

KVANTEVANDRINGER

THOMAS WILSKOW THORBJØRNSSEN

29. juli 2021

INNHold

1	Introduksjon	3
2	Kvanteberegninger	3
2.1	Intro til kvantemekanikk	3
2.2	Qubits og kvantekretser	5
2.3	Kvantealgoritmer og orakler	5
3	Kvantevandring	6
3.1	Grover's algoritme og metoden av amplitude amplifikasjon	6
3.2	Kvantevandring basert på kvantemyntkast	8
3.3	Kvantesøk	10
4	Q# og Implementasjon av kvantevandring	10
4.1	Q# intro	10
4.2	Praktisk kvantevandring og utfordringer	10

FIGURER

TABELLER

ABSTRAKT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget

risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1 INTRODUKSJON

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2 KVANTEBEREGNINGER

2.1 Intro til kvantemekanikk

Notasjon

La \mathcal{H} være et Hilbertrom, vi definerer $\partial D(\mathcal{H}) = \{v : \mathcal{H} \mid \|v\| = 1\}$ til å være randen av enhetskulen i \mathcal{H} og $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ til å være mengden av unitære operatorer på \mathcal{H} . I fysikk bruker man en ket $|_ \rangle$ for å utheve at et element i keten er en vektor, på samme måte som pil notasjon for vektorer. En bra $\langle _ |$ betegner det elementet i dualrommet som gjør at $\langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2$. Dette er veldefinert fra Riesz-Frechet representasjons teorem.

Postulatene i kvante

Kvantemekanikk er en beskrivelse av fysiske systemer på små størrelser. Reglene for hvordan disse systemene oppfører seg er formulert utifra 6 postulater. [1] og [2] definerer postulatene som følger

1. På hvert øyeblikk er tilstanden til det fysiske systemet beskrevet av en ket $|\psi\rangle$ i rommet av tilstander.
2. Enhver observabel fysisk egenskap av systemet er beskrevet av en operator som virker på ketten som beskriver systemet.
3. De eneste mulige resultatene av en måling av en observabel \mathcal{A} er egenverdiene til den assosierte operatoren A .
4. Når en måling er gjort på en tilstand $|\psi\rangle$ er sannsynligheten for å få en egenverdi a_n gitt ved kvadratet av indreproduktet til $|\psi\rangle$ sammen med egenprojeksjonen P_{a_n} .

$$p_{a_n} = \langle \psi | P_{a_n} | \psi \rangle$$

5. Umiddelbart etter en måling av en observabel \mathcal{A} har gitt egenverdien a_n , er systemet i tilstanden til den normaliserte egenprojeksjonen $P_{a_n}|\psi\rangle$.

6. Tidsutviklingen til et system bevarer normen til en ket $|\psi\rangle$.

For å forklare postulatene sammen med et eksempel antar vi at det finnes en partikkel som har to observable tilstander, vi kaller de spin opp og spin ned, som er beskrevet av vektorer i et rom av tilstander. Her tolkes rommet av tilstander som et (kompleks separabelt) Hilbertrom. En tilstand eller ket $|\psi\rangle$ er dermed en vektor i \mathcal{H} . Siden \mathcal{H} er et Hilbertrom har den også en basis $\{|\beta_\lambda\rangle \mid \lambda : \Lambda\}$, hvor Λ er en indeksmengde. Ettersom vi har to observable tilstander holder det å anta at $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ og at $|\beta_i\rangle = e_i$ for $i = 1, 2$. Man kan skrive $|\psi\rangle$ som en lineærkombinasjon av basisen, dette er også kalt for en superposisjon av tilstandene $\{|\beta_\lambda\rangle \mid \lambda : \Lambda\}$ (eller $\{e_1, e_2\}$ for spin eksemplet).

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum \psi_i |\beta_i\rangle \\ (|\psi\rangle &= \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2) \end{aligned}$$

Gitt at vi har en observable A , altså en fysisk egenskap ved systemet som kan måles, så vet vi at dette er gitt ved en lineærtransformasjon A som virker på Hilbertrommet \mathcal{H} . De fysiske målingene til systemet skal være gitt ved egenverdiene av denne lineærtransformasjonen, noe som krever den til å være en endomorfi, aka. $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. I spin eksemplet kan man måle spin opp og spin ned med en observable hvor f.eks. spin opp har egenverdien 1 og spin ned har egenverdien -1. En vanlig antagelse er at alle de observable egenskapene skal være reelle verdier, derfor velger man i tillegg å anta at A må være en Hermitisk operator (selvadjungert).

Når man gjør en måling av en observabel er det tilfeldig hva man måler. Sannsynlighetene for å måle de forskjellige egenverdiene er gitt ved formelen over. Etter måling vil systemet kollapse ned i egenrommet til vektoren $\frac{1}{\sqrt{p_{a_n}}} P_{a_n} |\psi\rangle$. Hvis den algebraiske multiplisiteten til egenverdien a_n er 1 så tilsvarende dette vektoren $\frac{|\alpha_n\rangle}{\| |\alpha_n\rangle \|}$. En konsekvens av dette er at observabelen som har tilstanden $|\psi\rangle$ som en egenvektor med egenverdi lik 1 vil ikke endre tilstanden til systemet etter måling. Hvis man derimot måler denne observabelen, vil man normalisere tilstanden. I spin eksemplet vil dette si at hvis man måler verdien 1, så vil tilstanden kollapse til den tilsvarende egenvektoren, normalisert. En konsekvens av dette er at en tilstand er bedre definert som ekvivalensklasser langs linjer i Hilbertrommet. En tilstand er dermed et element i randen av enhetskulen til Hilbertrommet.

$$|\psi\rangle : \partial D(\mathcal{H}) = \{v : \mathcal{H} \mid \|v\| = 1\}$$

Det siste postulatet forteller oss hvordan et system utvikler seg. Formelen $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ brukes ofte for å beskrive hvordan dette ser ut. Siden vi krever at $U(t, t_0)$ skal bevare normen til $|\psi(t_0)\rangle$, dvs. at det finnes en virkning $U(t, t_0) : \partial D(\mathcal{H}) \rightarrow \partial D(\mathcal{H})$, følger det at denne operatoren er unitær. Mengden $U(\mathcal{H})$ vil betegne de unitære operatorene som operer på det Hilbertrommet. For vårt formål kan man tenke på et kvantesystem i $U(\mathcal{H})$ -mengden $\partial D(\mathcal{H})$.

Som beskrevet av [2] kan man lage kompositter av kvantesystemer med det algebraiske tensorproduktet. Gitt to forskjellige kvantesystemer beskrevet av to forskjellige Hilbertrom \mathcal{H}_1 og \mathcal{H}_2 så kan man lage rommet av sammensatte tilstander som $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Vi får da en klasse med observable og en klasse med operatorene som handler på systemene gjennom tensorproduktet. Man kan vise at tensorproduktet av to unitære og hermitiske matriser er igjen unitære og hermitiske, det er derfor veldefinert å betrakte tensoren for kompositt systemer. Sammenfiltringsfenomenet foregår når man konstruerer slike kompositt systemer. Hvis vi antar at vi har to partikler

med spin egenskapen ϕ og ψ og komposittsystemet $|\phi\psi\rangle = \sigma_0 e_0 \otimes e_0 + \sigma_1 e_1 \otimes e_1$, så vil en måling av den ene partikkelen ende opp med å måle den andre partikkelen. Dersom man måler egenverdien til e_0 for ϕ så vil systemet kollapse til $\frac{1}{\sigma_0} P_1 \otimes I(|\phi\psi\rangle) = e_0 \otimes e_0$. Dette medfører at alle målinger av ψ vil gi egenverdien 1.

2.2 Qubits og kvantekretser

Klassiske bits har to tilstander: 0 eller 1. Kvantebits, eller qubits er et fysisk system som har en observabel som måler to diskrete tilstander. Disse tilstandene bruker vi for å representere 0 og 1. Ettersom at operatoren som måler 0 og 1 er hermitisk, så finnes det en ortonormal basis for Hilbertrommet som diagonaliserer denne operatoren. Elementene i denne basisen vil bli betegnet som $|0\rangle$ og $|1\rangle$. En qubit q er dermed et element i $\partial D(\mathbb{C}^2)$ på formen $q = q_0|0\rangle + q_1|1\rangle$.

En streng av bits er sammensettingen av flere bits. På samme måte konstruerer vi en streng av qubits til å være sammensettingen av flere qubits. Denne sammensettingen er gitt av tensorproduktet mellom de algebraiske qubitsene. F.eks. er en 2-qubit streng et element i $\partial D(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ på formen under.

$$q = q_{00}|0\rangle \otimes |0\rangle + q_{01}|0\rangle \otimes |1\rangle + q_{10}|1\rangle \otimes |0\rangle + q_{11}|1\rangle \otimes |1\rangle$$

For kortfatthetens skyld skriver vi $|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Notasjonen $|_ \rangle$ vil få en ekstra presisjon i denne rapporten. La $n\text{Bit}$ være mengden av strenger med n -bits, vi definerer $|_ \rangle : \bigcup_{n=0}^{\infty} n\text{Bits} \rightarrow \mathbb{T}(\mathbb{C}^2)$ til å være en funksjon fra alle strenger og inn i tensoralgebraen til \mathbb{C}^2 . Den er definert på $|0\rangle$ og $|1\rangle$ som over, også utvides den lineært og fritt over tensoralgebraen.

2.3 Kvantevalgoritmer og orakler

En klassisk algoritme kan sees på å være en metode som løser et problem basert på et input av bits. Ofte representerer disse bitsa andre datastrukturer som tall, grafer eller flytnettverk. En kvantealgoritme kan dermed sees på å være en metode som løser et problem basert på et input av qubits. I mange tilfeller vil dette inputtet være operasjoner på et kvantesystem. Selve algoritmen er en komposisjon av unitære operatorer og målinger som opererer på en tilstand ψ i $\partial D(\mathcal{H})$.

Kvantekretser kan brukes til å representere kvantealgoritmer. Disse kretsene består av registre, arbeidsplass, logiske kvanteporter og målinger. Registeret er de qubitsene som man har som input i programmet og arbeidsplassen er ekstra qubits som man kan bruke for å gjøre operasjoner på registeret med. En logisk kvanteport er en port som utfører en unitær operasjon på en eller flere qubits. En måling måler en egenverdi til kvantesystemet og kollapse gir tilstanden som en bit. Disse elementene komponerer man i et flytdiagram for å danne en kvantekrets. Her er et eksempel på en slik krets

Bilde av kvantekrets her

De simpleste logiske kvanteportene som vi har er de som operer på 1 qubit, dette er de unitære matrisene over \mathbb{C}^2 . Av de mest kjente så har vi matrisene:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \text{ og } H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I , X , Y og Z matrisene kalles for Pauli matriser, R_θ kalles for en phaseskift matrise og H kalles for Hadamard matrisen. To andre viktige porter er CNOT og SWAP, som operer på 2-qubits. CNOT, også kalt for "controlled not" operer på 2-qubits ved å anvende X matrisen på den andre qubiten i registeret hvis den første qubiten har verdi 1. SWAP bytter om på rekkefølgen til qubitene.

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tegn kretser av hvordan disse virker

Universalitet av kvante kretser?

Skriv noe om merkeorakel og faseorakel. Hvorfor trenger vi de, og hva brukes de til? Hva er problemet når det kommer til orakler?

3 KVANTEVANDRINGER

3.1 Grover's algoritme og metoden av amplitude amplifikasjon

Grover's algoritme løser et veldig spesifikt problem, men teknikken som den bruker for å løse problemet er veldig interessant å studere. Problemet går som følger: Tenk at man er gitt en bistring med $N = 2^n$ bits, hvor t bits er satt til 1. Finn minst 1 bit som har verdi 1. Dette problemet kan åpenbart løses i "worstcase" lineær tid med konstant minne ved å randomisert iterere gjennom alle bitene og sjekke om de er 1 eller 0. Om den er 1 kan man terminere programmet, og returnere den posisjon som ga 1. Grover's algoritme har en kvadratisk hastighetsøkning ved å manipulere superposisjoner av qubits.

For å beskrive problemet med et fysisk kvantesystem trenger vi å oversette problemet først. La $(b_k)_N$ være bitstringen med lengde N , definer så orakelet $\mathcal{O}_{(b_k)_N} : \mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2^n} \otimes \mathbb{C}^2$ til å merke målbiten hvis registerbiten var en løsning. Dette vil si at hvis $\mathcal{O}_{(b_k)_N}(|r\rangle \otimes |0\rangle) = |r\rangle \otimes |1\rangle$ så følger det at $b_r = 1$. For å fullføre Grover's algoritme trenger man matrisen R som flipper fortegnet til registeret hvis den ikke er tilstanden $|0\rangle^{\otimes n}$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

En Grover iterate \mathcal{G} er definert som

$$\mathcal{G} = H^{\otimes n} R H^{\otimes n} \mathcal{O}_{(b_k)_N, \pm}.$$

Grover's algoritme er definert som $G = M\mathcal{G}^k \circ H^{\otimes n}$, hvor M er en projektiv måling, og k er en konstant. Man skal da kunne fastslå med en høy sannsynlighet at målingen gir deg posisjonen til en bit i $(b_k)_N$ som er 1. For å finne denne k -en som man bruker for å kjøre algoritmen trenger vi å se på metoden av amplitude amplifikasjon.

Definer tre tilstander hvor t er antall 1-ere i $(b_r)_N$

$$\begin{aligned} u &= H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} \\ G &= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{|r\rangle |b_r=1} |r\rangle \\ B &= \frac{1}{\sqrt{N-t}} \sum_{|r\rangle |b_r=0} |r\rangle \end{aligned}$$

Man kan se at G (Good) og B (Bad) vektorene er ortogonale, ettersom det er en sum av ortogonale vektorer. I det 2 dimensjonale underrommet av \mathbb{C}^{2^n} utspent av G og B , finner man vektoren u .

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|r\rangle} |r\rangle = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N}} G + \frac{\sqrt{N-t}}{\sqrt{N}} B \\ &= \sin \circ \arcsin\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N}}\right) G + \cos \circ \arcsin\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N}}\right) B \\ &= \sin(\theta) G + \cos(\theta) B \end{aligned}$$

Her er $\theta = \arcsin(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{N}})$. Metoden av amplitude amplifikasjon manipulerer tilstanden til u i underrommet utspent av G og B , hvor målet er å maksimere $\sin(\theta)$ ved å bruke unitære operasjoner. I tilfellet av Grover's algoritme gjør man enkle manipulasjoner av u i dette underrommet. La $\alpha : \mathbb{R}$ være en vinkel og $T = \sin(\alpha)G + \cos(\alpha)B$ være en tilstand. For å se hva orakelet gjør med T kan vi se på hva den gjør med G og B .

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(b_k)_N, \pm}(B) &= B \\ \mathcal{O}_{(b_k)_N, \pm}(G) &= -G \\ \implies \mathcal{O}_{(b_k)_N, \pm}(T) &= -\sin(\alpha)G + \cos(\alpha)B = \sin(-\alpha)G + \cos(-\alpha)B \end{aligned}$$

Operatoren R har en annen beskrivelse som en refleksjon om en enhetsvektor.

$$R = 2|0\rangle^{\otimes n}\langle 0|^{\otimes n} - I$$

Det følger at den andre komponenten i en Grover's iterate er en refleksjon om tilstanden u .

$$\begin{aligned} H^{\otimes n} R H^{\otimes n} &= H^{\otimes n} (2|0\rangle^{\otimes n}\langle 0|^{\otimes n} - I) H^{\otimes n} \\ &= 2H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}\langle 0|^{\otimes n} H^{\otimes n} - H^{\otimes n} H^{\otimes n} \\ &= 2uu^* - I \end{aligned}$$

Dette gjør at vi kan observere hva tilstanden til T er etter å anvende denne operatoren, og det blir åpenbart hva k Grover's iterates gjør.

$$\begin{aligned} H^{\otimes n} R H^{\otimes n}(T) &= \sin(-\alpha + 2\theta)G + \cos(-\alpha + 2\theta)B \\ \implies \mathcal{G}^k(T) &= \sin(\alpha + 2k\theta)G + \cos(\alpha + 2k\theta)B \end{aligned}$$

Hvis man initialiserer $\alpha = \theta$ vil k Grover's iterate gi

$$G^k(T) = \sin((1 + 2k)\theta)G + \cos((1 + 2k)\theta)B.$$

En naiv k for når man skal stoppe Grover's algoritme er den tilstanden som er nærmest G først.

$$\begin{aligned} \sin((2k' + 1)\theta) &= 1 \\ \implies (2k' + 1)\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \implies k &\approx \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} = \lfloor \pi/4 \arcsin(\sqrt{\frac{t}{N}}) \rfloor. \end{aligned}$$

Legg til eksempler og figurer

3.2 Kvantevandringer basert på kvantemyntkast

Kvantevandringer prøver å ta ideen til Grover's algoritme for søk og å generalisere den til andre datatyper, som grafer. For å gjøre denne generaliseringen deler vi opp problemet inn i traversering og oppdagelse. Det er mange metoder for å traversere over grafer, og her er det noen viktige klasser med grafer som vi vil studere.

For å illustrere hvordan kvantevandring kan virke, starter vi med å se på en klassisk tilfeldig vandring. Se for deg at det er en vandrer som vandrer gjennom en skog med forgreninger. Når vandreren møter på en forgrening kaster de en mynt for å velge hvilken retning de går. En slik vandring vil være et eksempel på en rettet tilfeldig vandring over et binærtre. Denne ideen kan man gjøre om til en kvante vandringsalgoritme ved at man gjør om vandreren til en kvantepartikkel, med en kvantemynt som kan være i superposisjon av 2 forskjellige tilstander. Partikkelen vandrer gjennom skogen avhengig av tilstanden til mynten, akkurat som den klassiske vandreren. Dette tillater partikkelen til å flytte seg gjennom skogen som en superposisjon av forskjellige muligheter. Det vil først være når vi måler partikkelen sin posisjon at vi vil få vite hvor den er, og hvilke utfall mynten har gitt.

For å være mer presis kan man tilegne to Hilbertrom til en slik kvantevandringsalgoritme. \mathcal{H}_V representerer posisjonene til vandreren, og \mathcal{H}_C representerer utfallene av kvantemyntkastet. Et kvantesteg defineres som komposisjonen av to operatører $U = S(I \otimes C)$, en myntkast operator $C : \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_C$ som kaster mynten og en forflyttings operator (skift operator) $S : \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_C$ som leser av myntkastet og forflytter seg henholdsvis. En kvantevandring vil være en algoritme som MU^kT , hvor M er en måling, U er et kvantesteg og T er en operator som setter systemet i starttilstanden. Dette er det som vi kaller for en myntbasert kvantevandringsalgoritme og er den formen for vandring som er standardisert i litteraturen.

d-regulære grafer

Den første kvantevandringsmetoden som vi skal se på er vandring over d-regulære grafer, den kalles for *position-coin notation*. For at denne metoden skal virke krever vi tillegg at det maksimale kantkromatiske tallet er det samme som d . Hvis man i tillegg ikke tillater at grafen har noen løkker vil spektraldekomposisjonen til algoritmen bli simplere.

La $G = (V, E)$ være en d-regulær graf slik at det maksimale kantkromatiske tallet også er d . Siden kantene i grafen kan fargelegges med d forskjellige farger, så kan

vi separere grafen i d forskjellige undergrafer. I hver undergraf er en node koblet til nøyaktig en annen node. La $\mathcal{H}_V = \mathbb{C}^V$ være det frie Hilbertrommet over nodene og $\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^E$ være myntrommet. Vi definerer forflyttingsoperatoren S på følgende måte: La f være en farge og $v : V$ en node. Assosiert med denne noden og fargen finnes det en unik node $v' : V$, slik at det er en kant $(v, v') : E$ som har fargen f .

$$S(v \otimes f) = v' \otimes f$$

Denne operatoren kalles for *flip-flop operatoren*. En enkel egenskap ved denne operatoren som er enkel å bemerke er at $S^2 = I$, hvilket som gjør at den er hermitisk.

Myntoperatoren C kan velges litt mer vilkårlig, men det er noen mynter som er bedre enn andre. En ønskelig egenskap fra mynten er at den er uniformt fordelt. Det kan finnes tilfeller hvor det er interessant å se på mynter som er vektet slik at en farge er vektet mer enn andre. Tre veldig vanlige mynter er Hadamard mynten, Fourier mynten og Grovers mynt .

Forklar hva disse myntene er

Et kvantesteg langs denne grafen kan man nå definere som $U = S(I \otimes C)$. Vi bemerker oss at egenskapen som lar oss bruke $I \otimes C$ er at grafen er d -regulær. Hvis grafen ikke hadde hatt denne egenskapen, men heller at den maksimale graden var lik det maksimale kantkromatiske tallet kan man fremdeles bruke det samme prinsippet. Siden vi ikke lengre kan være sikre på at alle noder har d tilstøtende farger, så må man ha en mynt for hver node som tilordner ny farge langs den noden.

Vi illustrer denne metoden med et eksempel:

Lag eksempel her

Rette linjer, Gittere og Hyperkuber

Rettete grafer

En myntet metode for kvantevandring som virker på en generell klasse av grafer er den som kalles for *arc notation*. Vi beskriver hvordan man bruker arc notation på en rettet graf. Vi vil kreve av grafen at alle pilene har en pil som går i motsatt retning. Ofte så blir denne metoden beskrevet som at man vandrer over kantene, istedenfor at man vandrer over nodene.

La $G = (V, E)$ være en rettet graf som beskrevet over. Hvert element $e : E$ kan representeres på formen $(u, v) : V \times V$, her er u start noden og v er slutt noden. Med denne metoden kan vi ikke nødvendigvis ha en mynt, så vi må definere det totale rommet til å være $\mathcal{H} = \mathbb{C}^E \subseteq \mathbb{C}^V \otimes \mathbb{C}^V$. \mathcal{H} er det frie Hilbertrommet over kantene. For en kant $e : E$ er det assosiert 2 noder $u, v : V$ slik at $e = u \otimes v$. Vi velger da å definere $S(e) = S(u \otimes v) = v \otimes u = S(e^{-1})$, altså *flip-flop operatoren*.

For å definere myntene må vi først dele opp rommet \mathcal{H} . Observer at

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{v:V} \mathbb{C}\{v \otimes u \mid \forall u : V, (v, u) : E\}.$$

Vi trenger nå å definere en mynt på hvert av disse underrommene, og dermed direktesumme de sammen. Vi definerer mynten $C = \bigoplus_{v:V} C_v : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, hvor C_v er definert på hvert underrom. Med andre ord er C en blokkdiagonal matrise, hvor hver blokk tilsvarer en mynt.

Vi illustrer dette med et eksempel.

Staggered model

Den første umyntede metoden som vi skal se på er den forskyvde metoden.

Szegedy vandring

3.3 Kvantesøk

4 Q# OG IMPLEMENTASJON AV KVANTEVANDRINGER

4.1 Q# intro

4.2 Praktisk kvantevandringer og utfordringer

REFERANSER

- [1] R. L. Jaffe. Supplementary notes on dirac notation, quantum states and etc. <http://web.mit.edu/8.05/handouts/jaffe1.pdf>, 2007.
- [2] Renato Portugal. *Quantum Walks and Search Algorithms*. Springer, 2 edition, 2019.
- [3] Ronald de Wolf. Quantum computing: Lecture notes, 2021.
- [4] Bradben, dime10, geduardo, cjgronlund, rmshaffer, and gillenhaalb. Q# user guide. <https://docs.microsoft.com/en-us/azure/quantum/user-guide/0>, 2021.
- [5] Salvador Elías Venegas-Andraca. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, 11(5):1015–1106, Jul 2012.