第一章　极限与连续

一、函数

1、函数的定义与要素（定义域、对应法则；函数相等的条件）

2、函数的性质：单调性，奇偶性，周期性，有界性

*单调性的定义（以递增为例）：

$\forall x_1,x_2\in D_f$，若$x_1<x_2$时$f(x_1)\le f(x_2)$，则$f(x)$在D_f上单调递增；将$\le$改为$<$，则$f(x)$在D_f上严格单调递增。

*有界的定义：$\exists M>0$，对于$\forall x\in A\subseteq D_f$，都有$|f(x)|\le M$，则$f(x)$在$A$上有界。

（$f(x)\ge m\in R$，则$f(x)$下有界；反之则上有界。只有既上有界又下有界的函数才是有界函数。）

3、函数的运算：四则运算、复合运算、反函数

*题型：判断某个函数由哪些基本初等函数复合而成。

*反函数存在的可能情况：①y与x一一对应；②$f(x)$是某区间上的严格单调函数（反函数的单调性与原来的函数相同）

*$D_{f^{-1}}=R_f$；当$x\in D_f$时，$f^{-1}(f(x))=x$；当$x\in R_f$时，$f(f^{-1}(x))=x$。

4、初等函数：包括 6 大基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）以及它们的有限次四则、复合运算构成的函数。

二、数列的极限

1、数列的定义及表示方法

2、数列的性质：单调性、有界性

3、数列极限的定义：ε-N语言（存在性命题要学会寻找充分条件，即增加对N的限制，从而找到N；绝对值不等式与不等式放缩也很重要）

4、极限的四则运算

5、无穷小量的性质

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\{a_n-A\}$是无穷小量。（一种证明极限的方法）

（2）有限个无穷小量相加、相乘还是无穷小量。

（3）无穷小量乘以有界量还是无穷小量。

6、收敛数列的性质

（1）收敛数列必然有界

（2）收敛数列的任一子列与该数列收敛于同一极限。（☆逆否命题：如果一个数列有发散子列或是有两个极限不同的收敛子列，则该数列发散。）

（3）夹逼性（注意夹条件与逼条件）

（4）*保号性：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$，则必然存在$N$，当$n>N$时，$a_n>0$.（小于 0 类似）

7、无穷大量的两个定义：

(1) 若$\{\frac{1}{a_n}\}$为无穷小量，则$\{a_n\}$为无穷大量；

(2) $\forall K>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|a_n|>K$。

8、数列收敛的判定方法与极限的求解

（1）利用极限的定义（先知道极限才能使用，技巧性略强）

（2）单调有界数列必收敛（不能同时求出极限，往往用于递推式）

（3）利用子列的收敛性（可以直接得出极限，逆否命题常用于判断发散）

（4）柯西收敛准则（不能同时求出极限，往往用于求和式）

（5）Stolz 定理：

若$\{b_n\}$严格单调递增且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$。（可以同时求出极限，常常用于比值形式的式子）

（6）递推式求极限：不动点法——$a_{n+1}=f(a_n)$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，则$A=f(A)$。

（7）平均值法：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A$。

（8）利用定积分的定义求极限。需要配凑 Riemann 和的形式。

9、几个重要数列的极限

(1) $a>0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$，其中$k\geq 0$，$a>1$为常数；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_k^n}{k})^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,...,a_k\}$; $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+...+a_k^{\frac{1}{n}}}{k})^n=\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}$.

10、数列极限型函数的表达式：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g(n,x)$。

处理方式：对 x 分类讨论，在各种情况下将 x 视为常数，对 n 求极限。

例如：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+1}{2x^n+1}$，$x\in R^+$。求$f(x)$。

①当$x>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^n}}{2+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{2}$；

.②当$x=1$时，$f(x)=\frac{2}{3}$；

③当$0<x<1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+1}{2x^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$。

最终结果要写成分段函数。

三、函数的极限

1、函数极限的定义：ε-δ语言（某点 x_0 处）、ε-M 语言（$x\to\infty$时）。

2、数列极限与函数极限的关系：Heine 定理

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任一数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。（$a$可以是$\infty$）

逆否命题：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在$\Leftrightarrow$存在两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，

且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$不都存在或者$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$。

3、极限的性质：

（1）四则运算、连续函数极限的复合运算；

（2）夹逼性；

（3）*保号性；

（4）（函数）局部有界性：若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，则在$a$的一个邻域内，$f(x)$有界。

（5）有序性：

若$f(x)<g(x)$(或者$\leq$）在a的一个邻域内成立，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a} g(x)$。（反过来未必成立）

4、两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。（$x$ 也可以是中间变量）

（求极限时注意配凑出这两个极限）

5、单侧极限（可以用来判断某点极限是否存在）

四、连续函数

1、连续的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。（左连续、右连续）

2、连续的三个必要条件：$f(x)$在x_0处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

3、连续性在四则运算、复合运算、反函数中的保持。

4、间断点（可去、跳跃间断点为第一类，其余为第二类）

（1）无穷间断点：$f(x)$在此点无定义并且趋向于∞。

（2）*振荡间断点：函数值在此点附近无限快地振荡，如$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处。

（3）可去间断点：对这一个点的函数值进行补充定义或调整，可以使函数在此点连续，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不等于$f(x_0)$，或$f(x_0)$不存在。

（4）跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在但不相等。

5、一切初等函数在其定义域内均连续。

6、闭区间上连续函数的性质

（1）有界；（2）存在最大值和最小值；（3）介值定理；（4）零点存在性定理。

7、连续型无穷小的比较

（1）$x\to 0$ 时，若$0<\alpha<\beta$，则$x^{\beta}=o(x^{\alpha})$；

（2）$x\to+\infty$时，若$0<a<b<1$，则$a^{x}=o(b^{x})$。

（3）对任意$p>0$，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{p}}=0$，即$x\to+\infty$时有$\dfrac{1}{x^{p}}=o(\dfrac{1}{\ln x})$.

（4）等价无穷小替换：

$x\to 0$时$,\sin x\sim x\sim\tan x,\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2},\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，$e^{x}-1\sim x,\arcsin x\sim x\sim\arctan x$。

注：等价无穷小替换只有在乘除运算中才可以随意使用，同号无穷小相减，可能会产生 x 的高阶无穷小。

8、函数图像的渐近线：垂直渐近线 $x=x_0$。斜（水平）渐近线 $y=ax+b$。其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$。注意 $x\to+\infty$与 $x\to-\infty$的情况可能不一样。

第二章 导数与微分

一、导数

1、导数的定义（不能忽视，也是求导的常用方法）：

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.（如果 f(a)=0 或者 a=0，注意分子分母可能需要补 0）

（注意左导数、右导数的概念）

2、可导必定连续，连续未必可导。

3、导数的四则运算（略）

注意 $(f_1f_2\ldots f_n)'=f_1'f_2\ldots f_n+f_1f_2'\ldots f_n+\ldots+f_1f_2\ldots f_n'$.

4、复合函数的导数：$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$。（链式法则）

5、反函数的导数：若在点(x_0,y_0)处，$y=f(x)$可导且$f'(x_0)\neq 0$，则$[f^{-1}(y_0)]'=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

6、初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$， (2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，

(3) $(\sin x)'=\cos x$， (4) $(\cos x)'=-\sin x$，

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$， (6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$，

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$， (8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$， (10) $(e^x)'=e^x$，

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$， (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，

(16) $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

$(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

其中，$\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \mathrm{th}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

$\mathrm{arsh}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \mathrm{arch}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \mathrm{arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}.$

7、对数求导法

$f(x) = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln f(x) = v(x)\ln u(x)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x) + \dfrac{v(x)}{u(x)}u'(x)$

$\Rightarrow f'(x) = u(x)^{v(x)}[v'(x)\ln u(x) + \dfrac{v(x)}{u(x)}u'(x)].$

8、几个重要的高阶导数

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$

$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot x^{-n}$

$(\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}, n \le k \\ 0, n \ge k+1. \end{cases} (k \in N_+)$

9、高阶导数的莱布尼茨公式：$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x).$

二、微分

1、微分的实质：在可微的x_0处，$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\mathrm{d}x = \Delta y - o(\Delta x).$

2、对于一元函数，可微等价于可导。

3、微分的四则运算（略）

4、复合函数的微分——一阶微分形式不变性（Pfaff form）：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$

5、参数方程的微分：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$

6、近似计算：$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$

*7、误差估计：精确值x，近似值x_0，则绝对误差$\Delta x = |x - x_0|$，相对误差$\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{|x_0|}$,

Δx上界为绝对误差限δ_x，相对误差限$\delta_x^* = \dfrac{\delta_x}{|x_0|}$。若$y = f(x)$，则$\delta_y = |f'(x_0)|\delta_x$，$\delta_y^* = |\dfrac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}|\delta_x^*$.

三、微分学中值定理及其应用

1、一切的大前提：$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导。（证明时要给出这两个条件！）

2、Fermat 引理：可导极值点处导数等于 0。

3、Rolle 中值定理：$f(a) = f(b) \Rightarrow$ 存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = 0$.

4、Lagrange 中值定理：存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

→推论：（1）$f'(x)=0$，则$f(x)=C$。

（2）$f'(x)=g'(x)$，则$f(x)=g(x)+C$。

5、Cauchy 中值定理：存在$\xi \in (a,b)$使得$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

6、使用中值定理的注意点：

（1）要有运用中值定理的意识，将其当成做题时考虑的对象之一；

（2）学会在高阶导数情况下多次运用中值定理；

(3) 在遇到例如$\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$的式子时要构造$g(x)$（如x^2），运用Cauchy中值定理求解。

（4）补 0 是常用方法；

☆（5）构造函数很重要，要熟悉一些常见的变形：

(1) $xf'(x) + nf(x) = \dfrac{[x^n f(x)]'}{x^{n-1}}$;

(2) $f(x) + f'(x) = \dfrac{[e^x f(x)]'}{e^x}$;

(3) $f'(x) - f(x) = e^x[\dfrac{f(x)}{e^x}]'$;

(4) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = [\ln|f(x)|]'$;

(5) $f(x) - f''(x) = f(x) - f'(x) + f'(x) - f''(x) = \dfrac{[e^x(f(x) - f'(x))]'}{e^x}$.

（在看到相关的式子时要有意识地尝试这些构造，实质是对这些式子做积分）

7、L'Hospital法则：用于$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty - \infty, 1^\infty$，$\infty^0, 0^0$等情况，但最终都应回归到$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$。而且，此法则不是万能的。

8、Taylor公式：$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n]$.（Peano余项）

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.(\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间})(\text{Lagrange 余项})$$

估计余项的大小：若 $|f^{(n+1)}(\xi)|\le M$，则 $\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}|$.

Maclaurin 公式：取 $x_0=0$ 即可。

9、几个常用的Maclaurin 公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o(x^n)(\alpha\ne 0);$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)(\text{只需知道前几项})。$$

*Taylor 展开对一切中间变量 u 都成立，即对于在 a 处连续的函数 $g(x)$，有

$$f(g(x))=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(g(a))}{i!}(g(x)-g(a))^i+o[(g(x)-g(a))^n].$$

*Taylor 展开的应用：近似计算、求极限、证明一些与高阶导数有关的结论……

★在此总结一下求函数极限的一些方法：

(1) ε-δ语言（较繁琐，极少使用）；

(2) 代数变形，如 $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{x^n}$，$a-b=\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}}$，$a=a+b-b$，

$a^x=e^{x\ln a}$，$f(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot x$，$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，补0等；

(3) 等价无穷小替换（加减法中慎用，避免产生更高阶的无穷小）；

(4) Heine定理：可以用函数极限求对应数列的极限；

(5) 先证明相关数列收敛，再用取整函数夹逼（必须转化为某变量趋向 $+\infty$ 的情况）；

(6) L'Hospital法则：求导之后会变得简单或可以计算时使用，注意不是不定型的不能使用；

(7) Taylor展开：可以自行选择展开的项数以配凑次数。（在确定式子阶数之后，一定要展开到所有能产生该阶小量的项都出现。在处理 $\frac{0}{0}$ 型式子时几乎万能）

四、函数的单调性与凸性

1、用一阶导数的符号判断函数的单调性：注意，可导函数在某区间单调递增（递减）的充要条件是 $f'(x)\ge 0$（≤ 0），等号不能少。另外，极值点是 x 的值而不是一个点。

*一个有趣的结论：对于连续可导函数$f(x)$，若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}$存在，则$f(a)=0$，且$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$（再次提醒补0的重要性）。

2、几个概念

（1）极值点：使得$f(x)$在x附近的一个邻域内取得最值的x的值。函数在极值点处不一定可导，但只要可导，则其导数等于0。

（2）临界点（驻点）：在该点处可导且导数为0的x的值。临界点不一定是极值点，可能只是函数变化过程中在此点的瞬时变化率为0，其两侧的单调性可以相同。

3、函数取极值的充分条件：极值点的左右邻域内导数值异号（一边≥0，另一边≤0）。

4、用一阶、二阶导数判断极值点：若$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)\neq 0$，则x_0是$f(x)$的极值点。（$f''(x_0)>0$为极小值点，$f''(x_0)<0$为极大值点）

*通过Taylor展开做出的推广：若存在正整数n使得$f(x)$在x_0处的前$(2n-1)$阶导数都等于0，而$2n$阶导数不等于0，则x_0是$f(x)$的极值点。

5、求函数在闭区间上最值的步骤：求极值→求端点值→比较以上各值。

6、凸性的定义：对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$与$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上下凸。反之则为上凸。

*推论：$f(x)$在$[a,b]$上下凸$\Leftrightarrow\forall x_1$，$x_2,\ldots$，$x_n\in[a,b]$，$f(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

7、用二阶导数判断凸性：仍然注意≥与≤的等号不能少。另外，<u>拐点是点</u>而不是x的值。

8、拐点的实质：两侧邻域内凸性相反的点。可以二阶不可导，但一旦二阶可导则二阶导数等于0。

9、函数草图的描画步骤

（1）确定函数$f(x)$的定义域。如果有奇偶性、周期性，也需指出；

（2）计算$f'(x)$，找出所有驻点与不可导点，确定$f(x)$的单调区间与极值（表格）；

（3）计算$f''(x)$，确定$f(x)$的凸性区间与拐点（表格）；

（4）讨论曲线的渐近线；

（5）将极值点、拐点处的函数值求出，如需要增加图像的准确性，可以再取几个特殊点。

（6）最终图像效果的衡量：单调性、凸性是否正确，渐近线是否正确并画全，关键点处函数值是否正确。

*五、用Newton切线法求方程的近似解

1、基本原理：在$f(x)$零点ξ所在小区间$[a,b]$的端点处作切线，此切线与x轴交于$(x_1,0)$；再作$(x_1,f(x_1))$处的切线，此切线与x轴交于$(x_2,0)$；以此类推，数列$\{x_n\}$将收敛于ξ。

2、数列$\{x_n\}$的递推式：$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3、误差估计：$|x_{n+1}-\xi|\le\dfrac{M}{2m}|x_n-\xi|^2$，其中 M 是$|f''(x)|$在$[a,b]$上的最大值，m 是$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最小值。

第三章 一元函数积分学

（本章重难点在于不定积分和非初等定积分，其余的部分稍微简略一些）

一、定积分的概念

1、Riemann 和：对闭区间$[a,b]$做分割 $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$，则

Riemann和$\sigma=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} f(\xi_i)\Delta x_i$. 其中$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$，$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$（$i=1,2,...n$）。

2、可积：即在 $n\to\infty$（本质上是 $\max\{\Delta x_i\}\to0$）时 Riemann 和收敛，并且此极限与分割点和ξ_i的选取无关。闭区间上有有限个间断点的有界函数可积；闭区间上的连续函数必定可积。

3、定积分的几何意义：曲边梯形的面积（注意函数图像在 y 轴下方时的情况）

4、定积分的基本性质

(1)$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0;$

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x;$

(3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x;$

(4)$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$

(5) $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$

(6) $|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x;$

(7) $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\ge0\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge0;$

(8)（积分中值定理）若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

5、原函数与微积分基本定理

(1) 对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$，即$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的一个原函数。

*推论：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x).$

（2）微积分基本定理——Newton-Leibniz 公式：

对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，若$F(x)$是其原函数之一，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$

二、不定积分

1、不定积分的性质

(1) $[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x)$，即 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，即 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$；

(3) $\int [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x.$

☆2、基本不定积分公式（规定所有公式中 a>0）

（1）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$（$\alpha \neq -1$）；

（2）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$；

（3）$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a}+C$（$a>0$，$a\neq 1$），$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x}+C$；

（4）$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x+C$；

（5）$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x+C$；

（6）$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x+C$；

（7）$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x+C$；

（8）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C$（$a>0$）；

（9）$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$（$a\neq 0$）；

（10）$\int \tan x\mathrm{d}x = \ln|\sec x|+C$；

（11）$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$；

（12）$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+C = \ln\left|\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|+C$；

（13）$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|+C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$；

（14）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x+C$；

（15）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x+C$；

（16）$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x+C$；

（17）$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x+C$；

（18）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；

（19）$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；

（20）$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$。

注意：最后三个公式都可以用分部积分公式推导，其中只有（18）可以直接使用。

三、积分方法

⑴ 有理式：运用Остроградский分解，将真分式$\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$分解为

$\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{k_j}\dfrac{A_{ji}}{(x+x_j)^i}+\sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{i=1}^{l_j}\dfrac{B_{ji}x+C_{ji}}{(x^2+\alpha_j x+\beta_j)^i}$的形式（$\alpha_i^2-4\beta_i<0$）。以上分解运用了代数基本定理，即任意$n$次多项式$P_n(x)$可分解为

$(x-x_1)^{k_1}...(x-x_p)^{k_p}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}...(x^2+\alpha_q x+\beta_q)^{l_q}$的形式（$\alpha_i^2-4\beta_i<0,1\le i\le q$）。

(2) 三角换元：①万能代换；②出现$\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow$令$x=a\sin t$；③出现$\sqrt{x^2+a^2}\Rightarrow$令$x=\tan t$；④出现$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow$令$x=\sec t$。（注意$\sec x$与$\tan x$既有导数关系又有平方关系，对于三角函数有理式，可以尝试转化成只含$\sec x$的积分，然后凑微分$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，再利用平方关系把$\sec x$通通转化为$\tan x$。）

(3) 根式换元:$\sqrt[n]{ax+b}$,$\sqrt[n]{\dfrac{cx+d}{ex+f}}$均可以换元，转化为有理式。

(4) 双曲换元：建议熟练者使用。遇到$\sqrt{x^2\pm a^2}$的式子，分别可以令$x=\sinh t$（根号中为$+a^2$）和$x=\cosh t$（根号中为$-a^2$）。

（4）凑微分法：通过代数变形巧妙凑出 $g'(x)\mathrm{d}x$ 的形式，将其化为 $\mathrm{d}g(x)$。
常见的变形：分离常数（有理式），加上再减去，乘上再除去，裂项（因式分解的积累），$\sqrt{f(x)}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{f(x)}}...$

（5）分部积分：①凑 $\mathrm{d}v(x)$微分的推荐顺序：三角→指数→幂函数→对数→反三角。
②$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$.在$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$容易求的情况下较好用。注意等号右边可能会再次出现$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$且无法与左边抵消，此时相当于解关于$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$的方程。
备注：不定积分换元求完以后要从其他变量回到关于 x 的表达式；定积分换元以后要注意积分上下限的变化。

（6）其他的常用公式

①若$f(x)$在$[-l,l]$上连续，则$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0，当f(x)为奇函数时，\\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x，当f(x)为偶函数时。\end{cases}$

②若$f(x)$是以T为周期的连续函数，则$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

③若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$;

④设$f(x)$连续，则$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$

⑤$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$;

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.(n\ge 0)$

四、定积分的应用

（1）弧微分：

x_0点附近一小段曲线的弧长$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x_0)}\mathrm{d}x.$

可以用此公式计算$[a,b]$上的弧长$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$

对于参数方程$x=x(t)$，$y=y(t)$，$\alpha\le t\le\beta$，有$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$

对于极坐标系中的曲线$r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，有$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$

曲线的曲率半径$\rho=\dfrac{1}{K}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\left|\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|$，其中$K$为曲率。

（2）平面图形的面积

①在直角坐标系中，若一图形D对应点集$\{(x,y)\,|\,a\le x\le b，f(x)\le y\le g(x)\}$，则该图形的面积$A=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{f(x)}^{g(x)}\mathrm{d}y=\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x.$

②在极坐标系中，若一图形由曲线$r=r(\theta)$和直线$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$（$\alpha\le\beta$）包围而成，则图形的面积$A=\int_\alpha^\beta\dfrac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$

（3）立体图形的体积

①在空间直角坐标系中，若一几何体在垂直x轴方向的截面积是x的函数$A(x)$，$a\le x\le b$，则几何体的体积$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$

②旋转体：由曲线$y=f(x),a\le x\le b$绕x轴旋转一周所形成的几何体的体积为$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

（4）旋转曲面的面积

由曲线$y=f(x)$，$a\le x\le b$绕x轴旋转一周所形成的曲面的面积为

$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$

（5）平均值：函数在区间$[a,b]$上的平均值$\overline{y}=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$。可用于等效计算。

五、反常积分（广义积分、瑕积分）

1、定义

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x;$

对于$f(x)$在$[a,b]$上的无界点c，有$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$

2、反常积分敛散性的判别

（1）直接利用定义。注意：当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$均收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$才收敛。

（2）比较判别法：①若在$[A,+\infty)$上有$|f(x)|\le g(x)$，则对于 $a<A$，有：

$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛；

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散。

②若$\exists\varepsilon_0\in(a,b)$，使得$\forall x\in(a,a+\varepsilon_0), |f(x)|\le g(x)$，且$f(x)$与$g(x)$在$b$处无界，则对于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也有类似结论。

注：使用此定理要学会对被积函数进行适当放缩。

（3）Cauchy 判别法：

$\exists p>1$，使得$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C\ge0$（不是$+\infty$），则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

$\exists p\le1$，使得$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C>0$（可以是$+\infty$），则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散；

对于在a处无界的$f(x)$:

$\exists p<1$，使得$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = C\ge0$（不是$+\infty$），则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

$\exists p\ge1$，使得$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^p|f(x)| = C>0$（可以是$+\infty$），则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

注：使用此定理要适当选取p的值，使得分子分母的阶数恰当，从而得出收敛或发散的结论。注意联系第一章中常见的极限及其阶数。

3、柯西主值积分

(1) 定义:$(\mathrm{CPV})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x.$

(2) 实质：通过某种取极限的方式使得$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是有限值。它的存在不代表$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$一定收敛，但是该值有一定的实际价值。

4、Γ函数与B函数

（1）Γ函数：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$，$s>0.$

性质：①$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，$\forall s>0$，特别地，对于正整数n，$\Gamma(n)=(n-1)!$；

②$\forall s\in(0,1)$，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$.特别地，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

（2）B 函数：$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$，$p,q>0.$

性质：①$\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$；

②$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p).$

（3）注：遇到一些类似形式的反常积分，要有意识地将其化为Γ函数与B函数，并利用$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$以及题目可能提供的其他函数值进行计算。

第四章 矩阵与线性方程组（仅讲向量与矩阵、行列式、逆矩阵三节）

一、向量及其基本性质

1、行向量与列向量的概念（略）

2、n维向量空间：$\boldsymbol{R}^n=\{\vec{a}\mid\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$，$a_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1,2,...,n\}$

在这个空间上定义了向量的一系列运算：

（1）加法；（2）数乘；

（3）取模：$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$；

（4）（在 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 上定义）内积（点乘，数量积）：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

二、矩阵及其运算

1、基本表示：$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&&&\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{nn}\end{pmatrix}$.

2、概念：实矩阵，复矩阵，方阵，主对角线，同型矩阵，零矩阵，单位矩阵，Kronecker 记号（δ_{ij}），对角矩阵，上（下）三角矩阵……

3、矩阵的运算

（1）加法：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$（满足交换律、结合律）；

（2）数乘：$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$（满足分配律）；

（3）转置：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$（行变列，列变行），$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

（4）共轭：$\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$，共轭转置$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\overline{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}$；

（5）乘法

①条件：$\boldsymbol{AB}$ 存在的条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。

②公式：对于$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$与$n\times p$矩阵$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj})_{m\times p}$.$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列作内积。（满足结合律和分配律，不满足交换

律，左乘右乘不一样；$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）

4、分块矩阵及其运算（略，注意 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$）

二、行列式

1、行列式的本质——与排列有关

（1）排列的逆序数：设 $j_1,j_2,\dots,j_n$ 是 $1,2,\dots,n$ 的一个排列。将满足 $k<l$ 且 $j_k>j_l$ 的数对(k,l)的个数称为 $j_1,j_2,\dots,j_n$ 的逆序数，记作$\tau(j_1,j_2,\dots,j_n)$。

（2）n 阶行列式的本质计算式：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\dots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}.$$

（3）余子式算法：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}，\text{其中}A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\text{为代数余子式，}$$

Δ_{ij}为余子式。Δ_{ij}即行列式中去掉第i行与第j列所得的行列式。

2、行列式的性质

（1）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$；

（2）互换行列式的两行（列），行列式的值变号；

（3）若行列式有两行（列）成比例，则行列式的值为 0；

（4）两个仅有一行（列）不同的行列式的和，等于将该行（列）相加，其余行（列）不变的行列式；

（5）★将行列式的某一行（列）乘以一个数加到另一行（列），行列式的值不变。

（6）三角形行列式的值等于主对角元素的乘积。

注：①在计算阶数已知的行列式时，先看是否有成比例的行（列），如果没有，则不断用其他性质进行化简，如果实在化不成对角行列式，应适时放弃变换，在某一行 0 元素较多时即可直接展开，然后对余子式进行转化，层层递进；

②对于阶数 n 未知的行列式，往往有一定规律（否则难以计算），一般来说需要所有行（列）参与变换，而不是仅仅变换其中某些部分，如将下面的所有行加到第一行，或是将第一行加到下面所有行等等。

（7）（Laplace定理）$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|,i=j,\\ 0,i\neq j.\end{cases}$

（8）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$；

（9）对于方阵A,B，有$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$

三、逆矩阵

1、逆矩阵的定义：$\boldsymbol{A}^{-1}$满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

2、逆矩阵存在的充要条件：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

3、逆矩阵的求解

（1）直接计算：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，其中$\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}_{ji})_{n\times n}$（$A_{ji}$是$a_{ji}$的代数余子式）是伴随矩阵；

（2）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

（3）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（4）初等变换法：构造矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{I})$，对其进行初等行变换（换行，倍乘某一行，将某一行乘以一个数加到另一行），直至左边变为$\boldsymbol{I}$，此时右边的矩阵就是$\boldsymbol{A}^{-1}$。

四、解线性方程组的两种简单方法

1、Cramer 法则：对于 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，如果$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，且 x 的分量 $x_i=\dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$，其中$|\boldsymbol{A}_i|$是将$|\boldsymbol{A}|$的第$i$列换成$\boldsymbol{b}$后的行列式。（计算量略大）

2、Gauss 消元法：构造增广矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，对其进行初等行变换，直至：

（1）$\boldsymbol{A}$ 的部分变为三角形矩阵，则可一步步迭代得到结果；

（2）$\boldsymbol{A}$ 的部分变为单位矩阵，则 $\boldsymbol{b}$ 的部分变为解向量。

第五章 线性变换、特征值和二次型（略）

第六章 空间解析几何

一、三维向量的更多运算

1、外积（叉积，矢量积）：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$.

性质：（1）$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\sin\theta$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

（2）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$构成右手系。

（3）反交换性

（4）满足分配律与线性性

2、混合积：$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

性质：（1）轮换性

（2）反对换性

（3）混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的体积。

（4）三个三维向量共面的充要条件是它们的混合积等于 0。

二、平面与直线

1、平面的方程

（1）点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。其中法向量为$(A,B,C)$，$(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点。

（2）三点式方程：$\begin{vmatrix} x-z_1 & y-z_2 & z-z_3 \\ x_1-z_1 & x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix}=0.$

（3）截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

（4）一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0.$

2、直线的方程

（1）点向式(对称式)方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{l}$，其中$(m,n,l)$为直线方向向量。

（2）参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt,(t\in R) \\ z=z_0+lt. \end{cases}$

（3）两点式方程：$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}.$

（4）一般式方程（转化为两个平面的交线）：$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$

（在此，直线的方向向量可以选为两平面法向量的外积）

3、距离与夹角公式

(1) 点P到平面π的距离：设π上有一点P_0，π的法向量为$\boldsymbol{n}$，则P到π的距离

$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PP_0}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}$.若$\pi$的方程为$Ax+By+Cz+D=0$，$P(x^*,y^*,z^*)$，则

$d=\dfrac{|Ax^*+By^*+Cz^*+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

(2) 点P到直线L的距离：设直线L上有一点P_0，L的方向向量为$\boldsymbol{l}$，

则P到L的距离为$\dfrac{\left\|\overrightarrow{PP_0}\times\boldsymbol{l}\right\|}{\|\boldsymbol{l}\|}.$

(3) 两平面的夹角；$\theta=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\|\cdot\|\boldsymbol{n}_2\|}.$

(4) 两直线的夹角：$\theta=\arccos\dfrac{\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2}{\|\boldsymbol{l}_1\|\cdot\|\boldsymbol{l}_2\|}.$

(5) 直线与平面的夹角：$\theta=\arcsin\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}|}{\|\boldsymbol{n}\|\cdot\|\boldsymbol{l}\|}.$

(6) 异面直线的距离：设直线l与m异面，$P\in l$，$Q\in m$，向量$\boldsymbol{n}$与两直线都垂直，

则l与m的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}.$

三、空间曲面与曲线

1、曲面一般方程：$F(x,y,z)=0$。

2、曲面方程的推导

（1）用定义求方程（如球面方程的推导）；

（2）旋转曲面方程：先选择原曲线上一点，再研究它绕某轴旋转时坐标发生的变化。基本原理——绕着某坐标轴旋转，则点的该坐标保持不变；又点离该轴的距离不变，所以另两个坐标的平方和也不变。例如，

平面Oyz上的曲线$f(y,z)=0$绕z轴旋转产生的曲面方程是$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$

3、柱面

（1）定义：给定一条曲线 C 与一条直线 l，则由平行于 l 的直线沿 C 运动得到的曲面叫做柱面，C 称为准线，l 称为母线。

（2）方程中只含两个坐标的曲面是柱面。例如方程 $x^2+y^2=a^2$ 在三维空间内表示圆柱面，方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$在三维空间内表示椭圆柱面。

（3）当准线 C 是直线时，柱面退化为平面。

4、空间曲线方程：（1）看作两个曲面的交线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

（2）参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$

5、几种重要的二次曲面

（1）球面：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$；

（2）椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，用坐标平面截得的均为椭圆（或圆）；

(3) 单叶双曲面:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，用平面$z=z_0$截得的是椭圆，用平面$y=y_0$（$|y_0|>b$）截得的是双曲线，用平面$y=\pm b$截得的是两条直线。

(4) 双叶双曲面:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，用平面$z=z_0$（$|z_0|>c$）截得的是椭圆，用平面$y=y_0$截得的是双曲线。

(5) 锥面:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$。

(6) 椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，用平面$z=z_0>0$截得的是椭圆，用平面$y=y_0$截得的是抛物线。

(7) 双曲抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，用平面$z=z_0\neq 0$截得的是双曲线，用平面$z=0$截得两条直线，用平面$x=x_0$或$y=y_0$截得抛物线。（马鞍面）

[参考资料]
[1] 复旦大学数学科学学院丁青老师《高等数学 A（上）》课程
[2] 金路, 童裕孙, 於崇华, 张万国. 高等数学（第四版上册）. 高等教育出版社.
[3] 同济大学数学系. 高等数学（第六版上册）. 高等教育出版社.
[4] 金路, 徐惠平. 高等数学同步辅导与复习提高（上册）. 复旦大学出版社.
[5] 武忠祥. 高等数学辅导讲义（2017）. 西安交通大学出版社.