

7.2 课后习题详解

一、复习思考题

§7-1 物质的电结构库仑定律

7-1-1 一个金属球带上正电荷后, 该球的质量是增大、减小还是不变?

答: 理论上质量减小, 但仍可认为该球的质量没有变化.

因为金属球带正电荷实际上是失去了负电子, 所以理论上质量减小, 但由于一个电子的质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$, 所带电荷量为 $-1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, 金属球失去了 1 C 的负电荷相当于失去了 $9.1 \times 10^{-31} \text{kg} \times 1 \text{ C} / 1.6 \times 10^{-19} \text{C} = 5.7 \times 10^{-12} \text{kg}$ 的质量, 这相对于整个金属球来说是微不足道的, 所以仍可认为该球的质量没有变化.

7-1-2 点电荷是否一定是很小的带电体? 什么样的带电体可以看作是点电荷?

答: (1) 不是, 因为点电荷是研究带电体电性质时提出的一个理想模型, “大小” 是一个相对的概念, 所以点电荷也只具有相对的意义, 它本身不一定是很小的带电体.

(2) 可以看作是点电荷的带电体有以下两种情况:

①相对所论点的位置距离, 即当带电体的几何大小相对它至所论点的距离小很多, 可忽略时, 该带电体才可以看作是 “点电荷”;

②某一点至一带电体的距离, 或者两带电体之间的距离只有在带电体可以当作 “点” 处理时才有确切的意义, 此时带电体的形状、大小和电荷分布都可以不予考虑, 而仅当作有一定电量的几何点.

如: 在一般情况下, 半径为 R , 电荷面密度为 σ 均匀带电圆盘轴线上与盘心相距为 x 的任一给定点 P 处的电场强度是

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

仅当若 $x \gg R$ 时，上式可以简化为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

这正是点电荷的电场强度公式，它说明当点 P 离开圆盘的距离远远大于圆盘本身的大小时，点 P 的电场强度与电荷量 q 集中在圆盘的中心的点电荷在该点所激发的电场强度相同，即此时带电圆盘可以看作是点电荷。

但若 $R \gg x$ ，即在点 P 处看来均匀带电圆盘可认为是无限大，则点 P 的电场强度又可简化为无限大均匀带电平面所激发的电场

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

由此可见，同一带电体是否能看作点电荷完全由所讨论的问题决定。

7-1-3 在干燥的冬季人们脱毛衣时，常听见噼里啪啦的放电声，试对这一现象作一解释。

答：脱毛衣时，毛衣与内衣发生摩擦，会使两者分别带有异号电荷，由于毛衣和内衣都是绝缘材料，这些电荷会在其表面积聚起来；在一般情况下，空气比较潮湿，含有大量的正负离子，它们很容易快速地与出现在毛衣和内衣表面上的电荷中和掉；但在干燥的冬季里，空气中的正负离子很少，毛衣与内衣发生摩擦会导致两者表面积聚很多电荷，从而产生很高的电场强度，其大小往往高于空气的击穿电场强度，因此会将空气击穿，产生噼里啪啦的放电声。

7-1-4 带电棒吸引干燥软木屑，木屑接触到棒以后，往往又剧烈地跳离此棒。试解

释此现象.

答: (1) 木屑被吸引移向带电棒的原因:

假定带电棒带有正电荷,则处于该正电荷电场中的干燥软木屑会被极化,木屑靠近带电棒一端被极化出负电荷,木屑背着带电棒的一端被极化出正电荷,它们分别受到带电棒正电荷的吸引力和排斥力,但因木屑上负电荷更靠近带电棒,受到的吸引力大于木屑上正电荷的排斥力,所以木屑总是被吸引移向带电棒.

(2) 木棒剧烈地跳离带电棒的原因:

假定带电棒带有正电荷,则一旦木屑接触到带电棒后,木屑上负电荷会被带电棒上的正电荷所中和,此时木屑受到的吸引力会消失,而由于木屑上正电荷仍旧存在,因此它会受到带电棒上的正电荷排斥,便又立即跳离带电棒.

若带电棒带有负电荷,除了木屑两端极化电荷的极性相反以外,整个过程都与上述情况相同,即木屑总是先被吸引,接触到棒以后,又剧烈地跳离带电棒.

§7-1 静电场电场强度

7-2-1 判断下列说法是否正确,并说明理由.

- (1) 电场中某点电场强度的方向就是将点电荷放在该点处所受电场力的方向;
- (2) 电荷在电场中某点受到的电场力很大,该点的电场强度 E 一定很大;
- (3) 在以点电荷为中心、 r 为半径的球面上,电场强度 E 处处相等.

答: (1) 不一定,这取决于该点电荷所带的电荷量.有以下两种情况:

①该点电荷所带的电荷量比较小时

它的引入几乎不会改变原场源电荷所激发的电场分布,而且正电荷所受到的电场力方

向就是其所在点的电场方向；

②该点电荷所带的电荷量比较大时

它的引入破坏了原场源电荷所激发的电场分布，那么该点电荷所受到的电场力就不能反映原来电场的性质，其方向当然就不能代表其所在点的电场方向，尤其是所带电荷是负电荷的话，电场力方向就更不能说是所在点的电场方向。

(2) 不一定。原因如下：

①电荷在电场中所受到的电场力不仅取决于该电荷所在处的电场强度，而且还与该电荷的电量有关，即 $F = qE$ ；

②当用电场力来确定某点的电场强度，且受力的电荷是带电量不太大的点电荷时：

a. 该电荷可以当作是点电荷处理

该电荷在电场中的线度足够小，此时所受到的电场力越大，说明点电荷所在处的电场强度也越强；

b. 该点电荷不能当作点电荷处理

该电荷在电场中的线度比较大，此时所受到的电场力就无法说明是哪一点的电场强度。

(3) 不准确。电场强度是一矢量，既有大小也有方向。

①大小相同

在真空中一点电荷所激发的电场具有球对称，在以点电荷为中心的同一球面上的点都有相等的电场强度大小；

②方向不同

同一球面上不同的点其径向不同，所以就电场强度方向来说不同点有不同的方向（电场强度方向沿半径方向）。

因此，电场强度 E 并不处处相等。

7-2-2 根据点电荷的电场强度公式 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$ 当所考察的场点和点电荷的距离

$r \rightarrow 0$ 时，电场强度 $E \rightarrow \infty$ ，这是没有物理意义的，对这似是而非的问题应如何解释？

答：当场点和电荷距离很近时，该电荷已不能再看作是点电荷了，即在 $r \rightarrow 0$ 时点电荷

的模型不成立，那么点电荷的电场强度公式 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$ 也不能用，即推不出 $E \rightarrow \infty$ 。

7-2-3 点电荷 q 如只受电场力的作用而运动，电场线是否就是点电荷 q 在电场中运动的轨迹？

答：不一定。

(1) 在一般情况下，电场线并不能代表点电荷 q 在电场中的运动轨迹

电场线上任一点的切线方向反映了该点电场方向，是点电荷 q 在该处受到的电场力方向，也即加速度的方向。而电荷运动轨迹上任一点的切线方向是电荷在该点的速度方向。加速度的方向并不总是和速度的方向一致，因此点电荷 q 不可能总是沿电场线运动。

如：一正点电荷 q 以初速度 v_0 入射一平行板电场，如图 7-1-1 所示，其电场线由上板指向下板，即电场力（加速度）方向总是垂直向下，而运动轨迹是一条曲线，电子速度沿其切线方向，与加速度方向并不重合。

(2) 在某些特殊的情况下，点电荷也有可能沿电场线运动

①初速度为零的正点电荷 q 在平行板电场中的运动轨迹就与电场线重合；

②在点电荷 Q 的非均匀电场中，初速度为零的正点电荷 q 沿径向电场线运动。

上述两种情况速度与加速度方向一致，电场线都是直线，运动轨迹也是直线。

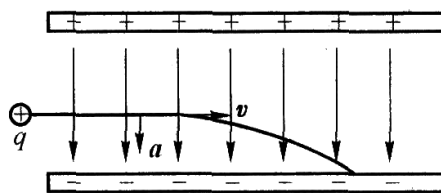


图 7-1-1 正点电荷 q 在平行板电场中的运动

7-2-4 在正四边形的四个顶点上，放置四个带相同电荷量的同号点电荷，试定性地画出其电场线图。

答：可分为两个步骤：

(1) 画出两个带相同电荷量的同号点电荷的电场线图

正电荷的电场线总是从电荷出发呈辐射状的，对于两个正电荷的系统，它们的电场线在空中相遇不能相交，只能相互排斥改变路径。同时在两个正电荷连线的中点电场强度为零，即该处的电场线密度为零。因此两个正电荷系统的电场线可描绘如图 7-1-2 (a) 所示。

(2) 画出四个带相同电荷量的同号点电荷的电场线图

当一正四边形的四个顶点上都放上正点电荷时，边线中点的电场强度不再为零，此时对角线中点电场强度为零，即正四边形中心处电场线密度为零。由此正四边形的四个顶点上都放上正点电荷系统的电场线可描绘如图 7-1-2 (b) 所示。

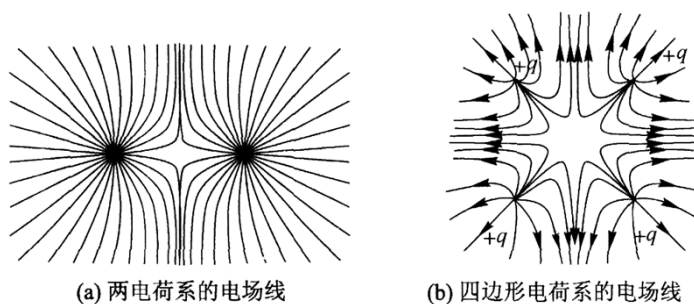


图 7-1-2 正点电荷系统的电场线

§7-3 静电场的高斯定理

7-3-1 如果在高斯面上的 E 处处为零，能否肯定此高斯面内一定没有净电荷？反过来，如果高斯面内没有净电荷，能否肯定面上所有各点的 E 都等于零。

答：（1）能肯定此高斯面内一定没有净电荷。因为若在高斯面上的 E 处处为零，那么穿过该高斯面的 E 通量必定等于零，即 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，又根据高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$ ，所以必定有 $\sum q_i = 0$ ，那么高斯面内一定没有净电荷，即此高斯面内无电荷，或高斯面内正负电荷相等，净电荷为零。

（2）不能肯定面上所有各点的 E 都等于零。原因如下：

①若高斯面内没有净电荷，即 $\sum q_i = 0$ ，只能说明穿过该高斯面的总 E 通量必定等于零，即 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，此时没有电场 ($E = 0$) 或进入高斯面的 E 通量等于从高斯面穿出的 E 通量， E 通量总和为零，在这种情况下面上所有各点的 E 就不一定等于零；

②由数学式 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \cos \theta dS = 0$ ，可知积分结果等于零，并不能说积分式中的某个变量一定等于零。

7-3-2 （1）一点电荷 q 位于一立方体的中心，立方体边长为 l 。试问通过立方体一面的 E 通量是多少？

（2）如果把这个点电荷移放到立方体的一个角上，这时通过立方体每一面的 E 通量各是多少？

答：（1） $\frac{q}{6\epsilon_0}$ 。

以这个立方体的六个面构成高斯面，点电荷 q 位于该立方体的中心，由高斯定理知，通过立方体的 E 通量为其包围的中心电荷 q 除以 ϵ_0 。由图，利用对称性，可知通过每个面

的 E 通量是总 E 通量的六分之一，即 $\frac{q}{6\epsilon_0}$ 。

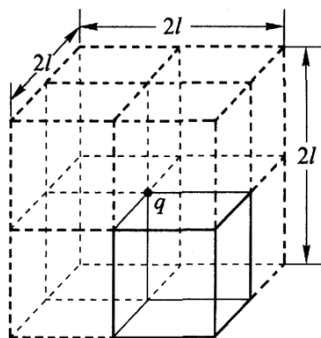


图 7-1-3 点电荷位于大立方体的中心

(2) 如果把这个点电荷移放到立方体的一个角上，那么可以添加七个相同的立方体，构成如图 7-1-3 所示边长为 $2l$ 的大立方体，此时该点电荷位于大立方体的中心，通过大立

方体的 E 通量仍为 $\frac{q}{\epsilon_0}$ ，大立方体共有 24 个以 l 为边长的面，其中原立方体有 3 个边长为 $2l$ 的面暴露在这个边长为 $2l$ 的立方体外面，那么通过它们每一面的 E 通量各是 $\frac{q}{24\epsilon_0}$ ；另有 3 个面在大立方体内，由 q 发出的电场线均与它们相切，即没有 E 通量通过它们。

7-3-3 一根有限长的均匀带电直线，其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性，能否利用高斯定理算出电场强度来？

答：不能。因为当电荷分布具有某些对称性时，相应的电场分布才具有一定的对称性，只有找到以下两种闭合面才能应用高斯定理求解电场强度：

- (1) 电场强度垂直于这个闭合面，且大小处处相等的高斯面；
- (2) 在闭合面的某一部分上电场强度处处相等且方向与该面垂直，另一部分上电场强度与该面平行，因而通过的 E 通量为零的高斯面。

本例中电荷分布和相应的电场分布都具有一定的对称性，但其电场线除带电线表面处

外，大多不是垂直于带电线的直线，特别是在靠近带电直线的两端，电场线弯曲十分明显，不能找到满足上述条件的高斯面，因此不能利用高斯定理来计算电场强度。

如图 7-1-4 所示，如果作一以有限长均匀带电直线为中心的圆柱面为高斯面，无论在该高斯面的上下底面还是侧面的电场强度方向都不与之垂直或平行，明显地不符合用高斯定理求电场强度的条件。

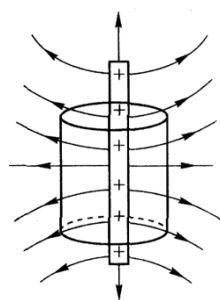


图 7-1-4 有限长的均匀带电直线的电场线

7-3-4 如果点电荷的库仑定律中作用力与距离的关系是 $F \propto 1/r$ 或 $F \propto 1/r^{2+\delta}$ (δ 是不等于零的数)，那么还能用电场线来描述电场吗？为什么？

答：不能。因为电场线起自正电荷（或来自无限远处），终止于负电荷（或伸向无限远处），不会在没有电荷的地方中断或产生。由高斯定理可知，通过任一闭合曲面的 E 通量（电场线的条数），只取决于该曲面内电荷量的多少，而与闭合曲面的形状大小无关。因此对一点电荷电场应用高斯定理，仅当 $\delta = 0$ 时，才能用电场线来描述电场。

假如有两电荷 q 与 q_0 ，则库仑定律中作用力与距离的关系是

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^{2+\delta}}$$

那么点电荷 q 的电场应该为

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{2+\delta}}$$

这时通过以 q 为中心半径为 r 的球面的 E 通量为

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{2+\delta}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0 r^\delta}$$

显然，此时通过半径为 r 的闭合球面的 E 通量与半径为 r 有关。如果 $\delta = -3$ ，则

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0 r^{-3}} = \frac{q}{\epsilon_0} r^3$$

r 越大， E 通量越多。

如：分别以 $r = 1 \text{ m}$ 和 $r = 2 \text{ m}$ 为半径作两个球面，那么通过 $r = 1 \text{ m}$ 的球面的 E 通量

是 $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ ，而通过 $r = 2 \text{ m}$ 的球面的 E 通量是 $\Phi_E = 8 \frac{q}{\epsilon_0}$ ，通过后者的电场线的条数翻

了几番。这多出的电场线是在电场空间中自然生长出来的。

如果仍用电场线密度来表示电场强度，那么在 $r = 1 \text{ m}$ 处的电场强度是

$$E_1 = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} = r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}, \text{ 在 } r = 2 \text{ m 处的电场强度是 } E_2 = r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} = 2E_1,$$

将得到“点电荷 q 的电场强度随着 r 的增大而增强”的荒唐结果，因此用这样的“电场线”来描述电场就毫无意义了。

不难演算，只要 $\delta \neq 0$ ，通过闭合球面的电场线条数就不会是常数。所以，库仑定律中作用力与距离的关系必须是作用力与距离平方的反比关系（ $\delta = 0$ ），这样，一定的电荷发出的电场线才不会在空中自然生长或自然消失，使得高斯定理成立，保证了用电场线正确地描述电场。

§7-4 静电场的环路定理电势

7-4-1 比较下列几种情况下 A、B 两点电势的高低。

- (1) 正电荷由 A 移到 B 时，外力克服电场力作正功；
- (2) 正电荷由 A 移到 B 时，电场力作正功；

(3) 负电荷由 A 移到 B 时，外力克服电场力作正功；

(4) 负电荷由 A 移到 B 时，电场力作正功；

(5) 电荷顺着电场线方向由 A 移动到 B；

(6) 电荷逆着电场线方向由 A 移动到 B.

答：A、B 两点电势差 ($V_A - V_B$) 与电场力把电荷 q_0 从 A 点移到 B 点所作的功 A_{AB} 的关系是

$$A_{AB} = q_0 (V_A - V_B)$$

(1) 此时外力克服电场力作正功，即 $A_{AB} < 0$ ，所以 $V_A < V_B$ ，因此 B 点的电势的高于 A 点；

(2) 此时电场力作正功，即 $A_{AB} > 0$ ，所以 $V_A > V_B$ ，因此 A 点的电势高于 B 点；

(3) 此时电场力作了负功，由于 $q_0 < 0$ ，即 $A_{AB} < 0$ ，所以仍有 $V_A > V_B$ ，因此 A 点的电势的高于 B 点；

(4) 此时电场力作正功，由于 $q_0 < 0$ ，即 $A_{AB} > 0$ ，所以有 $V_A < V_B$ ，因此 A 点的电势低于 B 点；

(5) 此时场力作正功，由于 $q_0 > 0$ ，即 $A_{AB} > 0$ ，所以有 $V_A > V_B$ ，因此 A 点的电势高于 B 点；

(6) 此时电场力在移动负电荷作正功，即 $A_{AB} > 0$ ，所以有 $V_A < V_B$ ，因此 A 点的电势低于 B 点.

7-4-2 (1) 如图 7-1-5 (a) 和 (b) 所示的两电场中，把电荷 $+q$ 从点 P 处移到点 Q 电场力是作正功还是作负功？ P、Q 两点哪点的电势高？ (2) 如果移动的是负电荷，再讨论上述两情况的结论.

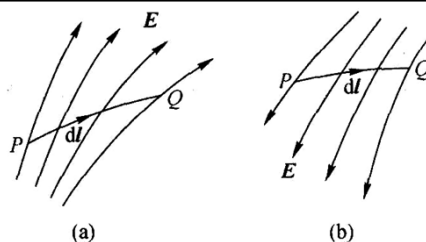


图 7-1-5 不同的电场

答：(1) ①由 (a) 图可知 P 点的电势比 Q 点高（电场线指向电势低方向），因此电场力把电荷 $+q$ 从 P 点移到 Q 点作正功；

②由 (b) 图可知 P 点的电势比 Q 点低（电场线指向电势低方向），因此电场力把电荷 $+q$ 从 P 点移到 Q 点作负功。

(2) ①由 (a) 图可知 P 点的电势比 Q 点高，所以电场力把负电荷从 P 点移到 Q 点作负功；

②由图 (b) 可知 P 点的电势比 Q 点低，所以电场力把负电荷从 P 点移到 Q 点作正功。

7-4-3 从图 7-1-6 所描绘的两种电场的等势面和电场线图上能不能说，等势面上各点的电场强度大小相等、方向与等势面垂直？

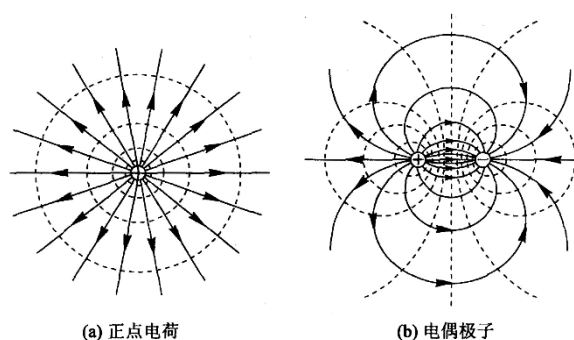


图 7-1-6 两种电场的等势面和电场线图

答：在一般情况下，不能说等势面上各点的电场强度大小相等，但可以说等势面上各

点的电场强度方向与等势面垂直.

因为等势面上各点的电场强度不取决于电势是否相等, 而取决于等势面上各点处电势梯度是否相等, 但电场强度与等势面必定处处正交.

①如果在电场中每隔 1 V 画一个等势面, 用一系列等势面来描述电场, 那么在图

(a) 的点电荷电场中, 同一等势面上各点处的等势面间距都相等 (对称性决定的), 说明同一等势面上各点处的电势梯度相同, 电场强度的大小相等;

②在图 (b) 的电偶极子电场中, 同一等势面上各点处的等势面间距不相同, 电场强度大小也不相等 (各图中虚线表示等势面, 实线表示电场线, 每相邻的两个等势面之间的电势差都是相等的).

③在两电荷连线之间的等势面间距最小, 说明电势梯度大, 电场强度就大, 在两电荷连线的中垂线上等势面间距最大, 说明电势梯度较小, 电场强度就小. 从图中可以看到等势面越密处电场强度越大, 等势面越疏处电场强度越小, 由此就能将电场中电场强度与电势之间的关系直观地表示出来.

§7-5 电场强度与电势梯度的关系

7-5-1 (1) 已知电场中某点的电势, 能否计算出该点的场强? (2) 已知电场中某点附近的电势分布, 能否算出该点的场强?

答: (1) 不能. 因为静电场中各点的电场强度由该点电势梯度的负值来决定, 即

$E_l = -\frac{dV}{dl}$, 而不是由该点的电势值决定, 所以仅知道电场中某点的电势是不能计算出该点的场强的.

(2) 能. 因为可以利用该点处电势分布函数的梯度, 来计算该点的电场强度.

7-5-2 根据场强与电势梯度的关系分析下列问题.

- (1) 在电势不变的空间, 电场强度是否为零?
- (2) 在电势为零处, 场强是否一定为零?
- (3) 场强为零处, 电势是否一定为零?
- (4) 在均匀电场中, 各点的电势梯度是否相等? 各点的电势是否相等.

答: 由场强与电势梯度的关系 $\mathbf{E} = -\frac{dV}{dn}\mathbf{e}_n = -\text{grad } V$ 可知:

(1) 是. 因为空间中电势恒定不变, 则其梯度等于零, 所以电场强度为零. 如: 一个带电的金属球, 其电势是一常数, 恒定不变, 而球内各点的电场强度为零.

(2) 否. 因为决定电场强度的是该点附近的电势分布, 而不是该点的电势值. 如: 电偶极子中垂线上各点的电势均为零, 但电场强度都不为零.

(3) 不一定. 因为如果该点附近的电势没有变化是一常数值, 那么电势梯度为零, 电场强度必定为零, 而电势仍可以是一相对零电势点很高的值. 如: 一个带电的金属球, 其内部各点的电场强度均为零, 但各点的电势可以是一不为零的常数值.

(4) ①各点的电势梯度相等

因为在均匀电场中, 各点的电场强度值相等, 电势梯度为一常数;

②各点的电势不一定相等

因为在不同的方向上, 电势变化率是不一样的, 在沿电场方向电势空间变化率为最大, 也就是说在这个方向上的电势在作最大的线性增加; 在垂直于电场线方向上电势空间变化率最小为零, 在这个方向上各点的电势相等.

例如: 平行板电容器内的电场是一均匀电场, 各点的电场强度大小相等, 在垂直平行板方向上各点的电势随距离线性增加, 而在平行于平行板方向上各点的电势有相同的大小, 但不同的平行面上有不同的电势值.

$$7-5-3 \quad \text{试用} \quad \mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = - \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V'}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V'}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad \text{说明改变零点电势的位置并不会影响各点电场强度的大小.}$$

答：在静电场中，确定了零点电势位置后，每一点都有确定的电势值，这个电势值就是该点相对于零点电势位置的电势差。如果改变零点电势的位置，那么电场空间中任一点的电势只会产生一恒定的电势变化，即

$$V' = V + V_0$$

V_0 是新零点电势位置相对原零点电势位置的电势差值，是个常量。将上式代入有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = - \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V'}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V'}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial (V + V_0)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial (V + V_0)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial (V + V_0)}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

可见电势梯度值没有发生变化，即电场强度的大小不受影响。

§7-6 静电场中的导体

7-6-1 将一电中性的导体放在静电场中，在导体上感应出来的正负电荷量是否一定相等？这时导体是否是等势体？如果在电场中把导体分开为两部分，则一部分导体上带正电，另一部分导体上带负电，这时两部分导体的电势是否相等？

答：（1）一定相等，因为导体放在静电场中后，静电感应只使导体中的电荷重新分布，并没有失去或得到电子，所以，从整体看感应出来的正负电荷量仍旧相等。

（2）是等势体，因为静电场中的导体，在静电平衡条件下，尽管导体表面分布有不同的电荷，但并没有电荷的移动，所以导体是一等势体，表面是一等势面。

(3) 不相等，因为此时破坏了原来的静电平衡，分开的两部分重新建立了自己的静电平衡状态，但一部分导体带正电，另一部分导体带负电，所以它们的电势不再相等。

7-6-2 一个孤立导体球带有电荷量 Q ，其表面附近的场强沿什么方向？当我们把另一带电体移近这个导体球时，球表面附近的场强将沿什么方向？其上电荷分布是否均匀？其表面是否等电势？电势有没有变化？球体内任一点的场强有无变化？

答：(1) 此时球外任一点的电场方向或者沿径向 ($Q>0$)，或者沿径向相反的方向 ($Q<0$)，导体球表面附近的电场强度方向也如此；

(2) 球表面附近的电场强度将是导体球的电场与另一带电体的电场的叠加，叠加后的电场强度方向将依然垂直于导体球表面，根据导体球所带电荷的正负，电场强度的方向或者沿径向 ($Q>0$)，或者沿径向相反的方向 ($Q<0$)；

(3) 此时整个空间的电场分布将会发生变化，导体球表面的电荷分布也将发生变化，不再是均匀的了；

(4) 由于整个空间的电场 E 发生了变化，导体球的电势 $V_R = \int_R^{\infty} E \cdot dl$ 也不同。不过此时导体球仍处于新的静电平衡状态，其电势虽然会发生变化，但仍为一等势体，其表面是也依然是等势面；

(5) 在静电平衡状态下，导体内任一点的电场强度总是零，所以即使把另一带电体移近这个导体球，球体内的电场强度也还是零，没有变化。

7-6-3 如何能使导体 (1) 净电荷为零而电势不为零； (2) 有过剩的正或负电荷，而其电势为零； (3) 有过剩的负电荷而其电势为正； (4) 有过剩的正电荷而其电势为

负.

答：(1) 在一原来不带电的导体球壳的中心放一个带电荷量 q (设 $q>0$) 的导体小球，如图 7-1-7 (a) 所示。此时由于静电感应，球壳内外表面分别带有 $-q$ 和 $+q$ 的电荷，但整体上说导体球壳的净电荷为零，如果选取无限远处为零电势位，那么球壳的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \text{ 不为零;}$$

(2) 导体球壳接地，如图 7-1-7 (b) 所示。此时球壳外表面的电荷将流入大地，导体球壳内表面有 $-q$ 的净电荷，而球壳的电势因接地而等于零；

(3) 令导体球壳带 Q 的电荷，如图 7-1-7 (c) 所示。此时设 $Q<0$ ，为负电荷，且 $|q|>|Q|$ ，如果选取无限远处为零电势位，那么球壳的电势为 $V = \frac{q-Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} > 0$ ，为正电势；

(4) 此时如果导体球壳带正 Q 的电荷，而中心导体小球带负电荷量 q ，且 $|q|>|Q|$ ，如果选取无限远处为零电势位，那么球壳的电势为 $V = \frac{-q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} < 0$ ，为负电势。

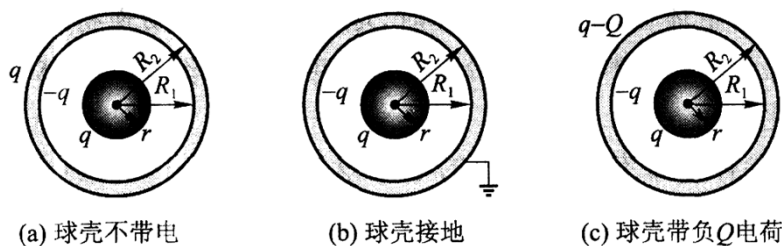


图 7-1-7 球壳在不同情况下的电势

7-6-4 如图 7-1-8 所示，在金属球 A 内有两个球形空腔，此金属球体上原来不带电，在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2 ，求金属球 A 的电荷分布。此外，在金属球外很远处放置一点电荷 q ($r>R$)，问 q_1 、 q_2 、 q 各受力多少？

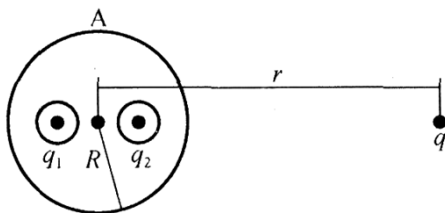


图 7-1-8

答：（1）①球体外表面电荷分布

由于静电感应，在两空腔内表面和球体外表面都会产生感应电荷，其中 q_1 所在的空腔内表面有 $-q_1$ 的感应电荷， q_2 所在的空腔内表面有 $-q_2$ 的感应电荷，当金属球外没有其他电荷时，在球体外表面有 $q_1 + q_2$ 的感应电荷；

②空腔内表面的感应电荷分布

由于点电荷 q_1 和 q_2 分别置于两空腔中心，所以空腔内表面的感应电荷 $-q_1$ 和 $-q_2$ 是均匀分布的；

③球体外表面的感应电荷分布

由于金属球体内的电场为零，感应电荷 $-q_1$ 和 $-q_2$ 相当于被屏蔽起来了，对外不产生作用，所以球体外表面的感应电荷 $q_1 + q_2$ 也是均匀分布的。

（2）由于在静电平衡条件下金属球内的电场为零，所以 q_1 、 q_2 与 q 三个电荷之间以及电荷 q_1 、 q_2 与球体外表面的感应电荷 $q_1 + q_2$ 之间都不存在相互作用力，但电荷 $q_1 + q_2$ 与外电荷 q 之间存在相互作用力。在 $r \gg R$ 的条件下，金属球在 r 处的电场可以看作是点

电荷的电场强度 $E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，所以点电荷 q 所受到的电场力为

$$F = qE = \frac{(q_1 + q_2)q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

7-6-5 一带电导体放在封闭的金属壳内部，

(1) 若将另一带电导体从外面移近金属壳，壳内的电场是否会改变？金属壳及壳内带电体的电势是否会改变？金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变？

(2) 若将金属壳内部的带电导体在壳内移动或与壳接触时，壳外部的电场是否会改变？

(3) 如果壳内有两个带异号等值电荷的带电体，则壳外的电场如何？

答：(1) ①否，在静电平衡条件下，导体内的电场强度总等于零，因此移动金属壳外的带电导体，金属壳体内的电场强度最终总是零，即壳内的电场维持不变；

②是，金属壳及壳内带电体的电势并不由哪一点或者哪一局部区域的电场决定的，根据电势的公式

$V_P = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ，其中的 E 是 P 点至无限远（零电势位）任一路径上的电场分布，一带电导体在金属壳外面移动时，金属壳外的电场会不断发生变化，因此金属壳以及壳内的电势均会有变化；

③否，从求电势差的公式 $V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ 可知，A 与 B 两点之间的电势差由它们之间的电场强度 E 决定，当一带电导体在金属壳外面移动时，壳内的电场维持不变，因此金属壳和壳内带电体之间的电势差也不会改变。

(2) 否，因为金属壳体内的电场强度总是零，它不会影响到金属壳外表面的电荷分布，所以壳外的电场没有变化。

(3) 壳外没有电场，因为如果壳内有两个带异号等值电荷的带电体，那么在金属壳外表面的感应电荷为零，此时壳体本身内的电场强度为零，壳外也没有电场。

§7-7 电容器的电容

7-7-1 (1) 一导体球上不带电，其电容是否为零？(2) 当平行板电容器的两极板上分别带上等值同号电荷时与当平行板电容器的两极板上分别带上同号不等值的电荷时，其电容值是否不同？

答：(1) 不为零，因为导体的电容取决于导体本身的大小、形状以及导体周围的介质，而与导体是否带电无关，所以导体球即使不带电，其电容仍客观存在；

(2) 相同，因为平行板电容器的电容仅取决于平行板的面积、两板之间的距离以及两板之间的介质，与平行板电容器的两极板上带电还是不带电，或者带多少电、什么符号的电量无关。

7-7-2 两个半径相同的金属球，其中一个是实心的，另一个是空心的，电容是否相同？

答：相同。原因有以下两点：

①导体的电容只与导体的大小、形状和周围介质有关，在真空中一个半径为 R 的孤立球形导体的电容 $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ，只取决于球的半径 R ，所以两个半径相同的金属球，不论是实心的还是空心的，电容都相同；

②电容是储存电荷的器件，而金属球带电时，其电荷仅分布在金属球表面，所以将实心球挖空变成空心球，其储存电荷的能力和其他静电性质（如电势）都没有发生什么变化。

7-7-3 有一平板电容器，保持板上电荷量不变（充电后切断电源），现在使两极板间的距离 d 增大。试问：两极板的电势差有何变化？极板间的电场强度有何变化？电容是增大还是减小？

答：（1）电势差的变化：两极板间的电势差正比于两极板间的距离 d ，即 $U = Ed$ ，

如果两极板间的距离 d 增大，两极板间的电势差也就成正比的增加；

（2）电场强度的变化：在平板电容器两极板间的距离远远小于平板面积的线度的情

况下，两极板间的电场是一均匀电场，由平板上的电荷面密度 σ 决定，即 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ，所以保持板上电荷量不变，平板上的电荷面密度 σ 也就不变，两极板间的电场强度 E 没有变化；

（3）电容的变化：平板电容器的电容反比于两板之间的距离 d ，为 $C = \frac{\epsilon S}{d}$ ，所以两极板间的距离 d 增大时，平行板电容器的电容将会减小。

7-7-4 平板电容器如保持电压不变（接上电源），增大极板间距离，则极板上的电荷、极板间的电场强度、平板电容器的电容有何变化？

答：（1）极板上的电荷的变化：电容器极板上的电荷与电容有关， $Q = CU$ ，在保持极板上电压 U 不变的情况下，其电荷量 Q 因电容 C 的减小而减少；

（2）极板间的电场强度的变化：极板间的电场强度 $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S}$ ，将随电荷量 Q 的减小而减弱。或者从另一方面说，由极板间的电场强度 E 与极板上电压 U 与两极板间距离 d

的关系 $E = \frac{U}{d}$ 可以直接看出，在电压 U 保持不变时，电场强度 E 随间距 d 的增加而减弱；

（3）平板电容器的电容变化的变化：由于平板电容器的电容与其带电状态无关，所以在平板电容器两极板间的距离远远小于平板面积的线度的情况下，只要增大极板间距离

d ，其电容必将减小 $\left(C = \frac{\epsilon S}{d} \right)$ 。

7-7-5 一对相同的电容器，分别串联、并联后连接到相同的电源上后，问哪一种情

况用手去触及极板较为危险？说明其原因。

答：站在地面上的人去触及带电体时，如果带电体的电压非常高，这巨大的电势差在人体内产生强大的电场，有可能将人体分子“击穿”，破坏人体器官，从而使人体电击身亡；或者带电体的电压并非十分高（人体的安全电压仅为 36 V），但在人体内流过的电流产生的热量仍足以烧伤人体。

(1) 不断开电源时

如果不断开电源（图 7-1-9 (a)），在本题所讨论的情况下，这对电容器不管是串联还是并联连接到电源上后，触摸串联电容器的 A 板与触摸并联电容器的 A 板，其危险性是一样的。因为此时它们的电压都稳定地等于电源电压。在图 7-1-9 (a) 中用虚线表示人体去触摸电路人体的等效电阻为 $R_{人}$ 。由电路分析可知，加在人体上的电压和流过人体的电流都是一样的。当然如果触摸串联电容器的 B 板，由于其电压仅为电源电压的一半，危险性也将减小一半。

(2) 断开电源时

并联的这对电容器更危险，因为如果这对电容器充电后断开电源（图 b），并联的这对电容器的等效的电容量（ $C_{并} = 2C$ ）比这对电容器串联时的等效的电容量（ $C_{串} = C/2$ ）大，相应地，并联时的这对电容器比串联时的这对电容器储存有更多的电能，这可以计算如下：

$$W_{串} = \frac{1}{2} C_{串} U^2 = \frac{1}{2} \frac{C}{2} U^2 = \frac{1}{4} C U^2$$

$$W_{并} = \frac{1}{2} C_{并} U^2 = \frac{1}{2} 2 C U^2 = C U^2$$

并联时的电能是串联时的 4 倍，因此去触摸它们时，并联的这对电容器通过人体可以释放的电能更多，也就有更大的危险性。

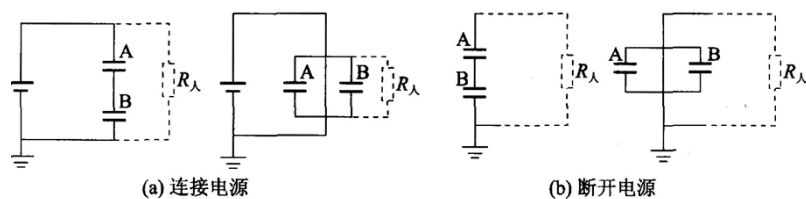


图 7-1-9 电容器串联、并联与人体的等效电路

§7-8 静电场中的电介质

7-8-1 电介质的极化现象与导体的静电感应现象有什么区别？

答：有以下两点区别：

(1) 电介质在电场中极化时，在电介质表面层或在体内会出现极化电荷，它们是电介质的极化分子在电场作用下所作的微观移动形成的，导体静电感应时，表面会产生感应电荷，它们是导体内的自由电荷在电场作用下所作的宏观移动形成的；

(2) 电介质极化后，电介质内的电场强度不为零，而导体静电感应时其内部的电场强度总为零。

7-8-2 如果把在电场中已极化的一块电介质分开为两部分，然后撤除电场，问这两半块电介质是否带净电荷？为什么？

答：否，因为电介质表面层出现的极化电荷是电介质分子中的正、负电荷中心在电场力作用下发生相对位移（无极分子）或分子电偶极矩沿电场取向排列（有极分子）的结果。电介质分子的这种微观移动不仅发生在电介质表面层，而且发生在整个电介质内。由于没有任何电荷的宏观移动，电介质内任一小范围内正负电荷的数量相等，所以当把已极化的一块电介质分开为两部分，撤除电场后每一部分也不会出现净电荷。

7-8-3 (1) 将平行板电容器的两极板接上电源以维持其间电压不变, 用相对电容率

为 ϵ 的均匀电介质填满极板间, 极板上的电荷量为原来的几倍? 电场为原来的几倍?

(2) 若充电后切断电源, 然后再填满介质, 情况又如何?

答: (1) 设电源电压为 U , 未填满电介质时的电容为 C_0 .

①电荷量为原来的 ϵ_r 倍

用相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质填满极板之间的空间后, 该平行板电容器的电容增加了 ϵ 倍, 此时电容器的两极板仍与电源相接, 电压不变, 那么极板上的电荷量为 $Q = CU = \epsilon_r C_0 U$, 与未填满电介质时相比增加了 ϵ_r 倍.

②电场强度不变

原因有两点:

a. 由于极板电压不变, 两板之间的距离也没有变, 所以两极之间的电场强度 $E = \frac{U}{d}$ 也没有变化;

b. 虽然填满电介质后会削弱电场强度, 但因为填满电介质后极板上的电荷量也相应地增加了, 电场强度又应该增加, 而者的效应抵消了, 维持电场强度不变.

(2) ①电荷量固定不变

若充电后切断电源, 极板上的电荷量 $Q_0 = C_0 U$ 固定不变;

②电场强度为原来电场强度的 $1/\epsilon_r$ 倍

由公式 $C = \epsilon_r C_0, U' = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{\epsilon_r C_0} = \frac{U}{\epsilon_r}$ 可知电容器的电容量 C 和电势差 U 都发生了变

化, 即电容增加为原来的 ϵ_r 倍, 而电压减少至原来的 $1/\epsilon_r$ 倍. 此时两板之间的距离没有

变, 所以填满介质后电场强度 $E = \frac{U'}{d} = \frac{U}{\epsilon_r d} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 将削弱为原来电场强度的 $1/\epsilon_r$ 倍.

§7-9 有电介质时的高斯定理电位移

7-9-1 在一均匀电介质球外放一点电荷 q ，分别作如图 7-1-10 所示的两个闭合曲面 S_1 和 S_2 ，求通过两闭合曲面的 E 通量、 D 通量。在这种情况下，能否找到一合适的闭合曲面，可应用高斯定理求出闭合曲面上各点的场强？

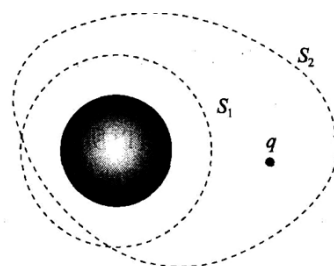


图 7-1-10

答：不能。该均匀电介质球置于点电荷 q 的电场后，电介质球表面分别产生了极化电荷 $+q'$ 和 $-q'$ ，因此按高斯定理通过闭合曲面 S_1 的 E 通量是

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q' - q'}{\epsilon_0} = 0$$

在 S_1 内没有包围任何自由电荷，所以通过闭合曲面 S_1 的 D 通量是

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

对于闭合曲面 S_2 来说，它所包围的电荷有极化电荷 $+q'$ 和 $-q'$ 以及自由电荷 q ，因此通过 S_2 的 E 通量是

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q' - q' + q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

此时闭合曲面 S_2 内有自由电荷 q ，所以通过闭合曲面 S_2 的 D 通量是

$$\oint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

无论在闭合曲面 S_1 、 S_2 上，或者空间其他地方的电场都是 $+q'$ 、 $-q'$ 和 q 共同激发的结果，这个电场分布没有什么对称性，找不到一个合适的高斯面，因此无法应用高斯定理求出闭合曲面上各点的场强。

7-9-2 在球壳形的均匀电介质中心放置一点电荷 q ，试画出电介质球壳内外的 E 和 D 线的分布。在电介质球壳内外的场强和没有介质球壳时是否相同？为什么？

答：假定电介质球壳内外半径分别是 R_1 和 R_2 ，在电介质球壳内外的场强和没有介质球壳时是相同的。

(1) 可以用高斯定理来证明：在电介质球壳内以点电荷 q 为中心作一球形高斯面，由于对称性，高斯面上的电场强度处处相等，方向沿球面的径向，利用高斯定理得出介质

球壳内 ($r < R_1$) 的电场强度为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，电介质球壳的存在并没有影响到介质球壳内的电场分布。

(2) 同样地，在电介质球壳外 ($r > R_2$) 也以这样的方法作一球形高斯面，它包围了点电荷 q 和介质球壳内外表面的极化电荷，但因介质球壳内外表面的极化电荷总和为零，

通过高斯面的 E 通量仍为 ϵ_0 ，这样介质球壳外的电场强度还是 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，与不存在介质球壳的情况一样。

需要说明的是，在介质球壳壳体内 ($R_1 < r < R_2$) 的电场强度是削弱了，为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2}, \text{ 即为该处没有介质球壳存在时的 } \epsilon_r \text{ 分之一。}$$

由上述分析可画出电介质球壳内外的 E 和 D 线的分布图，如图 7-1-11 所示。由图可看出， D 线起始于中心的点电荷 q （假定它是正电荷），由于介质球壳上没有自由电荷，所以所发出的 D 线伸展至无限远； E 线也发自中心的点电荷 q ，一部分终止于介质球壳内表面的负极化电荷，另一部分伸展至无限远，同时介质球壳外表面的正极化电荷也发出 E 线并伸展至无限远。

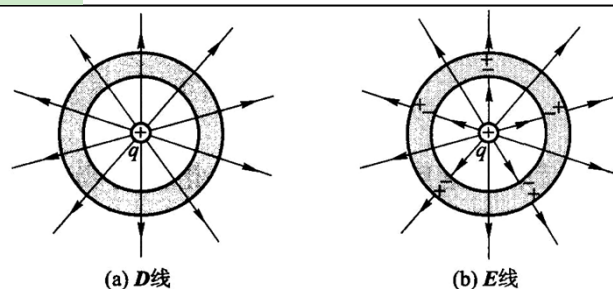


图 7-1-11 电介质球壳内外的 E 线和 D 线

§7-10 静电场的能量

7-10-1 电容分别为 C_1 和 C_2 的两个电容器，把它们并联充电到电压 U 和把它们串联充电到电压 $2U$ ，在电容器组中，哪种形式储存的电荷量、能量大些？

答：并联充电到电压 U 储存的电荷量更多。

(1) 将两电容并联充电到电压 U 时

两电容器并联的等效电容为 $C = C_1 + C_2$ ，把它们充电到电压 U 后所储存的电荷量和能量分别是

$$q' = CU = (C_1 + C_2)U, \quad W' = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2$$

(2) 将两电容串联充电到电压 $2U$ 时

两电容器串联的等效电容为 $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ ，把它们充电到电压 $2U$ 后所储存的电荷量和能量分别是

$$q'' = C \times 2U = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U, \quad W'' = \frac{1}{2}C(2U)^2 = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U^2$$

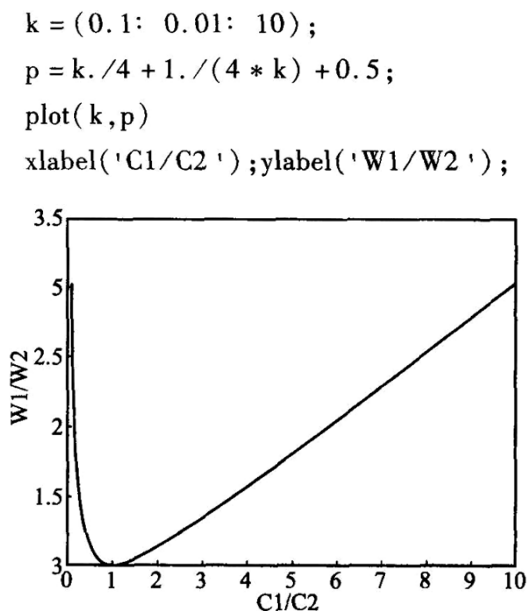
两种情况所储存的电荷量和能量的比值分别是

$$\frac{q'}{q''} = \frac{C_1}{2C_2} + \frac{C_2}{2C_1} + 1, \quad \frac{W'}{W''} = \frac{C_1}{4C_2} + \frac{C_2}{4C_1} + \frac{1}{2}$$

由分析可得，无论 C_1 和 C_2 为何值，比值 $\frac{q'}{q''}$ 均大于 1，所以有 $q' > q''$ ，即并联充电到电压 U 储存的电荷量更多。

对于储存的能量似不能直观地看出，我们编写 MATLAB 程序段，令

$C_1 = 0.1C_2, 0.2C_2, \dots, 10C_2$ ，画出 W'/W'' （程序及图中为 $W1/W2$ ）的变化曲线如下：



由曲线可见，仅当 $C_1 = C_2$ 时， $W' = W''$ ，即两种情况所储存的能量一样多；在其他任何 $C_1 \neq C_2$ 时，都有 $W' > W''$ ，即并联充电到电压 U 储存的能量更多。

7-10-2 一空气电容器充电后切断电源，然后灌入煤油，问电容器的能量有何变化？

如果在灌油时电容器一直与电源相连，能量又如何变化？

答：（1）容器储存的能量降为原来的 $1/\epsilon_r$ ，因为电容器充电并切断电源后极板上的

电荷没有变化，而灌入煤油后，由电容器能量公式 $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 可知，电容增加了 ϵ_r 倍，所以电容器储存的能量降为原来的 $1/\epsilon_r$ ；

（2）电容器储存的能量增加了 ϵ_r 倍，因为如果在灌油时电容器一直与电源相连，那

么电容器两极板的电势差保持不变，由 $W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$ 可知，电容增加了 ϵ_r 倍，所以电容器储存的能量也增加了 ϵ_r 倍。

二、习题

7-1 在真空中，两个等值同号的点电荷相距 0.01 m 时的作用力为 10^{-5} N，它们相距 0.1 m 时的作用力为多大？两点电荷所带的电荷量是多少？

解：（1）根据题意，设两点电荷相距 r_1 时的库仑力的大小为 F_1 ，相距 r_2 时的库仑力

的大小为 F_2 ，由库仑定律，两个点电荷间作用力的大小为：
$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

可见 $F \propto r^{-2}$ ，因此 $\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

$r_2 = 0.1\text{m}$ 时的作用力大小为：
$$F_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} F_1 = \left(\frac{0.01}{0.1}\right)^2 \times 10^{-5} \text{ N} = 10^{-7} \text{ N}$$

（2）由 $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_2^2}$ ，可得：
$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r_2^2 F_2} = 3.33 \times 10^{-10} \text{ C}$$

7-2 在边长为 2 cm 的等边三角形的顶点上，分别放置电荷量为 $q_1 = 1.0 \times 10^{-6}$ C、 $q_2 = 3 \times 10^{-6}$ C 和 $q_3 = -1.0 \times 10^{-6}$ C 的点电荷。

（1）哪一个点电荷所受的力最大？（2）求作用在 q_2 上力的大小和方向。

解：（1）根据题意，建立坐标系如图 7-2-1 所示。

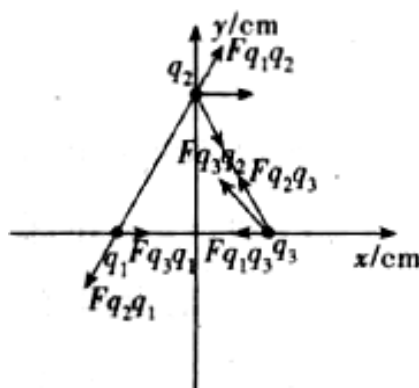


图 7-2-1

点电荷 q_1 坐标为 $(-1, 0)$ ， q_2 坐标为 $(1, 0)$ ， q_3 坐标为 $(0, \sqrt{3})$ ，图中标明了三电

荷各自受其它两电荷的库仑力，由作用力与反作用力定律得： $F_{q_3 q_1} = F_{q_1 q_3}$ 。

又因为 q_1 、 q_3 电量大小相等，所以： $F_{q_2 q_1} = F_{q_2 q_3}$ 。

而 $F_{q_3 q_1}$ 与 $F_{q_2 q_1}$ 夹角为 $\frac{2}{3}\pi$ ， $F_{q_2 q_3}$ 与 $F_{q_1 q_3}$ 夹角为 $\frac{1}{3}\pi$ ，由余弦定理知 q_3 所受合力大于 q_2 所受合力。

(2) 由题意可得点电荷 q_1 、 q_3 对 q_2 的库仑力分别为：

$$F_{q_1 q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} q_2 = 67.5 \text{ N}$$

$$F_{q_3 q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{23}^2} q_2 = 67.5 \text{ N}$$

由图 7.1 可知上述二力夹角为 $\frac{2}{3}\pi$ ，所以 q_2 所受合力为 67.5N，方向延 x 轴正方向。

同理，可计算 q_3 所受的库仑力：

$$F_{q_2 q_3} = 67.5 \text{ N}$$

$$F_{q_1 q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{13}^2} q_3 = 22.5 \text{ N}$$

$$q_3 \text{ 所受合力为: } F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13}F_{23}\cos\alpha} = 81.1 \text{ N}$$

综上所述，作用在 q_2 上的力为 67.5N，沿 x 轴正方向， q_3 所受合力最大。

7-3 在正方形的两个相对的角上各放置一点电荷 Q ，在其他两个相对角上各置一点

电荷 q 。如果作用在 Q 上的力为零，求 Q 与 q 的关系。

解：根据题意，建立坐标系 Oxy ，如图 7-2-2 所示。

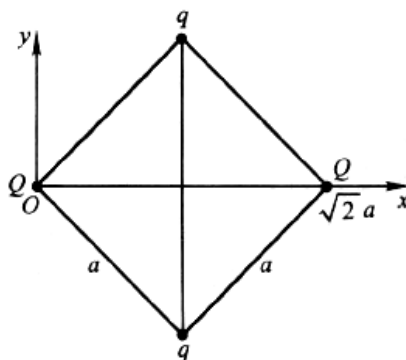


图 7-2-2

以 Q 为坐标原点, 设正方形的边长为 a , 由图 7-2-2 可知 x 轴上的点电荷 Q 受两个 q 的作用力具有对称性, 合力方向沿 x 轴, 即 $F = F_x = F_Q + 2F_{qx}$.

$$\text{又由题意知: } F_Q = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}a)^2}, \quad F_{qx} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos 45^\circ.$$

$$\text{故可得: } F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}a)^2} + 2 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos 45^\circ$$

$$\text{令上式等于零, 得 } Q = -2\sqrt{2}q.$$

7-4 为了验证库仑定律点电荷之间的作用力与距离的关系 $F \propto 1/r^n$ 中 $n=2$, 有人构思了如下的实验: 两相同的金属小球用两根相同长的悬线吊在 O 点上 (见图 7-2-3), 如果它们均带电荷 q , 则可测定它们之间的排斥距离为 x_1 ; 如果它们均带电荷 $q/2$, 则可测定它们之间的排斥距离为 x_2 , 图中 θ 角很小. 请由此导出库仑定律中的幂指数 n 与 x_1 、 x_2 的关系式.

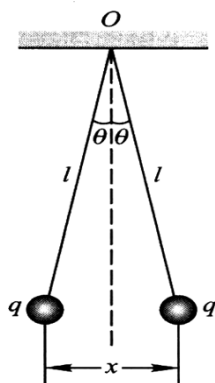


图 7-2-3

解: 根据题意, 以带电小球为研究对象, 其受力情况如图 7-2-4 所示.

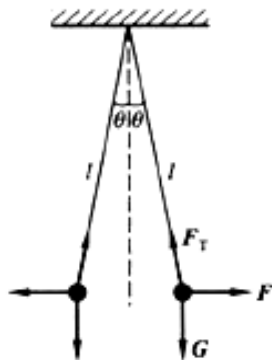


图 7-2-4

设小球受库仑力为 $F_q = k \frac{q^2}{x^n}$ ，当小球受力平衡时，有

$$F_T \sin \theta = F_q, \quad F_T \cos \theta = mg, \quad \text{可得} \quad \tan \theta = \frac{F_q}{mg}.$$

由于 θ 很小，所以 $\tan \theta \approx \frac{x}{2l}$ 。

将已知条件代入上述方程可得：
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{q_1^2 x_2^n}{q_2^2 x_1^n} = \frac{4x_2^n}{x_1^n}, \quad \text{解得} \quad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n+1} = 4.$$

$$n = \frac{\lg 4}{\lg \left(\frac{x_1}{x_2}\right)} - 1.$$

对上式等号两边取对数，可得：

7-5 粒子快速通过氢分子中心，其轨迹垂直于两核的连线，两核的距离为 d ，如图

7-2-5 所示.问 α 粒子在何处受到的力最大?假定 α 粒子穿过氢分子中心时两核移动可忽略，

同时忽略分子中电子的电场.

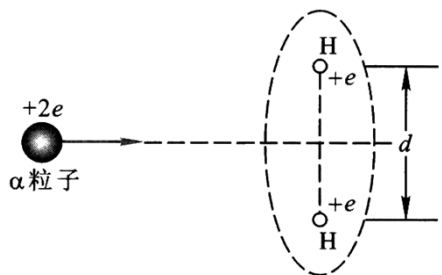


图 7-2-5

解：沿水平方向建立 x 轴，取向左为正向，如图 7-2-6 所示。

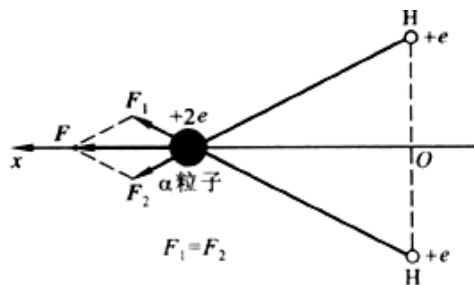


图 7-2-6

α 粒子总是位于两核连线的中垂线上。当它与连线的距离为 x 时受力情况如图 7-2-6

所示， F_1 与 F_2 的方向相对于中垂线对称，且

$$F_1 = F_2 = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \frac{d^2}{4} \right)}$$

α 粒子所受合力

$$\begin{aligned} F &= 2F_1 \cos\theta = \frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \frac{d^2}{4} \right)} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2}} \\ &= \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4} \right)^{3/2}} \end{aligned}$$

在 α 粒子受力最大处， x 满足 $\frac{dF}{dx} = 0$ ，即

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{d^2/4 - 2x^2}{\left(x^2 + d^2/4 \right)^{5/2}} &= 0 \\ 2x^2 &= \frac{d^2}{4}, \quad x = \pm \frac{d}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

7-6 在直角三角形 ABC 的 A 点，放置点电荷 $q_1 = 1.8 \times 10^{-9} \text{C}$ ，在 B 点放置点电荷

$q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{C}$ 。已知 $BC = 0.04 \text{ m}$ ， $AC = 0.03 \text{ m}$ 。试求直角顶点 C 处的电场强度。

解：根据题意，建立直角坐标系 Oxy，取 C 为原点，如图 7-2-7 所示

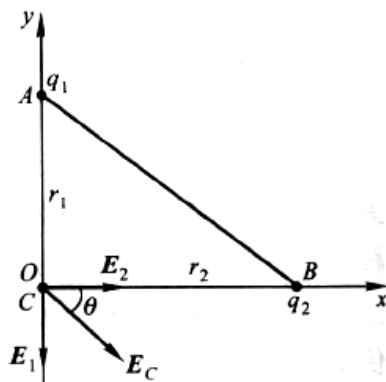


图 7-2-7

令 $AC = r_1$, $BC = r_2$, 则 q_1 、 q_2 在 C 点产生的电场强度分别为:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} (-j) = 1.8 \times 10^4 (-j) \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} i = 2.7 \times 10^4 i \text{ V/m}$$

根据场强的叠加原理, C 点的合场强为: $E_c = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} i - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} j$

E_c 的大小为: $E_c = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 3.24 \times 10^4 \text{ V/m}$

E_c 与水平方向夹角为: $\theta = \arctan \frac{E_1}{E_2} = \arctan \frac{2}{3} = 33.7^\circ$

7-7 如图 7-2-8 所示的电荷分布称为电四极子, 它由两个相同的电偶极子组成. 证明

在电四极子轴线的延长线上离中心为 r ($r \gg l$) 的 P 点的电场强度为 $E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$, 式中 $Q = 2qr_e^2$ 称为这种电荷分布的电四极矩.

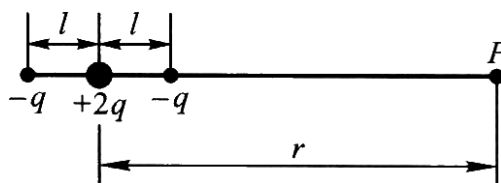


图 7-2-8

证明: 已知电偶极子在其延长线上场强公式为 $E = \frac{P_e}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, 其中 $P_e = qr$.

题中 P 点电场为两个方向相反的电偶极子在其延长线上电场的叠加，有：

$$E = E_2 - E_1 = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^3} - \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^3} = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l \left(3r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^3}$$

由题意知 $l \ll r$ ，因此有： $\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^3 \approx r^6$, $3r^2 + \frac{l^2}{4} \approx 3r^2$.

将 $ql^2 = \frac{Q}{2}$ 代入化简得： $E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$ ，题目得证.

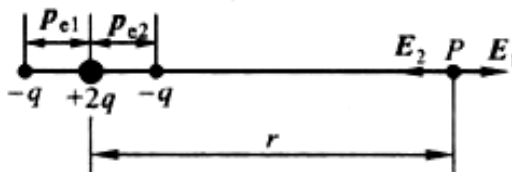


图 7-2-9

7-8 长 $l = 15 \text{ cm}$ 的直导线 AB 上均匀地分布着线密度为 $\lambda = 5 \times 10^{-9} \text{ C/m}$ 的电荷

(如图 7-2-10) .求:

- (1) 在导线的延长线上与导线一端 B 相距 $d = 5 \text{ cm}$ 的点 P 处的电场强度;
- (2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d = 5 \text{ cm}$ 处的 Q 点的电场强度.

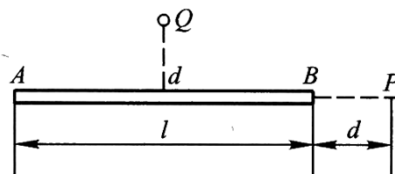


图 7-2-10

解：(1) 以 P 为原点，直导线 AB 为 x 轴建立坐标系，取 PA 为坐标轴正方向，取

AB 上一段微元 dx ，其对 P 点的场强为 $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2}$.

积分得合场强为：

$$E = \int dE = \int_d^{d+l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) = 6.75 \times 10^2 \text{ V/m}$$

(2) 以直导线 AB 中点为原点, AB 为 x 轴建立坐标系, 如图 7.11 所示. 由对称性可知 Q 点场强 x 轴分量为 0, 合场强分布在 y 轴, $E = E_y$.

取 AB 上一段微元 dx , 有
$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \cos\alpha$$

由图 7-2-11 可知 $\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}}$, 代入上式有
$$dE_y = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

积分得合场强:
$$E = \int dE_y = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda e}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{1}{(d^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}} = 1.5 \times 10^3 \text{ V/m}$$

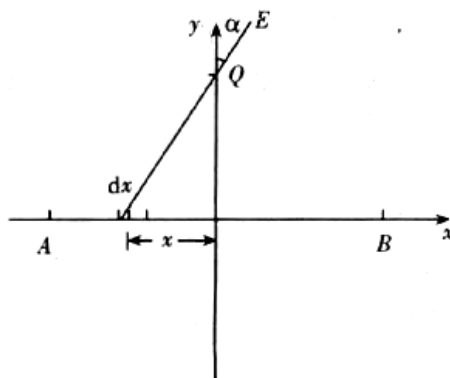


图 7-2-11

7-9 一电偶极子原来与一均匀电场平行, 将它转到与电场反平行时, 外力做功 0.1 J.

问当此电偶极子与电场强度成 45° 角时, 作用于它的力偶矩有多大?

解: 在均匀的电场中, 电偶极子受力矩大小为 $M = p_e E \sin\theta$.

由题意可知, 在 θ 由 0° 转到 180° 的过程中, 外力做功:

$$A = \int_0^\pi M d\theta = \int_0^\pi p_e E \sin\theta d\theta = 2p_e E = 0.1 \text{ J}$$

解得: $p_e E = \frac{A}{2} = 0.05 \text{ J}$

当 $\theta = 45^\circ$ 时, 作用于它的力偶矩为:

$$M = p_e E \sin \theta = \frac{A}{2} \sin \frac{\pi}{4} = 3.54 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

7-10 用细绝缘线弯成的半圆形环，半径为 R ，其上均匀地带正电荷 Q ，求圆心 O 点处的电场强度。

解：根据题意，建立坐标系，如图 7-2-12 所示。

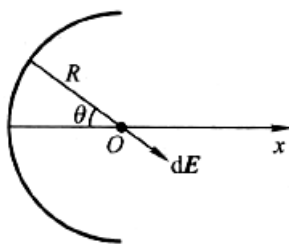


图 7-2-12

由题意可知 $Q > 0$ ，在半圆形环上任取一电荷元 $dq = \lambda dl$ ，则该电荷元在圆心 O 点处的电场强度为：

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2}, \text{ 方向如图 7-2-12 所示, 式中, } \lambda = \frac{Q}{\pi R}, dl = R d\theta.$$

因为电荷的对称分布，所以圆心 O 点处的电场强度方向沿 x 轴正方向，其大小为：

$$E = \int dE_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \theta = 2 \times \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

7-11 在真空中有一半径为 R 的均匀带电球面，总带电量为 Q ($Q > 0$)。今在球面上挖去非常小的一块面积 ΔS (连同电荷)，且假设挖去后不影响原来的电荷分布，求挖去 ΔS 后球心处电场强度的大小和方向。

解：根据题意考虑“补偿法”，即球心处的电场强度 E 等于完整的均匀带电

Q ($Q > 0$) 的球面在球心处的电场强度 E_1 与带电量 $\Delta q = -\sigma \Delta S$ 的小面积带电球面在球心处的电场强度 E_2 之和，即 $E = E_1 + E_2$ 。

由对称性可知, 均匀带面球面在球心处的电场强度 $E_1 = 0$, 所以 $E = E_2$.

由于 ΔS 面积非常小, 近似认为是点电荷在球心处电场, 即:

$$E = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\Delta S}{R^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta S}{R^2} \frac{Q}{4\pi R^2} = -\frac{Q\Delta S}{16\pi^2\epsilon_0 R^4}$$

方向沿径向指向小面积 ΔS .

7-12 一半径为 r 的半球面均匀带电, 电荷面密度为 σ , 求球心处的电场强度.

解: 根据题意, 建立坐标系如图 7-2-13 所示.

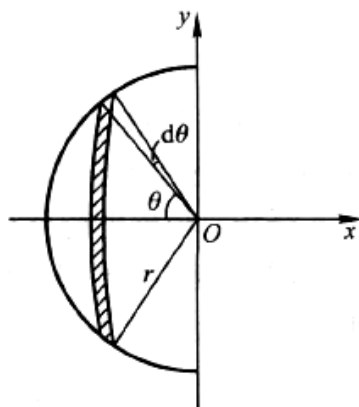


图 7-2-13

在半球面取一对 Ox 轴对称的圆环, 则圆环所带电量为 $dq = \sigma dS = \sigma (2\pi r \sin \theta) r d\theta$

θ , 圆环半径为 $r \sin \theta$, 环心在 $-x$ 处.

由带电圆环轴线上的电场强度公式可得:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

根据几何关系: $x = r \cos \theta$, $R = r \sin \theta$, $x^2 + R^2 = r^2$

可得细圆环在 O 点的电场强度为:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \cos \theta \sigma 2\pi r^2 \sin \theta}{r^3} d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

则球心处的电场强度为:

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

E 指向 x 轴正方向.

7-13 设点电荷的分布是：在 $(0, 0)$ 处为 $5 \times 10^{-8} \text{C}$ ，在 $(3 \text{ m}, 0)$ 处为 $4 \times 10^{-8} \text{C}$ ，在 $(0, 4 \text{ m})$ 处为 $-6 \times 10^{-8} \text{C}$ 。计算通过以 $(0, 0)$ 为球心，半径为 5 m 的球面上的总 E 通量。

解：由题意可知，三个电荷均在半径为 5 m 的高斯面包围之中，则高斯定理：

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

$$\text{总电场强度通量: } \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 - q_3) = \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} (5 \times 4) \times 10^{-8}$$

$$= 3.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}$$

7-14 如图 7-2-14 所示，在点电荷 q 的电场中，取半径为 R 的圆形平面。设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上点 A 处，点 A 与圆心 O 的距离为 d 。试计算通过此平面的 E 通量。

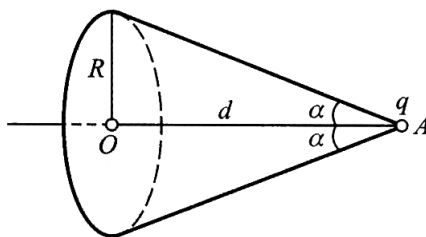


图 7-2-14

解：根据题意，设圆板边缘与点电荷之间的距离为 r ，以点电荷为球心， r 为半径作一球面，则有，

$$\text{球面的面积为: } S_0 = 4\pi r^2 = 4\pi(R^2 + d^2)$$

$$\text{球冠面积为: } S = 2\pi r(r - d) = 2\pi \sqrt{R^2 + d^2} (\sqrt{R^2 + d^2} - d)$$

$$\text{通过整个球面 } S_0 \text{ 的 } E \text{ 通量为: } \Psi_{S_0} = \oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES_0 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

通过球冠面 S 的 E 通量即通过圆形平面的 E 通量为: $\Psi_s = \int_s E \cdot dS = ES$

可得: $\frac{\Psi_s}{\Psi_{s_0}} = \frac{ES}{ES_0} = \frac{S}{S_0}$

因此, $\Psi_s = \Psi_{s_0} \frac{S}{S_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{(\sqrt{R^2 + d^2} - d)}{2\sqrt{R^2 + d^2}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right)$

7-15 图 7-2-15 中电场强度的分量为 $E_x = bx^{1/2}, E_y = E_z = 0$, 式中

$b = 800 \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{m}^{1/2})$, 设 $d = 10 \text{ cm}$. 试计算:

(1) 通过立方体表面的总 E 通量; (2) 立方体内的总电荷量.

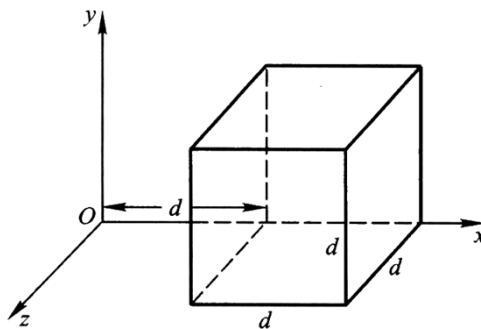


图 7-2-15

解: (1) 由题意可知, 通过立方体表面的总 E 通量, 数值上与通过立方体左右两个侧面的 E 通量相等:

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \Psi_{E_1} + \Psi_{E_2} = E_1 \cdot S + E_2 \cdot S \\ &= (E_2 - E_1)S = (b\sqrt{2d} - b\sqrt{d})d^2 = 1.05 \text{ Nm}^2/\text{C} \end{aligned}$$

(2) 根据高斯定理 $\Psi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$, 可得立方体内包围的电荷量:

$$q = \epsilon_0 \Psi_E = 9.27 \times 10^{-12} \text{ C}$$

7-16 (1) 地球的半径为 $6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 地球表面附近的电场强度近似为 100

V/m, 方向指向地球中心, 试计算地球带的总电荷量; (2) 在离地面 1 500 m 处, 电场强度降为 24 V/m, 方向仍指向地球中心. 试计算这 1500 m 厚的大气层里的平均电荷密度.

解: (1) 根据题意, 取地球表面作为高斯球面, 由高斯定理有:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

可得: $Q = -4\pi\epsilon_0 R^2 E = -4.51 \times 10^5 \text{ C}$.

(2) 在距地面 1500 m 处作一高斯球面, 由高斯定理有:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E \cdot 4\pi(R+h)^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

可得: $Q' = -4\pi\epsilon_0 (R+h)^2 E$

则大气层中带电量为: $q = Q' - Q = 3.43 \times 10^5 \text{ C}$

大气层体积为: $V = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - R^3] = 7.65 \times 10^{17} \text{ m}^3$

大气层里的平均电荷密度为:

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3.43 \times 10^5}{7.65 \times 10^{17}} \text{ C/m}^3 = 4.48 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$$

7-17 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间, 均匀分布着电荷体密度为 $\rho = 10^{-9} \text{ C/m}^3$ 的正电荷. 求离球心 5 cm、15 cm、50 cm 处的电场强度.

解: (1) 如图 7-2-16 所示, 以 O 为球心, $R_1 = 5\text{cm}$ 为半径作一高斯面, 有高斯定

理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$.

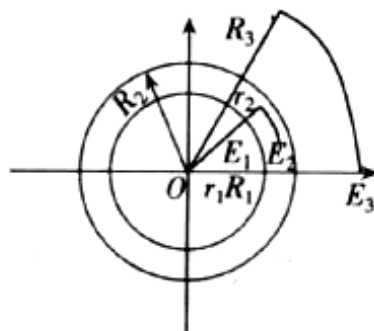


图 7-2-16

由题意知高斯面内电荷为 0, 因此离球心 5cm 处的场强 $E_1 = 0$.

(2) 以 O 为圆心, $R_2 = 15\text{cm}$ 为半径的球面为高斯面, 有高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由题意知高斯面内电荷 $q = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 \right)$, 代入高斯定理公式, 有:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho(r_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0 4\pi r_2^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r_2^2 - \frac{R_1^3}{r_2^2} \right) = 3.97 \text{ V/m}$$

(3) 同理, 取半径为 $R_3 = 50\text{cm}$ 的高斯面, 有高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

由题意知高斯面内电荷 $q = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$, 代入高斯定理公式, 有:

$$E_3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r_3^2} (R_2^3 - R_1^3) = 1.05 \text{ V/m}$$

7-18 一个半径为 R 的球体内的电荷体密度为 $\rho = kr$, 式中 r 是径向距离, k 是常量.

求空间的电场强度分布, 并画出 E 对 r 的关系曲线.

解: (1) 当 $r < R$ 时, 以 r 为半径作高斯面, 有高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

由题意知高斯面内电荷: $q = \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^r k 4\pi r^3 dr = 4\pi k \frac{r^4}{4} = \pi k r^4$

代入高斯定理公式, 有 $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\pi k r^4}{\epsilon_0}$, 解得: $E = \frac{k r^2}{4\epsilon_0} (r < R)$

(2) 当 $r > R$ 时, 有高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

其中高斯面内电荷量 $q' = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \pi k R^4$

因此可得场强分布 $E = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$

作出的 $E-r$ 曲线如图 7-2-17 所示.

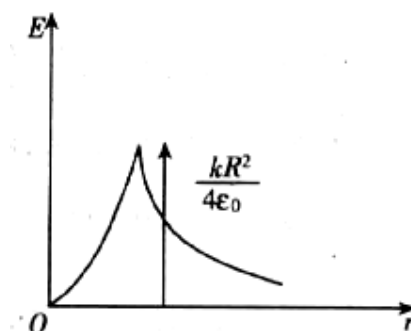


图 7-2-17

7-19 厚度为 0.5 cm 的无限大平板均匀带电, 电荷体密度为 $1.0 \times 10^{-4} \text{C/m}^3$. 求:

(1) 薄层中央的电场强度; (2) 薄层内与其表面相距 0.1 cm 处的电场强度; (3) 薄层外的电场强度.

解: (1) 由对称性可知, 薄层中央电场强度为 0.

(2) 如图 7-2-18 (a) 所示, 做高斯面, 有: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0}$

由图 7-2-18 (a) 可知: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES$, $\rho V = \rho Sd$

则由高斯定理, 有: $2ES = \frac{\rho Sd}{\epsilon_0}$

代入已知条件, 有: $E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = 1.69 \times 10^4 \text{V/m}$

(3) 做圆柱形高斯面, 如图 7-2-18 (b) 所示, 由高斯定理, 有:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho \cdot V}{\epsilon_0}$$

可得:
$$2ES = \frac{\rho Sd}{\epsilon_0}$$

所以薄层外的电场强度:
$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = 2.82 \times 10^4 \text{ V/m}, \text{ 其中 } d = 0.5 \text{ cm}.$$

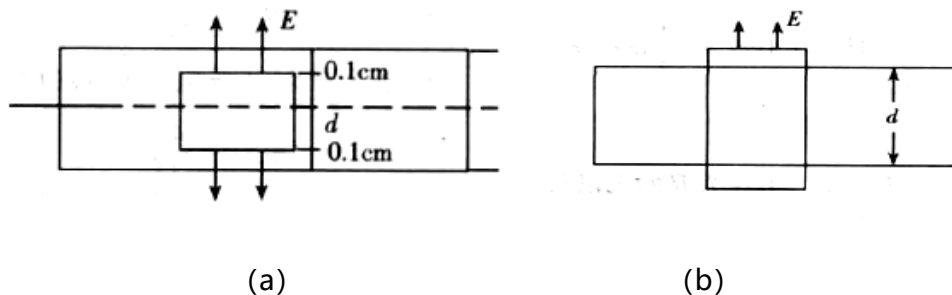


图 7-2-18

7-20 在半径为 R , 电荷体密度为 ρ 的均匀带电球内, 挖去一个半径为 r 的小球, 如图 7-2-19 所示. 试求: O 、 O' 、 P 、 P' 各点的电场强度. O 、 O' 、 P 、 P' 在一条直线上.

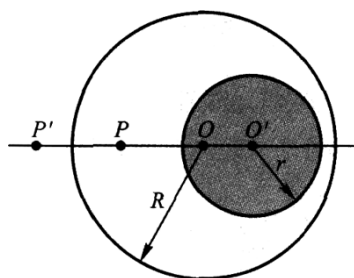


图 7-2-19

解: 设大、小带电球体的场强分别为 \vec{E}_1 和 \vec{E}_2 , 则各点的合场强为: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

根据高斯定理, 对大球和小球分别可得 \vec{E}_1 和 \vec{E}_2 为:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\rho l}{3\epsilon_0} \vec{e}_r & (l < R) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 l^2} \vec{e}_r & (l > R) \end{cases}, \quad \vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r'} & (r' < r) \\ -\frac{\rho r'^3}{3\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_{r'} & (r' > r) \end{cases}$$

式中, l 表示从 O 点出发的矢径大小, \vec{e}_r 表示沿矢径向外的单位矢量, r' 表示从 O' 点出发的矢径大小, $\vec{e}_{r'}$ 表示沿矢径向外的单位矢量.

在 O 点时, 由于 $l = 0$, 故 $\vec{E}_{10} = 0$, 因此 $\vec{E}_0 = \vec{E}_{20}$, 则 O 点的电场强度:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{20} = -\frac{\rho r'_{O'O}}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r'}$$

在 O' 点时, 由于 $r' = 0$, 故 $\vec{E}_{20}' = 0$, 因此 $\vec{E}_0 = \vec{E}_{10}$, 则 O' 点的电场强度:

$$\vec{E}_{O'} = \vec{E}_{10'} = \frac{\rho l_{OO'}}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$$

在 P 点时, 有 $\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P}$, 其中 \vec{E}_{1P} 是大球在 P 点产生的场强, \vec{E}_{2P} 是小球在

P 点产生的场强, 故有:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P} = \frac{\rho l_{OP}}{3\epsilon_0} \vec{e}_r - \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r_{OP}^2} \vec{e}_{r'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(l_{OP} - \frac{r^3}{r_{OP}^2} \right) \vec{e}_r$$

在 p' 点时, 有 $\vec{E}'_P = \vec{E}'_{1P} + \vec{E}'_{2P}$, 其中 \vec{E}'_{1P} 是大球在 P' 点产生的场强, \vec{E}'_{2P} 是小球在

P' 点产生的场强, 故有:

$$\vec{E}'_P = \vec{E}'_{1P} + \vec{E}'_{2P} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 l_{OP'}^2} \vec{e}_r - \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r_{OP'}^2} \vec{e}_{r'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{l_{OP'}^2} - \frac{r^3}{r_{OP'}^2} \right) \vec{e}_r$$

7-21 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 求电场强度分布,

并作 E-r 曲线.

解: 当 $r < R$ 时, 在圆柱体内取半径 r , 高 l 的同轴闭合圆柱面 S_1 , 对圆柱面 S_1 应用高斯定理, 有:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

所以, 圆柱体内电场强度大小为: $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \quad (r < R)$.

当 $r > R$ 时, 在圆柱体外, 取半径 r , 高 l 的同轴闭合圆柱面 S_2 , 对圆柱面 S_2 应用高斯定理有:

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho \pi R^2 l}{\epsilon_0}$$

因此, 圆柱体外电场强度大小为: $E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad (r > R)$

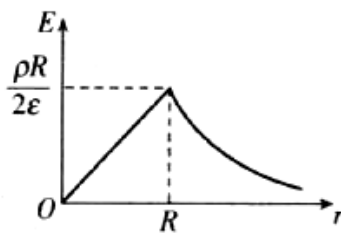


图 7-2-20

7-22 点电荷 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 的电荷量各为 $4 \times 10^{-9} \text{C}$, 放置在一正方形的四个顶点上, 各顶点距正方形中心点 O 的距离均为 5 cm .

- (1) 计算 O 点的电场强度和电势;
- (2) 将一试探电荷 $q_0 = 10^{-9} \text{C}$ 从无穷远移到 O 点, 电场力作功多少?
- (3) 问 (2) 中所述过程中 q_0 的电势能的改变为多少?

解: (1) 由电场强度的叠加原理可知, O 点的合场强为零, 即 $E_o = 0$.

由电势的叠加原理可知, O 点的电势为:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \times 4 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 r} = 2.88 \times 10^3 \text{ V}$$

- (2) 电场力作功为电势能的变化:

$$W = qU_{\text{初}} - qU_{\text{末}} = q(0 - 2.88 \times 10^3) = -2.88 \times 10^{-6} \text{ J}$$

- (3) 由 (2) 可知, 电势能增加 $2.88 \times 10^{-6} \text{ J}$.

7-23 如图 7-2-21 所示, 已知 $r = 6 \text{ cm}$, $d = 8 \text{ cm}$, $q_1 = 3 \times 10^{-8} \text{C}$, $q_2 = -3 \times 10^{-8} \text{C}$. 求:

- (1) 将电荷量为 $2 \times 10^{-9} \text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点, 电场力作功多少?

(2) 将此点电荷从 C 点移到 D 点, 电场力做功多少?

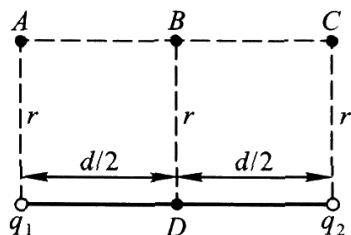


图 7-2-21

解: (1) 根据图 7-2-21 所示的位置关系, A 点电势为

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1A}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \left(\frac{3 \times 10^{-8}}{0.06} - \frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{0.06^2 + 0.08^2}} \right) \text{ V} \\ &= 1.8 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

B 点电势为

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1B}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2B}}$$

$r_{1B} = r_{2B}, q_1 + q_2 = 0$, 故 $V_B = 0$. 将电荷 $q_0 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}$ 从 A 点移到 B 点电场力做

功为

$$\begin{aligned} A &= q_0(V_A - V_B) = 2 \times 10^{-9} \times (1.8 \times 10^3 - 0) \text{ J} \\ &= 3.6 \times 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

(2) C 点电势为

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{1C}} + \frac{q_2}{r_{2C}} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \left(\frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{0.06^2 + 0.08^2}} - \frac{3 \times 10^{-8}}{0.06} \right) \text{ V} \\ &= -1.8 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

显然, 将 $V_D = 0$ 从 C 点移到 D 点电场力做功为

$$\begin{aligned} A &= q_0(V_C - V_D) = 2 \times 10^{-9}(-1.8 \times 10^3 - 0) \text{ J} \\ &= -3.6 \times 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

7-24 试计算如图 7-2-22 所示线性电四极子在很远处 ($r \gg l$) 的电势.

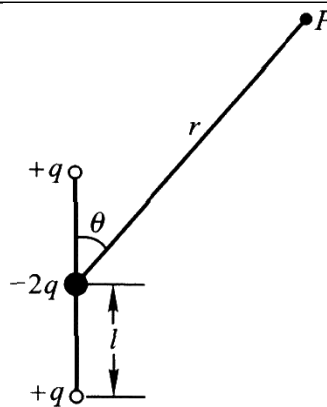


图 7-2-22

解：如图 7-2-23 所示，由电势叠加原理，p 点的电势为：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2} \right)$$

当 $r \gg l$ 时，有 $r_1 \approx r - a$, $r_2 \approx r + a$ ，则代入上式有：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r-a} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r+a} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a^2q}{r(r^2-a^2)} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2q}{r^3} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{l^2 \cos^2 \theta}{r^3} \end{aligned}$$

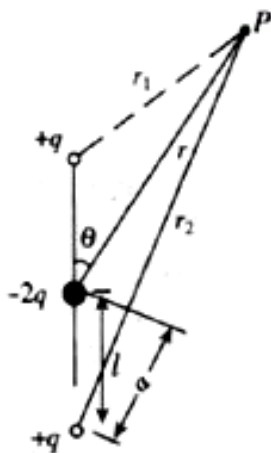


图 7-2-23

7-25 半径为 2 mm 的球形水滴具有电势 300 V.求：（1）水滴上所带的电荷量；

（2）如果两个相同的上述水滴结合成一个较大的水滴，其电势值为多少（假定结合时电荷没有漏失）？

解：(1) 设水滴带电量为 q ，由均匀带电球面的电势为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = U$ ，可得到水滴带电量：

$$q = 4\pi\epsilon_0 r U = 6.7 \times 10^{-11} \text{ C}$$

(2) 设合成的水滴电势为 U_1 ，则

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} = U_1, \frac{4}{3}\pi r_1^3 = 2 \times \frac{4}{3}\pi r^3, r_1 = \sqrt[3]{2}r = 2.52 \text{ mm}$$

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 476 \text{ V}$$

解得：

7-26 两个同心球面，半径分别为 10 cm 和 30 cm。小球面均匀带有 10^{-8}C 正电荷，大球面带有 $1.5 \times 10^{-8}\text{C}$ 正电荷。求离球心分别为 20 cm、50 cm 处的电势。

解：设一球面半径为 R_1 、带电量为 q_1 ，另一球面半径 R_2 、带电量为 q_2 ，由高斯定理可得电场分布为：

$$E_0 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_2 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2)$$

$r_1 = 20\text{cm}$ 处的电势为：

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{r_1}^{R_2} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 900 \text{ V} \end{aligned}$$

$r_2 = 50\text{cm}$ 处的电势为：

$$V_2 = \int_{r_2}^{\infty} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 450 \text{ V}$$

7-27 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，试证离球心 r 处 ($r < R$) 的电势为

$$V = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

证明：以 r 为半径作球面，带电球体可以分割成半径为 r 的球体和厚度为 $(R-r)$ 的球

壳的两部分，则 r 处的电势为这两部分带电体的电势 V_1 和 V_2 的和，即 $V = V_1 + V_2$ 。

由带电球体表面的电势知，半径为 r 的球体表面的电势 $V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

式中， q 是半径为 r 的球体所带的电荷量， $q = \rho \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Qr^3}{R^3}$

因此 $V_1 = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 。

V_2 是厚为 $(R-r)$ 带电球壳在其内表面的电势，因为带电球面内的电势等于表面的电势，看将球壳分割为无数厚度为 dr 的微元薄球壳，则 r 处在微元每个薄球壳的内部。每个薄球壳所带的电荷量为 $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ ，电势为

$$dV_2 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r dr, \text{ 因此:}$$

$$V_2 = \int dV_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_r^R r dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R^2 - r^2) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2)$$

那么，离球心 R 处的电势：
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

7-28 如图 7-2-24 所示，在边长为 1 m 的正方形的左上角有一点电荷 $q_0 = 10^{-12}$

C，左下角有一点电荷 $q_1 = -10^{-12}$ C，电荷量为 $q_2 = 10^{-11}$ C 的电荷均匀分布在右边的细线上。求正方形中心的电势。

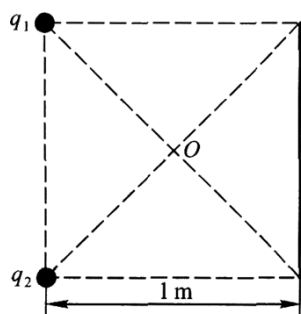


图 7-2-24

解：根据题意设正方形的边长为 a ，取 $O'y$ 轴沿带电细线，如图 7-2-25 所示。

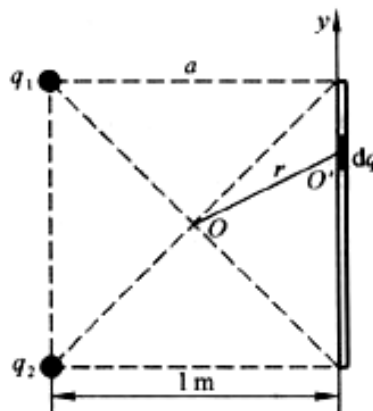


图 7-2-25

在细线上取微元 dy ，所带电荷量为 $dq = \lambda dy$ ， dq 在 O 点的电势为：

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中， $\lambda = \frac{Q}{a}$ ， $r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) = 0.16 \text{ V}$$

因此 O 点的电势为：

7-29 如图 7-2-26 所示， $AB = 2l$ ， OCD 是以 B 为中心、 l 为半径的半圆， A 点处有正电荷 $+q$ ， B 点处有负电荷 $-q$ ，求：

- (1) 把单位正电荷从 O 点沿 OCD 移到 D 点，电场力对它作了多少功？
- (2) 把单位正电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远处，电场力对它作了多少功？

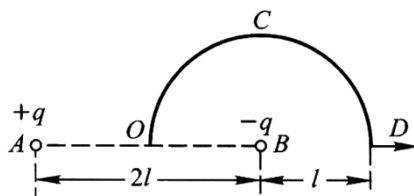


图 7-2-26

解：(1) O 点的电势 $V_o = 0$ ，D 点的电势 $V_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3l} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} = -\frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$

则电场力做的功：
$$A_{OD} = q_0(V_o - V_D) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 l}$$

(2) 设无穷远处电势为 0，即 $V_\infty = 0$ ，则电场力做的功：

$$A_{D\infty} = q(V_D - V_\infty) = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 l}$$

7-30 设电势沿 Ox 轴的变化曲线如图 7-2-27 所示.试对所示各区间（忽略区间端点的情况）确定电场强度的 x 分量，并作出 E_x 对 x 的关系图线.

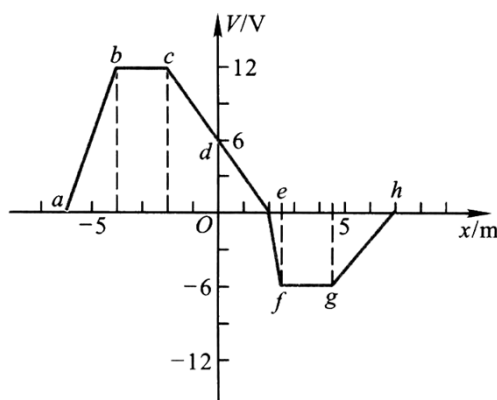


图 7-2-27

解：由电场强度与电势的关系 $E_x = -\frac{dU}{dx}$ 可知：ab 段 $E_x = -6V/m$, bc 段 $E_x = 0$,
ce 段 $E_x = 3V/m$, ef 段
 $E_x = 12V/m$, fg 段 $E_x = 0$, gh 段 $E_x = -2.4V/m$.

作出的 $E_x - x$ 关系曲线如 7-2-28 图所示.

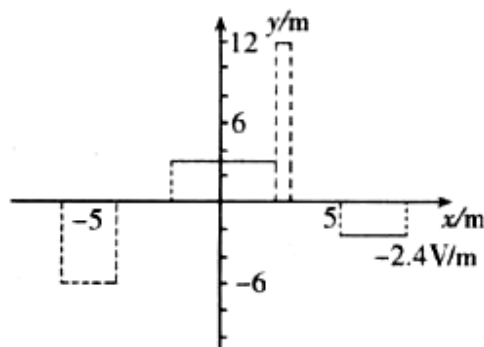


图 7-2-28

7-31 已知某空间区域的电势函数 $V = x^2 + 2xy$, 求: (1) 电场强度函数; (2) 坐标 (2, 2, 3) 处的电势及其与原点的电势差.

解: (1) 由电势与电场强度的关系可得场强: $E = -\frac{\partial V}{\partial x}i - \frac{\partial V}{\partial y}j = -2(x+y)i - 2xj$.

(2) 将 (2, 2, 3) 代入电势函数 $V = x^2 + 2xy$, 可得:

$$V_{2,2,3} = 2^2 + 2 \times 2 \times 2 = 12 \text{ V}, V_0 = 0$$

所以坐标点 (2, 2, 3) 的电势及其与原点的电势差为:

$$\Delta V = V_{2,2,3} - V_0 = 12 \text{ V}.$$

7-32 一半径 $R = 8 \text{ cm}$ 的圆盘, 其上均匀带有电荷面密度为 $\sigma = 2 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ 的电荷, 求:

(1) 轴线上任一点的电势 (用该点与盘心的距离 x 来表示);

(2) 从电场强度和电势的关系求该点的电场强度;

(3) 计算 $x = 6 \text{ cm}$ 处的电势和电场强度.

解: (1) 建立坐标系如图 7-2-29 所示, 设圆盘的盘心为圆心, 取半径为 r 、宽为 dr

的微圆环, 则此微圆环所带电荷量为: $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$.

微圆环在轴线上某点 x 处的电势为：

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}}$$

积分可得整个圆盘轴线上 x 处的电势为：

$$V = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x)$$

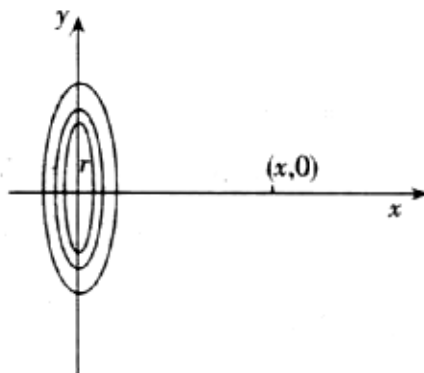


图 7-2-29

(2) 轴线上某点 x 处的电场强度为：

$$E = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \mathbf{i}$$

(3) 在 $x = 6\text{cm}$ 处： $V = 4.52 \times 10^4 \text{ V}$, $E = 4.52 \times 10^5 \text{ i V/m}$.

7-33 有一块很大的带电板及一小球，已知小球的质量为 $m = 1.0 \times 10^{-3}\text{g}$ ，带有电荷量 $q = 2.0 \times 10^{-8}\text{C}$. 小球悬挂在一丝线的下端，平衡时悬线与板面间的夹角为 30° ，如图 7-2-30 所示. 试计算带电板上的电荷面密度 σ .

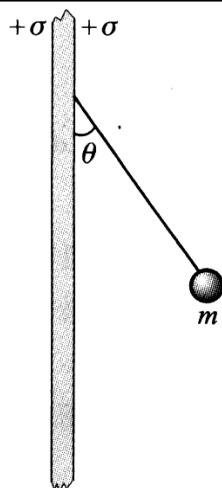


图 7-2-30

解：根据题意，建立坐标系如图 7-2-31 所示.

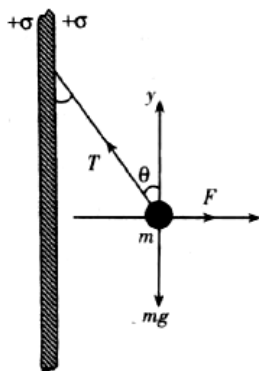


图 7-2-31

由小球受力平衡可得：

$$\begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = qE \end{cases}$$

解得： $E = mg \tan \theta / q$

又由高斯定理 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

可得电荷面密度：

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 mg \tan \theta / q \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times 1.0 \times 10^{-6} \times 10 \frac{\sqrt{3}}{3} / 2.0 \times 10^{-8} \\ &= 2.5 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

7-34 一质量为 m 、面积为 S 的均质薄金属盘，放置在一无限大导体平板上，平板水平放置.最初盘和平板都不带电，然后逐渐使它们带电.问电荷面密度增加到何值时，金属盘将离开平板？

解：由题意可知，将金属盘置于无限大导体平板上，并使它们带电时，盘和平板具有相同的电荷面密度 σ ，平板将对盘产生斥力当斥力. 当斥力随着 σ 的增加而增大到足以与盘的重力平衡时，盘将离开平板，这时平板在金属盘上产生的场强为：

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

盘上电量为 $q = \sigma S$ ，受到的斥力 $F = qE = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S$

金属盘离开平板时有 $F > mg$ 时，即 $\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} > mg$ ，得 $\sigma > \sqrt{\frac{2\epsilon_0 mg}{S}}$.

7-35 半径为 r_1 、 r_2 ($r_1 < r_2$) 的两个同心导体球壳互相绝缘，现把 $+q$ 的电荷量给予内球，求：

- (1) 外球的电荷量及电势；
- (2) 把外球接地后再重新绝缘，外球的电荷量及电势；
- (3) 然后把内球接地，内球的电荷量及外球的电势的改变.

解：(1) 外球内表面带电量为 $-q$ ，外表面带电量为 $+q$ ，外球电势 $U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.

(2) 外球接地后，外表面带电为零，内表面带电 $-q$ ，外球与地等势，电势为零.

(3) 当内球接地，则内球电势为零，设其上带电量为 q_1 ，有：

$$U = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0$$

$$q_1 = \frac{r_1}{r_2} q$$

可得内球带电量为：

$$U' = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{r_1 - r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} q$$

此时外球的电势：

则外球电势的改变：
$$\Delta U = U' - U_1 = \frac{r_1 - r_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} q$$

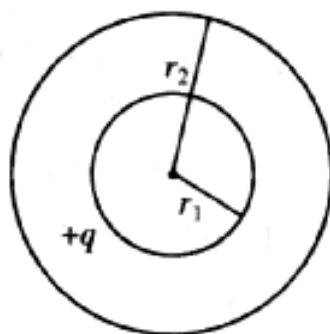


图 7-2-32

7-36 点电荷 $q = 4.0 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 $R_1 = 2.0 \text{ cm}$ 和 $R_2 = 3.0 \text{ cm}$ ，求：

- (1) 导体球壳的电势；
- (2) 离球心 $r = 1.0 \text{ cm}$ 处的电势；
- (3) 把点电荷移开球心 1.0 cm 后球心 O 点的电势及导体球壳的电势。

解：(1) 球壳上感应电荷 $-q$ 和 $+q$ 分别均匀分布于它的内外表面（图 7-2-32）。点电荷电场及内表面电荷电场在球壳上电势的代数和为零，故球壳电势为外表面电荷电场在球壳上的电势，即

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4.0 \times 10^{-10}}{3.0 \times 10^{-2}} \text{ V} = 120 \text{ V}$$

- (2) 离球心 $r = 1.0 \text{ cm}$ 处的电势

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times 4.0 \times 10^{-10} \left(\frac{1}{1.0 \times 10^{-2}} - \frac{1}{2.0 \times 10^{-2}} + \frac{1}{3.0 \times 10^{-2}} \right) \text{ V} \\ &= 300 \text{ V} \end{aligned}$$

(3) 把点电荷移开球心 1.0 cm, 点电荷仍然在导体球壳内部, 导体球壳外表面的电荷分布没有变化, 故球壳电势与情况 (1) 相同, 为 120 V.

球心点 O 处的电势由叠加原理得:

$$V_o = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 120 \text{ V} + 360 \text{ V} = 480 \text{ V}$$

7-37 有直径为 16 cm 及 10 cm 的非常薄的两个铜制球壳, 同心放置时, 内球的电势为 2 700 V, 外球带有电荷量为 $8.0 \times 10^{-9} \text{ C}$. 现把内球和外球接触, 两球的电势各变化多少?

解: 由题意可知, 内球半径为 $R_1 = 5 \text{ cm}$, 外球半径为 $R_2 = 8 \text{ cm}$. 设内球带电 q_1 , 外球

带电 q_2 . 在两球接触前, 内球电势为 $V_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$

解得:

$$\begin{aligned} q_1 &= R_1 \left(4\pi\epsilon_0 V_1 - \frac{q_2}{R_2} \right) \\ &= 0.050 \times \left(\frac{2700}{9 \times 10^9} - \frac{8.0 \times 10^{-9}}{0.080} \right) \text{ C} = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}$$

于是可算得外球电势为

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{(1.0 \times 10^{-8} + 8.0 \times 10^{-9}) \times 9 \times 10^9}{0.080} \text{ V} \\ &= 2.03 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

两球相接触后, 电荷都分布在外球壳上. 这时内外球壳电势相等, 都是

$$V' = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 2.03 \times 10^3 \text{ V}$$

对内球来说电势增量 $\Delta V = V' - V_1 = (2.03 \times 10^3 - 2700) \text{ V} = -6.7 \times 10^2 \text{ V}$

对于外球电势无变化.

7-38 半径为 $R_1 = 1.0 \text{ cm}$ 的导体球, 带有电荷 $q_1 = 1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$, 球外有一个内、外

半径分别为 $R_2 = 3.0 \text{ cm}$ 、 $R_3 = 4.0 \text{ cm}$ 的同心导体球壳，壳上带有电荷 $Q = 11 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，

试计算：

- (1) 两球的电势 V_1 和 V_2 ；
- (2) 用导线把球和壳连接在一起后 V_1 和 V_2 分别是多少？
- (3) 若外球接地， V_1 和 V_2 为多少？

解：

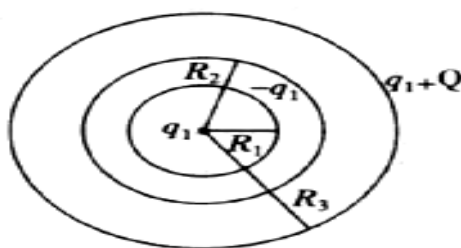


图 7-2-33

- (1) 由静电感应，球壳内外表面上带电分别为 $-q$ 和 $Q+q$ ，则

内球电势为：

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{-q_1}{R_2} + \frac{q_1 + Q}{R_3} \right)$$

$$= 9 \times 10^9 \times 10^{-10} \left(\frac{-1}{3 \times 10^{-2}} + \frac{1}{1 \times 10^{-2}} + \frac{12}{4 \times 10^{-2}} \right) = 330 \text{ V}$$

外球电势为：

$$U_2 = \frac{Q + q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 270 \text{ V}$$

- (2) 两球相连后成为等势体，由 (1) 知相连后外球壳电势不变，内外球壳电势均为 270 V。

- (3) 当外球接地时球壳电势变为零，外表面带电量为零，此时内球电势为：

$$U'_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$= 9 \times 10^9 \times 10^{-10} \left(\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.03} \right) = 60 \text{ V}$$

7-39 三平行金属板 A、B、C 面积均为 200 cm^2 ，A、B 间相距 4.0 mm ，A、C 间相距 2.0 mm ，B 和 C 两板都接地.如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ ，求：

(1) B、C 板上的感应电荷； (2) A 板的电势.

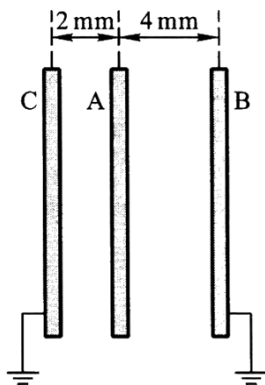


图 7-2-34

解：设金属板 B、C 上所带电荷分别为 q_B 、 q_C ，由于 q_B 、 q_C 是与 A 板上电荷静电感应产生的，因此有

$-(q_B + q_C) = q_A$. 又因为 B、C 均接地，所以 B、C 为等势体.

设 A、B 组成电容器电容为 C_1 ，A、C 组成电容器电容为 C_2 ，则根据电容定义式，得

$$\frac{q_B}{C_1} = \frac{q_C}{C_2}.$$

因为电容 C 与极板距离 d 成反比，则 $q_B \cdot |AB| = q_C \cdot |AC|$.

解得： $q_B = -1.0 \times 10^{-7} \text{ C}$, $q_C = -2.0 \times 10^{-7} \text{ C}$

$$U_A = \frac{|q_B|}{C_{AB}} = \frac{|q_B|}{\epsilon_0 \frac{S}{d}} = \frac{|q_B| d}{\epsilon_0 S} = 2260 \text{ V}$$

A 板的电势：

7-40 在盖革计数器中有一直径为 2 cm 的金属圆筒，在圆筒轴线上有一条直径为 0.31 mm 的导线，如果在导线与圆筒之间加上 850 V 的电压，试分别求：

(1) 导线外表面附近处的电场强度大小；

(2) 圆筒内表面附近处的电场强度大小.

解: 根据题意, 设导线半径 $R_1 = 0.155 \text{ mm}$, 金属圆筒半径 $R_2 = 1 \text{ cm}$, 在

$R_1 < r < R_2$ 处取同轴高为 l 的圆柱形高斯面, 由高斯定理可得:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

导线与圆筒之间电压为:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

则电场强度与电压关系为:

(1) 导线外表面附近处电场强度为:

$$E_1 = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{850}{0.155 \times 10^{-3} \times \ln \frac{10}{0.155}} \text{ V/m} = 1.32 \times 10^6 \text{ V/m}$$

(2) 圆筒内表面附近处的电场强度为:

$$E_2 = \frac{U}{R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{850}{1 \times 10^{-2} \times \ln \frac{10}{0.155}} \text{ V/m} = 2.04 \times 10^4 \text{ V/m}$$

7-41 如图 7-2-35 所示, $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 5.0 \mu\text{F}$, $C_3 = 5.0 \mu\text{F}$.

(1) 求 A、B 间的电容;

(2) 在 A、B 间加上 100 V 的电压, 求 C_2 上的电荷量和电压;

(3) 如果 C_1 被击穿, 问 C_3 上的电荷量和电压各是多少?

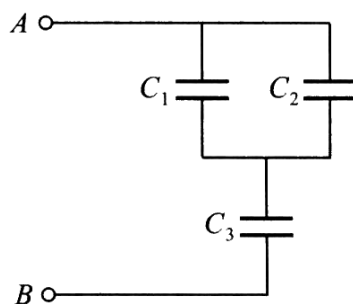


图 7-2-35

解：(1) 由图 7-2-35 可知，根据题意，A、B 间的等效电容 C_{AB} 为 C_1 与 C_2 并联后再与 C_3 串联。

根据电容串、并联规律，有： $\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3}$ ，解得 $C_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 3.75 \mu\text{F}$ 。

(2) 在 A、B 间加一电压，电容器将带电，设 C_1 、 C_2 和 C_3 极板上的电荷分别为 q_1 、 q_2 和 q_3 ，电势差分别为 U_1 、 U_2 和 U_3 。由静电平衡条件可得到：

$$q_1 + q_2 = q_3 = q \text{ 和 } U_1 = U_2, \quad U_1 + U_3 = U_{AB}$$

根据电容器定义式 $C = \frac{Q}{U}$ ，得： $C_1 U_1 + C_2 U_2 = C_3 U_3$

则 $(C_1 + C_2) U_2 = C_3 (U_{AB} - U_2)$

解得： $U_2 = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U_{AB} = 25 \text{ V}$ ， $q_2 = C_2 U_2 = 1.25 \times 10^{-4} \text{ C}$ 。

(3) 如果 C_1 被击穿，则 $U_{AB} = U_3 = 100 \text{ V}$ ， $q_3 = C_3 U_3 = C_3 U_{AB} = 5.0 \times 10^{-4} \text{ C}$ 。

7-42 平板电容器极板间的距离为 d ，保持极板上的电荷不变，把相对电容率为 ϵ_r 、

厚度为 δ ($\delta < d$) 的玻璃板插入极板间，求无玻璃板时和插入玻璃板后极板间电势差的比。

解：设电容器极板上电荷面密度为 σ ，未插入玻璃板时，极板间的电势差为 U_0 ：

$$U_0 = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

插入玻璃板后，板间的电势差为 U ：

$$U = E(d - \delta) + E'\delta = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - \delta) + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \delta$$

两式相除可得： $\frac{U_0}{U} = \frac{\epsilon_r d}{\epsilon_r d - (\epsilon_r - 1)\delta}$ 。

7-43 两个电容相同的平行板电容器，串联后接入电动势为 \mathcal{E} 的电源，若不切断电源，

在第二个电容器中充以相对电容率 $\epsilon_r = 7$ 的电介质, 那么第一个电容器两极板间的电势差将改变多少倍?

解: 设两电容器的电容量为 C_0 , 串联后接入电源时, 极板带电, 电荷量为 q , 并且极板间的电势差相同, 有:

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_0} + \frac{q}{C_0} = 2 \frac{q}{C_0}.$$

在第二个电容器中充入相对电容率 $\epsilon_r = 7$ 的电介质后, 其电容量将变为 $\epsilon_r C_0$, 由于与电源保持接触, 串联电容各极板的电荷量将变为 q' , 有:

$$\mathcal{E} = U'_1 + U'_2 = \frac{q'}{C_0} + \frac{q'}{\epsilon_r C_0}.$$

解得: $q' = \frac{7}{4}q, \quad \frac{U'_1}{U_1} = \frac{q'}{q} = \frac{7}{4} = 1.75$

即第一个电容器两极板间的电势差将变为原来的 1.75 倍.

7-44 两个相同的电容器并联后, 用电压为 U 的电源充电后切断电源, 然后在一个电容器中充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质. 求此时极板间的电势差.

解: 设两相同电容器的电容量为 C_0 , 并联后的总电容量为: $C = 2C_0$.

充电后, 两电容极板间的总电荷量为: $Q = CU = 2C_0 U$

充入电介质后, 电容器的电容量为 $\epsilon_r C_0$, 并联的总电容量为:

$$C' = \epsilon_r C_0 + C_0 = (\epsilon_r + 1) C_0$$

$$U' = \frac{Q}{C'} = \frac{2C_0 U}{\epsilon_r C_0 + C_0} = \frac{2U}{\epsilon_r + 1}.$$

此时极板间的电势差:

7-45 两个同心球壳组成的球形电容器, 半径为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$), 通过其中心的平面把它一分为二, 其中一半是空气, 另一半充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质. 试证明其电容等于用相对电容率为 $(1 + \epsilon_r) / 2$ 的电介质充满全部电容器的电容.

证明：设充满空气的球形电容为 C_0 ，半球形空气电容器的电容则为 $C_0/2$ ，充满电介质 ϵ_r 的电容器的电容为 C' ，则半球形电介质电容器的电容为 $C'/2$ 。

因电容器的形状是一样的，故： $C' = \epsilon_r C_0$ 和 $C'/2 = \epsilon_r C_0/2$ 。

两半球形电容器并联后的电容量为：

$$C = C_0/2 + C'/2 = (1 + \epsilon_r) C_0/2 = \epsilon_r' C_0$$

式中， $\epsilon_r' = (1 + \epsilon_r)/2$ ，题目得证。

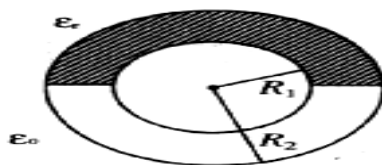


图 7-2-36

7-46 两块相互平行的大金属板，板面积均为 S ，间距为 d ，用电源使两板分别维持在电势 V 和零电势。现将第三块相同面积而厚度可略的金属板插在两板的正中间，已知该板上原带有电荷量 q ，求该板的电势。

解：插入带电金属板 C 后，由静电平衡，各板电荷的分布如图 7-2-37 所示。

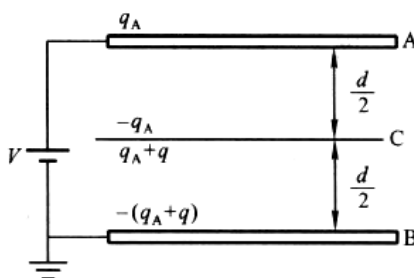


图 7-2-37

设 $E_1 = E_{AC}$, $E_2 = E_{CB}$ ，有 $E_1 = \frac{q_A}{\epsilon_0 S}$, $E_2 = \frac{q_A + q}{\epsilon_0 S}$ 。

由题意可知，A 板相对地的电势 V 保持不变，有：

$$V = U_{AC} + U_{CB} = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{q_A d}{2\epsilon_0 S} + \frac{(q_A + q) d}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_A d}{\epsilon_0 S} + \frac{q d}{2\epsilon_0 S}$$

C 板相对地的电势求得：

$$V_C = U_{CB} = E_2 \frac{d}{2} = \frac{(q_A + q)d}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_A d}{2\epsilon_0 S} + \frac{qd}{2\epsilon_0 S}$$

因为 $\frac{q_A d}{\epsilon_0 S} = V - \frac{qd}{2\epsilon_0 S}$ ，所以 $V_C = \frac{1}{2}V - \frac{qd}{4\epsilon_0 S} + \frac{qd}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \left(V + \frac{q}{2\epsilon_0 S}d \right)$.

7-47 一平板电容器（极板面积为 S ，间距为 d ）中充满两种电介质（如图 7-2-37），设两种电介质在极板间的面积比 $S_1/S_2 = 3$ ，试计算其电容.如两电介质尺寸相同，电容又如何？

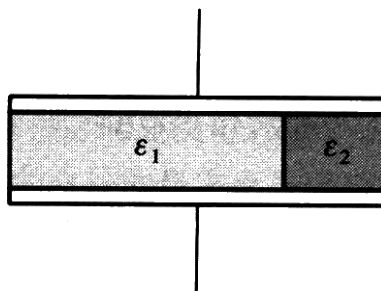


图 7-2-37

解：根据题意，此电容器相当于两平板电容器的并联，由平板电容器电容 $C = \epsilon \frac{S}{d}$ 可

知，并联的两电容器总电容可表示为：

$$C = \epsilon_1 \frac{S_1}{d} + \epsilon_2 \frac{S_2}{d}$$

当 $S_1 + S_2 = S$ ， $S_1/S_2 = 3$ 时，电容器总电容 $C = \epsilon_1 \frac{3S}{4d} + \epsilon_2 \frac{S}{4d} = \frac{(3\epsilon_1 + \epsilon_2)S}{4d}$ ；

当 $S_1 + S_2 = S$ ， $S_1 = S_2$ 时，电容器总电容 $C = \epsilon_1 \frac{S}{2d} + \epsilon_2 \frac{S}{2d} = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \frac{S}{2d}$.

7-48 平板电容器（极板面积为 S ，间距为 d ）中间有两层厚度各为 d_1 和 d_2 ($d = d_1 + d_2$)、电容率各为 ϵ_1 和 ϵ_2 的电介质，试计算其电容.如 $d_1 = d_2$ ，则电容又如

何?

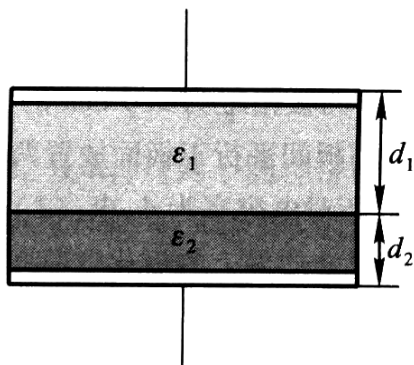


图 7-2-39

解: 根据题意, 此电容器相当于两平板电容器串联, 由平板电容器电容 $C = \epsilon \frac{S}{d}$ 可知,

串联后两电容器总电容为:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \frac{S^2}{d_1 d_2}}{S \left(\frac{\epsilon_1}{d_1} + \frac{\epsilon_2}{d_2} \right)} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

当 $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$ 时, 串联电容器总电容 $C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$.

7-49 一平行板电容器的电容为 100 pF, 极板的面积为 100 cm², 极板间充满相对

电容率为 5.4 的云母电介质, 当极板上电势差为 50 V 时, 求:

- (1) 云母中的电场强度 E;
- (2) 电容器极板上的自由电荷;
- (3) 云母电介质面上的极化面电荷.

解: (1) 板极上自由电荷: $Q = CU = 50 \times 100 \times 10^{-12} = 5 \times 10^{-9} \text{ C}$

设极板间电位移为 D, 则由高斯定理, 有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$

由题意知 $D \cdot S = Q$, 解得: $D = \frac{Q}{S} = \frac{5 \times 10^{-9}}{100 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$

又 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$, 故 $E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{5 \times 10^{-7}}{5.4 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.05 \times 10^4 \text{ V/m}$

(2) 由 (1) 的求解过程得: $Q = DS = 5 \times 10^{-7} \times 100 \times 10^{-4} \text{C}$
 $= 5 \times 10^{-9} \text{C}$

(3) 云母片上的极化电荷密度: $\sigma' = P \cdot n = P$

$$\text{又 } P = \chi_e \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = 4.1 \times 10^{-7} \text{C/m}^2$$

所以云母电介质面上的极化面电荷为:

$$Q_1 = \sigma_1 S = PS = 4.1 \times 10^{-7} \times 100 \times 10^{-4} = 4.1 \times 10^{-9} \text{C}$$

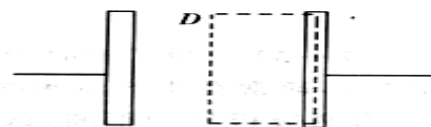


图 7-2-40

7-50 有两块平行板, 面积各为 100 cm^2 , 板上带有 $8.9 \times 10^{-7} \text{C}$ 的等值异号电荷, 两板间充以电介质. 已知电介质内部电场强度为 $1.4 \times 10^6 \text{ V/m}$, 求:

- (1) 电介质的相对电容率;
- (2) 电介质面上的极化面电荷.

解: (1) 根据题意, 设平行板间距为 d , 极板带电时, 极板间的场强可近似地看作

为均匀电场. 由高斯定理可得电介质内场强的大小为: $E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$

$$\text{解得: } \epsilon_r = \frac{Q_0}{ES\epsilon_0} = \frac{8.9 \times 10^{-7}}{1.4 \times 10^6 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}} = 7.18$$

(2) 在电介质的两个平行于极板的表面上, 分布有电量相等符号相反的极化面电荷, 电荷量为:

$$|Q'| = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q_0 = 7.66 \times 10^{-7} \text{C}$$

7-51 一个 $10\mu\text{F}$ 的电容器充电到 100 V 后, 通过 $R = 10\text{ k}\Omega$ 的电阻放电. 试求:

- (1) 刚开始时的电流强度;
- (2) 电荷量减少一半所需的时间;
- (3) 能量减少一半所需的时间.

解: (1) 由电容器放电回路的性质可知, 电容器放电过程电流满足 $i = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.

开始时刻 ($t = 0$) 电流为: $i_0 = \frac{Q}{RC} = \frac{U}{R} = \frac{100}{10 \times 10^3} \text{ A} = 0.01 \text{ A}$.

(2) 电容器放电过程电量满足 $q = Qe^{-\frac{t}{RC}}$.

当 $q = \frac{Q}{2}$ 时, 所需的时间为:

$$t = RC \ln 2 = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \times \ln 2 \text{ s} = 0.07 \text{ s}.$$

(3) 电容器充电后的能量可表示为 $W = \frac{Q^2}{2C}$.

当能量减少一半时, 有: $W' = \frac{1}{2}W = \frac{1}{2C}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right)^2$

故当 $q = \frac{Q}{\sqrt{2}}$ 时, 所需的时间为:

$$t = RC \ln \sqrt{2} = 10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \times \ln \sqrt{2} \text{ s} = 0.035 \text{ s}.$$

7-52 为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度 (待测材料可视作相对电容率为 ϵ_r 的电介质), 通常在生产流水线上设置如图 7-2-41 所示的传感装置, 其中 A、B 为平板电容器的导体极板, d_0 为两极板间的距离, 试说明其检测原理, 并推出直接测量电容 C 与间接测量厚度 d 之间的函数关系, 如果要检测钢板等金属材料的厚度, 结果又将如何?

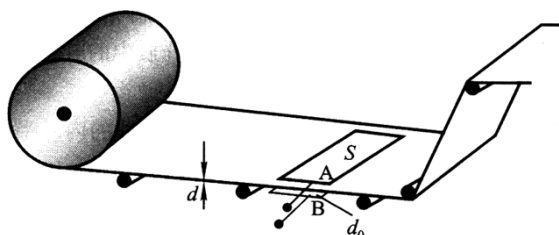


图 7-2-41

解：设厚度为 $d_0 - d$ 的空气电容器电容为 C_1 ，则 $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 - d}$ ，厚度为 d 的介质电
容器电容为 C_2 ，则

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

由题意可知，总电容为两电容串联： $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d + \epsilon_r (d_0 - d)}$

解得： $d = \frac{\epsilon_r d_0}{\epsilon_r - 1} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1)C}$

7-53 一块相对电容率 $\epsilon_r = 5$ 的扁平电介质，垂直放置于 $D = 1 \text{ C/m}^2$ 的均匀电场中，
已知电介质的体积为 0.1 m^3 ，并且是均匀极化，求：

- (1) 电介质的电极化强度； (2) 电介质总的电偶极矩。

解：(1) 电介质里的电极化强度为

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D \\ &= \frac{5 - 1}{5} \times 1 \text{ C/m}^2 = 0.8 \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

- (2) 电介质总的电偶极矩为：

$$\sum p = P \Delta V = 0.8 \times 0.1 \text{ C} \cdot \text{m} = 0.08 \text{ C} \cdot \text{m}$$

7-54 一扁平的电介质板 ($\epsilon_r = 4$) 垂直放在一均匀电场里，如果电介质表面上的极化
电荷面密度为 $\sigma' = 0.5 \text{ C/m}^2$ ，求：

- (1) 电介质里的电极化强度和电位移；
(2) 电介质板外的电位移；
(3) 电介质板里和板外的电场强度。

解：(1) 电介质里电极化强度方向与电介质表面垂直，因此电极化强度

$$P = P_n = \sigma' = 0.5 \text{ C/m}^2, \text{ 上题已证 } P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D$$

因此电介质里的电位移：

$$D = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} P = \frac{4}{4 - 1} \times 0.5 \text{ C/m}^2 = 0.67 \text{ C/m}^2$$

(2) 电场是均匀的，在电介质板外也有： $D = 0.67 \text{ C/m}^2$.

(3) 电介质板内、外的合场强 E 的大小分别为：

$$E_{\text{内}} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 1.88 \times 10^{10} \text{ N/C} \quad E_{\text{外}} = \frac{D}{\epsilon_0} = 7.53 \times 10^{10} \text{ N/C}$$

7-55 在一平行板电容器的两板上带有等值异号的电荷，两板间的距离为 5.0 mm，

充以 $\epsilon_r = 3$ 的电介质，电介质中的电场强度为 $1.0 \times 10^6 \text{ V/m}$ ，求：

- (1) 电介质中的电位移矢量；
- (2) 平板上的自由电荷面密度；
- (3) 电介质中的极化强度；
- (4) 电介质面上的极化电荷面密度；
- (5) 平行板上自由电荷及电介质面上极化电荷所产生的那一部分电场强度.

解：(1) 由电位移矢量的定义式，可得电介质内的电位移矢量：

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = 8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 1.0 \times 10^6 = 2.7 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

(2) 设平板上自由电荷面密度为 σ ，由高斯定理 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ ，可得 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{S} = q$ ，解得 $D = \frac{q}{S} = \sigma$.

因此，平板上自由电荷面密度： $\sigma = 2.7 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$.

(3) 电介质中极化强度： $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$.

(4) 由于电介质中极化电荷面密度 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ ，平行板电容器极化强度 \mathbf{P} 方向与平板

法线方向平行，因此电介质面上极化电荷面密度： $\sigma' = P = 1.8 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ 。

(5) 设自由电荷产生场强为 E_0 ，极化电荷产生场强为 E' ，则由场强与电荷密度的关系得：

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 3.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = 2.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = 1.0 \times 10^6 \text{ V/m}$$

7-56 两板相距为 5.0 mm 的平板电容器，板上带有等值异号的电荷，电荷面密度为 $20 \mu\text{C/m}^2$ ，两板间平行于板面放置两片电介质，一片为 2.0 mm 厚，相对电容率为 3，另一片为 3.0 mm 厚，相对电容率为 4，求：

- (1) 各电介质中的电位移矢量；
- (2) 各电介质中的电场强度；
- (3) 各电介质面上的极化电荷面密度。

解：(1) 由高斯定理，可得极板上自由电荷面密度的大小为：

$$D_1 = D_2 = \sigma_0 = 20 \mu\text{C/m}^2$$

(2) 在两种电介质中，电场强度与电位移矢量的关系式为：

$$D_1 = \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2$$

解得：

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{20 \times 10^{-6}}{3.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 7.53 \times 10^5 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{20 \times 10^{-6}}{4.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 5.65 \times 10^5 \text{ V/m}$$

(3) 由电介质中极化电荷面密度 $\sigma' = P \cdot n$ ，可得第一层电介质的上表面极化电荷面密度：

$$\sigma'_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_n = - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \sigma_0 = -13.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

第二层电介质下表面的极化电荷面密度:

$$\sigma'_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_n = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \sigma_0 = 15 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

两种电介质交界面上净极化电荷面密度:

$$\sigma' = -\sigma'_1 + (-\sigma'_2) = -1.7 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

7-57 在半径为 R 的金属球之外包有一层均匀电介质层 (如图 7-2-42), 外半径为

R' . 设电介质的相对电容率为 ϵ_r , 金属球的电荷量为 Q , 求:

(1) 电介质层内、外的电场强度分布; (2) 电介质层内、外的电势分布; (3) 金属球的电势.

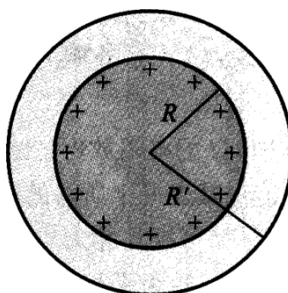


图 7-2-42

解: (1) 应用有电介质时的高斯定理可得电介质层内、外的电位移的分布为

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (r > R)$$

因此电介质层内的场强分布为

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (R < r < R')$$

电介质层外的场强分布为

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (r > R')$$

(2) 介质层内某点 P 的电势为

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \int_P E \cdot dl = \int_r^{R'} E_1 dr + \int_{R'}^{\infty} E_2 dr \\
 &= \int_r^{R'} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{R'}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) \quad (R \leq r \leq R')
 \end{aligned}$$

电介质外的电势分布为

$$V_2 = \int_r^{\infty} E_2 dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R')$$

(3) 令 V_1 的表达式中的 $r=R$, 即得金属球的电势为

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right)$$

7-58 半径为 R_0 的导体球带有电荷 Q , 球外有一层均匀电介质同心球壳, 其内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 相对电容率为 ϵ_r (如图 7-2-43), 求:

- (1) 电介质内外的电场强度 E 和电位移 D ;
- (2) 电介质内的极化强度 P 和表面上的极化电荷面密度 σ' .

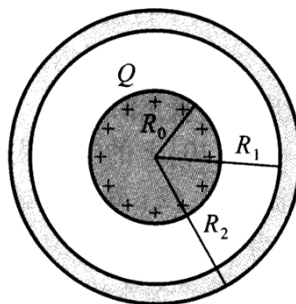


图 7-2-43

解: (1) 根据有电介质时的高斯定理, 电介质内外的电位移都是

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} r \quad (r > R_0)$$

在电介质内的电场强度

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在电介质外的电场强度

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (R_0 < r < R_1, r > R_2)$$

(2) 由电介质内极化强度

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_1 = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r r^2} r$$

电介质球壳内表面上的极化电荷面密度为 $\sigma'_1 = P_{n1} = -P_1 = -\frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r R_1^2}$

外表面上的极化电荷面密度为 $\sigma'_2 = P_{n2} = P_2 = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r R_2^2}$

7-59 圆柱形电容器是由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成, 圆筒内半径为 R_2 , 长为 l , 其间充满了相对电容率为 ϵ_r 的电介质. 设导线沿轴线单位长度上的电荷为 λ_0 , 圆筒上单位长度的电荷为 $-\lambda_0$, 忽略边缘效应. 求:

(1) 电介质中的电场强度 E 、电位移 D 和极化强度 P ;

(2) 电介质表面的极化电荷面密度 σ' .

解: (1) 在电介质内部作同轴的高为 L 的闭合圆柱面 S , 根据有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D S = Q, \text{ 可得: } \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 2\pi r L = \lambda_0 L.$$

则电位移: $D = \frac{\lambda_0}{2\pi r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$

又 $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$, 可得 $E = \frac{\lambda_0}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$

式中, e_0 是高斯面法向单位矢量.

由电介质内极化强度 $P = D - \epsilon_0 E$, 可得: $P = D - \epsilon_0 E = \frac{(\epsilon_r - 1) \lambda_0}{2\pi \epsilon_r r} e_0 \quad (R_1 < r < R_2)$.

(2) 由电介质表面的极化电荷面密度 $\sigma' = P \cdot e_n$, 可得

电介质内表面 ($r = R_1$) : $\sigma'_1 = P_n = -P_{r=R_1} = -\frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r R_1} \lambda_0$

电介质外表面 ($r = R_2$) : $\sigma'_2 = P_n = P_{r=R_2} = \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r R_2} \lambda_0$

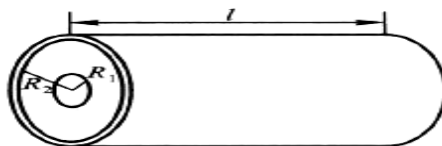


图 7-2-44

7-60 半径为 2.0 cm 的导体球, 外套同心的导体球壳, 壳的内外半径分别为 4.0 cm 和 5.0 cm, 球与壳之间是空气, 壳外也是空气, 当内球的电荷量为 $3.0 \times 10^{-8} \text{C}$ 时, (1) 这个系统储藏了多少电能? (2) 如果用导线把壳与球连在一起, 结果如何?

解:

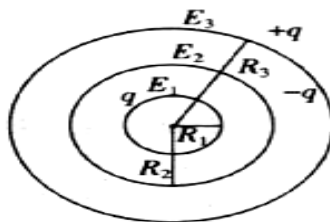


图 7-2-45

(1) 根据题意做图 7.45.由带电导体球的电场强度分布规律可得, 系统场强分布为:

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

由电能公式 $W = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dV$, 可得系统储层的电能为:

$$\begin{aligned} W &= \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 dV + 0 + \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E_3^2 dV \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_2}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$= \frac{(3.0 \times 10^{-8})^2}{8\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} \left(\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.04} + \frac{1}{0.05} \right) = 1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(2) 若用导线将壳与球相联, 则电荷全部分布在球壳外表面, 此时系统储层的电能:

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{(3.0 \times 10^{-8})^2}{8\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.05} = 8.1 \times 10^{-5} \text{ J}$$

7-61 平行板空气电容器每极板的面积 $S = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2$, 极板间的距离 $d_1 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$, 在平行板之间有一个厚度为 $d_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, 与地绝缘的平行铜板, 当电容器充电到电势差为 300 V 后与电源断开, 再把铜板从电容器中抽出.问:

(1) 电容器内电场强度是否变化? (2) 抽出铜板外界需作多少功?

解: (1) 由题意可知, 铜板从电容器中抽出, 电容器内的电场强度为:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

由于电量 q 不变, 面积 S 也不变, 所以电场强度 E 不变, 电场强度为:

$$E = \frac{U_1}{d_1 - d_2} = \frac{300}{3 \times 10^{-3} - 10^{-3}} \text{ V/m} = 1.5 \times 10^5 \text{ V/m}$$

此时, 两极板间的电势差

$$U_2 = Ed_1 = \frac{U_1}{d_1 - d_2} d_1 = 450 \text{ V}$$

(2) 抽出铜板外界所作的功为

$$A = \Delta W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 8.854 \times 1.5 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$= 2.99 \times 10^{-6} \text{ J}$$

7-62 两个相同的空气电容器, 其电容都是 $0.90 \times 10^{-9} \text{ F}$, 都充电到电压为 900 V 后

断开电源，把其中之一浸入煤油 ($\epsilon_r = 2$) 中，然后把两个电容器并联，求：

(1) 浸入煤油过程中损失的静电场能； (2) 并联过程中损失的静电场能。

解：(1) 设空气电容器的电容量为 C ，极板上有电量 Q 时的静电能为：

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

每个电容的带电量： $Q = CU = 0.90 \times 10^{-9} \times 900 \text{ C} = 8.1 \times 10^{-7} \text{ C}$

充入煤油后，电容量为 $C' = \epsilon_r C$ ，极板上有电量 Q 时的静电能为：

$$W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r C}$$

则充入煤油后，静电能的增量为：

$$\Delta W = W' - W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C} \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) = -1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$$

因此，充入煤油损失的静电场能为 $1.82 \times 10^{-4} \text{ J}$ 。

(2) 根据题意，并联前两电容器的静电能为：

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2C} \left(\frac{1}{\epsilon_r} + 1 \right) = \frac{1}{2} CU^2 \left(\frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_r} \right)$$

并联后的电容量为： $C'' = C + C' = (1 + \epsilon_r) C$

极板上的总电荷量为 $Q'' = 2Q$ ，静电能为：

$$W'' = \frac{1}{2} \frac{Q''^2}{C''} = \frac{2Q^2}{C(\epsilon_r + 1)} = 2CU^2 \left(\frac{1}{\epsilon_r + 1} \right)$$

并联前、后静电能的增量为：

$$\Delta W = W'' - W = -\frac{1}{2} CU^2 \frac{(\epsilon_r - 1)^2}{\epsilon_r(\epsilon_r + 1)} = -\frac{1}{12} CU^2 = -6.08 \times 10^{-5} \text{ J}$$

因此，并联过程中，损失的静电能为 $6.08 \times 10^{-5} \text{ J}$ 。

7-63 一平行板电容器有两层电介质， $\epsilon_{r1} = 4, \epsilon_{r2} = 2$ ，厚度为 $d_1 = 2.0$

mm， $d_2 = 3.0 \text{ mm}$ ，极板面积为 $S = 40 \text{ cm}^2$ ，两极板间电压为 200 V 。计算：

(1) 每层电介质中的电场能量密度；

(2) 每层电介质中的总电能;

解: (1) 根据题意, 将题给平板电容器内两层介质中的电场, 都视为均匀电场, 如

图 7-2-46 所示.

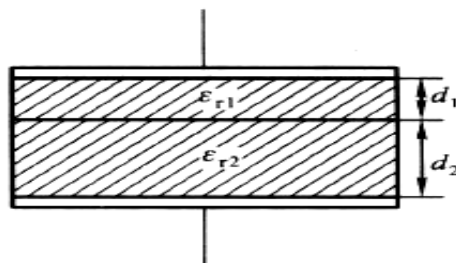


图 7-2-46

两层电介质中的场强关系为: $\epsilon_{r1}E_1 = \epsilon_{r2}E_2$

又因 $U = E_1d_1 + E_2d_2$, 于是可解得:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\epsilon_{r2}U}{\epsilon_{r2}d_1 + \epsilon_{r1}d_2} \\ &= \frac{2 \times 200}{2 \times 2.0 \times 10^{-3} + 4 \times 3.0 \times 10^{-3}} \text{ V/m} \\ &= 2.5 \times 10^4 \text{ V/m} \\ E_2 &= \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}E_1 = \frac{4}{2} \times 2.5 \times 10^4 \text{ V/m} = 5.0 \times 10^4 \text{ V/m} \end{aligned}$$

电容器内的电位移

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0\epsilon_{r1}E_1 = 8.85 \times 10^{-12} \times 4 \times 2.5 \times 10^4 \text{ C/m}^2 \\ &= 8.85 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

两层电介质中的电场能量密度分别为:

$$\begin{aligned} w_{e1} &= \frac{1}{2}DE_1 = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-7} \times 2.5 \times 10^4 \text{ J/m}^3 \\ &= 1.11 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3 \\ w_{e2} &= \frac{1}{2}DE_2 = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-7} \times 5.0 \times 10^4 \text{ J/m}^3 \\ &= 2.22 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

(2) 两层电介质中的总电能分别为

$$\begin{aligned} W_1 &= w_{e1}Sd_1 = 1.11 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-4} \times 2.0 \times 10^{-3} \text{ J} \\ &= 8.88 \times 10^{-8} \text{ J} \\ W_2 &= w_{e2}Sd_2 = 2.22 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-4} \times 3.0 \times 10^{-3} \text{ J} \\ &= 2.66 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

7-64 电容 $C_1 = 4 \mu\text{F}$ 的电容器在 800 V 的电势差下充电，然后切断电源，并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为 $C_2 = 6 \mu\text{F}$ 的电容器两极板相连，求：

- (1) 每个电容器极板所带电荷量； (2) 连接前后的静电场能。

解：(1) 电容器的总电荷量为

$$q = C_1 U_1 = 4 \times 10^{-6} \times 800 \text{ C} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ C}$$

两个电容器极板所带电荷量分别为

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{C_1}{C_1 + C_2} q = \frac{4}{4 + 6} \times 3.2 \times 10^{-3} \text{ C} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ C} \\ q_2 &= q - q_1 = (3.2 \times 10^{-3} - 1.28 \times 10^{-3}) \text{ C} \\ &= 1.92 \times 10^{-3} \text{ C} \end{aligned}$$

- (2) 连接前的静电场能即是连接前第一个电容器的能量，即

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times 800^2 \text{ J} = 1.28 \text{ J}$$

连接后的静电场能即并联后电容器的能量，即

$$W_2 = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{(3.2 \times 10^{-3})^2}{2 \times (4 \times 10^{-6} + 6 \times 10^{-6})} \text{ J} = 0.512 \text{ J}$$

7-65 两个同轴的圆柱，长度都是 l ，半径分别为 R_1 及 R_2 ，这两个圆柱带有等值异号电荷 Q ，两圆柱之间充满电容率为 ϵ 的电介质。

- (1) 在半径为 r ($R_1 < r < R_2$) 厚度为 dr 的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少？
(2) 这柱壳中的总电场能是多少？
(3) 电介质中的总电场能是多少？
(4) 由电介质中的总电场能求圆柱形电容器的电容。

解：

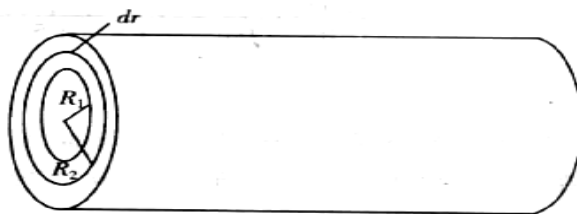


图 7.47

(1) 圆柱面上沿轴长方向的电荷线密度 $\lambda = \frac{Q}{l}$

在两圆柱之间的场强分布为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad (R_1 < r < R_2)$

因此在半径为 r 、厚度为 dr 的圆柱壳中的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon r^2} = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon r^2 l^2}$$

(2) 这柱壳中的总电场能为

$$dW = w_e dV = w_e 2\pi r l dr = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon r^2 l^2} 2\pi r l dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} dr$$

(3) 电介质中的总电场能是

$$W = \int dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(4) 圆柱形电容器的能量为 $W = \frac{Q^2}{2C}$

因此

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{2C} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ C &= 2\pi\epsilon l / \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

*7-66 试编写一计算机程序，画出教材例题 7-1 的三电荷系统 Ox 轴线上的电势分布，

并与教材图 7-3 比较，指出电势最大的位置对应于图 7-3 曲线的哪一点，为什么？

解：根据题意所编写的计算机程序如下：


```
clear all
close all
x = 0.1 : 0.001 : 5;
U = 2./sqrt(0.25 + (x - 0.5 * sqrt(3)).^2) - 1./x;
plot(x,U)
grid off
xlabel('x/m');

ylabel('U/V');
```

运算结果如图 7-2-48 所示.

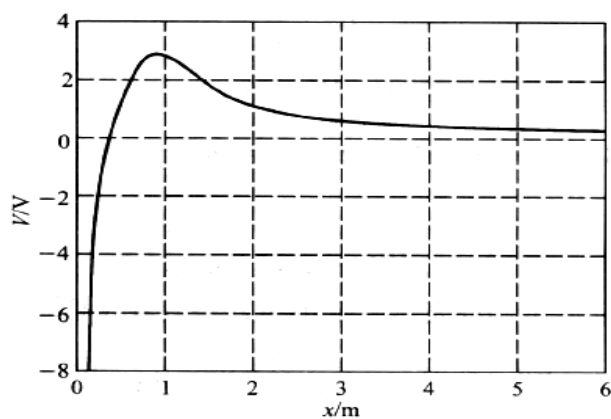


图 7-2-48

在教材图 7-3 中, $F(x) - x$ 曲线在 $x=1$ 处, $F=0$. 与之相对应在图 7.48 中, $x=1$ 时,

$u = u_{\max}$, 即在 $x=1$ 处电势梯度 (电场强度) 为零.