

大学物理 A 知识整理（四）光学

第一章 光和光的传播

一、光的产生（不是重点）

1、光源：通过热辐射或非热辐射发光的物体。

（1）热辐射发光（有热效应）：太阳、白炽灯、溴钨灯、蜡烛、红外摄像……

（2）非热辐射发光：（无热效应）

①电致发光：通电后发光。（LED、日光灯……）

②光致发光：接受光子，自身受激，放出光子。（荧光、磷光）

③化学发光：化学反应放出光子。

④生物发光：生物利用体内的 ATP 产生光能。（萤火虫）

2、电磁波谱：不同类型的电磁波按照波长/频率的排列。

（1）无线电波：波长 $3\text{km} \sim 0.3\text{mm}$ ；

（2）微波：波长 $1\text{m} \sim 1\text{mm}$ ；

（3）红外光： $1\text{mm} \sim 0.7\mu\text{m}$ ；

（4）可见光： $0.7\mu\text{m} \sim 0.4\mu\text{m}$ （ $380 \sim 760\text{nm}$ ）；

（5）紫外线： $0.4\mu\text{m} \sim 10\text{nm}$ ；

（6）X 射线： $10\text{nm} \sim 0.1\text{nm}$ ；

（7） γ 射线： $0.1\text{nm} \sim 1\text{pm}$ 。

二、光的性质

1、麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

2、本构关系

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

3、光是电磁波： $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, $\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

4、基本公式（请和电磁学知识梳理最后一章结合起来）

（1）真空光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. 一般光速 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$.

（2）光振动频率快，磁化微弱，折射率 $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$. 一般光速与真空光速的关系 $v = \frac{c}{n}$.

（3）平面正弦电磁波基本方程： $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

电场与磁场同相位， $E = vB = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} B$, \vec{E} 、 \vec{B} 、 \vec{k} 成正交右手系。

(4) 波动基本公式: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$.

(5) 能流密度——坡印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$; 大小 $S = EH = \frac{EB}{\mu_0 \mu_r} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} E^2$.

(6) 平均光强/光强/辐照度: $I = \bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{n}{2c\mu_0} E_m^2$.

注: ①光强是能流密度大小的平均值, 不随时间变化; 正弦波的 E_m , B_m 也不随时间变化; 前面的 E , B , D , H , S 均是指瞬时值。

②光强正比于电场振幅的平方 (也可以化成磁场振幅的平方), 其不满足基本的叠加原理, 两束光交汇的总光强不一定等于各自光强之和 (电场叠加再平方, 会有交叉项, 交叉项的大小又与相位差有关)。

(7) ★光从真空进入折射率为 n 的介质: 频率不变。波长和波速均变为原来的 $1/n$ 。波矢 k 的大小变为原来的 n 倍。

4、单色光: 完全由单一频率的光组成的一束光。

复色光: 一束光中含有不同频率的光。

5、光谱: 光强与波长/频率的关系, 反映一束光中各种波长的光的强度分布。

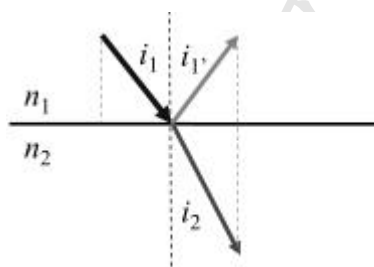
(1) 两类基本的光谱: 连续谱 (光强随波长连续分布) 与线光谱 (只有几个波长附近出现窄峰, 总体上不连续)。

(2) 半峰宽: 线光谱一个峰上 $1/2$ 最大值处两个点的间距。一般用半峰宽体现峰的尖锐程度和此色光的单色性 (峰越尖单色性越好)。

(3) 光谱密度: $i(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda}$. 是光谱上单位长度区间所贡献的光强。一般在连续

谱中用, 总光强 $I = \int_0^{+\infty} i(\lambda) d\lambda$.

6、黑体: 吸收一切入射电磁波的物体。(理想模型)



三、几何光学基本规律

1、几何光学成立条件: 介质均匀, 介质各向同性, 光强不太大, 光学元件尺度远大于波长。(避免引入波动与非线性因素)

2、几何光学三定律

(1) 光在均匀介质中沿直线传播。

(2) 反射定律: $i_1 = i_1'$.

(3) 折射定律: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

3、几何光学三定律的改写: $k_1 \sin i_1 = k_1' \sin i_1' = k_2 \sin i_2$. 波矢切向分量连续。(本质: 光子切向动量守恒)

4、 $n_2 < 0$: 在一些人工材料中出现。折射光与入射光在法线同一侧。

5、全反射

(1) 发生条件: 从光密介质射向光疏介质。折射角总是大于入射角; 如果入射角太大, 折射角超过 90° , 会没有折射光。

(2) 对于上图, 若 $n_1 > n_2$: 发生全反射的临界条件是 $\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2} = 1$, 得到临

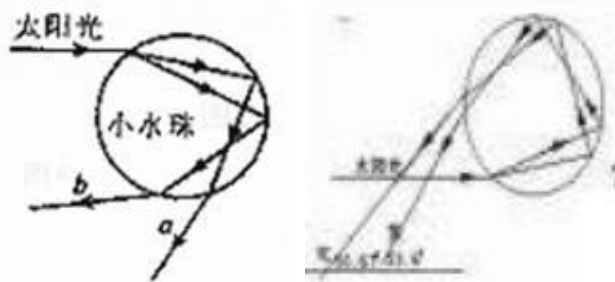
临界角 $i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ (是入射角的临界值而非折射角)。若入射角大于临界角, 则无折射光。

(3) 应用: 全反射棱镜 (用于望远镜), 光纤, 指纹识别。

6、棱镜与色散

(1) 色散: 白光 (或者其他复色光) 通过三棱镜 (或其他光学仪器), 分成多条不同颜色的光线。(一般要求这些光线是发散的)

(2) 色散的原因: 同一介质对不同波长的光具有不同折射率, 折射率与波长呈负相关; 最终导致不同色光分成不同路线。



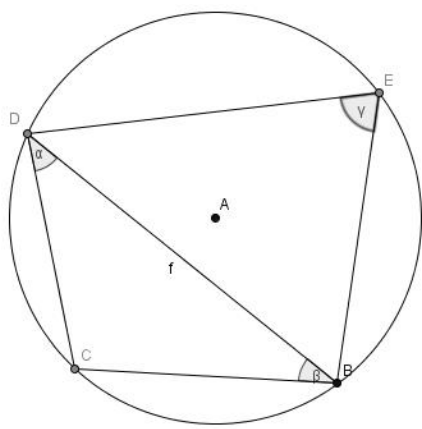
(3) 彩虹: 直径几毫米水滴中的色散。

①虹: 一次反射, 两次折射。红光在外侧, 紫光在内侧。偏向角 $40^\circ \sim 42^\circ$ 。

②霓/二次彩虹: 两次反射, 两次折射。红光在内侧, 紫光在外侧。偏向角约 51° 。

7、光路可逆性: 在介质环境一定时, 光在相同两点之间的往返总沿着相同的路径。(实质: 光学规律的时间反演对称性——光返回相当于时光倒流)

8、用几何光学三定律解题



(1) 折射定律不要记成 $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$, 否则容易

写错; 应记成 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. 等号同一边用的下标一样, 更好记忆; 定律中的下标与题目中具体各个角的下标可能不一致, 细节上要谨慎; 拿到折射的问题尽量先列出所有界面的折射定律, 以明确一些角度之间的关系。

(2) 可能会用到的几何关系: 三角形全等与相似, 导角 (根据互余、互补、平行等推导出一些角的相等或其他关系), 正弦定理, 余弦定理, 四点共圆 (对角互补, 外角等于内对角, 左图中 $\alpha + \beta = \gamma$)

(3) 光学是一门极度依赖近似的学科。需要对题干中的“小角度”、“极其薄”等暗示性词汇表示敏感。几何光学中常用两个近似 ($|x| \ll 1$):

① $\sin x \approx x \approx \tan x$ (第二章经常把 $\sin x$ 换成 $\tan x$);

② $(1+x)^a \approx 1+ax$ 。

但是, 不该近似或没有明确的暗示时, 千万不要近似。

(4) 偏向角: 就是出射光线相对入射光线转过的角度。多次反射与折射需要一步步计算偏向角再加起来。

①棱镜最小偏向角问题的处理步骤 (在此不接受对称性解释)

找出两次折射对应的入射与折射角 (共四个, 按顺序记为 i_1, i_2, i_3, i_4)

→分析几何关系: 两个折射定律, 一个四点共圆 ($i_2 + i_3 =$ 棱镜顶角 α)

→偏向角 $\delta = (i_1 - i_2) + (i_4 - i_3) = i_1 + i_4 - \alpha$

→极值条件 $\frac{d\delta}{di_1} = \frac{\partial\delta}{\partial i_1} + \frac{\partial\delta}{\partial i_4} \frac{di_4}{di_1} = 1 + \frac{di_4}{di_1} = 0$, 即 $\frac{di_4}{di_1} = -1$

→由 $i_2 + i_3 = \alpha$ 得 $di_2 + di_3 = 0$

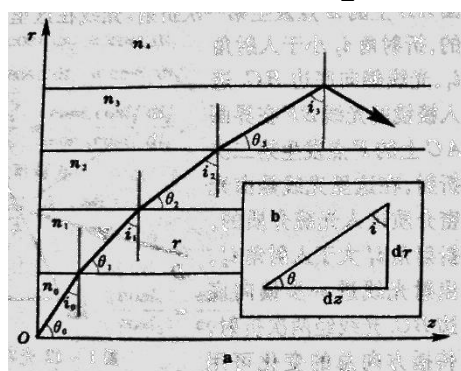
→用折射定律把角 2、3 换成 1、4, 得到 di_4 与 di_1 的关系。

→代回 $\frac{di_4}{di_1} = -1$, 得到角 1、4 在同一个函数作用下结果相等

→说明必须是角 1、4 相等。

②取到最小偏向角 δ_{\min} 时满足的关系: $i_2 = i_3 = \frac{\alpha}{2}$, $i_1 = i_4 = \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}$

$$\text{折射率 } n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$



(5) 光在渐变折射率介质中的轨迹 (所有字母以左图为准, 图摘自赵凯华《光学》)

①折射定律: $n \cos \theta = \text{常数}$ 。(极大体现这种写法的优越性)

②导数的几何意义: $\frac{dr}{dz} = \tan \theta$ 。

③设初始的折射率为 n_0 , 角度为 θ_0 , 则

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{d(n^2)}{dr}.$$

一般来说, 等式右边

的函数关系式已知。解此微分方程即可得到光的轨迹; 已知轨迹方程, 反过来也可求折射率随位置变化的函数。

④实例: 海市蜃楼 (热空气折射率比冷空气小; 根据地表温度与高空温度的不同, 分为下蜃与上蜃, 光路分别向下凹和向上凸, 分别呈现倒立与正立的像)

四、惠更斯原理

1、波的几何描述

- (1) 波面/波前: 相位相同的点构成的连续面。
- (2) 波线: 波前进方向上的线, 与波矢方向一致。(光线就是波线)
- (3) 波线与波面处处垂直。(意义: 梯度与等值面处处垂直)

2、惠更斯原理的内容: 波行进时, 波前上的每一点都可视为新的次波源, 由这些次波源发出的次波是球面波, 这些次波的包络面就是下一时刻的波面。

3、用惠更斯原理解释光学现象 (详见赵凯华《光学》)

(1) 反射定律: 一束平行光斜着打到界面上, 各条等距光线到达的时刻成等差数列。界面上的次波源以完全相同的方式朝反射方向发出次波, 反射光的包络面与波线与入射光均关于法线对称。故反射角等于入射角。

(2) 折射定律: 界面上的次波源同时还在朝下面的介质发出次波。由于新介质中波速不同, 包络面与波线方向与入射光不同, 折射角与入射角有差异。(差异

可以定量计算, $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$.)

(3) 衍射: 小孔就是一个次波源, 其发出的波各个方向都有, 而不是几何光学

中小孔成像只在某个范围内传播。

五、费马原理

1、光程： $L = \int_A^B n dl$. 是光在两点间路程在折射率加权下的和。

(1) 光程不一定等于光走过的路程，但在真空中二者相等。

(2) 在均匀介质 n 中，若光走过的路程为 d ，则 $L = nd$ 。

(3) 正弦波中，由于空间位置引起的相位为 $\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$ ；两点间光程与相位差的关系为 $\Delta\varphi = \int \vec{k} \cdot d\vec{l} = \int k dl = \int \frac{2\pi}{\lambda} dl = \int \frac{2\pi n}{\lambda_0} dl = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int n dl = \frac{2\pi}{\lambda_0} L$. 其中 λ_0 为真空中的波长， λ 为介质中的波长。可见光程差与相位差是等价的。

2、费马原理的内容

(1) 费马最初表述：光在固定两点间传播，一定沿着时间最短的路径。

(2) 时间最短等价于光程最短： $L = \int n dl = \int \frac{c}{v} v dt = c \Delta t \propto \Delta t$ 。

(3) 后人的改进：光在固定两点间传播，一定沿着光程取驻定值的路径（极大/极小/常值函数）。

(4) 数学表达： $\delta \int n dl = 0$.（光程与路径有关，广义上说不是由数决定的函数，而是由路径方程决定的泛函。泛函取驻定值要求变分为 0；当泛函可以转化为函数时，变分为 0 等价于对应函数取极值。）

3、用费马原理证明几何光学原理

(1) 注意点：用费马原理证明的原理必须固定光传播的起点与终点，然后考察光在其间走的路径；如果路径和端点都不固定，就无法做分析。

(2) 基本思路：对于比较简单的问题，只要利用几何关系说明其他的任意一条路径的光程都比正确的光程大/小/相等；如果不得不做定量计算，一般就是直接将光程表示为某些物理量的函数，令函数取极值，得到的式子就是相应的定理内容。

(3) 直线传播定律：两点之间直线最短。

(4) 反射定律：三角形两边之和大于（大于等于）第三边。

(5) 折射定律：用勾股定理表示光程，再令光程的微分等于 0，得到的就是折射定律。（注意起终点与界面的垂直距离是常值，两个点的水平距离也是常值，这样可以消去一些未知数）

第二章 几何光学成像

一、关于像与物的基本概念

1、同心束：从同一发出或者汇聚于同一点的光束。

2、光具组：一组光学器件。

3、★像与物的虚实

(1) 实物：实际能够发出光线的物体。

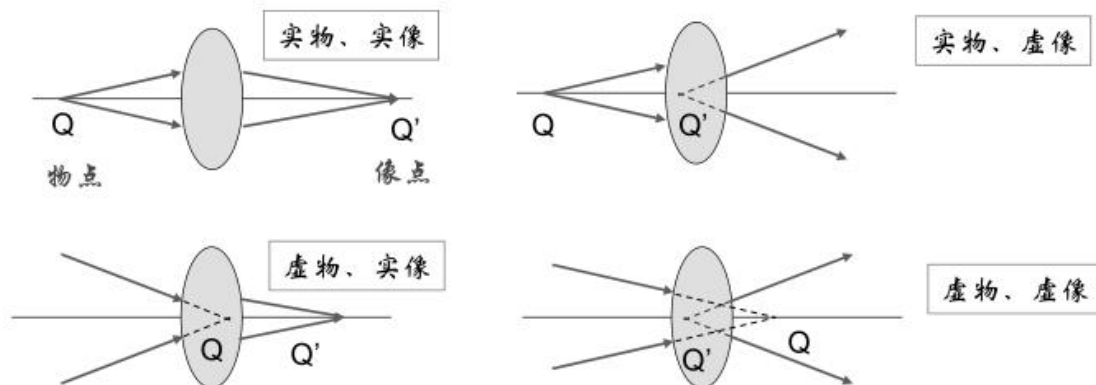
(2) 虚物：一束会聚光线在还没有相交时就被光学器件挡住，只能正向延长交于原先应当到达的那一点，这个交点称为虚物。

(3) 实像：实际光线会聚的点。

(4) 虚像：一束发散光线刚从光学器件出发时已经散开了，只有反向延长才能

使它们有一个交点，这个交点称为虚像。

(5) 由于光学器件多种多样，物的虚实与像的虚实没有必然关系，虚实仅能反应一侧的光的特点。(下图摘自资剑老师 PPT)



4、物方与像方：都是针对一个光学器件而言的。

(1) 物方/物空间：实物或虚物所在的一侧。

(2) 像方/像空间：实像或虚像所在的一侧。

(3) 根据上面的定义，物方不一定是左侧，像方不一定是右侧；物方与像方甚至可以指称同一侧。

5、物像共轭性：若 Q 处的物成像于 Q' ，则 Q' 处的物成像于 Q ；物与像之间有一一对应的可逆变换关系。(光路可逆)

6、物像等光程性：物与像之间的每一条光线经过的光程相同。

(1) 有些光路图看起来光程不等，是因为简化了仪器的形状，没有把仪器内的光程画准确。

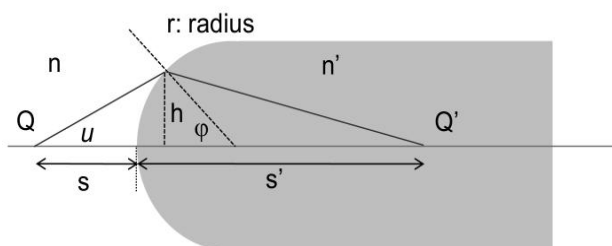
(2) 对于虚物与虚像，光程取延长线上光程的负值。

二、典型傍轴成像规律

1、平面镜成像：物与像关于镜面对称。像是正立等大的虚像。

2、傍轴：光线与光学仪器主轴夹角很小。(暗示近似处理)

3、球面傍轴成像(图片摘自资剑老师 PPT, r 为球面半径)



(1) 不近似的公式：

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} + \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = -4r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[\frac{1}{n^2(s+r)} - \frac{1}{n'^2(s'-r)} \right]$$

*局限性： s' 随 φ 变化，折射光不能会聚于一个点。

(2) ★近似： $\varphi \rightarrow 0$ ，右边直接趋于 0。 $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r}$ 可以认为会聚光交于一点。

(注：物距 s 与像距 s' 都是相对于球面顶点的距离，不是与球心的距离。)

(3) 焦点：一方距离无穷大时另一方各束光的交点。焦点到顶点的距离为焦距。

①物方焦点：像距无穷大(平行出射)时的物点。焦距为 $f = \frac{nr}{n'-n}$ 。

②像方焦点：物距无穷大(平行入射)时的像点。焦距为 $f' = \frac{n'r}{n'-n}$ 。

③两个焦距的关系： $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}$. (不能习惯性认为两方焦点对称)

④改写成像公式： $\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$.

4、薄透镜傍轴成像

(1) 薄透镜的组成：一般由两个光滑曲面/平面围成边界。两边的曲面均是可凹可凸的。

(2) 凸透镜与凹透镜不一定是两边都凸或两边都凹的，其界定标准是会聚还是发散光线。会聚光线的叫做凸透镜/会聚透镜/正透镜，发散光线的叫做凹透镜/发散透镜/负透镜。

(3) 透镜制造者公式/Gauss 透镜公式：若薄透镜的折射率为 n ，左侧与右侧界面的曲率半径分别为 r_1 与 r_2 ，若外部均是空气，则 $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

★符号法则： r_1 与 r_2 都是左凸为正；会聚透镜焦距为正，发散透镜焦距为负。

(4) 薄透镜折射成像公式： $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$. (物距与像距的符号：实正虚负)

*薄透镜：可以认为没有厚度，两边的顶点几乎重合。(一般可以画成一根线)

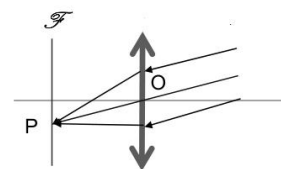
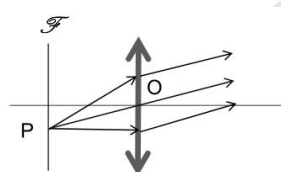
*牛顿公式：设物点离物方焦点的距离为 x ，像点离像方焦点的距离为 x' ，则有 $xx' = ff'$ 。(符号法则： $x = s - f$ ， $x' = s' - f'$ ，由此判断符号。)

(5) 透镜成像作图

①P 光：平行主轴入射，凸透镜折射后过像方焦点，凹透镜折射后反向延长线过物方焦点。

②F 光：由凸透镜物方焦点发出的光，或是正向延长线过凹透镜像方焦点的光，出射时平行主轴。

③M 光：过透镜中心的光出射后不改变方向。



④焦平面：过焦点且与光轴垂直的平面。

副光轴：过透镜中心且不与主轴重合的直线。

副光轴与焦平面的焦点称为副焦点。在凸透镜成像中，对于不与主轴平行的任意一条光线，只要作出与其平行的副光轴，则出射光过对应的副焦点；从副焦点发出的光出射后平行于对应的副光轴。凹透镜的结论类似。

⑤一般地，已知物求像，或者已知像求物，都通过 P 光、F 光、M 光中的任意两个来确定(看题目已给条件允许画出哪两条光线)，因为这三条光线最简单。

(6) 放大率 M

①横向放大率：像与物的大小之比。根据三角形相似，它等于像距与物距之比。

$M = -\frac{s'}{s} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$ ，其中物距与像距的符号法则同上；如果放大率算出来是负的，说明是倒立像，正的则是正立像。

②视角放大率：不同仪器定义不一样，见后面光学仪器部分。

5、球面镜反射(真空中)

(1) 成像公式:
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f}$$

★★★总结单球面折射与反射的符号法则: (不是薄透镜折射)

物理量	反射		折射	
	物/像在顶点左边	物/像在顶点右边	物/像在顶点左边	物/像在顶点右边
物距 s	+	-	+	-
像距 s'	+	-	-	+
曲率半径 r	球心在顶点左侧为-, 右侧为+			
焦距 f	$f = -\frac{r}{2}$			

两句话总结: 物像实正虚负, 半径右正左负。(物像的虚实与物点/像点位于哪一侧是有关系的)

(2) 根据上述公式, 球面镜的焦点位于球心与顶点连线的中点; 同样有 P 光、M 光、F 光 (M 光是过球心的光)。不过, 凸面镜是发散作用, 凹面镜是会聚作用, 作图法需要与透镜区分开。

6、逐次成像法解决光具组成像问题

(1) 每一次的成像均可以列基本的成像公式, 由这次的物距计算这次的像距, 再得到下一次的物距, 以此类推;

(2) 每一次的像都是下一次的物; 每一次像的虚实与下一次物的虚实没有必然联系。例如: 经某个仪器成实像, 若光线到达像点前没有被别的仪器挡住, 则交点真实存在, 此像对应下一次的实物; 若光线到达像点前被别的仪器挡住而不能形成实在的交点, 则此像对应下一次的虚物。

(3) 可以通过判断虚实来确定每次使用公式时物距的符号; 也可以直接做加减法——相邻两个光学器件 (这次和下次的器件) 的距离减去这一次的像距 (符号法则同上), 等于下一次的物距 (可能会是负的)。

(4) 光具组整体横向放大率等于各个仪器横向放大率的乘积 (符号法则同上)。

(5) 符号法则尽量用统一的标准, 自创一套标准往往会带来混乱。

(6) 遮住透镜的一部分, 除了亮度减小之外不会对像有任何影响。

7、用费马原理证明成像公式的步骤

(1) 固定物点与像点 (起终点固定, 即 s 与 s' 固定);

(2) 写出光程关于某些几何参量 (如长度, 角度等) 的函数;

(3) 化出的函数可能含多个变量, 但它们一般是不独立的, 一般只需定下一个参数就能够定下其他的, 因此需选择一个合适的参数, 将光程化为它的一元函数 (灵活使用第一章提到的几何关系, 并且尽量化成长度的函数, 角度比较麻烦);

(4) 利用傍轴条件对三角函数和根式函数做近似 (一般只会遇到这两种函数);

(5) 对近似后的光程求导, 等于 0, 得到一个公式, 此即为成像公式。

三、常见几何光学仪器

1、投影仪: 物距位于凸透镜一倍焦距与两倍焦距之间, 在屏幕上成倒立放大实像。(在 $s > f$ 的条件下, 物体越靠近焦点, 放大率越大; 一般 $s \approx f$)

2、照相机

(1) 原理: 经过凸透镜折射, 在底片上成倒立缩小实像。

(2) 景深：只有一个特定的物距能够使得物体在底片上清晰成像（即像恰好在底片的位置），其余位置的物体成像不是严格位于感光片上，但是当物在一定范围内时，感知到的像任仍然比较清晰，此范围（物的范围）称为景深。焦距一定， x （牛顿公式的 x ）越小，则景深越小。

3、眼睛

(1) 原理：晶状体为焦距可变的凸透镜，物方焦距 17.1~14.2 mm，像方焦距 22.8~18.9 mm（像方焦距略大）；可以通过虹膜牵拉调节出合适的焦距，使得成像在视网膜上。

(2) 远点和近点：眼睛能够看清的最远与最近距离。任何眼睛都存在近点，不可能看清无限近的物体；正常眼的远点在无穷远处（像方焦点基本位于视网膜处），近视眼的远点在有限远处。

(3) 明视距离：晶状体不必调节就可以看清的距离。一般是 25cm 左右。

(4) 近视眼：晶状体焦距偏小，光线会聚于视网膜前；需要凹透镜矫正。

远视眼：晶状体焦距偏大，光线未会聚就达到视网膜（成像于视网膜后）；需要凸透镜矫正。

4、放大镜

(1) 原理：物距小于一倍焦距，成正立放大虚像。

(2) 放大镜的视角放大率：像对眼睛的张角除以明视距离处肉眼观察物体的张角。若物与像的大小分别为 y 与 y' ，明视距离是 s_0 ，像到眼睛的距离为 s_0' ，则视角放大率 $M = -\frac{y'/s_0'}{y/s_0} = -\frac{y's_0}{ys_0'}$ 。一般认为眼睛离放大镜很近，物离放大镜焦点

很近。近似的视角放大率 $M = \frac{s_0}{f}$ 。

5、光学显微镜：物镜和目镜均为凸透镜，焦距很长且互相交错；物体经过物镜成倒立放大实像，并且落在目镜一倍焦距之内。最终成虚像，与原先物体相比是倒立且放大的。

*若物镜像方焦点与目镜物方焦点的距离为 Δ ，物镜与目镜的焦距分别为 f_o 与 f_e ，

物体与眼睛的距离为 s_0 ，则视角放大率 $M = -\frac{s_0\Delta}{f_o f_e}$ 。（物大致位于物镜焦点附近，

首次成像大致位于目镜物方焦点附近；视角放大率的定义同放大镜）

6、望远镜

(1) 原理：物镜与目镜均是凸透镜；物镜像方焦点与目镜物方焦点基本重合。远处物体发出的光近似为平行光，首次成像于重合焦点处，然后平行射入眼睛。相当于无穷远处的倒立虚像。

(2) 视角放大率：出射平行光与入射平行光对光轴的张角之比。 $M = -\frac{f_o}{f_e}$ 。

7、棱镜光谱仪

(1) 原理：通过棱镜色散将各种色光分开，形成光谱。

(2) 一般让入射光基本在偏向角最小的位置射入。定义偏向角对波长的导数为

角色散本领： $D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\delta}\right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}$ 。

称 $\frac{dn}{d\lambda}$ 为色散率。

第三章 干涉

一、干涉的理论依据

1、复数法处理光振动： A 相当于电磁场的振幅，可能差一个系数，但是完全等价； U 是不考虑时间而只随位置变化的函数，相当于固定某时刻下的电磁场分布。

(1) $\vec{A} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \Rightarrow \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)} = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} e^{-i\omega t} \equiv \vec{U} e^{-i\omega t}$. 其中 $\vec{U} = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)}$.

(2) 光强： $I = A^2 = \vec{U} \cdot \vec{U}^*$. (*表示共轭复数)

2、光振动的叠加

(1) 相干条件：两束光具有恒定相位差（要求频率相同，初相位稳定）。当相位差有变化但是有一定规律时为部分相干；相位差随意变化为不相干。

(2) 完全不相干的光，其相位差随意变化，平均下来为 0，总光强为各自光强直接相加。

(3) 两相干光源的干涉：电磁场满足叠加原理，光强不满足叠加原理。

① $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$. 假设这些矢量的振动方向是一致的，即 $\vec{A}_1 // \vec{A}_2$ ，且 $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ ，则

$$\begin{aligned} I = |\vec{U}|^2 &= \vec{U} \cdot \vec{U}^* = (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \cdot (\vec{U}_1^* + \vec{U}_2^*) \\ &= (A_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \varphi_0)} + A_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 + \varphi_0)}) (A_1 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 + \varphi_0)} + A_2 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 + \varphi_0)}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \end{aligned}$$

其中，相位差 $\delta = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L$ ； ΔL 为光程差。

②若振幅相等： $I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$.

在 $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ 的情况下：
$$\begin{cases} \delta = 2m\pi \text{ 或 } \Delta L = m\lambda \Rightarrow \text{干涉相长} \\ \delta = (2m+1)\pi \text{ 或 } \Delta L = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \text{干涉相消} \end{cases}$$

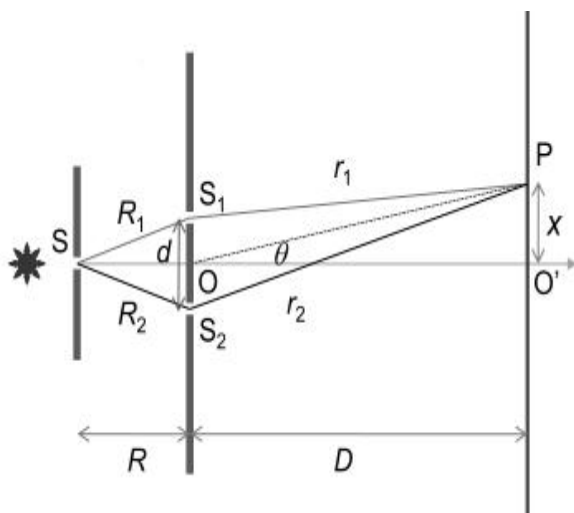
③满足相位差 δ 相同的点要求到两个光源的路程差为定值，其构成的曲面是回转双曲面。如果用屏幕接收干涉条纹，则条纹形状就是屏幕与双曲面族的交线。有两种可能：

(i) 屏幕平行于两光源连线，条纹为双曲线（当双曲线曲率很小时，近似为直线）；

(ii) 屏幕垂直于两光源连线，则条纹为同心圆；特别地，如果屏幕恰好位于两光源中垂面，则整个屏幕都是亮的，没有干涉条纹。

④光的波长越小，则相同光程差会导致越多的相位差，条纹越细密。

二、杨氏双缝干涉与空间相干性



1、杨氏双缝干涉（图摘自资剑老师PPT）

（1）基本假设： $d \ll D$ （远场）， $x \ll D$ （傍轴）， $R_1 = R_2$ （对称）。

（2）光程差：

$$\begin{aligned} \Delta L &= r_2 - r_1 \\ &= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= D \left[\sqrt{1 + \left(\frac{x + \frac{d}{2}}{D}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{d}{2}}{D}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\approx D \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2}{D^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{D^2} \right) \right] = \frac{dx}{D}.$$

另一种推导方式： $r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \frac{x}{D}$ 。

（3）相位差 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{2\pi dx}{\lambda D}$ 。光强 $I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi dx}{\lambda D}$ 。

（4）亮纹位置： $\delta = 2m\pi \Rightarrow x_m = \frac{m\lambda D}{d}$ 。条纹间距 $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{d}$ 。

暗纹位置： $\delta = (2m+1)\pi \Rightarrow x_m = \frac{(2m+1)\lambda D}{2d}$ 。条纹间距 $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{d}$ 。

光的波长越短，则条纹间距越小，条纹越细密。

2、能够转化为双缝干涉的干涉装置

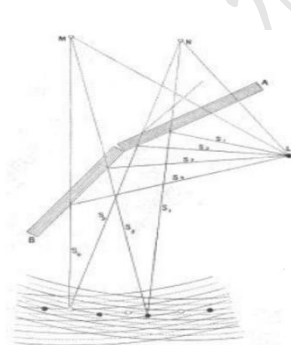


图 1

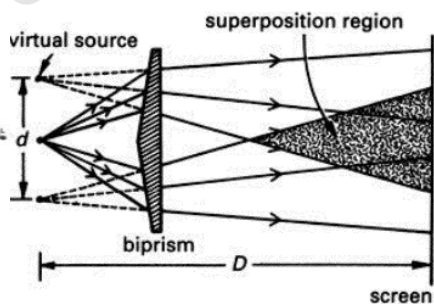


图 2

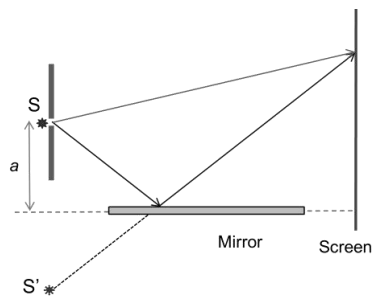
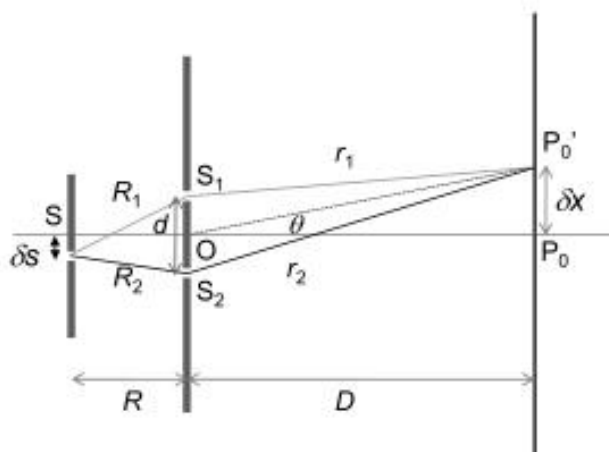


图 3

（1）菲涅尔双反射镜（图 1）：相当于光源在两个平面镜中的像的干涉。

（2）菲涅尔双棱镜（图 2）：相当于光源在双棱镜上下半折射的虚像的干涉。

（3）劳埃德镜/洛埃镜（图 3）：相当于光源本身与其在平面镜中的像的双缝干涉，双缝间距为 $2a$ 。（有半波损失，中央为暗纹，具体概念见后文）



3、双缝干涉条纹的移动

如果光源下移 δs ，则各级亮纹会上移 δx 。

$$\begin{aligned}\Delta L &= R_2 + r_2 - R_1 - r_1 \\ &= (R_2 - R_1) + (r_2 - r_1) = \frac{d\delta s}{R} + \frac{d(\delta x + x_m)}{D} \\ &= \frac{dx_m}{D} \Rightarrow \delta x = -\frac{D}{R}\delta s\end{aligned}$$

(负号表示光源与条纹移动方向相反)

4、普通光源发光的微观机理（涉及原子物理，了解即可）

(1) 自发辐射：物质内的电子自发跃迁至高能级，在跃迁回基态时发出光子。各个电子的跃迁互相独立，因此放射出的光具有不固定的相位。

(2) 受激辐射：如激光等。物质内的电子响应来自外界的光子，跃迁至相应的高能级，在跃迁基态时发出同样频率的光子。这类辐射具有比较固定的相位。

(3) 自发辐射的两个点光源一般是不相干的，因为其相位差不稳定，平均值在0左右；这样的光强可以直接叠加（并不是说光强满足叠加原理，而是干涉因子平均下来可以忽略）。受激辐射的两个点光源由于具有稳定相位差，是相干的。

(4) 研究发光机理的意义：解释多个点光源的干涉现象；解释线光源干涉（相当于多个点光源）与空间相干性。

5、光源宽度与衬比度

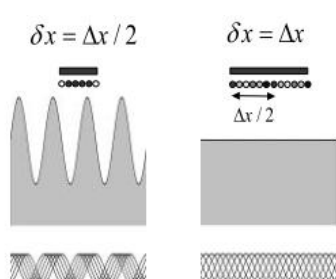
(1) 当光源具有宽度时，可以认为是无数个点光源连续分布在一条线段上，各个点光源彼此不相干。这时，各个点光源在屏幕上的条纹彼此错开，又相互叠加，因此造成条纹没有完全黑的地方（原先是单个点光源暗条纹的地方可能叠加了其他点光源的亮条纹）。

(2) 衬比度： $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 。衬比度为1，说明 $I_{\min} = 0$ ，暗纹处为完全暗；衬比度为0，说明 $I_{\min} = I_{\max}$ ，完全看不出干涉条纹；衬比度越大，则亮处与暗处的对比越明显。

(3) 杨氏双缝干涉的衬比度

①单个点光源：无其他影响，衬比度为1。

②两个点光源：假设光源A在轴线上，B稍有偏移，则B的条纹相对A的条纹移动 δx ，实际的条纹是二者条纹的叠加。当 δx 从0开始增加时，条纹衬比度逐渐



减小；当 $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x = \frac{\lambda D}{2d}$ 时，条纹衬比度为0，屏幕上各处一样亮。

③连续线光源：一根具有宽度的光源平行双缝连线对称放置。可以看成是无数个点光源连续分布在这条线上；实际的干涉条纹就是无数个条纹的叠加，相邻两套条纹错开一点，如左图。当整个光源宽度

为 Δx 时, 衬比度为 0。此时对应光源最大宽度 $b_0 = \frac{R}{D} \Delta x = \frac{\lambda R}{d}$ 。

6、空间相干性

(1) 产生原因: 实际普通光源总是有一定宽度, 并且各个点处发出的光彼此不相干; 因此, 选择不同的 d 、 D 、 λ , 条纹不仅有尺寸上的不同, 还有衬比度的不同; 在某些空间区域内才能看到干涉现象。

(2) 假设对于双缝 S_1 与 S_2 , 如果与光源的水平距离 R 以及光源宽度 b 确定, 那么只有当 $d \leq \frac{\lambda R}{b}$ 时才能够在屏幕上形成干涉条纹。(实质: 让 d 对应的最大光源宽度不小于 b)

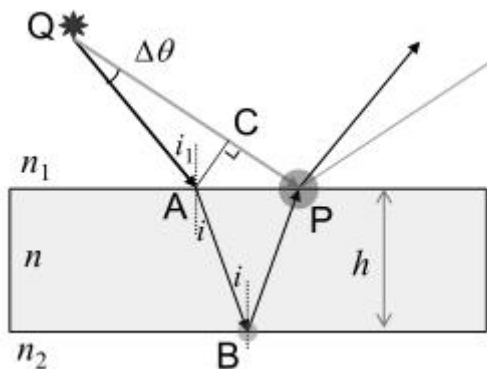
(3) 若 d 固定, 改变 R , 那么只有当 S_1 与 S_2 对光源中心的张角 $\Delta\theta \approx \frac{d}{R} \leq \frac{\lambda}{b}$ 时才能够产生干涉条纹。

三、薄膜干涉

(一) 基本原理

1、★半波损失: 当光从折射率小的介质射向折射率大的介质时, 其反射光的相位会突变 π 。(折射光没有半波损失; 从折射率大射向折射率小的介质, 无论反射光还是折射光都没有半波损失)

2、表观光程差: 仅仅由于光的路程不同引起的光程差。如果其中一束光存在半波损失, 那么总的光程差不等于表观光程差, 需要加上 $\frac{\lambda}{2}$ 。若无半波损失, 则总的光程差等于表观光程差。最终的相位差等于总的光程差乘以 $\frac{2\pi}{\lambda}$, 也即其中一束光有半波损失会导致相位差增加 π 。但是, 如果两束光都有半波损失, 那么半波损失导致的相位差正好被抵消。



3、薄膜干涉的光程差

(1) 表观光程差:

$$\Delta L_0 \approx n(|AB| + |BP|) - n_1|CP| = n \frac{2h}{\cos i} - n_1 \cdot 2h \tan i \sin i$$

$$= n \frac{2h}{\cos i} - n \cdot 2h \tan i \sin i = 2nh \cos i. \quad (\text{i 是薄膜内的那个角, 不是外面的入射角})$$

(2) 总光程差与取决于各介质折射率的大小关系。

①若 $n_1 > n > n_2$ 或 $n_1 < n < n_2$ (单调变化), 则 B 和 P 处的反射要么都有半波损失, 要么都没有。此时半波损失不导致两束光产生相位差。

$$\Delta L = 2nh \cos i, \quad \delta = \frac{4\pi nh \cos i}{\lambda}.$$

②若 $n_1 < n > n_2$ 或 $n_1 > n < n_2$ (不单调变化), 则 B 和 P 只有一个地方的反射光有半波损失。此时半波损失会导致两束光产生相位差。

$$\Delta L = 2nh \cos i + \frac{\lambda}{2}, \quad \delta = \frac{4\pi nh \cos i}{\lambda} + \pi.$$

(半波损失不产生相位差, 不等于没有半波损失, 比如 $n_1 < n < n_2$ 。用词需严谨。)

(二) 等厚干涉

1、对于薄膜干涉, 若 i 确定, 则相位差只由 h 决定。平行光入射进薄膜表面, 若薄膜深度(厚度)不均匀, 则不同厚度对应不同相位差, 会产生干涉条纹。

2、产生干涉条纹的位置: 两束光交于图中 P 点, 因此干涉条纹位于薄膜表面。

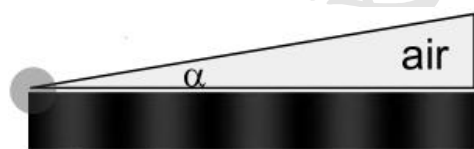
3、干涉极值

半波损失 有无影响	干涉极大		干涉极小	
	总光程差	厚度	总光程差	厚度
有	$\Delta L = 2nh \cos i + \frac{\lambda}{2}$ $= k\lambda$	$h = \frac{(k-1/2)\lambda}{2n \cos i}$	$\Delta L = 2nh \cos i + \frac{\lambda}{2}$ $= (k + \frac{1}{2})\lambda$	$h = \frac{k\lambda}{2n \cos i}$
无	$\Delta L = 2nh \cos i$ $= k\lambda$	$h = \frac{k\lambda}{2n \cos i}$	$\Delta L = 2nh \cos i$ $= (k + \frac{1}{2})\lambda$	$h = \frac{(k+1/2)\lambda}{2n \cos i}$

4、几个注意点

(1) 在具体讨论薄膜等厚干涉时, 一般讨论正入射(入射角为 0), 完全消除倾角的影响; 即使界面有微小倾斜, 也不考虑这一因素导致的折射, 也即入射光、出射光、反射光都看成是在同一方向。

(2) 任何干涉模型都不宜死记公式。从考试角度讲, 不可能直接考原结论; 从知识体系角度讲, 任何干涉模型都只是一个例子, 真正属于光学理论体系的不是这些例子, 而是计算光程差和判断半波损失这两个基本操作。



5、空气劈尖

(1) 干涉机理: 两层平面介质形成一个楔子, 中间是空气薄膜。对于反射光, 有一些直接在上表面反射, 一些在下表面反射, 因此有光程差; 斜面的厚度不均匀, 有一个变化梯度, 因此出现干涉条纹。(直条纹)

(注: 空气劈尖中默认倾角 α 很小, 否则正入射的近似不成立)

(2) 对于空气薄膜, $n_1 > n = 1 < n_2$, 半波损失会导致光程差, 故正入射的总光程差为 $\Delta L = 2h + \frac{\lambda}{2}$ 。亮纹处 $h = \frac{(k-1/2)\lambda}{2}$, 暗纹处 $h = \frac{k\lambda}{2}$ 。(劈的顶点处是暗纹)

(3) 条纹间距: 相邻两条暗(亮)纹对应的厚度之差为 $\Delta h = \frac{\lambda}{2}$; 这些条纹在水

平方向的间距为 $\Delta x = \frac{\Delta h}{\tan \alpha} \approx \frac{\Delta h}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha}$ 。(倾角很小, 近似也等于斜面方向上这些

条纹的间距: $\Delta s = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} \approx \frac{\Delta h}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha}$.)

(4) 空气劈尖的应用: 对微小尺寸起放大作用, 进行精细测量。

①测量劈的倾角: $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x}$.

②测量细小物体的直径: 将一个细小的圆柱形物体夹在劈中, 设其到劈顶点处的距离为 D , 则物体直径 $d = D\alpha = \frac{\lambda D}{2\Delta x}$. 如果不知道 D , 可以数出劈尖与物体之间

干涉条纹的条数 N , 则 $D = N\Delta x$, $d = N\Delta x\alpha = \frac{N}{2}\lambda$.

③平整度检查: 只有在劈的上下表面均严格平整时才有直条纹; 一旦某一处有不平整, 则干涉条纹会出现弯曲。

对于上图(顶点朝左), 干涉条纹越往右对应的厚度越大。一旦条纹朝左凸, 则说明原先是正常厚度的地方实际厚度要厚一点(因为应有的厚度在左边提前出现), 说明该处平面有凹陷(注意这是下表面的情况, 厚说明下表面低而不是高); 反之, 若条纹向右凸, 则该处平面有凸起。(干涉膨胀计)

(5) 如果劈的上表面移动, 则干涉条纹移动。假设劈的顶点朝左, 当上表面上移时, 各个地方厚度增加, 条纹级次增加, 高级条纹提前出现, 因此条纹左移; 反之, 若上表面下移, 则条纹右移。只要倾角不变, 则条纹间距不变。

(6) 若劈的倾角变大, 则厚度变化得更快, 干涉条纹变密, 反之变疏。

6、牛顿环: 与空气劈尖一样, 是一种空气薄膜的等厚干涉。

(1) 基本假设: 球形透镜的曲率半径很大(相当于倾斜度很小), 空气薄膜的厚度远小于曲率半径。

(2) 几何关系: 设 k 级条纹的半径为 r_k , 对应的薄膜厚度为 h_k , 则

$$r_k^2 = R^2 - (R - h_k)^2 = 2Rh_k - h_k^2 \approx 2Rh_k. \quad (\text{二阶小量被舍去})$$

(3) 条纹为同心圆状。

①反射光: 一部分在透镜下表面反射, 一部分在平行玻璃片表面反射。半波损失会导致相位差; 干涉条纹在透镜表面。

$$\text{总光程差 } \Delta L = 2h_k + \frac{\lambda}{2} = \frac{r_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2}. \quad \text{亮纹,}$$

$$r_k = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R\lambda}; \quad \text{暗纹, } r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

(中心为暗点)

②透射光: 我们倾向于在牛顿环中讨论透射光的干涉, 但是空气劈尖也有(只是不讨论)。

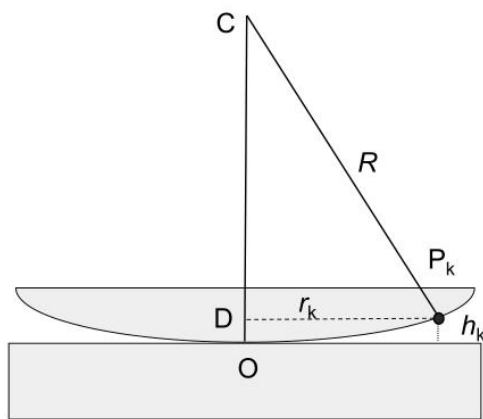
对于透射光, 一部分不发生任何反射而直接透过, 另一部分在空气薄膜内反射两次后往下透射。因此, 半波损失不导致相位差; 透射光的干涉条纹在平行玻璃板表面。

$$\text{总光程差 } \Delta L = 2h_k = \frac{r_k^2}{R}. \quad \text{亮纹, } r_k = \sqrt{kR\lambda}; \quad \text{暗纹, } r_k = \sqrt{(k - \frac{1}{2})R\lambda}.$$

(中心为亮点; 透射光与反射光的干涉条纹正好互补)

③干涉条纹半径的特点: 与整数平方根成正比。越往外条纹越密。

7、增透/增反膜



(1) 任何干涉模型都同时存在反射光与透射光的两套干涉，尽管有些我们不全部讨论，但是不代表那样的干涉不存在。

(2) 增透与增反的本质：巧妙设计薄膜厚度以及各种介质的折射率，使得反射光/透射光恰好干涉加强/相消。

(3) 膜的介质特点：一般最上一层均为空气，折射率 n_0 最小。下面有另外两层介质，自上而下为 n_1 与 n_2 ； $n_1 < n_2$ 称为低膜， $n_1 > n_2$ 称为高膜。对于反射光干涉，低膜的半波损失不导致相位差，高膜相反；对于透射光，低膜的半波损失会导致相位差，高膜相反（这里高膜实际上没有半波损失）。

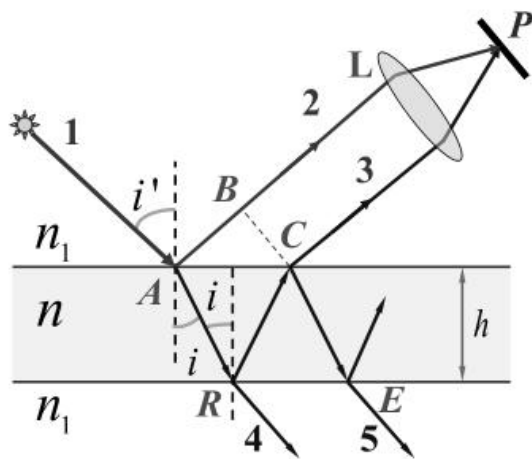
(4) 增反：让反射光干涉加强。增透：让透射光干涉加强。

功能	低膜		高膜	
	总光程差	厚度	总光程差	厚度
增反	$\Delta L = 2n_1h = k\lambda$	$h = \frac{k\lambda}{2n_1}$	$\Delta L = 2n_1h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$	$h = \frac{(k-1/2)\lambda}{2n_1}$
增透	$\Delta L = 2n_1h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$	$h = \frac{(k-1/2)\lambda}{2n_1}$	$\Delta L = 2n_1h = k\lambda$	$h = \frac{k\lambda}{2n_1}$

由此，增反与增透都是针对某些特定的波长而言的。

(5) 注意：上述的“增”可以使反射/透射光的振幅达到极大，但是并不改变能量分配（干涉极小的那部分光并不能把它的能量匀给极大的那部分）；如果要使得某些光的振幅极大并且占入射光能量的大部分，则需要调整折射率。如果低膜满足 $n_1 = \sqrt{n_0 n_2}$ ，则可以完全消反射光。

(三) 等倾干涉



1、对于薄膜干涉，若 h 确定，则相位差只由 i 决定。在薄膜厚度均匀的情况下，从点光源发出入射角不同的光，经过反射与折射之后传播方向不一样，因此在不同位置以不同相位差发生干涉，形成干涉条纹。

2、等倾干涉示意图如左图，与等厚干涉不同。反射的干涉光来自同一束入射光，一部分直接反射，另一部分射入薄膜并反射之后再出射；透射的干涉光来自同一束折射光，一部分直接出射，另一部分在薄膜内反射两次后再出射。干

涉光是平行光，原则上干涉于无穷远处，用光屏不能直接接收；一般用透镜会聚至光屏观察干涉条纹。

（注意到几何光学仪器的物像等光程性，透镜不会影响相位差，此法可行）

3、表观光程差的表达式仍是 $2nh \cos i$ 。除此之外还需判断半波损失是否造成相位差，涉及的每一次反射都需要考虑。

4、干涉极值（透射光与反射光的表观光程差都是 $2nh \cos i$ ）

半波损失 有无影响	干涉极大		干涉极小	
	总光程差	倾角	总光程差	倾角
有	$\Delta L = 2nh \cos i + \frac{\lambda}{2}$ $= k\lambda$	$\cos i = \frac{(k-1/2)\lambda}{2nh}$	$\Delta L = 2nh \cos i + \frac{\lambda}{2}$ $= (k + \frac{1}{2})\lambda$	$\cos i = \frac{k\lambda}{2nh}$
无	$\Delta L = 2nh \cos i$ $= k\lambda$	$\cos i = \frac{k\lambda}{2nh}$	$\Delta L = 2nh \cos i$ $= (k + \frac{1}{2})\lambda$	$\cos i = \frac{(k+1/2)\lambda}{2nh}$

5、干涉条纹的性质

(1) 经透镜会聚之后得到的干涉条纹是同心圆；考虑到眼睛也是一个透镜，因此直接用眼睛可以观察到干涉条纹，同样是同心圆。

(2) 在倾角较小的区间内，近似有

$$\cos i_{k+1} - \cos i_k \approx \frac{d \cos i}{di} \Big|_{i=i_k} (i_{k+1} - i_k) = -\sin i_k (i_{k+1} - i_k) = \frac{\lambda}{2nh} \cdot \text{因此 } i_{k+1} - i_k = -\frac{\lambda}{2nh \sin i_k}.$$

内部条纹的级次比外部高。

(3) 在倾角较小的区间内，条纹半径基本与倾角 i 成正比；条纹外密内疏。

(4) Δ 如果要求估算条纹半径，一般有以下几个步骤：

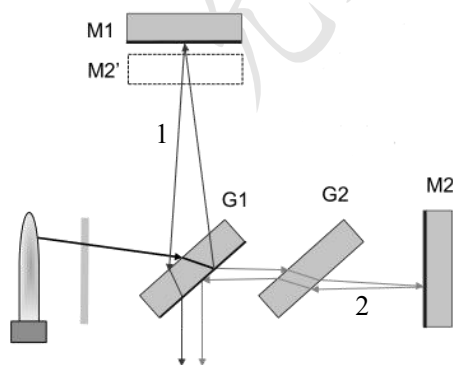
① 得知干涉级次 k ，计算折射角 i ；

② 根据折射定律得到入射角 i' （**千万不要直接将 i 代入下面的步骤**）；

③ 得知反射点到屏幕的垂直距离 D ，则 k 级条纹半径 $r_k \approx D \tan i'$ 。（相当粗略的估计，忽略了光线在透镜内的折射）

四、迈克尔逊干涉仪

1、涉及的仪器：平面反射镜 M_1 与 M_2 ，半透半反镜 G_1 ，补偿镜 G_2 。 M_1 与 M_2 垂直，并且与 G_1 、 G_2 成 45° 角。



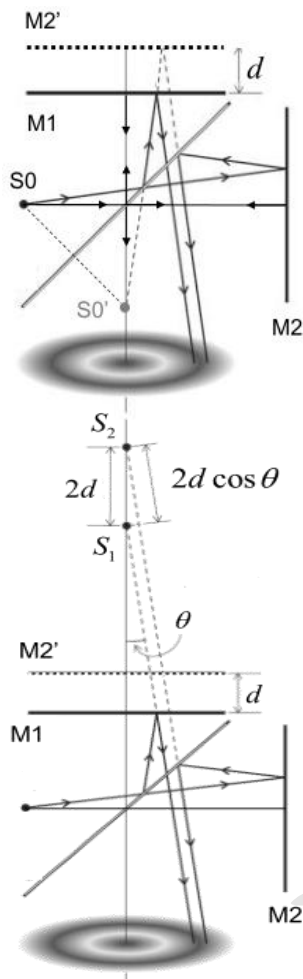
2、干涉机理：入射光到达 G_1 后，一部分被反射，再经 M_1 反射、 G_1 透射到达光屏；另一部分透射，再经 M_2 反射、 G_1 反射到达光屏；由于 M_1 与 M_2 到 G_1 的距离不同，会产生光程差。

(1) 半波损失在 M_1 与 M_2 处反射总是存在；光线 2 在 G_1 处反射也总是存在；光线 1 在 G_1 内部有无半波损失，要考虑 G_1 的玻璃部分及其下表面镀的半透半反膜的折射率。在大多数情况下，如果没有特殊规定，默认半透半反膜的折射率最大，因此光线 1 在 G_1 内部的反射也存在半波损失。光线 1 与光线 2 都发生两次半波损失，因此这时半波损失不产生相位差。

(2) 补偿镜的作用：光线 1 在全过程中穿过玻璃 3 次，而光线 2 只穿过 1 次。为了让光程差只由绝对距离产生，必须消除这一差异，所以设置 G_2 ，让光线 2 再多穿过玻璃 2 次。

3、迈克尔逊干涉仪的等效

(1) 光学仪器等效：做光源 S 关于 G_1 的像 S' ，以及 M_2 关于 G_1 的像 M_2' ，则干涉仪可以等效成以 S' 为光源，在 M_1 与 M_2' 间发生的薄膜干涉。根据薄膜干涉公式，光程差就是 $2nd \cos i = 2d \cos i$ （空气薄膜）。在下方用透镜会聚光线。同样得到同心圆的干涉条纹，其性质与薄膜等倾干涉完全一样。



(2) 虚光源等效：上述的等效可以进一步深入。作 S' 关于 M_1 与 M_2' 的两个像 S_1' 与 S_2' ，则整个装置可以看成两个点光源 S_1' 与 S_2' 的直接干涉。此时光屏垂直于二者连线，故条纹为同心圆状；光程差 $2d \cos i$ 能够更加容易地得到。

(3) 干涉过程中存在任何半波损失，绝不能从等效之后的光路分析，因为等效会减少反射的次数，从而无法判断原先经历几次反射和几次半波损失。必须从原光路判断有哪几处半波损失，是否导致了相位差。

4、干涉条纹的移动：若移动反射镜，改变 d ，则条纹会有变动。在两反射镜严格垂直的情况下，等倾条纹仍是内部级次高于外部，因此中央点级次最高。若 d 减小，则中央点级次变低，条纹向内吞；若 d 增大，则中央点级次变高，条纹向外吐。

由此可以算出波长：设移动 Δd 时条纹吞/吐了 N 条，则 $2\Delta d = N\lambda$ ，故 $\lambda = \frac{2\Delta d}{N}$ 。

5、干涉场：收集到并且显现出干涉条纹的区域。由于仪器尺度有限，干涉场往往是有限的。

☆移动反射镜前后干涉场内条纹的数目会变化，因为不同情况下条纹的疏密不一样。假设一开始中央为亮点，级次是 k_0 ；如果移动前干涉场内的亮纹数目是 N_1 条亮/暗纹（不包括中央点），而吞入 N 条亮纹后干涉场内的亮纹数目变为 N_2 条，则有 $\begin{cases} 2d = k_0\lambda, \\ 2d \cos i = (k_0 - N_1)\lambda \end{cases}$ 以及

$$\begin{cases} 2(d - \Delta d) = (k_0 - N)\lambda, \\ 2(d - \Delta d) \cos i = (k_0 - N - N_2)\lambda \end{cases}, \text{ 其中 } i \text{ 是干涉场最边缘对应的入射角（在这里}$$

默认两套干涉条纹最边上的亮纹是在同一位置）。于是有 $\frac{k_0}{k_0 - N_1} = \frac{k_0 - N}{k_0 - N - N_2}$ ，

从而可以在不知道任何长度、角度参数的情况下解出 k_0 。如果解是负数，则应当舍去；如果解是正的非整数，则应当四舍五入保留整数，不必认为答案是错误的，因为两套干涉条纹最边上的亮纹实际上可能不是正好在同一位置。

6、如果 M_1 与 M_2 不严格垂直，则 M_1 与 M_2' 存在小夹角，会引入等厚干涉的现象。在 d 较大时，等倾干涉现象更明显，因此还是看到同心圆条纹；当 d 逐渐减小时，等厚干涉所占比重越来越大，因此条纹逐渐变直。当 $d = 0$ 时，近似可以看到等间距的直条纹；这个直条纹也可以理解为 S_1' 与 S_2' 的连线此时与光屏平行，产生等效的杨氏双缝干涉。

五、非单色光干涉与时间相干性

1、两种相差不大的光的干涉

(1) 初始条件：两种光具有波长 λ_1 与 λ_2 ，对应波矢 k_1 与 k_2 。记 $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda$ ，波长差 $|\lambda_1 - \lambda_2| = \Delta\lambda$ （一般非常小）， $\frac{k_1 + k_2}{2} = k$ ， $|k_1 - k_2| = \Delta k$ 。

(2) 两个点光源各发出这两种波长的光，在同一光屏上干涉。根据单色光的干涉公式， $I_1 = I_0(1 + \cos k_1 \Delta L)$ ， $I_2 = I_0(1 + \cos k_2 \Delta L)$ ，故总的干涉光强

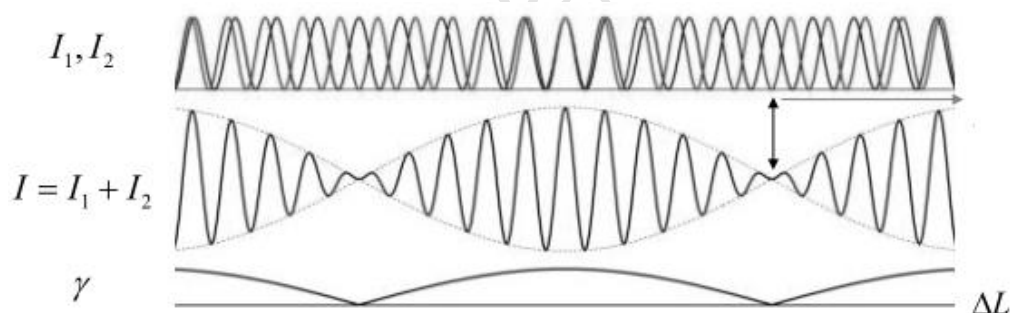
$$I = I_1 + I_2 = I_0(2 + \cos k_1 \Delta L + \cos k_2 \Delta L) = I_0(2 + 2 \cos \frac{k_1 + k_2}{2} \Delta L \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \Delta L) \\ = 2I_0(1 + \cos k \Delta L \cos \frac{\Delta k}{2} \Delta L).$$

(3) 干涉条纹的性质：如果是单色光，那么 $I = 2I_0(1 + \cos k \Delta L)$ ，光强随光程差呈变化幅度稳定的周期性变化关系（最亮处一样亮，最暗处一样暗），衬比度为1；在这里，光强随光程差呈**变化幅度周期性变化的周期性变化关系**，衬比度随

光程差呈周期性变化关系， $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \cos \frac{\Delta k \Delta L}{2} \right|$ 。（这里的衬比度是随位置连续变化的，其中的 I_{\max} 与 I_{\min} 不是整个干涉场中的最大、最小光强，

而是在固定振幅振荡的 $\cos \frac{\Delta k \Delta L}{2}$ 项而允许 $\cos k \Delta L$ 变动时对应的最大与最小光

强。当然，这种固定与变动只是假想的，因为 $\cos k \Delta L$ 变动时 $\cos \frac{\Delta k \Delta L}{2}$ 必然也变动，但是为了区分振幅变化与振荡本身，需要做这样的假想。）



①具体现象：干涉条纹的清晰度呈周期性变化，类似于声波的拍现象。

②变化周期：当 $\frac{\Delta k \Delta L}{2}$ 变化 π 时，即完成一个周期（不是 2π ，因为衬比度的变化

只看 $\cos \frac{\Delta k \Delta L}{2}$ 的绝对值）。因此，空间上的变化周期 ΔL_0 满足 $\frac{\Delta k \Delta L_0}{2} = \pi$ ，从而

$$\Delta L_0 = \frac{2\pi}{\Delta k} = 2\pi \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right)^{-1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}.$$

测量 ΔL_0 与 λ ，则可以计算出波长差 $\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta L_0}$ 。（注意 ΔL_0 是光程差的变动周期，实际还需要用其他参量表示，如迈

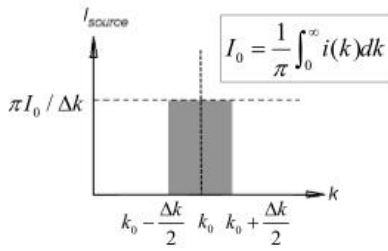
克尔逊干涉仪的干涉场中心， ΔL_0 应写为 $2\Delta d$ ）

2、对于 n 种离散波长的光，假设初始强度 I_0 一样，则 $I = \sum_{i=1}^n I_0(1 + \cos k_i \Delta L)$ ；如

果是连续光谱，其光谱密度函数为 $i(k)$ ，则 $I = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} i(k)(1 + \cos k \Delta L) dk$ ，而初始

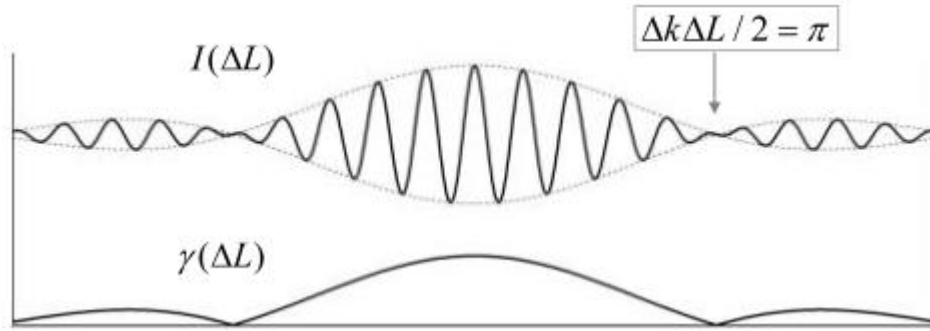
光强 $I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} i(k) dk$ 。（是一种 Fourier 变换，在此不做过多解释，了解即可）

e.g. 光谱满足均匀分布： $i(k) = \begin{cases} \frac{\pi I_0}{\Delta k}, & k_0 - \frac{\Delta k}{2} \leq k \leq k_0 + \frac{\Delta k}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，则



$$I = \frac{1}{\pi} \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} \frac{\pi I_0}{\Delta k} (1 + \cos k \Delta L) dk$$

$$= I_0 \left(1 + \frac{\sin \Delta k \Delta L / 2}{\Delta k \Delta L / 2} \cos k_0 \Delta L \right).$$



干涉条纹衬比为 $\left| \frac{\sin \Delta k \Delta L / 2}{\Delta k \Delta L / 2} \right|$ ，振荡幅度随光程差增大而逐渐减小；在远处将逐渐看不到干涉条纹，而只有最中间的一个周期能够看到较清晰的条纹。这一区域对应的光程差区间 ΔL_0 使得 $\frac{\Delta k \Delta L}{2}$ 变化 2π ，故 $\Delta L_0 = \frac{4\pi}{\Delta k}$ ，称为相干长度（能够观察到干涉条纹的区域长度）。

3、时间相干性

（1）普通光源发光的另一特点：发出的光并非完全单色，并且单次发光时间远短于仪器响应时间。

（2）波列：光源单次发光所发出的一系列电磁波，具有规则的相位变化。由于普通光源发光的随机性，每个波列的长度都是有限的，并且一般认为来自不同波列的光是不相干的，只有从同一波列分出的两束光才会产生干涉条纹。

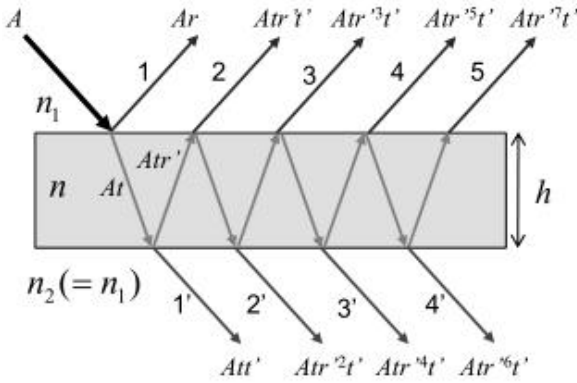
（3）时间相干性：在干涉实验中，从同一个波列分出的两束光的光程差不能超过波列的长度，否则两束光完全没有相遇的机会，后一束尚未到达光屏时前一束

已经消失。记单次发光持续时间为 τ_0 ，则光程差的限值为 $c\tau_0$ ，在此之外很难看到干涉条纹。

六、多光束干涉

1、多光束干涉是指薄膜中的光经过多次反射后分成的很多束光（趋向于无穷多束）的叠加。任何干涉模型中都存在多光束干涉，只是光强一般集中在前两束光，所以前文均不讨论多光束。

2、介质的折射与反射属性：这里只讨论薄膜两边折射率相同的情况。



(1) 振幅反射/透射率：反射/透射光振幅与入射光振幅的比值。

强度反射/透射率：反射/透射光强度与入射光强度的比值。

(2) 设：从 n_1 射向 n ，振幅反射率 r ，透射率 t ；从 n 射向 n_1 ，振幅反射率 r' ，透射率 t' 。

(3) Stokes 定律： $r' = -r$ ， $r^2 + tt' = 1$ 。

①第一个式子是因为振幅反射率同时也包含了振幅方向的信息，负号就意味着半波损失；与此同时，并不存在 $r+t=1$ 或 $r'+t'=1$ 之说，是能量守恒而不是振幅守恒。

②定义强度反射率 $R=r^2$ ，它是反射光光强与入射光光强之比。由于能量守恒，有强度透射率 $T=1-R$ ，但是不能说 $T=t^2$ 。

3、光强计算：任意相邻两束光之间存在表观光程差 $2nh\cos i$ ，对应相位差

$\delta = \frac{4\pi nh \cos i}{\lambda}$ ；在此讨论 $n > n_1$ ，因此只有入射光在上表面的反射（即光线1）

存在半波损失（这个半波损失在反射率的负号上已经可以体现，不用再另外计算）。设入射光振幅为 A ，强度为 $I_0 = A^2$ ，可以得到所有光线的复振幅：

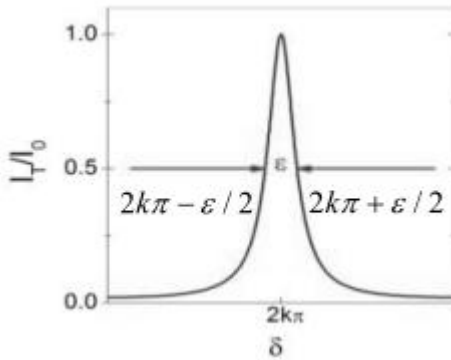
$$\begin{cases} \tilde{U}_1 = Ar = -Ar' \\ \tilde{U}_2 = Atr't'e^{i\delta} \\ \tilde{U}_3 = Atr'^3t'e^{2i\delta} \\ \dots \\ \tilde{U}_n = Atr'^{2n-3}t'e^{(n-1)i\delta} \quad (n \geq 2) \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{U}_{1'} = Att' \\ \tilde{U}_2 = Atr'^2t'e^{i\delta} \\ \tilde{U}_3 = Atr'^4t'e^{2i\delta} \\ \dots \\ \tilde{U}_n = Atr'^{2n-2}t'e^{(n-1)i\delta} \quad (n \geq 1) \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{透射光合振动: } \tilde{U}_T = \sum_{n=1}^{\infty} Att' r'^{2n-2} e^{(n-1)i\delta} = Att' \frac{1}{1-r'^2 e^{i\delta}} = \frac{A(1-r^2)}{1-r^2 e^{i\delta}}.$$

$$\begin{aligned} I_T = \tilde{U}_T \tilde{U}_T^* &= \frac{A^2(1-r^2)^2}{(1-r^2 e^{i\delta})(1-r^2 e^{-i\delta})} = \frac{A^2(1-r^2)^2}{1+r^4-r^2(e^{i\delta}+e^{-i\delta})} = \frac{A^2(1-r^2)^2}{1+r^4-2r^2\cos\delta} \\ &= \frac{A^2(1-r^2)^2}{r^4-2r^2+1+2r^2(1-\cos\delta)} = \frac{A^2(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{A^2(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{I_0}{1+\frac{4R\sin^2\delta/2}{(1-R)^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{反射光光强 } I_R = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1+\frac{(1-R)^2}{4R\sin^2\delta/2}}.$$

(1) 干涉条纹的定性描述：是同心圆条纹，并且条纹比较细密；反射光与透射光的条纹是互补的；强度反射率 R 越大，则透射条纹衬比度越大，反射条纹衬比度越小。



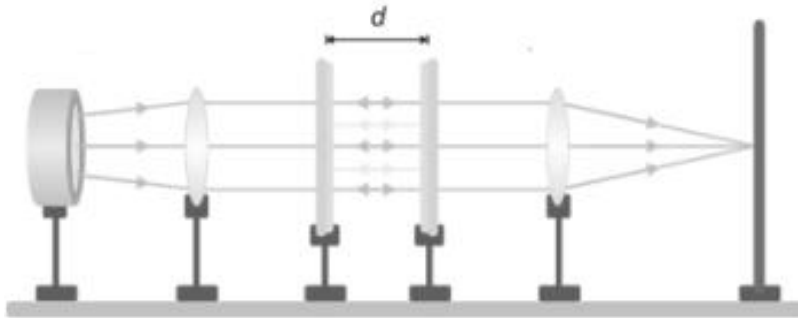
(2) 透射光的 I_T - δ 图像中，极大值点为 $\delta=2k\pi$ ；定义直线 $I_T = I_0/2$ 与曲线的两个交点之间的距离为半峰宽 ε ，在曲线较尖锐时有

$$\frac{I_0}{1+\frac{4R\sin^2\varepsilon/4}{(1-R)^2}} \approx \frac{I_0}{1+\frac{4R(\varepsilon/4)^2}{(1-R)^2}} = \frac{I_0}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

此式定量说明，强度反射率 R 越大，则 ε 越小，透射条纹衬比度越大。

4、法布里—佩罗干涉仪 (F-P 干涉仪)

(1) F-P 干涉仪利用多光束干涉，使得一束光在两个镜子间来回反射又不断射出（这个部位称为 F-P 腔），实现多光束干涉。



(2) 使用 F-P 干涉仪的目的：实现分光。若入射光为非单色光，则通过干涉条纹的分离将两种光分开。

(3) 分光过程中需要考虑的两个因素

①同一种光的条纹宽度：假设可以看到亮纹的区间为前述的小区间 ε ，则可以算出这个相位差区间对应的倾角 i 的区间（角宽度）。

$$\delta = \frac{4\pi h \cos i}{\lambda} \Rightarrow \Delta\delta = -\frac{4\pi h \sin i}{\lambda} \Delta i; \text{ 令 } \Delta\delta = \varepsilon \Rightarrow |\Delta i| = \frac{\lambda \varepsilon}{4\pi h \sin i} = \frac{\lambda}{2\pi h \sin i} \frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

这是亮纹的角宽度。

②不同波长光的干涉条纹的位置关系：若要求两种光在同一位置处的光强都不低于 $I_0/2$ ，则这两种光在该处的相位差之差不超过 ε 。由此可以得到允许的两种光的波长差。

$$\delta = \frac{4\pi h \cos i}{\lambda} \Rightarrow \Delta\delta = -\frac{4\pi h \cos i}{\lambda^2} \Delta\lambda; \text{ 令 } \Delta\delta = \varepsilon \Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2 \varepsilon}{4\pi h \cos i} = \frac{\lambda^2}{2\pi h \cos i} \frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

在 k 级亮纹处， $2nh \cos i = k\lambda \Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{\lambda}{\pi k} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ 。这一波长区间与级次 k 成反比，

故级次越高则分光越好，同一位置处亮光的波长变得集中。

（4）实现分光的要求：对于波长分别为 λ 与 $\lambda+\delta\lambda$ 的光，要求二者的同级干涉条纹中光强超过 $I_0/2$ 的区间没有交叠，否则两条亮纹会变成一条，无法分辨；这一命题可以转化为——两种光同级条纹的极大之间的距离 δi 不小于两条条纹本身的半峰宽 Δi 。（这里宽度都是用角度表示）

$$\text{在极大位置, } \Delta L = 2nh \cos i = k\lambda \Rightarrow -2nh \sin i \cdot \delta i = k\delta\lambda \Rightarrow |\delta i| = \frac{k\delta\lambda}{2nh \sin i}.$$

$$\text{又 } |\Delta i| = \frac{\lambda}{2\pi h \sin i} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \Rightarrow \text{由 } |\delta i| \geq |\Delta i| \text{ 可得 } \frac{\lambda}{\delta\lambda} \leq \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}.$$

于是可以分开的最小波长差为 $\delta\lambda = \frac{\lambda}{\pi k} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$ 。定义色分辨本领 $D = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \pi k \frac{\sqrt{R}}{1-R}$ ， D 越大则干涉仪能够分离的波长差越小。

第四章 衍射

一、衍射的理论依据

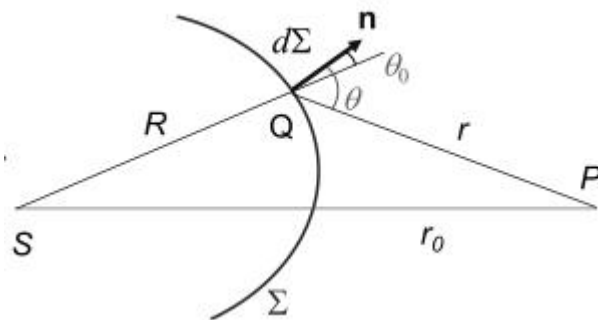
1、衍射的定义：光遇到障碍物会改变传播路径，绕过障碍；遇到小孔时，在孔前能够照亮的区域远超过小孔的尺度。一切超越几何光学界限的光的传播都可以算是衍射。

2、惠更斯-菲涅尔原理——对惠更斯原理的改进

（1）原理的内容：波前 Σ （封闭曲面）上的每个面元 $d\Sigma$ 都可视为新的次波源，这些次波源发出次波。空间某一点 P 的振动是所有这些次波在该点的振动叠加。

(光振动本身是从光源发出的,传播出去后,这些振动信息分布在波前上。把波前的振动信息叠加起来,就是光源的振动信息。)

(2) 数学表达式: 复振幅
$$\tilde{U}(P) = \iint_{\Sigma} K \tilde{U}(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma.$$



①本公式推导涉及电动力学,在本课程中不做要求,记住结论即可;但是,需要学会对此式做定性分析, P 处复振幅的微元 $d\tilde{U}(P)$ 正比于每一个次波源 Q 的振动 $\tilde{U}(Q) \frac{e^{ikr}}{r}$ (这里假设是球面波),

与倾角 θ_0 、 θ 有关,比例系数 K 。

②比例系数: $K = -\frac{i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\pi}{2}i}.$

③倾斜因子: $F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos \theta_0 + \cos \theta).$ 球面波中,波面法向量 \vec{n} 就沿半径方向,故 $F(\theta_0, \theta) = F(0, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta).$

④傍轴近似: 倾角不考虑, $\theta_0 \approx \theta \approx 0$, 曲面各处 $r \approx r_0$ 近似为同一常数, 则
$$\tilde{U}(P) \approx -\frac{i}{\lambda r_0} \iint_{\Sigma} \tilde{U}(Q) e^{ikr} d\Sigma.$$
 (指数上没有做近似, 因为其对 r 的变化比较敏感)

⑤☆虽然该原理要求在整个波面上积分,但是如果这个波面上有些位置的次波遇到障碍,无法达到 P 点,则这些部分不参与积分。例如,对于圆孔衍射,只有圆孔处的这一部分次波可以传播过去,其他位置会被屏幕挡住,因此这个积分只需要计算圆孔处的一块曲面。

3、巴比涅原理 (注意理解)



(1) 叠加原理: 曲面积分具有可加性。上图中,黑色是遮挡部分,障碍物 a 与 b 的构造是互补的,因此其透过的光振动恰好叠加成一个无障碍的 c 。

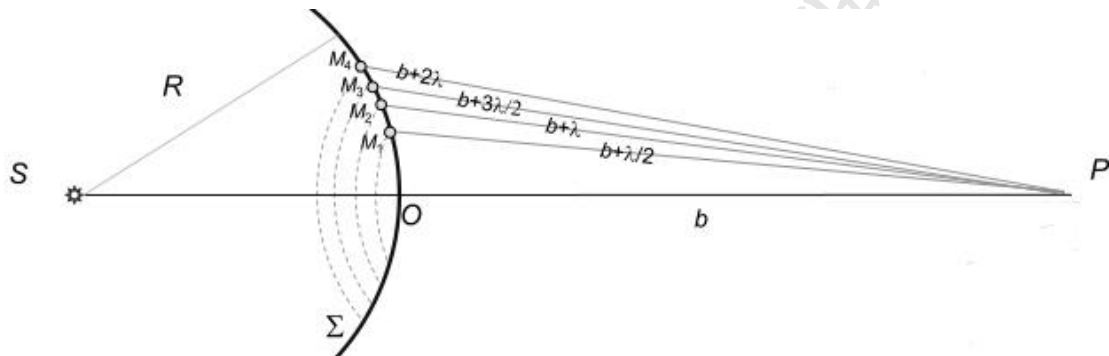
(2) 数学表达: $\tilde{U}_c(P) = \tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P).$

若 $\tilde{U}_c(P) = 0$, 则 $\tilde{U}_a(P) = -\tilde{U}_b(P)$, 取模的平方可得 $I_a(P) = I_b(P).$

- (3) ☆巴比涅原理的文字叙述：控制光源不变，若无障碍物时光照不到 P ($\tilde{U}_c(P)=0$)，则在互补障碍物的衍射下， P 处的条纹完全一样 ($I_a(P)=I_b(P)$)。
(此原理不讨论 $\tilde{U}_c(P) \neq 0$ 的位置，这些位置的衍射情况尚是未知的)

二、菲涅尔衍射

- 1、菲涅尔衍射的特点：光源在有限远处（一般是点光源）；在不加透镜会聚光线的情况下，衍射条纹也在有限远处。
- 2、圆孔衍射的定性现象：不断增大圆孔半径，衍射条纹的范围越来越大，中央点的明暗周期性变化；不断增大圆孔与光屏的距离，衍射条纹范围基本不变，但中央点的明暗也发生周期性变化。
- 3、☆菲涅尔圆孔衍射的半波带法



(1) 基本思路：对于惠更斯-菲涅尔原理中的积分，通过分点 M_1, M_2, \dots 将积分曲面分成若干个小区域（半波带）；相邻两个分点到 P 的距离之差为半波长，而每个小区域中的点近似认为具有完全相同的光振动。

①半波带法本质上是把积分还原成一个小区间求和式，并且也认为小区间内部可以看成完全一样，与积分异曲同工。分出的小区域不是无限小，求和上比积分粗糙，但是比较方便。

②为什么选用“半”波带：相邻两个半波带的振动相位差为 π ，由此可以很方便地计算相位的影响。

(2) 由于圆孔大小有限，参与求和的半波带数目也有限（没有障碍时可以认为是无限多）。假设一共有 k 个半波带参与求和，它们在 P 点产生的复振幅分别为

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(P) = A_1 \\ \tilde{U}_2(P) = A_2 e^{i\pi} = -A_2 \\ \tilde{U}_3(P) = A_3 e^{2i\pi} = A_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_k(P) = A_k e^{(k-1)i\pi} = (-1)^{k-1} A_k \end{cases} \quad \text{则 } P \text{ 点合振动为 } A_1 - A_2 + A_3 - \dots + (-1)^{k-1} A_k.$$

振幅 A_j 的大小：假设球面波的波前上每一点处振幅大小相同，则波面上的 $\tilde{U}(Q)$

$$\text{为常数。于是 } A_j = \left| \tilde{U}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} F(\theta_0, \theta) d\Sigma \right| = |\tilde{U}(Q)| \frac{F(\theta_0, \theta)}{r} d\Sigma \propto \frac{F(\theta_0, \theta)}{r} d\Sigma.$$

下标 $j = 1, 2, \dots, k$ 。对于球面波， $F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ ；与此同时，设半波带的分

点为 M ， $\angle MSP = \alpha$ ，则由余弦定理知

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + (R+b)^2 - r^2}{2R(R+b)} \Rightarrow \sin \alpha \Delta \alpha = \frac{r \Delta r}{R(R+b)} \quad (\text{对于半波带, } \Delta r = \frac{\lambda}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{d\Sigma}{r} = \frac{2\pi(R \sin \alpha) \cdot R \Delta \alpha}{r} = \frac{2\pi R^2}{r} \sin \alpha \Delta \alpha = \frac{2\pi R \Delta r}{R+b} = \frac{\pi R \lambda}{R+b} \text{ 为常数。}$$

因此，对每一个半波带， $\frac{d\Sigma}{r}$ 都一样，故 $A_j \propto \frac{1}{2}(1 + \cos \theta_j)$ ，从而 j 越大则 A_j 越小。

(3) 合振幅半定量计算：圆孔尺度较小，可以满足傍轴条件，即 θ 很小；此时 $\cos \theta$ 变化缓慢，可以认为 $A_{2j} \approx \frac{A_{2j-1} + A_{2j+1}}{2}$ ；于是可以大致得到

$$A_1 - A_2 + A_3 - \dots + (-1)^{k-1} A_k = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{A_k}{2} \\ \approx \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{k-1} A_k].$$

因此，合振幅与 k 的奇偶密切相关， k 为奇数时合振幅较大，偶数时合振幅较小。可以解释圆孔半径增大时中央点为什么忽明忽暗。

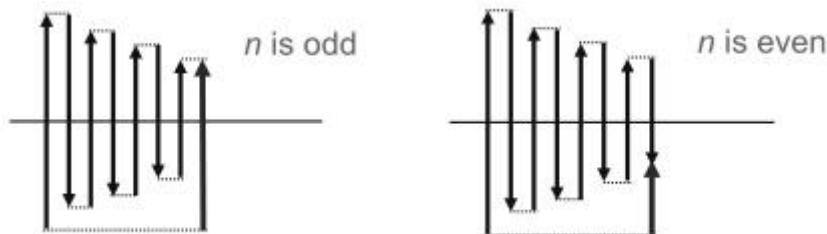
*用上述方法求解圆形障碍的衍射：光在传播时遇到小球形障碍物，则求和区域是不被小球挡住的部分；此时是从某个半波带开始（假设是第 k' 个），一直到无穷多个，而 $A_\infty = 0$ ，所以 P 处合振幅为 $\frac{1}{2} A_{k'}$ ，衍射条纹的中央点必然是亮的。

(阿拉哥亮斑/泊松亮斑/菲涅尔亮斑)

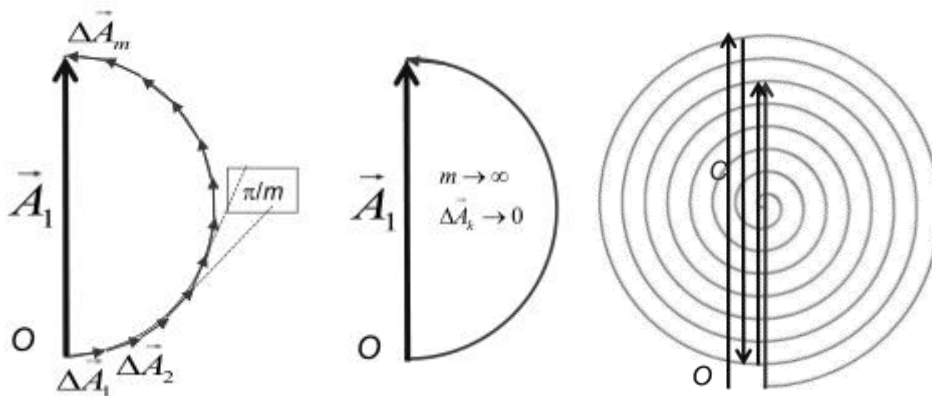
4、☆☆菲涅尔圆孔衍射的矢量图解法

(1) 振动叠加问题常常使用矢量图解，因为矢量的方向可以携带相位信息。

(2) 直线型矢量图解： P 点合振动为 $A_1 - A_2 + A_3 - \dots + (-1)^{k-1} A_k$ ，相当于一个个反向的矢量首尾相接。傍轴条件下，认为这些矢量近似关于下图中的水平线对称，因此可以得到 $\frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{k-1} A_k]$ 这一表达式。

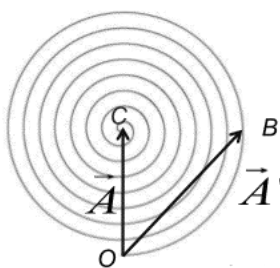


(3) 圆形矢量图解：将每一个半波带继续均分成 m 份，则相邻两份的相位差是 π/m ；每一份都有一个小的振幅，它们首尾相接形成一个半波带的振幅。当 m 充分大时，该图逐渐变为一个半圆形（过渡到微分的尺度），如下图。



①若干个半波带振幅的首尾相接，可以看成是若干个半径逐渐减小的半圆弧的首尾相接；将整个曲线的起点与终点用线段连接，即得到合振幅。

②半波带个数有限，则可从图中直接得到 $\frac{1}{2}[A_1 + (-1)^{k-1} A_k]$ ；如果半波带个数无限多，则弧线最终逼近圆心，合振幅趋于 $\frac{1}{2} A_1$ 。



③圆形矢量图解的优越性：即使圆孔包含的半波带数目不是整数，也可以进行计算，因为圆弧的长度是连续的。例如，当圆孔只包含半个半波带时，则只需画

出一个 $1/4$ 圆弧，此时的合振幅为 $A' = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1$ (A_1 不是左图中的那个 A ，而是第一个半圆的直径)。

5、菲涅尔波带片

(1) 波带片的原理：所有奇数振幅同相位，所有偶数振幅同相位，而奇数与偶数振幅反相。如果将所有振幅加在一起，可能会抵消成很小的振幅，但如果只接收奇(偶)数振幅而遮挡偶(奇)数振幅，则这些振幅可以加强，得到光强极大。

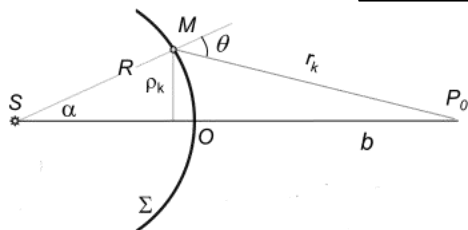
(2) 波带片的制作：在圆孔衍射的基础上，将圆孔中的所有奇数或偶数半波带全部挡住。需要知道这些波带的孔径。

(3) 半波带孔径的计算

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + (R+b)^2 - r_m^2}{2R(R+b)} = \frac{R^2 + (R+b)^2 - (b+m\lambda/2)^2}{2R(R+b)} = \frac{2R(R+b) - bm\lambda + m^2\lambda^2/4}{2R(R+b)}$$

$$\approx 1 - \frac{bm\lambda}{2R(R+b)} \approx \sqrt{1 - \frac{bm\lambda}{R(R+b)}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \approx \sqrt{\frac{bm\lambda}{R(R+b)}}$$

$$\Rightarrow \text{第 } m \text{ 个半波带的孔径 } \rho_m = R \sin \alpha \approx \sqrt{\frac{Rb}{R+b} m\lambda}$$



①分布规律： $\rho_m \propto \sqrt{m}$ ，故越往外波带越密。

②波带片是事先制作好的， ρ_m 无法改变，因此每一个 R 都有一个对应的 b ，也就是在光源位

置确定时衍射极大的位置也是确定的；这类似于凸透镜的成像。定义波带片焦距

$$f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda} = \frac{\rho_1^2}{\lambda}, \text{ 则有波带片成像公式 } \boxed{\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{1}{f}}.$$

③波带片焦距的意义和透镜完全一样，也是当光源无穷远时光线衍射极大的位置（物距无穷大时的像点）。这不是说所有光线出射后全部朝着像点传播，衍射的光线永远是朝四面八方的，但是只有射到焦点上的衍射光可以实现极大。

④☆菲涅尔波带片的焦点不是唯一的，在 $\frac{f}{3}, \frac{f}{5}, \frac{f}{7} \dots$ 的位置也有衍射极大，这是

因为 $\sqrt{\frac{Rb}{R+b}}m\lambda = \sqrt{mf\lambda} = \sqrt{3m \cdot \frac{f}{3}}\lambda = \sqrt{5m \cdot \frac{f}{5}}\lambda = \sqrt{7m \cdot \frac{f}{7}}\lambda = \dots$ ，也即在物距无穷

大时， P 在 f 处对应的第 m 个半波带的内部相当于 P 在 $\frac{f}{n}$ 处对应的第 $(m-1)n+1$

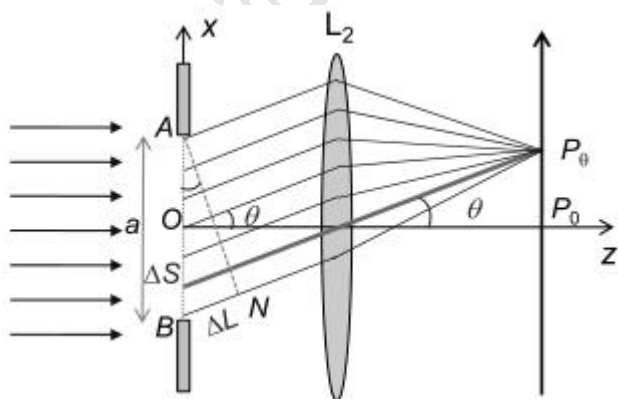
至第 mn 个半波带（共 n 个）。当 n 为奇数（3,5,7...）时，这 n 个半波带内部包含的奇数振幅和偶数振幅正好差一个，因此在 $\frac{f}{n}$ 处的振幅还是可以叠加成极大，

合振幅为 $A_1 + A_{1+2n} + A_{1+4n} + \dots$ ；如果 n 为偶数（2,4,6...），则这第 $(m-1)n+1$ 至第 mn 个半波带内部包含的奇数振幅和偶数振幅个数相同，一对对全部相消，从而在 $\frac{f}{2}, \frac{f}{4}, \frac{f}{6} \dots$ 处看不到极大，这些点不是焦点。

三、夫琅禾费衍射

1、夫琅禾费衍射的特点：光源在无限远处，即入射光为平行光；衍射光也彼此平行，也即衍射条纹在无限远处，需要通过透镜才能在有限远处观察到。

2、夫琅禾费单缝衍射



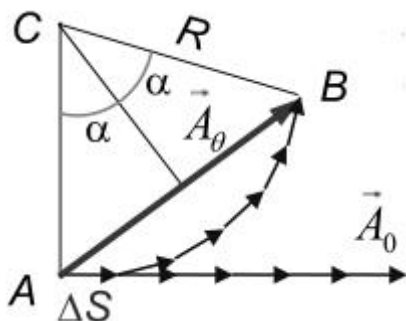
（1）条纹的形成机理：出射光朝四面八方，其中朝向同一方向的光被会聚到光屏上同一位置，不同方向的光会聚到不同位置，形成条纹。

（2）衍射条纹的实质是干涉条纹（前面的菲涅尔衍射也一样），因为它实际上是各处衍射光的叠加。这里，从缝上不同位置发出的朝同方向的衍射光存在光程

差，A 点与 B 点的光程差最大，为 $asin\theta$ 。 θ 在此称为衍射角；这两点的相位差为

$\delta = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ 。为了计算方便，定义 $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{\delta}{2}$ ，它是单缝端点与中点的衍射光的相位差。（另一种写法：

$\alpha = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = \frac{1}{2} k a \sin \theta$ 。）



(3) 矢量图解：将单缝均分成若干份，相邻两份之间的相位差是定值（类似于半波带法）。划分份数无限多时，这些小振幅的首尾相接可以用圆弧表示。

①已知条件：这些振幅大小直接叠加（不考虑相位差）应为入射光的振幅 A_0 ；此时这个长度 A_0 变为矢量图中的圆弧长，而 P_θ 点合振幅 A_θ 则是对应的弦长。

②几何关系： $A_\theta = 2R \sin \alpha$ ， $A_0 = 2R\alpha$ ，因此有

$A_\theta = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ，平方得 $I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ 。（ $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ 这种形式的来源就是从弧长推弦长）

*在傍轴近似下利用惠更斯-菲涅尔原理也可以推导单缝衍射公式：

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta) &\approx -\frac{i}{\lambda r_0} \iint \tilde{U}(Q) e^{ikr} d\Sigma = -\frac{i}{\lambda r_0} \tilde{U}(Q) e^{ikr_0} \iint e^{ik(r-r_0)} d\Sigma = C \iint e^{ik\Delta r} d\Sigma = C' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik\Delta r} dx \\ &= C' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikx \sin \theta} dx = C' \frac{e^{ik \frac{a}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{a}{2} \sin \theta}}{ik \sin \theta} = 2C' \frac{\sin(k \frac{a}{2} \sin \theta)}{k \sin \theta} = aC' \frac{\sin(k \frac{a}{2} \sin \theta)}{k \frac{a}{2} \sin \theta} \\ &= aC' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \Rightarrow \tilde{U}(\theta) = \tilde{U}(0) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \Rightarrow I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

(5) 用惠更斯原理理解单缝衍射：单缝处的每个点都是一个次波源，因此衍射条纹实为线光源的干涉（此线光源很理想，各点之间相位规则分布，无空间相干性）。

(6) 光强分布的讨论

①根据 $\sin x/x$ 函数的性质，光强随衍射角振荡，出现明暗相间条纹；但是，振荡幅度越往外越小，即在较外侧基本看不到条纹。

②极大值点：极大值要求满足 $\frac{dI}{d\alpha} = 0$ 且 $I \neq 0$ ，得到 $\alpha = \tan \alpha$ ，故

$\alpha = 0, \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi \dots$ 由此可解出相应的衍射角。（没有解析解）

③极小值点：极小点光强必为 0，因此 $\sin \alpha = 0$ 且 $\alpha \neq 0$ ，故 $\alpha = m\pi$ 。（ $m = 1, 2, 3, \dots$ ）

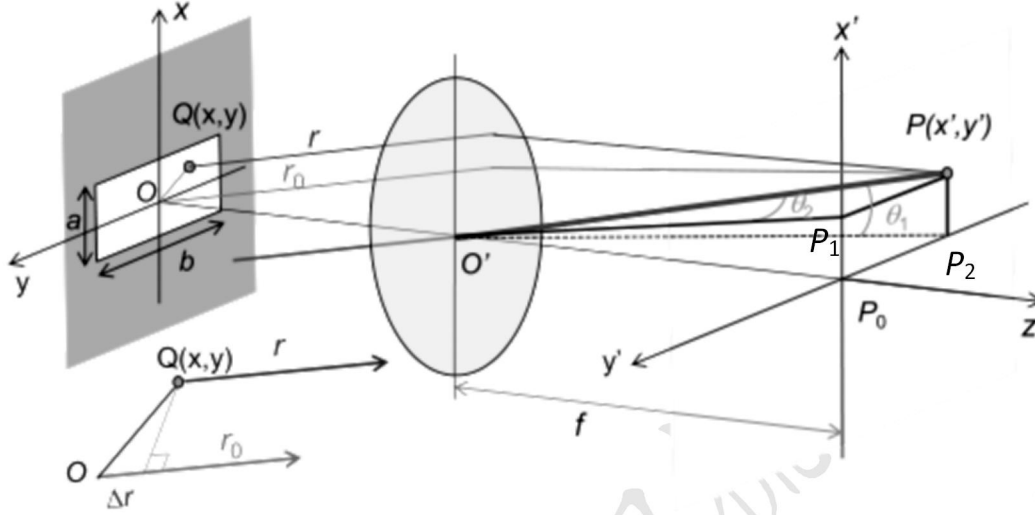
④条纹半角宽：亮纹半角宽的一般定义是亮纹中心到最近的极小之间的距离（张角），也等于亮纹两侧最近的极小点的距离的一半。一级极小满足 $\alpha = \pi$ ，即

$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \approx \theta$ ，故零级亮纹半角宽为 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$ 。在级次不少于 1 时， m 级亮纹的端

点是第 m 级和第 $m+1$ 级暗纹，故半角宽为 $\Delta\theta \approx \frac{1}{2} \left[\frac{(m+1)\lambda}{a} - \frac{m\lambda}{a} \right] = \frac{\lambda}{2a}$ 。

⑤单缝衍射的光强主要分布在 0 级，其他级次几乎看不到。 λ 越小、 a 越大，则半角宽越小，条纹越细，衍射条纹趋向于一条线，波动光学趋向于几何光学。（这就是为何高中教科书要求障碍物尺寸与波长差不多或小于波长才能观察到衍射）

3、夫琅禾费矩孔衍射



(1) 衍射角的定义：如图，设 P 是透镜焦平面上一点（光屏就在焦平面上）。作其关于 x' 轴的垂线 PP_1 与关于 y' 轴的垂线 PP_2 。定义衍射角 $\theta_1 = \angle P_2O'P$, $\theta_2 = \angle P_1O'P$ 。

(2) 光程差的推导

P 实为矩形孔中一点 Q 经过透镜成的像。根据透镜作图法， $\vec{r} \parallel \vec{r}_0 \parallel \vec{O'P}$ 。可以计算 $\vec{O'P} = (x', y', f) = (|O'P| \sin \theta_1, |O'P| \sin \theta_2, f)$ 。因此该方向的单位矢量为

$\hat{r} = \frac{\vec{O'P}}{|O'P|} = (\sin \theta_1, \sin \theta_2, \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2})$ 。在图中， Δr 即为 OQ 在 r_0 方向的投影，

故 Q 点与 O 点的光程差 $\Delta L = -\Delta r = -(x, y, 0) \cdot (\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots) = -(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)$ 。

同样，定义 $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda}$, $\beta = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}$ 。

(3) 矩孔衍射光强分布目前只能通过惠更斯-菲涅尔原理直接推导：

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) \approx -\frac{i}{\lambda r_0} \iint \tilde{U}(Q) e^{ikr} d\Sigma = -\frac{i}{\lambda r_0} \tilde{U}(Q) e^{ikr_0} \iint e^{ik(r-r_0)} d\Sigma = C \iint e^{ik\Delta L} d\Sigma$$

$$= C' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)} dx dy = C' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx \sin \theta_1} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iky \sin \theta_2} dy$$

$$= abC' \frac{\sin(k \frac{a}{2} \sin \theta_1)}{k \frac{a}{2} \sin \theta_1} \frac{\sin(k \frac{b}{2} \sin \theta_2)}{k \frac{b}{2} \sin \theta_2} = abC' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\Rightarrow \tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = \tilde{U}(0,0) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} \Rightarrow I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

(定性描述: 矩孔衍射的条纹是二维的, 在 x 与 y 方向上均呈现迅速递减的规律)

4、夫琅禾费圆孔衍射: 涉及贝塞尔函数, 只需知道结论。

(1) 根据对称性, 衍射条纹为同心圆状; 光强基本集中在中央亮斑(艾里斑)。

(2) 设圆孔半径为 a , $x = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$, 则衍射光强 $I_\theta = I_0 \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$. 其中, J_1 为一阶贝塞尔函数。

(3) 一级暗纹的衍射角满足 $x = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} = 1.22\pi$, 故该暗纹半角宽为

$$\Delta\theta \approx \sin \theta = 0.61 \frac{\lambda}{a} = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad D \text{ 为圆孔直径.}$$

(4) 在 λ/D 确定时, 亮斑半角宽确定; 光屏离得越远, 则亮斑的半径越大。即使是准直性很好的激光也无法避免这一现象, 因此**不存在严格的平行光**。

(5) 光学仪器的分辨本领

①由于光学仪器的观察口基本都做成圆孔形, 难以避免发生圆孔衍射; 对于远处的两个物体, 往往看不到理想的像而是模糊的衍射亮斑; 若两个衍射亮斑有大部分交叠, 则分辨不出两个物体。

②☆光学仪器分辨本领的瑞利判据: 光学仪器能够分辨远处两个相同点光源的条件是二者艾里斑中心对仪器的张角(**全角**)不小于每个艾里斑的半角宽(**半角**)。

数学形式: 两光源对光学仪器的张角 $\delta\theta = \frac{d}{L} \geq \Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$. 其中, d 是两个光源之间的距离, L 是二者到光学仪器的距离, D 是光学仪器的孔径(直径)。

③提高光学仪器分辨本领的方法: 增大孔径 D , 则 $\delta\theta$ 的最小值变小。但是, 大部分光学仪器不能通过无限增大孔径分辨一切角度 $\delta\theta$, 因为实际光路中还存在阿贝衍射(在此不要求掌握其原理), 使得衍射斑直径不小于 $\frac{\lambda}{2}$ 。(部分仪器已经突破这一难关)

5、夫琅禾费多缝衍射

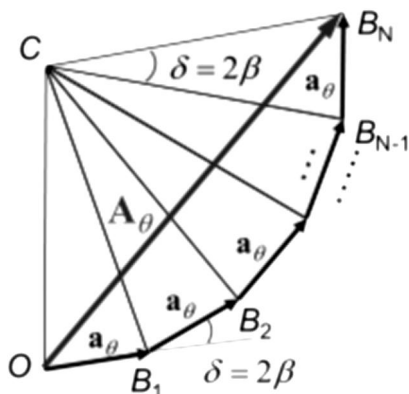
(1) 多缝衍射的实质是多个单缝的干涉。因此, 在研究完单缝衍射的基础上, 明确各个缝之间的相位差, 即可得到总光强。

(2) 考虑 N 个等距等宽狭缝的衍射光强分布。

①已知: 每个缝的宽度 a , 相邻两缝中心的距离为 d (称为光栅常数)。

②相位差的分析: 相邻两个缝**对应位置**(例如两个缝的上端/两个缝的中心等)

的光程差为 $d \sin \theta$ (θ 为衍射角), 对应相位差 $\delta = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$; 令 $\beta = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$ 。



③矢量图解: 有单缝衍射的结论后, 多缝衍射的分析较为简单。对于左图的每个小等腰三角形, 可得单个狭缝的振幅 $a_\theta = 2R \sin \beta$; 对于最大的等腰三角形, 可得总的振幅

$$A_\theta = 2R \sin N\beta = a_\theta \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}. \text{ 因此衍射光强为}$$

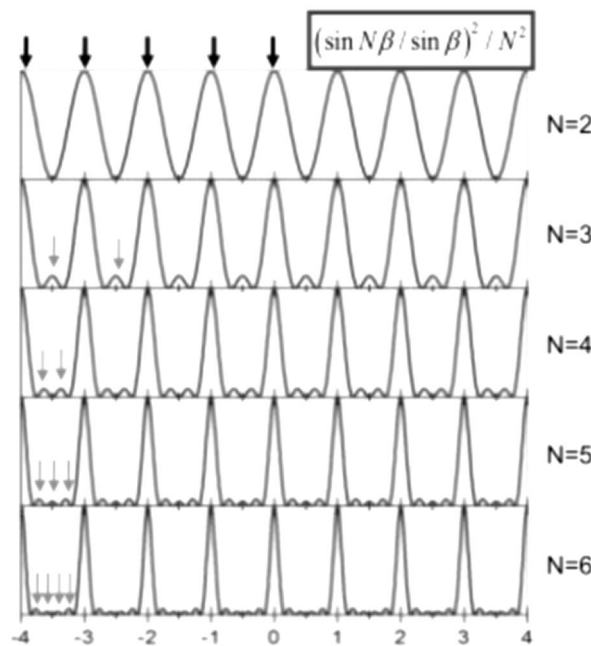
$$I_\theta = a_\theta^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

其中, α 仍是 $\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$. (注意后一项是 $\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}$ 而不是 $\frac{\sin N\beta}{\beta}$, 因为多缝衍射是从弦长推弦长而不是从弧长推弦长)

(3) 光强分布的讨论

① 衍射因子: $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$. 它是多缝衍射 $I-\theta$ 图像的包络线, 即远处光强仍然较小。

② 干涉因子: $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}\right)^2$.



(i) 变化规律: 如左图。 $N=2$ 时仍是普通的三角函数 ($\sin 2\beta / \sin \beta = 2\cos \beta$) ; N 更大时, 如只考察干涉因子本身 (不考虑最终加入衍射因子的 $I-\theta$ 图像), 则会出现高峰 (主极大) 和低峰 (次极大)。 主极大位置与 N 无关, 但是宽度随 N 增大而减小; 相邻两个主极大之间有 $N-2$ 个次极大与 $N-1$ 个极小。 (具体现象: 原先的单缝衍射亮纹被分成更多细小的明暗条纹, 但是单缝衍射的暗纹在这里仍然是暗纹)

(ii) 主极大: 是干涉因子取最大的极大值时的位置。此时要求 $\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N$, 因此 $\beta = m\pi$ ($m =$

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。这时干涉因子是 $0/0$ 型的极限, 趋于 N 。(请回顾微积分第一章) 这时有 $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$, 由于正弦的绝对值不大于 1, 故 $|m| \leq \frac{d}{\lambda}$. 与此同时, 这一表达式与 N 无关, 故狭缝数目不影响主极大位置。

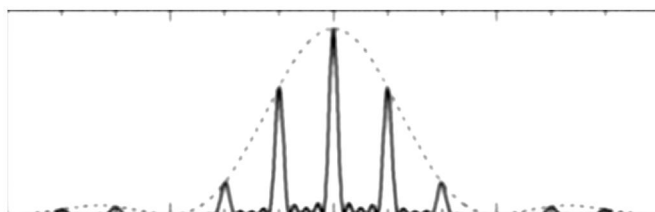
(次极大在此不讨论)

(iii) 极小: 要求光强为 0, 于是 $\sin N\beta = 0$ 且 $\sin \beta \neq 0$ (防止出现前述 $0/0$ 型极大)。因此干涉因子极小值位于 $\beta = \left(m + \frac{n}{N}\right)\pi$ ($n = 1, 2, \dots, m-1$)。

由此可见, 干涉因子的主极大与极小点都是等间隔排列的。

(iv) 主极大的半角宽: 是主极大中心到最近极小点的距离。由于两点衍射角正弦值的差异为 $\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \Delta \theta = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{d}$ (其中 $\Delta \theta$ 为半角宽), 故半角宽

$\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$ 。衍射角较小时, $\cos \theta \approx 1$, $\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{Nd}$ 。(缝越多、越宽, 则峰越尖)



③ 结合衍射因子和干涉因子的总体光强分布如左图。衍射因子充当外部包络线, 内部则是干涉因子起作用; 相当于一个主极大波动衰减的多光束干涉。

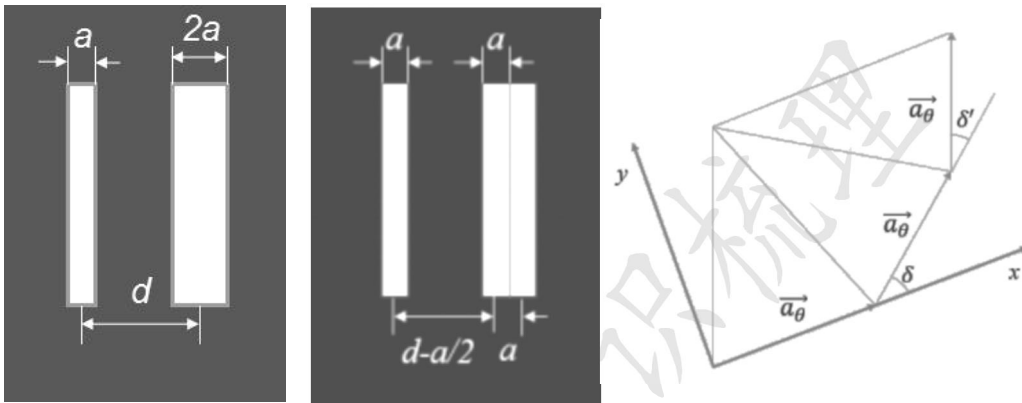
(4) 一般夫琅禾费衍射问题的处理方式

①常见的多缝衍射问题：缝宽不一致，缝间距不一致。

②如果缝宽不一致，一般的问题中这些宽度都是某个值 a 的整数倍。例如，一个缝宽 $2a$ ，另一个缝宽 $3a$ ，则此时只需把 $2a$ 分成两个 a ，把 $3a$ 分成 3 个 a 即可，此时转化成了 5 个宽度一样的缝。虽然有些 a 是连在一起的，但是 d 是相邻两个缝对应点的距离（如中心和中心），故连在一起的两个 a 对应的间距 d 应等于 a 。

③矢量图解法是解决这类问题的基本方法。由于单缝衍射因子对于宽度相同的缝都一样，所以分析的重点在于干涉因子——根据缝间距推算各个缝之间的相位差，从而确定矢量图中各个矢量间的夹角。然后，用适当的方式定义一个 β （表达式与具体问题有关），用几何关系计算 A_θ （可以由弦长推弦长，也可以直接用勾股定理）。

e.g. 一个缝宽 a ，另一个宽 $2a$ ，两者中心相距 $d = 3a$ 。



(i) 将 $2a$ 分成两个 a ，两个宽度不同的缝转化为三个等宽度的缝 1~3（从左至右）。缝 1 与 2 中心的间距为 $d - a/2 = 5a/2$ ，缝 2 与 3 中心的间距为 a 。

(ii) 由此得到矢量图中 $\delta = \frac{2\pi \cdot 5a/2 \cdot \sin \theta}{\lambda} = \frac{5\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ， $\delta' = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ 。为了方便，

在此可以直接定义干涉因子中 $\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \alpha$ 。

(iii) 在矢量图中，三个振幅矢量的起终点不在同一个圆上，因此从弦长推弦长的方法失效。下面采用正交分解的方法：以第一个矢量的起点为原点，其方向为 $+x$ 方向，建立直角坐标系。于是，第二个矢量与 x 轴的夹角为 $\delta = 5\beta$ ，第三个矢量与 x 轴的夹角为 $\delta + \delta' = 7\beta$ 。因此，总振幅 A_θ 满足 $A_x = a_\theta(1 + \cos 5\beta + \cos 7\beta)$ ， $A_y = a_\theta(\sin 5\beta + \sin 7\beta)$ 。所以

$$\begin{aligned} I_\theta &= A_\theta^2 = A_x^2 + A_y^2 = a_\theta^2[(1 + \cos 5\beta + \cos 7\beta)^2 + (\sin 5\beta + \sin 7\beta)^2] \\ &= a_\theta^2[3 + 2(\cos 5\beta \cos 7\beta + \sin 5\beta \sin 7\beta) + 2\cos 5\beta + 2\cos 7\beta] \\ &= a_\theta^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta)] = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 [3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)]. \end{aligned}$$

这里的干涉因子是 $3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)$ 。

④如果入射光不是垂直入射狭缝，则它们在射至狭缝之前就有相位差。假设入射角为 θ_0 ，以逆时针为正；对于每一个缝内部而言，其最下端在射入狭缝前比最上端少走的光程为 $a \sin \theta_0$ ，而在从狭缝到光屏的过程中仍是多走了 $a \sin \theta$ 的光程。

因此，修改定义，令 $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0)$ ，同理令 $\beta = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0)$ ，则光强

公式的形式和原来完全一样。（正入射与斜入射本质的区别就是射入狭缝前有没有额外的光程差；这将会导致衍射条纹位置的移动， θ_0 处才是零级亮纹）

⑤如果狭缝两边填有介质，左侧与右侧的折射率分别是 n_1 与 n_2 ，则光程中还需要乘以折射率。此时，如果还不是正入射，则令 $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}(n_2 \sin \theta - n_1 \sin \theta_0)$ ，同理

令 $\beta = \frac{\pi d}{\lambda}(n_2 \sin \theta - n_1 \sin \theta_0)$ ，则光强公式的形式和原来完全一样。与此同时，对上述衍射光强极大与极小的分析和原始形式也差不多，只需让新定义的 α 与 β 取到原来的那些极值点，即可推算对应的衍射角。

请不要死记 α 与 β 的定义，因为它们的定义式往往随着实际情境改变。只有知道它们是怎么来的，才能明白为什么这样修改定义，以及为什么只需修改一下 α 与 β 的定义即可维持公式的原始形式。同样，不要死记极大与极小点以及条纹的半角宽，请自行一步步推导得出结果。

波动光学的精髓在于相位差（光程差）的分析！

四、衍射光栅

1、光栅：周期性排列的狭缝。可以是一维/二维/三维的。其作用是通过多缝衍射实现分光；同时，光栅可以通过透射光/反射光的衍射实现分光，由此分为透射光栅/反射光栅。

2、光栅公式： $d \sin \theta = m \lambda$ 。给出的是多缝衍射主极大位置与波长的关系。不同波长的光，其主极大位置也不同，从而可以分光（色散）。

3、光栅的色散本领

（1）角色散本领：波长改变单位大小所引起的主极大衍射角变化。

对光栅公式取微分，角色散本领 $D_\theta = \frac{\delta \theta}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$ 。级次越高/衍射角越大，色散本领越强，越能将光分开。（**零级亮纹无法分光**）

（2）线色散本领：在光屏上建立 x 轴，线色散本领是波长改变单位大小所引起的主极大 x 坐标变化。

在衍射角不大时，若透镜焦距为 f ，则 $x \approx f \theta$ ，故 $\delta x \approx f \delta \theta$ ，线色散本领

$$D_l = \frac{\delta x}{\delta \lambda} = f \frac{\delta \theta}{\delta \lambda} = \frac{mf}{d \cos \theta}.$$

4、光栅的色分辨本领

（1）对于两种波长差不多的光，光栅能够分开二者衍射条纹的条件是二者同级条纹中心的距离不小于二者条纹的半角宽。（对比：光学仪器的瑞利判据、F-P 干涉仪的分辨本领）

数学形式： $\delta \theta \geq \Delta \theta$ ，即 $\frac{m}{d \cos \theta} \delta \lambda \geq \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$ 。可得波长差 $\delta \lambda \geq \frac{\lambda}{mN}$ 。（缝越多，可分辨的波长差越小）

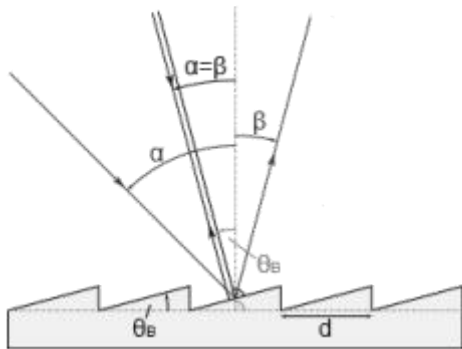
（2）色分辨本领： $R \equiv \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN$ 。

5、量程与自由光谱范围

（1）量程：光栅公式中， $|\sin \theta| \leq 1$ ，故 $\lambda \leq \frac{d}{m}$ 。每一级能够形成主极大的波长都有上限。

(2) 自由光谱范围：对于波长位于 λ 至 $\lambda+\Delta\lambda$ 的光，其每一级衍射极大在光屏上都占据一定区间（称为各级光谱）；自由光谱范围指各级光谱没有交叠所允许的最大波长区间长度 $\Delta\lambda$ 。

(3) m 级与 $m+1$ 级光谱没有交叠的条件是第 m 级衍射角的最大值不超过第 $m+1$ 级衍射角的最小值。由于 $d \sin \theta_m = m(\lambda + \Delta\lambda)$ ， $d \sin \theta_{m+1} = (m+1)\lambda$ ， $\theta_{m+1} > \theta_m$ ，故可得 $\Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}$ 。



6、闪耀光栅

(1) 普通光栅遇到的问题：零级亮纹集中了大部分光强，但是无法分光；希望既能分光又使得光强不太小，也就是希望光强不要集中在0级。

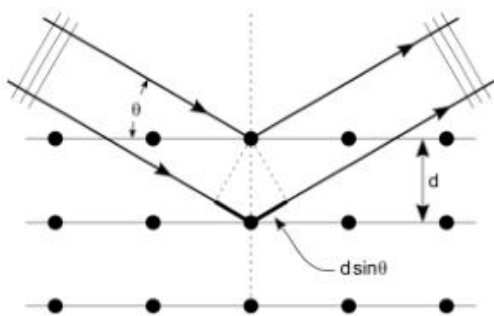
(2) 闪耀光栅的构造：一般是反射光栅（普通反射光栅是水平凹槽），在其上增加一个倾角为 θ_b （闪耀角）的斜面。

(3) 以原先的法线（竖直线）为基准，定义入射角 α 与衍射角 β 。整个过程中的光程差的推导和斜入射的夫琅禾费衍射完全一样， $\Delta L = d(\sin \alpha + \sin \beta)$ 。若入射光与出射光在竖直线同侧，则 $\beta > 0$ ，异侧则 $\beta < 0$ 。（ α 导致射至入射光的光程差， β 导致出射光的光程差）

(4) 闪耀光栅公式： $d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda$ 。这是能使出射光取得干涉因子主极大的 α 与 β 。当 α 与 β 均取闪耀角 θ_b 时，光线垂直于斜面入射，衍射因子为0级的出射光沿原路返回。此时，若有 $d(\sin \alpha + \sin \beta) = 2d \sin \theta_b = m\lambda_{mb}$ ，则这种光最亮条纹的干涉因子是 m 级而非0级，称 λ_{mb} 为 m 级闪耀波长。由于除了0级之外其他的级次都可以分光，故实现了增大分光光强的效果。

(5) 闪耀光栅的深层次原理：干涉因子与衍射因子的级次是独立的；干涉因子决定各个主极大的位置，衍射因子决定哪个主极大最亮。相邻两个斜面上对应点的光程差和普通光栅的夫琅禾费衍射完全一样，所以这个构造完全没有影响到干涉因子在各处的级次。但是，增加斜面相当于让每个单缝的朝向改变了，因此它影响了衍射因子在各处的级次。如果没有斜面，则竖直的出射光才满足衍射因子为0级；现在衍射因子的零级位置发生了偏转（以闪耀角入射才是衍射因子0级），而干涉因子没有任何变化，于是自然可以将最大的光强分配至可以分光的位置。

7、晶体光栅



(1) 规则晶体内部的微粒在三个维度上都是周期性排列的，因此它相当于一个三维光栅。

(2) 光射入晶体后发生反射，相邻两行微粒上的光程差为 $2d \sin \theta$ （入射光和出射光都有 $d \sin \theta$ 的光程差）。 d 称为晶面距。形成衍射极大的条件是 $2d \sin \theta = m\lambda$ ，称为布拉格公式。

(3) 如果微粒在三个方向上的间距有不一样，则会出现各向异性，因为从不同方向入射的光面对的是尺寸不一样的晶面。

第五章 偏振

一、光的偏振态

- 1、麦克斯韦方程组说明光是横波：光的振动方向（电场/磁场）与传播方向（玻印亭矢量）垂直，它们只需在与玻印亭矢量垂直的平面内任意方向振动即可。
- 2、因为电磁场在与玻印亭矢量垂直的平面内振动，所以振动可以是一维或二维的，而每一个振动在直角坐标系 xOy 内分解又可以得到两个简谐振动的分量。

复习力学中两个垂直方向振动的叠加： $x = A_1 \cos \omega t$, $y = A_2 \cos(\omega t + \delta)$

$$\Rightarrow \text{轨迹方程: } \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

3、光的五种偏振态

(1) 线偏振光：一维振动。振幅矢量始终在同一条直线上；在 x 与 y 方向投影得到两个同向或反相的简谐振动。称线偏振光振动方向与传播方向构成的平面为振动面（偏振面）。

(2) 自然光（非偏振光）：二维振动。振动方向杂乱无章，强度均匀分布。在振动平面内任意方向投影都有一样大小的振幅，在振动平面内任意正交坐标轴上投影都有相等的两个分量。

(3) 部分偏振光：二维振动。振动方向杂乱无章，强度不均匀分布，在振动平面内各个方向投影有大有小。

(4) 圆偏振光：二维振动，电磁场矢量的末端随时间做圆周运动。在任意正交坐标轴上投影得到两个振幅相同、相位差为 $\pm\pi/2$ 的简谐振动。

(5) 椭圆偏振光：二维振动，电磁场矢量的末端随时间做椭圆运动。若椭圆长短轴与坐标轴平行，则在 x 与 y 方向投影得到两个振幅不相同、相位差为 $\pm\pi/2$ 的简谐振动；若不然，则在 x 与 y 方向投影得到两个相位差不是 0 、 π 、 $\pm\pi/2$ 的简谐振动（振幅状况未知）。

4、线偏振光的振动象限：作为一维振动，线偏振的范围可以是一三或二四象限。若 $\delta = 0$ 则为一三象限， $\delta = \pi$ 则为二四象限。

5、圆偏振光与椭圆偏振光的左右旋：圆周/椭圆运动也分逆时针与顺时针。

(1) 观察方向：视线朝着与波矢相反的方向，也即让光线直入眼睛的方向。这时称逆时针为左旋，顺时针为右旋。（以此为准，否则左右旋结论完全相反！）

(2) 对于圆偏振光，若 $\delta = +\pi/2$ 则为右旋， $\delta = -\pi/2$ 则为左旋。（右旋： y 达到平衡位置朝负方向振动时， x 才刚刚到达正的振幅位置。因此二者相位差为 $+\pi/2$ 。左旋同理。）

(3) 椭圆偏振光：若椭圆可以是斜的，则 $0 < \delta < \pi$ 时为右旋， $-\pi < \delta < 0$ （或者说 $\pi < \delta < 2\pi$ ）时为左旋。（进一步概括： $\sin \delta > 0$ 为右旋， $\sin \delta < 0$ 为左旋）

6、椭圆偏振光的倾斜角：若偏振轨迹为斜椭圆，则其长轴与 x 轴夹角为

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2A_1 A_2 \cos \delta}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (\text{大致了解即可})$$

7、偏振片：使得任意状态的入射光射入后只有一个方向的分量能够透过。该方向称为透振方向（假设就是 y 方向）。

(1) 线偏振光透过偏振片，实质是电场矢量在透振方向的投影得以通过。设电矢量振幅为 A ，与透振方向夹角为 θ ，则出射振幅为 $A \cos \theta$ ，从而出射光强为 $I = I_0 \cos^2 \theta$ 。（马吕斯定律）若线偏振方向与透振方向垂直，则没有光射出，称为消光。

(2) 自然光透过偏振片，电场矢量在 x 与 y 方向的投影完全一样，而其平方和又为 A^2 ，故 $A_y = \frac{A}{\sqrt{2}}$ ， $I = A_y^2 = \frac{I_0}{2}$ 。

【严格证明】自然光在各个角度上的光强分布均匀，因此入射光在单位角度内的光强为 $\frac{I_0}{2\pi}$ 。将其看成无数个线偏振的叠加，则出射光强就是将所有这些线偏振

全部投影之后的光强。因此 $dI = \frac{I_0}{2\pi} d\theta \cdot \cos^2 \theta$ ， $I = \int_0^{2\pi} \frac{I_0}{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{I_0}{2}$ 。

(3) 圆偏振光透过偏振片：在投影上，圆偏振光和自然光完全一样，在任意正交坐标轴上投影得到两个振幅相同的简谐振动（唯一的区别在于圆偏振光分解出的两个简谐振动是有规则相位差的，自然光则是随机的相位差），故仍有

$A_y = \frac{A}{\sqrt{2}}$ ， $I = A_y^2 = \frac{I_0}{2}$ 。转动偏振片，出射光状态不变，光强都是 $\frac{I_0}{2}$ ，因此用偏

振片无法鉴别圆偏振光与自然光。

(4) 椭圆偏振光或部分偏振光透过偏振片：转动偏振片，出射光强度有变化，转动一周内存在两个极大与两个极小，而且极小值不是 0。同样，用偏振片无法鉴别椭圆偏振光与部分偏振光。

(5) 偏振片的材料：常用的是某些晶体的二向色性，只有某特定方向的光能够通过；也有一些使用“金属线”型偏振片，只有垂直于金属线方向的光能够通过。

8、圆偏振与线偏振的关系：任意一个圆偏振可以分解为两个振动方向垂直的线偏振（也就是前述 x 与 y 分量）；任意一个线偏振可以分解为等振幅的左旋圆偏

振光与右旋圆偏振光—— $\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = A \sin \omega t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = -A \sin \omega t \end{cases}$ 的叠加是 $\begin{cases} x = 2A \cos \omega t \\ y = 0 \end{cases}$ 。

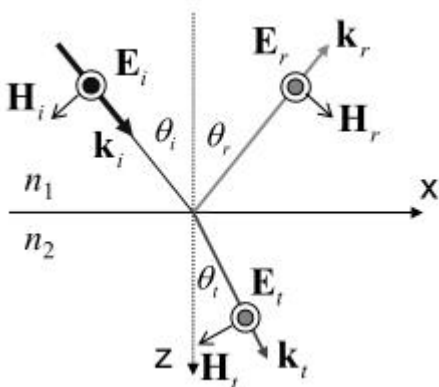
（线偏振分解为圆偏振，作为一种逆向思维，在研究旋光方面有重要意义）

9、偏振度：在旋转偏振片一周的过程中，出射光强存在最大与最小值。定义偏振度 $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ 。（类似于干涉衬比度）线偏振光的偏振度为 1，自然光与圆偏

振光为 0，其余偏振态介于 0 和 1 之间。

二、菲涅尔公式（推导不作硬性要求）

1、回顾电磁学中的介质边界条件：在两电磁介质界面，若不含自由电荷与传导电流，则电场强度 E 的切向分量连续，法向分量反比于相对介电常数；磁场强度 H 切向分量连续，法向分量反比于磁导率。光学中，磁化很微弱，故认为 H 法向也连续。



2、入射面：入射光波矢与界面法线构成的平面。

3、s 波、p 波坐标系：电场强度一定可以分解成入射面内的投影和垂直入射面的分量，前者称为 p 波（德语 *parallel*，平行），后者称为 s 波（德语 *senkrecht*，垂直）。二者与波矢构成右手坐标系： $\hat{p} \times \hat{s} = \hat{k}$ 。

记入射为 i (incidence)，反射为 r (reflection)，透射为 t (transmission)。界面法向量为 \vec{n} 。

4、使用边界条件： $\vec{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r) = \vec{n} \times \vec{E}_t$, $\vec{n} \times (\vec{H}_i + \vec{H}_r) = \vec{n} \times \vec{H}_t$. 在磁化微弱时， $H \approx \frac{n\epsilon_0 E}{c} \propto nE$ ，故第二式可以转化为电场。s 波一定垂直入射面，故有

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t, \\ -n_1 E_i \cos \theta_i + n_1 E_r \cos \theta_r = -n_2 E_t \cos \theta_t, \\ \theta_i = \theta_r, \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \end{cases}$$

由此得到 s 波振幅反射率 $r_s = \frac{E_{rs}}{E_{is}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$;

s 波振幅透射率 $t_s = \frac{E_{ts}}{E_{is}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$;

同理得到 p 波振幅反射率 $r_p = \frac{E_{rp}}{E_{ip}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$;

p 波振幅透射率 $t_p = \frac{E_{tp}}{E_{ip}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$. (p 波推导略去)

以上四式即为菲涅尔公式。

5、用公式解释入射角不太大时的半波损失：当 $n_1 < n_2$ 时， $\theta_i > \theta_t$ ，故 $r_s < 0$ ，也即 s 波反射电场与入射电场反相；与此同时，虽然 $r_p > 0$ ，但是反射光波矢反向，因此 p 波正方向也反向，从而 p 波的电场强度还是完全反相。因此，反射光电场强度矢量总体反相，即为半波损失。（入射角太大时，若 $n_1 < n_2$ ， $\theta_i + \theta_t > 90^\circ$ ，则 $r_p < 0$ ，另当别论。）

6、当两种介质对换时，只需将公式的下标 1 与 2、i 与 t 更换，即可用前面的参数表示这一情况。因此，很容易得到第三章的 Stokes 关系： $r' = -r$ ， $r^2 + tt' = 1$ 。

7、强度反射率/透射率

(1) 电磁波在一块曲面上的光功率 $P = \iint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \iint I \hat{S} \cdot d\vec{A}$ ，其中 \vec{S} 为坡印亭矢量。功率不仅与光强有关，还与光的入射方向有关。若平行光入射在面积为 A 的平面上，则 $P_i = I_i A \cos \theta_i$ 。同理，反射光有 $P_r = I_r A \cos \theta_r$ ，透射光有 $P_t = I_t A \cos \theta_t$ 。

(2) 由光强的定义式 $I = \frac{n}{2c\mu_0} E^2$ ，可得 s 波或 p 波的

$$\text{强度反射率 } R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{n_1 E_r^2}{n_1 E_i^2} = r^2.$$

$$\text{强度透射率 } T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t E_t^2}{n_1 \cos \theta_i E_i^2} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t^2.$$

(3) 注意点

- ① 以上式子对 s 波和 p 波都成立；
- ② R 与 r^2 相等，但是 T 不与 t^2 相等。
- ③ 根据能量守恒， $R + T = 1$ 。
- ④ 对于正入射，有以下关系：

$$r_s = -r_p = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_s = t_p = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

(Stokes 关系在此一目了然)

8、☆布儒斯特角

(1) 根据菲涅尔公式, 在界面两侧介质不同的情况下, 只有一个系数能在不是正入射或掠入射的情况下为 0, 即 r_p 。它要求分母 $\tan(\theta_i + \theta_t) \rightarrow \infty$, 即 $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$ 。此时, p 波没有反射, 只有透射; 反射光只有 s 分量, 因此是线偏振的。此时的入射角称为布儒斯特角, 相应的条件称为布儒斯特条件。

(2) 布儒斯特条件的几个等价表述

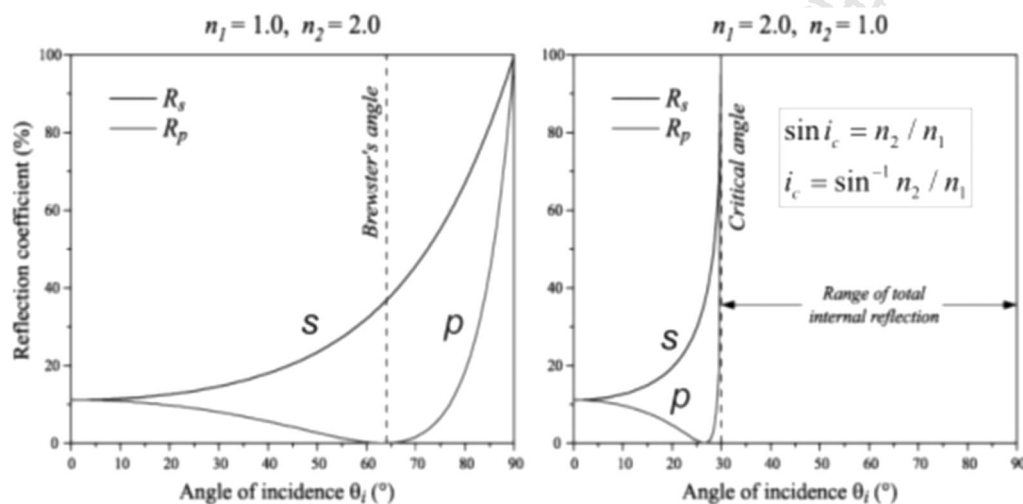
反射光为仅含 s 波的线偏振光, 当且仅当以下任一条件成立:

① $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$;

② 反射光与折射光垂直;

③ $\theta_i = i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ 。

(3) 以下两图分别是在 $n_1 < n_2$ 与 $n_1 > n_2$ 时 s 波与 p 波强度反射率与入射角的函数关系。有以下注意点:



① 任何情况都存在布儒斯特角, 但是只有 $n_1 > n_2$ 才存在全反射临界角 i_c ;

② 当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\arctan x < x < \arcsin x$, 因此当 i_c 存在时必有 $i_c > i_B$;

③ 对于上图而言, 布儒斯特角就是 p 波曲线与横轴的交点, 而 s 波不存在布儒斯特角。

(4) 布儒斯特角的应用: 产生线偏振光。虽然在入射角精确的情况下, 反射光是很好的 s 线偏振光, 但是一般利用的更多是经过多次反射与透射滤去 s 波之后的透射 p 波 (偏振度较好), 因为透射光不改变光的传播路径。

三、双折射与晶体光学器件

1、双折射: 光以某些方向射入一些晶体时, 折射光会分成两束, 一束服从几何光学折射定律 (o 光), 另一束不服从 (e 光)。

2、光轴: 在双折射晶体中, 存在一个方向, 当光以此种方向入射时, o 光与 e 光不体现出任何差别, 此方向称为光轴。(光轴是一个抽象的方向的代表, 而不是真的存在一根轴, 就好像对地轴的定义)

3、☆利用光轴、入射光线、界面法线, 定义三个平面 (请务必熟记):

(1) 主截面 (Principle section): 光轴与法线构成的平面 (o+n);

(2) 入射面 (Incident plane): 入射光线与法线构成的平面 (i+n);

(3) 主平面 (Principle plane)：光轴与入射光线构成的平面 (o+i)。

4、双折射的微观机理：一些晶体内部粒子排列呈现各向异性，光沿不同方向射入时会感受到不同折射率。

(1) 单轴晶体：存在一个三维直角坐标系 xyz ，使得折射率 $n_x = n_y \neq n_z$ 。此时 z 轴就是光轴。o 光折射率 $n_o = n_x = n_y$ ，e 光折射率 $n_e = n_z$ 。波速 $v_o = \frac{c}{n_o}$ ， $v_e = \frac{c}{n_e}$ 。

双轴晶体：任意三维直角坐标系中， $n_x \neq n_y \neq n_z$ 。

(2) 对于单轴晶体中的球面波，o 光在一切方向传播都具有相同的速度 v_o ，波面是球面；e 光在 z 方向传播的波速是 v_o ，在 xy 平面内传播的波速是 v_e ，波面是旋转椭球面。二者的波面相切，切点位于光轴上。

☆☆☆对以上说法，有几个疑问：

①为什么在折射率为 n_e (n_o) 的方向传播，e 光的波速反而是 v_o (v_e)？

②为什么 o 光和 e 光的波面会有不同，是不是意味着存在两种光子？

【解释】

①“感受到”的折射率：光感受到什么折射率，不是在于光的传播方向，而是在于电场的方向，因为折射率真正影响的是电场的状态。注意到电场总是与传播方向垂直，如果传播方向沿着 z ，那么电场是平行 xy 面的，所以电场感受到的折射率是 xy 面的，从而 o 光和 e 光感受到的折射率完全一样，这个折射率是 n_o 而不是 n_e ；当光沿着 x 或 y 轴传播时，e 光电场位于 z 方向（原因是下面的划线句），所以它感受到的折射率是 n_e 。因此，感受到的折射率与传播方向不是必然联系的，更不是由它是 o 光还是 e 光决定的；事实上，用 n_o 与 n_e 来表示两种不同的折射率并不是很妥当，容易让人认为它们是 o 光与 e 光的固定的折射率，但实际上它们并不是光的属性，而是晶体的属性。

②在一次双折射中，不论波矢方向如何，o 光的电场是总电场垂直主平面的分量，因此 o 光一定垂直光轴，只能与 xy 面平行，所以 o 光的分布范围内折射率都是一样的。因此，朝各个方向发出的 o 光都具有相同的波速，而其波前则是一个球体；e 光的电场是总电场在主平面内的分量，它主平面内并且与波矢垂直。此时，改变波矢的方向，e 光的取向可以是各种各样的，不局限于 xy 面内，于是用一整个椭球面表示其波前是可行的。

（注意区分传播方向与电场振动方向，o 光的振动方向必须平行于 xy 面，但是传播方向可以是任意的）

也就是说，是“分量”定义了 o 光与 e 光，而不是“是否感受到相同折射率”定义了它们。它们只是电场的两个分量，没有本质区别，而且是用电场方向来定义而不是用传播方向来定义。而之所以 o 光在各向异性介质中还总是感受到一样的折射率，仅仅是因为它永远平行 xy 面，逃过一劫，而 e 光因为活动范围更大才会体现出看似异常的性质。

此外， n_o 与 n_e 仅仅说明了 e 光沿坐标轴传播时感受到的折射率，对于一般方向，应该从折射率椭球考虑。单轴晶体的折射率椭球为 $\frac{x^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$ 。从坐标

原点发出一根射线，该射线被椭球面截得的长度就是电场在这个方向振动所感受到的折射率（详见赵凯华《光学》）。从这里也可以看出为什么 o 光总是感受到一样的折射率，因为 o 光对应的射线总在 xy 面内，而作为关于 z 轴旋转对称的旋转椭球面，截得的长度永远是一样的；e 光感受到的折射率则是随波矢方向改

变而连续变化的，这个变化本身形成一个椭球，从而导致坐标原点处的点光源朝各处发出的 e 光形成一个椭球形波前。

（光学与力学的联系：折射率椭球与刚体惯量椭球的作用是一致的）

（3）快轴：xyz 中传播速度快的轴。慢轴：xyz 中传播速度慢的轴。（前面已经说到，光感受的折射率不是传播方向的折射率，因此快轴不是折射率小的轴，慢轴不是折射率大的轴）

（4）负晶体： $n_e < n_o$ ；正晶体： $n_e > n_o$ 。

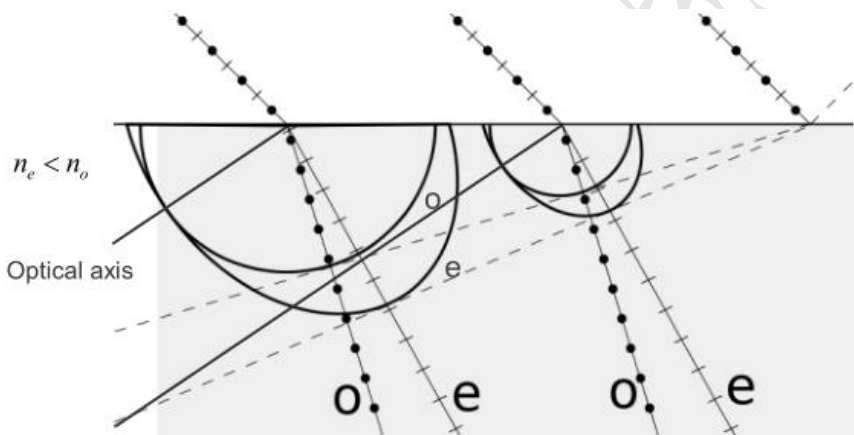
5、双折射的惠更斯作图法

（1）利用惠更斯原理作图的基本思路：不论对什么光，只要是平行光入射，折射之后总是先画出每个子波的波前，然后画这些波前的包络线（一般为公切线）作为最后总的波前，此包络线的垂线就是折射光传播方向。

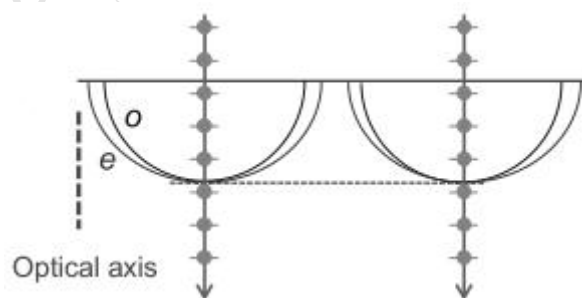
（2）双折射惠更斯作图：从入射点处发出球形子波的是 o 光，画圆形波前；发出各向异性子波的是 e 光，画椭圆形波前；要求圆和椭圆必须相切于光轴处。随后，画出 o 光与 e 光的包络线，再连接次波源和波前与包络面的切点，得到 o 光与 e 光的折射光方向。

（3）负晶体的常见光路

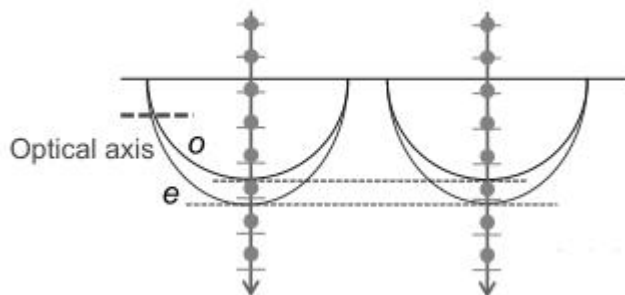
①光轴在入射面内，斜入射：方向不同，速度不同。



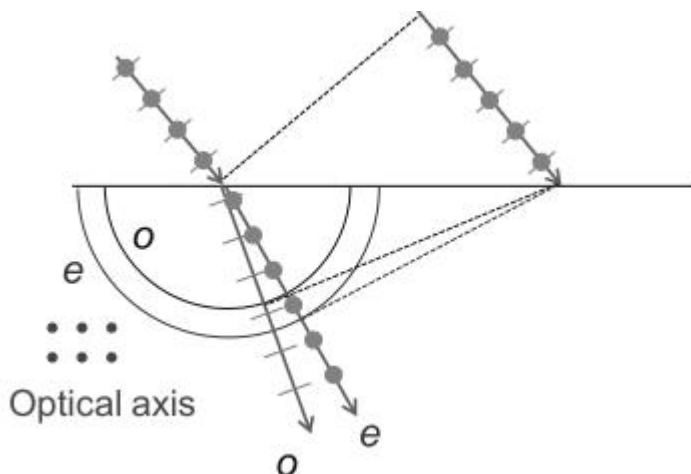
②光轴与法线平行，沿光轴正入射：方向与速度均相同。



③光轴在入射面内，与法线垂直，正入射：方向相同，速度不同。



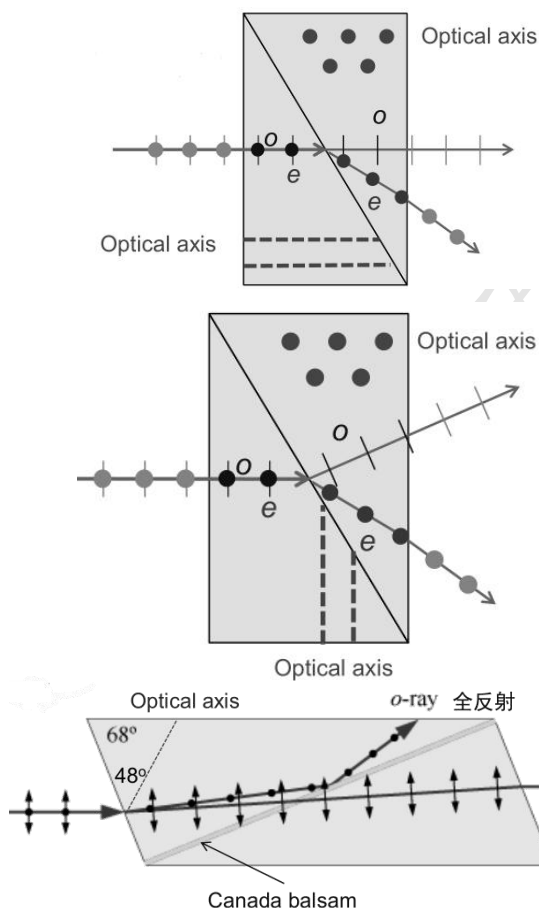
④光轴垂直于入射面，斜入射：速度与方向均不同。（这时 e 光在纸面内的波前为圆）



⑤光轴与入射面斜交，沿非光轴方向斜入射：o 光照常，e 光的传播方向不在入射面内。（暂无图片）

6、晶体光学器件

(1) 根据双折射原理制作的偏振片



①Rochon 棱镜：两块光轴方向不同的直角棱镜拼成。第一块中沿光轴传播，完全不分光，而 e 光在第二块中改变传播路径。分别对应前述作图中的情况 2 与 4。

注意：第一块的 o (e) 光在第二块中是 e (o) 光。

②Wollaston 棱镜：第一块中两种光速度不同，但是没有分开；在第二块中分开。分别对应前述作图中的情况 3 与 4。

注意：第一块的 o (e) 光在第二块中是 e (o) 光。

③Nicol 棱镜：几何尺寸如图。两块冰洲石（负晶体）中间填有加拿大树脂，其折射率介于冰洲石的 n_o 与 n_e 之间。o 光在树脂层发生全反射，而 e 光则没有。

(2) 波晶片（波片）

①原理：光线的入射情况如前述作图情境 3。o 光与 e 光未分开，但是光程不一样（因为感受到的折射率不一样），因此出射后存在相位差，可以合成不一样的偏振态。

②具体而言，根据 o 光与 e 光的定义，由于是情境 3，故 e 光振动方向与光轴平行（记为 e 轴），o 光振动方向（o 轴）与 e 轴和入射光线垂直。

③o 光与 e 光的光程差：设波片厚度为 d ，则 $\Delta L = (n_e - n_o)d$ ，相位差

$\delta = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}$ 。若 $\delta = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ，则称其为 1/4 波片；若 $\delta = (2m+1)\pi$ ，则称其为 1/2 波片；若 $\delta = 2m\pi$ ，则称其为全波片。（ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ）

④各类偏振光通过 1/4 波片后的偏振态

入射光偏振态	电场偏振方向	出射光偏振态
线偏振光	只有 e 分量或 o 分量	线偏振光
	与 e 轴与 o 轴各成 45°	圆偏振光
	其他方向	椭圆偏振光
圆偏振光	任意方向	线偏振光
椭圆偏振光	长短轴与 e 轴、o 轴平行	线偏振光
	其他方向	椭圆偏振光

⑤各类偏振光通过 1/2 波片后的偏振态

入射光偏振态	电场偏振方向	出射光偏振态
线偏振光	任意方向	线偏振光，偏振方向与入射电矢量关于光轴对称
圆偏振光	任意方向	圆偏振光，轨迹不变，左旋变右旋，右旋变左旋
椭圆偏振光	长短轴与 e 轴、o 轴平行	椭圆偏振光，轨迹不变，左旋变右旋，右旋变左旋
	其他方向	椭圆偏振光，轨迹与入射电矢量关于光轴对称，左旋变右旋，右旋变左旋

7、偏振态的检验

（1）使用的器材：两个偏振片，中间放置一个 1/4 波片。

（2）判断步骤（赵凯华《光学》310 页表 6-4）

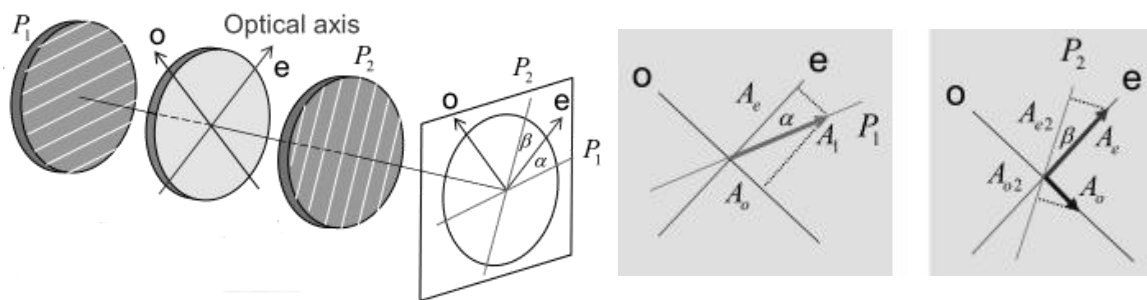
第一步：令入射光仅透过偏振片 1，转动偏振片 1 一周，观察出射光光强变化。

第二步：让入射光依次经过 1/4 波片与偏振片 2（不要放偏振片 1），转动偏振片 2 一周，观察出射光光强变化。如果第一步判断是椭圆偏振光或部分偏振光，则需要使 1/4 波片的光轴与偏振片 1 出现的极大或极小方向重合。

第一步现象	结论	第二步现象	结论
有消光	线偏振光	—	—
强度不变	圆偏振光或自然光	有消光	圆偏振光
		无消光	自然光
强度变化但无消光	椭圆偏振光或部分偏振光	有消光	椭圆偏振光
		无消光	部分偏振光

四、复杂偏振现象

1、偏振光透过偏振片→波片→偏振片的定量分析



(1) 如图，在光屏上集中画出 P_1 与 P_2 透振方向以及波片的 o 轴与 e 轴（e 轴就是光轴）。记 P_1 与 P_2 和 e 轴的夹角分别为 α 与 β 。

(2) 经过 P_1 ：成为沿 P_1 方向振动的线偏振光，振幅记为 A_1 。

(3) 经过波片：分为 o 光与 e 光，传播方向相同但速度不同。二者的振幅：
 $A_o = A_1 \sin \alpha$, $A_e = A_1 \cos \alpha$ 。

(4) 经过 P_2 ：将 o 光与 e 光投影至 P_2 上。 $A_{o2} = A_1 \sin \alpha \sin \beta$, $A_{e2} = A_1 \cos \alpha \cos \beta$ 。

(5) 最终的振动是 o2 光与 e2 光的合成，二者存在相位差： $\delta = \delta_1 + \Delta + \delta_2$ 。

① δ_1 ：入射光经过 P_1 导致的 o 分量与 e 分量的相位差。以 o 轴和 e 轴建立直角坐标系，当 P_1 出射的线偏振光在一三象限时 $\delta_1 = 0$ ，二四象限则为 π 。

② Δ ：波片导致的相位差（没有说明是什么波片）。等于 $\frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}$ 。

③ δ_2 ：o 光与 e 光投影至 P_2 上，投影可能同号或异号。当 P_2 在一三象限时 $\delta_2 = 0$ ，二四象限则为 π 。

最终， $\delta = \Delta$ 或 $\Delta + \pi$ 。

(6) 出射光强度： $I = A^2 = A_{o2}^2 + A_{e2}^2 + 2A_{o2}A_{e2} \cos \delta$
 $= A_1^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \pm 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \Delta)$ 。加减号由 $\cos \delta$ 的正负决定。

2、色偏振

(1) 对于前述光强公式，若 $\alpha = \beta = 45^\circ$ ，则 $I = \begin{cases} \frac{A_1^2}{2}(1 + \cos \Delta), & P_1 // P_2 \\ \frac{A_1^2}{2}(1 - \cos \Delta), & P_1 \perp P_2 \end{cases}$ 。对于不同

波长的光，若有一种光满足 $\Delta = (2m + 1)\pi$ ，则在 $P_1 \perp P_2$ 时光强最大， $P_1 // P_2$ 时无光强；若有一种光满足 $\Delta = 2m\pi$ ，则在 $P_1 // P_2$ 时光强最大， $P_1 \perp P_2$ 时无光强。

(2) 在一般情况下，转动 P_2 ，则 β 连续变化，出射光强也基本连续变化（除了 δ 可能突变 π 的情况）。对于不同波长的光， Δ 随波长连续变化，因此各种光的极大位置均不同。若入射光为白光，则转动 P_2 会看到各种颜色的出射光，是为色偏振。

3、偏振光干涉：在上述装置中，若波片厚度不均，则从不同位置射出的光有不同的相位差 Δ ，因此在光屏上不同位置显现不同光强，即为干涉条纹。如果将波片换成有内应力的玻璃或塑料（各向异性），也能实现这一效果。

4、克尔效应：在上述装置中，将波片换成硝基苯液体。若硝基苯中不加电场，则不出现双折射；加竖直方向电场 E ，出现各向异性， $n_e - n_o = \lambda B E^2$ 。比例系数 B 称为克尔常数。

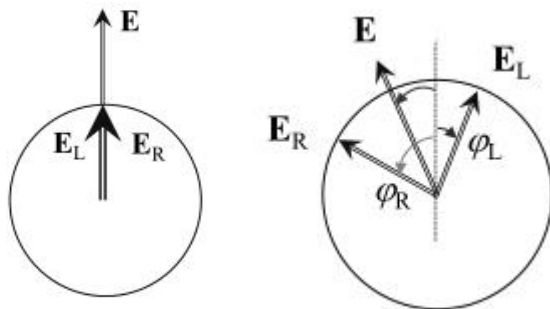
5、泡克尔斯效应：在另外一些物质中，加电场也会导致其各向异性， $n_e - n_o \propto |E|$ 。

6、旋光

(1) 实验现象：将波片换成石英片，则从 P_1 出射的线偏振光透过石英片后仍是线偏振光，但是偏振方向转过了一个角度，在 $P_1 \perp P_2$ 时没有消光。

(2) 菲涅尔的解释

①普通波片的本征态是线偏振光，因此对不同方向的线偏振光有不同折射率；石英的本征态是圆偏振光，因此对左旋、右旋的圆偏振光有不同折射率 n_L 与 n_R 。



②根据前面的结论，一个线偏振光可以分解成一个左旋和一个右旋的圆偏振光。具体地说，这个线偏振的方向是两个圆偏振的对称轴，也即两个圆偏振的电矢量末端在每个时刻都关于这个线偏振方向对称。

③线偏振光通过石英片后，分解出的右旋与左旋圆偏振光之间的相位差 $\delta = \varphi_R - \varphi_L = \frac{2\pi(n_R - n_L)d}{\lambda}$ 。此时，这两个圆偏振光形成的线偏振光有一个偏角，是 $\delta/2$ 。

(注：在讨论一个圆偏振光分解成两个线偏振光时，这两个线偏振光的相位差是 $\pm\pi/2$ ；在讨论一个线偏振光分解成两个圆偏振光时，这两个圆偏振光的相位差可以是任意的，只会影响合成的线偏振的方向。这里“两个圆偏振光的相位差”可以理解为它们在 o 轴 e 轴坐标系上角位置的差。)

(3) 磁致旋光——法拉第旋转：在线偏振光的光路上加一个与传播方向平行的匀强磁场 B ，则会导致旋光。旋转角度 $\beta = VdB$ ，其中 d 为磁场区域长度， V 称为韦尔代常数。当磁场垂直传播方向时也有旋光现象，称为沃伊特 (Voigt) 效应。

(4) 旋光的应用：光二极管。在两个偏振片之间进行法拉第旋转，并调整好两个偏振片的角度，则可以使得左边的入射光能够出射，右边的入射光发生消光。

(磁场使得时间反演对称性被打破，光路在这里不可逆)

第六章 光与物质相互作用

一、光的吸收

1、光在均匀介质 x 处前进 dx 距离，强度的变化 $dI = -\alpha I dx$ 。积分得到布格定律/朗伯定律： $I = I_0 e^{-\alpha x}$ 。其中 α 称为吸收系数，其倒数 是光强减小 $1/e$ 倍所需前进的距离。

2、在光强不太大时上述线性定律成立。如果光强很大，会出现非线性，变化规律为 $-\frac{dI}{dx} = \alpha I + \beta I^2 + \dots$

3、吸光的内部机制：物质自发吸收光子能量，使得电子跃迁。若这些电子与晶格作用，则不会有出射光，能量转化为热能，表现为光强变小。线性规律成立，要求每个电子一次只吸收一个光子；光强较大时一个电子一次可以吸收多个光子以达到更高能级，从而出现非线性。

4、吸光的宏观描述：复折射率。

(1) 存在吸收时的复数折射率 $\tilde{n} = n(1 + i\kappa)$ 。其实部表示折射，虚部表示吸收。

(2) 当折射率为复数时，波矢也是复数， $\tilde{k} = \frac{\tilde{n}\omega}{c} = k(1+i\kappa)$.

(3) 引入复数折射率与波矢后，光的振动方程变为

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}x)} = \tilde{E}_0 e^{-i[\omega t - \frac{n\omega x}{c}(1+i\kappa)]} = \tilde{E}_0 e^{-\frac{\kappa n \omega x}{c}} e^{-i(\omega t - \frac{n\omega x}{c})}.$$

$$\text{光强 } I = |\tilde{E}|^2 = |\tilde{E}_0|^2 e^{-\frac{2\kappa n \omega x}{c}}.$$

$$\text{由此得到吸收系数 } \alpha = \frac{2\kappa n \omega}{c} = 2\kappa k = \frac{4\pi n \kappa}{\lambda} = \frac{4\pi n(\lambda)\kappa(\lambda)}{\lambda}.$$

(4) 由上式，吸收系数本质上是波长的函数。若它对波长变化不敏感，称为普遍吸收；若敏感，则称为选择吸收（某些波长吸收强，某些弱）。

(5) 与力学对比，引入复数折射率的做法类似于用复数频率处理阻尼振动，实部表示振荡，虚部表示衰减。光的吸收就是电磁波的阻尼振动。

5、吸收光谱

(1) 定义：物质对不同光吸收系数 α 关于 λ 的曲线。反映物质对各种光的吸收能力。

(2) 常见的吸收光谱测定装置：通过点光源+透镜产生平行光，穿过介质，然后经透镜会聚进光谱仪。

(3) 对很多物质，吸收光谱与发光光谱是互补的，吸收强的光在其发光时也占有较大的比例。意义：体现出内部能级的对应关系；可以利用吸收光谱与发光光谱的对应来鉴别物质。（夫琅禾费：观察太阳光谱，分析太阳组成成分）

二、色散的详细解释

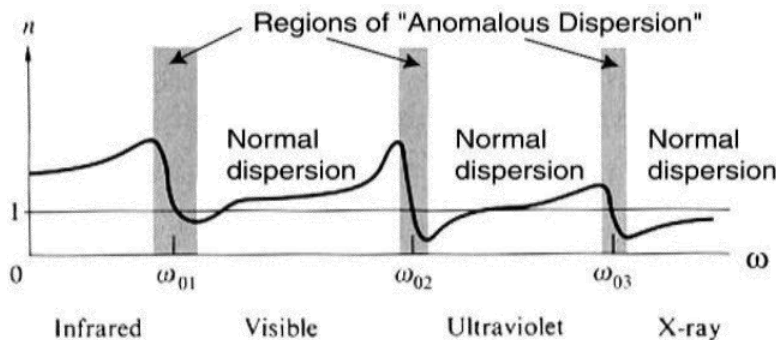
1、色散的本质：同一介质对不同波长（或者说频率）的光有不同的折射率。（有时也直接把这句话作为色散的定义）

2、正常色散：如三棱镜显现彩虹， $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ ，即 $\frac{dn}{d\omega} > 0$ 。

正常色散的柯西色散公式： $n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$ 。色散不剧烈时可以忽略最后一项。

3、反常色散： $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ ，即 $\frac{dn}{d\omega} < 0$ 。

4、正常色散与反常色散对物质而言不是绝对的，总是在有些区间正常色散，在其他区间反常色散；对于某些介质，在某些区间内，折射率可能小于1，这时从真空射向介质也可以有全反射。



5、反常色散的微观机制

(1) 在外界有持续的光射入时，这一电磁波相当于进行受迫振动；介质本身有

一些固有频率，在这些固有频率附近会发生共振，介质响应很明显，于是折射率变得较大。

(2) X 光波段反常色散：内层电子共振吸收。

紫外波段反常色散：外层电子跃迁吸收。

红外波段反常色散：振动与转动共振吸收。

6、波的相速度与群速度

(1) 相速度：即为以前所说的波速，是相位信息的传播速度。 $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ 。

(2) 群速度：当一束波包含了相差不大的若干种波长时，合振动的振幅是不均匀的，具有一条非直线的包络线，称为波包。波包移动的速度叫做群速度，它是振幅信息的传播速度。其表达式为 $v_g = \frac{d\omega}{dk} \equiv \frac{c}{n_g}$ 。 n_g 叫做群折射率。（证明从略）

(3) 只有在波中包含的各种波长相差不大时，定义群速度才有意义，否则会出现非线性，波包也可能无法呈现稳定的形状。

(4) 相速度与群速度的关系：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{n\omega}{c} \right) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{c} \left(\omega \frac{dn}{d\omega} + n \right) \right]^{-1} = \frac{c}{\omega \frac{dn}{d\omega} + n} = \frac{v_p}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v_p}{1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}}.$$

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n + \omega \frac{dn}{d\omega} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

(5) 以上公式主要适用于平面波。三维波形中，有 $\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{k}$ ，

$$\vec{v}_g = \nabla \omega(\vec{k}) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right). \quad (\text{群速度是角频率在波矢空间内的梯度})$$

(6) 相速度、群速度与色散的关系

①无色散： n 为常数， $n_g = n$ ， $v_g = v_p$ 。

正常色散：由 $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ 知 $n_g > n$ ， $v_g < v_p$ 。

反常色散：由 $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ 知 $n_g < n$ ， $v_g > v_p$ 。

②若 $n_g < 1$ ，则 $v_g > c$ 。此时会出现超光速现象。

③振幅信息等价于能量信息，振幅的前进就是能流。由于能流密度总是沿着传播方向，故 $v_g < 0$ 是不可能的；但是相位信息的传播可以是与能流反方向的，因此 $v_p < 0$ 是可能的，此时 $n < 0$ ，称为左手材料；在各向异性介质中，相速度与群速度甚至是不共线的。

三、发光的经典理论——用洛伦兹模型推导介电常数的表达式

1、光与物质相互作用的本质是电磁波对电子的受迫振动。

(1) 振动微分方程： $m\ddot{r} + g\dot{r} + kr = -eE_0 e^{-i\omega t}$ ，即 $\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t}$

(2) 稳态解： $\tilde{r} = \frac{eE_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} e^{-i\omega t} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} \tilde{E}.$

(3) 设原子个数的体密度为 N ，每个原子带有 Z 个状态完全一样的电子，则极

$$\text{化强度 } \tilde{P} = -NZe\tilde{r} = -\frac{NZe^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} \tilde{E}.$$

$$\text{相对介电常数 } \tilde{\epsilon}_r = 1 + \tilde{\chi} = 1 + \frac{\tilde{P}}{\epsilon_0 \tilde{E}} = 1 - \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma}.$$

(4) 若介质内有各种不同状态的电子, 具有固有频率 ω_j , 阻尼系数 γ_j 。每种电子的个数记为 f_j , 则 $\sum_j f_j = Z$ 。此时 $\tilde{\epsilon}_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2 - \omega_j^2 + i\omega\gamma_j}$ 。

$$(5) \text{ 折射率 } \tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} \approx 1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2 - \omega_j^2 + i\omega\gamma_j}.$$

$$\text{实部 } n = \frac{1}{2}(\tilde{n} + \tilde{n}^*) = 1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j(\omega^2 - \omega_j^2)}{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \omega^2\gamma_j^2}.$$

$$\text{虚部 } n\kappa = \frac{1}{2i}(\tilde{n} - \tilde{n}^*) = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j\omega\gamma_j}{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \omega^2\gamma_j^2}.$$

(6) 以上公式给出了介电常数、折射率的内在影响因素。由此式可判断色散是否正常。

五、光的量子性

1、经典物理的两朵乌云：迈克尔逊-莫雷实验，说明绝对静止参考系不存在；黑体辐射“紫外灾难”。

2、普朗克的光量子理论：光的能量是成份出现的，每一份能量 $\epsilon = h\nu$ 。其中比例系数 h 为普朗克常量。

3、爱因斯坦：光不仅是电磁波，更是一种粒子（光子），不具有静止质量。

六、光的散射

1、瑞利散射

(1) 成立条件：光的波长远大于靶粒子半径 r 。此时粒子几乎可以看成刚性球。

(2) 设散射角为 θ , 折射率为 n , 则有

$$\text{粒子散射光强分布 } I(\theta) = I_0 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2.$$

$$\text{分子散射光强分布 } I(\theta) = I_0 \frac{8\pi^4 \alpha^2}{\lambda^4 R^2} (1 + \cos^2 \theta).$$

以上两式无需记住，只需明确 $I(\theta) \propto \frac{1 + \cos^2 \theta}{\lambda^4}$ 。波长越短散射越强；光强分布前后对称。

(3) 解释天空颜色：白天，蓝光散射最强烈，因此各个方向均可看到蓝紫色；傍晚，太阳仰角较低，红光直接入眼，蓝紫光散射较严重而被红光掩盖。

2、米氏散射

(1) 成立条件：靶粒子比较大，与波长差不多。

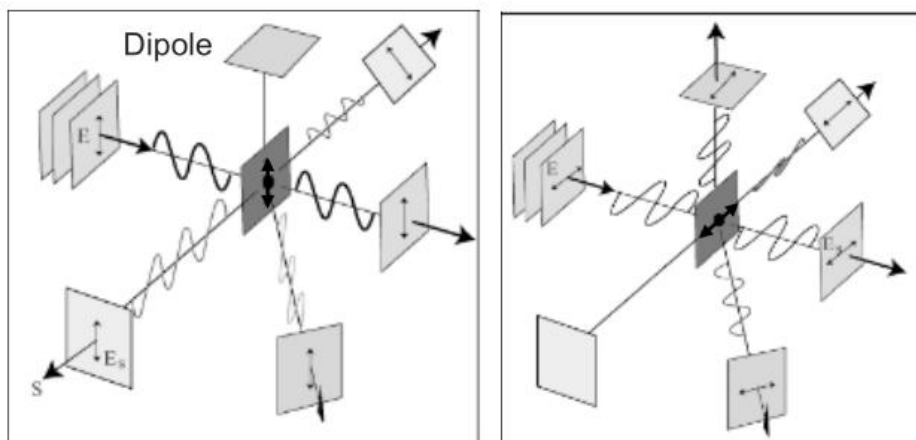
$$(2) \text{ 单位立体角内的散射截面 } \frac{d\sigma}{d\Omega} = a^2 (ka)^4 \left[\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right].$$

(3) 定性分析：散射的前方强度高于后方。

(4) 解释：云的白色，头发的白色。

*3、偶极子 (Dipole) 作用下散射光强度角分布与偏振态

左右两图分别表示 p 波和 s 波。



*4、弹性散射：瑞利散射，米氏散射。（散射后频率、波长不变）

非弹性散射：赖曼散射（光学声子），布里渊散射（声学声子）。（散射后频率、波长会改变）

七、激光

1、复折射率中， κ 可能是负的，也即光通过某些介质后反而光强会变大，这类介质叫做增益介质。

2、形成激光的条件：增益介质，受激辐射。

3、激光的特点：方向性好，单色性好，相干性好。

八、波粒二象性：实物粒子本身也具有波动性。（实例：单光子/电子双缝干涉）

[参考资料]

[1]复旦大学物理学系资剑老师《大学物理 A：光学》课程

[2]赵凯华. 新概念物理教程·光学. 高等教育出版社.