KVANTEVANDRINGER

THOMAS WILSKOW THORBJØRNSEN

8. juli 2021

INNHOLD

FIGURER

TABELLER

ABSTRAKT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1 INTRODUKSJON

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2 KVANTEBEREGNINGER

2.1 Intro til kvantemekanikk

Notasjon

La $\mathcal{H}$ være et Hilbertrom, vi definerer $\partial D(\mathcal{H}) = \{v : \mathcal{H} \mid ||v|| = 1\}$ til å være enhetskulen i $\mathcal{H}$ og $U(\mathcal{H})$ til å være mengden av unitære operatorer på $\mathcal{H}$.

Postulatene i kvante

Kvantemekanikk er en beskrivelse av fysiske systemer på små størrelse. Reglene for hvordan disse systemene oppfører seg er formulert utifra 6 postulater. Postulatene går som følger

1. På hvert øyeblikk er tilstanden til det fysiske systemet beskrevet av en ket $|\psi\rangle$ i rommet av tilstander.
2. Enhver observabel fysisk egenskap av systemet er beskrevet av en operator som virker på ketten som beskriver systemet.
3. De eneste mulige resultatene av en måling av en observabel $\mathcal{A}$ er egenverdiene til den assosierte operatoren A.
4. Når en måling er gjort på en tilstand $|\psi\rangle$ er sannsynligheten for å få en egenverdi a_n gitt ved kvadratet av indreproduktet til $|\psi\rangle$ sammen med egentilstanden $\langle a_n|$: $|\langle a_n|\psi\rangle|^2$.
5. Umiddelbart etter en måling av en observabel $\mathcal{A}$ har gitt egenverdien a_n, er systemet i tilstanden til den normaliserte egentilstanden $|a_n\rangle$.
6. Tidsutviklingen til et system bevarer normen til en ket $|\psi\rangle$.

Disse postulatene tolkes som at en ket $|\psi\rangle$ er representert av en vektor i et (kompleks separabelt) Hilbertrom $\psi : \mathcal{H}$. Identitetsoperatoren er en observabel som ikke endrer systemet etter måling, men det følger at $||\psi||^2 = 1$ fra postulat 4. Det 6-te postulatet etablerer at de eneste transformasjonene som har lov til å virke på et system er nøyaktig de som er unitære. Postulat 1,4 og 6 forteller oss dermed at en tilstand er et element ψ i $U(\mathcal{H})$-mengden $\partial D(\mathcal{H})$. Et element $\psi : \partial D(\mathcal{H})$ kan skrives som en sum av basisvektorer $\psi = \Sigma_{i=1}^{n} p_i \cdot e_i$, det sies da at ψ er i en superposisjon av alle basisvektorene som har koeffisienter $p_i \neq 0$. Videre fra postulat 2,3 og 5 følger det at enhver operator assosiert med en observabel må være Hermitisk.

Få med den reversible naturen til unitære operatorer?

Er det noe mer jeg trenger å nevne om kvantemekanikk? Kanskje utdype hvorfor det er viktig at vi har en handling fra den unitære gruppen, eller hvordan målinger virker?

2.2 Qubits og kvantekretser

Klassiske bits har to tilstander: 0 eller 1. Kvantebits, eller qubits utnytter naturen til kvantemekanikken for å lage superposisjoner av tilstandene 0 og 1. For å lage et fysisk system med 2 tilstander velges en qubit til å være et element i $\partial D^2 (= \partial D(\mathbb{C}^2))$, som kan ta på seg formen $q = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$. Her er $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en basis for rommet $\mathbb{C}^2$. For å konstruere strenger av qubits ser man på tensorproduktet mellom de underliggende Hilbertrommene. F.eks. har man fire forskjellige klassiske bitstrenger 00, 01, 10 og 11, kvantevarianten av disse vil da være $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$ og $|1\rangle \otimes |1\rangle$. Siden qubits kan være i en superposisjon av klassiske tilstander, tillater vi at de er summer av elementære tensorer, og derfor kan vi finne tilstandene som elementer i $\partial D^4 = \partial D(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$. En mer kortfattet notasjon dropper tensortegnet og skriver heller $|00\rangle$ for $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

Skrive mer om tensorproduktet?

Et eksempel på hvordan disse qubitene oppfører seg i naturen er via EPR (Einstein, Podolsky og Rosen) paret. Vi sier at et system av qubits er sammenfiltret hvis det ikke kan skrives som en elementær tensor, altså på formen. Et EPR par er et 2-qubit system på formen $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Man kan se at dette systemet er sammenfiltret, ettersom de to elementære tensorene ikke har noen felles faktorer. Hvis vi derimot måler den første qubiten i systemet vil vi ende opp med at det er en $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 50\%$ sjanse for å måle 0 og 50% sjanse for å måle 1. Hvis vi derimot har målt 0 på den første qubiten, så vil systemet kollapse til $\psi = |00\rangle$, og vi vet dermed at den andre qubiten må være i tilstand $|0\rangle$.

Legg til mer formalitet og kom med flere eksempler etterpå?

2.3 Kvantealgoritmer og orakler

Hva er en kvantealgoritme?

En kvantealgoritme er en komposisjon av unitære operatorer og målinger som opererer på en tilstand ψ i $\partial D(\mathcal{H})$. Når man diskuterer Kvantealgoritmer er det normalt å diskutere de i sammenheng med en kvantekrets, logiske kvanteporter, register og arbeidsplass. Registeret er de qubitsene som man har som input i programmet, og arbeidsplassen er ekstra qubits som man kan bruke for å gjøre operasjoner på registeret med. En logisk kvanteport er en port som utfører en unitær operasjon eller måling på en eller flere qubits, disse komponerer man i et flytdiagram for å danne en kvantekrets.

Bilde av kvantekrets her

De simpleste logiske kvanteportene som vi har er de som operer på 1 qubit, dette er de unitære matrisene over $\mathbb{C}^2$. Av de mest kjente så har vi matrisene:

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ R_\theta = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} \text{ og } H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

I, X, Y og Z matrisene kalles for Pauli matriser, R_θ kalles for en phaseskift matrise og H kalles for Hadamard matrisen. To andre viktige porter er CNOT og SWAP, som operer på 2-qubits. CNOT, også kalt for "controlled not"operer på 2-qubits ved å anvende X matrisen på den andre qubiten i registeret hvis den første qubiten har verdi 1. SWAP bytter om på rekkefølgen til qubitene.

$$CNOT = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ SWAP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Tegn kretser av hvordan disse virker

Skriv noe om merkeorakel og faseorakel. Hvorfor trenger vi de, og hva brukes de til? Hva er problemet når det kommer til orakler?

Universalitet av kvante kretser?

3 KVANTEVANDRINGER

3.1 Grover's algoritme og metoden av amplitude amplifikasjon

Grover's algoritme løser et veldig spesifikt problem, men teknikken som den bruker for å løse problemet er veldig interessant å studere. Problemet går som følger: Tenk at man er gitt en bistring med $N = 2^n$ bits, hvor t bits er satt til 1. Finn minst 1 bit som har verdi 1. Dette problemet kan åpenbart løses i worst case lineær tid med konstant minne ved å randomisert iterere gjennom alle bitene og sjekke om de er 1 eller 0. Om den er 1 kan man terminere programmet, og returnere den posisjon som ga 1. Grover's algoritme har en kvadratisk hastighetsøkning ved å manipulere superposisjoner av qbits.

For å beskrive problemet med et fysisk kvante system trenger vi å oversette problemet først. La $(b_k)_N$ være bitstringen med lengde N, definer så orakelet $\mathcal{O}_{(b_k)_N} : \mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^2$ til å merke målbiten hvis registerbiten var en løsning. Dette vil si at hvis $\mathcal{O}_{(b_k)_N}(|r\rangle \otimes |0\rangle) = |r\rangle \otimes |1\rangle$ så følger det at $b_r = 1$. For å fullføre Grover's algoritme trenger vi en ny matrise til, og det er en matrise som flipper fortegnet til registeret hvis den ikke er tilstanden $|0\rangle^{\otimes n}$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

En Grover iterate $\mathcal{G}$ er definert som $\mathcal{G} = H^{\otimes n} R H^{\otimes n} \mathcal{O}_{(b_k)_N}$. Algoritmen Gorver's algoritme er definert som $G = M\mathcal{G}^k \circ H^{\otimes n}$, hvor M er en projektiv måling, og k er en konstant. Man skal da kunne fastslå med en høy sannsynlighet at målingen gir deg posisjonen til en bit i $(b_k)_N$ som er 1. For å finne denne k-en som man bruker for å kjøre algoritmen trenger vi se på metoden av amplitude amplifikasjon.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

3.2 Kvantevandringer basert på kvantemyntkast

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

3.3 Kvantesøk

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

4 Q# OG IMPLEMENTASJON AV KVANTEVANDRINGER

4.1 Q# intro

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

4.2 Praktisk kvantevandringer og utfordringer

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl. Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

REFERANSER

[1] Ronald de Wolf. Quantum computing: Lecture notes, 2021.

[2] Renato Portugal. *Quantum Walks and Search Algorithms*. Springer, 2 edition, 2019.

[3] Bradben, dime10, geduardo, cjgronlund, rmshaffer, and gillenhaalb. Q# user guide. https://docs.microsoft.com/en-us/azure/quantum/user-guide/0, 2021.

[4] Salvador Elías Venegas-Andraca. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, 11(5):1015–1106, Jul 2012.

[5] R. L. Jaffe. Supplementary notes on dirac notation, quantum states and etc. http://web.mit.edu/8.05/handouts/jaffe1.pdf, 2007.