第四章、角动量守恒定理

\$ 4.1 力矩和角动量定理

在前两章中，从牛顿定律出发，我们导出了封闭力学体系所满足的动量守恒定理以及保守系所满足的机械能守恒定理。在这一章中，我们学习质点系中力矩和角动量的概念。

在高中物理的学习中，我们曾经讨论多天平达到平衡状态时所需满足的条件。它可以被写作

$$f_1 l_1 = f_2 l_2. \tag{1}$$

这里， $M_1 = f_1 l_1$ 和 $M_2 = f_2 l_2$ 分别为外力 f_1 和 f_2 相对于天平支撑点 O 的力矩。值得强调一点的是，此时的 f_1 和 f_2 是分别垂直于线段 l_1 和 l_2 的。若 $M_1 \neq M_2$ ，则此系统会绕着 O 点旋转起来。

当外力 $\mathbf{f}_1$ 和 $\mathbf{f}_2$ 与 $\mathbf{l}_1$ 和 $\mathbf{l}_2$ 不垂直时，力矩由它们在垂直于线段方向的分量来决定。即我们有

$$M_1 = |\mathbf{f}_1||\mathbf{l}_1|\sin\theta_1, \quad M_2 = |\mathbf{f}_2||\mathbf{l}_2|\sin\theta_2. \tag{2}$$

此时，天平的平衡条件应当被改写作

$$M_1 = |\mathbf{f}_1||\mathbf{l}_1|\sin\theta_1 = |\mathbf{f}_2||\mathbf{l}_2|\sin\theta_2 = M_2. \tag{3}$$

利用矢量积的定义，我们可以将力矩写成一个矢量。即我们有

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i. \tag{4}$$

下面，我们利用这个定义来研究角动量与力矩的关系。我们从牛顿方程

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_i^{外} + \sum_{j\neq i} \mathbf{f}_{ij}, \quad i = 1,\ 2, \cdots\cdots, N \tag{5}$$

出发。将此式的两边与 $\mathbf{r}_i$ 做直积后，我们得到

$$m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{外} + \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{6}$$

现在将公式的两边同时对于 i 求和，我们有

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{外}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{7}$$

先看公式右边的最后一项。由于

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}, \tag{8}$$

故我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij}. \tag{9}$$

根据牛顿第三定律，矢量差 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 是与 $\mathbf{f}_{ij}$ 在同一方向上的。因此，它们的直积为零。整个求和项消失了。

现在，我们在回过头来研究方程左边的求和表达式。可以将其改写为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i. \end{aligned} \tag{10}$$

由于 $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$ ，上式最后变成

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right). \tag{11}$$

将这些结果代入公式 (7) 后，我们最后得到

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{外}} = \mathbf{M}_{\text{外}}. \tag{12}$$

这里，

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{M}_{\text{外}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{外}} \tag{13}$$

被分别称为质点系的总角动量和所受外力的合力矩。因此，上面的方程可以被最后写作

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}_{\text{外}}. \tag{14}$$

这一结果被称为质点系的角动量定理。特别是当 $\mathbf{M}_{\text{外}} = 0$ 时，我们有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = 0, \tag{15}$$

即体系的总角动量是一个不随时间改变的守恒矢量。

例 4.1: 当天平达到平衡时，其合外力矩为零。因此，

$$\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 \tag{16}$$

为一守恒量。又由于

$$\mathbf{v}_1(t=0) = \mathbf{v}_2(t=0) = 0, \tag{17}$$

我们有 $\mathbf{L} \equiv 0$ 。

例 4.2: 假设质点系中每一个质点所受之力皆为向心力，即 $\mathbf{r}_i \parallel \mathbf{f}_i^{\text{外}}$ ，则我们有

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{\text{外}} = 0. \tag{18}$$

因此， $\mathbf{M}_{\text{外}} \equiv 0$ 。因此，我们有 $\mathbf{L} \equiv$ 常矢量 。这就是为什么太阳系中各行星在太阳引力的作用下，其轨道都是在一个平面中的原因。

例 4.3: 试利用角动量守恒定理，证明开普勒第二定律：任一行星和太阳之间的连线，在相等的时间内扫过的面积相等。

证：由于行星和太阳之间的相互作用力为向心力，角动量应该是一个守恒量。故我们有

$$L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = r(mv)\sin\theta = \text{常数}. \tag{19}$$

用轨迹弧长对于时间的导数 ds/dt 表示速度 v ，我们得到

$$\begin{aligned} L &= rmv\sin\theta = rm\frac{ds}{dt}\sin\theta \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} rm\frac{\Delta s}{\Delta t}\sin\theta = \lim_{\Delta t\to 0} m\frac{\Delta s r_\perp}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} m\frac{2\Delta S}{\Delta t} = 2m\frac{dS}{dt}. \end{aligned} \tag{20}$$

这里，如下图所示， ΔS 为行星和太阳之间的连线，在 Δt 时间内扫过的面积。因此，我们得到

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}. \tag{21}$$

这就是开普勒第二定律。

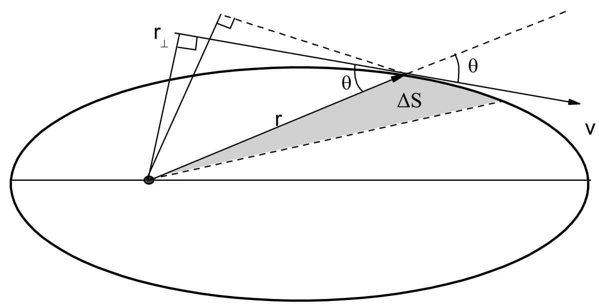

图 1 时间间隔 Δt 内，行星矢径扫出面积示意图

例 4.4(**教科书** 115 **页上的例** 3): 光滑水平面上，有一小孔 O 。轻质绳穿过小孔，二者之间无摩擦。开始时，绳子的水平段 $\overline{\mathrm{OA}}$ 的长度为 r_0 。 A 端连接质量为 m 的小球，它绕 O 点以均匀速率 v_0 做圆周运动。试求

(1) B 端所受到的竖直向下的拉力 T_0 为何？

(2) 将 B 端拉力极缓慢地增大到 $2T_0$ 。最终小球绕 O 点做圆周运动的速率为何？

(3) 在上述过程中，绳子拉力对于小球所作之功 W 为何？

解: 为了回答问题 (1) ，我们注意到，绳子的拉力即是小球所受到的向心力。因此，我们立刻可得

$$|T_0| = m\frac{v_0^2}{r_0}. \tag{22}$$

为了回答问题 (2) ，我们注意到，由于小球所受的力为向心力，故小球对于 O 点的角动量在整个缓变过程中是守恒的。因此，我们有

$$L = mvr = mv_0r_0 \tag{23}$$

成立。这里， r 和 v 分别为小球在缓变过程结束时，到 O 点的距离和其切向速度。另一方面，此时它所受到的向心力为

$$m\frac{v^2}{r} = 2|T_0| = 2m\frac{v_0^2}{r_0}. \tag{24}$$

从这两个方程，我们解出

$$v^3 = 2v_0^3, \tag{25}$$

或是

$$v = 2^{1/3} v_0, \tag{26}$$

以及

$$r = 2^{-1/3} r_0. \tag{27}$$

最后，按照作功的定义，在缓变过程的任何一个时刻，我们有

$$\Delta W = \mathbf{T}(r) \cdot \Delta \mathbf{r} = T(r) \Delta r. \tag{28}$$

另一方面，小球的运动满足牛顿方程

$$T(r) = -m \frac{v^2(r)}{r} \tag{29}$$

以及角动量守恒方程

$$mvr = mv_0 r_0. \tag{30}$$

因此，我们解得

$$T(r) = -\frac{m}{r} \left(\frac{v_0 r_0}{r} \right)^2 = -\frac{m v_0^2 r_0^2}{r^3}. \tag{31}$$

因此，在无穷小极限下，公式 (28) 又可以被改写作

$$dW = T(r)\, dr = -\frac{m v_0^2 r_0^2}{r^3}\, dr. \tag{32}$$

积分后，我们有

$$W = -\int \frac{m v_0^2 r_0^2}{r^3}\, dr + C = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2 r_0^2}{r^2} + C. \tag{33}$$

由于当 $r = r_0$ 时， $W = 0$ ，我们有 $C = -\frac{1}{2} m v_0^2$ 。因此，我们最后得到

$$W = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2 r_0^2}{r^2} - \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{34}$$

特别是当 $r = r_0 / 2^{1/3}$ 时，我们得到

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 r_0^2 \cdot 2^{2/3} - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(4^{1/3} - 1 \right). \tag{35}$$

例 4.5(**教科书** 113 **页上的例** 1): 圆锥摆的角度为 θ ，摆线的长度为 l ，摆球质量为 m 。取摆的悬挂点为坐标系原点。试求摆球所受力的力矩 $\mathbf{M}$ 和摆球的角动量 $\mathbf{L}$ 及其在圆周轨迹平面内的分量 $\mathbf{L}_{\parallel}$ 。

解: 摆球所受的力为重力 $m\mathbf{g}$ 和绳子的拉力 $\mathbf{T}$ 。由于 $\mathbf{T}$ 是向心力，它对于力矩没有贡献。因此，我们直接可得角动量的表达式

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times m\mathbf{g} = mgl\sin\theta \mathbf{e}_{\tau}. \tag{36}$$

这里， $\mathbf{e}_{\tau}$ 是摆球的圆周轨迹的切线方向，也是其速度方向的单位向量。

而摆球的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \times m\mathbf{v}. \tag{37}$$

它是一个同时垂直于 $\mathbf{l}$ 和摆球速度 $\mathbf{v}$ 的向量。注意到 $\mathbf{l}$ 是与 $\mathbf{v}$ 互相垂直的，我们又可将上式写作

$$\mathbf{L} = mlv\mathbf{e}_{L}. \tag{38}$$

这里， $\mathbf{e}_{L}$ 为角动量 $\mathbf{L}$ 的单位方向向量。我们的任务就是要找出它随时间的变化规律。

根据角动量定理，我们有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{l} \times m\mathbf{g}. \tag{39}$$

将此式与重力加速度 $\mathbf{g}$ 点乘后，我们立刻可得

$$\mathbf{g} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(gL_{\perp})}{dt} = \mathbf{g} \cdot (\mathbf{l} \times m\mathbf{g}) = 0. \tag{40}$$

因此， $L_{\perp}$ 是一个不随时间改变的守恒量。

为了求出角动量在平行于摆球的圆周轨迹平面内的分量 $\mathbf{L}_{\parallel}$ ，我们首先注意到，这个向量是与摆球的速度 $\mathbf{v}$ 垂直的。同时，其绝对值是一个常数。这是由于按照定义，我们有

$$|\mathbf{L}_{\parallel}| = \sqrt{\mathbf{L}^2 - L_{\perp}^2} = \sqrt{m^2v^2l^2 - L_{\perp}^2} = \text{常数}. \tag{41}$$

由此，我们得到

$$\frac{d\mathbf{L}_{\parallel}}{dt} = L_{\parallel}\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_{\tau} = \mathbf{M} = mgl\sin\theta\,\mathbf{e}_{\tau}. \tag{42}$$

这里， ϕ 为所谓经度角。显然，在稳定的圆锥摆系统中，这个角度对于时间的导数为

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R} = \frac{v}{l\sin\theta}. \tag{43}$$

将之代入方程 (42) 并解出 $L_\parallel$ 后，我们有

$$L_\parallel = (mgl\sin\theta)\frac{l\sin\theta}{v} = \frac{mgl^2\sin^2\theta}{v}. \tag{44}$$

因此，为了最后完成计算，我们需要求得 v 。

为了求出 v ，我们利用如下形式的牛顿方程

$$m\frac{v^2}{R} = m\frac{v^2}{l\sin\theta} = T\sin\theta, \quad mg = T\cos\theta, \tag{45}$$

或是

$$m\frac{v^2}{l\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta. \tag{46}$$

由此方程，我们解得

$$v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}\sin\theta. \tag{47}$$

将它代入 $L_\parallel$ 的表达式后，我们得到

$$L_\parallel = \frac{mgl^2\sin^2\theta}{v} = mgl^2\sin^2\theta\sqrt{\frac{\cos\theta}{gl}}\frac{1}{\sin\theta} = ml\sin\theta\sqrt{gl\cos\theta}. \tag{48}$$

例 4.6(**教科书** 116 **页上的例** 4): 质量可略，长度为 $2l$ 的跷跷板架在高度为 $h < l$ 的水平轴上，无摩擦地转动。开始时，板的左边着地，上面静坐着质量为 m_1 的少年。板的右端静坐着质量为 $m_2 < m_1$ 的另外一个少年。而后，左端的少年用脚蹬地，使两个少年同时获得顺时针方向的角速度 ω 。试用质点系角动量定理确定 ω_0 至少为多大时，方可使右端少年着地？

解：对于转轴 O 点而言，两个少年重量引起的合力矩为

$$\mathbf{M} = M\mathbf{k} = -(m_1 - m_2)gl\cos\theta, \tag{49}$$

而相应的角动量则为

$$\mathbf{L} = L\mathbf{k} = (m_1 + m_2)l^2\omega\mathbf{k}. \tag{50}$$

根据质点系角动量定理，我们有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)l^2\omega\right]\mathbf{k} = \mathbf{M} = -(m_1-m_2)gl\cos\theta\mathbf{k}, \tag{51}$$

或是

$$(m_1+m_2)l^2\frac{d\omega}{dt} = -(m_1-m_2)gl\cos\theta. \tag{52}$$

由此，我们得到

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\omega\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\cos\theta. \tag{53}$$

积分后，我们有

$$\int\omega\,d\omega = \frac{1}{2}\omega^2 = \int\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\cos\theta\,d\theta + C = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\sin\theta + C. \tag{54}$$

利用初始条件：当 $\theta = \theta_0 = \arcsin\frac{h}{l}$ 时， $\omega = \omega_0$ ，我们得到

$$C = \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\frac{h}{l}. \tag{55}$$

因此，我们有

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\sin\theta + \frac{1}{2}\omega_0^2 - \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{g}{l}\frac{h}{l}. \tag{56}$$

而当跷跷板右端少年着地时，我们又要求 $\omega = 0$ ，而 $\theta = -\theta_0$ 。这样，即可决定 ω_0 。它的值由下式给出

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 = 2\,\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{gh}{l^2}, \tag{57}$$

或是

$$\omega_0 = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}gh}. \tag{58}$$

例 4.7(**教科书** 117 **页上的例** 6): 水平大圆盘绕过中心的竖直轴一恒定的角速度 ω 旋转。盘上有一质量为 m 的小球从中心 O 点出发，沿着阿基米德螺线 $r = \alpha\theta$ 的轨迹运动。已知在过程中，小球相对于 O 点的角动量 $\mathbf{L}$ 是一个守恒量，试求小球所受真实力的角分量 F_θ 和径向分量 F_r 。

解：由于

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times(m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times(m\mathbf{v}_\theta) = mrv_\theta\mathbf{k} = mr\cdot r\dot{\theta}\mathbf{k}, \tag{59}$$

我们有

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{常数}. \tag{60}$$

由此，我们得到

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}\frac{1}{r^2}. \tag{61}$$

又由于 $r = \alpha\theta$ ，故我们有

$$\frac{dr}{dt} = \alpha\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha L}{m}\frac{1}{r^2}. \tag{62}$$

为了求得 F'_θ 和 F'_r ，我们还需要知道 r 和 θ 的二阶导数。我们有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\dot{\theta}}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr}\left[\frac{\alpha L}{m}\frac{1}{r^2}\right]\frac{dr}{dt} = \left(-2\frac{L}{m}\frac{1}{r^3}\right)\left(\frac{\alpha L}{m}\frac{1}{r^2}\right) = -2\alpha\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^5}, \tag{63}$$

以及

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\alpha^2\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^5}. \tag{64}$$

现在，我们来计算 F_θ 和 F_r 。在圆盘参照系中，我们有

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\vec{\omega}\times\mathbf{v}', \tag{65}$$

或是

$$F'_\theta = F_\theta - 2m\omega v'_r, \quad F'_r = F_r + m\omega^2 r + 2m\omega v'_\theta. \tag{66}$$

由于小球相对于 O 点的角动量是守恒的，我们有 $F'_\theta = 0$ 。因此，在实验室参考系中，我们有

$$F_\theta = 2m\omega v'_r = 2m\omega\frac{dr}{dt} = 2m\omega\frac{\alpha L}{m}\frac{1}{r^2} = 2\frac{\alpha L\omega}{r^2}. \tag{67}$$

而力的径向分量则满足牛顿方程

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F'_r = F_r + m\omega^2 r + 2m\omega v'_\theta. \tag{68}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
F_r &= m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - m\omega^2 r - 2m\omega v'_\theta \\
&= m\left[-2\alpha^2\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^5} - r\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^4}\right] - m\omega^2 r - 2m\omega\frac{L}{m}\frac{1}{r} \\
&= -\left[m\omega^2 r + \frac{2\omega L}{r} + \frac{L^2}{m}\left(1 + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right)\frac{1}{r^3}\right].
\end{aligned} \tag{69}$$

例 4.8(**教科书** 121 **页上的例** 7): 质量相同的两个质点置于光滑的桌面上。二者相互距离为 $2a$ 。设在 $t=0$ 时刻，二者分别获得于它们中心的联线方向垂直且互相反向的速度 $\mathbf{v}$ 。试求 $t>0$ 时，两个质点之间的距离 d ，对于初始时二者的质心 O 点的角速度 $\omega(t)$ 和角加速度 $\beta(t)$ 。

解: 由于在 $t>0$ 时, 两个质点受力均为零, 它们在水平面上各自作匀速直线运动。也就是说，它们相对于 O 点的坐标为 $(a,\,vt)$ 和 $(-a,\,-vt)$ 。二者之间的距离为

$$d=\sqrt{(2a)^2+(2vt)^2}=2\sqrt{a^2+v^2t^2}. \tag{70}$$

其中质点 1 相对于 O 点的角速度可以通过条件

$$\omega r=v\cos\theta=v\frac{a}{r}=v\frac{a}{d/2}=v\frac{a}{\sqrt{a^2+v^2t^2}} \tag{71}$$

来决定。由此，我们得到

$$\omega(t)=v\frac{a}{r^2}=\frac{av}{a^2+v^2t^2}. \tag{72}$$

将其对于时间 t 求导后，我们得到

$$\beta(t)=\dot{\omega}(t)=-\frac{av\cdot(2v^2t)}{(a^2+v^2t^2)^2}=-\frac{2av^3t}{(a^2+v^2t^2)^2}. \tag{73}$$

\$ 4.3 **质点在有心力场中的运动**

现在，让我们系统地研究一下质点在有心力场中的运动。

首先，我们知道，此时质点的角动量应是一个守恒量。因此，质点只能在一个固定的平面内运动。因此，我们可以在这个平面内取一个极坐标系。从牛顿第二定律出发，我们有如下的微分方程

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\dot{\theta}^2\right)=f(r),\quad m\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)=0. \tag{74}$$

第二个公式又可以被改写作

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=0. \tag{75}$$

因此，我们有

$$r^2\dot{\theta}=r(r\dot{\theta})=rv_\theta=\text{常数}=\frac{mrv_\theta}{m}=\frac{L}{m}. \tag{76}$$

这只不过是又一次验证了角动量守恒定理而已。

现在，我们再来看第一个方程的推论。它可以被改写作

$$\begin{aligned} f(r) &= m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\dot{\theta}^2 = m\frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^3} \\ &= m\frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} - \frac{L^2}{mr^3} = m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} - \frac{L^2}{mr^3} = \frac{m}{2}\frac{d\dot{r}^2}{dr} - \frac{L^2}{mr^3} \end{aligned} \tag{77}$$

由此，我们得到

$$\int \frac{m}{2} d\dot{r}^2 - \int \frac{L^2}{mr^3} dr = \int f(r) dr + C. \tag{78}$$

积分后，我们最后得到

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + U(r) = \text{常数}. \tag{79}$$

注意到 $\dot{r} = v_r$ 以及

$$\frac{L^2}{mr^2} = \frac{m^2r^4\dot{\theta}^2}{mr^2} = m(r\dot{\theta})^2 = mv_\theta^2, \tag{80}$$

上式又可以被改写为

$$\frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \text{常数}. \tag{81}$$

这是极坐标系中能量守恒定理的表达式。

从上面的推导，我们可以看到，无论是能量守恒定理还是角动量守恒定理实际上都是牛顿第二定理的一次积分。若定理的条件被满足，则我们可以直接从这些定理出发，而不必再诉诸牛顿第二定律去解决一个具体的实际问题。

$\frac{L^2}{2mr^2}$ 常被称为离心势能。对于不同的角动量值 $L_1 < L_2 < L_3$ ，我们有如图 2 所示的离心势能曲线。在实际计算中，离心势能 $\frac{L^2}{2mr^2}$ 及引力势能 $U(r)$ 常常被合写在一起，定义成一个有效势能函数

$$\widetilde{U}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \tag{82}$$

其图形在图 2 中给出。这样做，在研究质点在径向运动时很方便。例如，从图 3 中我们可以看到，当质点的总机械能 $E > 0$ 时，水平线 E 与 $\widetilde{U}(r)$ 的曲线仅有一个交点，称为拱点。从公式

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = E - \widetilde{U}(r) \tag{83}$$

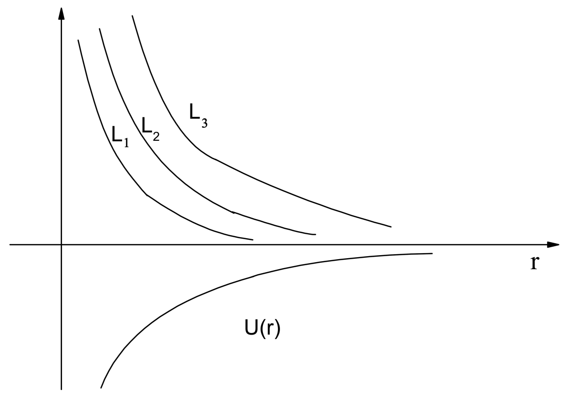

图 2 离心势能 $\frac{L^2}{2mr^2}$ 和引力势能 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ 的分别示意图

出发，我们看到这一点对应于 $v_r = 0$ 。因此，质点的运动轨迹为一无界开放的曲线。而当 $E < 0$ 时，水平线 $E =$ 常数 与 $\widetilde{U}(r)$ 的曲线有两个交点。它表示质点做一有界运动。

但是，假若 $\widetilde{U}(r)$ 的形状是图 4 所示，有一个极大值。那么即使是对于某一个能量 E ，水平线 $E =$ 常数 与 $\widetilde{U}(r)$ 的曲线有两个交点，运动也不会是有界的。这是由于在交点 r_1 处，我们有

$$\frac{\partial \widetilde{U}(r_1)}{\partial r} > 0. \tag{84}$$

因此，质点的受力为 $f(r_1) = -\widetilde{U}'(r_1) < 0$ ，是一个指向左边的力。因此，质点将向原点的方向运动。同理，在 r_2 点处，我们有

$$f(r_2) = -\widetilde{U}'(r_2) > 0. \tag{85}$$

这是一个排斥力。因此，质点将会向无穷远的方向运动。显然，质点的运动不是有界的。

在教科书的 138 至 139 页上，讨论了在形为

$$U(r) = Ar^{\alpha} \tag{86}$$

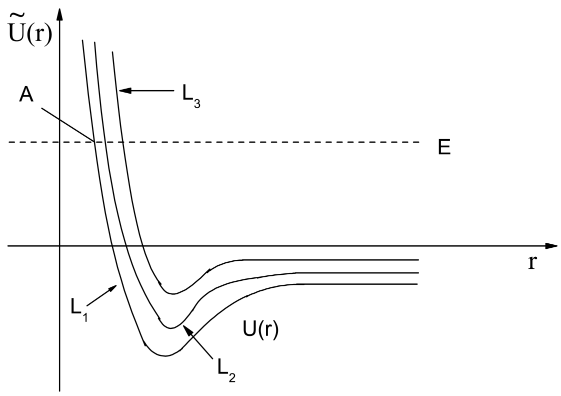

图 3 有效势能函数的示意图

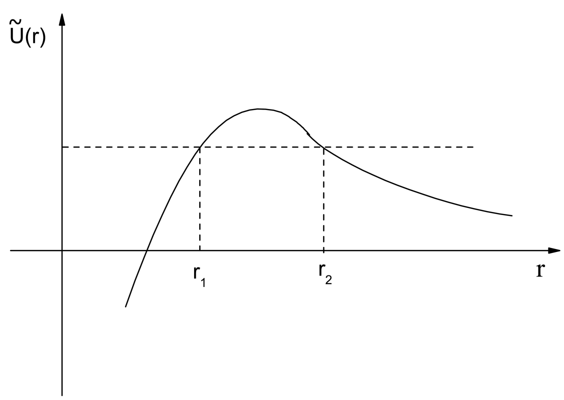

图 4 非稳定平衡点附近有效势能函数示意图

的势场中的质点的运动。特别是对于引力势

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}, \tag{87}$$

我们看到，当其总机械能 $E<0$ 时，质点的运动是有界的。现在，我们要证明，其运动轨迹是一个椭圆。

首先，我们有能量守恒公式

$$\frac{1}{2}mv_r^2=E-\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{GMm}{r}. \tag{88}$$

由此，我们解出

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\left(\frac{2E}{m}+2G\frac{M}{r}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{89}$$

同时

$$v_\theta=r\dot{\theta}=\frac{L}{mr} \tag{90}$$

成立。因此，我们有

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}(r\dot{\theta})=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr}=\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{2E}{m}+2G\frac{M}{r}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}. \tag{91}$$

也就是说

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta}&=\frac{mr^2}{L}\sqrt{\left(\frac{2E}{m}+2G\frac{M}{r}\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}\\ &= r^2\sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2\left(1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)-\left(\frac{1}{r}-\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}.\end{aligned} \tag{92}$$

令

$$\frac{1}{p}=\frac{GMm^2}{L^2},\quad \epsilon^2=1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}, \tag{93}$$

则上式可以改写作

$$\frac{dr}{d\theta}=r^2\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{p}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2}, \tag{94}$$

或是

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}=\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{p}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2}. \tag{95}$$

又令 $\frac{1}{r} = t$ 。我们可以进一步将上面的公式写作

$$-\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{p}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{p}\right)^2}. \tag{96}$$

求积分后，我们得到

$$\int -\frac{d\left(t - \frac{1}{p}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{p}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{p}\right)^2}} = \int d\theta + C. \tag{97}$$

或是

$$\arccos \frac{\left(t - \frac{1}{p}\right)}{\left(\frac{\epsilon}{p}\right)} = \theta + C. \tag{98}$$

因此，我们解得

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{\epsilon}{p} \cos(\theta + C), \tag{99}$$

或是

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos(\theta + C)}{p}. \tag{100}$$

取倒数后，我们得到

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta + C)}. \tag{101}$$

这是一个二次曲线方程。为了确定起见，我们可以令 $C = 0$ 。这样，当 $\theta = 0$ 时，$r = r_{近}$ 。因此，我们最后有

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\theta}. \tag{102}$$

这里有几种情况需要分别加以考虑。

(1) 当 $E > 0$ 时，我们有

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} > 1. \tag{103}$$

因此，曲线代表一个双曲线的分支。 M 位于内焦点上。

(2) 当 $E = 0$ 时，我们有 $\epsilon = 1$ 。曲线为抛物线。

(3) 当 $E = 0$ 时，我们有 $\epsilon < 1$ 。曲线为椭圆。

我们首先考虑 $E<0$ 的情况。此时，天体的轨道为一椭圆。参量

$$\epsilon = \frac{C}{A} = e \tag{104}$$

定义为椭圆的偏心率。并且，我们有

$$C^2 = A^2 - B^2. \tag{105}$$

顺便一提的是，若用电荷代替质量，并用 kQq 代替 $-GMm$ ，则我们上面得到的结论对于静电荷系统同样成立。

例 4.9(**教科书** 132 **页上的例** 14): 将太阳的质量记作 M 。试求行星在教科书 132 页上图 4-34 中 1, 2 和 3 处的速率 v_1, v_2 和 v_3 ，继而导出开普勒第三定律。

解: 首先，我们有能量守恒关系

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{A-C} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{A+C} \tag{106}$$

以及角动量守恒关系

$$L_1 = L_2. \tag{107}$$

由于 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ，在长轴的两端我们有

$$L_1 = mr_1v_1 = m(A-C)v_1 = L_2 = mr_2v_2 = m(A+C)v_2. \tag{108}$$

由此，我们解得

$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}, \quad v_2 = \frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}. \tag{109}$$

而在短轴的顶点处，我们有

$$L_3 = r(mv_3)\sin\phi = mv_3(A\sin\phi) = mv_3B. \tag{110}$$

因此，我们有

$$L_3 = mv_3B = L_1 = m(A-C)v_1. \tag{111}$$

由此我们解得

$$v_3 = \frac{A-C}{B}v_1 = \frac{A^2-C^2}{B^2}\sqrt{\frac{GM}{A}} = \sqrt{\frac{GM}{A}}. \tag{112}$$

为了推导开普勒第三定律，我们可以从开普勒第二定律

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m} \tag{113}$$

出发。积分后，我们得到

$$\int dS=S=\int\frac{L}{2m}dt+C_1=\frac{L}{2m}t+C_1. \tag{114}$$

由于 $S(t=0)=0$ ，我们有 $C_1=0$ 。因此，我们最后得到

$$S=\frac{L}{2m}t. \tag{115}$$

当 $t=T$ 时， $S=\pi AB$ 。代入后，我们得到

$$\begin{aligned} T &= \frac{2mS}{L}=\frac{2m\pi AB}{L_3}=\frac{2m\pi AB}{mv_3B} \\ &= \frac{2\pi A}{v_3}=2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}A^{3/2}. \end{aligned} \tag{116}$$

两边取平方后，我们得到

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}A^3. \tag{117}$$

此即开普勒第三定律

$$\frac{A^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}=\text{常数}. \tag{118}$$

这是一个今后我们在学习“量子力学”时要用到的公式。

例 4.10(**教科书** 133 **页上的例** 15): 宇航站绕地球做椭圆运动。当它在近地点时沿运动方向发射一个探测器，使之恰能沿抛物线轨道远离地球而去。问若在远地点以同样的发射速度发射此探测器，它将沿何种轨道相对于地球运动。

解: 在发射瞬间，沿轨道切线方向，我们有动量守恒关系

$$(M+m)v_1=Mv_{M,1}+mv_{m,1}. \tag{119}$$

这里， $v_1, v_{M,1}$ 和 $v_{m,1}$ 分别为宇航站和探测器在发射前后相对于地球参照系的速度。而

$$u=v_{m,1}-v_{M,1}>0 \tag{120}$$

则是探测器相对于宇航站的发射速度。若轨道为抛物线，则意味着相对于地球参照系而言，探测器的能量为零。因此，我们有

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{m,1}^2 - \frac{GM_{\text{太阳}}m}{r_1} = 0. \tag{121}$$

现在的问题是，若在远地点以相同的发射速率 u 发射探测器，其相对地球参照系的能量是正还是负。

令 E_0 为探测器在近地点处发射前的能量。发射后，探测器获得了新的能量 (在发射前后的瞬间，探测器的势能是相同的)

$$\Delta E_1 = E_1 - E_0 = \frac{1}{2}mv_{m,1}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_{m,1}^2 - v_1^2). \tag{122}$$

为了写出 $v_{m,1}^2$ ，我们将 $v_{M,1} = v_{m,1} - u$ ((120 式) 代入动量守恒式 (119) ，从而得到

$$(M+m)v_1 = M(v_{m,1} - u) + mv_{m,1} = (M+m)v_{m,1} - Mu. \tag{123}$$

由此，我们解得

$$v_{m,1} = v_1 + \frac{M}{M+m}u. \tag{124}$$

将之代入 ΔE 的表达式后，我们有

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= \frac{1}{2}\left[\left(v_1 + \frac{M}{M+m}u\right)^2 - v_1^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m\left[2\frac{M}{M+m}uv_1 + \frac{M^2}{(M+m)^2}u^2\right] = \frac{Mm}{M+m}uv_1 + \frac{mM^2}{2(M+m)^2}u^2. \end{aligned} \tag{125}$$

同理，在远地点处，我们有

$$\Delta E_2 = E_2 - E_0 = \frac{Mm}{M+m}uv_2 + \frac{mM^2}{2(M+m)^2}u^2. \tag{126}$$

因此，我们得到

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 = E_2 - E_1 = \frac{Mm}{M+m}u(v_2 - v_1). \tag{127}$$

从角动量守恒表达式

$$mv_1r_1 = mv_1(A-C) = mv_2r_2 = mv_2(A+C) \tag{128}$$

出发，我们有

$$v_2 < v_1. \tag{129}$$

因此，公式

$$E_2 < E_1 = 0 \tag{130}$$

成立。也就是说，在远地点发射后，探测器将绕地球做椭圆运动。

例 4.11(**教科书** 134 **页上的例** 16): 假设太阳中心到小行星的引力的形式为

$$F = -GMmr^\alpha. \tag{131}$$

问

(1) 若已知太阳在一个椭圆轨道的焦点上，α 当为何值？

(2) 若已知太阳在一个椭圆轨道的中心处，α 当为何值？

解: 首先，由于引力是一个向心力，小行星的角动量当为一守恒量。即在椭圆轨道的长轴的两端，我们有

$$mv_1(A-C) = mv_2(A+C), \tag{132}$$

或是

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{A-C}{A+C}. \tag{133}$$

又根据牛顿第二定律，在这两处，我们分别有

$$ma_{n,1} = m\frac{v_1^2}{\rho_1} = GMm(A-C)^\alpha, \quad ma_{n,2} = m\frac{v_2^2}{\rho_2} = GMm(A+C)^\alpha. \tag{134}$$

由于 $\rho_1 = \rho_2$ ，我们得到另一个比值

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{(A+C)^\alpha}{(A-C)^\alpha}. \tag{135}$$

比较公式 (133) 和 (135) 后，我们得到

$$\frac{(A-C)^2}{(A+C)^2} = \frac{(A+C)^\alpha}{(A-C)^\alpha}. \tag{136}$$

从此方程，我们解得

$$(A+C)^{2+\alpha} = (A-C)^{2+\alpha}. \tag{137}$$

又由于 $A \neq 0$ 和 $C \neq 0$ 。故要让此式成立，我们必须要求

$$2+\alpha=0, \tag{138}$$

或是 $\alpha=-2$ 。

为了回答第二个问题，我们考虑小行星在 1 和 3 处的运动。此时，我们有角动量守恒表达式

$$mv_1A=mv_3B, \tag{139}$$

以及牛顿方程

$$ma_{n,1}=m\frac{v_1^2}{\rho_1}=GMmA^{\alpha}, \quad \rho_1=\frac{B^2}{A}, \tag{140}$$

和

$$ma_{n,3}=m\frac{v_3^2}{\rho_3}=GMmB^{\alpha}, \quad \rho_3=\frac{A^2}{B}. \tag{141}$$

由此，我们得到

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{A}{B}, \quad \frac{v_3^2}{v_1^2}=\frac{B^{\alpha-3}}{A^{\alpha-3}}, \tag{142}$$

或是

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{B^{\alpha-3}}{A^{\alpha-3}}. \tag{143}$$

我们解得

$$A^{\alpha-1}=B^{\alpha-1}. \tag{144}$$

由于 $A \neq B$ ，我们看到，要使上式成立，必须有

$$\alpha-1=0. \tag{145}$$

也就是说

$$\alpha=1. \tag{146}$$

例 4.12: 已知一颗行星绕太阳转动的轨道为一椭圆，其长轴为 $2A$ ，短轴为 $2B$ 。试用 A 和 B 来表示这颗行星的能量和角动量。

解: 设行星到太阳的最近点和最远点的距离分别为 l_1 和 l_2 。我们有

$$E=\frac{L^2}{2ml_1^2}-\frac{GMm}{l_1}=\frac{L^2}{2ml_2^2}-\frac{GMm}{l_2}. \tag{147}$$

由此，我们解得

$$l_1^2 E = \frac{L^2}{2m} - GMml_1, \quad l_2^2 E = \frac{L^2}{2m} - GMml_2. \tag{148}$$

两式相减后，我们得到

$$(l_1^2 - l_2^2)E = (l_1 - l_2)(l_1 + l_2)E = -GMm(l_1 - l_2), \tag{149}$$

或是

$$(l_1 + l_2)E = 2AE = -GMm. \tag{150}$$

因此，我们有

$$E = -\frac{GMm}{2A}. \tag{151}$$

这一公式非常有用。

为了求得 L^2，我们可以将方程 (148) 中的两式相加后得到

$$(l_1^2 + l_2^2)E = \frac{L^2}{m} - GMm(l_1 + l_2) = \frac{L^2}{m} - GMm(2A). \tag{152}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
L^2 &= \left[(l_1^2 + l_2^2)E + 2AGMm\right] m \\
&= \left[(l_1 + l_2)^2 E - 2l_1 l_2 E + 2AGMm\right] m \\
&= \left[(2A)^2 E - 2(A - C)(A + C)E + 2AGMm\right] m \\
&= \left[4A^2 E - 2(A^2 - C^2)E + 2AGMm\right] m \\
&= \left[4A^2 E - 2B^2 E + 2AGMm\right] m \\
&= \left[(4A^2 - 2B^2)\left(-\frac{GMm}{2A}\right) + 2AGMm\right] m \\
&= \left[-2AGMm + \frac{GMm}{A} B^2 + 2AGMm\right] m \\
&= \frac{GMm^2}{A} B^2. \qquad (153)
\end{aligned}$$

因此，我们最后得到

$$L = \sqrt{\frac{GM}{A}} mB. \tag{154}$$

作业：教科书 143 页至 148 页 4-4， 4-6， 4-8， 4-9， 4-10， 4-13， 4-14， 4-15， 4-16， 4-24， 4-26， 4-30 题。