第五章、刚体运动

$ 5.1 质心参照系

在第三章中，我们已经介绍了有关多质点体系的质心的定义以及质心运动定理。按照定义，在实验室系中，质心的位置和速度由关系式

$$\mathbf{R}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad \mathbf{V}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M} \tag{1}$$

给出。而质心运动则由下式

$$\mathbf{F}_{\text{合}} = M\mathbf{a}_C = M\frac{d^2\mathbf{R}_c}{dt^2} \tag{2}$$

决定。除此之外，我们还证明了 König 定理

$$E_k = E_{kC} + E'_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2. \tag{3}$$

现在，我们再对角动量证明类似的关系

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + \mathbf{L}' = M\mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \tag{4}$$

成立。

证：按照角动量的定义，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}_C) \times (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_C) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{V}_C + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_C \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C. \end{aligned} \tag{5}$$

又由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_C = M\mathbf{R}_C - M\mathbf{R}_C = 0, \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_C = M\mathbf{V}_C - M\mathbf{V}_C = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

我们最后得到

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C = \mathbf{L}' + M\mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_C. \tag{7}$$

我们引入质心的概念，主要是为了建立质心参照系做准备。所谓质心系，就是质心在其中静止的参照系。显然，在没有外力的情况下，这是一个惯性系。而在有外力存在的情况下，它是一个非惯性系。又由于质心是一个点，没有内部结构，故在实验室系中不呈现自身的转动。因此，质心参照系必定是相对于实验室系作平动的参照系。特别要强调一点的是，质心参照系的原点并不一定非要取在质心上。

无论是有无外力，下面的命题都成立。

(1) 在质心系中，体系动能的改变满足方程

$$dE_k = dw_{\text{内}} + dw_{\text{外}}. \tag{8}$$

当质心系为一惯性系，这一命题是显然成立的。而当质心系为非惯性系时，我们有

$$dE_k = dw_{\text{内}} + dw_{\text{外}} + dw_{\text{惯}}. \tag{9}$$

这里， $dw_{\text{惯}}$ 代表惯性力作功的贡献。但是由于

$$dw_{\text{惯}} = \sum_{i=1}^{N} m_i(-\mathbf{a}_C)\cdot d\mathbf{r}'_i = -\mathbf{a}_C \cdot d\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}'_i\right) = -\mathbf{a}_C \cdot d(M\mathbf{R}'_C), \tag{10}$$

而在质心系中， $\mathbf{R}'_C$ 又是一个不变的向量，即 $d\mathbf{R}'_C = 0$ ，故 $dw_{\text{惯}} = 0$ 。因此， (8) 式成立。

(2) 在质心系中，若取 $\mathbf{R}'_C = 0$ ，则体系角动量的改变满足方程

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'_{\text{外}}. \tag{11}$$

这里， $\mathbf{M}'_{\text{外}}$ 为相对于质心的合外力矩。

事实上，按照定义，我们有

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'_{\text{外}} + \mathbf{M}_{\text{惯}}. \tag{12}$$

而

$$\mathbf{M}_{\text{惯}} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i(-\mathbf{a}_C) = \sum_i m_i\mathbf{r}'_i \times (-\mathbf{a}_C) = \vec{0}\times(-\mathbf{a}_C) = \vec{0}. \tag{13}$$

因此，命题成立。

例 5.1(**教科书** 154 **页上的例** 2): 在场强为 $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$ 的均匀电场中，有两个质量同为 m 的小球 A 和 B 。其中 A 球带正电荷 q ，而 B 球不带电。开始时二者皆为静止，相距为 l 。其后， A 球在电场力作用下朝 B 运动，并与 B 球发生弹性碰撞。假设碰撞过程中没有电荷的转移。接下来， A 和 B 球还会发生碰撞。试求从开始到两球发生第 $k \geq 1$ 次碰撞时，电场力对于 A 球所做之功 W 。

解: 取实验室参照系为 S_0 。在电场 $\mathbf{E}$ 的作用下，球 A 以匀加速度

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m} = \frac{qE}{m}\mathbf{i} \tag{14}$$

向 B 球运动。在经过时间

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2ml}{qE}} \tag{15}$$

后，速度达到 $\mathbf{v}_A(0) = at_0\mathbf{i}$ 并与球 B 相碰。由于质量相同且球 B 一直处于静止状态，碰撞后交换彼此的速度。现在，球 B 以速度 $\mathbf{v}'_B(0) = at_0\mathbf{i}$ 向右运动，而球 A 则变成静止。

为了简化计算，我们现在取与球 B 一起运动的参照系为 S_1 系。相对于这一参照系，刚刚碰撞后的球 A 的速度为 $\mathbf{v}_A = -at_0\mathbf{i}$ ，而球 B 的速度则为零。在电场力的作用下，球 A 将在经过时间间隔 t_0 后，相对于 S_1 系静止下来，然后再反向运动。又经过时间间隔 t_0 后，相对于 S_1 系加速到 $\mathbf{v}_A(1) = at_0\mathbf{i}$ 并与球 B 发生第二次碰撞。由于球 B 相对于 S_1 系的速度在碰撞前始终为零，故碰撞后它与球 A 交换它们相对于 S_1 系的速度。即我们有 $\mathbf{v}'_A(1) = 0, \mathbf{v}'_B(1) = at_0\mathbf{i}$ 。此时，它们相对于实验室参考系 S_0 的速度分别为

$$\mathbf{v}'_{A2}(0) = at_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}'_{B2}(0) = 2at_0\mathbf{i}. \tag{16}$$

现在，我们再取以相对于 S_0 系速度为 $\mathbf{v} = 2at_0\mathbf{i}$ ，与球 B 一起运动的参照系 S_2 。相对于这一参照系，球 B 是静止的，但球 A 的速度为 $\mathbf{v}_A = -at_0\mathbf{i}$ 。重复上面的论述，我们不难看到，在第三次碰撞之后，球 A 和球 B 相对于实验室参考系 S_0 的速度分别为

$$\mathbf{v}'_{A3}(0) = 2at_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}'_{B3}(0) = 3at_0\mathbf{i}. \tag{17}$$

依此类推，我们得到，在第 k 次碰撞之后，球 A 和球 B 相对于实验室参考系 S_0 的速度分别为

$$\mathbf{v}'_{Ak}(0) = (k-1)at_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}'_{Bk}(0) = kat_0\mathbf{i}. \tag{18}$$

因此，两个球的总动能为

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}m(kat_0)^2 + \frac{1}{2}m((k-1)at_0)^2 = \frac{1}{2}m\left(k^2+(k-1)^2\right)a^2t_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2k^2-2k+1)\left(\frac{qE}{m}\right)^2\frac{2ml}{qE} = (2k^2-2k+1)qEl. \end{aligned} \tag{19}$$

它等于电场力在整个过程所做的功 W 。

例 5.2(**教科书** 155 **页上的例** 3): 质量未必相同的两个小球 A_1 和 A_2 用无质量的轻杆连接后放在水平面上。桌上的另外一个小球 B 以垂直于杆长方向的速度朝 A_1 运动，并与 A_1 发生碰撞。试证明碰撞后瞬间 A_2 的速度为零。

解: 为了决定碰撞后 A_2 的速度，我们可以利用动量守恒与角动量守恒定理 (由于没有规定碰撞是否是弹性的，不能建立能量方程) 。

设小球碰撞前的速度为 v_0 。由于没有外力，相对于实验室参考系，我们应当有动量守恒公式

$$\begin{aligned} mv_0 &= m\widetilde{v}_m + M_1\widetilde{v}_1 + M_2\widetilde{v}_2 = m\widetilde{v}_m + (M_1+M_2)\frac{M_1\widetilde{v}_1 + M_2\widetilde{v}_2}{M_1+M_2} \\ &= m\widetilde{v}_m + (M_1+M_2)\widetilde{V}_C. \end{aligned} \tag{20}$$

这里， M_1, M_2 和 m 分别为 A_1, A_2 以及小球 B 的质量。而 $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2$ 和 $\widetilde{v}_m$ 则分别为它们碰撞后的速度，方向皆沿垂直于杆的初始位置的 y 轴。

为了建立角动量所满足的方程，我们将 M_1, M_2 及轻杆构成的子系统的质心 C 初始位置取作实验室参考系的原点。因此，我们有

$$\frac{M_1l_1 - M_2l_2}{M_1+M_2} = 0. \tag{21}$$

这里， l_1 和 l_2 分别为球 A_1 和 A_2 到质心的距离。其次，由于没有外力矩存在，我们应当有角动量守恒方程

$$L_{\text{初}} = mv_0l_1 = L_{\text{末}} = m\widetilde{v}_ml_1 + \widetilde{L}_{\text{末}}. \tag{22}$$

这里， $L_{\text{初}}$ 和 $L_{\text{末}}$ 分别为碰撞发生前后体系相对于实验室参考系原点的总角动量。而 $\widetilde{L}_{\text{末}}$ 则为由 A_1, A_2 以及轻杆构成的子系统在碰撞后相对于实验室参考系原点的总角动量。为了决定它，我们利用一个体系在实验室系和质心系中的总角动量之间的关系

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_C \tag{23}$$

并注意到在本问题中，碰撞后的由 A_1, A_2 以及轻杆构成的子系统的质心角动量 $\widetilde{L}_C = 0$(这是由于在碰撞后的瞬间，子系统的质心仍与实验室参考系的原点重合) 。因此，我们有

$$\widetilde{L}_{\text{末}} = \widetilde{L}'_{\text{末}} = M_1 l_1 \widetilde{v}'_1 + M_2 l_2 \widetilde{v}'_2 = M_1 l_1 (l_1 \omega) + M_2 l_2 (l_2 \omega). \tag{24}$$

这里， ω 为子系统的转动角速度。将它代入公式 (22) 后，我们得到

$$m v_0 l_1 = m \widetilde{v}_m l_1 + M_1 l_1 (l_1 \omega) + M_2 l_2 (l_2 \omega). \tag{25}$$

现在，我们将方程 (20) 的两边同时乘以 l_1 后再与方程 (25) 的两边相减，从而得到

$$(M_1 + M_2) \widetilde{V}_C l_1 = M_1 l_1 (l_1 \omega) + M_2 l_2 (l_2 \omega), \tag{26}$$

或是

$$\widetilde{V}_C = \frac{M_1 l_1 (l_1 \omega) + M_2 l_2 (l_2 \omega)}{(M_1 + M_2) l_1} = \frac{M_1 l_1^2 \omega + M_2 l_2^2 \omega}{(M_1 + M_2) l_1}. \tag{27}$$

得到了 $\widetilde{V}_C$ 之后，我们现在可以求 A_2 在碰撞后的速度 $\widetilde{v}_2$ 了。它应该等于 A_2 在碰撞后相对于子系统质心系的速度 $\widetilde{v}'_2 = -l_2 \omega$ 与牵连速度 $\widetilde{V}_C$ 之和。因此，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_2 &= -l_2 \omega + \widetilde{V}_C = -l_2 \omega + \frac{M_1 l_1^2 \omega + M_2 l_2^2 \omega}{(M_1 + M_2) l_1} \\ &= \frac{-l_1 l_2 (M_1 + M_2) \omega + M_1 l_1^2 \omega + M_2 l_2^2 \omega}{(M_1 + M_2) l_1} = \frac{(M_1 l_1 - M_2 l_2)(l_1 - l_2) \omega}{(M_1 + M_2) l_1}. \end{aligned} \tag{28}$$

再利用原点条件 (21) ，我们看到 $\widetilde{v}_2 = 0$ 。

例 5.3(**教科书** 159 **页上的例** 8): 考虑一个具有 N 个质点的封闭体系。假设质点之间的万有引力是线性的，即

$$\mathbf{F} = -G m_1 m_2 \mathbf{r}. \tag{29}$$

不考虑质点间相互碰撞的可能性。试求在质点系中各个质点的运动轨道和周期。

解: 由于没有外力，质心系是一个惯性系。将质心取作原点。对于第 i 个质点，我们有牛顿方程

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}'_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \left(-G m_i m_j (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \right) = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \mathbf{r}'_j - \sum_{j \neq i} G m_i m_j \mathbf{r}'_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{N} Gm_i m_j \mathbf{r}'_j - Gm_i^2\mathbf{r}'_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{N} Gm_i m_j \mathbf{r}'_i - Gm_i^2\mathbf{r}'_i\right) \\
&= Gm_i \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}'_j - Gm_i^2\mathbf{r}'_i - Gm_i\mathbf{r}'_i \sum_{j=1}^{N} m_j + Gm_i^2\mathbf{r}'_i \\
&= Gm_i M\mathbf{R}'_C - Gm_i M\mathbf{r}'_i.
\end{aligned} \tag{30}
$$

由于 $\mathbf{R}'_C = 0$ ，我们最后得到

$$
m_i \frac{d^2\mathbf{r}'_i}{dt^2} = -Gm_i M\mathbf{r}'_i. \tag{31}
$$

上面的结果表明，在质心系中，第 i 个质点所受到的合力可以等效于系统质心对其的引力。因此，它对于质心的角动量是守恒的。也就是说，它是在包含质心的一个平面中运动的。我们可以在这个平面中建立一个直角坐标系。在这个坐标系下，方程 (31) 可以改写成如下的分量形式

$$
m_i \frac{d^2x'_i}{dt^2} = -Gm_i M x'_i, \quad m_i \frac{d^2y'_i}{dt^2} = -Gm_i M y'_i. \tag{32}
$$

这些方程具有形式

$$
\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0. \tag{33}
$$

在文献中，这一方程被称为简谐振子方程。其通解可以被写作

$$
\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi_0). \tag{34}
$$

这里， $\xi_0 > 0$ 和 $\omega > 0$ 是正的实常数，分别被称为简谐振子的振幅和角频率。而角度 $-\pi \le \phi \le \pi$ 则为简谐振子的初始相位。由此我们得到

$$
x'_i(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad y'_i(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2). \tag{35}
$$

为了求得质点 i 的运动轨迹，我们需要从这两个方程中消去时间参数 t 。为此，我们先将这两个方程改写作

$$
\begin{aligned}
\frac{x'_i(t)}{A_1} &= \cos(\omega t + \phi_1) = \cos\omega t \cos\phi_1 - \sin\omega t \sin\phi_1, \\
\frac{y'_i(t)}{A_2} &= \cos(\omega t + \phi_2) = \cos\omega t \cos\phi_2 - \sin\omega t \sin\phi_2.
\end{aligned} \tag{36}
$$

我们要从这一联立方程组中解出 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 。利用行列式解法，我们先计算

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \end{vmatrix} = -\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2 = \sin(\phi_1-\phi_2),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{x_i'(t)}{A_1} & -\sin\phi_1 \\ \frac{y_i'(t)}{A_2} & -\sin\phi_2 \end{vmatrix} = -\frac{x_i'(t)}{A_1}\sin\phi_2 + \frac{y_i'(t)}{A_2}\sin\phi_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\phi_1 & \frac{x_i'(t)}{A_1} \\ \cos\phi_2 & \frac{y_i'(t)}{A_2} \end{vmatrix} = \frac{y_i'(t)}{A_2}\cos\phi_1 - \frac{x_i'(t)}{A_1}\cos\phi_2. \tag{37}$$

因此，我们得到

$$\cos\omega t = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\sin(\phi_1-\phi_2)}\left(-\frac{x_i'(t)}{A_1}\sin\phi_2 + \frac{y_i'(t)}{A_2}\sin\phi_1\right),$$

$$\sin\omega t = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\sin(\phi_1-\phi_2)}\left(-\frac{x_i'(t)}{A_1}\cos\phi_2 + \frac{y_i'(t)}{A_2}\cos\phi_1\right). \tag{38}$$

两式平方后再相加给出

$$1 = \frac{1}{\sin^2(\phi_1-\phi_2)}\left(\frac{x_i'^2}{A_1^2} + \frac{y_i'^2}{A_2^2} - \frac{2x_i'y_i'}{A_1A_2}(\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2)\right), \tag{39}$$

或是

$$\sin^2(\phi_1-\phi_2) = \frac{x_i'^2}{A_1^2} + \frac{y_i'^2}{A_2^2} - \frac{2x_i'y_i'}{A_1A_2}\cos(\phi_1-\phi_2). \tag{40}$$

这是一个椭圆方程。而第 i 个质点的运动周期则由公式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \tag{41}$$

给出。

例 5.4(**教科书** 153 **页上的例** 1): 面质量密度相同而半径分别为 R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$, $\cdots\cdots$ 的圆盘彼此相切，圆心共线地放置在一平面上。试求体系的质心 C 到第一个圆的圆心的距离。

解: 由于面质量密度是均匀的，系统各个部分的质量应该与其面积成正比。特别是其总面积为

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 + \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{R}{2^2}\right)^2 + \cdots = \pi R^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) \\ &= \frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi R^2. \end{aligned} \tag{42}$$

我们将整个系统的质量记作 $M = \rho S$ ，则

$$M = \frac{4}{3}\rho\pi R^2 \equiv \alpha R^2. \tag{43}$$

若我们去掉最大的圆盘，则剩余的圆盘的总质量为

$$\begin{aligned} M' &= \rho\pi R^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) = \frac{\rho\pi R^2}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{\rho\pi R^2}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{4}\alpha R^2 = \frac{1}{4}M. \end{aligned} \tag{44}$$

因此，大圆的质量为 $\frac{3}{4}M$ 。

现将整个系统的质心位置取作坐标原点，并设大圆的圆心位置为 $-d$ ，而去掉大圆盘之后的系统的质心 C' 的位置为 $X_{C'}$ 。那么，根据质心的定义，我们有

$$\frac{3M}{4}(-d) + \frac{M}{4}X_{C'} = 0, \tag{45}$$

或是

$$d = \frac{1}{3}X_{C'}. \tag{46}$$

为了决定 $X_{C'}$ ，我们可以参考教科书 154 页上的图 5-6 。显然，我们有以下的几何关系

$$X_{C'} = \left[\left(R + \frac{R}{2}\right) - d\right] + d'. \tag{47}$$

这里， d' 是去掉大圆盘之后的子系统的质心 C' 到第二个圆盘的圆心的距离。又考虑到这一子系统可以由原来的系统将尺度缩小一半后得到，我们有

$$d' = \frac{1}{2}d. \tag{48}$$

因此，关系式

$$X_{C'} = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}d \tag{49}$$

成立。将其代入公式 (46) 后，我们得到

$$d = \frac{1}{3}X_{C'} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}R - \frac{1}{2}d\right) = \frac{1}{2}R - \frac{1}{6}d. \tag{50}$$

从这一方程中解出 d ，我们最后有

$$d = \frac{3}{7}R. \tag{51}$$

$ 5.2 刚体的定轴转动

刚体的运动可以分为平动和转动。我们先来研究转动。

刚体最简单的转动形式是绕着空间中某一根固定轴的转动。此时，刚体上任一点 $\mathbf{r}_i$ 处的速度可以写作

$$\mathbf{v}_i = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_i = \omega R_i \mathbf{e}_\tau. \tag{52}$$

这里， R_i 为该点到转动轴的距离，而 $\mathbf{e}_\tau$ 则为切线方向，由右手螺旋法则来定。因此，整个刚体的动能可以写作

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i R_i^2 \equiv \frac{1}{2} \omega^2 I. \tag{53}$$

这里， $I = \sum_i m_i R_i^2$ 被称为刚体相对于该转动轴的转动惯量。

同理，对于体系的总角动量，我们有

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{R}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) + \sum_i z_i \mathbf{k} \times (m_i \mathbf{v}_i). \tag{54}$$

这里，我们用到了向量分解关系 $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + z_i \mathbf{k}$ 。上式的第一项求和结果是一个平行于转动轴的向量，记作

$$L_z = \sum_i \mathbf{R}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i R_i m_i \omega R_i = \sum_i R_i^2 m_i \omega = \omega I. \tag{55}$$

而第二项则是垂直于转动轴的向量。

我们看到，对于刚体的定轴转动而言，转动惯量 I 是一个重要的物理量。下面，让我们分别计算几种常见的刚体的转动惯量。

例 5.5: 考虑一质量为 m ，长度为 l 的匀质细杆。若旋转轴垂直于杆穿过质心，则其转动惯量

$$\begin{aligned} I_C &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\rho dx)\, x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{m}{l} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3 \right] = \frac{2m}{3l} \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} m l^2. \end{aligned} \tag{56}$$

同理，我们可以得到，对于垂直于杆但穿过杆的一端 A 的转动轴而言，杆的转动惯量为

$$I_A = \int_0^l (\rho dx)\, x^2 = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l = \frac{m}{3l} l^3 = \frac{1}{3} m l^2. \tag{57}$$

例 5.6: 考虑一质量为 m ，半径为 R 的匀质圆盘。若旋转轴垂直于圆盘并穿过圆心，则其转动惯量为

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^R (\rho 2\pi r dr)\, r^2 = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2m}{R^2}\, \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{m}{2R^2} R^4 = \frac{1}{2} m R^2. \end{aligned} \tag{58}$$

刚体是一种特殊的多粒子体系。因此，它的运动仍然满足质心运动定理

$$\mathbf{F}_{合} = M\mathbf{a}_C = M\frac{d^2\mathbf{R}_c}{dt^2}, \tag{59}$$

动能定理

$$W_{外} = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2, \tag{60}$$

以及角动量定理

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\beta = M^z_{外}. \tag{61}$$

这里，我们就不一一赘述了。

例 5.7(**教科书** 163 **页上的例** 9): 利用刚体动能在实验室系和质心系中所满足的关系

$$E_k = E_{kC} + E_k', \tag{62}$$

证明所谓平行轴定理：设 $\overline{\mathrm{MN}}$ 为刚体的一条转动轴，而 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 为穿过刚体质心且与 $\overline{\mathrm{MN}}$ 平行的另外一条轴。则相对于这两条轴的刚体的转动惯量 I_{MN} 和 I_{PQ} 满足恒等式

$$I_{\mathrm{MN}} = I_{\mathrm{PQ}} + Md^2. \tag{63}$$

这里， M 为刚体的总质量。而 d 则为两轴之间的距离。

证：设刚体绕固定轴 MN 转动的角速度为 ω 。则刚体在实验室系的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}I_{\mathrm{MN}}\omega^2. \tag{64}$$

而质心的速度和动能则为

$$V_C = \omega d, \quad E_{kC} = \frac{1}{2}MV_C^2 = \frac{1}{2}Md^2\omega^2. \tag{65}$$

至于刚体在质心系中的动能则为其在该系中绕轴 PQ 的转动能。考虑到在质心系中刚体的转动角速度仍为 ω ，我们有

$$E_k' = \frac{1}{2} I_{\mathrm{PQ}} \omega^2. \tag{66}$$

将这些表达式代入方程 (62)，我们即可得到

$$\frac{1}{2} I_{\mathrm{MN}} \omega^2 = \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{PQ}} \omega^2. \tag{67}$$

将方程两边同时除以 $\omega^2/2$ 后，我们得到方程 (63)。

例如，对于质量为 m ，长度为 l 的匀质细杆，我们有

$$I_{\mathrm{PQ}} = I_C = \frac{1}{12} m l^2. \tag{68}$$

而对于垂直于杆并穿过杆的一端 A 的转动轴，我们有

$$I_A = I_{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{3} m l^2. \tag{69}$$

二者之差为

$$I_A - I_C = \frac{1}{3} m l^2 - \frac{1}{12} m l^2 = \frac{l^2}{4} m = \left(\frac{l}{2}\right)^2 m. \tag{70}$$

而质心 C 到端 A 的距离正好是 $\frac{1}{2} l$ 。

例 5.8(**教科书** 168 **页上的例** 14): 匀质细杆 $\overline{\mathrm{AOB}}$ 的 A 端，B 端和中央位置 O 处各有一个光滑小孔。先让杆在光滑的水平面上绕 O 孔以角速度 ω_0 做顺时针转动。现将一光滑棍迅速插入 A 孔。插入前后无任何水平方向的移动。稳定后，在迅速拔去 A 孔内细棍的同时，再将另一光滑细棍插入 B 孔。再次稳定后，又迅速拔掉 B 孔内的细棍，同时将另外一根细棍插入 O 孔。试求最终稳定后，细杆 $\overline{\mathrm{AOB}}$ 绕 O 孔旋转的角速度的大小和方向。

解: 我们假设拔去或插入细棍过程的时间间隔如此之小，以致由此产生的外力的冲量可以忽略不计。

首先，我们取指向纸里的方向为角速度的正方向。开始时，细杆相对于质心系中过杆上 O 孔的转动轴的角动量为

$$L_{\mathrm{O}}^{(1)} = I_{\mathrm{O}} \omega_0. \tag{71}$$

注意，这也是杆相对于过桌面 (实验室系) 上的 O 孔的转动轴的角动量。同时，由于 $V_{\mathrm{O}}^{(0)} = 0$ ，相对于穿过桌面上 A 孔的固定转动轴而言，杆的角动量可以写作

$$L_{\mathrm{A}}^{(1)} = L_{\mathrm{O}}^{(1)} + MV_{\mathrm{O}}^{(0)}\frac{l}{2} = L_{\mathrm{O}}^{(1)} = I_{\mathrm{O}}\omega_0. \tag{72}$$

在 A 孔插入细棍后，细杆开始绕着穿过桌面上 A 孔的固定轴转动。稳定后，其角动量为

$$L_{\mathrm{A}}^{(2)} = I_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}}. \tag{73}$$

在这一过程中，尽管外力非零，但是外力矩始终为零。因此，我们有角动量守恒公式

$$L_{\mathrm{A}}^{(2)} = L_{\mathrm{A}}^{(1)} = L_{\mathrm{O}}^{(1)} = I_{\mathrm{O}}\omega_0 \tag{74}$$

成立。由此我们解得

$$\omega_{\mathrm{A}} = \frac{I_{\mathrm{O}}}{I_{\mathrm{A}}}\omega_0 = \frac{\frac{1}{12}ml^2}{\frac{1}{3}ml^2}\omega_0 = \frac{1}{4}\omega_0. \tag{75}$$

同时，细杆的质心 O 获得速度

$$V_{\mathrm{O}}^{(1)} = \frac{l}{2}\omega_{\mathrm{A}} = \frac{1}{8}\omega_0 l. \tag{76}$$

方向如教科书 169 页上图 5-28 所示。

在拔出 A 孔中的细棍后，又插入到 B 孔的瞬间，在实验室系中，杆相对于过 A 孔的轴的角动量不变。这导致了角动量 ω_A 不变。因此，杆相对于质心系中过质心 O 孔的轴的角速度仍为 ω_A 。由此我们得出结论，细杆相对于实验室参考系内穿过桌面上 B 孔的固定轴的角动量为

$$L_{\mathrm{B}}^{(1)} = L_{\mathrm{O}}^{(2)\prime} + L_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{O}}\omega_{\mathrm{A}} - \frac{l}{2}mV_{\mathrm{O}}^{(1)} = \frac{1}{12}ml^2\cdot\frac{1}{4}\omega_0 - \frac{1}{2}ml\cdot\frac{1}{8}\omega_0 l = -\frac{1}{24}ml^2\omega_0. \tag{77}$$

而在 B 孔插入细棍并达到稳定后，细杆的角动量为

$$L_{\mathrm{B}}^{(2)} = I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}} = L_{\mathrm{B}}^{(1)}. \tag{78}$$

因此，我们得到

$$I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}ml^2\omega_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{24}ml^2\omega_0, \tag{79}$$

或是

$$\omega_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{8}\omega_0. \tag{80}$$

结果中的负号，表示细杆此时绕穿过桌面上 B 孔的固定轴做逆时针旋转。而质心速度则为

$$V_{\mathrm{O}}^{(2)}=\frac{l}{2}\omega_{\mathrm{B}}=\frac{1}{16}l\omega_0. \tag{81}$$

方向如教科书 169 页上图 5-29 所示。

在拔出 B 孔中细棍到插入细棍到 O 孔前的瞬间，在实验室系中，杆相对于过 B 孔的轴的角动量不变。因此，相应的角速度 ω_B 亦不改变。由此我们得出结论，细杆相对于实验室参考系内穿过桌面上 O 孔的固定轴的角动量为

$$L_{\mathrm{O}}^{(2)}=L_{\mathrm{O}}^{(2)\prime}+L_C=I_{\mathrm{O}}\omega_{\mathrm{B}}. \tag{82}$$

这是由于相对于此轴而言， $L_C=0$ 。在 O 孔中插入细棍后，由于没有外力矩的作用，故在此过程中，细杆相对于穿过桌面上 O 孔的固定轴角动量是守恒的。因此，我们有

$$L_{\mathrm{O}}^{(2)}=I_{\mathrm{O}}\omega_{\mathrm{B}}=L_{\mathrm{O}}^{(3)}=I_{\mathrm{O}}\omega, \tag{83}$$

或是

$$\omega=\omega_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{8}\omega_0. \tag{84}$$

例 5.9(**教科书** 169 **页上的例** 15): 在水平固定的光滑刚性杆上，同轴地套有半径皆为 R ，质量分别为 M_1 和 M_2 的两个匀质圆柱体。开始时， M_1 以角速度 ω_0 绕细杆转动，同时以速度 v_0 朝 M_2 运动。而 M_2 则处于完全静止状态。在二者发生碰撞时，水平方向上的碰撞可假设为在接触面上均匀分布。接触面的摩擦系数取作 μ 。碰撞过程中，M_2 并无水平方向上的平动。而 M_1 则以原速率 v_0 弹回。试求碰撞后， M_1 和 M_2 各自的角速度？

解: 假设碰撞时，两个圆柱之间的平均碰撞力为 $\overline{N}$ ，作用时间间隔为 Δt 。根据冲量定理，我们有

$$-M_1v_0-(M_1v_0)=-2M_1v_0=-\overline{N}\Delta t. \tag{85}$$

引入碰撞力的面密度

$$\bar{n}=\frac{\overline{N}}{\pi R^2}, \tag{86}$$

则平均摩擦力对于圆柱体 M_1 和 M_2 产生的力矩皆为

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \int_0^R [\mu(\bar{n}\cdot 2\pi r\,dr)]\ r = 2\pi\mu\int_0^R \frac{\overline{N}}{\pi R^2}\,r^2 dr \\ &= 2\mu\frac{\overline{N}}{R^2}\int_0^R r^2\,dr = \frac{2}{3}\,\mu\overline{N}R. \end{aligned} \tag{87}$$

因此，在 Δt 时间间隔内，圆柱 M_1 和 M_2 分别获得平均角加速度

$$\bar{\beta}_1 = -\frac{\overline{M}}{I_1} = -\frac{\frac{2}{3}\,\mu\overline{N}R}{\frac{1}{2}\,M_1R^2} = -\frac{4\mu\overline{N}}{3M_1R}, \qquad \bar{\beta}_2 = \frac{\overline{M}}{I_2} = \frac{4\mu\overline{N}}{3M_2R}. \tag{88}$$

经过时间间隔 Δt 后，二者分开。此后，各自具有恒定的角速度

$$\omega_1 = \omega_0 + \bar{\beta}_1\Delta t = \omega_0 - \frac{4\mu}{3M_1R}(\overline{N}\Delta t) = \omega_0 - \frac{4\mu}{3M_1R}(2M_1v_0) = \omega_0 - \frac{8\mu v_0}{3R} \tag{89}$$

和

$$\omega_2 = \bar{\beta}_2\Delta t = \frac{8\mu v_0}{3R}\frac{M_1}{M_2}. \tag{90}$$

需要强调一点的是，上面给出的解仅在

$$\omega_2 \leq \omega_1 \tag{91}$$

时适用。当 $\omega_1 = \omega_2$ 时，摩擦力消失，二者的角速度将不再改变。此时，圆柱 M_1 初始的角动量全部转化为 M_1 与 M_2 的共同角动量。根据角动量守恒定理，我们有

$$I_1\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega_2. \tag{92}$$

因此，我们有

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{I_1\omega_0}{I_1 + I_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\omega_0. \tag{93}$$

$ 5.3 平面运动

$ 5.3.1 刚体运动学描述

任取刚体上的两点 A 和 B 。我们有

$$\mathbf{V}_{\mathrm{B}} = \mathbf{V}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{BA}}, \quad \mathbf{V}_{\mathrm{A}} = \mathbf{V}_{\mathrm{B}} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{AB}} = \mathbf{V}_{\mathrm{B}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{BA}}. \tag{94}$$

比较两式，我们得到

$$\vec{\omega}_{\mathrm{A}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{BA}} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}} \times \mathbf{R}_{\mathrm{BA}}. \tag{95}$$

由于 A 和 B 两点是任意的，故我们进一步有

$$\vec{\omega}_{\mathrm{A}} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}}. \tag{96}$$

既相对于任何转动轴，刚体运动的角速度是一样的。

现在，我们取定刚体中一点 A 。则在实验室参照系中，总会存在一点 M ，其在时刻 t 的速度

$$\mathbf{V}_{\mathrm{M}} = \mathbf{V}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \times \mathbf{R}_{\mathrm{MA}} = 0. \tag{97}$$

这一点，称为 t 时刻的刚体瞬时转动中心。为了确定其位置，我们可以将上式两边同时与 t 时刻的刚体角速度 $\vec{\omega}(t)$ 做直乘。由此我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\omega}(t) \times \mathbf{V}_{\mathrm{A}}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \mathbf{R}_{\mathrm{MA}}) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \mathbf{V}_{\mathrm{A}}(t) + \vec{\omega}(t)(\vec{\omega}(t) \cdot \mathbf{R}_{\mathrm{MA}}) - (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{\omega}(t))\mathbf{R}_{\mathrm{MA}}(t) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \mathbf{V}_{\mathrm{A}}(t) - \omega^2(t)\mathbf{R}_{\mathrm{MA}}(t). \end{aligned} \tag{98}$$

从这一方程，我们解得

$$\mathbf{R}_{\mathrm{MA}}(t) = \frac{1}{\omega^2(t)}\vec{\omega}(t) \times \mathbf{V}_{\mathrm{A}}(t). \tag{99}$$

从公式 (99) 我们可以看到， $\mathbf{R}_{\mathrm{MA}}$ 总是与 $\mathbf{V}_{\mathrm{A}}$ 垂直的。因此，若我们能找到刚体上的两点 A 和 B ，它们在 t 时刻具有不共线的速度 $\mathbf{V}_{\mathrm{A}}$ 和 $\mathbf{V}_{\mathrm{B}}$ ，则我们可以利用作图法决定瞬时转动中心的位置 M 。在瞬时转动中心确定以后，刚体上任一点 P 在时刻 t 的速度可以写作

$$\mathbf{V}_{\mathrm{P}} = \mathbf{V}_{\mathrm{M}} + \vec{\omega}(t) \times \mathbf{R}_{\mathrm{PM}} = \vec{\omega}(t) \times \mathbf{R}_{\mathrm{PM}}. \tag{100}$$

而过 M 的转动轴也称为瞬时转动轴。

需要强调一点的是，瞬时转动中心在时刻 t 的速度按照定义为零，但其加速度并不一定为零。

例 5.10(**教科书** 173 **页上的例** 17): 半径为 r 的小环 A 沿着半径为 R 的固定圆环 B 的外侧做纯转动滚动。 A 的环心绕着 B 的环心做圆周运动的角速度记为 ω_θ 。试求

(1) A 环绕着环心 O 转动的角速度 ω_ϕ 。

(2) A 环瞬心 M 的加速度的向心分量 a_n 和切向分量 a_τ 。

解：从图中 B 的圆心看， O 点的速度应为

$$V_O = (R+r)\omega_\theta. \tag{101}$$

同时， M 点处为瞬时转动中心。因此，根据伽里略变换，我们又可以相对瞬时转动中心将 V_O 写作

$$V_O = V_{\mathrm{M}} + r\omega_\phi = r\omega_\phi. \tag{102}$$

这里， ω_ϕ 为 A 环绕穿过瞬时转动中心的轴的转动角速度。在平面运动中，它也等于 A 环绕穿过其中心 O 点的轴的转动角速度。将两个方程联立求解后，我们得到

$$(R+r)\omega_\theta = r\omega_\phi. \tag{103}$$

因此，我们有

$$\omega_\phi = \frac{R+r}{r}\omega_\theta. \tag{104}$$

瞬心的加速度为

$$\mathbf{a}_{\mathrm{M}} = \mathbf{a}'_{\mathrm{M}} + \mathbf{a}_{\mathrm{O}} = \mathbf{a}'_{\mathrm{M}} + \mathbf{a}_{\text{牵连}}. \tag{105}$$

又由于

$$a_{\mathrm{O}n} = -\frac{V_O^2}{R+r}\mathbf{j} = -(R+r)\omega_\theta^2\mathbf{j}, \quad a_{\mathrm{O}\tau} = (R+r)\frac{d\omega_\theta}{dt}\mathbf{i}, \tag{106}$$

以及

$$a'_{\mathrm{M}n} = r\omega_\phi^2\mathbf{j}, \quad a'_{\mathrm{M}\tau} = -r\frac{d\omega_\phi}{dt}\mathbf{i}, \tag{107}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\mathrm{M}} &= \left[(R+r)\dot{\omega}_\theta - r\dot{\omega}_\phi\right]\mathbf{i} + \left[-(R+r)\omega_\theta^2 + r\omega_\phi^2\right]\mathbf{j} \\
&= \left[-(R+r)\omega_\theta^2 + r\omega_\phi^2\right]\mathbf{j} \\
&= \left[-(R+r)\omega_\theta^2 + r\frac{(R+r)^2}{r^2}\omega_\theta^2\right]\mathbf{j} \\
&= \left[\frac{R+r}{r} - 1\right](R+r)\omega_\theta^2\,\mathbf{j} = \frac{R}{r}(R+r)\omega_\theta^2\,\mathbf{j}.
\end{aligned} \tag{108}$$

例 5.11(**教科书** 175 **页上的例** 19): 在水平地面上用手按动半径为 R 的乒乓球，使其获得向右的初速度 v_0 和逆时针方向的转动角速度 ω_0 。若将乒乓球处理作匀质薄球壳，并设它与地面间的摩擦系数为 μ 。试求乒乓球最后达到的稳定运动状态。

解：设摩擦力为 $\mathbf{f}$ 。则我们有联立方程

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}_c, \quad \mathbf{M}_{\text{外}} = \mathbf{R} \times \mathbf{f} = -fR\mathbf{j} = I\beta\mathbf{j}. \tag{109}$$

由于 $f = \mu mg$, $I = \frac{2}{3}mR^2$ (见教科书 164 页上的例 11) ，我们看到，这是一个匀加速运动，即我们有 $\beta = -\frac{fR}{I} = -\frac{3\mu g}{2R}$ 。因此，我们得到

$$v = v_0 - a_c t = v_0 - \mu g t. \tag{110}$$

又由于

$$\omega = \omega_0 + \beta t = \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu g}{R}t = 0, \tag{111}$$

故我们有三种可能的稳定运动状态。

(1) 在经过时间 t 后，同时达到 $v = 0$ 和 $\omega = 0$ 。既

$$v_0 - a_c t = 0, \quad \omega = \omega_0 - \frac{3\mu g}{2R}t = 0. \tag{112}$$

从这两个方程中消去 t 后，我们得到

$$v_0 = \frac{2}{3}\omega_0 R. \tag{113}$$

也就是说，在满足这一条件的情况下，在时刻 t 之后，乒乓球处于静止状态。

(2) 在经过时间 t 后， ω 变成零，但是 $v > 0$ 。此时，我们有

$$v_0 - \mu g t > 0, \quad \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu g}{R}t = 0. \tag{114}$$

从第二个方程，我们解出

$$t = \frac{2R}{3\mu g}\omega_0. \tag{115}$$

代入第一个方程后，我们得到

$$v_0 > \mu g \cdot \frac{2R}{3\mu g}\omega_0 = \frac{2}{3}R\omega_0. \tag{116}$$

此后，摩擦力的方向仍然向左，且 $\mathbf{a}_c$ 和 β 依旧。现在，我们重新记时。初始的速度现在为

$$v_1 = v_0 - \mu g t = v_0 - \mu g \cdot \frac{2R}{3\mu g}\omega_0 = v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0, \tag{117}$$

而初始角速度为 $\omega_1 = 0$ 。在经过时刻 $\widetilde{t}$ 后，我们有

$$\mathbf{v} = (v_1 - a\widetilde{t})\mathbf{i} = \left[\left(v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0\right) - \mu g\widetilde{t}\right]\mathbf{i}, \quad \vec{\omega} = -\frac{3\mu g}{2R}\widetilde{t}\mathbf{j}. \tag{118}$$

在经过一段时间后，我们肯定会有

$$v = \omega R. \tag{119}$$

而对应的时间则为

$$v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0 - \mu g\widetilde{t} = \frac{3\mu g}{2R}\widetilde{t}R, \tag{120}$$

或是

$$v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0 = \frac{5\mu g}{2}\widetilde{t}. \tag{121}$$

由此解得

$$\widetilde{t} = \frac{v_0 - \frac{2}{3}R\omega_0}{\frac{5\mu g}{2}}. \tag{122}$$

在此之后，摩擦力消失，而乒乓球进入稳定的向右纯滚动状态。

(3) 若经过时刻 t 后，我们有 $v = 0$ 和 $\omega > 0$ ，既

$$v_0 - \mu g t = 0, \quad \omega_0 - \frac{3\mu g}{2R}t > 0, \tag{123}$$

则从第一个方程解得 $t = \frac{v_0}{\mu g}$ 后，代入第二个方程得到

$$\omega_0 > \frac{3\mu g}{2R}t = \frac{3\mu g}{2R}\frac{v_0}{\mu g} = \frac{3v_0}{2R}. \tag{124}$$

此后，摩擦力的方向仍然向左。重新记时后，乒乓球的速度和角速度分别为

$$\mathbf{v} = -a\widetilde{t}\mathbf{i}, \quad \vec{\omega} = (\omega_1 + \beta\widetilde{t})\mathbf{j} = \left[\left(\omega_0 - \frac{3v_0}{2R}\right) - \frac{3\mu g}{2R}\widetilde{t}\right]\mathbf{j}. \tag{125}$$

同理，到某一时刻 $\widetilde{t}_0$ 后，我们有

$$a\widetilde{t}_0 = \mu g\widetilde{t}_0 = \omega(\widetilde{t})R = \left(\omega_0 - \frac{3v_0}{2R} - \frac{3\mu g}{2R}\widetilde{t}_0\right)R. \tag{126}$$

由此，我们解得

$$\widetilde{t}_0 = \frac{\omega_0 - \frac{3v_0}{2R}}{\frac{5}{2}\mu g} R. \tag{127}$$

在这一时刻之后，乒乓球进入向左的纯滚动状态。

例 5.12(**教科书** 177 **页上的例** 20): 匀质细杆直立在光滑地面上。从静止状态释放后，因不稳定而滑行地倾倒。试问，在细杆全部着地前，它的下端是否会跳离地面。

解: 如图 5-43 所示，细杆一共受到两个力，重力 $-mg\mathbf{j}$ 和地面对它的支撑力 $N\mathbf{j}$ 。在滑行的任一时刻，下端不脱离地面的条件是 $N \geq 0$ 。这是我们解此题的判据。

当细杆处于于与地面成 θ 角的位置时，其质心的速度是沿 $\mathbf{j}$ 的负方向的，而下端速度的方向则指向右边。由此，我们可以定出瞬心的位置 M 。设此时细杆的角速度为 ω 。则细杆质心的速度为

$$\mathbf{V}_c = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_c = \omega r_c = \omega \frac{l}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}\omega l \sin\theta. \tag{128}$$

因此，细杆的总动能为

$$E_K = E'_K + \frac{1}{2}mV_c^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\omega l \sin\theta\right)^2, \tag{129}$$

而其势能则为

$$\begin{aligned} E_P &= \int_0^l \left(\rho(d\tilde{l})g\right)\tilde{l}\cos\theta = \rho g\cos\theta \int_0^l \tilde{l}d\tilde{l} = \rho g \cos\theta \frac{l^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\rho l)gl\cos\theta = \frac{1}{2}mlg\cos\theta. \end{aligned} \tag{130}$$

因此，细杆的总机械能为

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{l^2}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{2}mlg\cos\theta. \tag{131}$$

特别是，当 $\theta = 0$(既细杆从静止状态释放) 时，我们有

$$E(\theta = 0) = \frac{1}{2}mlg. \tag{132}$$

因此，利用机械能守恒定理，并将细杆对于过其质心的转动惯量 $I_c = \frac{1}{12}ml^2$ 代入后，我们有

$$\frac{1}{2}mlg(1 - \cos\theta) = \left(\frac{1}{24}ml^2 + \frac{1}{8}ml^2\sin^2\theta\right)\omega^2, \tag{133}$$

或是

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}mlg(1-\cos\theta)}{\frac{1}{24}ml^2+\frac{1}{8}ml^2\sin^2\theta} = \frac{\frac{1}{2}mlg(1-\cos\theta)}{\frac{1}{24}(1+3\sin^2\theta)ml^2} = \frac{12g(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^2\theta)l}. \tag{134}$$

由此我们解得

$$\omega = \sqrt{\frac{12g(1-\cos\theta)}{(1+3\sin^2\theta)l}}. \tag{135}$$

将它代入质心速度的表达式后，我们得到

$$V_c = \frac{1}{2}l\omega\sin\theta = \sqrt{3lg}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}\sin\theta. \tag{136}$$

对此式的两边取导数后，我们得到

$$\begin{aligned}
a_c &= \frac{dV_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{3lg}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}\sin\theta\right)\\
&= \frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{3lg}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{3lg}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}\sin\theta\right)\omega\\
&= \sqrt{3lg}\omega\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}}}\frac{d}{d\theta}\frac{(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3lg}\omega\frac{\sqrt{\frac{12g}{l}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}\sqrt{\frac{12g}{l}}\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\frac{(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}\\
&= \frac{\sqrt{36}g}{2\sin\theta}\frac{1}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}\Big[\left(\sin^3\theta+(1-\cos\theta)2\sin\theta\cos\theta\right)\left(1+3\sin^2\theta\right)\\
&- (1-\cos\theta)\sin^2\theta\,(6\sin\theta\cos\theta)\Big]\\
&= 3g\frac{\left(\sin^2\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta\right)\left(1+3\sin^2\theta\right)-6\cos\theta\sin^2\theta\,(1-\cos\theta)}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}\\
&= 3g\frac{1}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}\Big(\sin^2\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta+3\sin^4\theta+6\cos\theta\sin^2\theta\\
&- 6\cos^2\theta\sin^2\theta-6\cos\theta\sin^2\theta+6\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\\
&= 3g\frac{\sin^2\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta+3\sin^4\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}.
\end{aligned} \tag{137}$$

由于

$$-ma_c = N - mg, \tag{138}$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
N &= mg - ma_c = mg - 3mg\frac{\sin^2\theta + 2\cos\theta - 2\cos^2\theta + 3\sin^4\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2} \\
&= mg\frac{1 + 6\sin^2\theta + 9\sin^4\theta - 3\sin^2\theta - 6\cos\theta + 6\cos^2\theta - 9\sin^4\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2} \\
&= mg\frac{1 + 3\sin^2\theta + 6\cos^2\theta - 6\cos\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2} \\
&= mg\frac{1 + 3\left(1-\cos^2\theta\right) + 6\cos^2\theta - 6\cos\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2} \\
&= mg\frac{4 + 3\cos^2\theta - 6\cos\theta}{\left(1+3\sin^2\theta\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{139}
$$

由于函数

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4 \tag{140}$$

是一个恒为正的非零函数，故我们有 $N > 0$ 。也就是说，在整个滑行过程中，细杆的下端都不会离开地面。

例 5.13(**教科书** 178 **页上的例** 21): 如图 5-45 所示，表面是几何光滑的刚体无转动地竖直下落。图中的虚线对应过刚体唯一的最低点 P_1 的水平切平面，而竖直虚线 $\overline{P_1P_2}$ 对应过 P_1 点的铅垂线。 C 是刚体的质心。设 C 与铅垂线 $\overline{P_1P_2}$ 确定的竖直平面为图平面。将 C 到 $\overline{P_1P_2}$ 的距离记作 d 。刚体的质量记作 m ，刚体相对于过 C 且与图平面垂直的水平转轴的转动惯量记作 I_C 。并且假设 $I_C > md^2$ 成立。已知刚体与水平地面将发生的碰撞是弹性的，且无水平摩擦力。试在刚体中找出这样的点。它们在刚体与地面碰撞前后的瞬间，具有大小相等，方向相反的速度。

解：设刚体落地速度大小为 v_0 ，与地面碰撞过程中受到的冲量为

$$I = \overline{N}\Delta t. \tag{141}$$

则其动量改变为

$$mv_C - (-mv_0) = m(v_0 + v_C) = \overline{N}\Delta t. \tag{142}$$

这里， v_C 为刚体质心在碰撞后时刻的速度。同时， $\overline{N}$ 所产生的力矩的大小为

$$\overline{M} = \overline{N}d. \tag{143}$$

根据质心系中的角动量定理

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}_{外}, \tag{144}$$

我们有

$$\Delta L' = L_1' - L_0' = I_C\omega - 0 = I_C\omega = \overline{M}\Delta t = \overline{N}d\Delta t. \tag{145}$$

因此，此时刚体的总动能为

$$E_K = E_K' + E_C = \frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2. \tag{146}$$

因为碰撞是弹性的，它应该等于刚体碰地瞬间的动能 $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$ 。因此，我们有

$$\frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_0^2, \tag{147}$$

或是

$$\frac{1}{2}I_C\frac{(\overline{N}\Delta t)^2d^2}{I_C^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{\overline{N}\Delta t}{m} - v_0\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{148}$$

由此解得

$$\frac{1}{2I_C}d^2\left(\overline{N}\Delta t\right)^2 + \frac{m}{2}\frac{\left(\overline{N}\Delta t\right)^2}{m^2} - \frac{1}{2}\times 2\frac{m}{m}\left(\overline{N}\Delta t\right)v_0 = 0, \tag{149}$$

或是

$$\left(\frac{d^2}{2I_C} + \frac{1}{2m}\right)\left(\overline{N}\Delta t\right) = v_0. \tag{150}$$

由此，我们解得

$$\overline{N}\Delta t = \frac{v_0}{\frac{d^2}{2I_C} + \frac{1}{2m}} = \frac{2mI_Cv_0}{I_C + md^2}. \tag{151}$$

因此，我们有

$$\omega = \frac{\left(\overline{N}\Delta t\right)d}{I_C} = \frac{2mI_Cv_0}{I_C + md^2}\frac{d}{I_C} = \frac{2mdv_0}{I_C + md^2}, \tag{152}$$

而

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{\overline{N}\Delta t}{m} - v_0 = \frac{2I_Cv_0}{I_C + md^2} - v_0 \\ &= \frac{2I_Cv_0 - I_Cv_0 - md^2v_0}{I_C + md^2} - v_0 = \frac{I_C - md^2}{I_C + md^2}v_0 > 0. \end{aligned} \tag{153}$$

因此，对于 P_0 而言，我们有

$$v_{P_0} = v_C + \omega d = \frac{I_C - md^2}{I_C + md^2} v_0 + \frac{2md^2}{I_C + md^2} v_0 = v_0. \tag{154}$$

这是满足题目要求的解。

例 5.14(**教科书** 179 **页上的例** 23): 某恒星体系中，小行星 A 沿半径为 R_1 ，以恒星为原点的圆轨道运行。小行星 B 沿抛物线轨道运行。 B 在近恒星点处与恒星的距离为 $\sqrt{2}R_1$ ，并且两条轨道在同一平面上，运行方向相同。已知 A 和 B 均为半径为 r_0 ，密度相同的均质球体。它们的自转角速度同为 ω_0 ，且转轴与轨道平面垂直，旋转方向如图 5-48 所示。若 A 运动到近恒星点时， B 也恰好运动图中所示的位置。随后，二者迅速合并为一个密度不变的新的匀质星体。试问： (1) 新行星的自转角速度为何？ (2) 新的星体绕恒星运动的轨道是什么曲线。

解: 将恒星的质量记作 M ，小行星的质量记作 $m_A = m_B = m$ 。则小行星绕其穿过中心轴的转动惯量为

$$I_A = I_B = \frac{2}{5} m r_0^2. \tag{155}$$

合并以后，新的行星的质量，半径和绕穿过中心轴转动惯量分别为

$$\widetilde{m} = 2m, \quad \widetilde{r} = 2^{1/3}\, r_0, \quad \widetilde{I} = \frac{2}{5}(2m)\left(2^{1/3} r_0\right)^2 = \frac{4 \cdot 4^{1/3}}{5} m r_0^2. \tag{156}$$

在合并前，小行星 A 的轨道速度为

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}, \tag{157}$$

而小行星 B 的速度则由沿抛物线运行的行星的总机械能为零这一事实来决定。因此，我们有

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{GMm}{R_2} = 0. \tag{158}$$

由此，我们解得

$$v_B = \sqrt{\frac{2GM}{R_2}} = \sqrt{\frac{2GM}{\sqrt{2}R_1}} = 2^{1/4}\sqrt{\frac{GM}{R_1}} = 2^{1/4} v_A. \tag{159}$$

因此，两个行星的质心到恒星的距离为

$$R_C = \frac{mR_1 + mR_2}{2m} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})R_1, \tag{160}$$

而质心速度则为

$$V_C = \frac{mv_A + mv_B}{2m} = \frac{1}{2}(1 + 2^{1/4})v_A. \tag{161}$$

在合并时，两个小行星在质心处形成新的行星。因此，新行星的中心到恒星的距离为

$$R_0 = R_C = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})R_1. \tag{162}$$

并且对于恒星的角动量应该守恒。故我们有

$$(2m)V_C R_C + \widetilde{I}\omega = mv_A R_1 + mv_B R_2 + I_A\omega_0 + I_B\omega_0, \tag{163}$$

或是

$$(2m)V_C R_C + \frac{4 \cdot 4^{1/3}}{5} m r_0^2 \omega = mv_A R_1 + mv_B R_2 + 2 \cdot \frac{2}{5} m r_0^2 \omega_0. \tag{164}$$

由此方程，我们解得 ω 为

$$\omega = \frac{5}{8\sqrt[3]{4}}\left(1 + 8^{1/4} - 2^{1/4} - \sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{GMR_1}}{r_0^2} + \frac{1}{4^{1/3}}\omega_0. \tag{165}$$

新的行星形成后，其轨道能量为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(2m)V_C^2 - \frac{GM(2m)}{R_C} = m\left[\frac{1}{2}\left(1 + 2^{1/4}\right)\sqrt{\frac{GM}{R_1}}\right]^2 - \frac{GM(2m)}{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)R_1} \\ &= \frac{m}{4}\left(1 + 2^{1/4}\right)^2 \frac{GM}{R_1} - \frac{4GMm}{\left(1 + \sqrt{2}\right)R_1} \\ &= \left[\frac{1}{4}\left(1 + 2^{1/4}\right)^2 - \frac{4}{1 + \sqrt{2}}\right]\frac{GMm}{R_1} < 0. \end{aligned} \tag{166}$$

因此，新行星的运行轨道是一个椭圆。

例 5.15(**教科书** 181 **页上的例** 24): 瞬时转动轴定理。

刚体在做平面运动时，其瞬心位置是随时间改变的。因此，刚体相对于瞬时轴的转动惯量也会随时间改变。将 t 时刻外力对于瞬时转动轴的力矩之和记作 $\mathbf{M}_{外,M}$ 。则我们有

$$\mathbf{M}_{外,M} = I_M \beta + \frac{1}{2}\omega\frac{dI_M}{dt} \tag{167}$$

成立。

证：首先，任取与刚体一起运动的参照系上的固定一点 $\widetilde{\mathrm{M}}$(不一定是瞬时转动中心) 。在随 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 点运动的参照系中，我们有

$$I_{\widetilde{\mathrm{M}}}\dot{\vec{\omega}} = \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i(-\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}}). \tag{168}$$

这里， $\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}}$ 为 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 点在实验室系中的加速度。相对于 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 点而言，质心的速度为

$$\mathbf{V}'_C = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_C. \tag{169}$$

因此，反过来，在质心系中， $\widetilde{\mathrm{M}}$ 点的速度为

$$\mathbf{v}'_{\widetilde{\mathrm{M}}} = \vec{\omega} \times (-\mathbf{r}_C). \tag{170}$$

而它相对于实验室系的速度为

$$\mathbf{v}_{\widetilde{\mathrm{M}}} = \mathbf{v}'_{\widetilde{\mathrm{M}}} + \mathbf{v}_C = \vec{\omega} \times (-\mathbf{r}_C) + \mathbf{v}_C. \tag{171}$$

将之对于时间求导后，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}} &= \dot{\mathbf{v}}_{\widetilde{\mathrm{M}}} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times (-\mathbf{r}_C)] + \frac{d}{dt}\mathbf{v}_C \\
&= \dot{\vec{\omega}} \times (-\mathbf{r}_C) + \vec{\omega} \times (-\dot{\mathbf{r}}_C) + \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= \vec{\beta} \times (-\mathbf{r}_C) + \vec{\omega} \times (-\mathbf{V}'_C) + \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= \vec{\beta} \times (-\mathbf{r}_C) + \vec{\omega} \times [-(\vec{\omega} \times \mathbf{r}_C)] + \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= -\vec{\beta} \times \mathbf{r}_C - \vec{\omega}\,(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}_C) + \omega^2\mathbf{r}_C + \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= -\vec{\beta} \times \mathbf{r}_C + \omega^2\mathbf{r}_C + \dot{\mathbf{v}}_C.
\end{aligned} \tag{172}$$

将 $\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}}$ 代入方程 (168) 后，我们有

$$\begin{aligned}
I_{\widetilde{\mathrm{M}}}\vec{\beta} &= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i\right) \times (-\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}}) \\
&= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + m\mathbf{r}_C \times (-\mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}}) = \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} - m\mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_{\widetilde{\mathrm{M}}} \\
&= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} - m\mathbf{r}_C \times \left(-\vec{\beta} \times \mathbf{r}_C + \omega^2\mathbf{r}_C + \dot{\mathbf{v}}_C\right) \\
&= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + m\mathbf{r}_C \times (\vec{\beta} \times \mathbf{r}_C) - m\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + mr_C^2\vec{\beta} - m\left(\mathbf{r}_C \cdot \vec{\beta}\right)\mathbf{r}_C - m\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{v}}_C \\
&= \mathbf{M}_{外,\widetilde{\mathrm{M}}} + mr_C^2\vec{\beta} - m\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{v}}_C.
\end{aligned} \tag{173}$$

为了求得最后一项，我们现在取 $\widetilde{\mathrm{M}}$ 点为 t 时刻的瞬时转动中心 M 点，并利用过 M 点的垂直轴为瞬时转动轴这一事实。也就是说，我们有

$$\mathbf{v}_{\mathrm{M}} = \mathbf{v}'_{\mathrm{M}} + \mathbf{v}_C = \vec{\omega} \times (-\mathbf{r}_C) + \mathbf{v}_C = 0. \tag{174}$$

由此，我们解得

$$\mathbf{v}_C = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_C. \tag{175}$$

对于时间求导后，我们有

$$\dot{\mathbf{v}}_C = \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}_C + \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_C. \tag{176}$$

将它代入方程 (173) 后，我们得到

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{M}}\vec{\beta} &= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} + mr_C^2\vec{\beta} - m\mathbf{r}_C \times (\vec{\beta} \times \mathbf{r}_C) - m\mathbf{r}_C \times (\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_C) \\
&= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} + mr_C^2\vec{\beta} - mr_C^2\vec{\beta} + m(\mathbf{r}_C \cdot \vec{\beta})\mathbf{r}_C - m\vec{\omega}(\mathbf{r}_C \cdot \dot{\mathbf{r}}_C) + m(\mathbf{r}_C \cdot \vec{\omega})\dot{\mathbf{r}}_C \\
&= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - m\vec{\omega}(\mathbf{r}_C \cdot \dot{\mathbf{r}}_C) = \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - \frac{1}{2}m\vec{\omega}\frac{dr_C^2}{dt} \\
&= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\vec{\omega}\frac{d}{dt}(mr_C^2) = \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\vec{\omega}\frac{d}{dt}(I_{\mathrm{M}} - I_C) \\
&= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\vec{\omega}\frac{dI_{\mathrm{M}}}{dt} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\frac{dI_C}{dt} \\
&= \mathbf{M}_{外,\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\vec{\omega}\frac{dI_{\mathrm{M}}}{dt}.
\end{aligned} \tag{177}$$

将此式右边的第二项移到左边之后，我们即可得到瞬时转动轴定理。

\$ 5.4 **刚体的定点转动**

上面，我们讨论了刚体在平面，也就是二维空间中的运动。在三维空间中，刚体所能做的最简单的转动为定点转动。此时，我们可以将刚体的运动视作绕原点的转动。而刚体上每一点的速度都可以写作

$$\mathbf{v}_i(t) = \vec{\omega}_i(t) \times \mathbf{r}_i(t). \tag{178}$$

下面，我们要论证，角速度 $\vec{\omega}_i(t)$ 实际上是一个不依赖于位置的向量。既我们有

$$\vec{\omega}_i(t) = \vec{\omega}(t) \tag{179}$$

成立。

任取两个点 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_j$ 。先假设它们是共线的。既 $\mathbf{r}_i(t)=\alpha\mathbf{r}_j(t)$ 。这里， α 是一个实常数。取对于时间的导数后，我们有

$$\mathbf{v}_i=\dot{\mathbf{r}}_i(t)=\alpha\dot{\mathbf{r}}_j(t)=\alpha\mathbf{v}_j(t). \tag{180}$$

由此我们得到

$$\mathbf{v}_i=\vec{\omega}_i(t)\times\mathbf{r}_i(t)=\alpha\mathbf{v}_j(t)=\alpha[\vec{\omega}_j(t)\times\mathbf{r}_j(t)]=\vec{\omega}_j(t)\times(\alpha\mathbf{r}_j(t))=\vec{\omega}_j(t)\times\mathbf{r}_i(t). \tag{181}$$

因此，我们有

$$\vec{\omega}_i(t)=\vec{\omega}_j(t). \tag{182}$$

若 $\mathbf{r}_i$ 与 $\mathbf{r}_j$ 不共线，则我们必须将刚体的约束条件考虑进来。此时，速度 $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{v}_j$ 在两点的连线方向上的投影应该是一样的。即我们有

$$\mathbf{v}_j\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)=\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i), \tag{183}$$

或是

$$\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_j-\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_i=\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_j-\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_i. \tag{184}$$

由于 $\mathbf{v}_i\perp\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_j\perp\mathbf{r}_j$ ，我们得到

$$\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{r}_i+\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_j=0, \tag{185}$$

或是

$$\begin{aligned}&(\vec{\omega}_j\times\mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{r}_i+(\vec{\omega}_i\times\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{r}_j=\vec{\omega}_j\cdot(\mathbf{r}_j\times\mathbf{r}_i)+\vec{\omega}_i\cdot(\mathbf{r}_i\times\mathbf{r}_j)\\ =\;&\vec{\omega}_j\cdot(\mathbf{r}_j\times\mathbf{r}_i)-\vec{\omega}_i\cdot(\mathbf{r}_j\times\mathbf{r}_i)=(\vec{\omega}_j-\vec{\omega}_i)\cdot(\mathbf{r}_j\times\mathbf{r}_i)=0.\end{aligned} \tag{186}$$

由于 $\mathbf{r}_j\times\mathbf{r}_i$ 的任意性，我们得出结论

$$\vec{\omega}_j=\vec{\omega}_i. \tag{187}$$

显然，在定点转动的情况下，通过原点 O 并与 $\vec{\omega}(t)$ 平行的直线既是瞬时转轴。在此轴的各点处，速度皆为零。但是加速度不一定为零。

由于定点转动时的角速度是向量。它们的加法满足熟知的平行四边形法则。因此，在实验室系中取好直角坐标系后，做定点转动的刚体的角动量可以被写作

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i \left(\vec{\omega}(t) r_i^2 - \mathbf{r}_i \vec{\omega}(t) \cdot \mathbf{r}_i\right) \\
&= \sum_i m_i \Big[(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k})(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\
&- \quad (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k})(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)\Big]
\end{aligned} \tag{188}
$$

比较两边的分量后，我们有

$$
\begin{aligned}
&L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \quad L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\
&L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.
\end{aligned} \tag{189}
$$

这里，

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \int\int\int \rho(x,y,z)(y^2 + z^2) dxdydz, \\
I_{yy} &= \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = \int\int\int \rho(x,y,z)(x^2 + z^2) dxdydz, \\
I_{zz} &= \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int\int\int \rho(x,y,z)(x^2 + y^2) dxdydz, \\
I_{xy} &= -\sum_i m_i x_i y_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) xy dxdydz, \\
I_{xz} &= -\sum_i m_i x_i z_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) xz dxdydz, \\
I_{yx} &= -\sum_i m_i y_i x_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) yx dxdydz, \\
I_{yz} &= -\sum_i m_i y_i z_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) yz dxdydz, \\
I_{zx} &= -\sum_i m_i z_i x_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) zx dxdydz, \\
I_{zy} &= -\sum_i m_i z_i y_i = -\int\int\int \rho(x,y,z) zx dxdydz.
\end{aligned} \tag{190}
$$

利用矩阵的记号，我们现在可以将方程 (189) 改写作

$$
\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{191}
$$

其中的 3×3 的矩阵，在文献中被称为转动惯量张量。它是实对称矩阵。当刚体的质量分布具有某些对称性的时候，它的形式可以被简化。

例 5.16: 对于均匀分布的球体，我们有

$$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=I, \tag{192}$$

和

$$I_{xy}=I_{xz}=\cdots\cdots=I_{zx}=I_{zy}=0. \tag{193}$$

而对于一个对称陀螺，我们则有

$$I_{xx}=I_{yy}=I_1,\ I_{zz}=I_2, \tag{194}$$

和

$$I_{xy}=I_{xz}=\cdots\cdots=I_{zx}=I_{zy}=0. \tag{195}$$

以对称陀螺为例。当陀螺的旋转轴与 z 轴重合时，我们有

$$\vec{\omega}=\omega_z\mathbf{k}. \tag{196}$$

因此，其角动量为

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\omega \end{pmatrix}, \tag{197}$$

或是

$$\mathbf{L}=I_3\vec{\omega}. \tag{198}$$

由于刚体的总角速度是一个向量，通常它可以被分解成几个分角速度之和。即我们有

$$\vec{\omega}=\sum_j^K\vec{\omega}_j. \tag{199}$$

相应地，刚体的总角动量可以被写作

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{K} \vec{\omega}_j \times \mathbf{r}_i \right) = \sum_{j=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\mathbf{r}_i \times (\vec{\omega}_j \times \mathbf{r}_i) \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{K} \mathbf{L}_j. \end{aligned} \tag{200}$$

这里，

$$\mathbf{L}_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\mathbf{r}_i \times (\vec{\omega}_j \times \mathbf{r}_i) \right) \tag{201}$$

是刚体由于角速度分量 $\vec{\omega}_j$ 所导致的角动量。

例如，陀螺的定点转动角速度可以分解为自转角速度，进动角速度和章动角速度 (见教科书 185 页上示意图 5-52) 。我们先考察自转轴为水平方向，进动方向竖直向上，如教科书中 188 页上图 5-56 所示的情况。为了方便，我们取 y- 轴与自转轴重合，并设其转动惯量为 I_ξ 。因此，由自转角速度 $\vec{\omega}_s$ 引起的角动量为

$$\mathbf{L}_s = I_\xi \vec{\omega}_s = I_\xi \omega_s \mathbf{j}. \tag{202}$$

而进动角速度则为

$$\vec{\Omega} = \Omega \mathbf{k}, \tag{203}$$

方向沿 z- 轴。由它引起的角动量 L_Ω 由下式

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{I}_{xx} & \widetilde{I}_{xy} & \widetilde{I}_{xz} \\ \widetilde{I}_{yx} & \widetilde{I}_{yy} & \widetilde{I}_{yz} \\ \widetilde{I}_{zx} & \widetilde{I}_{zy} & \widetilde{I}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{I}_{xz}\Omega \\ \widetilde{I}_{yz}\Omega \\ \widetilde{I}_{zz}\Omega \end{pmatrix}, \tag{204}$$

或是

$$\mathbf{L}_\Omega = \widetilde{I}_{xz}\Omega \mathbf{i} + \widetilde{I}_{yz}\Omega \mathbf{j} + \widetilde{I}_{zz}\Omega \mathbf{k}. \tag{205}$$

另外一方面，利用陀螺的对称性，我们可以很容易地看到

$$\widetilde{I}_{xz} = \widetilde{I}_{yz} = 0. \tag{206}$$

因此，我们最后有

$$\mathbf{L}_\Omega = \widetilde{I}_{zz}\Omega\mathbf{k}. \tag{207}$$

在稳定转动的情况下， $\mathbf{L}_\Omega$ 是恒定的，而 $\mathbf{L}_s$ 则绕着 z- 轴做进动。这一进动所需要的外力矩是由过陀螺质心的重力矩提供的。既我们有

$$\frac{d\mathbf{L}_s}{dt} = \mathbf{M}_{\text{重力}} = -mgl_C\mathbf{i}. \tag{208}$$

另一方面，我们从图中看出

$$\frac{d\mathbf{L}_s}{dt} = -L_s\Omega\mathbf{i}. \tag{209}$$

比较两式后，我们得到

$$L_s\Omega = mgl_C, \tag{210}$$

或是

$$\Omega = \frac{mgl_C}{L_s} = \frac{mgl_C}{I_s\omega_s}. \tag{211}$$

而陀螺在固定点处所受外力的竖直分量为 $N_\perp = mg$ ，其水平分量则提供刚体质心的向心加速度。因此，我们有

$$\mathbf{N}_\parallel = -ml_C\Omega^2\mathbf{j} = -\frac{m^3g^2l_C^3}{I_s^2\omega_s^2}\mathbf{j}. \tag{212}$$

它是一个其方向随陀螺一起转动的水平力。

若陀螺的自转轴倾斜向上 (如教科书 189 页上的图 5-58 所示)，我们可以将其自转轴取作 y'- 轴，建立一个相对于地面系的新的坐标系。此时，我们有

$$\vec{\omega}_s = \omega_s\mathbf{j}', \quad \vec{\Omega} = \Omega\mathbf{k} = \Omega\sin\phi\mathbf{j}' + \Omega\cos\phi\mathbf{k}', \tag{213}$$

而总角速度 $\vec{\Omega}_{\text{总}} = \vec{\omega}_s + \vec{\Omega}$ 则可以写作

$$\vec{\Omega}_{\text{总}} = (\omega_s + \Omega\sin\phi)\mathbf{j}' + \Omega\cos\phi\mathbf{k}' = \vec{\omega}' + \vec{\Omega}'. \tag{214}$$

相应的角动量则为

$$\mathbf{L}_{\text{总}} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}'_\Omega = I_s(\omega_s + \Omega\sin\phi)\mathbf{j}' + \widetilde{I}_{zz}\Omega\cos\phi\mathbf{k}'. \tag{215}$$

$\mathbf{L}_{总}$ 对于地面坐标系中 y- 轴的分量为

$$L^y_{总} = L'\cos\phi - L'_\Omega \sin\phi = I_s\omega_s\cos\phi + (I_s - \widetilde{I}_{zz})\Omega\cos\phi\sin\phi. \tag{216}$$

其变化是由通过陀螺质心的的重力矩引起的。如同上面的计算所示，我们有

$$\frac{dL^y_{总}}{dt} = -L^y_{总}\Omega = -\left(I_s\omega_s\cos\phi + (I_s - \widetilde{I}_{zz})\Omega\cos\phi\sin\phi\right)\Omega = -mgl_C\cos\phi, \tag{217}$$

或是

$$\left(I_s\omega_s + (I_s - \widetilde{I}_{zz})\Omega\sin\phi\right)\Omega = mgl_C. \tag{218}$$

这是没有章动时，稳定状态下进动角速度所满足的代数方程。

如果开始时刚体的进动角速度 Ω 较小，在 Δt 时间间隔内， $\mathbf{L}_y$ 由 $\Omega\Delta t$ 引起的变化量 $\Delta\mathbf{L}_y$ 小于 Δt 时间内重力提供的力矩 $\mathbf{M}\Delta t$ ，换句话说，除了使得 $\mathbf{L}_y$ 增长外，剩余的重力矩还可以引起沿 x- 轴负方向逐渐增大的角动量 $-\mathbf{L}_x$ 。当 $\mathbf{L}_y$ 或是 Ω 增大到一定程度后， $\Delta\mathbf{L}_y$ 将大于 $\mathbf{M}\Delta t$ 。此时，陀螺的向下转动将被遏止，改为反向朝上转动。既它获得一个沿 x- 轴的角动量 $\mathbf{L}_x$ 。这样的过程往复进行，形成所谓章动。

例 5.17(**教科书** 190 **页上的例** 25): 质量为 m ，半径为 R 的匀质薄圆盘，可以绕长度也是 R 的水平轻杆的一端，直立在水平地面上做纯转动。假设轻杆绕着过其一端的竖直固定轴，以恒定的角速度 Ω 旋转。试求圆盘的瞬时角速度 $\vec{\omega}$ ，角动量 $\mathbf{L}$ 以及地面对于盘的作用力 $\mathbf{N}$ 。

解: 如教科书 190 页上图 5-62 所示，圆盘绕 O 点做定点运动进动角速度 $\vec{\Omega}$ 竖直向上，自转角速度方向水平朝左。由于圆盘是做纯滚动，我们有

$$R\omega_s = R\Omega, \tag{219}$$

或是 $\omega_s = \Omega$ 。因此，总的角速度为

$$\vec{\omega} = -\omega_s\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k} = -\Omega\mathbf{j} + \Omega\mathbf{k}. \tag{220}$$

另一方面，圆盘的自转角动量与 $\vec{\omega}_s$ 同方向，为

$$\mathbf{L}_s = -I_s\omega_s\mathbf{j} = -\frac{1}{2}mR^2\Omega\mathbf{j}, \tag{221}$$

而进动角动量则为

$$\mathbf{L}_\Omega = I_{zz}\Omega\mathbf{k} = \left(\frac{1}{4}mR^2 + mR^2\right)\Omega\mathbf{k} = \frac{5}{4}mR^2\Omega\mathbf{k}. \tag{222}$$

因此，圆盘的总角动量为

$$\mathbf{L}_{\text{总}} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_\Omega = -\frac{1}{2}mR^2\Omega\mathbf{j} + \frac{5}{4}mR^2\Omega\mathbf{k}. \tag{223}$$

同时，圆盘所受的外力为重力 $m\mathbf{g}$ ，轻杆拉力 $\mathbf{T}$ 和地面对于圆盘的支撑力 $\mathbf{N}$ 之和。由于圆盘质心 C 无竖直方向的运动， $\mathbf{N}$ 的竖直向上分量必为

$$N_\perp = mg. \tag{224}$$

又由于 C 作匀速圆周运动， $\mathbf{N}$ 的水平切向分量为零，而 C 的向心加速度则由 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 的水平径向分量 $N_\parallel$ 联合产生。同时， $N_\parallel$ 又为圆盘的进动提供力矩，即我们有

$$\begin{aligned} N_\parallel R\mathbf{i} &= \frac{d\mathbf{L}_{\text{总}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}mR^2\Omega\mathbf{j} + \frac{5}{4}mR^2\Omega\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{1}{2}mR^2\Omega\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\Omega\left(-\Omega\mathbf{i}\right). \end{aligned} \tag{225}$$

由此我们解得

$$N_\parallel = \frac{\frac{1}{2}mR^2\Omega^2}{R} = \frac{1}{2}mR\Omega^2. \tag{226}$$

因此，地面对于圆盘的总的支撑力为

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_\perp + \mathbf{N}_\parallel, \quad N = m\sqrt{g^2 + \frac{1}{4}R^2\Omega^4}. \tag{227}$$

作业：教科书 193 页至 200 页 5-2， 5-5， 5-9， 5-14， 5-16， 5-17， 5-19， 5-23， 5-24， 5-25， 5-29， 5-35 题。