第二章、质点动力学

$ 2.1 牛顿运动定律及其应用

牛顿基于前人的实验结果，提出了经典动力学的三个基本定律。

(i) 任何物体，只要没有外力作用其上，便永远保持静止或匀速运动的状态。

(ii) 外力的作用，将改变物体的加速度。二者满足关系式

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}. \tag{1}$$

这里， $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{a}$ 分别为作用在质点上的外力及其加速度向量。而 m 为质点的质量。

(iii) 两个质点相互作用时，各自施加予对方的作用力大小相等，而方向沿彼此的连线相反。换句话说，我们有

$$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}. \tag{2}$$

在实际工作中，牛顿动力学的应用一般可以归纳为互为反问题的两类问题的研究。一类问题是已经知道作用在物体上的外力，要求物体的运动轨迹；另外一类问题则是已知物体的运动轨迹，反求作用在物体上的外力。

自然界常见的力有如下几种。

(1) 重力。其实质是地球施加在物体上的引力，用 W 来表示，通常称为物体的重量。根据万有引力定律，在地球表面，一个物体所受到的地球引力为

$$W=G\frac{mM}{R^2}. \tag{3}$$

这里， m 和 M 分别为物体及地球的质量。 R 为地球之平均半径。 G 称为引力常数。其实验数值为

$$G=6.67259\times10^{-8}\ \frac{(\text{厘米})^3}{\text{克}\cdot(\text{秒})^2}. \tag{4}$$

那么，根据牛顿第二定律，我们有

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}=-G\frac{mM}{R^2}\mathbf{e}_R. \tag{5}$$

将此方程两边同时除以 m ，我们得到

$$\mathbf{a}=-G\frac{M}{R^2}\mathbf{e}_R\equiv\mathbf{g}. \tag{6}$$

文献中， $\mathbf{g}$ 被称为地球表面处的重力加速度。其实验数值为

$$g = |\mathbf{g}| = 980\,\text{厘米}/(\text{秒})^2. \tag{7}$$

考虑到地球的平均半径大约为 $R \cong 6.37 \times 10^8\text{cm}$ ，我们由 g 的实验数值大致估算出地球的质量

$$M = \frac{gR^2}{G} \cong \frac{10^3 \times (6.37 \times 10^8)^2}{6.67 \times 10^{-8}} \cong 6.2 \times 10^{27}\,\text{克}. \tag{8}$$

(2) 弹性力：物体因为形变而产生的恢复力，称为弹性力。特别是对于弹簧，当形变不大时，弹性力遵从 Hooke 定律

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}. \tag{9}$$

这里， $\mathbf{r}$ 为弹簧一端偏离平衡位置的位移。 k 则称为弹性系数。

(3) 摩擦力：两个相互接触的物体做相对运动时，在接触面上会对彼此施加阻碍对方运动的力，称为摩擦力。摩擦力又可以分为静摩擦力和滑动摩擦力。

从日常生活的经验我们知道，当用力推动一个物体时，一开始物体并不运动。只有我们用力大到一定程度时，物体才动起来。换句话说，存在一个阈值 F_0 。只有当 $F \geq F_0$ 是，物体与地面的静摩擦力才能够被克服，使得物体运动起来。这个阈值 F_0 称为物体与地面的静摩擦力。实验表明，它与物体对于地面的正压力 N 是成正比的。既我们有

$$F_0 = \mu_s N. \tag{10}$$

而当物体一但运动起来，物体所感受到摩擦力立即改变数值。此时的摩擦力称为滑动摩擦力，其大小与物体的运动速度有关。当物体运动速度不大时，滑动摩擦力基本上是一个常数，与物体对于地面的正压力 N 是成正比。既

$$F = \mu N. \tag{11}$$

方向与物体的运动方向相反。而当物体运动速度较大时，滑动摩擦力是速度的一个函数。在许多情况下，我们可以取

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}. \tag{12}$$

例 2.1(**教科书** 47 **页上的例** 2): 质量为 m 的小物体置于质量为 M，倾角为 θ 的斜劈的斜面上。假设在物体与斜面，斜劈与地面之间没有摩擦力。试求这两个物体各自的加速度以及它们之间的相互作用力。

解：下面用到的方法称为隔离法。

让我们首先考虑斜劈 M。首先它受到重力 $-M\mathbf{g}$，其次为地面对其的支撑力 $\mathbf{N}_1 = N_1\mathbf{j}$ 和小物体 m 对于它的作用力 $\mathbf{N}_2$(其方向与斜面的外法线相反)。将 $\mathbf{N}_2$ 做分解后，我们有

$$\mathbf{N}_2 = N_2 \sin\theta \mathbf{i} - N_2 \cos\theta \mathbf{j}. \tag{13}$$

令 $\mathbf{a}_2 = a_{2x}\mathbf{i} + a_{2y}\mathbf{j}$ 为斜劈 M 对于实验室系的加速度。则根据牛顿第二定律，我们有

$$Ma_{2x} = N_2 \sin\theta, \qquad Ma_{2y} = N_1 - Mg - N_2 \cos\theta = 0. \tag{14}$$

接着，我们再来考察一下物体 m 的运动。它所受到的力有两个。既重力 $-m\mathbf{g}$ 和斜面对其的支撑力 $\mathbf{N}_3$。根据牛顿第三定律，我们有 $\mathbf{N}_3 = -\mathbf{N}_2$。因此，若令 $\mathbf{a}_1 = a_{1x}\mathbf{i} + a_{1y}\mathbf{j}$ 为 m 对于实验室系的加速度，则根据牛顿第二定律，我们有

$$ma_{1x} = -N_2 \sin\theta, \qquad ma_{1y} = -mg + N_2 \cos\theta. \tag{15}$$

这样，我们有了四个方程，但存在 $a_{1x}, a_{1y}, a_{2x}, N_1$ 和 N_2 五个未知数 (加速度 a_{2y} 为零)。因此，我们还需要一个独立方程。这一方程由下面约束条件来提供。既在下滑过程中，小物体 m 相对于斜劈参照系的由下式决定的

$$a'_{1x} + a_{2x} = a_{1x}, \qquad a'_{1y} + a_{2y} = a'_{1y} = a_{1y} \tag{16}$$

加速度分量 a'_{1x} 及 a'_{1y} 之和应该与斜面同向。因此，我们有

$$\frac{a'_{1y}}{a'_{1x}} = \frac{a_{1y}}{a_{1x} - a_{2x}} = \tan\theta, \tag{17}$$

或是

$$a_{1y} = \tan\theta \, (a_{1x} - a_{2x}). \tag{18}$$

这样，我们就得到了所需要的第五个方程。

求解这些方程后，我们得到

$$
\begin{aligned}
& a_{1x} = -\frac{Mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}, \quad a_{1y} = -\frac{(m+M)g\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}, \\
& a_{2x} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}, \quad N_1 = \frac{M(m+M)g}{M+m\sin^2\theta}, \\
& N_2 = \frac{mMg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

特别是， $N_2 > 0$ 表明，在整个下滑过程中，小物体在到达地面前不会脱离斜劈。

例 2.2: 当固体在黏性液体中做慢速运动时，液体对于固体的摩擦力可以近似写作

$$\mathbf{f} = -\gamma\mathbf{v}. \tag{20}$$

试求固体在液体中垂直自由下落时的终极速度。

解: 固体的质量为 m 。显然，它受到的力有重力 $-mg\mathbf{j}$ ，浮力 $\mathbf{f}' = f'\mathbf{j}$ 和阻力 $\mathbf{f} = \gamma v\mathbf{j}$ 。根据牛顿第二定律，我们有

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + f' + \gamma v. \tag{21}$$

所谓终极速度就是时间很长以后，固体的加速度变为零时的速度。此时，我们有 $\frac{dv}{dt} = 0$ ，而上面的方程退化为

$$-mg + f' + \gamma v_\infty = 0. \tag{22}$$

解此方程，我们得到

$$v_\infty = \frac{mg - f'}{\gamma}. \tag{23}$$

这一公式是很有实用价值的。例如，实验表明，人在空气中下落的终极速度约为 76 米/秒 。而张开降落伞下降时的终极速度约为 6 米/秒 原因是，降落伞的打开加大了空气的阻力，既加大了系数 γ 的数值。上面的公式告诉我们，这也就有效地降低了终极速度。

例 2.3(**教科书** 46 **页上的例** 1): 一桶水以匀角速度 ω 绕竖直的桶轴旋转。试证明，当水与桶处于相对静止时，桶内水的表面形状是一个旋转抛物面。

解: 为了求得液体表面的函数形式，我们可以先计算微商 $\frac{dz}{d\rho}$ 。首先，从图中我们可以得到几何关系

$$\frac{dz}{d\rho} = \tan\theta. \tag{24}$$

下面，我们要利用牛顿方程求出 $\tan\theta$ 满足的另外一个方程。

取水面处质量为 Δm 的一个小水块，它分别受到重力 $-(\Delta m)g\,\mathbf{j}$ 和法线支撑力 $\mathbf{N}$ 的作用。这二者之和产生了一个使其做圆周运动的向心力。其大小为

$$F_n = (\Delta m)\frac{v^2}{\rho} = N\sin\theta. \tag{25}$$

另外一方面，由于小水块在竖直方向上没有运动，因此我们有

$$N\cos\theta = (\Delta m)\,g. \tag{26}$$

从这一公式解出 N 后，再代入前面一个公式，我们得到

$$(\Delta m)\frac{v^2}{\rho} = N\sin\theta = \frac{(\Delta m)\,g}{\cos\theta}\sin\theta = (\Delta m)\,g\tan\theta, \tag{27}$$

或是

$$\frac{v^2}{\rho} = g\tan\theta. \tag{28}$$

将 $v=\rho\omega$ 代入后，我们有

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\rho^2\omega^2}{\rho} = \rho\omega^2 = g\tan\theta. \tag{29}$$

因此，我们得到 $\tan\theta$ 的另一个表达式

$$\tan\theta = \frac{\omega^2}{g}\rho. \tag{30}$$

将它代入几何关系式 (24) 中，我们得到

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\omega^2}{g}\rho. \tag{31}$$

将这一方程积分后，我们有

$$z = \int \frac{\omega^2}{g}\rho\,d\rho + C = \frac{\omega^2}{2g}\rho^2 + C. \tag{32}$$

若令 $z(\rho=0)=h$ ，则 $C=h$ 。将之代入上面的方程后，我们得到

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\rho^2 + h. \tag{33}$$

这是一个旋转抛物面的方程。

例 2.4(**教科书** 47 **页上的例** 3): 质量分别为 $m_1 > m_2$ 的两个重物用轻绳悬挂于滑轮的两侧。滑轮半径为 R，并且固定不动。仅考虑绳子滑轮之间的摩擦力。问当摩擦系数 μ 取何值时，重物开始运动，加速度为何？又问绳子单位长度所受到的法向支撑力 $\mathbf{n}$ 为多大？

解: 可能的运动必是 m_1 下降， m_2 上升。当重物开始运动后，取 m_1 下降， m_2 上升的方向为各自加速度的正方向，我们有联立方程

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \quad -T_2 + m_2 g = -m_2 a. \tag{34}$$

这里， T_1 和 T_2 分别为绳子两端处的拉力。由于摩擦力的存在，这两处的拉力并不相等。我们要找出它们之间的关系。为此，我们需要知道拉力在滑轮上的分布函数 $T(\theta)$ 。也就是说，我们要求出 $\frac{dT(\theta)}{d\theta}$

任取对应于 θ 和 $\theta + \Delta\theta$ 之间的一段线元 $\Delta l = R\Delta\theta$ 。当绳子的质量可以忽略不计时，我们有

$$\begin{aligned}
&(\Delta m)a = (T + \Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu\Delta N \approx 0, \\
&(T + \Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} + T\sin\frac{\Delta\theta}{2} - \Delta N = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

由此，我们解得

$$\Delta T\cos\frac{\Delta\theta}{2} \approx \mu\Delta N, \quad 2T\sin\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta T\ \sin\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta N. \tag{36}$$

注意到，当 $\Delta\theta \to 0$ 时， $\Delta N = n\Delta l \to 0$ 成立。因此，我们可将 (36) 式改写作

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta N}\cos\frac{\Delta\theta}{2} = \lim_{\Delta N\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta N}\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\cos\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{dT}{dN} = \mu, \tag{37}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta N} + \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta N}\cdot\sin\frac{\Delta\theta}{2} \\
= \ &\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta N} + \lim_{\Delta N\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta N}\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\sin\frac{\Delta\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T(\theta) \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta N\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta N} + \frac{dT}{dN}\cdot 0 \\
&= T(\theta)\frac{d\theta}{dN} = 1. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\frac{dT}{d\theta} = \frac{dT}{dN}\cdot\frac{dN}{d\theta} = \frac{dT}{dN}\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dN}\right)}\right) = \mu T(\theta). \qquad (39)
$$

将此式积分后，我们有

$$
\ln T(\theta) = \mu\theta + C. \qquad (40)
$$

由于当 $\theta = 0$ 时， $T(\theta = 0) = T_2$ 。因此，我们有 $C = \ln T_2$ 。将它代入上式后，我们最后得到

$$
\mu\theta = \ln T(\theta) - \ln T_2 = \ln\frac{T(\theta)}{T_2}, \qquad (41)
$$

或是

$$
T(\theta) = T_2 e^{\mu\theta}. \qquad (42)
$$

令 $\theta = \pi$ ，我们即可得到绳子另一端的拉力

$$
T(\theta = \pi) = T_1 = T_2 e^{\mu\pi}. \qquad (43)
$$

代入运动方程后，我们得到

$$
m_1 g - T_2 e^{\mu\pi} = m_1 a, \quad T_2 - m_2 g = m_2 a. \qquad (44)
$$

从第二个方程解出 $T_2 = m_2(g+a)$ ，代入第一个方程后，我们得到

$$
m_1 g - (m_2 a + m_2 g)\, e^{\mu\pi} = m_1 a. \qquad (45)
$$

由此方程，我们解得

$$
a = \frac{m_1 - m_2 e^{\mu\pi}}{m_1 + m_2 e^{\mu\pi}}\, g. \qquad (46)
$$

由于我们要求 $a > 0$ ，故得到

$$
m_1 > m_2 e^{\mu\pi}, \qquad (47)
$$

或是

$$\mu < \frac{1}{\pi}\ln\frac{m_1}{m_2}. \tag{48}$$

这就是重物能够活动的条件。

进一步，我们可以求得

$$T_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2e^{\mu\pi}}\, g. \tag{49}$$

而单位长度上的法向支撑力则为

$$n = \frac{dN}{dl} = \frac{dN}{Rd\theta} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dN}\right)} = \frac{1}{R}T(\theta) = \frac{1}{R}T_2e^{\mu\theta} = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2e^{\mu\pi}}\frac{g}{R}\cdot e^{\mu\theta}. \tag{50}$$

例 2.5: 设一个粒子所受到的力可以写作

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\times\mathbf{A}. \tag{51}$$

求解它的运动轨迹。

解: 按照牛顿方程，我们有

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \mathbf{v}\times\mathbf{A}. \tag{52}$$

为了确定起见，我们将向量 $\mathbf{A}$ 的方向取作坐标系 z- 轴的方向，并将粒子速度 $\mathbf{v}$ 分解为沿 z- 轴方向的分量 $\mathbf{v}_\parallel$ 和垂直于 z- 轴方向的分量 $\mathbf{v}_\perp$ 之和。因此，我们有

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\times\mathbf{A} = (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp)\times\mathbf{A} = \mathbf{v}_\parallel\times\mathbf{A} + \mathbf{v}_\perp\times\mathbf{A} = \mathbf{v}_\perp\times\mathbf{A}. \tag{53}$$

按照向量直乘的定义，它是一个与 $\mathbf{A}$ 垂直的向量。由此我们直接得出

$$m\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = 0. \tag{54}$$

将这一结果代入方程 (52) 后，我们有

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \mathbf{v}_\perp\times\mathbf{A}. \tag{55}$$

将其两边同时点乘 $\mathbf{v}_\perp$ 后，我们得到

$$m\mathbf{v}_\perp\cdot\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = m\left(v_x\cdot\dot{v}_x + v_y\cdot\dot{v}_y\right) = \mathbf{v}_\perp\cdot(\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{A}) = 0, \tag{56}$$

或是

$$\frac{m}{2}\frac{dv_\perp^2}{dt} = \frac{m}{2}\left(\frac{dv_x^2}{dt} + \frac{dv_y^2}{dt}\right) = 0. \tag{57}$$

又由于从第二式，我们有 $v_\parallel =$ 常数 ，故 $v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$ 是一个常数。

现在，我们讨论质点的运动轨迹。由于 $v_\parallel = v_z$ 为一常数，我们可以只考虑这一轨迹在 $X-Y$ 平面的投影。又由于 $v_\perp$ 不随时间改变，在自然坐标系中，我们可得粒子的切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv_\perp}{dt} = 0. \tag{58}$$

因此，粒子只有法向加速度 a_n 。故我们有

$$ma_n = m\frac{v_\perp^2}{\rho} = F_n = v_\perp\, A, \tag{59}$$

或是

$$\frac{v_\perp^2}{\rho} = \frac{1}{m}v_\perp A. \tag{60}$$

由此，我们解得

$$\rho = m\frac{v_\perp}{A}. \tag{61}$$

这是一个常数。因此，在此情况下，粒子轨迹在 $X-Y$ 平面内的投影为一半径为 ρ 的圆。而在整个空间内，粒子则沿一个半径为 ρ 的螺旋线运动。

$ 2.2 **动量守恒定理**

现在，让我们考虑由一组质点 $(m_1,\, m_2,\, \cdots, m_N)$ 构成的封闭系。所谓封闭系，就是除了这些质点之间的相互作用之外，没有其它外力作用在它们上面的体系。

取其中一个质点 m_i 。根据牛顿第二定律，它的运动由方程

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_{1i} + \mathbf{f}_{2i} + \cdots + \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{f}_{i+1,i} + \cdots \mathbf{f}_{Ni} \tag{62}$$

来决定。这里， $\mathbf{f}_{ji}$ 为第 j 个质点作用在第 i 个质点上的力。若我们取 $\mathbf{f}_{ii} = 0$ ，则上式可以被进一步写作

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{f}_{ji}. \tag{63}$$

将这一公式的两边对于指标 i 求和后，我们得到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ji}. \tag{64}$$

对于任意一对不相等的下脚标 $i \neq j$ ，根据牛顿第三定律，我们有

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}. \tag{65}$$

因此，上面的公式最后变成为

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{f}_{11} + \mathbf{f}_{22} + \cdots\cdots + \mathbf{f}_{NN} = 0. \tag{66}$$

也就是说，力学量

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \tag{67}$$

是一个不随时间改变的常向量，称为体系的总动量。而分量 $\mathbf{p}_i$ 则称为第 i 个质点的动量。

上面的结论可以归纳成如下的定理形式。

动量守恒定理：对于一个封闭的力学体系，其总动量是不随时间改变的。因此是守恒的。

这里，我们是针对一个封闭的质点系，利用牛顿第二和第三定律推导出了动量守恒定理。实际上，这一定理也可以通过更为普遍的空间对称性的原则，即在没有外场存在的情况下，任何一个封闭的物理体系都是空间平移不变的这一事实重新推导出来。因此，动量守恒定理是物理学中最基本的普适定理之一。到目前为止，尚未发现它被违背的例子。

动量守恒定理是物理学研究中非常具有指导意义的一个原理。例如，在上个世纪三十年代初期的核物理研究中，人们在考察所谓 β 衰变

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + e^{-} \tag{68}$$

时发现，在拍摄到的云雾室的照片中，质子 p 与电子 e^{-} 的轨迹并不在一条直线上。但在初始时，入射的中子 n 的动量却近似为零。因此，有些物理学家开始怀疑动量守恒定理是否在大约为 10^{-13} 厘米的微观尺度是可用的。而 Pauli 则对于动量守恒定理的普适

性坚信不移。为了摆脱这一困难，他提出，在反应中，除了质子和电子，一定还产生了另外一个粒子，它带走了剩余的那部分动量。由于在云雾室的照片中没有看到它的踪迹，这个粒子应该是中性的，即它不带电荷。 Pauli 称它为中微子。一直到 1956 年，人们才首次通过实验直接证明了中微子的存在。

例 2.6(**教科书** 70 **页上的例** 15): 让我们用动量守恒定理来研究火箭运动的基本原理。作为近似，我们在下面的讨论中略去地球引力的影响。

火箭是靠喷射气体而产生的反冲力向前运动的。假设在某一时刻 t ，箭体和燃料合在一起的总质量为 $M(t)$ ，而其速度为 $\mathbf{v}(t)$ 。在下一时刻 $t+\Delta t$ 时，火箭喷出了质量为 $\Delta m = -\Delta M$ 的燃烧后产生的气体，而箭体和剩余燃料的总体的速度变为 $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ 。假设燃烧后喷射气体相对于箭体的喷射速率为 u 。由于没有考虑外力的影响，我们可以使用动量守恒定理，并写出如下的方程

$$\begin{aligned} Mv &= (M-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v+\Delta v-u) \\ &= Mv+M\Delta v-(\Delta m)v-(\Delta m)(\Delta v)+(\Delta m)v+(\Delta m)(\Delta v)-(\Delta m)u. \end{aligned} \tag{69}$$

化简后我们得到

$$0 = M\Delta v-\Delta m u = M\Delta v+(\Delta M)u. \tag{70}$$

在取了极限 $\Delta t\to 0$ 之后，我们得到微分方程

$$0 = M\,dv+u\,dM, \tag{71}$$

或是

$$dv = -\frac{u}{M}\,dM. \tag{72}$$

积分后，我们得到

$$\int dv = -\int \frac{u}{M}\,dM + C, \tag{73}$$

或是

$$v(t) = -u\ln M(t)+C. \tag{74}$$

假设起飞瞬间，既 $t=0$ 时，火箭的总质量为 M_0 ，而速度 $v(t=0)=0$ ，则我们得到常数

$$C = u\ln M_0. \tag{75}$$

因此，我们最后有

$$v(t) = u \ln \frac{M_0}{M(t)}. \tag{76}$$

令 M_f 为燃料烧尽后箭体的剩余质量，则火箭能够达到的末速度，也是最大速度 v_f 为

$$v_f = u \ln \frac{M_0}{M_\mathrm{f}}. \tag{77}$$

此式称为齐奥尔科夫斯基公式。因此，要提高火箭的末速，只能靠减小 M_f 来实现。为此，人们提出了多级火箭的解决办法。

当质点受到外力时，动量定理应该被改写作

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{合}}. \tag{78}$$

将其在时间 (t_0, t_1) 内积分后，我们有

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{\text{合}} dt. \tag{79}$$

当时间间隔 $\Delta t = t_1 - t_0$ 很短时，此式常被写作如下的形式

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p} = \left(\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_{\text{合}} dt\right)(t_1 - t_0) \equiv \overline{\mathbf{F}}\,\Delta t \equiv \mathbf{I}. \tag{80}$$

$\mathbf{I}$ 被称为外力在 $\Delta t = t_1 - t_0$ 时间间隔中所施与的冲量。而上式也被称为冲量定理。

例 2.7(**教科书** 68 **页上的例** 14): 在足够高的桌面上开一个小孔。设长度为 L ，质量为 M 的均匀细杆竖直穿过小孔，一半长度在孔的上方。细杆的下端有一质量为 $m < M$ 的甲虫。假设开始时，细杆与甲虫均处于静止状态。而在细杆释放的瞬间，甲虫开始以相对于细杆的速率 v_0 向上抛出，然后以相同的相对速率向上飞行。试问，当 v_0 的取值为何时，甲虫才能在小杆顶端到达孔位时也到达桌面？

解：当甲虫被抛出的瞬间，体系所受重力的冲量可以忽略不计，故我们可以使用动量守恒定理。我们有

$$m\mathbf{v}_{\text{虫}}(0) + M\mathbf{v}_{\text{秆}}(0) = mv_m(0) - Mv_M(0) = 0. \tag{81}$$

由此我们解得

$$v_m(0) = \frac{M}{m} v_M(0). \tag{82}$$

注意，这里 $v_m(0)$ 和 $v_M(0)$ 都是指的相对于桌面的速度，而甲虫相对于细杆的速度则为

$$v_0 = v_m(0) - (-v_M(0)) = v_m(0) + v_M(0) = \frac{M+m}{m} v_M(0). \tag{83}$$

在此之后，甲虫相对于细杆保持匀速飞行。因此，当甲虫飞完全部杆长，并且细杆的顶端也正好要脱离桌孔时，联立方程

$$v_0 t = L, \quad v_M(0)t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{L}{2}, \tag{84}$$

必须满足。从第二个方程，我们解得

$$t = \frac{-v_M(0) + \sqrt{v_M^2(0) + gL}}{g}. \tag{85}$$

将它代入第一个方程后，我们得到

$$v_0 = \frac{L}{t} = \frac{gL}{-v_M(0) + \sqrt{v_M^2(0) + gL}}, \tag{86}$$

或是

$$v_0\sqrt{v_M^2(0) + gL} = gL + v_0 v_M(0). \tag{87}$$

将此式两边平方并合并同类项后，我们有

$$v_0^2 gL = g^2 L^2 + 2gLv_0 v_M(0). \tag{88}$$

等式两边同除 gL，并将 v_0 与 $v_M(0)$ 的关系式 (83) 代入后，我们有

$$v_0^2 = gL + 2v_0 v_M(0) = gL + 2v_0\left(\frac{m}{M+m}v_0\right) = gL + \frac{2m}{M+m}v_0^2. \tag{89}$$

将此式右边第二项移到左边后，我们有

$$v_0^2 - \frac{2m}{M+m}v_0^2 = \frac{M-m}{M+m}v_0^2 = gL. \tag{90}$$

从此式，我们最后解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{M+m}{M-m}gL}. \tag{91}$$

例 2.8(**教科书** 68 **页上的例** 13): 质量为 M ，长度为 L 的匀质细软绳下端正好与地面接触。当绳子处于静止状态时，开始自由下落。试求绳子在落下 $l < L$ 长度段时刻，地面所承受的正压力 $N(l)$ 。

解: 对于软绳而言，它受到的外力为重力和地面的支撑力。因此，在一个无穷小的时间间隔内，根据冲量定理，我们有

$$\Delta p \equiv \Delta\left(\frac{M}{L}(L-l)v\right) \approx (Mg - N(t))\Delta t. \tag{92}$$

这里， v 为尚未落到地面的那段绳子的速度。由于绳子是柔软的，其在空中部分的末端可以认为是在做自由落体运动。因此，其速度 (也是绳子空中部分每一点的速度) 可以写作

$$v = gt. \tag{93}$$

而已经落到地面部分的长度则为

$$l = \frac{1}{2}gt^2. \tag{94}$$

由这两个公式，我们得到

$$v(l) = g\sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{2gl}. \tag{95}$$

令 $\Delta t \to 0$ ，我们得到方程

$$\begin{aligned}
(Mg - N) = \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{L}(L-l)\sqrt{2gl}\right) \\
&= \frac{M}{L}\left(-\sqrt{2gl} + (L-l)\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{l}}\right)\frac{dl}{dt} \\
&= \frac{M}{L}\left(-\sqrt{2gl} + (L-l)\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{l}}\right)v \\
&= \frac{M}{L}\left(-\sqrt{2gl} + (L-l)\sqrt{2g}\frac{1}{2\sqrt{l}}\right)\sqrt{2gl} \\
&= \frac{M}{L}\left(-2gl + (L-l)(2g)\frac{1}{2}\right) = \frac{M}{L}\left(gL - 3gl\right).
\end{aligned} \tag{96}$$

解此方程，我们得到

$$N = 3Mg\frac{l}{L}. \tag{97}$$

例 2.9(**教科书** 71 **页上的例** 16): 质量为 m 的小球被系上一根足够长的柔软，均匀且不可伸长的细绳。绳子的线密度为 λ 。将小球以初速度 v_0 竖直向上抛出。略去空气的阻力，试求小球可以上升到的最大高度。

解: 设在时刻 t 时，小球的高度为 h ，速度为 v 。而小球和已经在空中的绳段的总质量为 $m+\lambda h$ 。则经过一个无穷小的时间间隔 Δt 后，其高度变为 $h+\Delta h$ ，速度变为 $v+\Delta v$ 。同时，小球和已经在空中的绳段的总质量变为 $m+\lambda(h+\Delta h)$ 。因此，在时间间隔 Δt 内，整个体系的动量改变为

$$\Delta p = \Delta[(m+\lambda h)v]. \tag{98}$$

而在此期间，系统所受到的重力的冲量约为

$$\Delta I \approx -(m+\lambda h)g\Delta t. \tag{99}$$

根据冲量定理 $\Delta p = \Delta I$ ，我们有

$$\Delta p = \Delta[(m+\lambda h)v] \approx -(m+\lambda h)g\Delta t. \tag{100}$$

将此式两边同除 Δt ，并令其趋向于零后，我们得到如下的微分方程

$$\frac{d}{dt}[(m+\lambda h)v] = \lambda v\frac{dh}{dt} + (m+\lambda h)\frac{dv}{dt} = -(m+\lambda h)g. \tag{101}$$

由于按照定义，我们有

$$\frac{dh}{dt} = v, \tag{102}$$

故这一微分方程的左边又可以被改写成

$$\begin{aligned} \lambda v\frac{dh}{dt} + (m+\lambda h)\frac{dv}{dt} &= \lambda v^2 + (m+\lambda h)\frac{dv}{dh}\frac{dh}{dt} \\ &= \lambda v^2 + (m+\lambda h)v\frac{dv}{dh} = \lambda v^2 + \frac{1}{2}(m+\lambda h)\frac{dv^2}{dh}. \end{aligned} \tag{103}$$

将它代入微分方程 (101) 后，我们得到

$$\frac{1}{2}(m+\lambda h)\frac{dv^2}{dh} + \lambda v^2 = -(m+\lambda h)g. \tag{104}$$

为了将它写成标准形式，我们对其两边同除 $\frac{1}{2}(m+\lambda h)$ 。我们得到

$$\frac{dv^2}{dh}+2\lambda\frac{v^2}{m+\lambda h}=-2g. \tag{105}$$

令 $v^2(h)=f(h)$ ，我们就可以将它化成一个一阶线性微分方程

$$\frac{df(h)}{dh}+\frac{2\lambda}{m+\lambda h}f(h)=-2g. \tag{106}$$

与一阶线性微分方程的标准形式

$$\frac{dy(h)}{dh}+p(h)y(h)=q(h) \tag{107}$$

相比较，我们有

$$p(h)=\frac{2\lambda}{m+\lambda h},\quad q(h)=-2g. \tag{108}$$

从微分方程的理论，我们知道，方程 (107) 的通解可以写作

$$f(h)=\exp\left(-\int p(h)dh\right)\left[\int q(h)\exp\left(\int p(h)dh\right)dh+C\right]. \tag{109}$$

事实上，我们将 $f(h)$ 对于 h 求一次导数，即可得到

$$\begin{aligned}\frac{df(h)}{dh} &= \exp\left(-\int p(h)dh\right)[-p(h)]\left[\int q(h)\exp\left(\int p(h)dh\right)dh+C\right]\\ &+ \exp\left(-\int p(h)dh\right)q(h)\exp\left(\int p(h)dh\right)\\ &= -p(h)f(h)+q(h).\end{aligned} \tag{110}$$

移项后，即可得到方程 (107) 。

现在，我们要将公式 (108) 中的表达式代入一阶微分方程的通解 (109) 中。首先，我们有

$$\int p(h)dh=\int\frac{2\lambda}{m+\lambda h}dh=2\ln(m+\lambda h)=\ln(m+\lambda h)^2. \tag{111}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\int p(h)dh\right)=\exp\left[-\ln(m+\lambda h)^2\right]=\frac{1}{(m+\lambda h)^2},\\ &\exp\left(\int p(h)dh\right)=\exp\left[\ln(m+\lambda h)^2\right]=(m+\lambda h)^2,\end{aligned} \tag{112}$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int q(h)\exp\left(\int p(h)dh\right)dh = \int(-2g)(m+\lambda h)^2 dh \\
= \;& -2g\int(m+\lambda h)^2 dh = -\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda h)^3. \qquad (113)
\end{aligned}
$$

将它们代入一阶微分方程的通解 (109) 中后，我们有

$$
\begin{aligned}
f(h) \;&=\; v^2(h) = \exp\left(-\int p(h)dh\right)\left[\int q(h)\exp\left(\int p(h)dh\right)dh + C\right] \\
&=\; \frac{1}{(m+\lambda h)^2}\left(-\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda h)^3 + C\right) \\
&=\; -\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda h) + \frac{C}{(m+\lambda h)^2}. \qquad (114)
\end{aligned}
$$

由于 $v^2(h=0)=v_0^2$ ，我们得到

$$
v_0^2 = -\frac{2g}{3\lambda}m + \frac{C}{m^2}, \qquad (115)
$$

或是

$$
C = \left(v_0^2 + \frac{2g}{3\lambda}m\right)m^2 = v_0^2 m^2 + \frac{2g}{3\lambda}m^3. \qquad (116)
$$

代入 $v^2(h)$ 的表达式后，我们有

$$
v^2(h) = -\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda h) + \frac{v_0^2 m^2 + \frac{2g}{3\lambda}m^3}{(m+\lambda h)^2}. \qquad (117)
$$

当小球到达最大高度 $h_{\max}$ 时， $v^2(h_{\max})=0$ 。因此，我们有

$$
\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda h_{\max})^3 = v_0^2 m^2 + \frac{2g}{3\lambda}m^3. \qquad (118)
$$

解此方程后，我们得到

$$
h_{\max} = \frac{m}{\lambda}\left[\left(1+\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}\right)^{1/3} - 1\right]. \qquad (119)
$$

$ 2.3 伽里略相对性原理和非惯性系

对于研究质点的运动而言，参照系的选取显然不是唯一的。例如，我们既可以选取太阳作为坐标原点，也可以选取地球作为参照系的原点。然而，若参照系选取的适当，可以大大地简化我们的计算。

粗略地讲，参照系可以分为两类。一类叫做惯性参照系。在这类参照系中，牛顿力学的三个方程是成立的。第二类参照系称为非惯性参照系。在这类参照系中，牛顿力学方程不在成立。确切一点讲，相对于这一参照系的质点的加速度不仅与真实的外力有关，而且与一些虚拟的力也有关。这一点，我们在下面会讲得更为清楚。

可以证明，若两个参照系都是惯性系，则它们各自相对于对方做匀速直线运动。例如，我们可以取一个固定参照系，而让另外一个参照系相对于前者做匀速直线运动。此时，两个参照系都是惯性系。但是，若第二个参照系相对于第一个参照系做匀加速运动，那么它就不再是惯性参照系了。

两个惯性参照系彼此是完全等价的。为了将这句话的含义讲清楚，先让我们看一下，空间中同一点 P(或同一时间) 在任意两个彼此做平动的参照系中的坐标之间的变换关系。根据向量的加法规则，我们首先有

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}} = \mathbf{r}'_{\mathrm{P}} + \mathbf{R}_{O'}. \tag{120}$$

这里， $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}$ 和 $\mathbf{r}'_{\mathrm{P}}$ 为 P 点分别相对于参照系 S 和 S' 的矢径坐标。而 $\mathbf{R}_{O'}$ 则为 S' 系的坐标原点相对于 S 系的坐标。进一步，我们假设在两个参照系中的时间间隔是相同的，既我们有

$$\Delta t = \Delta t'. \tag{121}$$

这些变换关系被称为伽里略变换。

从伽里略变换出发，让我们考察同一个质点在两个彼此之间做匀速直线运动的参照系中的运动方程的改变。首先，将方程 (120) 对于时间 t 求导数后，我们有

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}_{O'}. \tag{122}$$

在对 t 求一次导数后，我们又得到

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{123}$$

这里，我们用到了假设， S' 系的坐标原点 $\mathbf{R}_{O'}$ 相对于 S 系的速度为一常向量。因此，无论是在 S 系，还是在 S' 系中，牛顿方程都可以被写作 $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ 或是 $m\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$ 的形式。这里， $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{a}'$ 是同一个外力分别在两个参照系中的表达式。自然，它们的形式可

以有所不同。总之，牛顿方程在所有彼此之间做匀速直线运动的参照系中具有相同的形式。这是两个惯性参照系彼此是完全等价性的数学表述。

至于非惯性系，问题要复杂得多。而在解决实际问题时，我们又常常不得不取一个非惯性系。例如，我们在研究离地面很近的物体的运动时，我们总是取地球作为参照系。因此，我们有必要深入地讨论质点在一个非惯性参照系中的运动。

常见的非惯性参照系有两大类。

(1) 参照系 S' 相对于一个惯性系 S 做直线加速运动。

(2) 参照系 S' 相对于一个惯性系 S 做转动。

我们先考虑第一种情况。此时，对于一个给定的质点，我们有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}. \tag{124}$$

这里， $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 分别为该质点相对于参照系 S 和 S' 的加速度。而 $\mathbf{A}$ 则为 S' 系的原点 O' 相对于参照系 S 的加速度。将其代入牛顿方程后，我们得到

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}' + \mathbf{A}\right), \tag{125}$$

或是

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - m\mathbf{A}. \tag{126}$$

我们可以将这一方程解释作，在一个相对于惯性系 S 做直线加速运动的非惯性参照系 S' 中运动的质点感受到了一个附加力 $-m\mathbf{A}$ 。它被称为惯性力，是一个虚拟力。因此，它不满足牛顿第三定律。

例 2.10: 在升降机中，当启动或停止时，人们都会感到不适。这是由惯性力的存在导致的。这个力的大小为 $\mathbf{f} = -m\mathbf{a}$ 。因此，在升降机的启动或停止期间，人体所感受的力的总和为

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} + \mathbf{f} + \mathbf{N}. \tag{127}$$

因此，对于升降机参照系而言，我们有牛顿方程

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = -mg - ma + N = 0, \tag{128}$$

或是

$$N = mg + ma \equiv mg'. \tag{129}$$

在升降机上升时，我们有 $a > 0$ 。因此， $g' = g + a > g$ 。既人体的表观重量加大，称作超重。而当升降机下降时，我们有 $a < 0$ 。因此，支撑力 N 为

$$N = mg - m|a|. \tag{130}$$

此时，人体的表观重量减小，称作失重。特别是当 $|a| = g$ 时，人体的表观重量为零，处于自由落体状态。

(2) 参照系 S' 相对于 S 做一匀速旋转。

为了说明问题，让我们仅考虑一个简化的情况。我们假设 S' 的 z- 轴与惯性系 S 的 z- 轴重合，而它绕 z- 轴做旋转。

在匀速旋转状态下， S' 在时间间隔 Δt 内旋转过的角度为 $\omega\Delta t$ 。取一个空间中的任意质点 P 。其位置矢量可以被写作

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'. \tag{131}$$

显然， $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{j}'$ 不是常向量。它们随时间的改变满足关系

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega\mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = -\omega\mathbf{i}'. \tag{132}$$

因此，我们有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + x'\omega\mathbf{j}' - y'\omega\mathbf{i}' = \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}'. \tag{133}$$

对于时间再求一次导数后，我们得到

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\dot{\dot{x}}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\mathbf{i}' + (\dot{\dot{y}}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\mathbf{j}'. \tag{134}$$

在上式中 $\dot{\dot{x}}'\mathbf{i}' + \dot{\dot{y}}'\mathbf{j}'$ 为质点相对于 S' 的加速度。第二项可以被写作

$$-2\omega\dot{y}'\mathbf{i}' + 2\omega\dot{x}'\mathbf{j}' = 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}'. \tag{135}$$

同理，上式的最后一项可以被合写为 $-\omega^2\mathbf{r}'$ 。

因此，现在牛顿方程可以被写作

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{A} = m\mathbf{a}' + 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\omega^2\mathbf{r}'. \tag{136}$$

将上式右边的第二和三项移到方程的左边后，我们得到

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + m\omega^2\mathbf{r}'. \tag{137}$$

此式右边的第二项是一个惯性力，称为科里奥里力。它与质点相对于非惯性系 S' 的相对速度 $\mathbf{v}'$ 有关。根据向量直乘的定义，它总是与 $\mathbf{v}'$ 互相垂直的。这就解释了，为什么在北半球，河流的右岸总是被冲刷得比较厉害的原因。

另外一个惯性力 (上式右边的第三项) ， $m\omega^2\mathbf{r}'$ ，则被称为惯性离心力。在 S' 系中，它总是指向 $\mathbf{r}'$ 的方向。因此，质点在此力的作用下，将是向远离旋转轴的方向逃逸。这也就是滚筒式洗衣机甩干衣服的工作原理。

例 2.11: 地球对于其表面附近的物体有吸引力，大小为 $m\mathbf{g}$ 。同时，地球又绕其自转轴做旋转。这一运动产生了一个附加的惯性离心力 $\mathbf{f}_c$ 。我们在地球表面所称得的物体重量是二者之和 $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{f}_c$ 的反作用力。它被称为物体的表观重力。根据惯性离心力的表达式，我们看到，在纬度为 ψ 的地方， $F_c = m\omega^2 R\cos\psi$ 。它比 mg 小得多。而表观重力则为

$$w = mg - F_c\cos\psi = mg - m\omega^2 R\cos^2\psi. \tag{138}$$

因此，越靠近赤道 $(\psi = 0)$ ，表观重力就越小。

例 2.12(**教科书** 56 **页上的例** 9): 宽为 $2d$ ，长为 $4d$ 的卡车车厢被车头牵引，在内半径为 R 的道路上靠边匀速顺时针行驶。车厢的后门打开着，地板的后侧中间位置有一小木箱。它与地板间的静摩擦力系数为 μ 。为使小木箱不会掉落到车外，求解卡车行驶速率的可能值。

解：如图所示，车厢中心 O 相对于地面做匀速圆周运动，速率为 v_o ，而角速度则为

$$\omega = \frac{v_\mathrm{o}}{R+d}. \tag{139}$$

因此，其向心加速度 a_o 为

$$a_\mathrm{o} = \frac{v_\mathrm{o}^2}{R+d}. \tag{140}$$

而车厢则绕其中心 O 做匀速转动，转动角速度同样为 ω 。这样，对于车厢中的物体而言，车厢是一个非惯性系。特别是其中的小木箱受到一个离心力，其大小为

$$F_c = m\omega^2 \cdot (2d), \tag{141}$$

对应的加速度为

$$\mathbf{a}_c = 2d\omega^2\mathbf{e}_\rho. \tag{142}$$

而它相对于地面参照系的加速度 $\mathbf{a}$ 则为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}_c = -\frac{v_o^2}{R+d}\mathbf{e}_R + 2d\omega^2\mathbf{e}_\rho. \tag{143}$$

也就是说，小木箱所受的力为

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = -m\frac{v_o^2}{R+d}\mathbf{e}_R + 2dm\omega^2\mathbf{e}_\rho. \tag{144}$$

由于 $\mathbf{e}_R$ 总是与 $\mathbf{e}_\rho$ 互相垂直的，故我们有

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}| &= \sqrt{\left(\frac{mv_o^2}{R+d}\right)^2 + (2dm\omega^2)^2} = \sqrt{\frac{m^2v_o^4}{(R+d)^2} + 4d^2m^2\left(\frac{v_o}{R+d}\right)^4} \\ &= \frac{mv_o^2}{(R+d)^2}\sqrt{(R+d)^2+4d^2}. \end{aligned} \tag{145}$$

若要小木箱不动，我们要求

$$|\mathbf{f}| = \frac{mv_o^2}{(R+d)^2}\sqrt{(R+d)^2+4d^2} \le \mu mg. \tag{146}$$

将 v_o 解出后，我们有

$$v_o^2 \le \frac{\mu g(R+d)^2}{\sqrt{(R+d)^2+4d^2}}. \tag{147}$$

例 2.13(**教科书** 60 **页上的例** 10): 半径为 R 的水平圆盘通过盘中心 O 点的竖直轴以角速度 ω 均匀旋转。盘上站立的射手从盘的边缘 A 处以相对于盘以水平速度 v_0 发射子弹。目标是直径 $\overline{AB}$ 另一端的 B 点。设 $\omega R \ll v_0$，并略去重力和空气阻力的影响。为击中 B，试求发射方向与直线 $\overline{AB}$ 的夹角。同时确定子弹相对于圆盘的轨迹。

解: 为解此题，我们应该采用圆盘坐标系。相对于圆盘坐标系，子弹满足运动方程

$$m\mathbf{a}' = m\dot{\mathbf{v}}' = -2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}' + m\omega^2\mathbf{r}' \approx -2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}'. \tag{148}$$

方程两边同时除以 m 后，我们得到

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -2\vec{\omega}\times\mathbf{v}' = \mathbf{v}'\times(2\vec{\omega}). \tag{149}$$

我们在前面讨论过这类形式的运动方程。由于惯性力的方向一直与子弹的速度 $\mathbf{v}'$ 垂直，故 $\mathbf{v}'$ 的大小不变。既我们有

$$|\mathbf{v}'| = v_0. \tag{150}$$

而子弹的轨迹为一圆周。其半径 r 由下面的条件

$$\frac{v'^2}{r} = \frac{v_0^2}{r} = v' \cdot (2\omega) = v_0 \cdot (2\omega) \tag{151}$$

来决定。由此，我们解出

$$r = \frac{v_0}{2\omega}. \tag{152}$$

而初始速度 $\mathbf{v}_0$ 的方向则应该沿着此圆周的切线方向。因此，我们得到

$$r \sin\theta = R, \tag{153}$$

或是

$$\sin\theta = \frac{R}{r} = R\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^{-1} = \frac{2\omega R}{v_0}. \tag{154}$$

由此，我们可以定出运动方程的轨迹。

例 2.14(**教科书** 60 **页上的例** 11): 在半径为 R 的水平光滑大圆环上再套上一个小圆环。假设大环绕其过边缘点 A 的垂直于黑板面的轴以匀角速度 ω 做逆时针旋转。开始时，小环在 A 的对径处，并沿逆时针方向相对于大环以初速 v_0 运动。试问 v_0 取何值时，小环能够到达 A 点。

解: 我们取大环作为参照系。在这一参照系中，小环上除了受到法向支撑力 $\mathbf{N}$，还受到惯性离心力 $m\omega^2\mathbf{r}'$ 以及科理奥利力 $-2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}'$。因此，它的运动由方程

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{N} - 2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}' + m\omega^2\mathbf{r}' \tag{155}$$

来决定。将此方程的两边同时点乘 $\mathbf{v}'$ 后，我们得到

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}'\cdot\frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \mathbf{v}'\cdot\mathbf{N} - \mathbf{v}'\cdot(2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}') + m\omega^2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' \\ &= m\omega^2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{r}' = m\omega^2 v'_{r'}r' = m\omega^2 r'\frac{dr'}{dt}. \end{aligned} \tag{156}$$

由此，我们得到

$$\frac{m}{2}\frac{dv'^2}{dt} = \frac{m\omega^2}{2}\frac{dr'^2}{dt}, \tag{157}$$

或是
$$\frac{dv'^2}{dt} = \omega^2 \frac{dr'^2}{dt}. \tag{158}$$
对此公式的两边求积分后，我们有
$$v'^2(r') = \omega^2 r'^2 + C. \tag{159}$$
由于当 $r' = 2R$ 时， $v'^2 = v_0^2$ ，故我们有
$$C = v_0^2 - 4\omega^2 R^2. \tag{160}$$
代入上面的解后，我们得到
$$v'^2(r') = \omega^2 r'^2 + v_0^2 - 4\omega^2 R^2. \tag{161}$$
因此，若假设小环达到 A 点时，其能量全部耗尽，既 $v'^2 = 0$ ，我们应当有
$$v_0^2 - 4\omega^2 R^2 = 0. \tag{162}$$
解此方程，我们得到
$$v_0 = \sqrt{4\omega^2 R^2} = 2\omega R. \tag{163}$$
因此，小环可以到达 A 点的条件为
$$v_0 \geq 2\omega R. \tag{164}$$

作业：教科书 71 页至 76 页 2-1， 2-2， 2-7， 2-10， 2-11， 2-13， 2-14， 2-17， 2-19， 2-20， 2-29， 2-33 题。