第六章、流体力学

$ 6.1 **流体静力学**

(1) 液体中的静压强：在液体中，静压强是由地球重力引起的，并且是各向同性的。假若两点之间的高度差为 Δz ，则它们之间的压强差为

$$\Delta P = -\rho g \Delta z. \tag{1}$$

这里， ρ 为液体的质量密度。

(2) 浮力：浸泡在液体中的物体会感受到由于压强差引起的液体施予它的浮力。其大小和方向由阿基米德定律

$$\mathbf{F} = -\rho V \mathbf{g} \tag{2}$$

决定。这里， V 为物体的体积。

例 6.1(**教科书** 204 **页上的例** 1): 设大气中温度处处相等。将海平面处大气压强记作 P_0 。导出海平面以上，大气压强随高度 z 的变化规律。

解：将大气视作液体。则其压强随高度的改变由公式

$$\Delta P = -\rho(z) g \Delta z. \tag{3}$$

注意到，大气各点处的质量密度也是离开地面高度的函数。为了决定这一函数，我们利用理想气体状态方程

$$P \Delta V = \frac{\Delta M}{\mu} RT. \tag{4}$$

这里， ΔM 为处于大气中观察点处的一小团气体的质量， ΔV 为其体积。T 为大气的温度。 μ 为大气的克分子量，而 R 为一个比例常数。由此方程，我们解得

$$P = \frac{\Delta M}{\Delta V \mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT, \tag{5}$$

或是

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}. \tag{6}$$

将之代入方程 (3) 后，我们得到

$$\Delta P = -\frac{\mu P}{RT} g \, \Delta z, \tag{7}$$

或是

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dz. \tag{8}$$

将其积分后，我们有

$$\ln P = -\frac{\mu g}{RT} z + C, \tag{9}$$

或是

$$P = e^C \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} z\right) = A \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} z\right). \tag{10}$$

由于 $z = 0$ 时， $P = P_0$ 。我们得到

$$A = P_0. \tag{11}$$

因此，压强随高度变化律的最后表达式为

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} z\right). \tag{12}$$

当流体密度 ρ 为一常数时，我们可将方程 (1) 改写作

$$dP = -\rho g \, dz = -d(\rho g z), \tag{13}$$

积分后我们得到

$$P = P_0 - \rho g z. \tag{14}$$

这里， P_0 为积分常数。注意到 $\rho g z$ 为液体在高度为 z 处的重力势能密度，我们又可将上式改写作

$$P(z) = P_0 - \epsilon_{\text{重力}}(z). \tag{15}$$

这一公式可以推广到一般的情况。即若处于静止状态的流体内有一个保守力的势场分布，则其内部压强的分布满足关系

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \epsilon_P(\mathbf{r}). \tag{16}$$

这一普适公式的推导我们将在讨论伯努力方程时给出。

例 6.2(**教科书** 205 **页上的例** 2): 盛放在桶中的流体随着绕中央竖直轴以恒定的角速度 ω 旋转。以桶为参照系，建立直角坐标系。以 $z=0$ 处的重力势能为零点。在 (x, y, z) 处的流体的势能密度为

$$\epsilon_P = \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2). \tag{17}$$

因此，流体内各处的压强为

$$P(x,\, y,\, z) = P_0 - \epsilon_P(x,\, y,\, z) = P_0 - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2). \tag{18}$$

由于流体表面处的压强均为一个大气压 P_a，我们有 $P(x,y,z)=P_a=P_0$。故流体表面的方程为

$$P(x,\, y,\, z) = P_a = P_a - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2), \tag{19}$$

或是

$$z = \frac{1}{\rho g}\cdot\frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2g}\omega^2(x^2+y^2). \tag{20}$$

\$ 6.2 **流体运动学和质量守恒**

\$ 6.2.1 **流体速度场的** Lagrange **表示和** Euler **表示**

取流体中的一小块。在流动状态中，它在任一时刻 t 的位置可以记作

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t). \tag{21}$$

这里，$\mathbf{r}_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$ 为其在 $t=t_0$ 时刻的位置。由此，我们得到

$$\mathbf{v}(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t), \quad \mathbf{a}(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t). \tag{22}$$

这种表示称为 Lagrange 表示。在实际工作中，这种表示不大好用。

更为容易使用的表征流体运动的表示是 Euler 表示。假设我们着眼于空间中固定一点处流体的流速的改变

$$v_x = v_x(x,\, y,\, z,\, t), \quad v_y = v_y(x,\, y,\, z,\, t), \quad v_z = v_z(x,\, y,\, z,\, t). \tag{23}$$

当 $(x,\, y,\, z,\, t)$ 取遍流体中所有的点的坐标时，我们就得到了所谓流体的流速场分布。

为了将流速场分布这一概念更加直观化，让我们假想在每一时刻沿流体内各点处的速度方向画出一系列曲线。而每一条曲线任一点处切线的方向即是该处流体的速度 $\mathbf{v}_P$ 的方向。这样的曲线称为流线。显然，由于流体在各点处的速度是唯一的，流线彼此不会相交。由流线围成的管称为流管。由于流速 $\mathbf{v}$ 的分布随时间变化，流线和流管的形状一般也会随着时间做改变。

Euler 表示和 Lagrange 表示之间的关系由下式给出

$$\begin{aligned} v_x &= v_x\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, t\right), \\ v_y &= v_y\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, t\right), \\ v_z &= v_z\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, t\right). \end{aligned} \tag{24}$$

这一表达式可以解读为，在 t 时刻，位于 $(x,\, y,\, z)$ 点处的流质点的速度，经过追溯，其实就是在 $t=0$ 时刻，位于 $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ 处的流质点在 t 时刻到达 $(x,\, y,\, z)$ 点处时所具有的速度。因此，在 t 时刻，此流质点的加速度为

$$\begin{aligned} a_x &= \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{(x,\,y,\,z)} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(x_0,\,y_0,\,z_0)} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\cdot\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x_0,\,y_0,\,z_0)} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\cdot\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(x_0,\,y_0,\,z_0)} \\ &+ \frac{\partial v_x}{\partial t}. \end{aligned} \tag{25}$$

而 a_y 和 a_z 的表达式以此类推。

例 6.3(**教科书** 208 **页上的例** 4): 二维流体在 Lagrange 表示中的运动方程为

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\sqrt{2kt}, \quad y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\sqrt{2kt}. \tag{26}$$

试导出

(1) 在 Lagrange 表示中流质元的速度和加速度表达式;

(2) 在 Euler 表示中流质元的速度和加速度表达式;

(3) 在 Euler 表示中流质元所满足的流线方程。

解：在 Lagrange 表示中，我们有

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\frac{k}{\sqrt{2kt}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\frac{k}{\sqrt{2kt}}, \tag{27}$$

以及

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \frac{k^2}{(2kt)^{3/2}}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \frac{k^2}{(2kt)^{3/2}}. \tag{28}$$

为了得到流速场的 Euler 表示，我们需要将上面流质元速度分布中的初始坐标 x_0 和 y_0 消去。由于

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x}{\sqrt{2kt}}, \quad \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y}{\sqrt{2kt}}, \tag{29}$$

我们有

$$v_x = v_x(x,\, y,\, t) = \frac{x}{\sqrt{2kt}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2kt}} = \frac{x}{2t}, \quad v_y = v_y(x,\, y,\, t) = \frac{y}{\sqrt{2kt}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2kt}} = \frac{y}{2t}. \tag{30}$$

事实上，又由于

$$x^2 + y^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} \cdot 2kt = 2kt, \tag{31}$$

上式可以被改写作

$$v_x = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{ky}{x^2 + y^2}. \tag{32}$$

这是一个与时间无关的速度场分布，称为定常流场。而流质元的加速度可以写作

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \dot{y} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{kx}{x^2 + y^2} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{kx}{x^2 + y^2} = -\frac{k^2 x}{(x^2 + y^2)^2}, \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \dot{y} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{ky}{x^2 + y^2} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{ky}{x^2 + y^2} = -\frac{k^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

也是一个与时间无关的分布。

最后，流质元所满足的流线方程由下式

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \tag{34}$$

或是

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \tag{35}$$

决定。将此式积分后，我们有

$$\ln x = \ln y + C. \tag{36}$$

由此，我们得到

$$x = e^{C} y = Ay. \tag{37}$$

$ 6.2.2 **流体的质量守恒和连续性方程**

根据质量守恒定律，物质即不会凭空产生，也不会凭空消灭。因此，我们有

$$\int\int\int \frac{\partial \rho(\mathbf{r},\, t)}{\partial t}\, dV = -\oint\oint \rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}. \tag{38}$$

这里，$\rho(\mathbf{r},\, t)$ 是时刻 t 时，流质元在 $\mathbf{r}$ 处的密度，$\mathbf{v}$ 为其在该点处的速度。而 $d\mathbf{S}$ 则为流体界面处的无穷小面积元。左边的三重积分代表对于流体所占据的整个空间的体积求和，而右边的二重积分则表示对于包围整个流体的边界面积的积分。这一公式的物理含义是，这个流体的质量改变率，应该等于单位时间流进其中的质量。因此，这一方程又被称为质量守恒定律的积分形式。

今后，在高等数学中会讲到，上式右边的面积分可以改写为

$$\oint\oint \rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v})\, dV. \tag{39}$$

因此，我们得到

$$\int\int\int \frac{\partial \rho(\mathbf{r},\, t)}{\partial t}\, dV = -\int\int\int \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v})\, dV. \tag{40}$$

由于这一方程对于流体的任何一部分都成立，我们要求方程中的被积函数应该相等。即我们有

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}), \tag{41}$$

或是

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}) = 0. \tag{42}$$

这一方程又被称为质量守恒定律的微分形式。也被称为连续性方程。

当流体是不可压缩的，即

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r},\, t)}{\partial t} = 0 \tag{43}$$

时，我们有

$$\oint\oint \rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = 0, \tag{44}$$

或是

$$\nabla \cdot (\rho(\mathbf{r},\, t)\mathbf{v}) = 0. \tag{45}$$

$ 6.2.3 **流体的定常流动**

若一个流体的速度场分布不随时间改变，即我们有

$$\begin{aligned} v_x &= v_x\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right), \\ v_y &= v_y\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right), \\ v_z &= v_z\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right), \end{aligned} \tag{46}$$

则流体的流动被称为定常流动。此时，流体的加速度场分布分布也不随时间改变，即

$$\begin{aligned} a_x &= a_x\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right), \\ a_y &= a_y\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right), \\ a_z &= a_z\left(x(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, y(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t),\, z(x_0,\, y_0,\, z_0,\, t)\right). \end{aligned} \tag{47}$$

在定常流动的情况下，对于一个流管而言，流体只能从流管的两端流入，而不能从其侧面流进或流出。现在，质量守恒定律的积分形式可以写作

$$\int\int_{S_1} \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int\int_{S_2} \rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0. \tag{48}$$

这里，S_1 和 S_2 为流管两端的截面面积。如果流体是不可压缩的，则上式可以进一步简化为

$$\int\int_{S_1} \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int\int_{S_2} \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0. \tag{49}$$

$ 6.2.4 **理想流体的定常流动**

所谓理想流体，是假设其内部不存在内摩擦力的流体。显然，这是对于真实流体的一种近似。

当理想流体处于一个外力场，例如重力场中，并做定常流动时，我们可将冲量定理用于一根无穷细的流管。由此，我们得到

$$\mathbf{F}_{\text{合外力}}\, dt = d\mathbf{p} = (\rho_2 \cdot \Delta S_2 \cdot v_2\, dt)\, \mathbf{v}_2 - (\rho_1 \cdot \Delta S_1 \cdot v_1\, dt)\, \mathbf{v}_1. \tag{50}$$

若流体是不可压缩的，我们有 $\rho_1=\rho_2$ 。此时，若我们令

$$Q_m=\rho\cdot\Delta S\cdot v \tag{51}$$

为流体的质量流量，则上式可以被改写作

$$\mathbf{F}_{\text{合外力}}\,dt=\left(Q_{m_2}\mathbf{v}_2-Q_{m_1}\mathbf{v}_1\right)\,dt. \tag{52}$$

方程两边同时消去无穷小时间差 dt 后，我们得到

$$\mathbf{F}_{\text{合外力}}=\left(Q_{m_2}\mathbf{v}_2-Q_{m_1}\mathbf{v}_1\right). \tag{53}$$

例 6.4(**教科书** 213 **页上的例** 6): 不计重力，并略去端面外流体的压力。试求密度为 ρ ，流速为 v 的流体在教科书 213 页上图 6-21 中所示的具有均匀截面面积 S 的 90° 弯管处施予管子的作用力 F 的大小。

解: 如果也略去管子对于流体的侧面压力，则我们有

$$\mathbf{F}=Q_m(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=(\rho vS)(v\mathbf{i}-v\mathbf{j}). \tag{54}$$

因此，我们要求的力的大小为

$$F=(\rho vS)\cdot\sqrt{2}v=\sqrt{2}\rho Sv^2. \tag{55}$$

\$ 6.2.5 描述不可压缩理想流体定常流动的伯努力方程

当不可压缩理想流体做定常流动时，它满足如下的伯努力方程

$$P(N)+\frac{1}{2}\rho v^2(N)+\phi(N)=P(Q)+\frac{1}{2}\rho v^2(Q)+\phi(Q). \tag{56}$$

这里， N 和 Q 为处于一条流线上的两个点，而 ϕ 则为势能密度函数。也就是我们在前面引入的 $\epsilon(\mathbf{r})$ 。

伯努力方程实际上不可压缩理想流体中能量守恒定律的另外一种表述。为了看清这一点，我们现在任取同一条流线上的两个点 N 和 Q 。我们以这条流线为中心线做一个直径无穷小的流管，而让 N 和 Q 点分别位于流线管两个端面的中心。显然，在无穷小时刻 dt 内，外力对于流线管包围的流体的作功为

$$dw=(P_{\rm N}\Delta S_{\rm N})(v_{\rm N}dt)-(P_{\rm Q}\Delta S_{\rm Q})(v_{\rm Q}dt). \tag{57}$$

而流体的动能和势能的改变则分别为

$$dE_k = \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{Q}} \cdot \Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt) v_{\mathrm{Q}}^2 - \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{N}} \cdot \Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt) v_{\mathrm{N}}^2, \tag{58}$$

和

$$dE_p = \phi(\mathrm{Q})(\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt) - \phi(\mathrm{N})(\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt). \tag{59}$$

根据能量守恒定律 $dw = dE_k + dE_p$ ，我们有

$$\begin{aligned} & (P_{\mathrm{N}} \Delta S_{\mathrm{N}})(v_{\mathrm{N}} dt) - (P_{\mathrm{Q}} \Delta S_{\mathrm{Q}})(v_{\mathrm{Q}} dt) \\ = \ & \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{Q}} \cdot \Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt) v_{\mathrm{Q}}^2 - \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{N}} \cdot \Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt) v_{\mathrm{N}}^2 \\ + \ & \phi(\mathrm{Q})(\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt) - \phi(\mathrm{N})(\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt), \end{aligned} \tag{60}$$

或是

$$\begin{aligned} & P_{\mathrm{N}} \Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt + \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{N}} \cdot \Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt) v_{\mathrm{N}}^2 + \phi(\mathrm{N}) \Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt \\ = \ & P_{\mathrm{Q}} \Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt + \frac{1}{2}(\rho_{\mathrm{Q}} \cdot \Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt) v_{\mathrm{Q}}^2 + \phi(\mathrm{Q})(\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt), \end{aligned} \tag{61}$$

方程两边同时除去 $\Delta S_{\mathrm{N}} v_{\mathrm{N}} dt$ 后，我们有

$$P_{\mathrm{N}} + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{N}} v_{\mathrm{N}}^2 + \phi(\mathrm{N}) = P_{\mathrm{Q}} \frac{\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt}{\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt} + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{Q}} v_{\mathrm{Q}}^2 \frac{\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt}{\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt} + \phi(\mathrm{Q}) \frac{\Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}} dt}{\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} dt}. \tag{62}$$

进一步，若该理想流体是不可压缩的，即 $\rho_N = \rho_Q = \rho$ ，则我们有

$$\Delta S_{\mathrm{N}} \cdot v_{\mathrm{N}} = \Delta S_{\mathrm{Q}} \cdot v_{\mathrm{Q}}. \tag{63}$$

因此，上面的公式退化为伯努力方程。

伯努力方程也可以写作 $P(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\rho v^2(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) = P_0$ 。若令 $v(\mathbf{r}) \to 0$ ，我们可得流体静力学公式 (16) 。

例 6.5(**教科书** 217 **页上的例** 8): 半径为 R 的圆柱形水桶，以恒定的角速度 ω 绕中心轴转动。稳定时，桶侧壁的小孔在桶中水面最低处的下方 h 处。试求小孔中水的流速。

解: 在水桶参照系中，水质元除了重力势能外，还具有离心势能。此时，取一条从桶中最低处到小孔的流线，则我们有

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho \omega^2 R^2. \tag{64}$$

由于小孔很小，水面的下降速度可以近似地取作为零。故我们得到

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2. \tag{65}$$

由此，我们解得

$$v = \sqrt{2gh + \omega^2 R^2}. \tag{66}$$

\$ 6.2.6 **黏性流体的流动**

在真实的流体中，相互接触的部分之间若存在相对滑动，总会出现内摩擦力，从而对于彼此的运动造成阻力。

为了定量分析黏滞力的效应，我们假设流体是沿 z 轴方向分层流动的。即其流速分布可以写作

$$v = v(z). \tag{67}$$

在流体中，取垂直于 z 轴方向的面积元 dS 。则根据牛顿第三定律，此面积元两侧的流体互相施予对方黏滞力 df 。利用实验数据，人们总结出如下的关系式

$$df = \eta \frac{dv(z)}{dz}\, dS. \tag{68}$$

这里， η 称为流体的黏滞度。若

$$\frac{dv(z)}{dz} > 0, \tag{69}$$

则我们有 $df > 0$ ，表示下方的流体对于上方的流体起阻碍作用。反之，则表示下方的流体对于上方的流体起拉动作用。

当流体在不太粗的管子中流动时，流速方向与管子的轴线平行，流体的黏性使其速度分层变化，中央的流速最大，与管壁接触处因流体的黏性而流速为零。这样的流动称为层流。而当管子较粗或流体的流速较大时，流体的速度就会出现与管的轴线相垂直的分量，形成混乱的流动，称为湍流。

湍流的研究是流体力学的一个重要课题。在什么条件下会出现湍流呢？实验表明，若定义所谓雷诺数为

$$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}, \tag{70}$$

这里，v 为流体的平均流速，r 为管子的半径，则出现湍流的临界值大约为 $1000 \sim 2000$ 。

$ 6.2.7 **泊肃叶公式**

当雷诺数较小时，黏性流体在水平管道内做层流运动。如果流动是定常的，则从中央轴到管壁，流体的流速有一稳定的分布 $v = v(r)$ 。此时，若我们取一段长度为 L 的管道，并假设其两端的压强差为 $P_1 - P_2$ 。则对于管道内任何一段半径为 r 的圆柱形流体，我们都应该有

$$(P_1 - P_2) \cdot \pi r^2 = -\eta \frac{dv(r)}{dr} \cdot 2\pi r L. \tag{71}$$

也就是说，作用在这段流体上的合外力应为零，使得其质心的加速度为零。将此方程积分后，我们可得

$$v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2). \tag{72}$$

而流体的流量则为

$$Q = \rho \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \, dr = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} \pi R^4 \rho. \tag{73}$$

这一公式被称为泊肃叶公式。常被用来测量流体的黏性系数 η 。

$ 6.2.8 **类伯努力方程**

不可压缩黏性流体运动时，黏滞力会作功。因此，伯努力方程应该被改写作

$$dE_k + dE_p = dw + dW_{\text{黏}}, \tag{74}$$

或是

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + \frac{1}{\Delta Q_v}\frac{dW_{\text{黏}}}{dt} = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 - w_{\text{黏}}. \tag{75}$$

这里， $w_{\text{黏}}$ 为处于端面 1 和 2 之间的流管中，单位体积流体在单位时间内为克服黏滞力作功而损耗的机械能。按照公式里的符号定义， $w_{\text{黏}} > 0$ 。也就是说，黏滞力作功使得流体的机械能减小。这一方程被称为类伯努力方程。

例 6.6(**教科书** 222 **页上的例** 11): 演示黏性流体运动满足类伯努力方程的装置如教科书中 222 页上图 6-38 所示。其中参量 h_1, h_4, l_1, l_2, l_3 和 l_4 均为可以测得的量。略去大容器内流体机械能的损耗，并且假设 h_1 足够大。

(1) 试证三个竖直细管内静止流体的液面与水平细管开口端在同一直线上。

(2) 计算水平细管开口端流速 v 。

解：达到稳恒时，水平细管 1, 2, 3 和 4 处流速与开口端流速同为 v 。将大气压强记作 P_0 。我们可以建立如下的方程

$$
\begin{aligned}
&P_0+\frac{1}{2}\rho\tilde{v}^2+\rho g h_1 \approx P_0+\rho g h_1=P_1+\frac{1}{2}\rho v^2,\\
&P_1+\frac{1}{2}\rho v^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v^2+w_{\text{黏}1}, \quad w_{\text{黏}1}=\alpha l_1,\\
&P_2+\frac{1}{2}\rho v^2=P_3+\frac{1}{2}\rho v^2+w_{\text{黏}2}, \quad w_{\text{黏}2}=\alpha l_2,\\
&P_3+\frac{1}{2}\rho v^2=P_4+\frac{1}{2}\rho v^2+w_{\text{黏}3}, \quad w_{\text{黏}3}=\alpha l_3,\\
&P_4+\frac{1}{2}\rho v^2=P_0+\frac{1}{2}\rho v^2+w_{\text{黏}4}, \quad w_{\text{黏}4}=\alpha l_4.
\end{aligned} \tag{76}
$$

这几个方程可以被简化为

$$
\begin{aligned}
P_1-P_2&=\alpha l_1,\\
P_2-P_3&=\alpha l_2,\\
P_3-P_4&=\alpha l_3,\\
P_4-P_0&=\alpha l_4,
\end{aligned} \tag{77}
$$

以及

$$
P_0-P_1=\frac{1}{2}\rho v^2-\rho g h_1. \tag{78}
$$

在每一根细管中，流体处于静止状态。因此，它们又满足如下的静态方程

$$
P_2-P_0=\rho g h_2, \quad P_3-P_0=\rho g h_3, \quad P_4-P_0=\rho g h_4. \tag{79}
$$

从这些静态方程中，我们解得

$$
P_2-P_3=\rho g(h_2-h_3), \quad P_3-P_4=\rho g(h_3-h_4), \quad P_4-P_0=\rho g h_4. \tag{80}
$$

代入上面的方程后，我们有

$$
(h_2-h_3):(h_3-h_4):h_4=l_2:l_3:l_4. \tag{81}
$$

这表明，这三根竖直管内静止的液体的表面的高度与水平细管开口端是在同一直线上。

从这些方程，我们又可以得到

$$P_1 - P_0 = \alpha(l_1 + l_2 + l_3 + l_4). \tag{82}$$

代入方程

$$P_0 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h_1 \tag{83}$$

后，我们有

$$-\alpha(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h_1. \tag{84}$$

因此，我们得到

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h_1 - \alpha(l_1 + l_2 + l_3 + l_4), \tag{85}$$

或是

$$v^2 = 2gh_1 - \frac{2\alpha}{\rho}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4). \tag{86}$$

为了去掉未知参数 α ，我们再一次利用方程

$$P_4 - P_0 = \alpha l_4, \quad P_4 - P_0 = \rho g h_4. \tag{87}$$

由此，我们解得

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{gh_4}{l_4}. \tag{88}$$

代入 v^2 的表达式后，我们最后得到

$$v^2 = 2gh_1 - \frac{2gh_4}{l_4}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 2g\left[h_1 - \frac{h_4}{l_4}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\right]. \tag{89}$$

$ 6.3 **黏性流体中运动物体的受力**

可以证明，一个物体在理想流体中做匀速运动时，其所受到的合外力为零。但是，它所受到的合外力矩未必为零。

而当一个物体在黏性流体中做匀速运动时，由于吸附在物体表面的部分流质与外层流体之间的黏滞作用，物体会受到黏性阻力。同时，黏性作用还会影响外围流体的流速分布及压强分布，从而使得物体受到附加的压力差。

下面，我们分别讨论一下这几种效应。

(1) 当物体在作平动时，它所受到的流体施予的黏性阻力为

$$f_v = 4\pi r\eta v = 4\pi r^2 \frac{\eta v}{r}. \tag{90}$$

第一个因子正比于物体的横截面。第二个因子则表明阻力与速度的梯度成正比。

(2) 纵向压差阻力

当球体在黏性流体中运动时，其流线分布如教科书 224 页上的图 6-40 所示。特别是 A 点处的压强和流速满足公式

$$P_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{A}}^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2. \tag{91}$$

这里， P_∞ 和 v_∞ 分别为左侧无穷远处流体的压强和流速。由于黏性拉力的作用， v_{A} 可以近似地视为零。因此，我们近似地有

$$P_{\mathrm{A}} \approx P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2. \tag{92}$$

同理，在小球的右侧 B 点处流体的压强和流速则满足

$$P_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 = \widetilde{P}_\infty + \frac{1}{2}\rho \widetilde{v}_\infty^2. \tag{93}$$

这里， $\widetilde{P}_\infty$ 和 $\widetilde{v}_\infty$ 分别为右侧无穷远处流体的压强和流速。显然，我们应该有

$$\widetilde{P}_\infty = P_\infty, \quad \widetilde{v}_\infty = v_\infty. \tag{94}$$

因此，我们得到点处的压强为

$$P_{\mathrm{B}} = \left(\widetilde{P}_\infty + \frac{1}{2}\rho\widetilde{v}_\infty^2\right) - \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 = \left(P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2\right) - \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 < P_{\mathrm{A}}. \tag{95}$$

也就是说，沿球体的运动方向会存在一个纵向压力差阻力 f_p 。当 v_∞ 较小时，我们近似地有

$$f_p = 2\pi r\eta v. \tag{96}$$

与黏性阻力相加后，我们得到一个合成阻力

$$f = f_v + f_p = 6\pi r\eta v. \tag{97}$$

这一公式被称为 Stokes 公式。

而当 v_∞ 较大时，我们近似地有 $v_{\mathrm{B}} \approx v_\infty$ 。由此，我们得到

$$P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\rho v_\infty^2, \tag{98}$$

或是

$$f_p = P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2. \tag{99}$$

即纵向压力阻力正比于 v_∞^2 。此时， f_p 可以远大于 f_v 。

(3) 横向压差推力。

一个对称球体在黏性流体中作旋转时，会有少量流体吸附在其表面与之一起旋转，继而使得邻近的流体也一起旋转，形成环绕球体的环流，如教科书 226 页上图 6-43 所示。因此，在实验室系看，球体下方的流速小，而上方流速大。因此，球体的下方压强较大，而其上方压强较小。这样，就产生了自下而上的压强差。这一现象被称为 Magnus 效应。

不对称物体在黏性流体中作平动时，也会形成绕体环流，从而产生横向压差推力。以飞机的机翼为例。在初始时，由于机翼的不对称及大气的黏性，会使得机翼上方的气流流速小于下方的气流流速，在其尾部形成一个环流。这导致了体系的角动量的不守恒。为了使得角动量守恒，就需要产生一个绕机翼的反向绕体环流。设其流速为 u 。此时，我们有方程

$$P_{\text{下}} + \frac{1}{2}\rho(v_0 - u)^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2, \quad P_{\text{上}} + \frac{1}{2}\rho(v_0 + u)^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2. \tag{100}$$

因此，我们得到

$$P_{\text{下}} - P_{\text{上}} = 2\rho v_0 u. \tag{101}$$

若机翼的宽度为 d ，长度为 l ，则它会感受到一个大小为

$$F = \left(P_{\text{下}} - P_{\text{上}}\right) ld = 2\rho v_0 uld = \rho v_0 l \cdot (2ud) = \rho v_0 l \Gamma. \tag{102}$$

的向上的推力。其中， $\Gamma = 2ud$ 被称为环流量。此公式被称为茹可夫斯基公式。

作业：教科书 227 页至 229 页 6-1 ， 6-4 ， 6-6 ， 6-9 ， 6-10 ， 6-12 ， 6-13 ， 6-22 ， 6-26 ， 6-30 题。