

大学物理 A 知识整理（三）电磁学

第一章 静电学的基本原理

一、库仑定律

1、内容：点电荷 1 对 2 的作用力 $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ 。电荷量有正负。

2、适用范围：点电荷，真空，静止场源电荷。

3、叠加原理：（1）多个点电荷， $\vec{F}_{\text{总}} = \sum_i \vec{F}_i$ 。

（2）两个有限大体系 V_1 与 V_2 ， $\vec{F}_{12} = \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1 dq_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ 。（计算很麻烦，一般不直接使用）

二、电荷

1、密立根油滴实验：电荷量具有量子化特点，具有最小单位 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ 。

2、电荷守恒定律：孤立体系内的电荷总量不发生变化。

三、电场强度

1、定义： $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ 。（ q_0 可以是负电荷，此时 \vec{F} 与 \vec{E} 恰好反向）

2、典型场强分布（请自行熟悉一下推导）

（1）点电荷： $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ （球对称）

（2）均匀带电有限长直导线（ L, λ ）：在中垂线上距离 r 处，有

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{r \sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

（方向：垂直于导线，柱对称； $L \rightarrow \infty$ 时，趋向于无限长带电直导线的电场）

*无限长直导线任意处： $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ，垂直于导线，柱对称

（3）均匀带电圆环（ R, λ ）：轴线上 x 处， $E = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{xR}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$ （沿轴线）

（4）均匀带电圆盘（ R, σ ）：轴线上 x 处， $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$ （沿轴线）

*无限大带电平板： $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ （充满整个空间的匀强电场）

$$(5) \text{ 均匀带电球壳 } (R, q) : E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, r > R \\ 0, r < R \end{cases} \quad (\text{径向, 球对称; } R \text{ 处不连续})$$

续)

$$(6) \text{ 均匀带电球体 } (R, \rho) : E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}, r \geq R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, r \leq R \end{cases} \quad (\text{径向, 球对称})$$

3、电场线

- (1) 电场线切线方向代表场强方向，疏密代表大小；
- (2) 电场线始于正电荷/无穷远，终于负电荷/无穷远；
- (3) 电场线不闭合，不相交。

$$(4) \text{ 电场强度可以叠加: } \vec{E}_{\text{总}} = \sum_i \vec{E}_i。$$

4、用积分方法求解电场强度的思路：定性判断（对称性与大致方向）→取微元分析（直线常用长度微元 dx ，曲线常用角度微元 $d\theta$ ；二维、三维体系如果要用重积分，务必避免矢量积分，而要先确定电场方向，然后直接对所有电场强度微元在该方向的分量做代数积分；学会使用数学中重积分的有效方法，如坐标变换、改变积分顺序等；圆盘、球体、方形区域可以选择嵌套法，分解成一个个圆环、球壳、方框。）

三、高斯定理

$$1、\text{电通量: } d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}。$$

2、立体角：一块面积对一个点所成的张角。（类比平面张角）

$$3、\text{定义式: } d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}, \Omega = \iint \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

4、全立体角：封闭曲面对内部任意一点所张的立体角为 4π 。写成积分的形式，就是 $\oiint d\Omega = \oiint \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = 4\pi$ ，其中 \vec{r} 是参考点指向 dS 的矢径。要求参考点在曲面内，否则立体角等于 0。

5、高斯定理： $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_{i\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$ ，其中 S 为封闭曲面， V 为 S 包围的三维区域。

(1) 证明：内部 4π 角，外部全抵消。（利用立体角作电通量积分）

(2) 微分形式： $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。（意义：静电场是有源场，不会来无影去无踪）

(3) 注意点:

① q 仅仅包括曲面内部的电荷, 但 E 包括曲面内外的电场 (有的电场线由外部电荷发出但止于内部电荷, 其电通量必须考虑);

② 整个封闭曲面都要做电通量积分, 不要遗漏其中的一些部分, 更不能取成不封闭的曲面;

③ 电通量为 0 不能说明没有电场 (电场线可以全部从外部穿入再全部穿出)。

(4) 应用: 定性判断 (对称性与大致方向) → 取高斯面 (对称的电场优先考虑对称的面, 并且面与电场强度最好垂直) → 使用公式 (电荷量可能需要积分)。

(电场分布问题中最常用的方法)

四、电势

1、静电力是保守的: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint q\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。这一点来源于库仑力的保守性。

2、静电场环路定理: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。

微分形式: $\nabla \times \vec{E} = 0$ 。(意义: 静电场是无旋场、保守场; 电场线不会闭合)

*静电场的两大基本属性: 无旋、有源。(高斯定理+静电场环路定理)

3、电势: 设 P_0 处为电势零点, 则 P 处电势 $\varphi(P) = \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 。

4、电势差: $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 。(注意下标顺序)

5、电势叠加原理: $\varphi_{\text{总}} = \sum_i \varphi_i$ 。(注意: 电势是标量, 求和属于代数和, 不用考虑方向, 但要带上正负)

6、典型电势分布

*有限大带电体系一般以无穷远处为电势零点; 无限大体系一般不能这样做, 否则电势定义式中的积分将不收敛。以下例子中的无限大体系由于电势零点不定, 仅给出电势差的表达式。

(1) 点电荷: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ (球对称) (连续分布: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r}$)

(2) 无限长直导线: $U_{AB} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A}$ 。

(3) 匀强电场: A、B 间的电势差 $\Delta\varphi = -Ed$ 。其中 d 是从 A 指向 B 的矢量在电场强度方向上的投影。(投影有正负; 电场线指向电势减少的方向)

(4) 均匀带电球壳: $\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & r \leq R \end{cases}$

*带电量 q 、半径为 R 的球壳对球心的电势恒为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ ，与电荷在球面上的分布无关，因为所有的电荷与球心的距离都是 R 。

$$(5) \text{ 均匀带电实心球体: } \varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}, & r \leq R \end{cases}$$

7、电势与场强的关系

(1) 电势沿任意方向 l 的方向导数为场强在 l 方向的分量的相反数：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l = -\vec{E} \cdot \hat{l}$$

(2) 场强是电势的负梯度： $\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$ 。意义：场强总是沿着电势减少最快的方向；场强总是与等势面垂直。

与高斯定理微分形式结合，得泊松方程： $\nabla^2 \varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ 。

(3) 与矢径 $\vec{r} = (x, y, z)$ 及其长度 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 有关的一些场论结论

$$\textcircled{1} \nabla r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{(x, y, z)}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

$$\textcircled{2} \nabla \times \vec{r} = 0$$

$$\textcircled{3} \nabla \cdot \vec{r} = 3$$

$$\textcircled{4} \nabla^2 r = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$$

8、求解电势分布的思路

(1) 定性分析（一般对称的电场就有对称的电势）

(2) 径向场强对应的电势分布：若 $\vec{E} \parallel \vec{r}$ ，且 E 只与 r 有关，则 $\varphi(r) = \int_r^{r_0} E(r) dr$ 。

其中 r_0 为电势零点。对于有限体系，一般取 $r_0 = \infty$ 。（有时题目会特地选取其他位置作为电势零点，须格外注意）这一类靠定积分计算的电势分布最为常见。

(3) 对于无穷大体系还要先选取电势零点，此时不考虑无穷远；如果可以在有限远处找到电势为 0 的位置，则可以直接将其选为电势零点（如电偶极子的中垂线上的点）；如果还是找不到，可以自定，但要说明清楚。

9、力学观点下的电势能

(1) 定义式： $E_{pA} = \int_A^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 。（即力学中保守力的势能表达式）

(2) 与电势的关系： $E_{pA} = \int_A^{P_0} q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varphi$ 。

(3) 电场力做功: A 到 B 做的功 $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p = qU_{AB}$ 。

(注意正负号与积分上下限; q 本身可正可负)

(4) 静电力作为一种保守力, 具有相应的势能, 也可以归入机械能的范畴, 进行与力学中类似的研究。

(5) 两个点电荷之间的电势能: $E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ 。

(关于静电能的更多讨论见第二章)

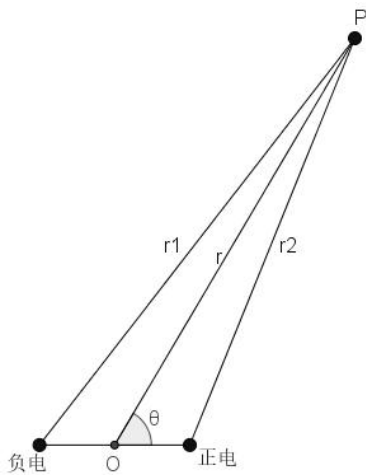
五、电偶极子

1、定义: 两个等量异号且相距一定距离的点电荷所构成的系统。其实际模型是物质中的极性分子, 具有较大的研究价值与实用性。

2、电偶极矩: $\vec{p} = q\vec{l}$, 其中 q 是一个电荷带电量的绝对值, \vec{l} 是从负电荷出发指向正电荷的矢径。

3、远场近似: 在电偶极子形成的电场中, 如果考察的点与电偶极子的距离远大于 l (即 \vec{l} 的长度), 则可以进行一些近似来使电场、电势表达式变得简单。

(1) 利用 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, 当 $r \gg l$ 时, $(r+l)^\alpha = r^\alpha \left(1 + \frac{l}{r}\right)^\alpha = r^\alpha \left(1 + \alpha \frac{l}{r}\right)$



*小量取舍原则: 保留无法抵消的最低阶项, 保证最终表达式除常数项之外只有一项。上述近似式如果无法被部分或全部抵消, 则可以直接当做 r^α 。

(2) 近似: $r_1 r_2 \approx r^2$; $r_1 \approx r + l \cos \theta$, $r_2 \approx r - l \cos \theta$ 。

(一般不使用正弦、余弦定理, 以免麻烦)

4、电偶极子的电场 (远场)

(1) 坐标系的建立: 以偶极子的中点 O 为原点, \vec{l} 方向为 $+x$ 方向, 建立直角坐标系与极坐标系。

(2) x 轴上的电场强度: $\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 x^3}$, x 取绝对值

(3) y 轴 (偶极子中垂线) 上的电场强度: $\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 y^3}$, y 取绝对值。(镜面对称)

(4) 任意一点 (r, θ) 处的电场: 将电偶极矩分解为径向分量 $\vec{p}_\parallel = p \cos \theta \cdot \hat{r}$ 与切向分量 $\vec{p}_\perp = \vec{p} - \vec{p}_\parallel$, 并且将两个分量平移至中点在 O 处的位置。则 (r, θ) 处的场强为

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_\parallel}{r^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_\perp}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}_\parallel - \vec{p}_\perp}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{p}_\parallel - \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}。可以$$

得到场强的径向分量 $E_{//} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p_{//}}{r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3}$, 横向分量 $E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{\perp}}{r^3}$
 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$ 。

5、偶极子的电势: $\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

6、电偶极矩在匀强电场中的行为 (不考虑偶极子本身的电场)

(1) 力矩: 对中心点 O 的力矩 $\vec{M} = \frac{\vec{l}}{2} \times q\vec{E} + (-\frac{\vec{l}}{2}) \times (-q\vec{E}) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$ 。

(2) 电势能: $E_p = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q\Delta\varphi = -qEd = -q(\vec{l} \cdot \vec{E}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ 。 d 是负电荷指向正电荷的有向线段在电场强度方向的投影, 也就是 \vec{l} 在 \vec{E} 方向上的投影。

(3) 平衡位置: 当 $\vec{p} \parallel \vec{E}$ 时达到受力平衡, 力矩为 0, 能量为极值。二者同向为稳定平衡位置, 反向为不稳定平衡位置。

六、总结: 求解电场分布的常见方法

- 1、库仑定律+叠加原理 (预先定性分析, 避免矢量积分, 而只做矢量分量的积分; 选取合适的积分变量)
- 2、高斯定理 (首选方法。定性→取面→使用公式)
- 3、已知电势分布时: 场强是电势的负梯度。(灵活使用 \vec{r} 与 r 的一些结论)
- 4、跃变法 (在导体中使用较多, 详见第二章)
- 5、原则: 先定性再定量; 熟练的对称性分析 (对于任意一个微元, 总存在对应的另一个微元, 二者在某方向上的场强分量抵消); 一些时刻使用微积分的意识 (尽管有避免积分的方法, 但定积分、重积分仍是重要手段)

第二章 静电场中的导体

一、导体的基本特征: 由自由电子与正离子组成。电子可以在导体内部任意运动, 甚至直接被转移出去。(“电子气”: 用热学中的理想气体理论研究自由电子)

二、静电平衡

1、定义: 外加电场时, 导体中的自由电子集中在其表面 (外表/内表) 的一侧, 另一侧留下正电荷, 形成内电场, 正好抵消外电场, 使得导体内部无电场的平衡状态。

2、一些基本概念

(1) 外表面: 导体与外界环境的交界处, 即外部表面。

(2) 内表面：导体内部有空腔时，导体与空腔的交界面。

(3) 内部：导体的内部指导体外表面所包围的除去空腔的部分。导体内部的任意一点的周围都是导体介质。（类比数学中区域内点的定义）

(4) 净电荷：某一点带有净电荷，指该点电荷密度不为 0；某物体带有净电荷，指该物体所带正负电荷的代数和不为 0。（无电荷：不仅电荷密度为 0，也没有互相抵消的正负电荷）

(5) 孤立导体：不受到外界任何作用的导体（要求外界、腔内无电场）。

3、静电平衡导体的性质（非平衡态不一定有以下性质）

(1) 导体内部场强处处为 0；

(2) 如果空腔内无净电荷，则内表面无净电荷；

(3) 如果空腔内有电荷，则内表面的电荷代数和与空腔内的总电荷量等值异号；

(4) 感应电荷要么不出现，要么全部出现在导体的内、外表面（没有体分布）；

(5) 导体内部每一点具有相同的电势，其内外表面为等势面；

(6) 导体内/外表面处的场强与表面处处垂直；

(7) 导体内/外表面一点的电荷面密度与该处曲率半径负相关（尖端放电）；

(8) 孤立导体的表面要么没有电荷，要么只有同号的电荷。

(9) 导体表面某点处的场强大小与该处电荷面密度成正比， $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 。

*性质(9)有 2 种证明方法：①高斯定理（取穿越导体表面的微小曲面 dS 分析）；②跃变法【 dS 上的电荷与其他电荷在该处都会产生场强。 dS 的场强在表面内外（离表面很近处）大小相同，方向相反（跃变），其他电荷的场强在表面内外大小、方向都相同。两个电场在内部抵消，因此在外部分会叠加为两倍。由于 dS 产生的场强为 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ，故总场强为 $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 。】

(10) 带电导体球壳 (R, q)（腔内无电荷）表面的电势 $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} (= ER)$ 。第

二个等号要求电荷均匀分布，第一个等号不要求。

4、唯一性定理

(1) 内容：如果给定一个体系中所有导体的电势/所有导体的电荷分布/一些导体的电荷分布和剩余导体的电势，则系统的电场分布唯一确定。（以上给定的条件称为边值条件）

(2) 静电屏蔽：对于静电平衡的导体，空腔内的电场线终止于内表面，外界的电场线终止于外表面，二者的变化不会互相影响。

（实质：导体具有灵活的屏蔽电场的能力，可以通过改变感应电荷的量与分布使得内部电场强度为 0。如果单独讨论外界和空腔内的电场，它们会穿过表面进入导体内部，但是感应电荷的电场与之叠加后，内部的场强正好被抵消，宏观上体

现为电场线不能穿过表面。)

5、导体问题的一般思路

(1) 常见的问题：求感应电荷量、求电荷面密度、求某导体的电势、求某处的场强。

(2) 电荷量的求解：已知内部空腔的电荷量时，常常利用性质 3；在已知电势的情况下可以先假设电量，然后列电势表达式，计算电量。

(3) 电荷面密度：在导体表面处取闭合柱体，使其侧面垂直于导体表面，一个底面在导体内部，另一个底面在外部。于是，电通量只需考虑一个面，并且很容易计算。

(4) 电势：往往求的是平板或球壳（球体）的电势。平衡态的导体是等势体，知道导体上某一点的电势即可知道导体上其他位置的电势；在此之前要先把电荷的情况完全确定，包括所有导体外表面、内表面、外界、空腔内的带电量及其空间分布；如果不能直接判断得到，则需要列方程。

(5) 场强：利用已知场强公式、电势负梯度或跃变法求解。

(6) 接地问题：需要明确接地的作用——接地不意味着导体上的电荷一定会全部流走。接地只是使得导体电势恒为 0，并且给导体一个可能的转移电荷的通道。如果导体中一部分电荷有被外电场排斥出导体的趋势，则接地时这些电荷会流走；否则，如果没有力量使得电荷流走，则电荷没有流走的理由。

(7) 导线连接问题：用导线连接两个导体的作用是使得它们等电势（具体等于多少尚不明确），并且完成电荷的转移（如果有转移）。如果两个导体在连线之前就等电势，那么不会发生电荷转移；同样，如果连线之后两个导体已经达到了等电势的状态，则导线中没有电流，此时拆去导线不会改变两个导体的电荷量、电荷分布以及电势。

(8) 平行板问题：对于平行、正对排列的一排金属平板（大小、形状完全一样）：

①在分析时，无论题目插图中的平板有没有厚度，都要将其看成有厚度的平板，其两个侧面的电荷量要分别考虑；

②熟练使用高斯定理。对于求平板某侧面电荷密度的问题，一般选择柱体，其侧面与平板垂直，两个底面各伸入一块平板的内部。此时电通量必然为 0，因此被柱体包围住的电荷总量为 0。由此可得：任意两块相邻平行板相面对的侧面上，有等量异号的电荷。

③大部分平行板问题不考虑边缘效应，因此板间电场（如果有）一定是垂直平板的匀强电场。如果所有平板所带的电荷总量为 0，则这个系统的外部（除了板之间）不会有电场；由高斯定理，这种情况下最左边板的左侧和最右边板的右侧都不带电。

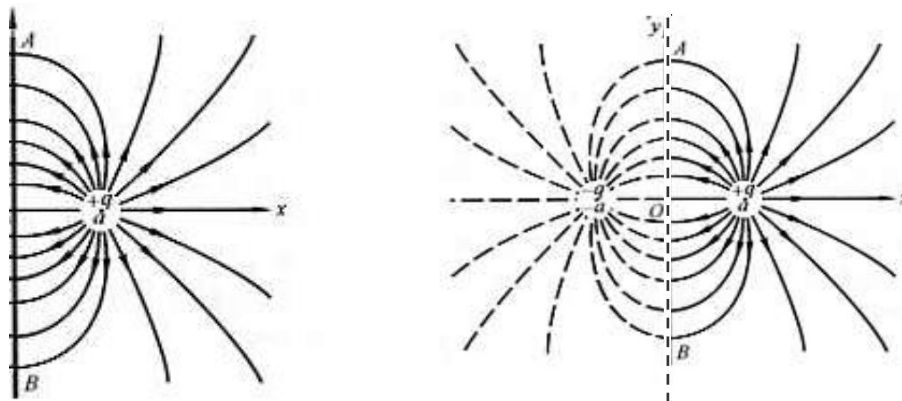
(9) 电像法：技巧性比较高，常用于高中竞赛，大学物理中用得不多。

①基本思路：如果某个复杂体系产生的电场和点电荷产生的电场完全一样（可以

只是在有些区域一样)，则可以用一个点电荷代替原先复杂的电荷分布，从而简便地研究某处的场强。

②常见模型：导体平板+点电荷。（左图的电场与右图右半边的电场一模一样，与其研究前者不如研究后者。得知场强分布后甚至可以直接得到导体板上的电荷分布情况。）

（图片来源：侯晓远老师第8堂课课件）



e.g. 在一个导体球壳（有厚度）空腔内放入一个点电荷 $+q$ ：

内表面感应出 $-q$ （根据对称性，当点电荷在球心处时， $-q$ 是均匀的）→外表面有 $+q$ 的电荷剩余（电荷守恒）并且均匀分布（即使点电荷不在球心也均匀，保证对球壳内部不产生电场）→如果将外表面接地，则外表面的正电荷会流走。

三、电容器

1、任何导体都可以作为电容器使用；一块导体也可以，因为其上可以储存电荷与静电能。

2、电容的定义式： $C = \frac{Q}{U}$ 。对两个导体组成的电容， U 指它们之间的电势差；对于单个导体， U 指其电势。

3、电容的物理意义：反映电容器储存电荷与静电能的能力。电容越大，增加相同电量时升高的电势越少。（一般的容器：底面积越大，则注入相同体积的水时液面升高得越少，从而底面积可以从某种程度上反映容器储存物质的能力）

4、典型电容器的电容（不考虑边缘效应）

$$(1) \text{ 孤立导体球 } (R) : C = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$(2) \text{ 双球壳电容 (两同心球壳相互嵌套, 内径 } R_1, \text{ 外径 } R_2) : C = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2})}$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (\text{令 } R_2 \rightarrow \infty \text{ 可回到孤立导体球的电容})$$

(3) 平行板电容器 (正对面积 S , 间距 d):
$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

(4) 圆柱形电容器 (两同轴圆柱相互嵌套, 长 L , 内径 a , 外径 b):

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda L}{\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (\text{均匀带电圆柱面对内部场强为 } 0, \text{ 对外部的场强})$$

同均匀带电直导线。可以用高斯定理证明)

(5) 电容器串并联法则

① 串联: 电量相同, $\frac{1}{C} = \frac{\sum U_i}{Q} = \sum \frac{U_i}{Q} = \sum \frac{1}{C_i}$ (同电阻并联)

② 并联: 电压相同, $C = \frac{\sum Q_i}{U} = \sum \frac{Q_i}{U} = \sum C_i$ (同电阻串联)

5、求解电容的常见思路

(1) 最根本的方法是用定义式: 假设电容器带有 Q 的电量, 求出电压 (这一步可能需要积分), 然后得到电容值 (Q 一定可以被约分);

(2) 将一个电容看作若干个经典电容的串并联, 然后使用串并联公式。注意三块极板可以看成两个电容, 中间一块极板的两侧分别相当于一块极板。

四、静电能

1、第一章中的电势能实质上就是静电能, 是整个系统共有的能量。静电能变大, 就能使电场总体强度更大或是分布更广。

2、互能: 两个系统之间静电力作用的势能 (如两块极板、两个导体球)。

自能: 对于一个连续带电体 (如带电球体、带电极板), 其上电荷相互作用产生的势能。

*对于静电能这一概念, 它同时包括自能与互能。如果某一问题转化为两个系统的互能, 则决不能算进各个系统的自能。

3、能量密度 u : 是静电能的体密度。若某一点处场强为 E , 则 $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ 。

4、典型静电能公式

(1) 电容器: $W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}$ 。

$$(2) N \text{ 个点电荷 (互能)}: W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i,$$

其中 φ_i 指除去电荷 q_i 外的其他电荷在 q_i 处产生的电势。

$$(3) \text{ 均匀带电球体: } W = \frac{1}{2} \iiint \rho \varphi dq = \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

(注: 点电荷的自能相当于 $R \rightarrow 0$, 是无穷大, 因此一般不讨论点电荷的自能)

5、求解静电能的常见思路 (自能+互能)

(1) 分解成无数小电荷 dq , 然后使用公式 2 的前三个等号, 即用库仑定律做六重积分 (对于较熟悉的问题是可行的, 如公式 3);

(2) 已知电势分布, 可将公式 2 写为 $W = \frac{1}{2} \iiint \rho \varphi dq$ 再计算 (如公式 3);

(3) 对于一个系统在外电场中的静电能, 可以将其拆成自能与互能:

$W = \frac{1}{2} \iiint \varphi_{\text{内}} dq + \iiint \varphi_{\text{外}} dq$ 。其中 $\varphi_{\text{内}}$ 指系统内部电荷对 dq 产生的电势, $\varphi_{\text{外}}$ 指外电场对 dq 产生的电势。上式中第一项是自能, 第二项是互能 (外场电势能)。由于自能的三重积分中每两个电荷微元之间的电势能都被算了两次, 所以须乘以 $\frac{1}{2}$; 外场电势能没有这个问题, 因此不需要乘以 $\frac{1}{2}$ 。

(4) 已知电场分布, 可直接用电场的分布计算静电能: $W = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$ 。三重积分的区域应该是一切有电场存在的地方。

6、电场中静电平衡导体在某点处单位面积电场力产生的张力 (压强的量纲):

$p = \frac{dF}{dS} = \frac{E dq}{2 dS} = \frac{E\sigma}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u$ 。(这里的 $\frac{1}{2}$ 是因为 E 指的是 dq 与其余电荷产生的所有电场。根据跃变法, 其余电荷产生的电场只有 E 的一半, 只有这一半会对 dq 产生外力作用。 dq 的那一半对自身的作用属于内力, 不需要考虑。)

7、根据 $W = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$, 一个系统的自能一定非负; 但是互能是外电场对某一电荷产生的电势能, 从其表达式即可看出互能可正可负。

8、自能与互能的界限是相对的, 关键在于把空间中的带电体看作一个系统还是多个系统。看作两个系统时的互能在看作一个系统时需要除以 2 并计入自能。

第三章 恒定电流

一、电流与电流密度

1、电流的定义: 单位时间内通过某一截面的电荷量。 $I = \frac{dq}{dt}$ 。(注: 通过多少电荷和该处存有多少电荷是不同的概念)

2、规定电流的方向是正电荷定向运动的方向（若运动的电荷是负电荷，则电流方向与电荷运动方向相反）。但是，这个方向与矢量的“方向”不一样，会被限制在一维的导线（或电流线）中，因此还是服从标量叠加法则，即电流是标量。

3、更精确的描述电流的物理量：电流密度，单位面积内单位时间中通过的电荷量。由于节面的朝向与电荷运动的方向都与通量有关，所以电流密度是矢量。对于法向单位矢量为 \hat{n} 、面积为 dS 、通过电流为 dI 的截面，电流密度 $\vec{j} = \frac{dI}{dS} \hat{n}$ 。

4、电流与电流密度的关系：对于曲面 S ，其上的总电流 $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ 。

5、 \vec{j} 的微观表达式： $\vec{j} = nq\vec{v}$ 。其中 n 为载流子数密度， q 为一个载流子的电荷量， \vec{v} 为载流子定向运动的速度。

6、电流连续性方程： $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{内}}}{dt}$ 。

(1) 含义：电流穿进与穿出的净效应是使得曲面内部净电荷量发生变化。

(2) 微分形式： $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 。

(3) 稳恒电流的充要条件：电流的经过不改变导体内任意一点的电荷密度，不会有净电荷的积累或流失，即任给闭合曲面， $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ ，或 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ ， $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。直观体现为电流线的连续性。

二、电阻

1、欧姆定律：对于纯电阻电路， $U = IR$ 。 R 称为电阻，单位为欧姆（ Ω ）；电阻的倒数 $G = \frac{1}{R}$ 称为电导，单位为西门子（S）。

2、焦耳定律：电阻热功率 $P = I^2 R$ 。满足欧姆定律的材料中， $P = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R}$ 。

（焦耳热与电阻的实质：电子与原子实碰撞，产生能量耗散）

3、非纯电阻电路：电能除了转化成内能，还转化成其他形式的能量，如电动机（电能→内能+机械能）。内能功率为 $I^2 R$ ，总功率为 UI ，其他功率为 $UI - I^2 R$ ，也即对于任意电路，有 $U \geq IR$ ；在纯电阻电路中等号成立。

4、欧姆定律微分形式： $\vec{j} = nq\vec{v} = nq\vec{a}\tau = nq\frac{q\vec{E}}{m}\tau = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \equiv \sigma\vec{E}$ 。

(1) 基本假设：电子像气体一样热运动（电子气），从而也具有平均自由程（电子平均两次与原子实碰撞之间运动的路程）；电子与原子实发生碰撞后，完全失去定向运动速度，只剩下热运动速度，定向运动速度在电场作用下重新增大；导体各向同性，热运动对电流没有贡献。

(2) 电导率: $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$, 其中 τ 是电子经历一次平均自由程所经过的时间。电导率的单位为 S/m。

(3) 电阻率: $\rho = \frac{1}{\sigma}$ 。

电阻定律: 对于长 L , 横截面积 S 的电阻, $R = \rho \frac{L}{S} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{EL}{jS}$ 。

注: ①电阻的大小与接入电路的方向有关, L 是沿着接线方向的长度, S 是导线正对的横截面的面积。

②对于体积恒为 V 的长方体电阻, $R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{V}{S^2} = \rho \frac{L^2}{V}$ 。此时可以认为电阻只和长度或只和横截面积有关, 粗电阻小, 长电阻大。

5、欧姆材料: $I-U$ 图线 (伏安特性曲线) 为直线, 电阻为恒定值。(注: 伏安特性曲线中 I 是纵坐标, U 是横坐标, 切线斜率是电阻的倒数。)

三、电动势

1、产生稳恒电流的条件: 存在稳恒电势差; 存在非静电力克服电场力做功 (否则导体达到静电平衡后就没有电荷定向运动); 存在闭合回路; 导体有一定电阻 (防止电荷被加速至无穷大)。

2、非静电场强度 \vec{K} : 单位正电荷所受的非静电力。

*特点: 有旋 ($\oint \vec{K} \cdot d\vec{l} \neq 0$), 不存在绝对的电势的概念 (只有在一圈之内谈电势升降才有意义); 方向与静电场 \vec{E} 方向相反。

*电动势的定义: $\mathcal{E} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$ 。大部分电源在电源外没有非静电场, 在这一条件下有 $\mathcal{E} = \int_-^+ \vec{K} \cdot d\vec{l}$, 其中 $-$ 、 $+$ 分别表示负极、正极。

3、温差电动势 (汤姆孙效应): 两根不同材质的导体首尾相接, 且两接口处温度不同, 则回路中会有电动势 (电子热运动受到干扰, 开始对电流有贡献); 单根金属棒两端有温差时, 也会产生电动势。

*温差电动势计算式: $\mathcal{E} = \int_{T_1}^{T_2} \sigma(T) dT$, 其中 T 为温度, $\sigma(T)$ 为汤姆孙系数, 在各点处有所不同, 是该点温度的函数。在温差 ΔT 不大的情况下, 近似有 $\mathcal{E} \propto \Delta T$ 。

4、接触电动势 (佩尔捷效应): 两不同材质的导体在相接处会发生电子的扩散, 从而产生电动势。

四、直流电路分析

1、基本假设: 忽略导线电阻; 认为电动势只存在于电源内部。

2、节点: 电路中不少于三条导线的汇合点。

支路：两节点之间的纯串联通路。

回路：起终点位于同一点的环路，可以是多个环路的叠加。

3、基尔霍夫定律

(1) 节点定律：任一节点处的电流代数和为 0。 $\sum_i \pm I_i = 0$ 。

(2) 回路定律：电路中任意闭合回路的电势变化总和为 0。 $\sum \pm \mathcal{E} \pm IR \pm Ir = 0$ 。

4、直流电路分析的基本思路

(1) 最根本的方法是用基尔霍夫定律列方程。一般地，对于 m 个节点、 n 个网眼（中间没有导线分割的回路）的电路，可以用基尔霍夫定律列出 $(m-1)$ 个独立的节点方程、 n 个独立的回路方程，共 $(m+n-1)$ 个独立方程。

(2) 列方程之前，要确定电流方向。复杂电路中的电流方向难以直接判断，可以任意假设。方程中的电流的正负号要与假定的方向一致；如果解出的电流小于 0，说明真实的电流方向与假定方向相反（不代表做错了），大小等于其绝对值。

(3) 回路取顺时针与逆时针，方程中每一项都会差一个符号。二者在数学上等价，但物理意义不同，写电势变化时必须始终沿着其中一个方向，不能改变标准。

(4) 符号法则：电路问题中最易犯错的环节。不同人的符号法则可以有所不同，但处理问题时应当坚守一套法则不动摇，否则会出现混乱。以下是最常见的一种法则：电势下降取-，上升取+。

① 电动势——负极到正极为 $+\mathcal{E}$ ，反之为 $-\mathcal{E}$ ；

② 电阻——沿电流方向为 $-IR$ ，反之为 $+IR$ （即使电流方向是假定的也如此），注意电源可能有内阻；

③ * 电容器——沿电流方向为 $-U = -\frac{Q}{C}$ ，反之为 $+U$ 。（对于充电的电容器显然

如此；对于放电的电容器，如果其上所剩余的电量为 Q ，则放电电流 $I = -\frac{dQ}{dt}$ 。

此时要注意 I 是已经放出的电荷量随时间的变化率，不是剩余的电荷量随时间的变化率。因此，电流经过电容器时，沿电流方向电势依然下降。

(5) 戴维宁定理：对于含电源的二端网络（也即有两个端点的部分电路），可以将其看成一个等效的电压源，其电动势等于二端网络开路时两个“端”之间的电势差，内阻等于去掉网络内所有电动势（内部各个电源的内阻不能去掉）时两端的总电阻。在求二端网络端处的电流、电压时，这一做法可以避免分析得过分细致，省去一些不必要的方程。

第四章 电介质

一、绝缘体的特点与极化方式

1、绝缘体是理想电介质，内部的电荷全部为束缚电荷，不能在介质内部随处移动。

2、位移极化：原则上存在于任何电介质中（极性/非极性分子）。分子的正负电荷中心在外界电场作用下被拉开一定的距离。极性分子的电偶极矩变大，非极性分子开始产生电偶极矩。

3、取向极化：存在于极性分子。分子中的电偶极子受到外电场的力矩，趋于与电场同向的状态（能量达极小值，最稳定）。

4、位移极化产生的电偶极矩： $P' = \sum_i \alpha_i E^i$ 。这是对电场强度的泰勒展开，在电场不太大的情况下可以保留线性部分并带上方向： $\vec{P}' = \alpha \vec{E}$ 。

5、极性分子两种极化共同作用：末态电偶极矩 $\vec{P} = \vec{P}_0 + \alpha \vec{E}$ 。当电场不太大时，可以忽略位移极化 $\alpha \vec{E}$ ，即只考虑电偶极子的偏转。

6、极化电荷：电介质发生极化时，内部的电偶极子首尾相接，电场抵消；介质边缘的电偶极子无法被抵消，因此宏观上体现为表面有净电荷。这些电荷为极化电荷。

二、极化电效应

1、极化强度：是极化后的电偶极矩体密度，有方向， $\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_V d\vec{p}$ 。可以用

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} dV \text{ 计算系统 } V \text{ 内极化电荷的远场电势。}$$

2、三个基本的电场强度：原先电场（自由电荷产生） \vec{E}_f ，极化产生的电场 \vec{E}_p ，总电场 \vec{E} 。（下面全都使用这些符号，可能与一些教材不一致）

3、极化强度与原始电场 \vec{E}_f 的关系难以表述，但是在理想模型下，极化强度必与总电场 \vec{E} 成正比： $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ 。 χ 是极化率，对各向同性的介质而言是常数。

注：①极化强度是电偶极矩的体密度，而不是单个电偶极子，所以二者与 \vec{E}_f 等的关系不一样，切勿混淆；

②在介质外，相当于介质变成了真空，所以极化强度一定等于0。

4、极化强度与极化电荷的关系（高斯定理）： $\oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum q_{p\text{内}}, \nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p$ 。

其中带下标 p 的均为极化量。

5、 $\rho_p = 0$ 的条件：电介质均匀（各向同性），并且内部没有自由电荷。在这种情况下，认为体内的电偶极子全部是首尾相接的，因此只考虑极化电荷的面分布。

在这种情况下可以认为 $\oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0$ 。

6、极化强度的环路定理：介质内， $\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \chi \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 。但是，当选取的环路有一部分在介质内，另一部分在介质外时，极化强度矢量不连续分布，环路积分未必为0。当环路与介质交于A、B两点时，若曲线沿A走向B，则根据电势的定义，有 $\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \varepsilon_0 \chi \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \chi U_{AB}$ 。此时 \vec{E} 在全空间有分布，但 \vec{P} 只在介质内部才有，因此 \vec{P} 的闭合曲线积分等于 \vec{E} 在介质内的一段不闭合曲线积分。

三、电位移及其性质

1、电位移： $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 。在介质内部， $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ，其中 $\varepsilon_r = 1 + \chi$ 为相对介电常数。再定义： $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 为介质的绝对介电常数。

2、介质中高斯定理： $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \sum q_{\text{内}} - \sum q_p = \sum q_f$ 。其中 $q_{\text{内}}, q_p, q_f$ 分别表示曲面内的总电荷量、极化电荷量和自由电荷量。

注：电位移没有一个非常明确的物理意义，只是为了代数变形而设计。这个量的通量不需要考虑极化电荷，因此求解场强与极化电荷分布常常先从电位移入手。

3、极化电荷面密度：在一种介质与真空的交界处， $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ，其中 \hat{n} 取外法向，也即极化电荷面密度是极化强度在外法向的投影；如果是两种介质的交界处，取 \hat{n} 为从介质1指向介质2的单位法向量，则 $\sigma_p = P_{1n} - P_{2n}$ 。

4、在介质内部， $\oiint (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_f) \cdot d\vec{S} = \sum q_f - \varepsilon_0 \sum \frac{q_f}{\varepsilon_0} = 0$ ，但这与 $\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_f = 0$ 不等

价。 $\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_f = 0$ 的条件是：电介质是各向同性的、电介质不改变原自由电荷分布的对称性（如电介质充满整个空间）。如果原本均匀的自由电荷在极化电荷产生后变得不均匀，那么 $\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_f = 0$ 不成立。如果 $\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_f = 0$ 成立，有以下关系：

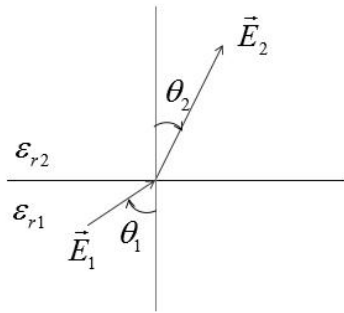
$$\vec{E}_f = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_f = (1 - \varepsilon_r) \vec{E} = -\chi \vec{E} = -\frac{\chi}{\varepsilon_r} \vec{E}_f. \quad \text{此时 } \vec{E}_f, \vec{E}_p, \vec{E} \text{ 是平行的, 并且 } \vec{E}_p \text{ 显然与 } \vec{E}_f \text{ 反向, 阻碍了 } \vec{E}_f \text{ 的效果, } \vec{E} \text{ 相比 } \vec{E}_f \text{ 减弱但方向相同.}$$

5、界面连续性：在一般情况下， $\vec{E}_f, \vec{E}_p, \vec{E}$ 不一定平行，但是 $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ 在各向同性的介质中始终平行。由于界面处 \vec{P} 不连续，因此 \vec{E}, \vec{D} 也将不连续。

(1) 界面无自由电荷： $D_{1n} = D_{2n}, \varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_{r2} E_{2n}; E_{1t} = E_{2t}, \frac{D_{1t}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{r2}}$ 。电位移法向连续，切向不连续；总电场切向连续，法向不连续。（分别可以用介质高斯定理、静电场环路定理进行推导）

(2) 界面有自由电荷面分布： $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f, E_{1t} = E_{2t}$ 。电位移法向不连续，电场切向仍然连续。

(3) 连续与否的本质原因：电位移的通量与自由电荷有关，环量与极化强度有关；电场的通量与极化电荷有关，环量与任何电荷都无关。



(4) 界面无自由电荷时，写成折射定律：

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}。与光的折射定律正好相反，“疏”介质射向“密”介质，与法线夹角反而变大。$$

四、全空间充满均匀、各向同性电介质时的静电学规律（下标 0 代表真空中的值）

1、库仑定律： $\vec{F} = \frac{\vec{F}_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r}。$

2、场强、电势： $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}, \varphi = \frac{\varphi_0}{\epsilon_r}。$

3、电容： $C = \epsilon_r C_0。$ 对于平行板电容器， $C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d} = \frac{\epsilon S}{d}。$

4、平行板电容器的静电能： $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{(\sigma_f S)^2}{2 \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}} = \frac{(DS)^2}{2 \frac{DS}{Ed}} = \frac{1}{2} DESd。$ 这是因为极

板内部电位移显然为 0，外部电位移显然与极板垂直，所以根据界面连续性，自由电荷面密度就等于极板外的电位移 D 。

5、能量密度的一般形式： $u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}。$ 相比真空中的能量密度，多了一项 $\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$ ，这是形成极化电场所储存的能量。

五、电介质的常见问题及其处理方式

1、求电场强度、极化强度：如果自由电荷的分布比较明朗，可以先求电位移，然后使用电位移、电场强度、极化强度的数量关系推广到这些量。

2、定性判断依然非常重要。在使用公式之前要尽可能明确自由电荷、极化电荷的分布及其对称性；在极化现象已经产生之后，尽量定性判断出所有地方电场强度的方向（包括介质外、介质内，尤其注意电场线、电位移线在界面处可能发生的折射）。对于均匀的电场与均匀、规则的电介质，其极化电荷分布应该也是均匀的。

3、求电荷密度：使用与高斯定理和界面电荷分布有关的几个结论：

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_f, \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_f + \sum q_p}{\epsilon_0}, \oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum q_p;$$

$$\sigma_p = P_{1n} - P_{2n}, \sigma_f = D_{1n} - D_{2n}.$$

4、求电容：内部充满电介质的电容器直接利用 $C = \epsilon_r C_0$ 来解决；如果没有充满电介质，可以看成无电介质部分与有电介质部分串并联；对于充有不同种类电介质的情况，也是类似的方法。（注意：电介质部分存在于电容器中时，由于极板是等势体，所以有电介质与无电介质的部分的自由电荷面密度是不一样的，需要根据电势相等与电量守恒来分析）

5、求畸变电场力：电介质从平行板电容器中被抽离时，由于电荷分布、电场分布发生变化，电介质会受到指向电容器内部（可以定性证明）的静电力。

（1）在没有特殊说明的情况下，认为这个过程是准静态的，即电介质的运动很缓慢，其动能可以忽略不计。

（2）如果要求出这个力，可以根据能量守恒：静电力做的功等于电容器储存能量的变化量。由于这个力可能不是恒力，所以需要使用微元分析。例如，当电容器电荷量 q 不变时，如果要求电介质被拉出 x 时的静电力 F ，则在该处有能量关系

$$Fdx = dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}dC, \text{ 故 } F = -\frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx}. C \text{ 需要用 } x \text{ 的函数表示。}$$

如果有电源连接（电压一定），则会有充放电，能量关系另当别论。

第五章 静磁学

一、在经典理论前的磁学研究

1、常见磁现象：磁石吸铁，指南针，地磁场与磁偏角，磁极……

（注：地磁南极是地理北极，地磁北极是地理南极。磁偏角是指地磁的南北极与地理南北极有一定夹角。）

2、磁荷理论：用点电荷的库仑定律类比磁场分布。磁场强度 $\vec{H} = k_m \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$ 。其中， q_m 是磁荷量。

*磁荷理论的问题：目前没有发现磁单极子（磁感线全部在磁单极子处发出或终止），任何磁体一定同时具有南北极；同时，解释不了为什么电流也会产生磁场（奥斯特实验）。

二、安培定律与毕奥—萨伐尔定律

1、电流元：通有电流的一小段导线 $I d\vec{l}$ ，其方向为电流的指向。注意电流元是不能单独存在的，任何电流必须要有回路才能产生，因此电流元的一些性质可能

会导致佯谬（详见下一条）。

2、安培定律：电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 受到 $I_1 d\vec{l}_1$ 的作用力为 $d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{21})}{r_{21}^2}$ 。其

中， \hat{r}_{21} 是 $I_1 d\vec{l}_1$ 指向 $I_2 d\vec{l}_2$ 的单位矢量。

(1) 回路 S_2 受到回路 S_1 的作用力，需要在回路上做两次曲线积分，即磁感应强度叠加原理： $\vec{F}_{21} = \oint_{S_2} \oint_{S_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{21})}{r_{21}^2}$ 。（计算很麻烦，一般很少使用）

(2) 两个电流元之间的作用力不满足牛顿第三定律，例如当 $I_2 d\vec{l}_2 \perp I_1 d\vec{l}_1 // \hat{r}_{21}$ 时。但是，因为电流元现实中不会单独存在，所以用这个模型否定牛顿力学没有意义；两个闭合回路之间的作用力还是满足牛顿第三定律的。

(3) 由安培定律可得——两根平行的无限长通电直导线，距离为 d ，则其中一根上长为 L 的一段受到另一根（全部）的作用力为

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_0^L I_2 d\vec{l}_2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} \right| &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_0^L I_2 dl_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_1 dl_1}{l_1^2 + d^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{l_1^2 + d^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_2 L \cdot I_1 d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(l_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} dl_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_2 L \cdot I_1 d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{d^3 \sec^3 \theta} d \sec^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \end{aligned}$$

根据叉乘方向的判断，电流同向时两导线相互吸引，反向时两导线互相排斥。

3、毕奥—萨伐尔定律（B-S 定律）：电流元 $I d\vec{l}$ 产生的磁场 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ 。

4、磁感应强度 B ：根据上述式子定义。其大小相当于单位长度的通有单位大小电流的导线所受的磁力大小。（与磁场强度不一样；磁场强度的准确定义将在第七章给出。）

5、常见磁场分布（请自行熟悉一下推导）

(1) 无限长通电直导线（ I ）：距离导线 r 处， $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。方向沿切向，磁感线呈同心圆状。（右手法则）

(2) 有限长通电直导线（ L, I ）：虽然实际上不存在一根单独的有限长通电直导线，但是可以只研究这一段的磁场。在中轴线上距离导线 r 处，磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{L}{\sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

$L \rightarrow \infty$ 时，趋向于无限长通电直导线的磁场。

(3) 环形电流的磁场（ R, I ）：在中轴线上距离圆心 z 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿中轴线。（注：环形电流是一种磁偶极子，后面将详细讨论）

（4）无限长、有限宽均匀通电平板（宽度 a ，电流 I ）：在中轴线上高度为 z 处， $B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctan \frac{a}{2z}$ 。方向是横向的，也可以用右手定则判断，如垂直纸面向里的电流，平板上方磁场向右，下方磁场向左。

*记单位宽度上的电流为 i ，则 $i = \frac{I}{a}$ ， $B = \frac{\mu_0 i}{\pi} \arctan \frac{a}{2z}$ 。

（5）无限大通电平板（ i ）：长度与宽度均是无限大。在上式中取 $a \rightarrow \infty$ ，则磁场是均匀的， $B = \frac{\mu_0 i}{2}$ 。

（6）无限长直密绕通电螺线管（单位长度的匝数 n ，电流 I ）：管外没有磁场；管内的磁场是均匀的， $B = \mu_0 nI$ 。方向用右手螺旋定则判断。

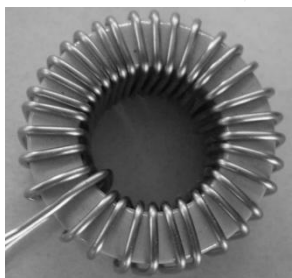
（7）有限长螺线管（管长 L ，管径 R ，单位长度的匝数 n ，电流 I ）：在管内中

轴线上，离正中心 d 处，
$$B = \frac{\mu_0 nI}{2} \left[\frac{\frac{L}{2} + d}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + d\right)^2}} + \frac{\frac{L}{2} - d}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - d\right)^2}} \right]。$$

*半无限长螺线管在端口处的磁感应强度： $\frac{1}{2} \mu_0 nI$ 。

*有限长螺线管在中心处的磁感应强度，在 $L \gg R$ 时趋于 $\mu_0 nI$ ，而且在这附近变化很小，因此常用螺线管产生均匀磁场。（另一种产生均匀磁场的方法：亥姆霍兹线圈——两个半径相同、电流等值同向，平行排列，间距等于半径的环形电流）

*条形磁铁的磁场类似于有限长螺线管。（分子电流与实际电流的统一）



（8）螺线环：示意图如左图。在管内半径为 r 处，磁场

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}。$$

管外没有磁场。另外，当管的内径与外径差别不大时，可以认为管内磁场均匀，并写为 $B = \mu_0 nI$ 。

（9）半径为 R 、圆心角为 θ 的圆弧形电流在圆心处的磁

$$场 B = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}。$$

6、积分法求解磁场分布的一般思路：①先定性判断，目前的磁场习题大多数沿切线方向并且对称性很高（明确方向后各个微元投影到这个方向即可）；②取电流元做分析，千万注意 B-S 定律中叉乘的方向判断；③善于利用已有结论，例如

无限长带电平板的磁场就可分解成一根根导线的叠加，不必再从电流元算起。

三、磁场的基本属性

1、磁场高斯定理： $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 。

微分形式： $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 。（磁场是无源场，磁感线是闭合的，没有源头或终止）

2、磁场安培环路定理： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum I_c = \mu_0 \iint \vec{j}_c \cdot d\vec{S}$ 。

（1）微分形式： $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c$ 。（磁场是有旋场）

*磁场的基本属性：有旋、无源。

（2）注意事项

① I_c 指传导电流，适用于真空、恒定磁场；在变化的电磁场中，还有位移电流；在磁介质中，还有磁化电流。

② I_c 也有正负：根据线积分方向用右手法则判定环路包围的曲面方向；与这个方向一致的电流取正，否则取负。

③ 同一根导线如果穿越曲面多次，则在 $\sum I_c$ 中这个电流也要算多次，并带上相应的正负号。

④ 与电场的高斯定理类似，磁场的环路定理中，参与线积分的是空间内的总磁场（不论产生该磁场的电流是否穿越环路），而 $\sum I_c$ 必须是穿过环路的电流。

⑤ 安培环路定理不是安培定律，注意二者分别对应哪个式子。

（3）使用方法：定性判断（大多数磁场沿切向）→选取环路（尽量使得环路上磁场大小相等并均沿环路切向，便于积分）→使用安培环路定理。

（注：磁场问题的求解方法相比电场不那么多，主要是 B-S 定律与安培环路定理，因为磁场有旋，不存在势函数。只要对以上两种方法熟练掌握即可，首选安培环路定理。）

四、磁偶极子

1、定义：任何一个通电的小线圈都是磁偶极子。在实际应用中，分子中绕核运转的电子可以等效为一个磁偶极子，是研究磁性的重要模型。

2、磁偶极矩（磁矩）：对于平面中的磁偶极子，若其电流为 I ，包围面积为 S ，则磁矩 $\vec{m} = I\vec{S}$ 。 S 矢量的方向根据电流方向用右手法则确定。（磁偶极矩与面积有关，但是与回路的形状无关）

3、磁偶极矩的磁场：在远场近似的情况下，可以完全类比电偶极子的电场。

（1）轴线上 z 处：将环形电流轴线上的磁场做远场近似，有 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{z^3}$ 。（非环形的电流也是这个式子，与形状无关）

(2) 线圈平面内离线圈 x 处: $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{x^3}$

(3) 空间内任意一点 (r, θ) 处: 与电偶极子类似, 将磁偶极子分解到径向与切向, 有 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}_{\parallel}}{r^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_{\perp}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}_{\parallel} - \vec{m}_{\perp}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{m} - \vec{m}_{\perp}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3}$ 。同样, 有径向磁场分量 $B_{\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3}$, 切向磁场分量 $B_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}$ 。

4、磁偶极子在匀强磁场中的行为

(1) 一切磁偶极子在匀强磁场中受到的合力均为 0, 但是合力矩不一定为 0。合力矩 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ 。

(2) 与磁场的作用能 (暂不讨论这个能量的意义): $E = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ 。(磁偶极矩与磁场同向为稳定平衡位置)

五、安培力与洛伦兹力

1、根据安培定律与 B-S 定律可得电流元受的磁场力 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ 。整个回路所受的安培力为 $\oint I d\vec{l} \times \vec{B}$ 。

2、安培力的求解方式

(1) 通过积分的方式求解, 但是是矢量的积分, 需要考虑各个安培力微元的朝向。假如已经通过定性判断得到合力的方向, 积分时只需将安培力微元投影到这个方向积分即可。

(2) 根据前面对磁偶极子的讨论, 任意闭合线圈在匀强磁场中的受力为 0, 于是, 对于由 A 向 B 的任意形状的曲线电流 I , 它受到的合力就等于将端点 AB 直接相连的直导线所受的安培力 (直导线的电流也是从 A 流向 B)。记 $\overrightarrow{AB} = \vec{L}$, 则 $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$ 。

3、洛伦兹力: 安培力的微观机制就是电荷受到洛伦兹力挤压导线。

(1) 表达式: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 。

(2) 注意事项

① 根据表达式, q 的正负会影响洛伦兹力的方向, 因此判断受力方向时一定要先确定电荷的正负。

② 根据表达式, 洛伦兹力永远与速度垂直, 因此洛伦兹力 (整个力) 永不做功。但是, 如果将洛伦兹力正交分解, 那么两个分力可能都做功, 只是二者的功加在一起为 0。

4、带电粒子在电磁场中的运动 (大学物理中情形较为简单, 在此稍做总结)

(1) 粒子的受力: 不考虑重力, 则合外力 $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ 。

(2) 仅匀强磁场: 无初速度时, 静止; 有垂直磁场的初速度时, 做匀速圆周运

动。圆周运动的半径 $R = \frac{mv}{Bq}$ ，周期 $T = \frac{2\pi m}{Bq}$ 。（周期只与粒子本身性质有关，与其运动速率无关）

（3）仅匀强电场：无初速度时，做匀加速直线运动；有初速度时，根据加速度方向与速度方向是否一致，会做匀变速直线运动或匀变速曲线运动，轨迹为直线或抛物线。

（4）匀强电场与匀强磁场混合：如果电场力与洛伦兹力正好平衡，则运动轨迹为直线（混合场中只要是直线运动就一定是匀速的）；否则，运动轨迹为摆线（匀速直线运动与共面的匀速圆周运动叠加，也叫滚轮线、旋轮线）。

5、安培力与洛伦兹力的应用

（1）霍尔效应

①形成过程：将一个垂直于电流方向的磁场加在通电导线上，电荷会受到洛伦兹力而偏转至导线的侧面，形成与磁场方向平行的静电场；当后续经过此处的电荷受到的电场力与洛伦兹力平衡时，偏转停止，形成稳恒的横向电势差。

②注意：电流可能是正电荷运动形成，也可能是负电荷运动形成。当电流方向与磁场方向确定时，不论是什么电荷在运动，它们偏转的方向都一样。例如，向左的电流，垂直纸面向里的磁场，如果是正电荷，则其漂移速度朝左，洛伦兹力向下；如果是负电荷，则其漂移速度向右（这是由于电流方向的规定是正电荷移动方向），故这些负电荷所受的洛伦兹力还是向下。因此，载流子的类型会影响最终横向电势差的方向，可以用这一特点检验材料是 P 型还是 N 型（前者以带正电的空穴为载流子，后者以电子为载流子）。

③最终形成的电势差称为霍尔电压 U_H 。已知电流 I ，磁场 B ，元件在磁场方向上的厚度为 d ，横截面积为 bd ，载流子浓度 n ，载流子电量 q ，则平衡时有

$$U_H = Ed = vBd = \frac{I}{nqS} Bd = \frac{IB}{nqb}$$
。（霍尔电压与所加磁场方向有关，就好像长方体电阻的阻值与其接入的方向有关，因为不同接入方向对应不同的 b 。）

④一些常见的定义：霍尔电阻 $R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{nqb}$ ；霍尔系数 $k_H = \frac{1}{nq}$ （霍尔系数只与材料性质有关）。

⑤链接：霍尔元件测磁感应强度，反常霍尔效应，量子霍尔效应，量子反常霍尔效应……

（2）速度选择器：在空间加上正交的匀强电场与匀强磁场；只有满足 $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$ 的粒子可以不发生偏转，否则会被电磁作用力拉离原路线。因此，这个速度满足的条件： $v = \frac{E}{B}$ ，并且 \vec{v} ， \vec{E} ， \vec{B} 构成右手系。（不仅可以选择速度大小，也可以选择速度方向）

(3) 质谱仪

①直线型质谱仪：通过加速电压给粒子一个初速度，然后用速度选择器控制后续测量中粒子速度一定；随后用偏转电压使得粒子发生偏转，打在荧光屏的某个位置；根据这个位置以及相关的尺寸与电学量，可以算出粒子的荷质比。

②圆形质谱仪：用类似的方法加速、选择速度；随后，用匀强磁场使得粒子匀速率偏转一个半圆打到荧光屏上，根据偏转半径计算荷质比（甚至可以分离粒子）。

(4) 回旋加速器：用磁场使粒子偏转，节省空间，不必建造上千米的直线型加速器。

①粒子在加速器中的行为：经过 D 形盒中的狭缝时被电场加速；进入 D 形盒内部时受洛伦兹力回转。

②实现稳定加速的条件：狭缝间必须是交变电场，且变化周期等于粒子圆周运动周期。

③粒子飞出半径为 R 的 D 形盒时，其末动能 $E_{\text{km}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{BqR}{m}\right)^2 = \frac{(BqR)^2}{2m}$ 。

此动能与加速电压 U 无关， U 只会影响加速的次数。因为根据动能定理，假设

加速的次数为 N ，则 $NqU = E_{\text{km}} = \frac{(BqR)^2}{2m}$ ，故 $N = \frac{qB^2R^2}{2mU}$ 。

(5) 磁聚焦与磁约束

①当粒子速度与磁场不垂直也不平行时，垂直磁场的速度分量将被偏转，最终粒子做螺旋运动。当一系列粒子从一点处以小角度散射时，加一个沿速度方向的磁场可以使得这些粒子在运动了一个螺距之后再次会合，此为磁聚焦。

②当磁感线包围的形状类似于细口瓶时，对于沿中轴线运动的粒子，其沿轴线方向的速度将减小，另一正交分速度将偏转，于是粒子做螺距减小的螺旋运动，直至螺距为 0，无法向前运动，发生反射；可以通过此方法把粒子约束在一个瓶状磁场内（磁瓶），此为磁约束。（自然现象——极光：地磁场本是一个大的磁瓶，称为范阿仑辐射带。）

第六章 电磁感应

一、电磁感应的基本规律

1、磁通量：电磁感应中，研究对非闭合曲面的磁通量： $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 。对于 N 匝线圈，若其每一匝中都有磁通量，记这些磁通量的总和为磁通匝链数 Ψ 。如果各匝中磁通量平均值为 $\bar{\Phi}$ ，则 $\Psi = N\bar{\Phi}$ 。

2、电磁感应基本定律：感应电动势 $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$ 。

(1) 法拉第的贡献：明确电动势的大小等于磁通匝连数变化率。

(2) 楞次的贡献：确定表达式中的负号，即感应电动势产生的磁通量总是阻碍原磁通量的变化。

(3) 对负号代数意义的解释：定义一个磁通量的正方向（不是说磁通量是矢量，只是从不同侧穿入的磁通量应当有符号上的差别），则正的磁通量绝对值增大与负的磁通量绝对值减小都属于 $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ 。此时，感应电动势产生的磁通量是负的；

$\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，情况类似。反过来说，感应电动势在回路中的方向和根据 $\frac{d\Phi}{dt}$ 正负号用右手法则确定的回路方向是相反的。

3、发生电磁感应的条件

{	磁场变化（感生电动势）	{	面积大小变
	面积变化（动生电动势）		面积取向变（转动）
			面积位置变（平动）

二、动生电动势

1、动生电动势的连锁反应：线圈切割磁感线运动→产生感应电动势→一旦线圈闭合，则产生感应电流→感应电流产生安培力→运动受到阻碍。

2、单根导体棒在匀强磁场中平动：如果导体棒 l 、平动速度 v 、磁感应强度 B 两两垂直，则感应电动势 $\mathcal{E} = Blv$ ，指向与 $\vec{v} \times \vec{B}$ 一致（同样，这不是说电动势是矢量，而是电动势的负极就是 $\vec{v} \times \vec{B}$ 矢量的起点，正极就是 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的终点）。此时，如果导体棒接在矩形回路上，电阻为 R ，质量为 m ，则安培力

$$F = -BIL = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \propto v, \text{ 类似于力学中的湿摩擦模型——在不考虑其他外力的情况下, 导体棒的速度与位移成线性关系, 二者又与时间成指数关系 (微分方程}$$

$-\frac{B^2 l^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$)。

3、交流电动势：载流线圈在匀强磁场中匀速转动，磁矩与磁场夹角 θ 随时间均匀变化，电动势 $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt}(BS \cos \theta) = -N(-BS \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$ 。其中

S 为线圈面积， ω 为角速度。已知磁通量随时间变化图像，求导就是电动势随时间变化图像；反过来则是积分。最大电动势与最大磁通量的关系：

$\mathcal{E}_m = N\Phi_m \omega = \Psi_m \omega$ 。（与线圈形状和转轴位置无关）

4、圆周运动的导体棒：设匀强磁场中的导体棒在一个垂直磁场的平面内绕着垂直该面的转轴匀速转动，其两个端到转轴的距离分别是 r_1 与 r_2 （假设两端点在转轴同侧且 $r_1 \geq r_2$ ），则电动势 $\mathcal{E} = \int_{r_1}^{r_2} Bv dl = \int_{r_1}^{r_2} B\omega l dl = \frac{1}{2} B\omega(r_2^2 - r_1^2)$ 。当两个端

点在转轴异侧时，表达式的形式一样。

5、动生电动势的物理实质：导体棒运动导致棒中电荷相对磁场运动，电荷受到洛伦兹力（非静电力）而被加速。这不是说整个洛伦兹力在做功，而是洛伦兹力的两个分力分别做功有相互抵消。一个分力由棒的运动产生，沿着棒的方向，使电荷加速；另一个分力由电荷相对棒的运动产生，垂直于棒，给电荷做负功，挤压导体棒，产生安培力。（能量关系：安培力做功使得电荷动能转化成电路中的焦耳热）

6、动生电动势的计算：对于任意导体以任意速度在任意磁场中的运动（不要求 l 、 v 、 B 两两垂直），电动势 $\mathcal{E} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 。计算时需要确定电动势的方向；如果电动势不存在于整个回路，则可以确定正负极， $\mathcal{E} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 。

三、感生电动势

1、若匀强磁场随时间变化，并且垂直穿过回路 S ，则当 S 状态不变时，有

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{\partial B}{\partial t}$$

2、感生电动势的物理实质：变化的磁场激发出涡旋电场 \vec{E}_K （非静电场），这个电场使电荷加速，产生电动势。

3、涡旋电场的特征：有旋无源，不存在电势的概念（但是可以把电动势给电荷做的功等效为电势升降）。

4、根据感生电动势的定义，对于一匝的回路， $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 写成微

分形式： $\nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 。

（1）确定 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 的方向后，用左手法则可以得到涡旋电场的方向。

（2）但从直觉上看，感生电场应该没有源头或终止，而是类似于磁场那样一圈圈的场线，也就认为没有散度。在电动力学中会证明，对于稳恒电流的情况，确实有 $\nabla \cdot \vec{E}_K = 0$ ；如果是非稳恒电路，则无法确定，需要另行考查与规定。

5、加入涡旋电场后，总电场有旋有源：

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_K \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_{\text{静}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_K = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

从而改写了欧姆定律： $\vec{j} = \vec{j}_{\text{静}} + \vec{j}_K = \sigma(\vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_K)$ 。

电磁感应贡献的总电动势是动生电动势加感生电动势：

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

6、典型涡旋电场分布（用 $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 求解）

$$(1) \text{ 半径为 } R \text{ 的圆形匀强磁场区域: } E_k = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} r, & r \leq R \\ \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{R^2}{r}, & r > R \end{cases}$$

$$(2) \text{ 无限长、宽为 } d \text{ 的条形匀强磁场区域: 离中轴线 } x \text{ 处, } E_k = \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} x, & x \leq \frac{d}{2} \\ \frac{\partial B}{\partial t} \frac{d}{2}, & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

7、涡旋电场的应用：电磁阻尼，电磁炉，电感，发电机，电磁感应加速器，电磁炮，电磁冶炼……

四、电感

1、自感：回路对自身电流变化产生感生电动势的现象。

2、自感系数的定义： $L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}$ 。

自感电动势： $\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$ 。（负号在列电路微分方程时相当重要）

3、自感系数的求解方式： $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{I} \iint \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right) \cdot d\vec{S}$ 。

（能够直接写出磁通匝链数的就不必积分）

(1) 螺线管（长 l ，横截面积 S ，体积 V ，匝数 N ）的自感系数：

$$L = \frac{NBS}{I} = \frac{N\mu_0 nIS}{I} = \mu_0 nNS = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 Sl = \mu_0 n^2 V$$

(2) 半圆形螺线环（横截面为矩形，内径 a ，外径 b ，厚度 h ，匝数 N ）的自感系数：

$$L = \frac{N \iint \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dS}{I} = N \int_a^b \frac{\mu_0 N}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

4、自感系数的意义：体现回路保持电流状态不变的“惯性”。

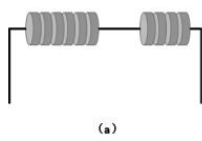
5、互感：两个线圈相应彼此电流变化的现象。

6、互感系数：线圈 2 响应 1 电流变化的互感 $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ 。其中 Φ_{21} 是 1 在 2 中产生的磁通量。可以证明 $M_{21} = M_{12}$ 。 Φ_{21} 变化时，2 产生互感电动势 $\mathcal{E} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$ 。

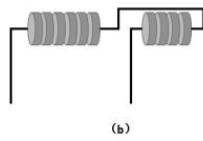
7、自感系数一定是正的，因为自感电动势一定会阻碍电流变化；但是，对于两个线圈的互感系数，则可正可负，因为两个线圈采用各自的磁通量符号法则，当它们相对位置不同时，1 对自己的磁通量与对 2 的磁通量可能符号相反。

8、耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ 。它体现了两个线圈相对位置对互感系数的影响。对于两个相同的线圈， $-1 \leq k \leq 1$ ；当两个线圈平行排列且通有同向电流时， $k = 1$ ，正向耦合；平行排列并通有反向电流时， $k = -1$ ，反向耦合；两个线圈垂直摆放时， $k = 0$ ，没有互感。

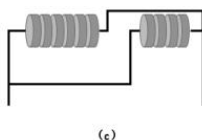
9、两个线圈的等效自感系数：由于互感对感应电流也有影响，故两个线圈总自感一般不等于二者自感相加。如图，顺串联（a）时， $L = L_1 + L_2 + 2M$ 。反串联



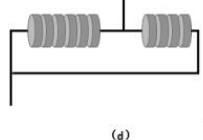
(a)



(b)



(c)



(d)

（b）时， $L = L_1 + L_2 - 2M$ 。顺并联

（c）时， $L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$ 。反并联

（d）时， $L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$ 。

（顺与反指两者电流同向与反向）

10、电路中的电感

（1）似稳电路：存在非平衡态但可以认为是稳恒电流的电路。要求变化不剧烈，电路尺寸小。例如含电感电路在刚接通的一段时间内的状态。

（2）电感上的电势升降（不考虑电感本身的直流电阻）：沿着电流方向，电势变化 $-L \frac{dI}{dt}$ ；逆着电流，则电势变化 $-\left(-L \frac{dI}{dt}\right)$ 。

11、电感的能量： $W = \int_0^I UI dt = \int_0^I LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2$ 。储存在电感的磁场中。

（1）能量密度：单位体积的能量 $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$ 。（可以通过能量密度的三重积分计算总能量）

（2）两个线圈的总磁场能： $W = \iiint \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$ 。

五、位移电流

1、提出的目的：解决安培环路定理在电流中断处（如电容器内）失效的问题——磁场不一定只由电流产生。

2、位移电流密度：电路中一点处的位移电流密度 $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 。

3、对安培环路定理的改写： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \left(\vec{j}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$ 。

微分形式： $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 。

4、意义：说明变化的电场也可以产生磁场；位移电流是这类磁场对应的等效电流。在电流不中断处，位移电流一般非常小，可以忽略，但是在中断处却几乎与传导电流一样大小。

第七章 磁介质

一、物质的磁性

- 1、磁性物质：对磁场有较强的响应，如铁、钴、镍等。被磁化后不会自动退磁。
- 2、非磁性物质：磁化现象不如磁性物质明显，并且一般撤去外场后就会退磁。磁化后可能增强磁场（顺磁，如铝、钠、液氧），也可能削弱磁场（抗磁，如汞、银、水）。
- 3、分子电流假说（安培）：一些不通电的物质本身就可以产生磁场，是因为内部的微观带电粒子的运转类似于电流。

(1) 分子中的环流：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{电子运动} \left\{ \begin{array}{l} \text{绕轨道} \\ \text{自旋} \end{array} \right. \\ \text{核子运动} \left\{ \begin{array}{l} \text{绕轨道} \\ \text{自旋} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

因此，分子本身就具有四种磁矩（两种绕轨道，两种自旋）。

(2) 电子的磁矩

①轨道磁矩： $\vec{m}_L = I \pi r^2 \hat{n} = -\frac{e}{T} \pi r^2 \hat{n} = -\frac{evr}{2} \hat{n} = -\frac{e}{2m} mvr \hat{n} = -\frac{e}{2m} \vec{L}$ 。其中， \vec{L} 是电子绕核运动的角动量。

*②量子力学中的电子轨道角动量：大小量子化， $L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi}$ 。（ $l = 0, 1, 2, \dots$ ）

方向量子化，在任意轴 z 上的投影都只能取一些不连续的值。

$$L_z = n_l \frac{h}{2\pi}, \quad n_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

轨道磁矩在磁场方向的投影 $m_{zl} = n_l \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi} \equiv n_l \mu_B$ 。 $\mu_B = \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi}$ 称为玻尔磁矩。

*③自旋角动量： $S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi}$ ， $s = \frac{1}{2}$ 。自旋角动量在磁场方向的投影

$$S_z = n_s \frac{h}{2\pi}, \quad n_s = \pm \frac{1}{2}$$

自旋磁矩在磁场方向的投影 $m_{zs} = n_s g_{es} \mu_B$ ， $g_{es} = 2$ 。

(3) 核子磁矩：与电子的磁矩有类似表达式，但比电子磁矩小得多。

(4) 从分子磁矩解释磁性：在不加外场的情况下，物质内部所有磁矩的矢量和称为固有磁矩。抗磁性物质没有固有磁矩；顺磁与磁性物质有固有磁矩。在有外场的情况下，磁偶极子受力而转动，从而排列更为有序，体现出磁性（磁化）。

二、非磁性物质的磁化

1、磁化强度：磁化后磁偶极矩的体密度。 $\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m}_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} d\vec{m}$ 。

在介质外，相当于介质变成了真空，所以外部的极化强度一定等于 0。

2、磁化电流 I' ：磁化后宏观产生的环形电流。宏观物体的磁化电流可以看成一个个小的分子电流的叠加。通常，各个环之间重叠的部分相互抵消，最终只在介质表面有电流分布。磁化后，存在三种磁场：原先的外磁场 \vec{B}_0 （包括传导电流与位移电流的贡献），磁化电流的磁场 \vec{B}' ，以及总的磁场 \vec{B} 。（本知识梳理统一使用这样的符号）

3、磁化强度与磁化电流的关系： $\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum I'$ 。

微分形式： $\nabla \times \vec{M} = \vec{j}'$ 。（积分形式等号右边的求和法则与安培环路定理一致；在均匀、内部无传导电流的介质中，磁化电流没有体分布，在介质内 $\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = 0$ ）

4、磁化电流面密度 \vec{i} ：在界面上，单位长度上的磁化电流强度。其方向是正电荷漂移方向。（注：电流的密度与其他量的密度定义不同，因为电流本身会占据一个自由度，所以电流体密度是单位面积的电流而不是单位体积，电流面密度是单位长度的电流而不是单位面积。）

5、磁化电流面密度的计算方式：在一种介质与真空的交界处， $\vec{i} = \vec{M} \times \hat{n}$ ，其中 \hat{n} 取外法向，也即计划电流面密度等于界面处磁化强度的切向分量；如果是两种介质的交界处，取 \hat{n} 为从介质 1 指向介质 2 的单位法向量，则 $\vec{i} = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \hat{n}$ 。

6、磁场强度： $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ 。和电位移类似，没有明确的物理意义，只是在线积分时可以不考虑磁化电流——介质中的安培环路定理：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum (I' + I_0) - \sum I' = \sum I_0$$

微分形式： $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 = \vec{j}_c + \vec{j}_d$ 。

与此同时，介质 1、2 界面处传导电流密度 $\vec{i}_0 = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \hat{n}$ 。

7、磁化强度、磁感应强度、磁场强度的进一步关系

(1) 磁化后，磁化强度与原磁场的关系难以表述，但是对于均匀、线性介质，磁化强度正比于磁场强度。（不是磁感应强度！） $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ ，其中 χ_m 为磁化率。

(方向:二者可能同向也可能反向,也即磁化率可正可负)

(2) 总磁感应强度: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ 。其中 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 为相对磁导率。

(3) 磁化电流无体分布的条件: 介质均匀, 各向同性(磁化率为常数或其梯度与磁场强度平行); 内部没有传导电流。

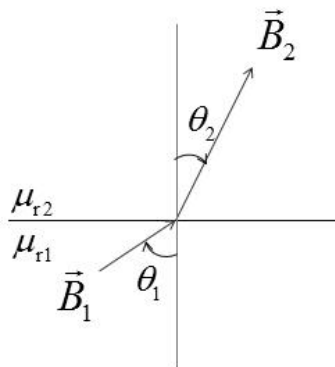
(4) $\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}$ 的条件: 介质是均匀、各向同性、线性的; 介质不改变原有传导电流的对称性。

8、界面连续性

(1) 界面无传导电流: $B_{1n} = B_{2n}$, $\mu_{r1}H_{1n} = \mu_{r2}H_{2n}$; $H_{1t} = H_{2t}$, $\frac{B_{1t}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{2t}}{\mu_{r2}}$ 。磁感应强度法向连续, 切向不连续; 磁场强度切向连续, 法向不连续。

(2) 界面有传导电流: $H_{1t} - H_{2t} = i_0$, $B_{1n} = B_{2n}$ 。磁场强度切向不连续, 磁感应强度法向仍连续。

(3) 连续与否的本质原因: 磁场强度的环量与传导电流有关; 磁场强度的环量与磁化电流有关; 磁感应强度的通量与任何电流都无关。



(4) 折射关系(左图不标准): 在界面无传导电流时, 有 $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$ 。

9、有磁介质时的磁场能量密度: $u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$ 。

三、磁性的机制

1、顺磁物质

(1) 宏观表现: 磁化率很小但是大于 0。加外场后, 可以略微增强磁场; 撤去外场后磁性消失。

(2) 微观机制: 有固有磁矩, 无外场时由于各向同性而宏观上不体现磁性; 加外场后, 各个磁矩有序排列, 并且与原磁场方向一致; 一旦撤去磁场或是加热, 则有利于分子不规则运动, 磁性消失。

(3) 磁化强度与外磁场、温度的关系: 在磁场不太大, 温度不太低时, 满足居里定律 $M = C \frac{B_0}{T}$ 。随着 $\frac{B_0}{T}$ 的增大, 磁化强度的增长越来越慢, 直至一饱和值。

(4) 绝热退磁制冷: 磁化过程会放热, 因为分子混乱度减小; 之后, 在绝热条件下, 熵不变, 但撤去磁场会使得熵增加, 所以温度必然下降以使熵恢复原先的

大小（制冷）。

2、抗磁物质

（1）宏观表现：磁化率绝对值小，并且是负数。加外场后，可以略微削弱磁场；撤去外场后磁性消失。

（2）微观机制：无固有磁矩，加外场后分子绕磁感线进动（角动量大小不变而方向变），产生一个与原磁场反向的附加磁矩，从而削弱原磁场。

（3）顺磁物质也会在磁场中进动，但是这个进动磁矩相比固有磁矩可忽略。

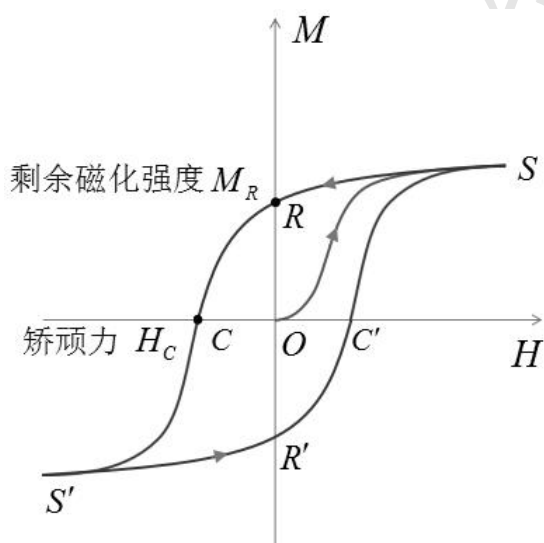
3、铁磁质（磁性物质）

（1）宏观表现：磁化率为正，并且可以上百。可以大大增强外场，而且撤去外场后磁性不消失，磁性与磁化历史有关。（加热、震动可以退磁）

（2）微观机制：铁磁体内部由磁畴构成，一个磁畴内的磁矩是整齐排列的，有固有磁矩（短程有序，长程无序）；加外场后，各个磁畴之间也趋向一致，相当于整个铁磁体变成一个大的磁畴，从而具有极强的磁性；撤去外场后，磁畴内部有粘连作用，使得整个铁磁体依然保持大磁畴的状态。

（3）初始磁化曲线：从无磁性开始的铁磁质磁化曲线（图中 OS ）。随着磁场强度增加，磁化强度不断增加，最终趋于饱和。

（4）撤去外场后的磁化曲线是磁滞回线：随着磁场强度减小，磁化强度只是慢慢减小，无外场时仍大于 0（还有剩余磁化强度）；再加反向磁场，磁化强度才可能达到 0（此时的磁场强度称为矫顽力）。随后，改变磁场强度，磁化强度与磁场强度的关系大致呈一条几乎封闭的曲线（ $SRCS'R'C'S$ ）。根据矫顽力与剩余磁化强度的大小，可以将铁磁体分为硬磁（ SR 几乎水平，磁性保持得好，矫顽力大，如永磁体）与软磁（ R 与 O 几乎重合，磁性可以很大，也易于退磁，如电磁铁）。



（5）链接：铁磁，反铁磁（磁畴中有

反向等值的磁矩），亚铁磁（磁畴中有反向不等值的磁矩）。

（6）注意：铁磁体的磁化率、相对磁导率都不是常数，而是外场的函数，因此不可使用非磁性物质的公式！

第八章 交流电

一、简谐交流电

1、交流电的概念：大小与方向均随时间变化的电流。

2、简谐交流电的基本形式：电动势 $e = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ ，电流 $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ 。

（电压与电流未必同相，与电路中的元件有关）

3、峰值：即下标有 m 的电动势、电流值，是各个物理量可以达到的最大值。

4、平均值：已知周期 T ，则电流平均值 $\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt = \frac{2}{\pi} I_m$ 。可以用这个平均值

计算一个周期内流过某一截面的电荷绝对值的总量： $Q = \int_0^T |i| dt = \bar{i} T$ 。（电动势平均值也是也是最大值的 $2/\pi$ 倍）

5、有效值：将简谐交流电在一个周期内的总耗能等效成一个恒定电流在相同时间内的耗能。根据数学上统计的原理，有效值为 $\sqrt{\frac{\bar{P}}{R}} = \sqrt{\bar{i^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ 。

它实际上就是电流的方均根值 i_{rms} 。（电动势有效值也是也是最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ）

6、根据以上的讨论，一般用平均值算电量，用有效值算电功。但是，对于少于半个周期内的情况，其电流平均值与有效值可能不是以上的结果，这种情况下不可以用以上的值做计算。

7、任意其他类型的交流电都可以根据 Fourier 展开，分解成一系列正弦交流电的加和。

8、理想电感、电容器不会产生耗散，只会改变电流的相位——如 LC 振荡电路，

有 $q = Cu = CU_m \cos(\omega t + \varphi)$ ， $i = \frac{dq}{dt} = -CU_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = CU_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ 。

电流比电压超前 $\frac{\pi}{2}$ 。另外，固有频率 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 。

二、阻尼振荡电路（ LCR ）

1、基本特征：有电阻耗散能量，并且没有外加电源输入能量；振荡逐渐减弱。

2、基本微分方程： $-i^2 R = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C} \right) = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} i$ ，即

$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$ 。令 $\frac{R}{L} = 2\delta$ ， $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ，则 $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$ 。

3、欠阻尼： $\omega_0 > \delta$ ，则 $q = q_m e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi)$ 。

4、过阻尼： $\omega_0 < \delta$ ，则 $q = q_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + q_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$ 。

5、临界阻尼： $\omega_0 = \delta$ ，则 $q = (A_1 t + A_2)e^{-\delta t}$ 。

*衰减速度： δ 很大时，过阻尼衰减最慢； δ 很小时，欠阻尼最慢；临界阻尼的衰减速度总是较大。

6、品质因数： $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$ 。它是电路总储能与一个周期内耗能比值的 2π 倍。

(1) 对欠阻尼电路， E 是初始时电路中的总能量， $E = \frac{q_m^2}{2C}$ ；一个周期内耗能是

初始能量减去一个周期后的总能量， $\Delta E = \frac{q_m^2}{2C} - \frac{(q_m e^{-\delta T})^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} (1 - e^{-2\delta T})$ 。品质

因数 $Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}$ 。当阻尼很小时，利用一阶近似， $Q \approx \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\delta} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$ 。

(2) 品质因数的意义之一：反映电路保持原有储能的能力。（损耗特性）

三、受迫振荡电路

1、基本构造：含理想电感、电容器、电阻，并且有外接正弦交流电源输入能量。

2、类比力学，外接电源相当于策动力： $e = E_m \cos \omega t$ 。最终，电路原有的能量被电阻消耗殆尽，整个电路的振荡频率由电源支配，就是 ω 。

3、令 $q_0 = E_m C$ 为最大静态充电电量，则有微分方程：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = q_0 \omega_0^2 \cos \omega t$$

从代数上说，为了使得等式左边正好等于一个频率为 ω 的振荡，电路的频率不能是其他值，这也是振荡频率必须是 ω 的一种解释。因此，最终的解应当是 $q = q'_m \cos(\omega t + \varphi')$ 。

4、矢量法：类比力学，由于一维简谐振荡与匀速圆周运动一一对应，故可以将微分方程中的每一项都看作一个圆周运动的矢径在 x 方向的投影。（如下图，摘自侯晓远老师 PPT；图中的 q'' ， q_m'' ， q_m ， ω'' ， φ'' 分别对应本知识梳理的 q ， q'_m ， q_0 ， ω 与 φ' ）

矢量分析方法 将 $q'' = q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'')$ 带入微分方程得

$$-\omega''^2 q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'') - 2\delta \omega'' q_m'' \sin(\omega'' t + \varphi'') + \omega_0^2 q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'') = \omega_0^2 q_m \cos \omega t$$

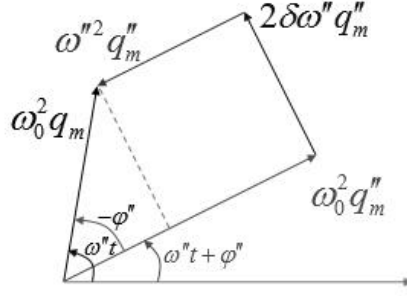
$$\omega''^2 q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'' + \pi) + 2\delta \omega'' q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'' + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 q_m'' \cos(\omega'' t + \varphi'') = \omega_0^2 q_m \cos \omega t$$

$$\overrightarrow{\omega''^2 q_m''} + \overrightarrow{2\delta \omega'' q_m''} + \overrightarrow{\omega_0^2 q_m''} = \overrightarrow{\omega_0^2 q_m}$$

由几何关系得：

$$(\omega_0^2 q_m'' - \omega''^2 q_m'')^2 + (2\delta\omega'' q_m'')^2 = (\omega_0^2 q_m'')^2$$

$$\operatorname{tg}(-\varphi'') = \frac{2\delta\omega'' q_m''}{\omega_0^2 q_m'' - \omega''^2 q_m''}$$



5、最终微分方程的解： $q_m' = \frac{q_0 \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$ ， $\varphi' = -\arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ 。

写成电路本身的参量： $q_m' = \frac{E_m}{\omega \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$ ， $\varphi' = -\arctan \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$ 。

一般，记感抗 $Z_L = \omega L$ ，容抗 $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ ，电抗 $Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ 。电抗的增大会导致振荡幅度减小，类似于电阻的作用。（电感通直流，阻交流；电容通交流，隔直流；对于交流电，电感通低频，阻高频；电容通高频，阻低频。因此，可以利用这些性质滤去一些不想要的信号。）

由于 $I_m = q_m' \omega$ ，故有交流电路欧姆定律 $I_m = \frac{E_m}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$ 。（要求电源无

内阻，电感无直流电阻；一旦电感有直流电阻，则这个电阻也要算进 R ）

6、受迫振荡的主要特点是振幅与频率有关（不完全由初始条件决定），这是因为频率的不同会影响一些分矢量的长度，进而影响合矢量的长度。

（1） $\omega \ll \omega_0$ ，声频支，最终振荡频率低。此时 $q_m' \rightarrow q_0$ ， $\varphi' \rightarrow 0$ ，电路的固有频率完全可以迅速适应电源电压的缓慢变化（几乎同相）。代数角度看，这是因为 $\frac{d^2 q}{dt^2} \rightarrow 0$ ，且 $2\delta \frac{dq}{dt} \rightarrow 0$ 。

（2） $\omega \gg \omega_0$ ，光频支，最终振荡频率高。此时 $q_m' \rightarrow 0$ ， $\varphi' \rightarrow -\pi$ ，电路难以适应电源电压的快速变化，因此振荡幅度也很小。代数角度看，这是因为 $\omega_0^2 q \rightarrow 0$ ，且 $2\delta \frac{dq}{dt} \rightarrow 0$ 。

（3） $\omega = \omega_0$ ，共振，此时振幅达到极大值，小阻尼时 $q_m' = q_0 \frac{\omega_0}{2\delta} \approx q_0 Q$ ，可见品质因数越大的电路越能把共振频率凸显出来，从而更好地筛选特定频率的信号。

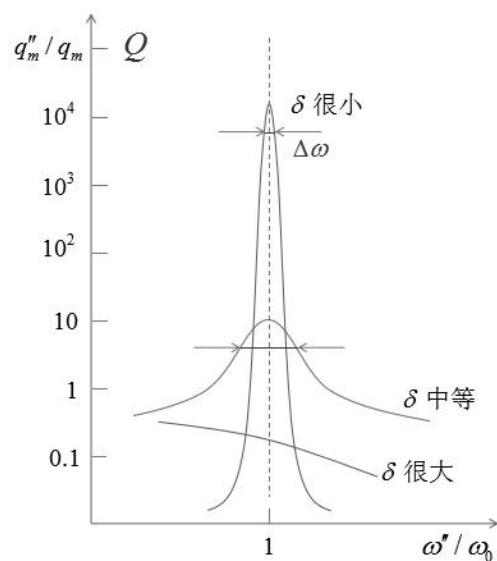
与此同时， $\varphi' = -\frac{\pi}{2}$ 。又由于 $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，故电抗 $Z = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ 。这个式子

的意义——电流与驱动同相，电感与电容在改变电流相位上的作用相互抵消，对振幅的影响也抵消。回路只体现电阻性，电源输入的能量正好完全被电阻消耗；电感与电容两端的总电势差恒为 0，二者总能量不变。

$$E = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{q_m'^2}{2C} = LI_{\text{rms}}^2 = CU_{\text{rms}}^2$$

其中， U 是电容两端的电压。代数角度看，正好有 $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2q = 0$ ，这就是耗散等于输入的体现。

(4) 谐振曲线：是振幅 q_m' 关于频率 ω 的函数图像。除了大阻尼时该图像无极大值点，其他时候这个图像都在 $\omega = \omega_0$ 附近（不是严格的等于，因为有近似）达到极大值。



取纵坐标为最大值 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两个点，设

其间距为 $\Delta\omega$ ，则品质因数有另一种表示形式：

$$Q = 2\pi \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

品质因数越大，谐振曲线形状越尖，越能将共振频率体现出来。

(谐振特性)

(5) 品质因数的另一个意义：对于电感与电容，其电压最大值除以电源电动势最大值也等于品质因数，即 $Q = \frac{U_C}{E_m} = \frac{U_L}{E_m}$ ，因此

品质因数还可以反映电源电压在电感与电

容上被放大的程度。(增益特性)

(6) 总结品质因数的三个重要意义——体现电路的损耗特性、谐振特性、增益特性，因此可以衡量电路品质的好坏。

四、复数法（用 j 表示虚数单位）

1、复数法的意义：正弦交流电是其复数形式的实部；复数形式与复平面上的矢量一一对应；三角函数也可以借助复数写成指数函数，实现形式上的统一；实部与虚部分别对应衰减与相位变化；用复数形式的电压与电流相除，得到的复阻抗与时间无关并且不会是无穷大（考虑到电压不是 0 时电流可能为 0）。

2、电压与电流的复数形式： $\tilde{U} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ ， $\tilde{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi')}$ 。

3、复阻抗是电阻、电感、电容综合作用的结果， $\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\Delta\varphi}$ 。其中， $\Delta\varphi$ 是

电压与电流的相位差。

4、复电阻：当仅有电阻连入交流电路时，复电阻 $\tilde{Z}_R = \frac{\tilde{U}}{\tilde{i}} = R$ 。它是实数，说明电阻的作用是耗散能量，不导致电流与电压的相位差。

5、复感抗：纯电感电路，电流比电压延后 $\frac{\pi}{2}$ 的相位（因为电压正比于电流随时间的导数）。于是复感抗 $\tilde{Z}_L = \frac{U_m}{I_m} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$ 。它只有虚部，说明理想电感的作用是通过自感电动势产生电压与电流的相位差。

6、复容抗：纯电容电路，电流比电压超前 $\frac{\pi}{2}$ 的相位（因为电流正比于电压随时间的导数）。于是复容抗 $\tilde{Z}_C = \frac{U_m}{I_m} e^{j(-\frac{\pi}{2})} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$ 。它同样只有虚部，说明理想电容（不漏电）的作用是通过极板间的电压产生电压与电流的相位差。

7、多个元件串并联的总阻抗，其计算方式与直流电阻串并联完全一致，只是需要使用复数的运算。

8、LCR 串联受迫振荡电路总的复阻抗为

$$\tilde{Z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) j = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2} e^{j \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

从这里可以立刻读出阻抗大小 $\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}$ ，以及电压相对电流的相位

差 $\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ 。电量相对电压的相位差是

$$\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \frac{\pi}{2} = \arctan \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$$

与前面结果一致。

五、交流电的更多知识

1、有功功率：就是电源输出的平均功率，会受到电压与电流相位差的影响。

(1) 一个周期的平均输出功率

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} E_m I_m \cos \varphi = E_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \varphi$$

式中的积分利用三角的积化和差公式可以计算。其中， φ 是电压与电流的相位差。

(2) φ 的不同, 导致各个元件之间的能量关系不同。一旦 $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, 则有功功率为 0, 此时的关系是——电源输出的功、电感与电容释放到电路中的能量与电阻的焦耳热正好完全抵消, 电源整体上不做功; 当 $\varphi = 0$ 时, 电感与电容只在它们之间进行能量交换, 电源需要输出的功率最大。

(3) 由 $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ 可知 $\bar{P} = E_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \frac{R}{Z} = I_{\text{rms}}^2 R$ 。方均根电流反映的是平均功率。

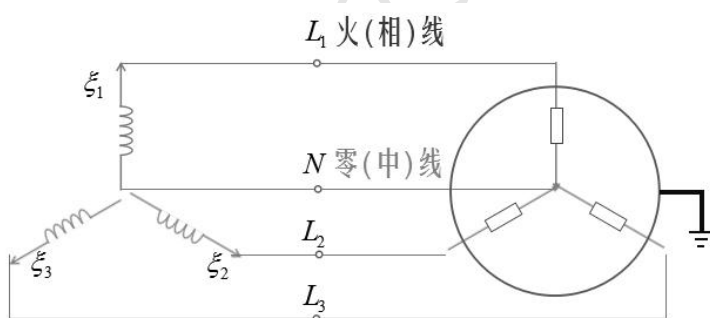
2、变压器

(1) 基本构造: 初级线圈 (匝数 N_p) 与次级线圈 (匝数 N_s) 之间用铁芯相通 (主要是矽钢片, 增强磁场并且防止漏磁; 各个矽钢片之间绝缘, 减少涡流损耗), 初级线圈中的交流电会使得次级线圈中感应出交流电压。

(2) 变压特性: 两个线圈一匝的电动势是相等的 (因为二者接受到的磁通量完全一致)。因此, 线圈两端的总电压与匝数成正比, $\frac{U_p}{U_s} = \frac{N_p}{N_s}$ 。两个电压的方向相反。

(3) 变阻特性: 在次级线圈上接电阻 R , 次级线圈会有电流产生 (次级线圈短路时有电压没电流)。两个线圈上总功率相同, 故电流与匝数成反比, $\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p}$ 。

于是, 初级线圈的等效电阻 $R_p = \frac{U_p}{I_p} = \frac{\frac{N_p}{N_s} U_s}{\frac{N_s}{N_p} I_s} = \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 R$ 。



3、三相交流电

(1) 基本构造: 三个电源同时工作, 产生三个相位差为 $\frac{2}{3}\pi$ 的电动势。

(2) 相电压: 任意一根火线与零线之间的电势差, 在中国大陆有效值为 220V。

(3) 线电压: 任意两根火线之间的电势差。由于三个电动势都有相位差, 故这个电压不是 0, 也不是 440V, 而是两个电压矢量之和的长度, 有效值约为 380V (220V 的 $\sqrt{3}$ 倍)。接线时可以根据需要选择接相电压或线电压。

(4) 实际接线, 三相电的插座至少有四个孔 (三火一零, 三相四线制), 有的可能还有地线 (三相五线制); 单相交流电是单相二线制 (一零一火) 或单相三线制 (加上地线)。

第九章 麦克斯韦电磁理论

一、麦克斯韦方程组

1、统一形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_f + q_p}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_c + I') + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}') + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

2、真空中的形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_c + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

3、介质中的形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_c + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

4、麦克斯韦的主要贡献：提出了涡旋电场与位移电流的概念，完善第二与第四个方程；与此同时，大胆猜测在场随时间变化时，上述方程全都成立。

二、电磁波概念的建立

1、讨论空间内不存在自由电荷与传导电流的情况：可以由麦克斯韦方程组得到

波动方程 $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, $\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ 。（真空可认为 $\mu_r = \epsilon_r = 1$ ）

2、任意均匀介质中的电磁波波速： $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}}$ 。对于真空， $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ 。说明

磁导率、介电常数与折射率是互相联系的。

3、平面简谐电磁波

(1) 基本形式: $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$ 。其中, 波矢 $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{v}$, 也即大小是 $\frac{2\pi}{\lambda}$, 方向与传播方向一致。同样, $v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$ 。

(2) 在自由真空(无介质, 无自由电荷, 无传导电流), 由麦克斯韦方程组第一式 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 即可得到 $\vec{E}_m \cdot \vec{k} = 0$, 同理 $\vec{B}_m \cdot \vec{k} = 0$, 可见电磁波是横波(传播方向与振动方向垂直)。

(3) 由麦克斯韦方程组第二式 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 可得 $\vec{k} \times \vec{E}_m = \omega \vec{B}_m$ 且 $\varphi = 0$, 故电磁场总是同相, 且 $E_m = \frac{\omega}{k} B_m = v B_m$; \vec{E} , \vec{B} , \vec{k} 三者成右手系。(体现电与磁的不可分割)

三、真空中的电磁场动力学

1、电磁场能量密度: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$ 。这是因为任意时刻都有

$\frac{E}{B} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ 。同一点处的能量密度是随时间变化的, 上述的 E 与 B 都是时间的函数。

2、能流密度矢量 \vec{S} : 单位时间内流过单位面积的能量, 反映能量沿着传播方向向前运行的速度, 其方向就是电磁波的传播方向。(为防止混淆, 以下的面积全部用 A 表示)

(1) 能流与能量的关系: 一块体积内能量的损失速率

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial t} &= \iiint \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iiint \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = \iiint \left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \\ &= \iiint \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \right) dV = -\iiint \nabla \cdot \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) dV = -\iint \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

所以能流密度矢量 $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$, 一般称之为坡印亭矢量。坡印亭矢量的方向与

电磁波传播方向一致, 大小为 $\frac{EB}{\mu_0} = c \epsilon_0 E^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = cu$ 。

与稳恒电流的结果类似, 可以将上述公式写成微分形式: $\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ 。

(3) 正弦电磁波一周期内的平均能流密度

$$\bar{I} = \bar{S} = c\epsilon_0 \overline{E^2} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2\mu_0} E_m B_m$$

3、电磁波的动量：考察电磁波对金属导体的辐射压（有这个压力说明电磁波有动量）。

(1) 压强的来源：电磁波中的电场使电子加速，磁场使运动电子产生对侧面的压力（洛伦兹力）。

(2) 对于面积 A 内的 N 个运动电子，电场力输入能量的速率就是能流密度乘以

面积。辐射压 $p = \frac{F}{A} = \frac{Nev_d B}{A} = \frac{N(Ee)v_d}{cA} = \frac{N \frac{dE_k}{dt}}{cA} = \frac{SA}{cA} = \frac{S}{c}$ 。（ v_d 是电子的漂移速度；电场力 Ee 乘 v_d 就是电场力做功的功率，也就是输入能量的速率。）

(3) 动量密度 \vec{g} ：电磁波单位面积上的动量（有方向）。计算式：

$$\vec{g} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{动量}}}{Ac\Delta t} = \frac{\vec{F}\Delta t}{Ac\Delta t} = \frac{1}{c} \frac{\vec{F}}{A} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

4、电磁波的角动量：选定了参考点，在相对参考点 \vec{r} 处，根据角动量的定义，

有角动量密度 $\vec{l} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta V} = \frac{\vec{r} \times \Delta \vec{p}_{\text{动量}}}{\Delta V} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ 。

5、一般的交流电路都会向外发射电磁波，这是除了焦耳热外的另一种能量耗散。前面章节中均是理想状态，辐射很小，因此不考虑辐射造成的能量损失；如果考虑，则辐射功率与电路频率的四次方成正比。一些情况为加强对外辐射，需减小电路中的电容与电感（如拉开电容器极板、减小正对面积；将电感做得尽量小，甚至变成导线而只保留回路本身的自感）。

[参考资料]

[1]复旦大学物理学系侯晓远老师《大学物理 A：电磁学》课程

[2]贾起民，郑永令，陈暨耀. 电磁学（第三版）. 高等教育出版社.

[3]赵凯华，陈熙谋. 新概念物理教程·电磁学. 高等教育出版社.