

# 无反射投影特征边界条件及其在非对称日冕结构数值模拟中的应用

李敬群 魏奉思

(中国科学院空间科学和应用研究中心日球物理数值研究开放实验室, 北京 100080)

**摘要** 对文献中常用的无反射投影特征边界条件进行了改进, 消除了磁场分量为零处的奇异性而引起的数值振荡, 并使之编程时更易于实现. 然后, 将这种边界条件应用于非对称日冕结构数值模拟, 得到了稳定的日冕定态结构.

**关键词** 日冕 特征线 边界条件

在日冕结构的 MHD 数值模拟中, 内边界的处理是一个重要而复杂的问题. 胡友秋等人<sup>[1]</sup>把计算流体力学中无反射边界条件<sup>[2]</sup>引入了 MHD 数值模拟, 取得了比较好的效果<sup>[3,4]</sup>. 张剑虹等人<sup>[5]</sup>进一步发展了完整的无反射投影特征线边界条件, 并将其应用于轴对称日冕结构数值模拟. 实践表明, 这种完整的无反射投影特征边界条件具有良好的计算稳定性, 并有利于消除数值振荡. 但是, 文献中所见到的特征边界条件对于磁场的某一分量为零的奇异点处需要特别处理, 即在那些点处, 需单独求出特征值和特征向量, 并对它们作相应处理<sup>[5]</sup>. 这在很大程度上增加了数值模拟时的编程复杂程度. 这个问题在轴对称日冕结构数值模拟时并不突出, 因为在这种情况下, 这类因磁场分量为零而导致的奇异点只出现在极区和赤道等处, 因而可以采用对称性边界条件等予以消除. 但是, 观测资料表明, 日冕结构在大多数情况下是非轴对称的, 因此, 在内边界处广泛存在上述奇异点. 采用对奇异点单独处理的方法<sup>[5]</sup>, 不仅增加了编程难度, 而且, 由于实际计算时不容易选取一个判断奇异点的标准, 所以效果并不理想. 本文利用文献[6]求出的特征向量, 对完整的无反射投影特征边界条件进行了改进. 由于文献[6]对磁场分量为零时的情形进行了适当的数学处理, 所以求出的特征向量即使在上述奇异点处仍然保持线性独立, 在编程时无需对这些奇异点单独处理, 并且有效地消除了因奇异点的存在而导致的数值振荡, 这从随后的数值模拟结果中可以明显看出.

## 1 边界条件的改进

由于考察的是日冕附近的局部流动情况, 为了模拟非对称日冕结构, 不考虑太阳的自转和球形几何效应. 从而假定在这一区域内, 太阳风呈平面流动, 即在我们所考虑的子午面内每一点处, 各流场参数沿垂直于子午面的方向导数为零, 且垂直于这一平面的速度和磁场分量也为零. 此时, 有如下二维 MHD 方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + V_r \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} + \mathbf{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_q \frac{\partial \mathbf{r}}{r \partial q} + \mathbf{r} \frac{\partial V_q}{r \partial q} = -\frac{\mathbf{r}}{r} V_r, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_q \frac{\partial V_r}{r \partial q} + \frac{B_q}{m_0 r} \frac{\partial B_q}{\partial r} - \frac{B_q}{m_0 r} \frac{\partial B_r}{r \partial q} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} V_q^2 - \frac{1}{m_0 r r} B_q^2 - \frac{GM}{r^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_q}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_q}{\partial r} + V_q \frac{\partial V_q}{r \partial q} - \frac{B_r}{m_0 r} \frac{\partial B_q}{\partial r} + \frac{B_r}{m_0 r} \frac{\partial B_r}{r \partial q} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{r \partial q} = -\frac{1}{r} V_r V_q + \frac{1}{m_0 r r} B_r B_q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_q}{\partial t} + V_r \frac{\partial B_q}{\partial r} + V_q \frac{\partial B_q}{r \partial q} + B_q \frac{\partial V_r}{\partial r} - B_r \frac{\partial V_q}{\partial r} = -\frac{V_q B_r}{r}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} + V_q \frac{\partial p}{r \partial q} + a^2 \mathbf{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_q}{r \partial q} \right) = -g p \frac{V_r}{r}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + V_q \frac{\partial B_r}{r \partial q} - B_q \frac{\partial V_r}{r \partial q} + B_r \frac{\partial V_q}{r \partial q} = -\frac{V_r B_r}{r}, \quad (6)$$

$$a^2 = \frac{g p}{r},$$

$$p = 2k n T,$$

其中  $n$ ,  $\mathbf{r}$  和  $p$  分别表示数密度、密度和压力,  $V_r$  和  $V_q$  分别表示径向和沿纬度方向的速度,  $B_r$  和  $B_q$  分别表示径向和沿纬度方向磁场分量,  $a$  和  $T$  分别表示声速和温度,  $k$  和  $g$  分别表示 Boltzmann 常数和多方指数.

(1) ~ (5) 式可写成矩阵形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial r} = S, \quad (7)$$

其中  $U = (\mathbf{r}, V_r, V_q, B_q, p)^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} V_r & \mathbf{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_r & 0 & \frac{B_q}{m_0 \mathbf{r}} & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & V_r & -\frac{B_r}{m_0 \mathbf{r}} & 0 \\ 0 & B_q & -B_r & V_r & 0 \\ 0 & r a^2 & 0 & 0 & V_r \end{pmatrix}.$$

矩阵  $A$  的 5 个特征值分别为  $V_r$ ,  $V_r + c_f$ ,  $V_r - c_f$ ,  $V_r + c_s$ ,  $V_r - c_s$ , 其中  $c_f$  和  $c_s$  分别代表快和慢磁声波速度.

相应的右特征向量所成矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}_f \mathbf{r} & \mathbf{a}_f \mathbf{r} & \mathbf{a}_s \mathbf{r} & \mathbf{a}_s \mathbf{r} \\ 0 & \mathbf{a}_f c_f & -\mathbf{a}_f c_f & \mathbf{a}_s c_s & -\mathbf{a}_s c_s \\ 0 & -\mathbf{a}_s c_s \operatorname{sgn} b_r & \mathbf{a}_s c_s \operatorname{sgn} b_r & \mathbf{a}_f c_f \operatorname{sgn} b_r & -\mathbf{a}_f c_f \operatorname{sgn} b_r \\ 0 & \mathbf{a}_s \sqrt{m_0} r a & \mathbf{a}_s \sqrt{m_0} r a & -\mathbf{a}_f \sqrt{m_0} r a & -\mathbf{a}_f \sqrt{m_0} r a \\ 0 & \mathbf{a}_f r a^2 & \mathbf{a}_f r a^2 & \mathbf{a}_s r a^2 & \mathbf{a}_s r a^2 \end{pmatrix},$$

其中第  $k$  列对应第  $k$  个特征值.

相应的左特征向量为

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{\mathbf{a}_f c_f}{2a^2} & -\frac{\mathbf{a}_s c_s \operatorname{sgn} b_r}{2a^2} & \frac{\mathbf{a}_s a}{2a^2 \sqrt{m_0} \mathbf{r}} & \frac{\mathbf{a}_f}{2a^2 \mathbf{r}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{a}_f c_f}{2a^2} & \frac{\mathbf{a}_s c_s \operatorname{sgn} b_r}{2a^2} & \frac{\mathbf{a}_s a}{2a^2 \sqrt{m_0} \mathbf{r}} & \frac{\mathbf{a}_f}{2a^2 \mathbf{r}} \\ 0 & \frac{\mathbf{a}_s c_s}{2a^2} & \frac{\mathbf{a}_f c_f \operatorname{sgn} b_r}{2a^2} & -\frac{\mathbf{a}_f a}{2a^2 \sqrt{m_0} \mathbf{r}} & \frac{\mathbf{a}_s}{2a^2 \mathbf{r}} \\ 0 & -\frac{\mathbf{a}_s c_s}{2a^2} & -\frac{\mathbf{a}_f c_s \operatorname{sgn} b_r}{2a^2} & -\frac{\mathbf{a}_f a}{2a^2 \sqrt{m_0} \mathbf{r}} & \frac{\mathbf{a}_s}{2a^2 \mathbf{r}} \end{pmatrix},$$

其中第  $k$  行对应于第  $k$  个特征值. 在上面各式中,  $\mathbf{a}_f^2 = \frac{a^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}$ ,  $\mathbf{a}_s^2 = 1 - \mathbf{a}_f^2$ , 如果  $B_q \geq 0$ ,  $\mathbf{a}_f$

取“+”号, 否则取“-”号.  $\mathbf{a}_s$  总取“+”号.

上面两个矩阵  $R$  和  $L$  互为逆矩阵, 即使当  $B_r = 0$  或  $B_q = 0$  时,  $R$  和  $L$  的可逆性仍然成立, 故无需特殊处理.

现在, 内边界(即一个太阳半径处)条件可以叙述为

(i) 在方程组(7)两边分别左乘以矩阵  $L$ , 并移项得到

$$L \frac{\partial U}{\partial t} = S_1, \quad (8)$$

其中  $S_1 = -LA \frac{\partial U}{\partial r} + LS = -\dot{E} L \frac{\partial U}{\partial r} + LS$ , 而  $\dot{E}$  是由 5 个特征值构成的对角矩阵.

(ii) 对列矩阵  $S_1$  进行无反射处理. 即当第  $k$  个特征值大于零时, 令  $S_1$  第  $k$  行为零, 否则,  $S_1$  第  $k$  行不变. 把  $S_1$  经无反射处理之后得到的矩阵记为  $S_2$ , 这样, 方程组(8)变成

$$L \frac{\partial U}{\partial t} = S_2. \quad (9)$$

(iii) 在方程组(9)两边同时左乘以矩阵  $R$ , 得到

$$\frac{\partial U}{\partial t} = RS_2. \quad (10)$$

(iv) 将方程(6)移项得

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -V_r \frac{\partial B_r}{\partial r} - V_q \frac{\partial B_r}{r \partial q} + B_q \frac{\partial V_r}{r \partial q} - B_r \frac{\partial V_q}{r \partial q} - \frac{V_r B_r}{r}. \quad (11)$$

(v) 将方程组(10)和(11)联立, 对(10)和(11)式右侧利用时刻  $t_n$  的流场数值进行二阶空间差分, 然后对时间积分, 即可确定  $t_{n+1}$  时刻的流场内边界值.

对于外边界或侧边界(本文中不存在侧边界), 可进行类似处理.

从上面可以看出, 由于选取了适当的特征向量, 故不需要在编程时对磁场分量为零时的奇异情况单独处理. 另一方面, 同时利用了左右特征向量构成的互逆矩阵, 所以免去了求解线

性方程组的麻烦. 最后, 矩阵的应用更使得编程甚为简洁.

## 2 非对称日冕结构数值模拟

### 2.1 流场初值的选取

为了模拟非对称日冕结构, 选用非对称初始磁场位形. 本文对两组磁场进行计算.

流场的其他量诸如密度、速度等的初始分布的确定, 类似于通常求解对称盔形流时的做法<sup>[5]</sup>, 即求解磁场为零时的一维定态流动, 而得到径向速度、密度和压力随与日心距离变化的函数关系, 并将它们取为各自的初始值. 沿纬度方向的初始速度取为零.

流场各参量初始分布确定之后, 采用 MacCormack 差分格式, 内外边界均采用上面介绍的完整的无反射投影特征边界条件, 通过时间推进法求解 MHD 方程组, 并将演化时间充分大时的数值解作为稳态解.

### 2.2 计算结果

首先, 取初始磁场为偶极场, 把偶极场的中心从日心向左移动 0.5 个太阳半径, 当计算时间达  $10^5$  s 时, 流场基本稳定.

图 1 所示为磁力线结果. 由图可见, 磁力线位形呈现出左右不对称性, 并且在内外边界处均存在磁场分量为零而导致的奇异点(它们既不在极区, 也不在赤道上, 而且这些点的位置在计算过程中不断变化). 由于在上面阐述的边界条件中所用到的左右特征向量在这些点处仍然保持线性独立性, 故计算过程中不会因这些奇异点的存在而出现虚假振荡.

图 2 所示为用灰度表示的密度结果, 不同灰度值对应于不同大小的  $r - r_0$  值, 其中  $r$  表示密度结果,  $r_0$  表示初始密度. 灰度图中越亮则对应密度差值越大.

图 1 和 2 所示的结果是模拟 1996 年 1 月 15 日 CME 的背景流场, 与 1996 年 2 月 3 日 CME 的背景场也有类似之处(该事件中左边电流片尺寸比右边大)<sup>[7]</sup>.

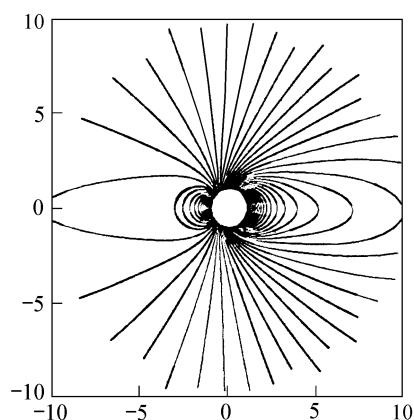


图 1 计算时间达  $10^5$  s, 初始磁场为偏心偶极子时的磁力线结果  
坐标单位为太阳半径

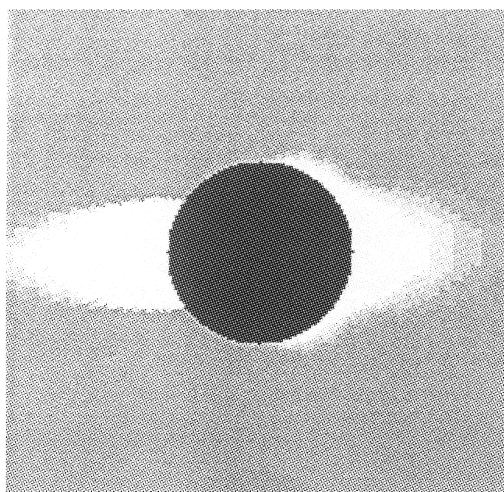


图 2 计算时间达  $10^5$  s, 初始磁场为偏心偶极子时的密度结果  
正方形区域边长为 14 个太阳半径

在第 2 组计算中, 选取了四极子, 但是把四极子的中心从日心向左移动了 0.5 个太阳半径. 当计算时间达  $10^5$  s 时, 得到如图 3 和 4 所示的计算结果, 其中图 3 为磁力线结果, 图 4 为用灰度表示的密度结果.

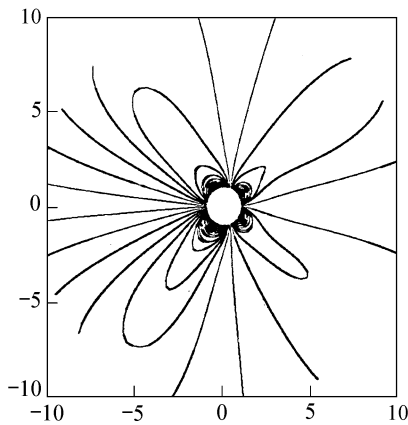


图 3 计算时间达  $10^5$  s 初始磁场为偏心四极子时的磁力线结果  
坐标单位为太阳半径

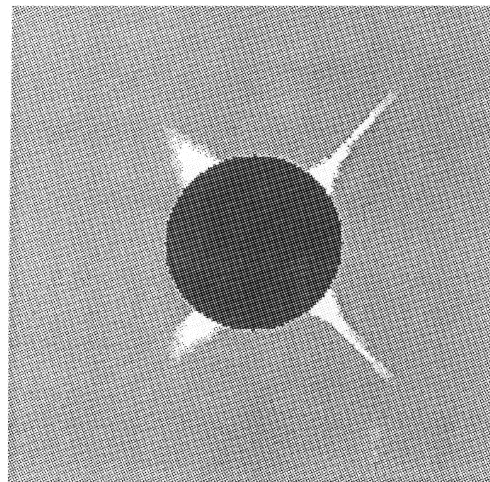


图 4 计算时间达  $10^5$  s 初始磁场为偏心四极子时的密度结果  
正方形区域边长为 14 个太阳半径

3 讨论

我们在前面叙述无反射投影特征边界条件时, 针对的是二维平面 MHD 方程组的情形. 事实上, 对于二维轴对称 MHD 方程组, 因为它和第 2 节中的方程组具有完全相同的导数矩阵  $A$ , 故第 2 节中的特征矩阵  $R$  和  $L$  在这两种情况下也完全相同, 只要对(7)式的右端项进行适当修改, 就能把第 2 节中的方法应用于二维轴对称情形.

另外, 上节为了说明上面阐述的完整无反射投影边界条件的应用, 仅对两种比较简单的非对称日冕结构进行了计算. 事实上, 作者已将这种边界条件应用于更为复杂的非对称日冕多电流片结构数值模拟中, 并取得了比较理想的效果. 图 5 所示为其中的一个磁场结果(模拟 1996 年 12 月 23 日非对称日冕多电流片结构). 从图中可以看出, 磁场位形呈现出强烈的非对称性, 而上述边界条件在计算过程中显示了良好的稳定性.

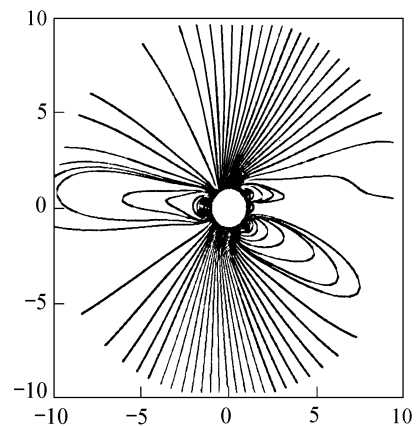


图 5 模拟 1996 年 12 月 23 日  
日冕物质抛射事件背景磁力线结果

致谢 本工作为国家自然科学基金资助项目(批准号: 49990450, 49925412).

## 参 考 文 献

- 1 Hu Y Q, Wu S T. A full-implicit-continuous-Eulerian (FICE) scheme for multi-dimensional, transient magnetohydrodynamic (MHD) flows. *J Comput Phys*, 1984, 55: 33~63
- 2 Engquist E, Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulations. *Math Comp*, 1997, 31: 629~651
- 3 Wu S T, Guo W P, Andrews M D, et al. MHD interpretation of LASCO observation of a coronal mass ejection as a disconnected magnetic structure. *Solar Phys*, 1997, 175: 719~735
- 4 Suess S T, Wang A H, Wu S T, et al. A two-fluid, MHD coronal model. *J Geophysics Res*, 1999, 104: 4697~4708
- 5 张剑虹, 魏奉思. 日球子午面内背景太阳风流场和磁场的相互作用. *中国科学, A 辑*, 1993, 23: 427~436
- 6 Roe P L, Balsara D S. Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics. *Sian J Appl Math*, 1996, (56): 57~67
- 7 Howard R A, Brueckner G E, St Cyr O C, et al. Observations of CMEs from SOHO/LASCO. In: Crooker N, Joselyr J A, Feynman J, eds. *Coronal Mass Ejections, Geophysical Monograph 99*. Washington: American Geophysical Union, 1999. 17~26

(1999-12-23 收稿, 2000-05-10 收修改稿)