，证明有绝热定理成立。

解：由能量本征方程 $\hat{H}(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$ 和含时薛定谔方程 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$

$$i\hbar\sum_n\left(\dot{c}_n(t)\psi_n(t) + c_n(t)\dot{\psi}_n(t) + i\dot{\theta}_n(t)c_n(t)\psi_n(t)\right)e^{i\theta_n(t)} = \hat{H}(t)\sum_n c_n(t)\psi_n(t)e^{i\theta_n(t)} \tag{1.96}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\dot{c}_m(t)e^{i\theta_m(t)} &= -\sum_n c_n(t)\left\langle\psi_m(t)\middle|\dot{\psi}_n(t)\right\rangle e^{i\theta_n(t)}\\ \dot{c}_m(t) &= -c_m(t)\left\langle\psi_m(t)\middle|\dot{\psi}_m(t)\right\rangle - \sum_n{}'\left\langle\psi_m(t)\middle|\dot{\psi}_n(t)\right\rangle e^{i(\theta_n(t)-\theta_m(t))}\end{aligned} \tag{1.97}$$

对 $\hat{H}(t)\psi_n(t) = E_n(t)\psi_n(t)$ 两侧对时间求导

$$\dot{\hat{H}}(t)\psi_n(t) + \hat{H}(t)\dot{\psi}_n(t) = \dot{E}_n(t)\psi_n(t) + E_n(t)\dot{\psi}_n(t) \tag{1.98}$$

以左矢 $\langle\psi_m(t)|$ 作用

$$\langle\psi_m(t)|\,\dot{\hat{H}}(t)\,|\psi_n(t)\rangle + \left\langle\psi_m(t)\middle|\hat{H}(t)\middle|\dot{\psi}_n(t)\right\rangle = \langle\psi_m(t)|\,\dot{E}_n(t)\,|\psi_n(t)\rangle + \left\langle\psi_m(t)\middle|E_n(t)\middle|\dot{\psi}_n(t)\right\rangle \tag{1.99}$$

$\therefore$

$$\langle\psi_m(t)|\,\dot{\hat{H}}(t)\,|\psi_n(t)\rangle = (E_n - E_m)\left\langle\psi_m(t)\middle|\dot{\psi}_n(t)\right\rangle\delta_{mn} \tag{1.100}$$

$\therefore$

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t)\left\langle\psi_m(t)\middle|\dot{\psi}_m(t)\right\rangle - \sum_n{}' c_n\frac{\langle\psi_m(t)|\,\dot{\hat{H}}(t)\,|\psi_n(t)\rangle}{E_n - E_m}e^{i(\theta_n(t)-\theta_m(t))} \tag{1.101}$$

$\hat{H}$ 趋于 0，第二项可忽略。∴

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \left\langle \psi_m(t) \middle| \dot{\psi}_m(t) \right\rangle \Longrightarrow c_m(t) = c_m(0)e^{i\nu_m(t)} \tag{1.102}$$

∴

$$c_n(t) = c_n(0)e^{i\nu_n(t)}，\text{其中}\nu_n(t) = i\int_0^t \left\langle \psi_n(t') \middle| \frac{\partial}{\partial t'}\psi_n(t') \right\rangle \mathrm{d}t' \tag{1.103}$$

特别地，如果粒子开始时处于第 n 本征态，即 $c_n(0) = 1$，$c_m(0) = 0$，$m \neq n$，则 $\Psi_n(t)$ 变为

$$\Psi_n(t) = \Psi_n(t)e^{i\theta_n(t)}e^{i\nu_n(t)} \tag{1.104}$$

仍处于 $\hat{H}(t)$ 得第 n 本征态，仅仅增加了一对相因子，证毕。

1.6 2009 年习题

1 考虑标量波函数所描述的体系。

(1) 写出转动算符 $U(\boldsymbol{e}_z, \mathrm{d}\theta)$ 的表达式。若体系在此转动变换下不变，守恒量是什么?

(2) 证明绕两个任意轴的无穷小转动变换 $U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1)$ 和 $U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)$ 是对易的。

(3) 试论证，两个相继的转动变换 $U(\boldsymbol{n}_2, \theta_2)U(\boldsymbol{n}_1, \theta_1)$ 与 $R_{n_1}(\theta_1)R_{n_2}(\theta_2)$ 相对应，这里 $R_n(\theta)$ 为与 $U(\boldsymbol{n}, \theta)$ 相联系的几何转动算符。

解：(1)

$$U(\boldsymbol{e}_z, \mathrm{d}\theta) = \hat{I} - \mathrm{d}\theta \frac{i}{\hbar} \hat{J}_z \tag{1.105}$$

若体系在此转动变换下不变，守恒量是角动量。

(2) 绕任意轴的无穷小转动变换有 $U(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}} = \hat{I} - \mathrm{d}\theta \frac{i}{\hbar} \hat{J}_n$

$\therefore$

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1)U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2) &= \left(\hat{I} - \mathrm{d}\theta_1 \frac{i}{\hbar} \hat{J}_{n_1}\right)\left(\hat{I} - \mathrm{d}\theta_2 \frac{i}{\hbar} \hat{J}_{n_2}\right) \\ &= \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\left(\mathrm{d}\theta_1 \hat{J}_{n_1} + \mathrm{d}\theta_2 \hat{J}_{n_2}\right) + O(\mathrm{d}\theta^2) \end{aligned} \tag{1.106}$$

略去高阶无穷小得

$$U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1)U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\left(\mathrm{d}\theta_1 \hat{J}_{n_1} + \mathrm{d}\theta_2 \hat{J}_{n_2}\right)$$

同理可得

$$U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar}\left(\mathrm{d}\theta_1 \hat{J}_{n_1} + \mathrm{d}\theta_2 \hat{J}_{n_2}\right)$$

$\therefore U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1) = U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1)U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)$，即有

$$[U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1), U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)] = 0 \tag{1.107}$$

$\therefore$ 绕两个任意轴的无穷小转动变换 $U(\boldsymbol{n}_1, \mathrm{d}\theta_1)$ 和 $U(\boldsymbol{n}_2, \mathrm{d}\theta_2)$ 是对易的。

(3) 在转动变换 $U(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}$ 下，考虑 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{r}' = R_n(\theta)\boldsymbol{r}$，体系波函数有

$$\Psi(\boldsymbol{r}') = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi\left[R_n(\theta)\boldsymbol{r}\right] = \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r})$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
U(\boldsymbol{n}_2,\theta_2)U(\boldsymbol{n}_1,\theta_1)\Psi(\boldsymbol{r}) &= U(\boldsymbol{n}_2,\theta_2)\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{r_1}) = \widetilde{\Psi}\left[R_{n_2}(\theta_2)\boldsymbol{r}\right] \\
&= \Psi\left[R_{n_1}(\theta_1)R_{n_2}(\theta_2)\boldsymbol{r}\right]
\end{aligned} \tag{1.108}
$$

$\therefore$ 我们认为 $U(\boldsymbol{n}_2,\theta_2)U(\boldsymbol{n}_1,\theta_1) \rightleftharpoons R_{n_1}(\theta_1)R_{n_2}(\theta_2)$。

2 试利用一阶张量投影定理计算在态 ${}^2P_{\frac{3}{2}}$ 上电子的自旋算符 S_z 的约化矩阵元。

解：态 ${}^2P_{\frac{3}{2}}$ 上电子轨道量子数为 $l=1$，自旋量子数为 $s=\dfrac{1}{2}$，总量子数为 $j=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
\left\langle jm' \middle| \hat{S}_z \middle| jm \right\rangle &= \frac{\left\langle jm' \middle| \hat{J}_z \middle| jm \right\rangle \left\langle jm \middle| (\hat{J}\cdot\hat{S}) \middle| jm \right\rangle}{j(j+1)\hbar^2} \\
&= \frac{m\hbar\delta_{m'm}\left\langle jm \middle| (\hat{L}\cdot\hat{S}+\hat{S}^2) \middle| jm \right\rangle}{j(j+1)\hbar^2} \\
&= \frac{m\hbar\delta_{m'm}\frac{1}{2}\left\langle jm \middle| (\hat{J}^2-\hat{L}^2+\hat{S}^2) \middle| jm \right\rangle}{j(j+1)\hbar^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{m\hbar\delta_{m'm}[j(j+1)\hbar^2-l(l+1)\hbar^2+s(s+1)\hbar^2]}{j(j+1)\hbar^2} \\
&= \frac{2}{5}m\hbar\delta_{m'm}
\end{aligned}
$$

$\therefore S_z$ 的约化矩阵元为

$$
\begin{aligned}
\left\langle j \middle\| \hat{S}_z \middle\| j \right\rangle &= \frac{\left\langle jm' \middle| \hat{S}_z \middle| jm \right\rangle}{C_{jmLM}^{j'm'}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}m\hbar\delta_{m'm}}{C_{jmLM}^{jm'}} \\
&= \frac{2}{5}m\hbar\cdot\frac{1}{C_{jmLM}^{jm}} = \frac{2}{5}m\hbar\cdot\frac{1}{C_{jm10}^{jm}} = \frac{\sqrt{15}}{5}\hbar
\end{aligned}
$$

3 三个全同玻色子构成的体系中，两个单粒子态 α_1 和 α_2 的占据数分别为 2 和 1，试分别在坐标表象和粒子数表象下写出体系态函数的表达式，并求出可分离型二体算符 V 在此态上的平均值，这里

$$V = \sum_{i<j} V(i,j) \equiv \sum_{i<j} v(i)v(j)$$

解：坐标表象下

$$\begin{aligned}\Psi(1,2,3) &= \sqrt{\frac{2!\cdot 1!}{3!}} \sum_{P_i} \hat{P}_i \phi_{\alpha_1}(1)\phi_{\alpha_1}(2)\phi_{\alpha_2}(3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\phi_{\alpha_1}(1)\phi_{\alpha_1}(2)\phi_{\alpha_2}(3) + \phi_{\alpha_1}(3)\phi_{\alpha_1}(1)\phi_{\alpha_2}(2) + \phi_{\alpha_1}(2)\phi_{\alpha_1}(3)\phi_{\alpha_2}(1)\right]\end{aligned}$$

粒子数表象下

$$\begin{aligned}|\Psi(1,2,3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!1!}} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}\langle V\rangle &= \langle \Psi(1,2,3)| V |\Psi(1,2,3)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 0| a_{\alpha_2} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1} \sum_{i<j} v(i)v(j) a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha |v_i| \beta\rangle \sum_{\gamma\delta} \langle \gamma |v_j| \delta\rangle \langle 0| a_{\alpha_2} a_{\alpha_1} a_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_2} |0\rangle\end{aligned}$$

由 Wick 定理

$$\begin{aligned}\langle V\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i<\alpha_j} &\left(\langle \alpha_i |v_i| \alpha_i\rangle \langle \alpha_j |v_j| \alpha_j\rangle - \langle \alpha_i |v_i| \alpha_j\rangle \langle \alpha_j |v_j| \alpha_i\rangle\right. \\ &\left. - \langle \alpha_j |v_i| \alpha_i\rangle \langle \alpha_i |v_j| \alpha_j\rangle + \langle \alpha_j |v_i| \alpha_j\rangle \langle \alpha_i |v_j| \alpha_i\rangle\right)\end{aligned} \tag{1.109}$$

4 写出在电磁场 $(\boldsymbol{A}, \phi)$ 中运动的电子的相对论性运动方程，推导其非相对论极限，并对结果进行讨论。

解：有电磁场 $(\boldsymbol{A},\phi)$ 情况下的 Dirac 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\phi\right)\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)+mc^2\beta\right]\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r},t\right) \tag{1.110}$$

$\therefore$ 电子在电磁场情况下的 Dirac 方程为，

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+e\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+mc^2\beta\right]\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r},t\right)$$

讨论其非相对论极限，令 $\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r},t\right)=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$，上式可改写为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\right]=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-e\boldsymbol{\phi}+mc^2\beta\right]\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \tag{1.111}$$

$\therefore$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-e\boldsymbol{\phi}+mc^2\beta-mc^2\right]\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1.112}$$

$\therefore$ 代入 $\alpha=\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&0\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-e\boldsymbol{\phi} & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) & -e\boldsymbol{\phi}-2mc^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{1.113}$$

解得

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi&=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi-e\boldsymbol{\phi}\phi\\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi&=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\phi-\left(e\boldsymbol{\phi}+2mc^2\right)\chi\end{aligned}$$

非相对论极限下

$$\chi=\frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\phi \tag{1.114}$$

$\therefore$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi=\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2\phi-e\boldsymbol{\phi}\phi \tag{★}$$

由 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 可得

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2=\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{e\hbar}{m}\boldsymbol{B} \tag{1.115}$$

将上式代入 ★ 式，得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi=\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}-e\boldsymbol{\phi}\right]\phi \tag{1.116}$$

有电磁场 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\phi})$ 情况下的 Klein-Gordon 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-q\boldsymbol{\phi}\right)^2\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=\left[c^2\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+m^2c^4\right]\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.117}$$

在非相对论极限下，令 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r},t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$，代入上式得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+q\boldsymbol{\phi}\right]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1.118}$$

以上为非相对论极限下的 Klein-Gordon 方程，与之相比，内禀自旋不再作为一个假定，它已经包含在方程之中，引入了玻耳兹子 $\mu_B=\dfrac{e\hbar}{2mc}$。

5 设质量为 m 的粒子在势场 $V(x,t)$ 中运动，t 时刻粒子的状态为 $\psi(x',t)$。按路径积分理论，在 $t+\epsilon$ $(\epsilon\to 0^+)$ 时刻，粒子的状态可表为

$$\psi(x,t+\epsilon)=C\int \mathrm{d}x' exp\left[\frac{i}{\hbar}s(x'\to x,t\to t+\epsilon)\right]\psi(x,t')$$

试确定式中 C 的表达式

解:

$$C=\left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.119}$$

1.7 2010 年习题

1 设体系角动量为 $\boldsymbol{J}$，考虑绕 x 轴旋转角 β 的转动，写出转动算符 $U(\boldsymbol{e_x},\beta)$ 的表达式，并用小 d 函数表出其矩阵元 $\langle jm' |U(\boldsymbol{e_x},\beta)| jm\rangle$。

解：$U(\boldsymbol{e_x},\beta)$ 可写为

$$U(\boldsymbol{e_x},\beta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\boldsymbol{e_x}\cdot\boldsymbol{J}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_x} \tag{1.120}$$

以及

$$d^j_{m'm}(\beta) = \left\langle jm' \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} \right| jm \right\rangle \tag{1.121}$$

以欧拉角表示 D 函数

$$D^j_{m'm}(-\frac{\pi}{2},\beta,\frac{\pi}{2}) = \langle jm' |U(\boldsymbol{e_x},\beta)| jm\rangle \tag{1.122}$$

又 $\because$

$$D^j_{m'm}(-\frac{\pi}{2},\beta,\frac{\pi}{2}) = e^{im'\frac{\pi}{2}} d^j_{m'm}(\beta) e^{-im\frac{\pi}{2}} \tag{1.123}$$

$\therefore \langle jm' |U(\boldsymbol{e_x},\beta)| jm\rangle = e^{im'\frac{\pi}{2}} d^j_{m'm}(\beta) e^{-im\frac{\pi}{2}}$。

2

3 写出 $Dirac$ 单电子相对论性运动方程，由此导出几率流守恒方程，并说明这里的几率密度满足什么要求。再引入 γ 矩阵，($\gamma_\mu, \mu = 1,2,3,4$)，将 $Dirac$ 方程化为相对论协变形式。
解：自由电子 $Dirac$ 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi} = \left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi} \tag{1.124}$$

其中 $\hat{H}=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta$，上式可化为

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}^\dagger=i\hbar c\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)+mc^2\boldsymbol{\Psi}^\dagger\beta \tag{1.125}$$

由上两式可得

$$i\hbar\left(\boldsymbol{\Psi}^\dagger\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}^\dagger}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}\right)=\boldsymbol{\Psi}^\dagger\left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi}-\left(i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Psi}+mc^2\boldsymbol{\Psi}^\dagger\beta\boldsymbol{\Psi}\right) \tag{1.126}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\Psi}\right)=-c\left(\boldsymbol{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi}^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Psi}\right)=-c\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Psi}\right) \tag{1.127}$$

进而得到几率流守恒方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}=0$，其中

$$\begin{aligned}\rho&=\boldsymbol{\Psi}^\dagger\boldsymbol{\Psi}\\ \boldsymbol{J}&=\boldsymbol{\Psi}^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Psi}\end{aligned} \tag{1.128}$$

显然有 $\rho(\boldsymbol{r},t)\geq 0$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{r},t)=0$ 成立，而对 $Dirac$ 方程有

$$-c\hbar\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_4}=\left(-ic\hbar\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi}\quad(x_4=ict) \tag{1.129}$$

$\therefore$

$$\left(-i\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\beta\right)\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{1.130}$$

对上式左乘 β，令 $\gamma_i=-i\beta\alpha_i,\gamma_4=\beta$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}+\kappa\right)\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{1.131}$$

$\therefore$ $Dirac$ 方程相对论协变形式为

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\kappa\right)\boldsymbol{\Psi}=0\quad\mu=1,2,3,4 \tag{1.132}$$

4 设一个量子体系的哈密顿量为 $\hat{H}$，初始时刻体系处于状态 $|\psi(0)\rangle = |\psi(t=0)\rangle$。

(1) 给出该体系在任意时刻，态矢量的形式解。

(2) 由此推出，在坐标表象下，时刻的波函数可写为

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \int \mathrm{d}^3x' \left\langle \boldsymbol{r} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')} \right| \boldsymbol{r'} \right\rangle \psi(r',t')$$

其中，$K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t')$ 为传播子，试阐述其物理意义。

(3) 按费曼假定，$K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t')$ 与体系的作用量 $S[\boldsymbol{r}(t)]$ 之间存在什么样的关系?

解：(1) 由含时薛定谔方程 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$$

(2) 由 (1) 得

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{r}|\psi(t)\rangle &= \int \mathrm{d}^3x' \left\langle \boldsymbol{r} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')} \right| \boldsymbol{r'} \right\rangle \left\langle \boldsymbol{r'} \middle| \psi(t) \right\rangle \\
\Rightarrow \psi(\boldsymbol{r},t) &= \int \mathrm{d}^3x' \left\langle \boldsymbol{r} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')} \right| \boldsymbol{r'} \right\rangle \psi(r',t')
\end{aligned}$$

其中，$K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t') = \left\langle \boldsymbol{r} \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')} \right| \boldsymbol{r'} \right\rangle$ 为传播子，物理意义为：t' 时刻位于 $\boldsymbol{r}'$ 的粒子，t 时刻位于 $\boldsymbol{r}$ 的概率波幅为 $\psi(\boldsymbol{r},t) = K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t')$。

(3) 按费曼假定 $K(\boldsymbol{r}t,\boldsymbol{r}'t') = \displaystyle\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\boldsymbol{r}(t)]}D[\boldsymbol{r}(t)]$。

2　2011 年习题～2017 年习题

2.1　2011 年习题

1

2

3

4　已知一维线性谐振子的传播子为

$$K(xt,x't') = \left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega T)}\right]^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x^2+x'^2\right)\cos(\omega T) - 2xx'\right]\right\}$$

式中和分别为谐振子的质量和振动频率，。

(1) 指出的物理意义，写出其所满足的运动方程。

(2) 证明，对 $t' < t_1 < t$，有 $K(xt,x't') = \int \mathrm{d}x_1 K(xt,x_1t_1)K(x_1t_1,x't')$

(3) 由所给谐振子传播子导出一维自由粒子的传播子。

解：

(1) 物理意义为 t' 时刻在 x' 位置的粒子，在 t 时刻在 x 位置被观测到的概率。满足的方程为

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})K(xt,x't') = i\hbar\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{2.1}$$

(2) 一维线性谐振子作用量

$$S(xt,x't') = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega T)}\left[\left(x^2+x'^2\right)\cos(\omega T) - 2xx'\right]\right\} \tag{2.2}$$

(3) 由多边折线道方法 $K_N(x''t'', x't') = C_N \int \cdots \int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N$

$\therefore$

$$\begin{aligned} K_N(x''t'', x't') &= C_N \int \cdots \int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \\ &= \left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-N/2} \int \cdots \int exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}\sum_j^N (x_j - x_{j-1})^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t'' - t')}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im}{2(t''-t')\hbar}(x''-x')^2} \end{aligned}$$

2.2 2012 年习题

1

2

3

3 写出有电磁场 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\phi})$ 情况下的 $Klein-Gordon$ 方程，推导其非相对论极限，并与电磁场中 $Dirac$ 方程的非相对论极限比较异同。

解：有电磁场 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\phi})$ 情况下的 Klein-Gordon 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\boldsymbol{\phi}\right)^2 \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left[c^2\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + m^2c^4\right]\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.3}$$

在非相对论极限下，令 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}$，代入上式得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\boldsymbol{\phi}\right]\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.4}$$

以上为非相对论极限下的 Klein-Gordon 方程。
有电磁场 $(\boldsymbol{A}, \phi)$ 情况下的 Dirac 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) + mc^2\beta\right]\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.5}$$

以电子为例讨论其非相对论极限，电子在电磁场情况下的 Dirac 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\boldsymbol{\phi}\right)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + mc^2\beta\right]\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t)$$

令 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t)=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$，上式可改写为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\right]=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-e\boldsymbol{\phi}+mc^2\beta\right]\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\tag{2.6}$$

$\therefore$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-e\boldsymbol{\phi}+mc^2\beta-mc^2\right]\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}\tag{2.7}$$

$\therefore$ 代入 $\alpha=\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma}&0\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-e\boldsymbol{\phi}&c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)&-e\boldsymbol{\phi}-2mc^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}\tag{2.8}$$

解得

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi&=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi-e\boldsymbol{\phi}\phi\\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi&=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\phi-\left(e\boldsymbol{\phi}+2mc^2\right)\chi\end{aligned}$$

非相对论极限下

$$\chi=\frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\phi\tag{2.9}$$

$\therefore$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi=\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2\phi-e\boldsymbol{\phi}\phi\tag{$\bigstar$}$$

由 $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 可得

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]^2=\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{e\hbar}{m}\boldsymbol{B}\tag{2.10}$$

将上式代入 ★ 式，得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi=\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}-e\boldsymbol{\phi}\right]\phi\tag{2.11}$$

与非相对论极限下的 Klein-Gordon 方程相比，内禀自旋不再作为一个假定，它已经包含在方程之中，引入了玻耳兹子 $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2mc}$。

4

5

6

2.3 2013 年习题

1

2

3

4

5

6

2.4 2014 年习题

1

2

3

4

5

6

6 考虑量子比特 $1,2$ 构成的复合系统，计算基矢取为 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$。设该系统的密度算符为

$$\rho = a\left|\phi^{+}\right\rangle\left\langle\phi^{+}\right| + (1-a)|11\rangle\langle 11| \quad (0 \leq a \leq 1)$$

其中 $\left|\phi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$。

(1) 给出 ρ、反转算符 $\tilde{\rho}$ 和 $\rho\tilde{\rho}$ 的矩阵表示；

(2) 计算量子比特 1 的约化密度矩阵 ρ_1；

(3) 计算 ρ 的并发度 $\mathbb{C}$，并对结果进行讨论。

解：

(1) $\tilde{\rho} = (\sigma_{y_1} \otimes \sigma_{y_2})\rho^*(\sigma_{y_1} \otimes \sigma_{y_2})$

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{\rho} = \begin{bmatrix} 1-\frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \rho\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a-\frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} \rho_1 = Tr_2\rho &= \sum_\lambda \langle \lambda \,|\rho|\, \lambda \rangle \\ &= \sum_\lambda \left[\frac{a}{2} \langle \lambda|\phi^* \rangle \langle \phi^*|\lambda \rangle + (1-a)\delta_{1\lambda}\delta_{\lambda 1} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) $\rho\tilde{\rho}$ 的本征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$

$\therefore$

$$\mathbb{C} = \max\{0, 0\} = 0 \tag{2.12}$$

$\mathbb{C} = 0$，说明体系无纠缠。

2.5 2015 年习题

1

(1) 对于标量波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$，写出其在绕空间任意轴 $\boldsymbol{n}$ 的无穷小转动变换下的转动算符 $U(\boldsymbol{e_n},\mathrm{d}\theta)$ 的表达式；

(2) 若粒子需用矢量波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 描述，推导出此时无穷小转动算符的表达式，并进行讨论。

解：

(1)

$$U(\boldsymbol{e_n},\mathrm{d}\theta)=e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e_n}\cdot\boldsymbol{L}}=\hat{I}-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e_n}\cdot\boldsymbol{L} \tag{2.13}$$

(2) 设绕三维空间 $\boldsymbol{e_n}$ 转动 $\mathrm{d}\theta$ 得变换矩阵为 $R(\boldsymbol{e_n},\mathrm{d}\theta)$

对矢量波函数有

$$\psi_k(x_j',t)=R_{ki}\psi_i(x_j,t)=\psi_k(x_j,t)+\mathrm{d}\theta n_i\psi_l(x_j,t)\epsilon_{ilk} \tag{2.14}$$

$\therefore$

$$U(\boldsymbol{e_n},\mathrm{d}\theta)=\hat{I}_{3\times3}-\frac{i}{\hbar}\mathrm{d}\theta\left(\hat{I}_{3\times3}\hat{L}_z+\begin{bmatrix}0&-i\hbar&0\\i\hbar&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right) \tag{2.15}$$

2 试利用一阶张量投影定理计算电子自旋算符 $\boldsymbol{S}$ 在总角动量本征态

$$|jm\rangle=\sum_{m_lm_s}C^{jm}_{lm_l\frac{1}{2}m_s}|lm_l\rangle\left|\frac{1}{2}m_s\right\rangle$$

上的平均值。

解：将 $\boldsymbol{S}$ 在球基矢上进行投影，得 $\boldsymbol{S}=\sum\limits_{\mu=-1}^{1}\left\langle jm\left|\hat{S}_\mu\right|jm\right\rangle\boldsymbol{\xi}_\mu^*$，由 Wignet-Eckart 定理

$$\left\langle jm\left|\hat{S}_\mu\right|jm\right\rangle=C^{jm}_{jm1\mu}\left\langle j\left\|\hat{S}_1\right\|j\right\rangle \tag{2.16}$$

只能取 $\mu=0$，即有

$$\langle jm\,|\boldsymbol{S}|\,jm\rangle=\left\langle jm\left|\hat{S}_0\right|jm\right\rangle\boldsymbol{\xi}_0^*=\left\langle jm\left|\hat{S}_0\right|jm\right\rangle\boldsymbol{e}_z \tag{2.17}$$

$\therefore$

$$\left\langle jm\left|\hat{S}_0\right|jm\right\rangle=C_{jm10}^{jm}\left\langle j\left\|\hat{S}_1\right\|j\right\rangle \tag{2.18}$$

球基矢下 $\hat{S}_0=\hat{S}_z$，进而有

$$\begin{aligned}\left\langle jm\left|\hat{S}_0\right|jm\right\rangle=\left\langle jm\left|\hat{S}_z\right|jm\right\rangle&=\frac{\left\langle jm\left|\hat{J}_z\right|jm\right\rangle\left\langle jm\left|\hat{J}\cdot\hat{S}\right|jm\right\rangle}{j(j+1)\hbar^2}\\&=\frac{m\left\langle jm\left|\hat{J}\cdot\hat{S}\right|jm\right\rangle}{j(j+1)\hbar^2}\\&=\frac{m\left\langle jm\left|\frac{1}{2}\left(\hat{J}^2-\hat{L}^2+\hat{S}^2\right)\right|jm\right\rangle}{j(j+1)\hbar^2}\\&=\frac{m\left[j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\hbar}{2j(j+1)}\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\langle jm\,|\boldsymbol{S}|\,jm\rangle=\frac{m\left[j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]\hbar}{2j(j+1)}\boldsymbol{e}_z \tag{2.19}$$

3

4 试从量子力学的算符假定和相对论的能量-动量关系出发，导出 $Klein-Gordon$ 方程，写出其相对论协变形式。进而写出有电磁势情况下的 $K-G$ 方程，并推导其非相对论极限。

解：从含时薛定谔方程出发，将 $E=\dfrac{p^2}{2m}$ 算符化，有

$$E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\quad\boldsymbol{p}\to-i\hbar\nabla$$

将上述关系代入相对论情形

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right) \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.20}$$

$\therefore$ Klein-Gordon 方程为

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right) \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.20}$$

相应协变形式为

$$(\Box - \kappa^2)\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\mu}, \kappa = \frac{mc}{\hbar} \tag{2.20}$$

$\therefore$ 有电磁场 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\phi})$ 情况下的 Klein-Gordon 方程为

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\boldsymbol{\phi}\right)^2 \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left[c^2\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + m^2c^4\right] \mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.20}$$

在非相对论极限下，令 $\mathbf{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}$，代入上式得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\boldsymbol{\phi}\right]\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.20}$$

以上为非相对论极限下的 Klein-Gordon 方程。

5 已知作一维简谐振动的粒子从时刻运动到时刻的作用量为

$$S(xt, x't') = \mathrm{exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\,\mathrm{sin}(\omega T)}\left[\left(x^2 + x'^2\right)\mathrm{cos}(\omega T) - 2xx'\right]\right\}$$

式中 m 和 ω 分别为粒子的质量和振动频率，$T = t - t' \geq 0$。若时刻该粒子处于坐标算符的本征态上，求时刻在处发现该粒子的概率。

解：一维简谐子传播子为

$$K(xt, x't') = \left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\mathrm{sin}(\omega T)}\right]^{1/2} \mathrm{exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\,\mathrm{sin}(\omega T)}\left[\left(x^2 + x'^2\right)\mathrm{cos}(\omega T) - 2xx'\right]\right\}$$

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
P(x,t) &= \psi^*(x,t)\psi(x,t) = K^*(xt,x't')K(xt,x't') \\
&= \frac{m\omega}{2\pi\hbar\sin(\omega T)}
\end{aligned}
$$

6 两量子比特 **A, B** 构成复合体系，其计算基矢为 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$。设有密度矩阵

$$
\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix}
$$

(1) 讨论 ρ_{ij} 应满足的条件；

(2) 按定义，求的反转矩阵；

(3) 对 **X** 型密度矩阵 ρ_X，导出其并发度 $\mathbb{C}$ 的表达式；

(4) 求约化密度矩阵 $\rho_A = Tr_B\rho_X$。

解:

(1)

$$
\begin{aligned}
\rho_{ij} &= \langle i\,|\rho|\,j\rangle = \langle i|\Psi_n(t)\rangle\,\langle\Psi_n(t)|j\rangle \\
&= C_i(t)C_j^*(t)
\end{aligned}
$$

其中 $|\Psi_n(t)\rangle = \sum_n C_n(t)\,|n\rangle$，若 $|\Psi_n(t)\rangle = |k\rangle$，则有

$$
\rho_{ij} = \langle i|k\rangle\,\langle k|j\rangle = \delta_{ik}\delta_{kj} \tag{2.17}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho_{44} & -\rho_{43} & -\rho_{42} & \rho_{41} \\ -\rho_{34} & \rho_{33} & \rho_{32} & -\rho_{31} \\ -\rho_{24} & \rho_{23} & \rho_{22} & -\rho_{21} \\ \rho_{14} & -\rho_{13} & -\rho_{12} & \rho_{11} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(3) 与 (2) 同理

$$
\tilde{\rho}_X = \begin{bmatrix} \rho_{44} & 0 & 0 & \rho_{41} \\ 0 & \rho_{33} & \rho_{32} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{11} \end{bmatrix} \tag{2.17}
$$

$\therefore$

$$
\rho_X \tilde{\rho}_X = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{44} & 0 & 0 & \rho_{41} \\ 0 & \rho_{33} & \rho_{32} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{11} \end{bmatrix} \tag{2.17}
$$

$\rho_X \tilde{\rho}_X$ 对应四个顺次降序排列的本征值 $\lambda_1 \sim \lambda_4$，可得

$$
\mathbb{C} = \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\} \tag{2.17}
$$

代入 $\lambda_1 \sim \lambda_4$ 即可。

(4) 略。

2.6 2016 年习题

1

(1) 写出时间平移算符 $U(\tau)$ 和时间反演算符 $\hat{T}$ 对波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 的作用关系式；

(2) 论证时间反演算符 $\hat{T}$ 一定是反幺正算符。

解:

(1)

$$U(\tau)\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi(\boldsymbol{r},t+\tau) \quad \hat{T}\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\Psi^*(\boldsymbol{r},-t) \tag{2.17}$$

(2) $\because$

$$\hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}}\Psi(\boldsymbol{r},t) = \hat{T}\Psi(\boldsymbol{r},t+\tau) = \Psi^*(\boldsymbol{r},-t+\tau)$$

又 $\because$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}}\hat{T}\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi^*(\boldsymbol{r},-(t-\tau)) = \Psi^*(\boldsymbol{r},-t+\tau)$$

$\therefore$

$$\hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}}\Psi(\boldsymbol{r},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}}\hat{T}\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.15}$$

若 $\tau \ll 1$，$\therefore$

$$\hat{T}\left(1-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right) = \left(1+\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right)\hat{T} \tag{2.15}$$

哈密顿量 $\hat{H}$ 应保持在时间反演变换下不变，则时间反演算符 $\hat{T}$ 一定是反幺正算符，即有

$$\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} = \hat{H} \tag{2.15}$$

2 引入函数 $\Psi_{jLJM_J}(\tau) = \sum\limits_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jLJM_J}(\tau)$，其中为 $C-G$ 系数，$\psi_{jm}(\tau)$ 为角动量本征函数，$\hat{T}_{LM}(\tau)$ 为 L 阶不可约张量算符。证明如此定义的 $\Psi_{jLJM_J}(\tau)$ 是角动量 z 分量 $\hat{J}_z$ 的本征函数，进而计算 $\hat{J}_\pm\Psi_{jLJM_J}(\tau)$。

解：由不可约张量算符的拉卡定义得

$$\left[\hat{J}_z, \hat{T}_{LM}(\tau)\right] = M\hbar\hat{T}_{LM}(\tau)$$

∴

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z\Psi_{jLJM_J}(\tau) &= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\hat{J}_z\hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau) \\
&= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\left(\hat{T}_{LM}(\tau)\hat{J}_z + M\hbar\hat{T}_{LM}(\tau)\right)\psi_{jm}(\tau) \\
&= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}(m+M)\hbar\hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau) \\
&= M_J\hbar\sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau)
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{J}_z\Psi_{jLJM_J}(\tau) = M_J\hbar\Psi_{jLJM_J}(\tau)$，$\Psi_{jLJM_J}(\tau)$ 是角动量 z 分量 $\hat{J}_z$ 的本征函数。
$\because \hat{J}_\pm\psi_{jm}(\tau) = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}$，以及不可约张量算符的拉卡定义

$$\left[\hat{J}_\pm, \hat{T}_{LM}(\tau)\right] = \sqrt{L(L+1)-M(M\pm1)}\hbar\hat{T}_{LM}(\tau)$$

∴

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\pm\Psi_{jLJM_J}(\tau) &= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\hat{J}_\pm\hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau) \\
&= \sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\left(\hat{T}_{LM}(\tau)\hat{J}_\pm + \sqrt{L(L+1)-M(M\pm1)}\hbar\hat{T}_{LM}(\tau)\right)\psi_{jm}(\tau) \\
&= \left[\sqrt{L(L+1)-M(M\pm1)} + \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\right]\sum_{mM} C_{jmLM}^{JM_J}\cdot \\
&\quad \hat{T}_{LM}(\tau)\psi_{jm}(\tau) \\
&= \left[\sqrt{L(L+1)-M(M\pm1)} + \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\right]\Psi_{jLJM_J}(\tau)
\end{aligned}$$

3

(1) 证明：若 $\psi(1,2)$ 为交换对称波函数，则将其反对称化，结果一定为零；而若 $\psi(1,2)$ 为交换反对称波函数，则将其对称化，结果也一定为零。
(2) 设 n 个全同玻色子占据同一个单粒子态 μ，在粒子数表象下，写出体系态矢 $|\Psi(1,2,\cdots,n)\rangle$ 的表达式，求出单体算符 $\hat{T}$ 和两体算符 $\hat{V}$ 在这个态矢上的平均值。

解：

(1) 若交换对称波函数 $\psi(1,2)$

$$
\begin{aligned}
&\psi(1,2)=\psi(2,1)\\
&\Psi(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(1,2)-\psi(2,1)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(1,2)-\psi(1,2)\right]=0
\end{aligned}
$$

若交换反对称波函数 $\psi(1,2)$

$$
\begin{aligned}
&\psi(1,2)=-\psi(2,1)\\
&\Psi(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(1,2)+\psi(2,1)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi(1,2)-\psi(1,2)\right]=0
\end{aligned}
$$

(2)

$$
|\Psi(1,2,\cdots,n)\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{\dagger})^{n}|0\rangle=|n_{\mu}\rangle=|n\rangle \tag{2.13}
$$

$\because \hat{T}=\sum\limits_{\alpha\beta}\langle\alpha|t|\beta\rangle\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\beta}$，$\hat{V}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\alpha\beta|t|\gamma\delta\rangle\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\beta}^{\dagger}\hat{a}_{\gamma}\hat{a}_{\delta}$
$\therefore$

$$
\begin{aligned}
\left\langle\hat{T}\right\rangle&=\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|t|\beta\rangle\langle\Psi(1,2,\cdots,n)|\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}\hat{a}_{\beta}|\Psi(1,2,\cdots,n)\rangle\\
&=\sum_{\mu}\langle\mu|t|\mu\rangle\langle\Psi(1,2,\cdots,n)|\hat{a}_{\mu}^{\dagger}\hat{a}_{\mu}|\Psi(1,2,\cdots,n)\rangle\\
&=\langle\mu|t|\mu\rangle\langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle=\sum_{\mu}\langle\mu|t|\mu\rangle\langle n|\hat{a}^{\dagger}\sqrt{n}|n\rangle\\
&=\langle\mu|t|\mu\rangle\langle n|\sqrt{n}\sqrt{n-1+1}|n\rangle\\
&=n\langle\mu|t|\mu\rangle
\end{aligned}
$$

同理可得

$$\left\langle \hat{V} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \mu\mu |v| \mu\mu \rangle n(n-1) \tag{2.13}$$

4 写出单电子相对论性运动方程中算符 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β，以及自旋算符 $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ 中的在 $Pauli-Dirac$ 表象中的矩阵表示。若选取 $Weyl$ 表象，即取 $\beta = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$，其中 I 为二阶单位矩阵，试推导出在这一表象中 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的矩阵表示，并计算对易关系。

解：由 2004 年第 7 题可得，在 Pauli-Dirac 表象中

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

若选取 Weyl 表象，由 $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$，$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \therefore$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$\because \Sigma_i^2 = 1$，以及

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \quad [\Sigma_i, \beta] = 0 \quad [\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k \tag{2.13}$$

$\therefore$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$\therefore$ 在 Weyl 表象下

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

5 设一维自由粒子从 t' 时刻运动到 t'' 时刻，将时间间隔 $T = t'' - t'$ 分为三段 $(t'' < t_1 < t_2 < t')$，其中 t_1, t_2 分别位于 T 的 $\frac{1}{2}$ 处和 $\frac{1}{4}$ 处。试采用多边折线道方案，计算传播子 $K(x''t'', x't')$。对每

段时间间隔可取 $C=\left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m}\right)^{-1/2}$，其中 ϵ 为间隔大小。

解:

$$L=T=\frac{1}{2}m\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\right)^2$$

$\therefore$

$$S=\int_{t'}^{t''}L\,\mathrm{d}t\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{\epsilon_i^2}\cdot\epsilon_i$$

其中 $x_0=x'$，$x_3=x''$

$\therefore$

$$S=\frac{1}{2}m\frac{(x_1-x')^2}{\epsilon_1}+\frac{1}{2}m\frac{(x_2-x_1)^2}{\epsilon_2}+\frac{1}{2}m\frac{(x_3-x_2)^2}{\epsilon_3} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}K(x''t'',x't')=&\left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon_1}{m}\right)^{-1/2}\left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon_2}{m}\right)^{-1/2}\left(\frac{2\pi\hbar i\epsilon_3}{m}\right)^{-1/2}\int\mathrm{d}x_1\int\mathrm{d}x_2\\&\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}m\frac{(x_1-x')^2}{\epsilon_1}+\frac{1}{2}m\frac{(x_2-x_1)^2}{\epsilon_2}+\frac{1}{2}m\frac{(x_3-x_2)^2}{\epsilon_3}\right]\right\}\\=&\cdots\\=&\left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x''-x')^2}{T}\right\}\end{aligned}$$

$\therefore K(x''t'',x't')=\left(\frac{m}{2\pi\hbar iT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(x''-x')^2}{T}\right\}$。

6 考虑量子比特 $1,2$ 构成的复合系统，计算基矢取为 $|00\rangle,|01\rangle,|10\rangle,|11\rangle$。设该系统的密度算符为

$$\rho=a\left|\phi^+\right\rangle\left\langle\phi^+\right|+(1-a)\left|11\right\rangle\left\langle11\right|\quad(0\le a\le1)$$

其中 $\left|\phi^+\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+|11\rangle\right)$。

(1) 给出 ρ、反转算符 $\tilde{\rho}$ 和 $\rho\tilde{\rho}$ 的矩阵表示；

(2) 计算量子比特 1 的约化密度矩阵 ρ_1；

(3) 计算 ρ 的并发度 $\mathbb{C}$，并对结果进行讨论。

解:

(1) $\tilde{\rho} = (\sigma_{y_1} \otimes \sigma_{y_2})\rho^*(\sigma_{y_1} \otimes \sigma_{y_2})$

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\therefore \tilde{\rho} = \begin{bmatrix} 1-\frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \rho\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a-\frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} \rho_1 = Tr_2\rho &= \sum_\lambda \langle\lambda\,|\rho|\,\lambda\rangle \\ &= \sum_\lambda \left[\frac{a}{2}\langle\lambda|\phi^*\rangle\langle\phi^*|\lambda\rangle + (1-a)\delta_{1\lambda}\delta_{\lambda 1}\right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) $\rho\tilde{\rho}$ 的本征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$

$\therefore$

$$\mathbb{C} = \max\{0, 0\} = 0 \tag{2.8}$$

$\mathbb{C} = 0$，说明体系无纠缠。

2.7 2017 年习题

1

(1) 试证明角动量平方算符可写为 $\boldsymbol{J}^2 = \dfrac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$，其中 $J_\pm = J_x \pm iJ_y$；**(2)** 利用上面的关系式及不可约张量算符的 $Racah$ 定义，推导对易关系 $\left[\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{T}_{LM}\right]$，这里 $\boldsymbol{T}_{LM}(\tau)$ 为 L 阶不可约张量算符。

解：(1) $\because J_\pm = J_x \pm iJ_y \Rightarrow \begin{cases} J_x = \dfrac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ J_y = \dfrac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases}$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{1}{4}\left((J_+ + J_-)^2 - (J_+ - J_-)^2\right) + J_z^2 \\ &= \frac{1}{4}(2J_+J_- + 2J_-J_+) + J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{T}_{LM}\right] &= \left[\frac{1}{2}\left(L_+L_- + L_-L_+\right) + L_z^2, \boldsymbol{T}_{LM}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[L_+L_-, \boldsymbol{T}_{LM}\right] + \left[L_-L_+, \boldsymbol{T}_{LM}\right]\right) + \left[L_z^2, \boldsymbol{T}_{LM}\right] \\ &= \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{L(L+1) - M(M-1)}\left\{L_+, \boldsymbol{T}_{L,M-1}\right\} + \sqrt{L(L+1) - M(M+1)}\left\{L_-, \boldsymbol{T}_{L,M+1}\right\}\right] \\ &+ M\hbar\left\{L_z, \boldsymbol{T}_{LM}\right\} \end{aligned}$$

2 D 函数 $D^j_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$ 作为欧拉角的函数可表示作自由转动的对称陀螺的本征函数：

$$\Psi_{LMK}(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{2L+1}{8\pi^2}} D^L_{MK}(-\alpha, -\beta, -\gamma)$$

在惯量主轴坐标系 $O - \xi\eta\zeta$ 下写出体系的哈密顿算符，讨论力学量完全集，给出其中各力学量的本征值表达式，并讨论能量简并度。

解：在惯量主轴坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 下体系的哈密顿算符为

$$\hat{H}=\frac{1}{2I}\hat{L}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I'}-\frac{1}{I}\right)\hat{L}_\zeta^2 \tag{2.7}$$

其中 I、I' 为转动惯量。

$\therefore$

$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\right]$$

$$\hat{L}_\zeta=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\gamma}$$

力学量完全集为 $\left\{\hat{H},\hat{L}^2,\hat{L}_\zeta,\hat{L}_z\right\}$，对应的本征值和本征方程为

$$\begin{cases}\hat{H}\Psi_{LMK}=\left[\frac{1}{2I}L(L+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I'}-\frac{1}{I}\right)K^2\hbar^2\right]\Psi_{LMK}\\ \hat{L}^2\Psi_{LMK}=L(L+1)\hbar^2\Psi_{LMK}\\ \hat{L}_\zeta\Psi_{LMK}=M\hbar\Psi_{LMK}\\ \hat{L}_z\Psi_{LMK}=K\hbar\Psi_{LMK}\end{cases} \tag{2.7}$$

能量本征值为

$$E_{L|K|}=\frac{1}{2I}L(L+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I'}-\frac{1}{I}\right)K^2\hbar^2 \tag{2.7}$$

能量简并度

$$f_{LK}=\begin{cases}2L+1 & k=0\\ 2(2L+1) & k\neq 0\end{cases} \tag{2.7}$$

3 给定算符 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$，$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$，满足 $(\hat{a}^\dagger)^\dagger=\hat{a}$，$(\hat{a})^\dagger=\hat{a}^\dagger$，及 $\{\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger\}=0$，$\{\hat{a}^\dagger,\hat{a}\}=1$。

(1) 试证 $\hat{n}^2=\hat{n}$，由此求出的本征值，并回答这些算符适用于描述什么类型的粒子。

(2) 在 $\hat{n}$ 的自身表象下，给出 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$ 和 $\hat{n}$ 的矩阵表示。

解：(1) $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0 \Rightarrow \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger = 0$

$\therefore$

$$\hat{n}^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a}^\dagger \left(1 - \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) \hat{a} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n} \tag{2.7}$$

$\therefore$

$$\hat{n}^2 \left|n\right\rangle = \hat{n} \left|n\right\rangle \Rightarrow n^2 \left|n\right\rangle = n \left|n\right\rangle \Rightarrow n = 0, 1 \tag{2.7}$$

显然 $\hat{n}$ 用来描述费米子。

(2) 在 $\hat{n}$ 的自身表象下

$$\begin{aligned}
\left\langle m \left|\hat{n}\right| n \right\rangle &= \left\langle m \left|n\right| n \right\rangle = n \left\langle m | n \right\rangle = n\delta_{mn} \\
\left\langle m \left|\hat{a}^\dagger\right| n \right\rangle &= \left\langle m \left|\sqrt{1-n}\right| n+1 \right\rangle = \sqrt{1-n} \left\langle m | n+1 \right\rangle = \sqrt{1-n}\delta_{m,n+1} \\
\left\langle m \left|\hat{a}\right| n \right\rangle &= \left\langle m \left|\sqrt{n}\right| n-1 \right\rangle = \sqrt{n} \left\langle m | n-1 \right\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1}
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{a}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 写出自由粒子的 $Dirac$ 相对论性运动方程，进而考察轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 所满足的 $Heisenberg$ 运动方程，由此说明 $Dirac$ 方程所描述的粒子必有内禀自旋。给出相应的自旋算符，指出其本征值和相应的量子数是多少。

解：自由电子 $Dirac$ 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi} = \left(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + mc^2\beta\right)\boldsymbol{\Psi} \tag{2.3}$$

其中 $\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta$，轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 所满足的 $Heisenberg$ 运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \boldsymbol{L}\right] \tag{2.3}$$

其中

$$\left[\hat{H}, \boldsymbol{L}\right] = \left[\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta\right), \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right] = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p} \tag{2.3}$$

$\therefore$ 轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 所满足的 $Heisenberg$ 运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = c\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{p} \tag{2.3}$$

但对于自由粒子而言空间各向同性，理应有角动量守恒，所以除轨道角动量之外粒子必有内禀的自旋角动量。引入 $\boldsymbol{\Sigma}$ 使之满足 $[\boldsymbol{\Sigma}, \beta] = 0$ 且 $[\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k$。

$\therefore$

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}, \boldsymbol{\Sigma}\right] &= \left[\left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + mc^2\beta\right), \boldsymbol{\Sigma}\right] \equiv c\left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Sigma}\right] \\ &= 2ic\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{p}\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$，则有 $\left[\hat{H}, \boldsymbol{S}\right] = i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{p}$，使总角动量 $\boldsymbol{J}$ 满足 $\left[\hat{H}, \boldsymbol{S}\right] = 0$。

$\therefore$ 自由电子自旋算符为 $\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$，本征值为 $\pm\dfrac{\hbar}{2}$，对应量子数为 $\dfrac{1}{2}$。

5 写出传播子 $K(x''t'', x't')$ 的定义式。设体系哈密顿量 $\hat{H}$ 不显含时间，有本征方程 $\hat{H}\psi_n(x) = E\psi_n(x)$，试导出传播子在能量表象中的表达式，并就 $t'' = t' = t$ 的情况进行讨论。

解：由 $\hat{H}\psi_n(x) = E\psi_n(x)$

$$\begin{aligned}K(x''t'', x't') &= \sum_n \left\langle x'' \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')} \right| \psi_n(x) \right\rangle \left\langle \psi_n(x) \middle| x' \right\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t''-t')}\psi_n(x'')\psi_n^*(x') \\ &= \sum_n \psi_n(x'', t'')\psi_n^*(x', t')\end{aligned} \tag{2.1}$$

若 $t'' = t' = t$，则有

$$K(x''t'', x't') = \sum_n \psi_n(x'')\psi_n^*(x') = \delta(x'' - x') \tag{2.1}$$

6