



FORMATION SQUARE MANAGEMENT

INTÉGRATION DES RISQUES CLIMATIQUES DANS LES EXERCICES DE STRESS TESTS ET LE PROCESSUS ICAAP

Charles-Emmanuel Prost

Octobre 2025

1

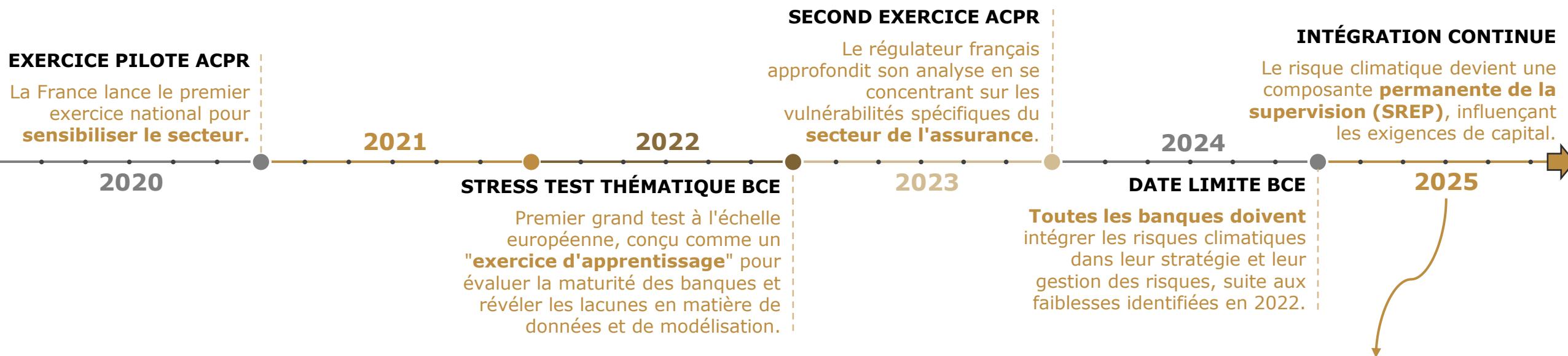
STRESS-TEST CLIMATIQUE

Stress tests - « classiques » et climatiques (Pilier II)

STRESS-TESTS CLIMATIQUES : VERS UNE NOUVELLE APPROCHE DES STRESS-TESTS

Qu'est-ce qu'un stress-test climatique ?

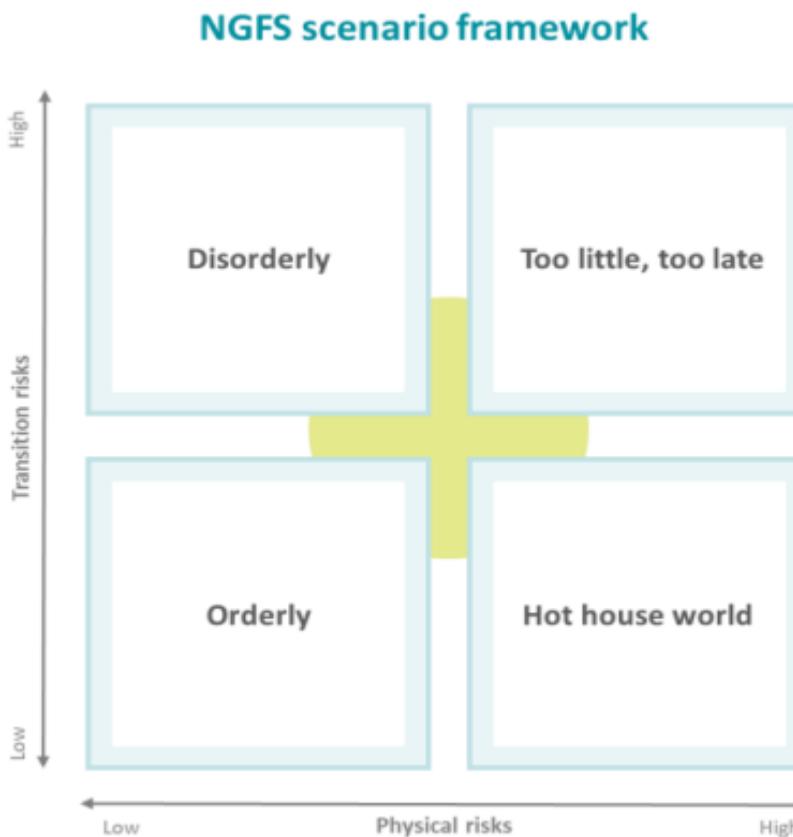
Un stress test climatique vise à évaluer la résilience d'un portefeuille face à différents scénarios climatiques. Cet exercice permet de saisir comment la transition vers une économie bas carbone pourrait impacter la performance financière d'une entreprise, englobant ainsi les risques liés à cette transition tout en examinant également les répercussions physiques résultant du changement climatique.



Stress tests - « classiques » et climatiques (Pilier II)

LES SCÉNARIOS DU NGFS (1/2)

Les scénarios NGFS examinent un ensemble de sept scénarios climatiques regroupés en quatre quadrants : transition ordonnée, transition désordonnée, *hot house world*, et *too little, too late*.



Source : NGFS –Phase IV

Chaque scénario est caractérisé par un niveau global de risque physique et de risque de transition :

Transition ordonnée : Des politiques de réduction des émissions de GES sont mises en œuvre de manière anticipée et coordonnée

Transition désordonnée : Des politiques de réduction des émissions de GES sont mises en œuvre tardivement et de manière non coordonnée.

Hot house world : Les efforts mondiaux ne suffisent pas à inhiber un réchauffement climatique important provoquant des risques physiques sévères et des impacts irréversibles comme la montée du niveau de la mer.

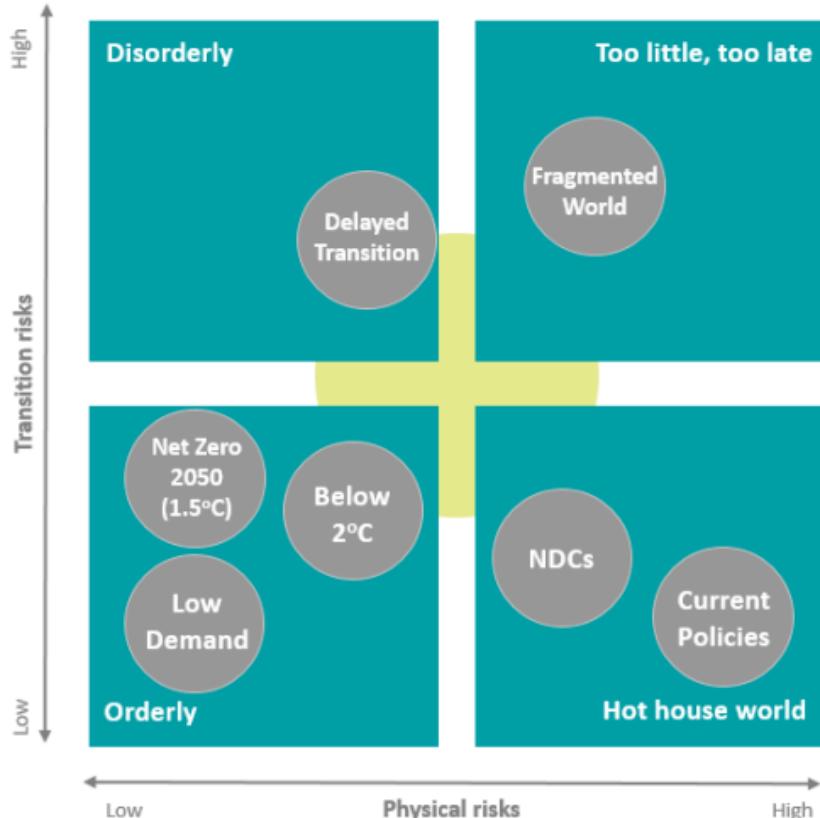
Too little, too late : transition tardive et non coordonnée, échouant ainsi à limiter les risques physiques.



Stress tests - « classiques » et climatiques (Pilier II)

LES SCÉNARIOS DU NGFS (2/2)

Les sept scénarios climatiques de la phase IV du NGFS sont les suivants :



Source : NGFS –Phase IV

Net Zero 2050 : limitation du réchauffement climatique à 1,5 °C à l'horizon 2050 grâce à des politiques climatiques strictes et à de nouvelles technologies.

Below 2° : politiques de réduction des GES moins strictes mais globalement efficaces, permettant de maintenir le réchauffement au-dessous de 2 °C.

Low Demand : forts changements d'habitudes de production et de consommation d'énergie, réduisant la demande et assurant une transition ordonnée.

Nationally Determined Contributions (NDCs) : Des politiques d'atténuation sont mises en œuvre au niveau national, mais ne montrent pas de résultats probants.

Current Policies : poursuite des politiques actuelles uniquement, sans durcissement, ce qui conduit à des risques physiques élevés.

Fragmented World : réponse politique tardive et hétérogène selon les pays, générant à la fois des risques de transition et des risques physiques élevés.

Delayed Transition : Les émissions ne commencent pas à baisser avant 2030, imposant ensuite des politiques plus ambitieuses et abruptes.

Stress tests – « classiques » et climatiques (Pilier II)

LES MODÈLES UTILISÉS PAR LE NGFS

Les hypothèses des narratifs du NGFS sont traduites en projections quantitatives sur différentes variables macroéconomiques

Les risques de transition sont modélisés au moyen de trois modèles **IAM** :

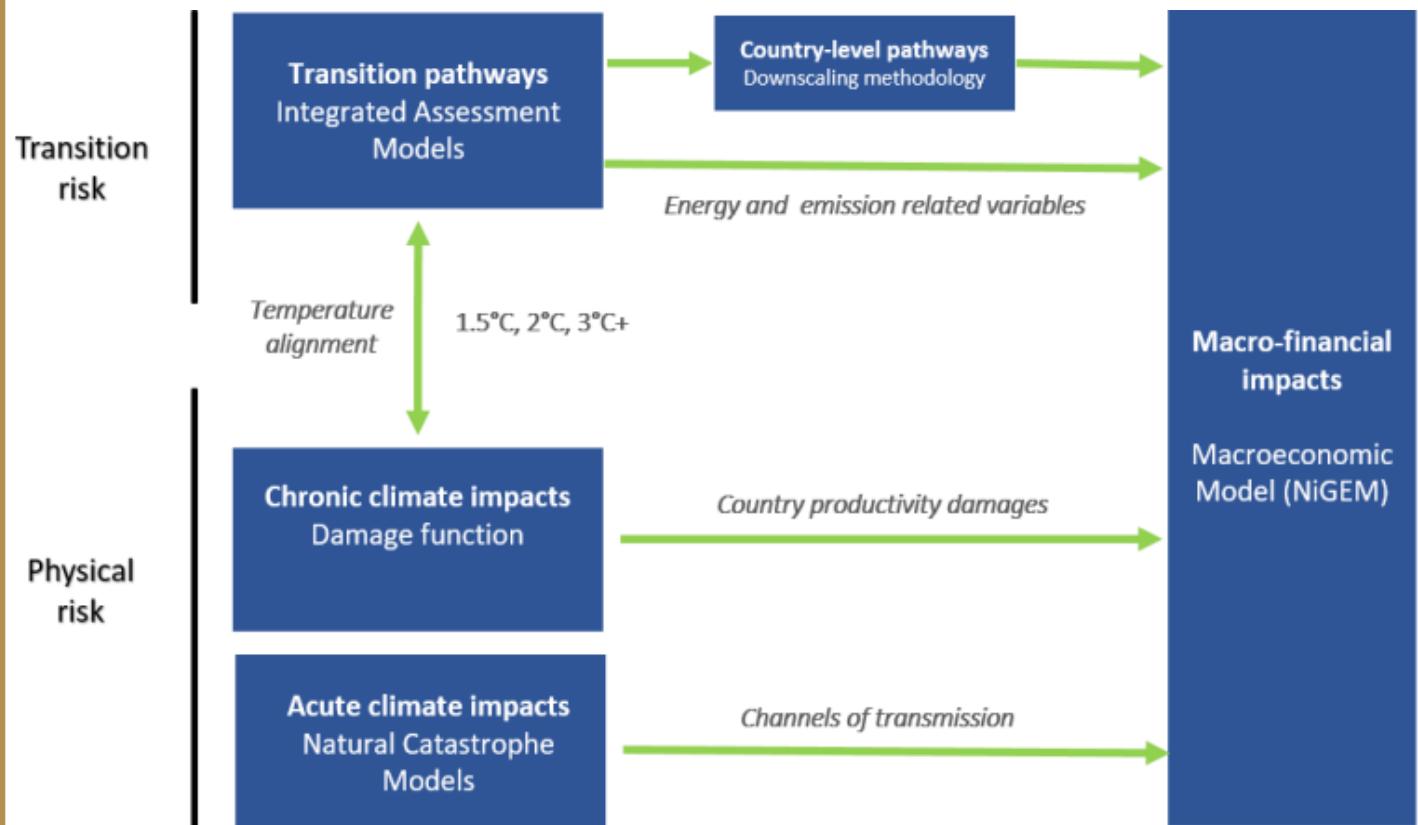
- REMIND-MAgPIE,
- GCAM
- MESSAGEix-GLOBIOM

La modélisation des risques physiques nécessite de recourir à des **modèles de catastrophes naturelles (CANAT)**.

Les chocs climatiques sont propagés au reste de l'économie à l'aide du modèle macro-économique **NiGEM**.

Ces différents modèles permettent de générer des projections des prix des énergies fossiles et de diverses variables macroéconomiques jusqu'en 2050.

Interactions entre les trois types de modèles utilisés par le NGFS :



2

MÉTHODOLOGIES DE STRESS-TEST CLIMATIQUE

- 1. Modélisation de la PD**
- 2. Modélisation des migrations de ratings**
- 3. Modélisation de la LGD**

Modélisation de la PD

ESTIMATION DES PD PIT ET PD TTC (OU LRA) À 1 AN

Exemple de grille unique de notation (échelle maître)

Classe	Borne inférieure	Borne supérieure	Centre de la classe
A+	0,00%	0,50%	0,25%
A-	0,50%	0,80%	0,65%
B+	0,80%	1,40%	1,10%
B-	1,40%	2,00%	1,70%
C+	2,00%	3,25%	2,63%
C-	3,25%	4,85%	4,05%
D+	4,85%	7,50%	6,18%
D-	7,50%	12,00%	9,75%
E+	12,00%	100,00%	56,00%

Répartition des effectifs dans les CHR après segmentation

Classe	Score	Répartition	Taux de défaut de référence	Taux de défaut au sein de la CHR
A+	[0 ; 100[10,9%	0,25%	0,4%
A-	[100 ; 200[23,0%	0,65%	0,7%
B+	[200 ; 300[17,3%	1,10%	1,2%
B-	[300 ; 450[15,1%	1,70%	1,7%
C+	[450 ; 580[13,6%	2,63%	2,7%
C-	[580 ; 750[10,1%	4,05%	4,0%
D+	[750 ; 800[4,0%	6,18%	6,2%
D-	[800 ; 900[5,0%	9,75%	9,1%
E+	[900 ; 1000[1,0%	56,00%	18,0%



Segmentation d'un score de risque

PD PIT théorique :

$$PD_i^{PIT}(z) = \mathbb{E}(y_i | Z = z) = P(y_i = 1 | Z = z)$$

PD TTC théorique :

$$PD_i^{TTC} = \mathbb{E}_Z [PD_i^{PIT}(z)] = \mathbb{E}(y_i) = P(y_i = 1)$$

Z : facteur représentant la conjoncture économique en t

PD PIT estimée :

$$\widehat{PD}_{A+}^{PIT}(t) = \text{Taux de défaut}_t^{A+}$$

PD TTC estimée :

$$\widehat{PD}_{A+}^{TTC} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{PD}_{A+}^{PIT}(t)$$

$T \geq 5$ ans pour le Retail
et $T \geq 7$ ans pour les clients Corporate

Hypothèse : la contrepartie i appartient à la CHR A + en t

Modélisation de la PD

ESTIMATION DE LA BARRIÈRE DANS LE MODÈLE ASRF

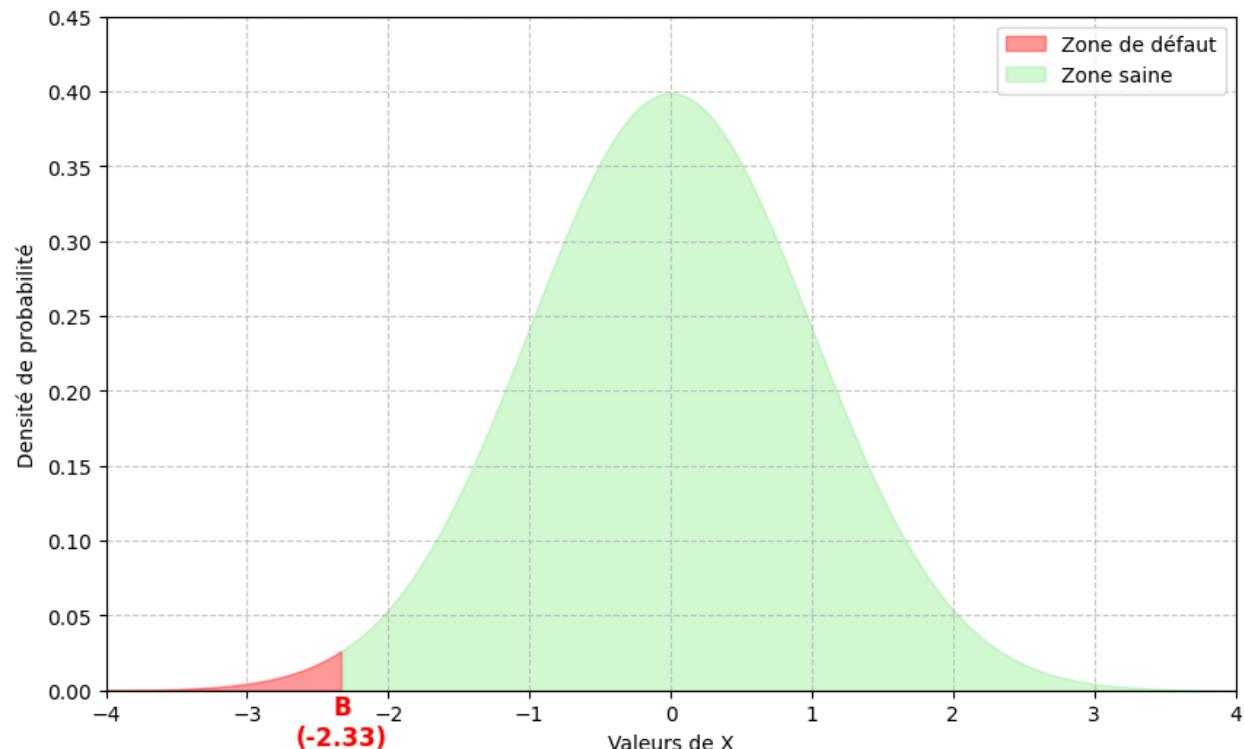
La barrière du modèle ASRF est obtenue directement à partir de la probabilité de défaut TTC :

$$PD_i^{\text{TTC}} = P(X_t^i < B_i) = \Phi(B_i) \quad \rightarrow \quad \widehat{B}_i = \Phi^{-1}(\widehat{PD}_i^{\text{TTC}})$$

Exemples de barrières par classe de rating

Rating	PD TTC (%)	Barrières
AAA	0 %	-inf
A	0 %	-inf
BBB	0.018 %	-3.56
BB	0.23 %	-2.83
B	1.00 %	-2.33
C	10.17 %	-1.27

Graphique d'une $N(0,1)$ avec PD_i TTC à 1%



Modélisation de la PD

EXTRACTION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE (1/2)

Dans le cadre d'un exercice de stress-test, le facteur systémique Z doit être **modélisé de manière explicite**.

À partir du modèle ASRF, nous en déduisons une relation permettant d'exprimer directement la PD PIT en fonction de la PD TTC :

$$X_t^i = \sqrt{\rho}Z_t + \sqrt{1-\rho}\epsilon_t^i \quad \longrightarrow \quad PD_i^{PIT}(z_t) = \mathbb{P}(X_t^i < B_i | Z_t = z_t) = \phi\left(\frac{\phi^{-1}(PD_i^{TTC}) - \sqrt{\rho}z_t}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

En remplaçant $PD_i(z)$ par la PD PIT empirique observée $\widehat{PD}_i^{PIT}(t)$, il est possible d'extraire le facteur systémique z_t en minimisant les écarts au carré entre les probabilités de défaut observées et les probabilités modélisées pour chaque notation :

$$\forall t \in [0, T], z_t = \underset{z_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{D-1} [PD_i^{PIT}(z_t) - \widehat{PD}_i^{PIT}(t)]^2 \quad \widehat{PD}_i^{PIT}(t) = \frac{n_{t+12}^{i,D}}{n_t^i}$$

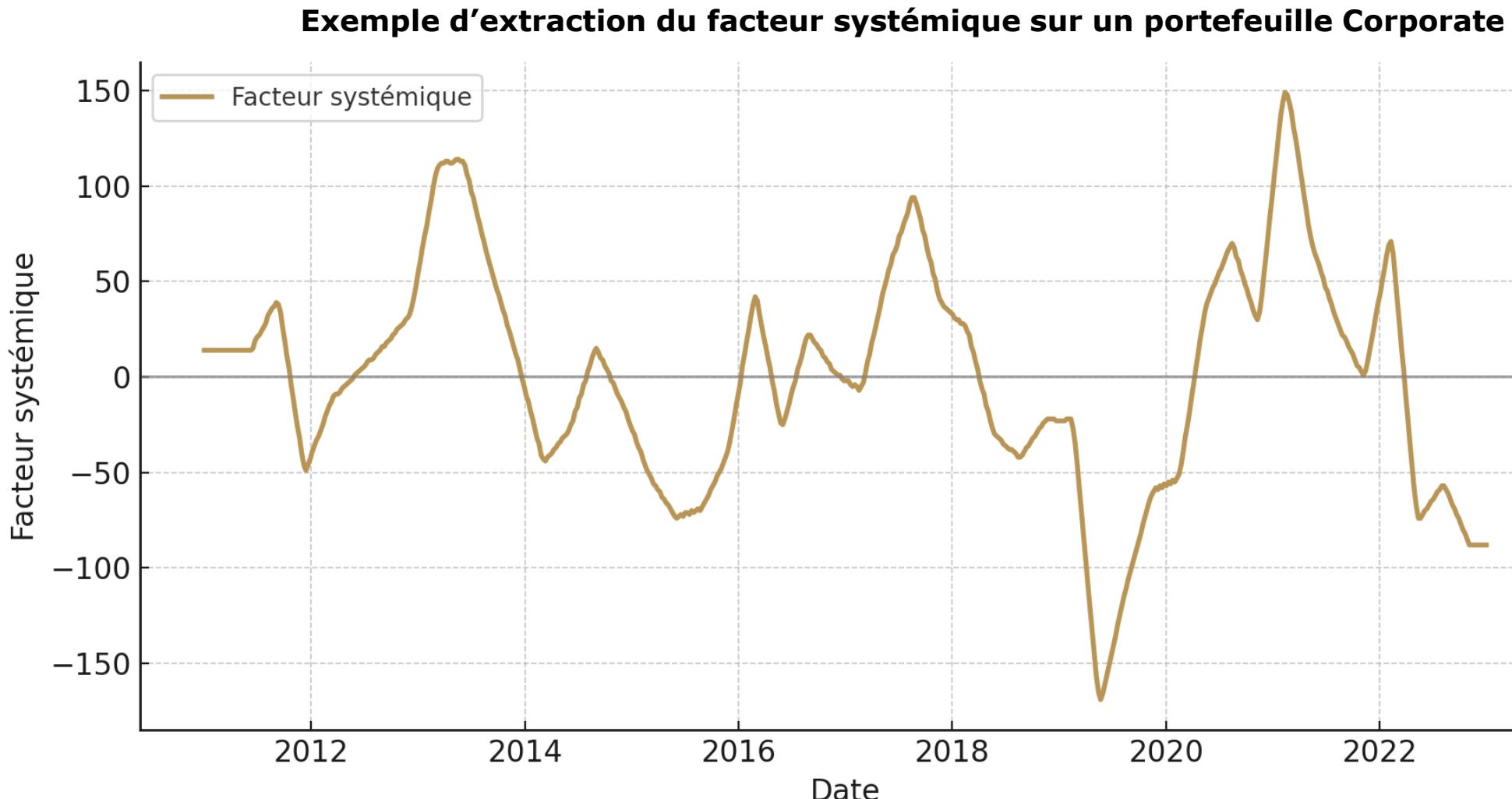
En supposant que toutes les contreparties sont homogènes du point de vue de leur risque de défaut, i.e. que $PD_i^{PIT}(z_t) = PD^{PIT}(z_t)$, $PD_i^{TTC} = PD^{TTC}$ et $\rho_i = \rho$ pour tout $i \in [1, \dots, n]$, il est possible d'extraire le facteur systémique z_t comme suit :

$$\forall t \in [0, T], z_t = \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}}} [\phi^{-1}(\widehat{PD}^{TTC}) - \phi^{-1}(\widehat{PD}^{PIT}(t))\sqrt{1-\hat{\rho}}] \quad \widehat{PD}^{PIT}(t) = \frac{n_{t+12}^{D}}{n_t} = \frac{\sum_{i=1}^{D-1} n_{t+12}^{i,D}}{\sum_{i=1}^{D-1} n_{t+12}^i}$$

La sensibilité à la conjoncture économique $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\widehat{PD}^{TTC})$ peut être obtenue directement à partir de la formule du régulateur.

Modélisation de la PD

EXTRACTION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE (2/2)



Modélisation de la PD

ESTIMATION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE – MODÈLE SATELLITE

Après avoir extrait le facteur Z, l'étape qui suit consiste à estimer un modèle satellite reliant ce facteur systémique aux variables macroéconomiques préalablement sélectionnées sur la période historique.

$$\text{Modèle satellite : } Z_t = f(X_t) + \epsilon_t$$

X_t : ensemble des variables macroéconomiques susceptibles d'influencer la conjoncture économique en t

Vu qu'en théorie $Z_t \sim N(0,1)$ (*i.i.d*), il en découle que les variables X_t doivent être stationnaires.

$$\text{Projection du facteur systémique dans le scénario } s \in S : \hat{Z}_{T+h}^s = \hat{f}(X_{T+h}^s)$$

X_t : variables macroéconomiques projetées par le NGFS en $T + h$ dans le scénario $s \in S$.

Calcul de la PD PIT projetée dans le scénario $s \in S$ en $T + h$:

$$\widehat{\text{PD}}_{\text{PIT}}^i(\hat{z}_{T+H}) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\widehat{\text{PD}}_{\text{TTC}}^i) - \sqrt{\hat{\rho}_i} \hat{z}_{T+H}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_i}} \right)$$

Modélisation de la PD

VARIABLES DISPONIBLES DANS UN MODÈLE SATELLITE

- Pour un ST climatique, nous pouvons uniquement utiliser les variables que le NGFS a projeté.
- Les données du NGFS couvrent une panoplie très large de variables macroéconomiques pour plusieurs pays.

Variables	Transformation
Taux d'intérêt Banque Centrale	Différence
Taux d'intérêt long terme	Différence
Taux de chômage	Différence
Taux d'inflation (US)	Différence
PIB	Log ratio
Taux de change effectif	Log ratio
Prix du marché boursier (US)	Log ratio
Prix de l'immobilier résidentiel (US)	Log ratio
Prix du Pétrole (US)	Log ratio

Stationnarité des variables

$$\text{Différence : } x_t^{(diff)} = x_t - x_{t-4}$$

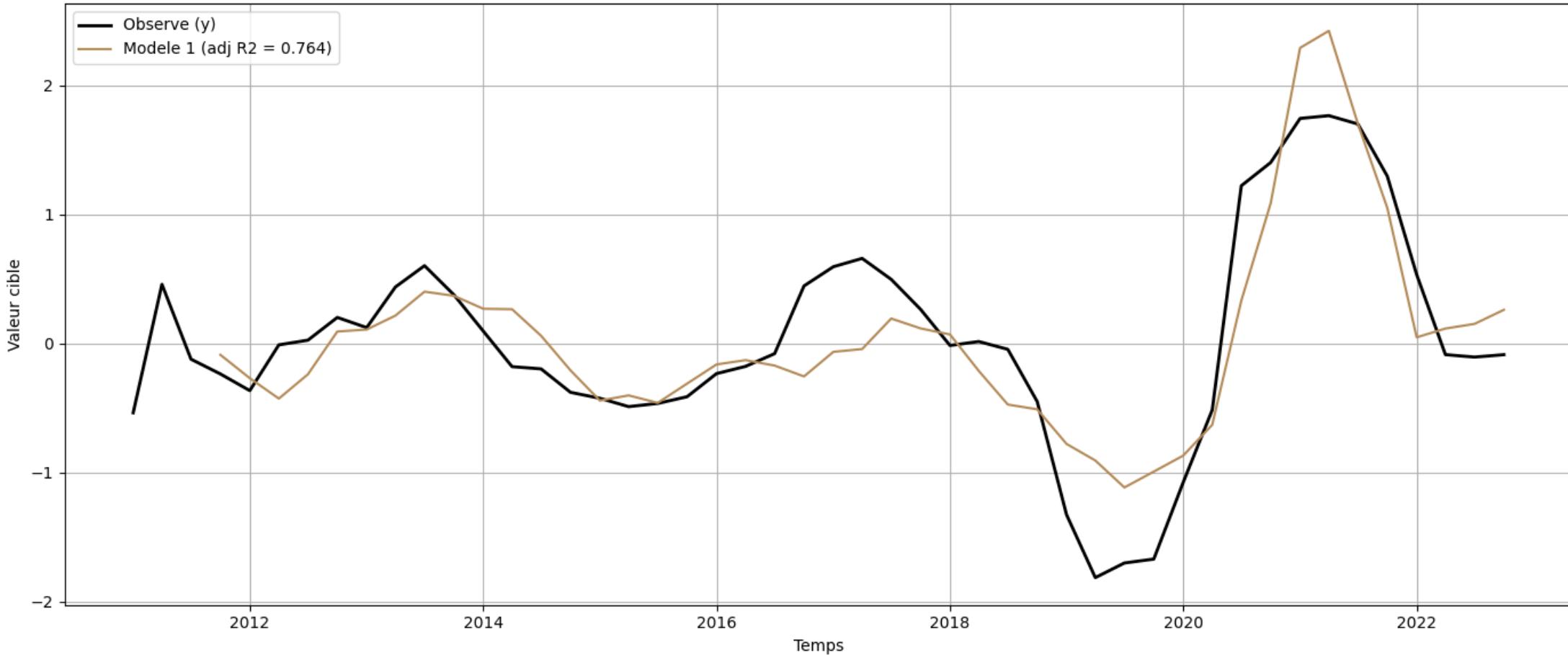
$$\text{Log ratio} = x_t^{(logratio)} = \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-4}}\right)$$

Application de différents lags de 1 à 4



Modélisation de la PD

RÉGRESSION LINÉAIRE DU FACTEUR SYSTÉMIQUE

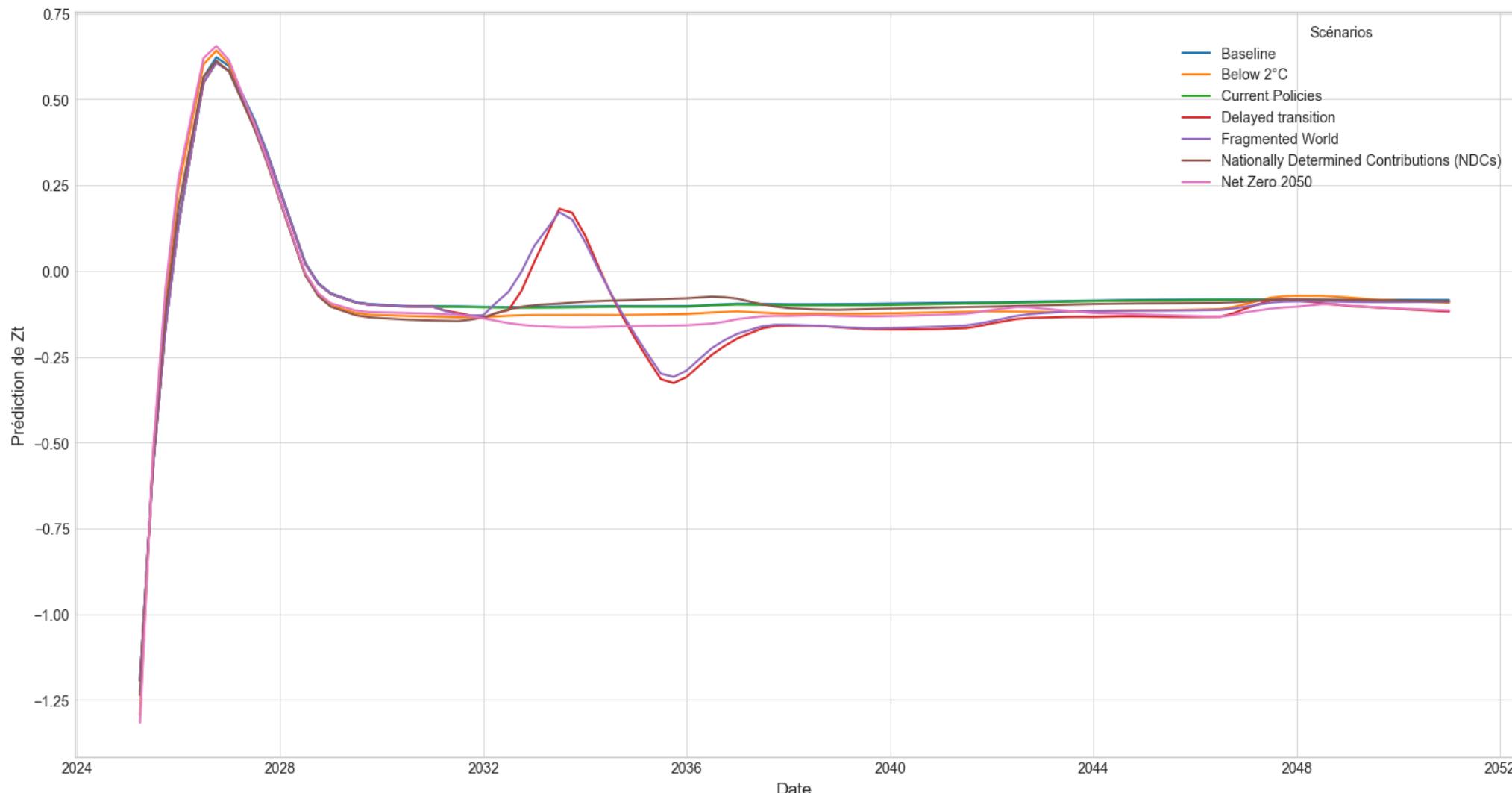


$$Z_t = 0.026 + 3.75 \text{ US Effective Exchange Rate} - 0.906 \text{ US Interest Rate}_{lag3} + 0.558 \text{ Oil Price}$$



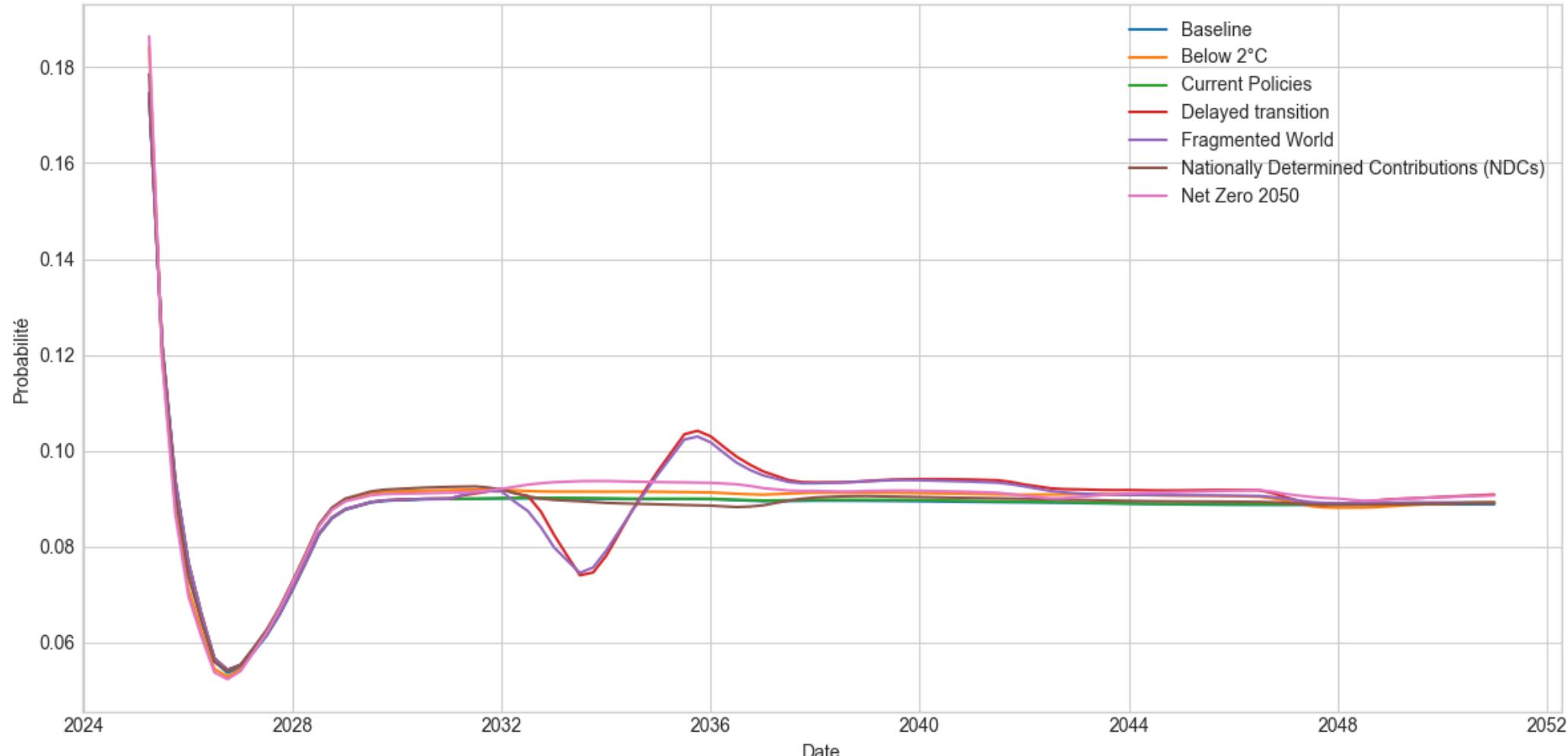
Modélisation de la PD

PROJECTION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE JUSQU'EN 2050 POUR LES DIFFÉRENTS SCÉNARIOS



Modélisation de la PD

PROJECTION DE LA PD JUSQU'EN 2050 POUR LES DIFFÉRENTS SCÉNARIOS



Modélisation de la PD

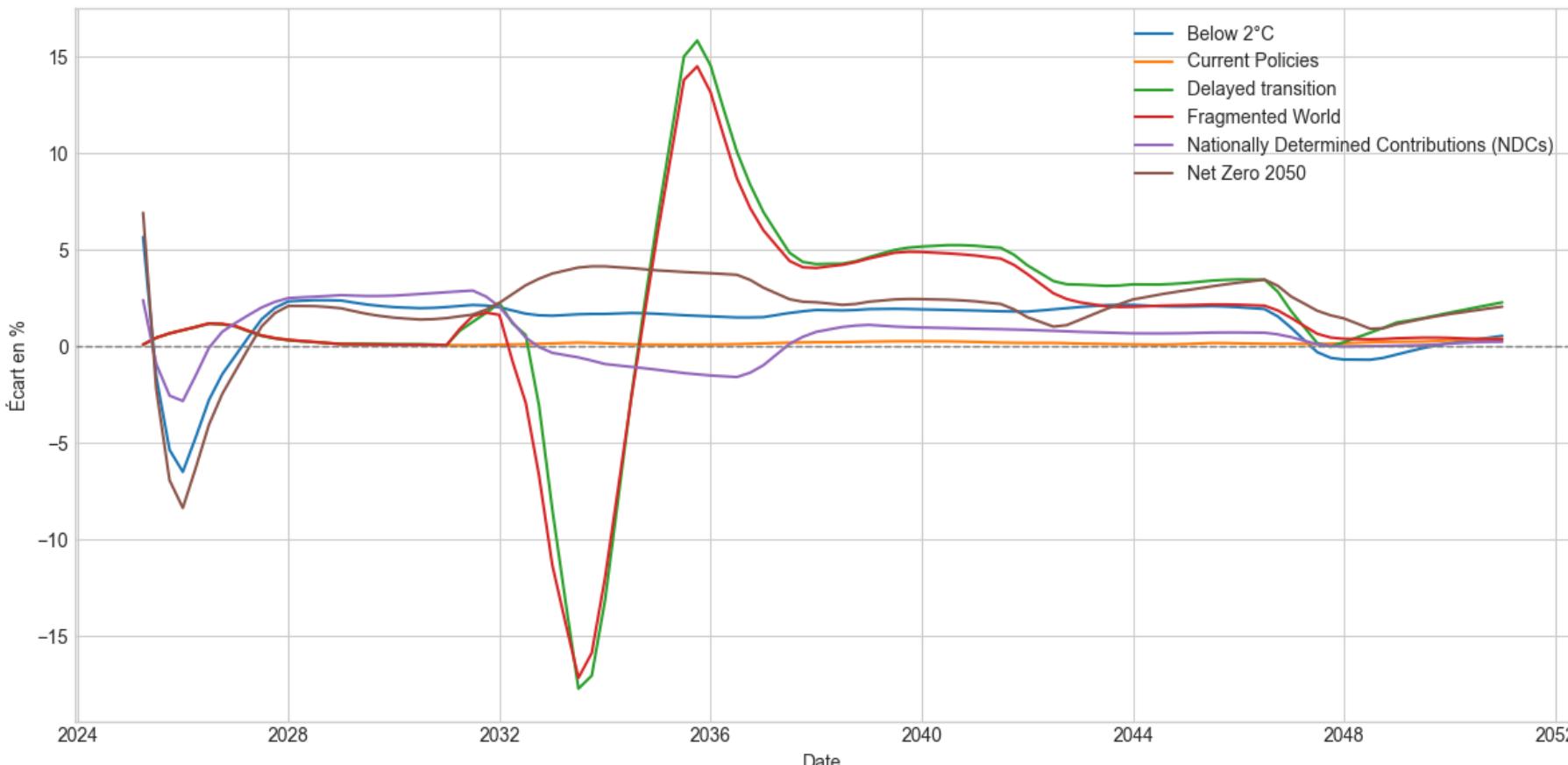
ÉCART RELATIF AU SCÉNARIO BASELINE

Dans le cadre d'un stress-test climatique, l'indicateur qui a le plus d'importance est **l'écart de risque de défaut relativement au scénario Baseline**

Le scénario **Baseline** fait l'hypothèse d'absence de risque climatique.

$$\frac{PD_t^{Pit,scen} - PD_t^{Pit,baseline}}{PD_t^{Pit,baseline}} * 100$$

Pourcentage de déviation de la PD relativement à la PD du Baseline pour chaque scénario



Modélisation de la PD

ESTIMATION ALTERNATIVE DU FACTEUR SYSTÉMIQUE : LOGIT VS PROBIT

La PD du modèle de Vasicek-Merton peut être vue comme une simple réécriture d'un modèle Probit :

$$PD_{PIT}^i(\hat{z}_t) = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{\rho} \hat{z}_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{\rho} x_t^T \hat{\beta}}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) = \Phi(\tilde{b}_0 + x_t^T \tilde{b}) = \Phi(\tilde{z}_t) \quad \text{Avec : } \tilde{b}_0 = \frac{B}{\sqrt{1 - \rho_i}} \quad \tilde{b} = \frac{\sqrt{\rho} \hat{\beta}}{\sqrt{1 - \rho_i}}$$

Dans le cadre des stress tests ou d'IFRS 9, le facteur systémique associé au risque de défaut est souvent modélisé comme suit :

$$z_t = \ln\left(\frac{\widehat{PD}^{PIT}(t)}{1 - \widehat{PD}^{PIT}(t)}\right) = x_t^T \beta + \epsilon_t \quad \rightarrow \quad PD_{PIT}^i(z_t) = \frac{\exp(z_t)}{1 + \exp(z_t)} = \Lambda(z_t)$$

Où $\Lambda(\cdot)$ désigne la cdf d'une loi Logit.

Avantage du Logit : Il n'impose pas d'hypothèse de loi sur z_t . Ce dernier peut être non stationnaire et modélisé via des modèles de type ARDL/VECM/AR-X.

Avantage du Probit : Il est en total cohérence avec la formule du régulateur (RWA) et le modèle Creditmetrics.

Modélisation de la PD

ESTIMATION DE MODÈLES SATELLITES ET MODEL AVERAGING

- Les modèles satellites sont souvent estimés sur un nombre limité de points (20 à 30) à partir d'un grand nombre de variables macroéconomiques (en particulier avec les lags).
- Afin d'éviter une trop forte instabilité des estimations, les modèles satellites finaux se limitent généralement à 3 ou 4 variables.
- Or, avec un échantillon de petite taille, les critères de sélection AIC/BIC peuvent se révéler très instables.
- Dans un contexte d'information limitée, moyenner les résultats de plusieurs modèles plutôt que de n'en retenir qu'un seul, peut permettre d'obtenir des prédictions beaucoup plus stables et performantes : c'est le principe du modèle averaging.

On distingue généralement trois grands types de Model Averaging :

- Le *Bayesian Model Averaging* (BMA) → Approche purement bayésienne
- Le *Bayesian Averaging of Classical Estimates* (BACE) → Mixte entre une approche fréquentiste et une approche bayésienne
- Le Stacking → Approche purement fréquentiste

Modélisation de la PD

BAYESIAN MODEL AVERAGING (BMA) (1/2)

- Quand plusieurs modèles sont plausibles, le BMA ne choisit pas un seul modèle : il moyenne les prédictions sur l'ensemble des modèles, pondérés par leur probabilité a posteriori.
- Soit $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{2^K}\}$ l'ensemble des modèles candidats (toutes les combinaisons possibles de K variables), et β un vecteur de paramètres d'intérêt, alors une prédiction ponctuelle de Z_t est donnée par :

$$\hat{z}_t^{\text{BMA}} = \mathbb{E}(Z_t | x_t, y) = \sum_{k=1}^{2^K} \mathbb{P}(M_k | y) \times \mathbb{E}(Z_t | x_t, y, M_k)$$

2^K : Nombre de modèles possibles

$y = (z_1, \dots, z_T)^T$: historique servant à l'estimation

$\mathbb{P}(M_k | y)$: Probabilité a posteriori du modèle M_k

$\mathbb{E}(Z_t | x_t, y, M_k)$: moyenne a posteriori de Z_t conditionnellement au modèle M_k et aux données

- Sous l'hypothèse supplémentaire que tous les modèles M_k sont linéaires et gaussiens :

$$\hat{z}_t^{\text{BMA}} = \mathbb{E}(Z_t | x_t, y) = \sum_{k=1}^{2^K} \mathbb{P}(M_k | y) \times x_t^T \times \mathbb{E}(\beta_k | y, M_k) = x_t^T \mathbb{E}(\beta | y)$$

- Lorsque K est grand, les distributions a posteriori des paramètres sont simulées via MCMC (*Monte-Carlo Markov Chains*).

Modélisation de la PD

BAYESIAN MODEL AVERAGING (BMA) (2/2)

- L'indicateur clé d'un BMA est la Probabilité Postérieure d'Inclusion (PIP) de chaque variable :

$$PIP_j = \sum_{k : x_j \in M_k} \mathbb{P}(M_k | y) = \sum_{k : x_j \in M_k} \frac{\mathbb{P}(y | M_k) \times \mathbb{P}(M_k)}{\sum_{\ell=1}^{2^K} \mathbb{P}(y | M_\ell) \times \mathbb{P}(M_\ell)}$$

$\mathbb{P}(M_k)$: prior du modèle M_k (souvent uniforme → prior non-informatif)

$\mathbb{P}(y | M_k)$: vraisemblance marginale du modèle M_k .

- Pour chaque variable, la PIP indique à quel point il est crédible qu'une variable ait sa place dans l'explication de Z_t une fois les données observées et les priors pris en compte. Plus la PIP est élevée, plus la variable joue un rôle important dans le BMA.

Exemple de résultat de simulation d'un BMA :

Variables	Espérance	Écart-type	PIP
Inflation lag 1	-0,0054	0,0013	0,992
Taux d'endettement lag 1	-0,0038	0,0010	0,991
Taux de croissance du PIB lag 1	0,0006	0,0000	0,970
Indice des prix immobiliers lag 1	-0,0054	0,0014	0,965
Investissement des ménages lag 1	0,0017	0,0015	0,825
Taux réels à 10 ans lag 1	-0,0020	0,0016	0,757
OAT à 10 ans lag 1	-0,0006	0,0014	0,410

Interprétation : Il y a 97 % de probabilité que le coefficient du PIB (lag 1) soit non nul et que la variable soit utile dans le modèle pour expliquer/prédire Z .

Modélisation de la PD

BAYESIAN AVERAGING OF CLASSICAL ESTIMATES (BACE)

- Le BACE moyenne les prédictions sur l'ensemble des modèles. À l'intérieur de chaque modèle, les paramètres sont estimés de façon fréquentiste (OLS/MLE), tandis que les poids des modèles sont définis de manière bayésienne (priors).
- Soit $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{K^*}\}$ l'ensemble des modèles candidats **valides** et β un vecteur de paramètres d'intérêt, alors une prédiction ponctuelle de Z_t est donnée par :

$$\hat{z}_t^{\text{BACE}} = \sum_{k=1}^{K^*} \omega_k \times \hat{z}_t(M_k) = \sum_{k=1}^{K^*} \omega_k \times x_t^T \hat{\beta}_k^{\text{OLS}} = x_t^T \hat{\beta}^{\text{BACE}},$$

avec : $\hat{\beta}^{\text{BACE}} = \sum_{k=1}^{K^*} \omega_k \hat{\beta}_k^{\text{OLS}}$

- De plus : $\omega_k = \mathbb{P}(M_k | y) = \frac{\mathbb{P}(M_k) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{BIC}_k\right)}{\sum_{\ell=1}^{K^*} \mathbb{P}(M_\ell) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{BIC}_\ell\right)}$, avec : $\text{BIC}_k = -2\log\hat{L}_k + d_k \log T$ et d_k le nombre de paramètres du modèle M_k
- PIP (*Posterior Inclusion Probability*) sous BACE :
$$\text{PIP}_j = \sum_{k : x_j \in M_k} \omega_k$$
- L'ensemble des modèles M_k doivent passer les tests de significativité, homoscédasticité, non-autocorrélation, stationnarité des résidus et absence de multicolinéarité.

Modélisation de la PD

STACKING OU JACKKNIFE MODEL AVERAGING (JMA) (1/2)

- Le stacking (ou *Jackknife Model Averaging*) combine plusieurs modèles en apprenant des poids qui maximisent la performance prédictive hors-échantillon. Cette approche est purement fréquentiste.
- Soit $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{K^*}\}$ l'ensemble des modèles candidats **valides**, alors une prédiction ponctuelle de z_t est obtenue de la manière suivante :

1^{ère} étape : Pour chaque observation $t \in \{1, \dots, T - 1\}$ et chaque modèle $k \in \mathcal{M}$, on ré-estime le modèle sur l'échantillon privé de l'observation t (donc sur $T - 1$ points) et on calcule la prédiction hors-échantillon pour cette observation : $\hat{f}_k^{(-t)}(x_t)$ (principe du *Leave-One-Out* – LOO).

2^{ème} étape : On détermine le vecteur de poids qui minimise l'erreur LOO de la combinaison des modèles :

$$\hat{\omega}^{opt} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \left(z_t - \sum_{k=1}^{K^*} \omega_k \hat{f}_k^{(-t)}(x_t) \right)^2 \text{ s. c. } \sum_{k=1}^{K^*} \omega_k = 1 \text{ et } \omega_k \geq 0$$

3^{ème} étape : Une fois $\hat{\omega}^{opt}$ appris, on ré-ajuste chaque modèle M_K sur tout l'échantillon (les T observations), on obtient ses prédictions $\hat{f}_k(x_t)$, puis la prédiction du méta-modèle :

$$\hat{z}_t^{\text{JMA}} = \sum_{k=1}^{K^*} \hat{\omega}_k \hat{f}_k(x_t)$$

Modélisation de la PD

STACKING OU JACKKNIFE MODEL AVERAGING (JMA) (2/2)

- En théorie, on peut combiner plusieurs modèles d'économétrie et de Machine Learning dans un même méta-modèle.
- Toutefois, dans le cadre d'un modèle satellite, on privilégie des **approches interprétables**. Nous retenons donc des modèles de régression linéaire :

$$\hat{z}_t^{\text{JMA}} = \sum_{k=1}^{K^*} \hat{\omega}_k \times x_t^T \hat{\beta}_k^{\text{OLS}} = x_t^T \hat{\beta}^{\text{JMA}}$$

avec : $\hat{\beta}^{\text{JMA}} = \sum_{k=1}^{K^*} \hat{\omega}_k \hat{\beta}_k^{\text{OLS}}$

- Il a été démontré dans la littérature académique que si les prédicteurs $\hat{f}_k(x)$ sont non biaisés, la seule combinaison linéaire $\sum_m \omega_m \hat{f}_m(x)$ qui permet d'atteindre la variance minimale parmi les combinaisons non biaisées est celle avec $\sum_m \omega_m = 1$. D'où la contrainte $\sum_{k=1}^{K^*} \omega_k = 1$ (voir [Hansen 2012](#) pour plus de détails).
- L'ensemble des modèles M_k doivent passer les tests de significativité, homoscédasticité, non-autocorrélation, stationnarité des résidus et absence de multicolinéarité.
- De plus, afin de **maintenir un équilibre biais/variance**, [Hansen 2012](#) recommande de ne pas utiliser plus de $\tilde{K}^* = [3T^{1/3}]$ modèles candidats. Si plus de \tilde{K}^* modèles sont valides, nous retenons (par exemple) les \tilde{K}^* qui ont le plus petit AIC.
- Le critère précédent du nombre de modèles peut également s'appliquer au BACE.

Modélisation de la PD

STACKING ET MODEL RELIANCE (1/2)

- Étant donné que le stacking est une approche purement fréquentiste, il n'est pas possible d'utiliser une mesure de PIP afin d'évaluer l'importance de chaque variable dans la prédition finale.
- Nous devons à la place recourir à une méthode de Machine Learning interprétable. Une des plus utilisées pour les modèles de stacking est une mesure dite de **Model Reliance** qui est post-hoc, globale et agnostique au modèle.
- **Principe du Model Reliance** : il mesure à quel point la prédition s'effondre quand on défait le lien entre une variable et la cible. Il mesure donc l'importance de chaque variable dans la prédition finale du modèle.
- Soit une fonction de perte (souvent la MSE) : $\ell(\hat{y}, y) = (\hat{y} - y)^2$. On calcule alors une perte de référence sur le jeu d'évaluation \mathcal{D} :

$$\textbf{Perte de référence : } \text{Loss}_{\text{ref}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{(x,y) \in \mathcal{D}} \ell(f(\mathbf{X}), y)$$

- Pour une variable X_j , on construit une **version permutée** $\mathbf{X}^{(j,\pi)}$: on mélange la colonne j indépendamment des autres colonnes (on conserve la distribution marginale de X_j , mais on casse $\text{Cov}(X_j, Y)$ et ses dépendances avec X_{-j}).

$$\textbf{Perte permutée : } \text{Loss}_{\text{perm}}(j) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{(x,y) \in \mathcal{D}} \ell(f(\mathbf{X}^{(j,\pi)}), y)$$

Modélisation de la PD

STACKING ET MODEL RELIANCE (2/2)

- Répéter la permutation B fois (p.ex. 100 fois) et moyenner les pertes permutées de manière à obtenir une mesure stabilisée :

Perte permutée stabilisée : $\overline{\text{Loss}}_{\text{perm}}(j) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \text{Loss}_{\text{perm}}^{(b)}(j)$

- Nous pouvons alors calculer une mesure de *Model Reliance* pour la variable j :

$$\text{MR}(j) = \frac{\overline{\text{Loss}}_{\text{perm}}(j)}{\text{Loss}_{\text{ref}}}$$

- Plus $MR(j)$ est élevé et plus le modèle de stacking s'appuie fortement sur X_j . Plus $MR(j)$ est faible (proche de 1), plus la variable est peu utile ou redondante avec d'autres variables.
- En classant les $MR(j)$ dans l'ordre décroissant, nous obtenons les variables qui contribuent le plus au modèle de Stacking.
- Pour plus de détails sur la mesure de *Model Reliance*, voir [Fisher et al. \(2019\)](#).

Modélisation de la PD

FIXATION MÉTIER DU SIGNE DES VARIABLES DANS LES MODÈLES SATELLITES (1/2)

- Les problèmes de signe observés après estimation constituent un écueil récurrent des modèles satellites et ouvrent une brèche dans laquelle les équipes MRM (chargées de la validation des modèles internes) s'engouffrent souvent.
- C'est pourquoi nombre d'acteurs fixent en amont le signe attendu des différentes variables, afin de garantir que le modèle final conserve un sens métier.
- Autrement dit, dans le cadre d'un BACE ou d'un stacking, seuls les modèles dont les variables respectent les contraintes de signe (en plus des autres critères sur la qualité des estimations) sont retenus.

Exemple de signes métiers imposés aux variables :

Variables	Signe attendu
Taux d'intérêt Banque Centrale	-
Taux d'intérêt long terme	-
Taux de chômage	-
Taux d'inflation	-
PIB	+
Prix de l'immobilier résidentiel	+

- À première vue, fixer le signe attendu des variables peut sembler archaïque et assez éloigné des standards économétriques enseignés.

Modélisation de la PD

FIXATION MÉTIER DU SIGNE DES VARIABLES DANS LES MODÈLES SATELLITES (2/2)

- Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que chaque modèle satellite (hors métamodèle) ne mobilise généralement que trois ou quatre variables, compte tenu de la taille d'échantillon.
- De fait, il est fort probable qu'une variable X_2 pourtant discriminante n'ait pas pu être retenue. Il suffit que X_2 soit fortement corrélée à une variable explicative X_1 restante dans le modèle, dans le sens inverse de $\text{Cov}(X_{1t}, Z_t)$, pour que le signe du coefficient de la variable X_{1t} soit biaisé (i.e. signe inverse de celui attendu).
- En économétrie, ce problème d'endogénéité porte le nom de **biais de variable omise** :

Vrai DGP : $Z_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \epsilon_t$



Si : $x_{1t} = \rho x_{2t} + u_t$, avec $\rho < 0$

Modèle estimé : $Z_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + v_t$

Sous les hypothèses habituelles des termes d'erreurs, les OLS donnent :

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\text{plim}} \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2 \rho \frac{\text{Var}(X_{2,t})}{\text{Var}(X_{1,t})}$$

- Supposons que $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$. Si $|\beta_2 \rho| \frac{\text{Var}(X_{2,t})}{\text{Var}(X_{1,t})} > \beta_1$, on observe alors un renversement de signe : $\underset{n \rightarrow \infty}{\text{plim}} \hat{\beta}_1 < 0$.
- Comme l'erreur-type de $\hat{\beta}_1$ décroît quand T augmente, on peut obtenir un **mauvais signe très "significatif"** (grande valeur de $|t|$ et petite p-value) tout en étant faux sur le plan causal !
- Faute d'instruments valides, la méthode des variables instrumentales est souvent inapplicable ; imposer a priori le signe de β_1 reste alors le seul moyen pragmatique de limiter le biais de variables omises dans les modèles satellites.

Modélisation de la PD

MODÉLISATION DE LA PD LIFETIME ET STRESS-FACTORS (1/2)

- Il existe plusieurs façons d'estimer une PD lifetime à partir d'un modèle de PD. Une des manières les plus courantes consiste à recourir à un modèle de durée.
- Un des modèles les plus utilisés dans la littérature est le modèle de Weibull :

$$\forall t \geq 0, \quad F(t; k, \lambda) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right] \longrightarrow S(t) = 1 - F(t; k, \lambda) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right]$$

k : paramètre de forme
λ : paramètre d'échelle

- Les paramètres du modèle de Weibull peuvent être estimés pour chaque grade g à partir de séries historiques sur le **temps jusqu'au défaut** via une régression de type log-log (droite de Weibull) :

$$\log(-\log S(t)) = k_g \cdot \log(t) - k_g \cdot \log(\lambda_g)$$

- On en déduit une PD cumulée (*lifetime*) pour différents horizons T (structure par terme) :

$$\widehat{CPD}_g(T) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{T}{\widehat{\lambda}_g}\right)^{\widehat{k}_g}\right]$$

- On obtient alors la PD marginale en t à utiliser pour le calcul des ECL en Stage 2 :

$$PD_{[t, t+1]} = P(t < \tau \leq t + 1 | \tau > t) = 1 - \frac{S(t+1)}{S(t)} \longrightarrow \widehat{PD}_{g[t, t+1]} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t+1}{\widehat{\lambda}_g}\right)^{\widehat{k}_g} + \left(\frac{t}{\widehat{\lambda}_g}\right)^{\widehat{k}_g}\right)$$

Modélisation de la PD

MODÉLISATION DE LA PD LIFETIME ET STRESS-FACTORS (2/2)

- Après estimation des PD lifetime par grade, attention à bien veiller que ces dernières ne se croisent pas.
- L'utilisation d'un modèle de durée permet de tenir compte explicitement de la survie et donc d'intégrer une **composante de long terme** dans la PD.
- Cependant, un modèle de durée calibré uniquement sur des historiques d'ancienneté observés dans le monde sain avant le passage en défaut est, par nature, TTC. Or, dans le cadre des stress tests et d'IFRS 9, les PD *lifetime* et les PD marginales doivent intégrer une composante FwL.
- La composante FwL peut être intégrée au modèle de PD *lifetime* via l'introduction d'un stress-factor multiplicatif :

$$f_{g,t}^S = \frac{PD_{g,T+h}^S}{PD_{g,T}}$$

PD_{g,T+h}^S : PD projetée du grade g via Merton-Vasicek
dans le scénario s ∈ S en T + h
PD_{g,T} : PD historique du grade g à la date de début
de l'exercice (remplacée parfois par la PD TTC)

Incrément annuel de risque : $\Delta H_{g,t} = H_{g,t} - H_{g,t-1} = \left(\frac{t}{\lambda_g}\right)^{k_g} - \left(\frac{t-1}{\lambda_g}\right)^{k_g}$



$$\widehat{CPD}_g^{FwL}(T) = 1 - \exp \left[- \sum_{t=1}^T \Delta H_{g,t}^{FwL} \right]$$

Avec : $\Delta H_{g,t}^{FwL} = f_{g,t}^S \Delta H_{g,t}$

Cette approche garantit que la PD lifetime intégrant le FwL reste inférieure à 1.

Modélisation de la PD

MODÉLISATIONS ALTERNATIVES DU FACTEUR DE CORRÉLATION À LA CONJONCTURE ÉCONOMIQUE (1/2)

- Dans le cadre de Bâlois, la formule standard du régulateur pour les large corporates est la suivante :

$$\rho_{GE} = \rho_i(PD_i^{TTC}) = 0,12 \times \left(\frac{1 - e^{-50PD_i^{TTC}}}{1 - e^{-50}} \right) + 0,24 \times \left[1 - \left(\frac{1 - e^{-50PD_i^{TTC}}}{1 - e^{-50}} \right) \right]$$

- Dans le cadre des stress tests climatiques internes qui alimentent l'ICAAP, il est possible d'adopter une approche mieux alignée sur le profil de risque de la banque afin d'estimer le paramètre ρ . Plusieurs approches sont envisageables.
- Première approche :** En supposant que toutes les contreparties présentent un risque de défaut homogène, on peut extraire le facteur systémique du modèle ASRF de la manière suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad Z_t = \frac{1}{\sqrt{\rho}} [B - \phi^{-1}(PD^{PIT}(t)) \sqrt{1 - \rho}]$$

- Une question naturelle est de savoir quelle valeur de ρ faudrait-il choisir pour que le facteur Z_t ait une variance égale à 1, conformément à l'hypothèse standard $Var(Z_t) = 1$.
- En utilisant les propriétés de la variance et en imposant la condition $Var(Z_t) = 1$, on obtient :

$$Var(Z_t) = \left(\frac{1 - \rho}{\rho} \right) Var(\phi^{-1}(PD^{PIT}(t))) \longrightarrow \rho = \frac{Var(\phi^{-1}(PD^{PIT}(t)))}{1 + Var(\phi^{-1}(PD^{PIT}(t)))}$$

Modélisation de la PD

MODÉLISATIONS ALTERNATIVES DU FACTEUR DE CORRÉLATION À LA CONJONCTURE ÉCONOMIQUE (2/2)

- **Deuxième approche :** Supposons à présent que nous souhaitions estimer, pour chaque grade, un facteur de corrélation à la conjoncture économique, noté ρ_i .

Soit n_{it} le nombre de contreparties appartenant au groupe de rating i à la date t et d_{it} le nombre de défauts observés à la même période pour cette classe de rating. En supposons que les événements de défaut sont indépendants conditionnellement au facteur Z_t , nous avons :

$$d_{it} | Z_t \sim Bin\left(n_{it}, PD_{PIT}^i(Z_t, \rho_i)\right)$$

La vraisemblance des défauts conditionnellement à Z_t pour le rating i est la suivante :

$$L(d_{it} | Z_t ; \rho) = \binom{n_{it}}{d_{it}} PD_{PIT}^i(Z_t, \rho_i)^{d_{it}} [1 - PD_{PIT}^i(Z_t, \rho_i)]^{n_{it}-d_{it}}$$

La vraisemblance non-conditionnelle (marginale) à maximiser, sachant que $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, se définit comme suit :

$$L(d_{it} | \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{n_{it}}{d_{it}} PD_{PIT}^i(z_t, \rho_i)^{d_{it}} [1 - PD_{PIT}^i(z_t, \rho_i)]^{n_{it}-d_{it}} d\Phi(x)$$

Pour chaque grade, le paramètre ρ_i peut être estimé par :

$$\widehat{\rho}_i = \operatorname{argmax}_{\rho_i \in]-1,1[} \prod_{t=1}^T L(d_{it} | \rho) = \operatorname{argmax}_{\rho_i \in]-1,1[} \sum_{t=1}^T \ln L(d_{it} | \rho)$$

2

MÉTHODOLOGIES DE STRESS-TEST CLIMATIQUE

- 1. Modélisation de la PD**
- 2. Modélisation des migrations de ratings**
- 3. Modélisation de la LGD**

Modélisation des migrations de ratings

LE RISQUE DE MIGRATION DE RATINGS

- Pour les grandes entreprises, les événements de défaut sont généralement assez rares. En règle générale, une détérioration de la situation économique et financière d'une entreprise entraîne plutôt une dégradation de sa note de crédit, par exemple, d'un A+ à un B+.
- On parlera alors davantage de risque de dégradation que de risque de défaut à proprement parler.
- Les dégradations de la notation de contrepartie, même sans migration vers la classe de défaut, ont des répercussions directes sur le coût du risque de la banque et sur le montant des RWA. Elles doivent donc être modélisées tant dans le cadre de l'IFRS 9 que lors des exercices de stress-tests.

Soit R_t^i le rating d'une contrepartie i classée en A+ au mois t . La probabilité qu'elle migre vers la classe des défauts (D) dans les 12 mois est la suivante :

$$p_{A^+ \rightarrow D}^{PIT}(t) = \mathbb{P}(R_{t+12}^i = D | R_t^i = A^+) = PD_{A^+}^{PIT}(t)$$

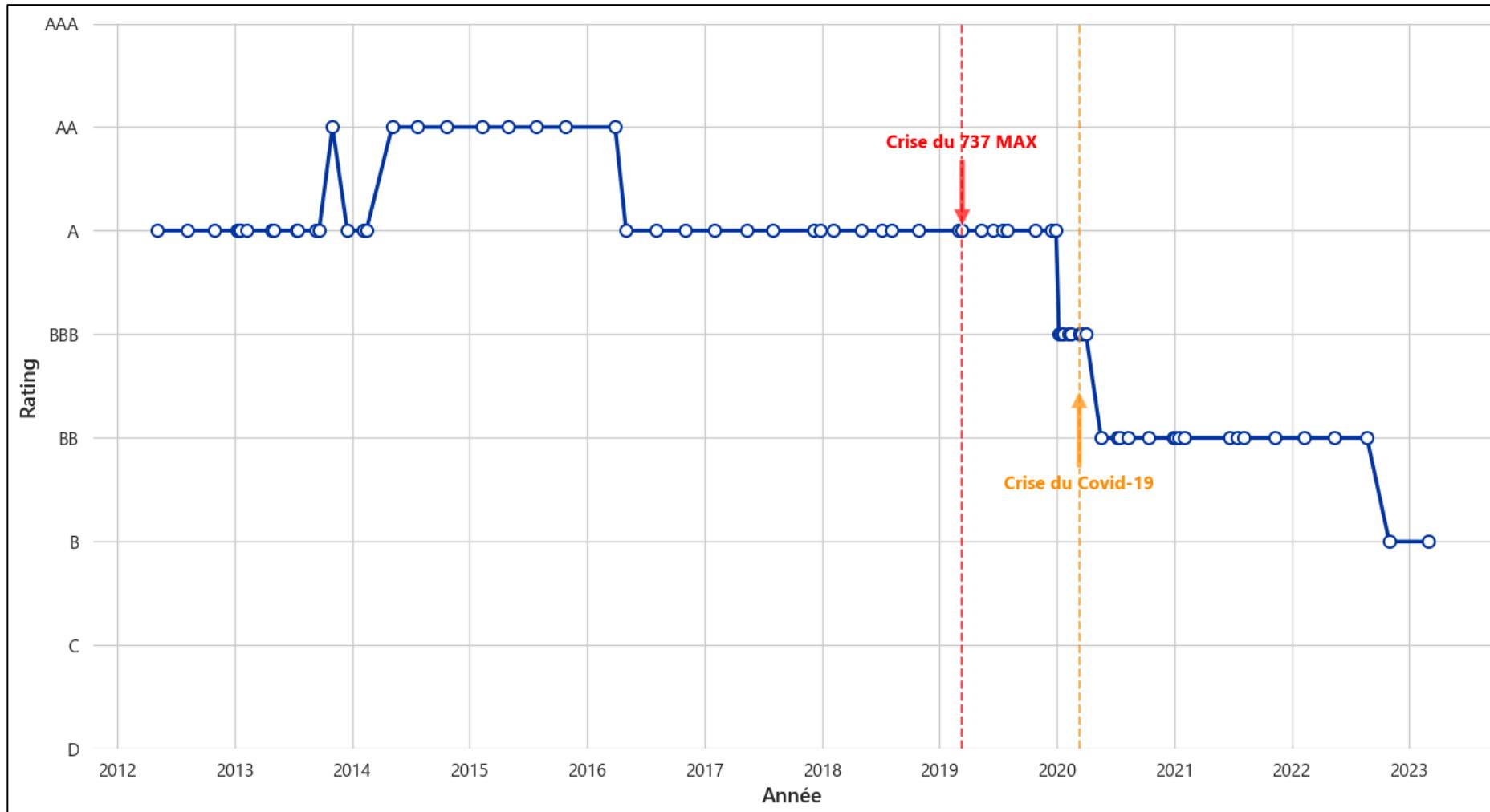
Plus généralement, nous nous intéressons à la probabilité qu'une contrepartie transite de la classe j à la classe k :

$$\forall (j, k) \in \mathcal{N} = \{1, \dots, D\}, \quad p_{j \rightarrow k}^{PIT}(t) = \mathbb{P}(R_{t+12}^i = k | R_t^i = j)$$

Les notions de PD PIT et TTC peuvent naturellement être étendues aux **probabilités de migration de ratings**.

Modélisation des migrations de ratings

EXEMPLE DE SÉRIE DE RATINGS DE BOEING PAR EGAN-JONES



La première crise est dû à un accident d'un avion à la suite de la défaillance d'un système électronique de l'avion (MCAS).

Cet élément déclencheur et la crise pandémique a fait plonger le rating du constructeur d'avion américain.

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV DISCRÈTES (1/4)

Soit $\{R_t^i ; t \in [0, T]\}$, un processus de notation prenant ses valeurs dans $\mathcal{N} = \{1, \dots, D\}$ et défini sur un intervalle de temps $[0, T]$.

Nous définissons une grille de dates équidistantes $\mathcal{T} = [0, 1, \dots, T]$. Le pas de temps discret, noté $\delta = \tau_t - \tau_{t-1}$, représente la période d'observation de la dynamique des notations. Pour les matrices de notations de crédit, nous considérons généralement un pas de temps de 12 mois.

Bien que discret, l'espace d'états $\mathcal{N} = \{1, \dots, D\}^n$, associé à $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^n)$ peut être relativement grand si le nombre d'entreprises n est élevé. Il est de ce fait difficile de spécifier de façon directe la loi de R_t sachant son passé R_{t-1} . C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse suivante :

- Hypothèse 1: Les historiques $(R_t^i)_{t \in \mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, n$, sont indépendants et identiquement distribués (*i.i.d*) dans la dimension individuelle.

Étant donné que les processus de notation $(R_t^i)_{t \in \mathcal{T}}$ sont supposées *i.i.d.*, nous pouvons, sans perte de généralité, omettre l'indice i et considérer uniquement le processus temporel $(R_t)_{t \in \mathcal{T}}$

- Hypothèse 2: Le processus $(R_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une chaîne de Markov d'ordre 1 :

$$\mathbb{P}(R_{t+1} = r_{t+1} | R_t = r_t, \dots, R_0 = r_0) = \mathbb{P}(R_{t+1} = r_{t+1} | R_t = r_t)$$

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV DISCRÈTES (2/4)

- Hypothèse 3: Le processus $(R_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une chaîne de Markov homogène :

$$\mathbb{P}(R_{t+1} = j | R_t = i) = \mathbb{P}(R_1 = j | R_0 = i) = p_{ij}.$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons en déduire une matrice stochastique \mathbf{P} de probabilités de migration :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1D} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{iD} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p_{D1} & \dots & p_{Dj} & \dots & p_{DD} \end{pmatrix}$$

Par définition :

- (i) $\forall i, j \in \mathcal{N}, p_{ij} \geq 0$
- (ii) $\forall i \in \mathcal{N}, \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$

- Hypothèse 4: La dernière ligne d'une matrice de migration de crédit vérifie : $p_{DD} = 1$ et $\sum_{j \neq D}^N p_{Dj} = 0$.

L'hypothèse de défaut absorbant est au cœur de la dynamique de migration dans les exercices de stress-tests.

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV DISCRÈTES (3/4)

Les probabilités de migration des notations sur un horizon de n années peuvent être calculées à l'aide de la **formule de Chapman-Kolmogorov** :

$$\forall n, m > 0, \quad p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=1}^N p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(m)}$$

Cette relation peut également s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \times \mathbf{P}^{(m)}$$

Par convention, $\mathbf{P}^{(0)} = I$. Par ailleurs, du fait de la propriété d'associativité du produit matriciel, nous avons :

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \times \mathbf{P}^{(1)} = \prod_{t=1}^n \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^n$$

La propriété de Chapman-Kolmogorov est utilisée en pratique pour calculer les PD lifetime et l'évolution de la structure d'un portefeuille de crédit au cours du temps.

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV DISCRÈTES (4/4)

Exemple de matrice de migration de migration sur un an : Exemple de matrice de migration de migration sur 5 ans :

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	92.82	6.50	0.56	0.06	0.06	0.00	0.00	0.00
AA	0.63	91.87	6.64	0.65	0.06	0.11	0.04	0.00
A	0.08	2.26	91.66	5.11	0.61	0.23	0.01	0.04
BBB	0.05	0.27	5.84	87.74	4.74	0.98	0.16	0.22
BB	0.04	0.11	0.64	7.85	81.14	8.27	0.89	1.06
B	0.00	0.11	0.30	0.42	6.75	83.07	3.86	5.49
CCC	0.19	0.00	0.38	0.75	2.44	12.03	60.71	23.50
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	69.23	23.85	5.49	0.96	0.31	0.12	0.02	0.03
AA	2.35	66.96	24.14	4.76	0.86	0.62	0.13	0.19
A	0.43	8.26	68.17	17.34	3.53	1.55	0.18	0.55
BBB	0.24	1.96	19.69	56.62	13.19	5.32	0.75	2.22
BB	0.17	0.73	5.17	21.23	40.72	20.53	2.71	8.74
B	0.07	0.47	1.73	4.67	16.53	44.95	5.91	25.68
CCC	0.38	0.24	1.37	2.92	7.13	18.51	9.92	59.53
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Dans le cadre de l'étude des migrations de notations de crédit, l'état de défaut est atteignable à long terme, indépendamment de la note initiale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION D'UNE MATRICE DE MIGRATION TTC EN TEMPS DISCRET (1/2)

La méthode la plus couramment utilisée dans la littérature pour estimer des probabilités de transition TTC en temps discret est la **méthode cohorte**.

- Supposons que le nombre de transitions de chaque état i vers les autres états $j \in \mathcal{N}$, à la période t , représentées par N_t^{ij} , suit une loi multinomiale :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (N_t^{i1}, N_t^{i2}, \dots, N_t^{iD}) \sim \text{Multinomial}(n_i(t-1), (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})).$$

- Sous cette hypothèse, la fonction de vraisemblance est la suivante : $L_T(\theta; n) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N p_{ij}^{(n_t^{ij})} = \prod_{t=1}^T \prod_{\{i,j\}=1}^N p_{ij}^{(n_t^{ij})}$.
- On en déduit la fonction de log-vraisemblance : $\ell_T(\theta; n) = \sum_{t=1}^T \sum_{\{i,j\}=1}^N n_t^{ij} \ln(p_{ij})$
- La fonction de log-vraisemblance doit être maximisée sous la contrainte : $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$
- L'estimateur du maximum de vraisemblance sous contrainte est le suivant :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N}, \quad \hat{p}_{ij}^{TTC} = \frac{\sum_{t=1}^T n_t^{ij}}{\sum_{t=1}^T n_t^{i.}}$$

Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION D'UNE MATRICE DE MIGRATION TTC EN TEMPS DISCRET (2/2)

- Les modèles en temps discret tendent à négliger les transitions de notation qui surviennent au cours de l'année.

Exemple de ratings observés de façon irrégulière au cours du temps :

Date de modification de rating	Rating observé
2011-05-10	BBB
2011-07-20	BB
2011-09-30	B
2011-12-22	BB
2011-04-15	BBB
2012-12-01	BB
2013-11-18	BBB

- L'approche discrète **sous-estime également les transitions rares**, comme celles des meilleures notations vers le défaut.
- Une approche en temps continu serait bien plus adaptée afin de tenir des transitions extrêmes.**

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV EN TEMPS CONTINU (1/3)

Nous considérons cette fois-ci un pas de temps continu sur $[0;T]$.

- Hypothèse : Le processus $(R_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est une chaîne de Markov homogène d'ordre 1 :

$$\mathbb{P}(R_{t+s} = j | R_t = i) = \mathbb{P}(R_s = j | R_0 = i) = p_{ij}(s).$$

Point d'attention : Ici, la probabilité de transition dépend de l'intervalle de temps $[0,s]$ et non de la date s .

- La matrice de transition sur la période $[0,T]$ est de la forme suivante :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1j}(t) & \dots & p_{1D}(t) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ p_{i1}(t) & \dots & p_{ij}(t) & \dots & p_{iD}(t) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ p_{D1}(t) & \dots & p_{Dj}(t) & \dots & p_{DD}(t) \end{pmatrix}$$

En temps continu, la matrice $\mathbf{P}(t)$ ne constitue pas une mesure adéquate de la dynamique des notations, car ses valeurs dépendent fortement de l'intervalle de temps choisi.

La probabilité de transition de la notation i vers la notation j mesurée après 3 jours sera très différente de celle évaluée après 3 mois ou 1 an.

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV EN TEMPS CONTINU (2/3)

Tout comme en temps discret, nous souhaitons représenter la dynamique du système à l'aide d'une matrice constante.

- Pour cela, nous considérons une matrice \mathbf{Q} appelée un générateur de Markov :

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(0)}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{P}(t) - \mathbf{I}_N}{t} \right)$$

- On peut démontrer qu'un générateur de Markov sur l'espace de notations $\mathcal{N} = \{1, \dots, D\}$ est une matrice $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{N}}$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1(D-1)} & q_{1D} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2(D-1)} & q_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ q_{(D-1)1} & q_{(D-1)2} & \dots & q_{(D-1)(D-1)} & q_{(D-1)D} \\ q_{D1} & q_{D2} & \dots & q_{D(D-1)} & q_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & q_{12} & \dots & q_{1(D-1)} & q_{1D} \\ q_{21} & -\lambda_2 & \dots & q_{2(D-1)} & q_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ q_{(D-1)1} & q_{(D-1)2} & \dots & -\lambda_{D-1} & q_{(D-1)D} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

- (i) $\forall i \in \mathcal{N}, q_{ii} \leq 0$;
- (ii) $\forall (i,j) \in \mathcal{N}$ tel que $i \neq j, q_{ii} \geq 0$;
- (iii) $\forall i \in \mathcal{N}, \sum_{j=1}^N q_{ij} = 0$.

Modélisation des migrations de ratings

ÉLÉMENTS SUR LES CHAÎNES DE MARKOV EN TEMPS CONTINU (3/3)

- Bien que nous utilisions à un générateur de Markov pour capturer des variations d'états inaccessibles avec un modèle à temps discret, notre objectif final est de calculer une matrice de migration TTC sur un horizon de 12 mois.
- Une relation de passage est fournie par l'équation de Kolmogorov : $\forall t \geq 0, \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$.
- La solution de cette équation différentielle déterministe est donnée par : $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}$.
- Plus de détails techniques concernant les chaînes de Markov en temps continu sont présentés dans la note projet de l'an passé (voir section 5.3.1).

Matrice TTC 12 mois estimée en temps discret :

	A	BBB	BB	B	C	D
A	94,70	5,30	0,00	0,00	0,00	0,00
BBB	1,71	92,05	5,99	0,24	0,00	0,00
BB	0,00	4,25	82,05	11,34	1,18	1,18
B	0,00	0,75	4,30	77,78	9,99	7,19
C	0,00	0,59	0,00	16,57	42,01	40,83
D	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00

Matrice TTC 12 mois estimée en temps continu :

	A	BBB	BB	B	C	D
A	78,63	19,47	1,74	0,14	0,01	0
BBB	4,01	80,11	13,91	1,7	0,19	0,08
BB	0,17	6,53	71,75	17,75	2,45	1,35
B	0,03	1,23	5,08	71,2	12,46	10
C	0,01	0,45	0,48	10,8	31,02	57,24
D	0	0	0	0	0	100

Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION D'UNE MATRICE DE MIGRATION TTC EN TEMPS CONTINU

- Les taux de transition des notations qui composent le générateur de Markov \mathbf{Q} sont estimés à l'aide d'un **modèle à intensité** dont la fonction de vraisemblance est la suivante :

$$L_T(\theta; \lambda) = \prod_{i=1}^N \prod_{j \neq i}^N q_{ij}^{N_{ij}(T)} e^{-\lambda_i T_i(T)}.$$

$N_{ij}(T)$: nombre total de transitions de i vers j observées sur l'ensemble de la période $[0, T]$.
 $T_i(T)$: valeur totale du temps passé par les n entreprises dans l'état i durant la période $[0, T]$.

- La fonction de log-vraisemblance du modèle à intensité est alors exprimée comme suit :

$$\ell_T(\theta; \lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N [N_{ij}(T) \ln(q_{ij}) - \lambda_i T_i(T)].$$

- La fonction de log-vraisemblance doit être maximisée sous la contrainte : $\lambda_i = \sum_{k \neq i}^N q_{ik}$.
- La solution du maximum de vraisemblance est donnée par : $\forall (i, j \neq i) \in \mathcal{N}, \hat{q}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{T_i(T)}$
- On en déduit l'estimation de la matrice de migration TTC à l'horizon T : $\hat{\mathbf{P}}(t) = e^{\hat{\mathbf{Q}}t}$.
- Pour plus de détails techniques concernant l'estimation d'un modèle à intensité, voir la note projet de l'an passé (section 5.3.2).

Modélisation des migrations de ratings

CRITÈRES DE VALIDITÉ D'UNE MATRICE DE MIGRATION TTC (1/2)

- Au titre du risque de crédit, pour que la modélisation soit cohérente, les matrices de migration des notations doivent respecter différents critères de monotonie :

(i) **Critère de monotonie ligne/colonne** : Les probabilités de transition (défaut non compris) sont décroissantes en partant de la diagonale. Mathématiquement, ces contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall i < j \text{ et } j \leq N-1, & \hat{p}_{ij+1}^{TTC} \leq \hat{p}_{ij}^{TTC} \\ \forall i > j \text{ et } j \geq 2, & \hat{p}_{ij}^{TTC} \leq \hat{p}_{ij-1}^{TTC} \end{cases} \quad \begin{cases} \forall j > i \text{ et } i \geq 2, & \hat{p}_{i-1j}^{TTC} \leq \hat{p}_{ij}^{TTC} \\ \forall j < i \text{ et } i \leq N-1, & \hat{p}_{i+1j}^{TTC} \leq \hat{p}_{ij}^{TTC} \end{cases}$$

(ii) **Monotonie de la probabilité de défaut** : Les probabilités de défaut (dernière colonne de la matrice de transition) sont croissantes avec la classe de risque : $\forall i \in [2, N-1], j = N = D, \hat{p}_{i-1j}^{TTC} \leq \hat{p}_{iD}^{TTC}$.

Synthèse des critères de monotonie d'une matrice de migration TTC :

		Monotonie ligne/ colonne et des probabilités de défaut							
t \ t+1		1	2	3	4	5	6	7	D
1		↑	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2		↓	↑	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3		↓	↓	↑	↓	↓	↓	↓	↓
4		↓	↓	↓	↑	↓	↓	↓	↓
5		↓	↓	↓	↓	↑	↓	↓	↓
6		↓	↓	↓	↓	↓	↑	↓	↓
7		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↑	↓

Modélisation des migrations de ratings

CRITÈRES DE VALIDITÉ D'UNE MATRICE DE MIGRATION TTC (2/2)

- Si la matrice de migration ne satisfait pas les critères de monotonie, cette dernière doit alors être régularisée
→ Une **méthode de régularisation** est présentée dans la note projet de l'an passé (section 5.4.1).
- Par ailleurs, la matrice de migration TTC estimée doit être une chaîne de Markov d'ordre 1 :

$$\begin{cases} H_0 : \forall i \in \mathcal{N}, & p_{ij} = p_j \\ H_1 : \exists i \in \mathcal{N}, & p_{ij} \neq p_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \forall k \in \mathcal{N}, & p_{kij} = p_{ij} \\ H_1 : \exists k \in \mathcal{N}, & p_{kij} \neq p_{ij} \end{cases}$$

L'hypothèse nulle du premier test doit être rejetée tandis que l'hypothèse H_0 du second ne doit pas l'être.

- La matrice de migration TTC estimée doit également vérifier la propriété d'homogénéité :

$$\begin{cases} H_0 : \forall m \in \{1, \dots, M\}, & p_{ij|m} = p_{ij} \\ H_1 : \exists m \in \{1, \dots, M\}, & p_{ij|m} \neq p_{ij} \end{cases}$$

M : nombre de sous-périodes mutuellement exclusives, avec $M \leq T$.

- Les statistiques et règles de décision des tests de Markov et d'homogénéité sont présentées en détail dans la note projet de l'an passé (sections 5.4.2 et 5.4.3).

Modélisation des migrations de ratings

PRÉSENTATION DU MODÈLE CREDITMETRICS

- Le modèle de CreditMetrics permet d'extraire le facteur systémique à l'origine des migrations observées dans les matrices de migration PIT historiques. Il simule également les matrices futures en intégrant une composante de Forward-looking via le facteur Z.
- Le modèle CreditMetrics est une généralisation du modèle ASRF de Vasicek-Merton aux matrices de migration :

$$R_t^e = \sum_{i=1}^D \left(\sum_j^D j \cdot \mathbb{1}_{\{B_{i,j+1} \leq X_t^e \leq B_{i,j}\}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{R_{t-1}^e = i\}} \quad \longrightarrow \quad X_t^e = \sum_{i=1}^D (\sqrt{\rho_i} Z_t + \sqrt{1 - \rho_i} \epsilon_t^i) \cdot \mathbb{1}_{\{R_{t-1}^e = i\}}$$

- Les probabilités de migration PIT sont donc de la forme suivante :

$$p_{ij}^{PIT}(z_t) = \mathbb{P}(R_t^e = j \mid R_{t-1}^e = i \mid Z_t = z_t) = \mathbb{P}(B_{ij+1} < X_t^e < B_{ij} \mid Z_t = z_t) = \mathbb{P}(X_t^e < B_{ij} \mid Z_t = z_t) - \mathbb{P}(X_t^e < B_{ij+1} \mid Z_t = z_t)$$

- Soit :

$$p_{ij}^{PIT}(z_t) = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{B_{i2} - \sqrt{\rho_i} z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) & Si \ j = 1 \\ \Phi\left(\frac{B_{ij} - \sqrt{\rho_i} z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) - \Phi\left(\frac{B_{ij+1} - \sqrt{\rho_i} z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) & Si \ 2 \leq j \leq D-1 \\ \Phi\left(\frac{B_{iD} - \sqrt{\rho_i} z_t}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) & Si \ j = D \end{cases}$$

Par convention : $B_{i1} = +\infty$ et $B_{iD+1} = -\infty$.

Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION DES BARRIÈRES DANS CREDITMETRICS (1/2)

- Afin de déterminer l'expression des barrières $B_{i,j}$, considérons la probabilité TTC de maintien ou de dégradation de la notation d'une entreprise en $j \in \mathcal{N}$:

$$p_{ij+}^{TTC} = \sum_{k \geq j}^D \mathbb{P}(R_t^e = k \mid R_{t-1}^e = i) = \sum_{k \geq j}^D p_{ik}^{TTC}$$

- Cette probabilité TTC peut également se réécrire comme suit : $p_{ij+}^{TTC} = \mathbb{P}(R_t^e \geq j \mid R_{t-1}^e = i) = \mathbb{P}(X_t^e \leq B_{i,j}) = \Phi(B_{i,j})$
- Nous en déduisons alors :

Exemple de matrice de barrières dans Creditmetrics

rating	AAA	A	BBB	BB	B	C	D
AAA	∞	-1.31	-2.19	-2.31	-2.67	-2.90	$-\infty$
A	∞	1.97	-1.48	-2.35	-2.82	-3.30	$-\infty$
BBB	8.20	3.35	1.61	-1.54	-2.38	-2.65	-3.54
BB	∞	3.30	2.63	1.52	-1.34	-2.27	-3.11
B	8.20	3.16	2.91	2.91	1.45	-1.29	-2.31
C	∞	∞	∞	3.13	2.04	0.76	-1.20

$$B_{i,j} = \Phi^{-1} \left(\sum_{k \geq j}^D p_{ik}^{TTC} \right)$$



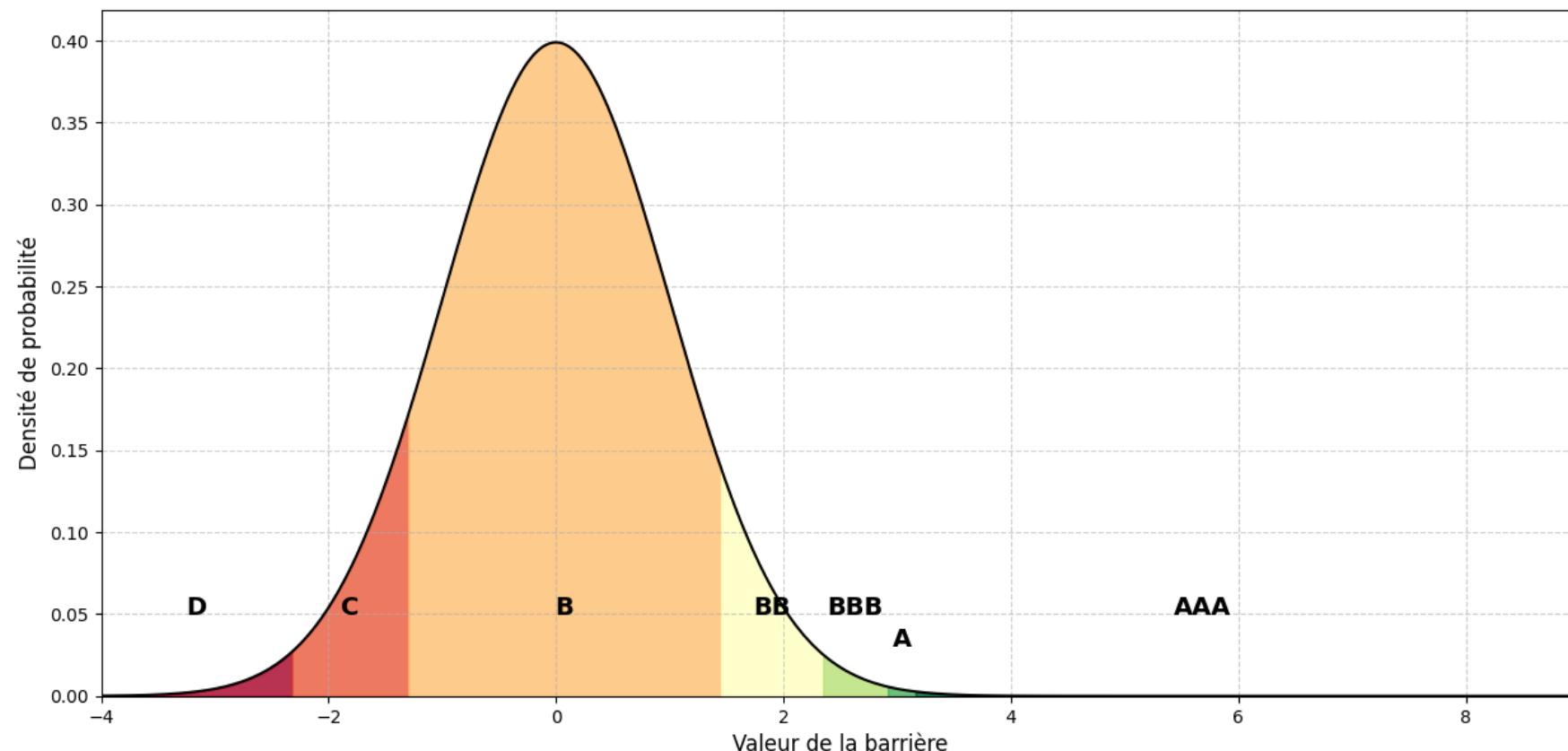
- Les barrières sont estimées en remplaçant directement, dans leur expression, les probabilités de migration TTC à 12 mois par celles estimées par la méthode de cohorte ou le modèle à intensité.

Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION DES BARRIÈRES DANS CREDITMETRICS (2/2)

Distribution des barrières pour la notation initiale $i=B$

rating	AAA	A	BBB	BB	B	C	D
B	8.20	3.16	2.91	2.91	1.45	-1.29	-2.31



Modélisation des migrations de ratings

EXTRACTION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE

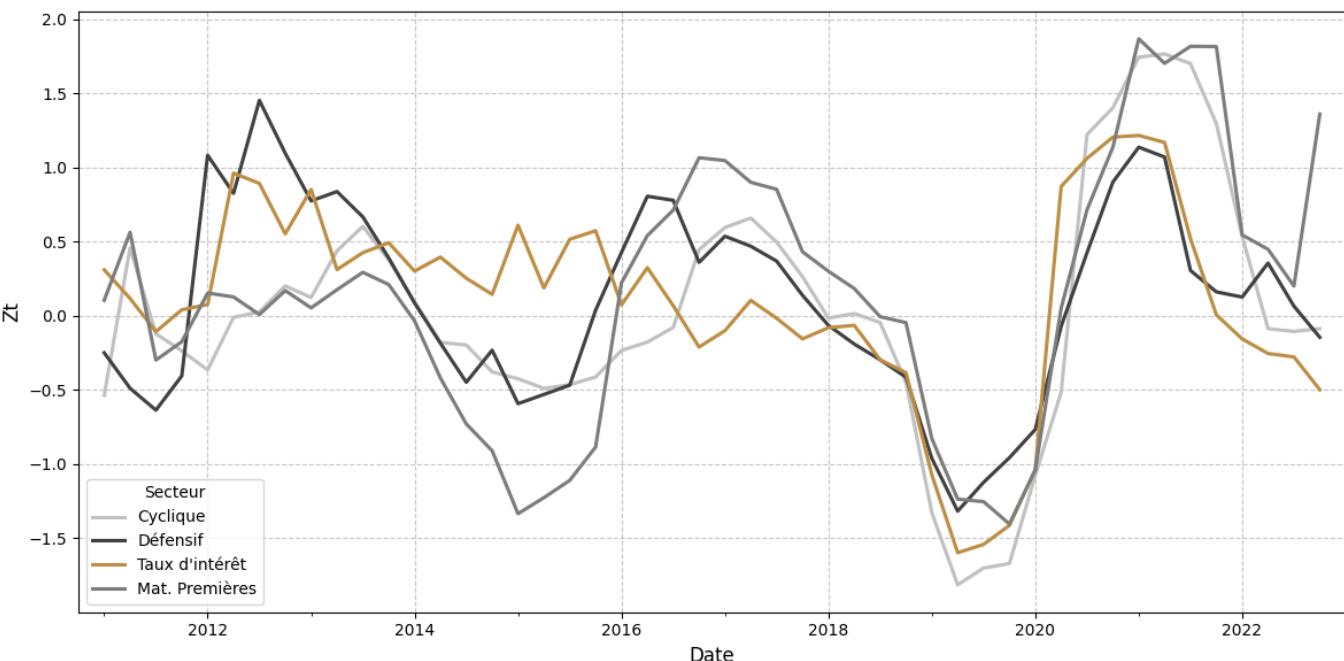
Il est possible d'extraire le facteur systémique Z_t en minimisant les écarts au carré entre les probabilités de migration observées sur l'historique et les probabilités modélisées via Creditmetrics pour chaque notation :

$$\forall t \in [0, T], \quad z_t = \operatorname{argmin}_{z_t} \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D [\hat{p}_{ij}^{PIT}(t) - \hat{p}_{ij}^{PIT}(z_t)]^2 \quad \hat{p}_{ij}^{PIT}(t) = \frac{n_{t+12}^{i,j}}{n_t^i}$$

Contrairement au modèle de Merton-Vasicek, le facteur systémique extrait de CreditMetrics permet de saisir **toutes les améliorations et dégradations** de notation qui n'entraînent pas nécessairement le défaut.

Ce dernier fait davantage sens pour modéliser le risque de crédit des *Low Default Portfolios*, auxquels les *large corporates* appartiennent généralement.

Exemple d'extraction de facteurs systémiques par secteur



Modélisation des migrations de ratings

ESTIMATION ET PROJECTION DU FACTEUR SYSTÉMIQUE

- Après avoir extrait le facteur Z , l'étape qui suit consiste à estimer un modèle satellite reliant ce facteur systémique aux variables macroéconomiques préalablement sélectionnées sur la période historique

$$\text{Modèle satellite : } Z_t = f(X_t) + \epsilon_t$$

X_t : ensemble des variables macroéconomiques susceptibles d'influencer la conjoncture économique en t

- Les méthodes d'estimation des modèles satellites présentés dans la section précédente s'appliquent de la même manière.
- Projection du facteur systémique dans le scénario $s \in S$:** $\hat{Z}_{T+h}^s = \hat{f}(X_{T+h}^s)$ X_t : variables macroéconomiques projetées par le NGFS en $T+h$ dans le scénario $s \in S$.
- Projection des probabilités de migration PIT associées aux différents scénarios climatiques du NGFS :**

$$\hat{p}_{ij}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^s) = \Phi\left(\frac{\hat{B}_{ij} - \sqrt{\hat{\rho}_i} \hat{z}_{T+h}^s}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_i}}\right) - \Phi\left(\frac{\hat{B}_{ij+1} - \sqrt{\hat{\rho}_i} \hat{z}_{T+h}^s}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_i}}\right)$$

- Les coefficients de corrélation à la conjoncture économique $\hat{\rho}_i$ peuvent être estimés à partir des formules du régulateur ou bien des méthodes d'estimation présentées à la section précédente.

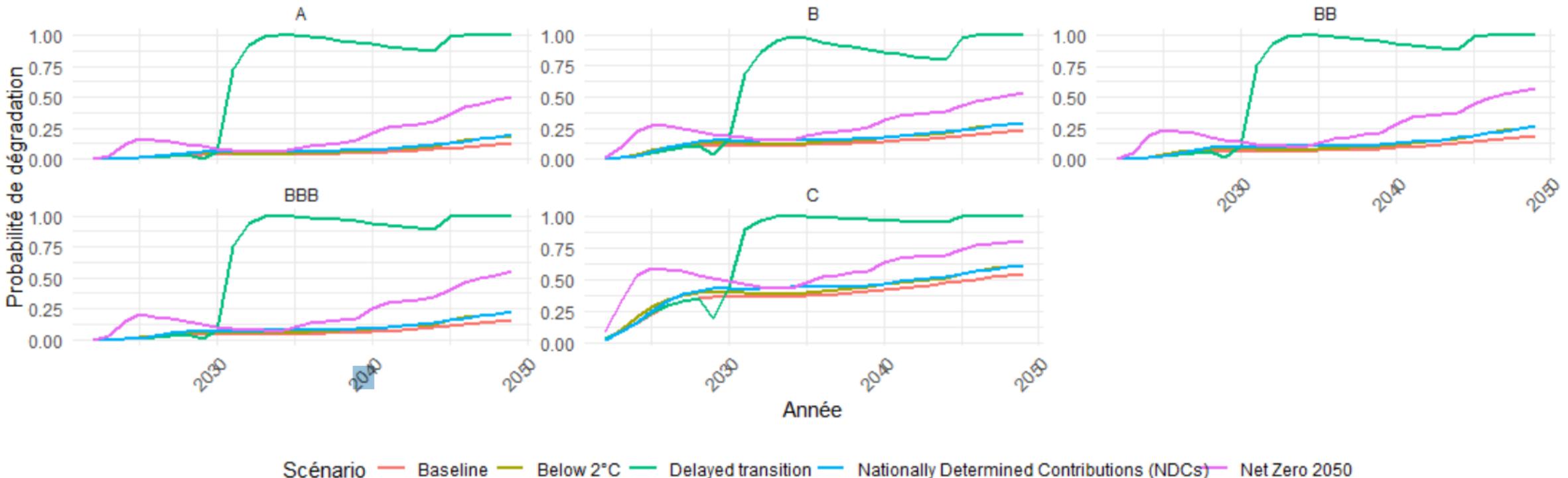
Modélisation des migrations de ratings

PROJECTION DES PROBABILITÉS DE DÉGRADATION DE NOTATION

- Dans le cadre des modèles de migration intégrant le Forward-Looking, l'évolution des probabilités de dégradation pour chaque classe de notation $j \in \mathcal{N}$ est sans aucun doute un des indicateurs clés concernant l'évolution du risque de défaut du portefeuille.

$$\hat{p}_{jj+}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^s) = \sum_{k>j}^D \hat{p}_{jk}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^s)$$

Exemple d'évolution des probabilités de dégradation par notation et scénario du NGFS



Modélisation des migrations de ratings

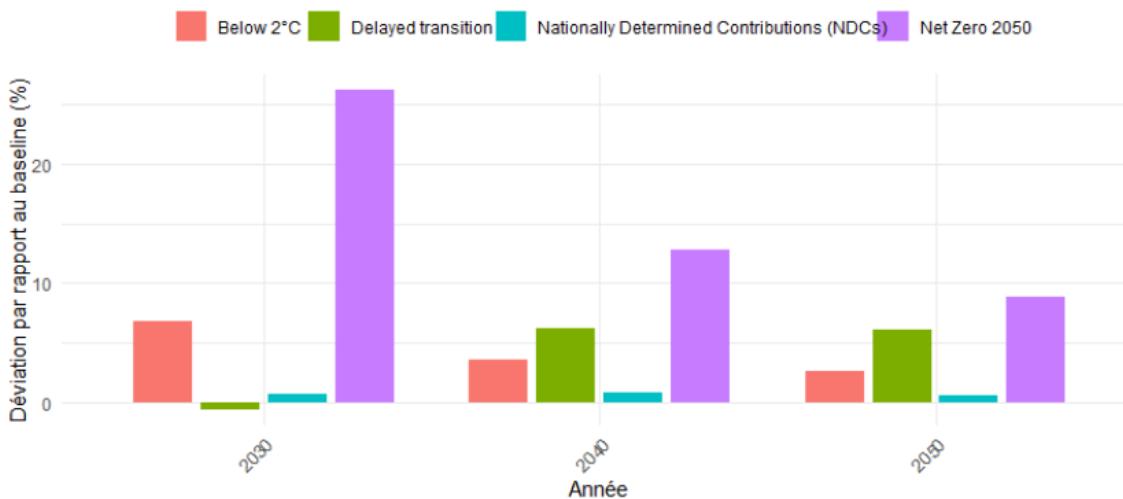
ÉCART RELATIF AU SCÉNARIO BASELINE

Dans le cadre d'un stress-test climatique, un des indicateurs clés est **l'écart de risque de dégradation relativement au scénario Baseline**

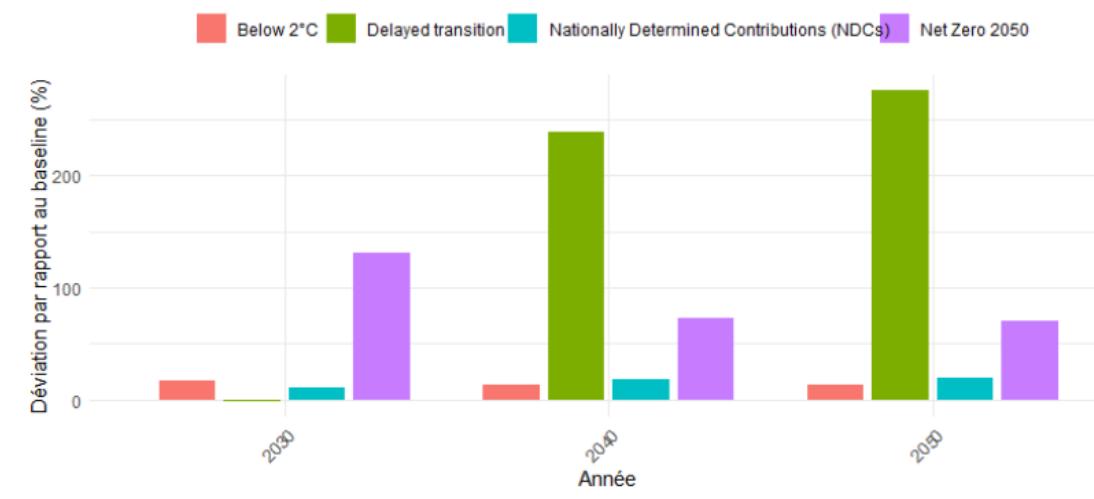
Exemple : Pourcentage de déviation du risque de dégradation dans le scénario *Delayed transition* (DT), par rapport au scénario *Baseline* (BSL), sur l'ensemble des classes de risque et sur la période 2030-2040 (2030 sur les graphiques) :

$$\Delta_{2030-2040}(DT, BSL) = \frac{\sum_{h=2030}^{2040} \sum_{j=1}^{D-1} [\hat{p}_{jj+}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^{DT}) - \hat{p}_{jj+}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^{BSL})]}{\sum_{h=2030}^{2040} \sum_{j=1}^{D-1} \hat{p}_{jj+}^{PIT}(\hat{z}_{T+h}^{BSL})} \times 100$$

Déviations des scénarios par rapport au baseline : Transport



Déviations des scénarios par rapport au baseline : Commerce et Distribution



Modélisation des migrations de ratings

ANALYSE DES PERFORMANCES D'UN MODÈLE DE MIGRATION

- En toute rigueur, les performances d'un modèle de stress-test climatique ne doivent pas être analysées uniquement à partir de mesures de performance prédictive sur le facteur Z sur la période historique (exemple : RMSE, MAE, MAPE).
- La capacité du modèle CreditMetrics à refléter fidèlement les migrations PIT observées sur la période historique, post-estimation de Z, doit également être examinée.
- Les mesures de performance utilisées pour comparer deux matrices de migration \mathbf{P}^A et \mathbf{P}^B entre elles — une matrice estimée et une matrice observée — sont de nature différente de celles habituellement employées.

Exemples d'indicateurs de performance à appliquer pour chaque date t :

- La différence de **SVD Mobility Index** permet de comparer deux matrices de migration \mathbf{P}^A et \mathbf{P}^B en termes de mobilité :

$$D_{SVD}(\mathbf{P}^A, \mathbf{P}^B) = M_{SVD}(\mathbf{P}^A) - M_{SVD}(\mathbf{P}^B) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^A - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^B \quad \sigma_i^A : i\text{-ème valeur singulière de la matrice } \tilde{\mathbf{P}}^{A^T} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^A, \text{ avec } \tilde{\mathbf{P}}^A = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}^A.$$

- Comparaison des **indices DC3** qui mettent l'accent sur les dégradations de ratings :

$$D_{DC3}(\mathbf{P}^A, \mathbf{P}^B) = M_{DC3}(\mathbf{P}^A) - M_{DC3}(\mathbf{P}^B) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i-j) \tilde{p}_{ij}^A - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (i-j) \tilde{p}_{ij}^B$$

Pour plus de détails sur les indicateurs de performance matricielle, voir la section 7.4 de la note projet de l'an passé.

Modélisation des migrations de ratings

MODÈLE DE MIGRATION ET PD LIFETIME

- Il est possible de calculer directement sur les PD lifetime à utiliser pour le calcul des ECL en stage 2 (PD maginale obtenue à partir des structures par terme) via les résultats d'estimation du modèle Creditmetrics.
- Pour cela, nous supposons que la propriété de Markov d'ordre 1, qui s'applique à la matrice de migration TTC, est également valable pour les matrices de migration PIT issues de Creditmetrics.
- Bien entendu, la propriété d'homogénéité n'est pas retenue, puisque que les matrices de migration PIT dépendent par définition de la conjoncture économique.

Projection des courbes de de PD et migrations jusqu'à l'horizon T+h dans le scénario S :

$$\mathbf{M}^{PIT}(\hat{z}_{T+1}^S) \times \mathbf{M}^{PIT}(\hat{z}_{T+2}^S) \times \dots \times \mathbf{M}^{PIT}(\hat{z}_{T+T}^S)$$

- Le résultat précédent est une application directe de la relation de Chapman-Kolmogorov.
- Avantage de la méthodologie :** Il suffit que la matrice TTC utilisée dans Creditmetrics vérifie les propriétés de monotonie pour que les PD lifetime les vérifient également (pas de croisement). Par ailleurs, les PD lifetime issues de Creditmetrics intègrent par définition la dimension FwL.

2

MÉTHODOLOGIES DE STRESS-TEST CLIMATIQUE

1. Modélisation de la PD
2. Modélisation des migrations de ratings
3. Modélisation de la LGD

Modélisation de la LGD

MODÉLISATION DE LA LGD DANS LE CADRE D'UN EXERCICE DE STRESS-TEST

$$\text{Cohorte trimestrielle de LGD : } LGD_t = \frac{\sum_{i=1}^N LGD_{t,i} \times EAD_{t,i}}{\sum_{i=1}^N EAD_{t,i}}$$

Exemple de modèle satellite (OLS-*logit*) : $\ln\left(\frac{LGD_t}{1-LGD_t}\right) = \beta^T X_t + \varepsilon_t$ X_t : ensemble de variables macroéconomiques

Autres options de modèle : *Fractional Response Regressions* (FRR) : régression bêta, transformation log-normale, etc.

Modèles de mélange (cure-rate modeling) : régression gamma ajustée à 0, mix régression logistique-linéaire, logistique-régression bêta, etc.

Méthodes d'estimation : OLS, AR-X, ARDL, Méthodes d'Averaging (BMA, BACE, Stacking)

Les méthodes d'averaging ont démontré leur efficacité, aussi bien dans la littérature académique qu'à travers divers retours d'expérience.

Validation de modèle : significativité des coefficients, signes cohérents, stationnarité des résidus, homoscédasticité des résidus, non-autocorrélation des résidus, absence de multi-colinéarité, normalité.

Choix du meilleur modèle : R², AIC, Performance Out-of-Time



Modélisation de la LGD

MODÈLES DE DÉPENDANCE PD-LGD

Constat : Les processus de recouvrement sont souvent plus difficiles et moins efficaces pendant une récession, car les débiteurs disposent de moins de ressources pour rembourser leurs dettes. On observe généralement une dépendance relativement forte entre la PD et la LGD durant les périodes de récession.

Plusieurs modèles de dépendance PD/LGD permettent d'intégrer la conjoncture économique dans le calcul de la LGD PIT :

- Modèle de [Hillebrand \(2006\)](#)
- Modèle de [Frye-Jacobs \(2014\)](#)
- Modèle de [Merton \(2009\)](#)

Exemple : Modèle Frye-Jacobs

$$LGD^{PIT} = \frac{1}{PD^{PIT}} \times \Phi \left[\Phi^{-1}(PD^{PIT}) - \frac{\Phi^{-1}(PD^{TTC}) - \Phi^{-1}(PD^{TTC} \times LGD^{TTC})}{\sqrt{1 - \rho}} \right]$$

Intérêt pour les équipes de modélisation :

- Facilité d'interprétation
- Cohérence avec les modèles de PD *Forward Looking*
- Gain de temps : moins de modèles à entretenir

Limites : L'utilisation de ce type d'approche suppose que les périmètres des modèles de PD/LGD soient cohérents et qu'une corrélation significative existe entre les PD PIT et les LGD PIT.



Modélisation de la LGD

STRESS-TEST BOTTOM-UP VIA LA VALORISATION DES COLLATÉRAUX – IMMOBILIER (1/3)

Pour les portefeuilles de crédits immobiliers, pour lesquels les collatéraux constituent un *risk driver* important de la LGD (via la LTV), les LGD projetées doivent tenir compte des fluctuations du marché de l'immobilier.

La prise en compte du FwL dans la valorisation des collatéraux de chaque contrat (*Bottom-Up*) peut se faire de la façon suivante :

$$LTV(t) = \frac{EAD_t}{Valeur\ garantie_t \times \gamma_t} = LTV(0) \left[\frac{1 - \alpha(t)}{\beta(t) \times \gamma_t} \right]$$

$$\alpha(t) = \frac{EAD(t) - EAD(0)}{EAD(0)}$$

$$\gamma_t = \frac{Valeur\ liquidative_t}{Valeur\ garantie_t}$$

$$\beta(t) = \frac{HPI_t}{HPI_0}$$

- EAD : Exposition à la t-ème période dans le monde du défaut
- HPI : Indice des prix immobiliers (*Housing price index*) (disponible au niveau départemental/communal sur l'historique)
- $\beta(t)$: Coefficient d'évolution des prix de l'immobilier
- γ_t : Taux de décote appliqué à la garantie (*haircut*) (tient compte des frais de vente et des incertitudes sur le marché de l'immobilier)

Le FwL est pris en compte dans la réévaluation de la garantie et de la LTV associé via les scénarios climatiques prospectifs sur les indices de prix de immobilier fournis par les économistes



Modélisation de la LGD

STRESS-TEST BOTTOM-UP VIA LA VALORISATION DES COLLATÉRAUX – IMMOBILIER (2/3)

La réévaluation des collatéraux et de la LTV associé peut se transmettre à la LGD du contrat comme suit :

$$\begin{aligned} LGD(t) &= (1 - Cure\ rate(t))LGL(t) + Coûts \\ LGL(t) &= \max\left(\frac{EAD(t) - Valeur\ liquidative(t)}{EAD(t)}, 0\right) = \max\left(\frac{LTV(t) - \gamma_t}{LTV(t)}, 0\right) \end{aligned}$$

- *Cure rate(t)* : probabilité de retour en sain du contrat en t (peut-être fixé à taux constant ou dépendre de la conjoncture)
- *LGL(t)* : *Loss Given Liquidation*, soit la part de l'exposition qui reste irrécupérable même après avoir liquidé le collatéral.
- *Coûts* : frais fixes liés au processus de recouvrement (frais juridiques, administratifs, etc.).

Cette approche permet d'intégrer dynamiquement les variations du marché immobilier (via $LTV(t)$), et les conditions de vente du collatéral (via γ_t).

Une approche *Top-Down* est aussi possible (bien que moins précise) en incluant l'indice de prix immobilier parmi les *risks drivers* dans le modèle satellite associé à la série de LGD PIT du portefeuille de crédits immobiliers.



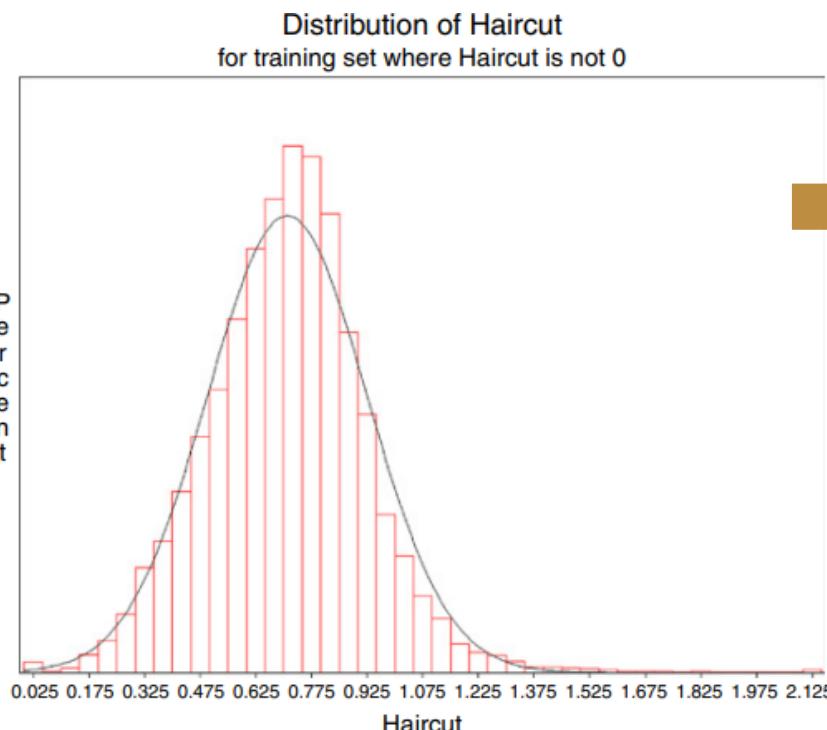
Modélisation de la LGD

STRESS-TEST BOTTOM-UP VIA LA VALORISATION DES COLLATÉRAUX – IMMOBILIER (3/3)

Dans le cas simple le haircut (γ_t) peut être fixé à un niveau constant (ex : $\gamma=20\%$).

Cependant, la valeur récupérable réelle au moment de la vente varie généralement en fonction de nombreux facteurs et **n'est donc pas constante.**

En supposant qu'on dispose de plusieurs observations du haircut, il est possible d'en extraire sa distribution. En ayant recours à une hypothèse de loi normale tronquée, il est possible d'établir un modèle statistique reliant le haircut à la LTV :



$$\gamma = \mu \left[\Phi \left(\frac{LTV - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-\mu}{\sigma} \right) \right] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(LTV-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] + LTV \left[1 - \Phi \left(\frac{LTV - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

Références scientifiques :

- Leow, Mindy, and Christophe Mues. "Predicting loss given default (LGD) for residential mortgage loans: A two-stage model and empirical evidence for UK bank data." International Journal of Forecasting 28.1 (2012): 183-195.
- Gross, Mr Marco, et al. Expected credit loss modeling from a top-down stress testing perspective. International Monetary Fund, 2020.



173 Avenue Achille Peretti
92200 Neuilly-sur-Seine
+33 (0)1 46 40 40 00

square-management.com

 Square Management

 @square_managem