流体力学笔记

2024.3.31

本课程笔记为个人速记而成，内容基本为PPT上摘抄而来，较为混乱，并无多少参考价值，充其量可用作个人回忆。它最大的作用在于制作期末半开卷考试cheat sheet。带*为拓展内容。如有错误实属难免。指导老师为刘树红、罗先武、左志刚，上课时间为2024年春季学期。最后修改日期为2024年9月27日。

目录

1 向量场*

https://qnp.sjtu.edu.cn/userfiles/files/Ch%201.pdf
https://zhuanlan.zhihu.com/p/360034439
https://blog.csdn.net/subtitle_/article/details/123028410
https://zhuanlan.zhihu.com/p/193094897

1.1 向量代数

- "bac-cab"：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$
- 三重标量积公式：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

1.2 场论

- 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$是向量，

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$$

- 设f, g是标量场，

$$\nabla(fg)=(\nabla f)g+f\nabla g$$

$$\nabla f(g)=f'(g)\nabla g$$

$$\nabla(\frac{f}{g})=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g)$$

- 标量与矢量乘积的散度：

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f$$

- 标量与矢量乘积的旋度：

$$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=f\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla f\times\boldsymbol{A}$$

- 叉积的散度：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$$

- 梯度的旋度等于0：

$$\nabla\times(\nabla f)=0$$

- 旋度的旋度：

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla^2}\boldsymbol{A}$$

- 旋度的散度等于0：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

1.3 正交曲线坐标系

1.3.1 拉梅系数

设空间中一点的位矢为$\boldsymbol{\alpha}=(u_1,u_2,u_3)$，微分得$d\boldsymbol{\alpha}=\sum_i\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial u_i}du_i$

设$\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial u_i}=h_i\boldsymbol{e_i}$，则

$$h_i=|\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial u_i}|=\sqrt{\sum_i\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial u_i}\right)^2}$$

其中h_i称为拉梅系数(Lamé constant)，是空间微元的边长，$dl_i = h_i du_i$。

拉梅系数：

- 直角坐标系：$h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$；
- 柱坐标系：$h_r = 1, h_\theta = r, h_z = 1$；
- 球坐标系：$h_r = 1, h_\theta = r, h_\phi = r\sin\theta$。

设三维空间中有标量场f，向量场$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$，则用拉梅系数表示的微分运算：

- 梯度：
$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\boldsymbol{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\boldsymbol{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\boldsymbol{e_3}$$
- 散度：
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3F_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1F_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2F_3)\right]$$
- 旋度：
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e_1} & h_2\boldsymbol{e_2} & h_3\boldsymbol{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1f_1 & h_2f_2 & h_3f_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3F_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2F_2)\right]\boldsymbol{e_1} \\ &+ \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1F_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3F_3)\right]\boldsymbol{e_2} \\ &+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2F_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1F_1)\right]\boldsymbol{e_3}\end{aligned}$$

1.3.2　直角坐标系

- 标量场：$f = f(x, y, z)$；向量场：$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$
- 拉梅系数：$h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$
- 梯度：
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e_z}$$
- 散度：
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$
- 旋度：
$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & \rho f_y & f_z \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z})\boldsymbol{e_x} + (\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x})\boldsymbol{e_y} + (\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})\boldsymbol{e_z}\end{aligned}$$
- 拉普拉斯算子：
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.3.3 柱坐标系

- $f = f(\rho,\theta,z)$；向量场：$\boldsymbol{F} = (F_1,F_2,F_3) = \boldsymbol{F}(\rho,\theta,z)$
- 拉梅系数：$h_\rho = 1, h_\theta = \rho, h_z = 1$
- 梯度：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e_z}$$

- 散度：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- 旋度：

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_\rho} & \rho\boldsymbol{e_\theta} & \boldsymbol{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho}\left[(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial z})\boldsymbol{e_\rho} + (\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho})\rho\boldsymbol{e_\theta} + (\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho}{\partial \theta})\boldsymbol{e_z}\right]\end{aligned}$$

- 拉普拉斯算子：

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

1.3.4 球坐标系

-

$$f = f(\rho,\theta,\phi)$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

- 拉梅系数：$h_\rho = 1, h_\theta = \rho, h_\phi = \rho\sin\theta$
- 梯度：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{e_\phi}$$

- 散度：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}F_\phi$$

- 旋度：

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_\rho} & \rho\boldsymbol{e_\theta} & \rho\sin\theta\boldsymbol{e_\phi} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_\rho & \rho F_\theta & \rho\sin\theta F_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta F_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho F_\theta)\right]\boldsymbol{e_\rho} \\ &+ \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}(F_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta F_\phi)\right]\boldsymbol{e_\theta} \\ &+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\rho)\right]\boldsymbol{e_\phi}\end{aligned}$$

- 拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

2 基本概念

1. 研究内容：
   - 流体力学：研究流体宏观运动规律的学科。主要研究流体的运动规律，流体与流体、流体与固体相互作用力及流动过程中质量、动量、能量的传输规律等。
   - 流体静力学：在外力作用下，流体平衡的条件以及压强分布规律。
   - 流体运动学：在给定条件下流体运动的特征和规律，不涉及运动发生和变化的原因。
   - 流体动力学：在外力作用下流体的运动规律，以及流体与固体间的相互作用。
2. 研究方法：
   - 理论分析：三大方程（连续性方程、动量方程、能量方程）。
   - 实验研究：相似原理设计实验模型、测定相似准则数中的物理量、拟合准则方程式。
   - 数值计算：计算流体力学（CFD: Computational Fluid Dynamics）。
3. 流体的特点：流动性、无固定形状、可压缩性、可承受压力、不能抵抗剪切应力。
4. 液体与气体的区别：区别在于分子间内聚力的影响。液体的分子组成紧密，内聚力大，倾向保持体积；气体分子间距很大，内聚力可忽略不计，遇到壁面前可自由膨胀，没有确定体积。
5. 流体质点：无线尺度，无热运动，只在外力作用下作宏观运动；将其周围特征体积（临界体积）范围内的分子统计平均特性赋于质点。（宏观上充分小，微观上充分大）
6. 理想流体：不计粘性的流体。
7. 流体的连续介质假设：流体由无穷个质点构成，在空间中是连续而无空隙地分布的，宏观物理参数（p、V、T等）在所占据的空间和时间上是连续可导函数，可使用微积分。适用范围：研究对象的特征尺度远大于流体分子平均自由程。适用范围：研究对象的特征尺度≫流体分子平均自由程λ。失效情况：稀薄气体中运行的飞行器；纳米尺度流道内的流动。
8. 流体的量纲和单位：
   - 比重量(γ)：$\mathrm{N/m^3}$，单位体积的重量。
   - 比重(SG)：1，相对密度。
   - 动力粘度系数(μ)：$\mathrm{N\cdot s/m^2}$或$\mathrm{Pa\cdot s}$。
   - 运动粘度系数($\nu = \mu/\rho$)：$\mathrm{m^2/s}$。
9. 可压缩性：流体密度不是常数的流体（如速度高于0.3倍当地声速的气体）是可压缩流，流体密度是常数的流体是不可压缩流。
10. 流体的粘度：
    - 定义：流体运动时，流体微团之间具有抵抗相互滑移运动的属性，称为流体的粘性。
    - 表现：流体做变形运动时，相互接触的流体微团之间有切应力作用，是分子运动引起的动量交换，是一种分子的输运性质。

- 形成原因：两层液体之间的粘性力主要由分子内聚力形成；两层气体之间的粘性力主要由分子动量交换形成；流体和固壁之间的粘性力主要由分子量级的吸附作用形成，通过分子内聚力使粘附在固壁上的流体质点与固壁一起运动（壁面无滑移条件）。
- 牛顿切应力公式/内摩擦定律：对于牛顿流体，剪切应力与速度梯度成正比。$\tau = \mu\frac{d\theta}{dt} = \mu\frac{du}{dy}$

11. 雷诺数：$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$。V，L是流动的特征速度和特征长度。分子表示惯性，分母表示粘性。
低Re：粘性效应占主导，惯性效应可忽略不计；中Re：平稳变化的层流；高Re：可能是湍流。

12. 表面张力：单位长度的表面张力称为表面张力系数$\gamma(N \cdot m^{-1})$，量纲为$[F][L]^{-1}$。

13. 接触线与接触角：当流场中有3种不互相浸融的介质共存时，3种介质的界面交于一线，则称该交线为接触线。接触线上，流体界面法线与固壁法线的夹角为接触角。接触角$\theta < 90°$，称液体润湿固体；$\theta > 90°$，称液体不润湿固体。

3 流体静力学

- 压强场：静止流体微元的任何平面的法向应力称为流体压强p，是标量场，各方向一致。压力梯度是作用在微元表面的力，其作用将由重力、加速度或流体中的其他效应来平衡。

- 重力场下的平衡方程：$-\nabla p + \rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_{visc} = \rho\boldsymbol{a}$
流体静力学中，粘性应力、加速度均为零，则得：$\nabla p = \rho\boldsymbol{g}$

- 静止流体作用在曲面上的合力：曲面上压力的水平分量等于曲面投影到垂直于该分量的竖直平面上形成的平面区域上的力；曲面上压力的竖直分量在大小和方向上等于曲面上方整个流体柱的重量，含液体和大气。

- 刚体运动中的压力分布：$\nabla p = \rho(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$
线性加速：$\tan\theta = \dfrac{a_x}{g + a_z}$；旋转：$p = p_0 - \gamma z + \dfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2$

4 流体运动学基础

4.1 概念

- 系统：具有一定质量的、由确定流体质点组成的流体团。也称为封闭系统或控制质量。系统外部的一切统称为环境。该系统通过其边界与周围环境分开，边界可固定，也可移动。热和功可能跨越系统的边界，但系统中的质量保持不变。多用于固体力学。

- 控制体：空间中流体流过的任意确定的、有一定尺度的区域。可以是静止或运动的。控制体与周围环境分离的几何边界称为控制面。控制面可以是真实的或假想的。数学上讲，边界或控制面的厚度为零，既不包含任何质量，也不占据空间中的任何体积。研究流体流动时，因流体粒子数量多且易变形，很难跟踪其特定的实际轨迹，所以多采用CV。

- Helmholtz速度分解定理*：流体微团的平面运动可分解为四部分：平移、旋转、线变形、角变形。

- 拉格朗日法：以流场中某一系统为研究对象，描述其空间位置、速度、压力等物理量随时间的变化规律。

- 欧拉法：分析流体运动的空间位置处的物理量分布(场)，及其随时间的变化。

- 拉格朗日和欧拉法的区别：拉格朗日法侧重追踪质点的运动，欧拉法则侧重流场空间内固定点的性质；拉格朗日法可用质点动力学求解问题，而欧拉法常用给定处值的常微分方程进行求解。

- 速度场：由每一时刻、每一点上的速度矢量组成的物理场。

- 定常：任何时刻，固定空间点上的流动速度（大小、方向）和热力学参数都不变。

4.2 流体运动场表述

- 拉格朗日表述（质点）：

$$\begin{cases} x = x(a,b,c,t) \\ y = y(a,b,c,t) \\ z = z(a,b,c,t) \end{cases} \tag{1}$$

- 欧拉表述（控制体）：

$$\begin{cases} u = u(x,y,z,t) \\ v = v(x,y,z,t) \\ w = w(x,y,z,t) \end{cases} \tag{2}$$

- 欧拉法与拉格朗日法转换：$u(x,y,z,t) = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t}$；$v$，$w$同理。

- 速度场：

$$\boldsymbol{V}(x,y,z,t) = \boldsymbol{i}u(x,y,z,t) + \boldsymbol{j}v(x,y,z,t) + \boldsymbol{k}w(x,y,z,t)$$

- 加速度场：

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)u \\ a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)v \\ a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)w \end{cases} \tag{3}$$

4.3 雷诺输运定理

- 雷诺输运定理：设B为流体的任何性质（质量、能量、动量、焓等），$\beta = \frac{dB}{dm}$为强度值。

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV}\beta\rho dV\right) + \left(\int_{CS}\beta\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dA\right)$$

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV}\beta\rho dV\right) + \int_{CS}\beta\rho\boldsymbol{V}\cos\theta d\boldsymbol{A}_{out} - \int_{CS}\beta\rho\boldsymbol{V}\cos\theta d\boldsymbol{A}_{in}$$

- 若控制体固定：

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \int_{CV}\frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)dV + \int_{CS}\beta\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dA$$

- 若进出口控制面适合一维简化：

$$\frac{d}{dt}(B_{syst}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV}\beta dm\right) + \sum\beta_i\dot{m}_i|_{out} - \sum\beta_i\dot{m}_i|_{in}$$

4.4 流线、迹线、脉线

- 流线：在给定时刻与速度矢量相切的一条线。

$$\boldsymbol{V}\times d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

- 迹线：给定流体质点经过的实际路径。

$$\frac{dx}{u(x(t),y(t),z(t),t)} = \frac{dy}{v(x(t),y(t),z(t),t)} = \frac{dz}{w(x(t),y(t),z(t),t)} = dt$$

- 脉线：通过某空间固定点的流体质点组成的连线。染色线是脉线。
- 流线特点：
  - 流线不能相交，经过空间一点只有一条流线，除速度为零或无穷大之外。
  - 流场中每一点都有流线通过，所有的流线形成流谱。
  - 定常流动的流线形状和位置不随时间变化，并与迹线、脉线重合，非定常流动的流线形状和位置随时间变化。

5 守恒定律与积分型控制方程

5.1 质量守恒：连续性方程

- 由雷诺输运定理知质量守恒：

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{syst} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \rho dV\right) + \int_{CS} \rho(\boldsymbol{V}_r \cdot \boldsymbol{n}) dA = 0$$

- 对固定控制体：

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) dA = 0$$

- 对出入口可一维化的固定控制体：

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum(\rho_i V_i A_i)_{out} - \sum(\rho_i V_i A_i)_{in} = 0$$

- 对流动定常的固定控制体：

$$\int_{CS} \rho(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) dA = 0$$

- 对流动定常且出入口可一维化的固定控制体：

$$\sum(\rho_i V_i A_i)_{in} = \sum(\rho_i V_i A_i)_{out}$$

$$\sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out}$$

- 对不可压缩的固定控制体：

$$\int_{CS} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) dA = 0$$

- 对不可压缩且出入口可一维化的固定控制体：

$$\sum(V_i A_i)_{in} = \sum(V_i A_i)_{out}$$

$$\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$$

5.2 牛顿第二定律：动量方程

- 由雷诺输运定理知动量守恒：

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V})_{syst} = \sum \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \boldsymbol{V} \rho dV\right) + \int_{CS} \boldsymbol{V} \rho(\boldsymbol{V}_r \cdot \boldsymbol{n}) dA$$

- 对固定控制体：

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \boldsymbol{V} \rho dV\right) + \int_{CS} \boldsymbol{V} \rho(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) dA$$

- 对出入口可一维化的固定控制体：

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{CV} \boldsymbol{V} \rho dV\right) + \sum(\dot{m}_i \boldsymbol{V_i})_{out} - \sum(\dot{m}_i \boldsymbol{V_i})_{in}$$

5.3 理想流体的伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1^2+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2^2+gz_2=const$$

应用条件：定常流场，不可压缩，无摩擦，沿单一流线。不同的流线可能有不同的伯努利常数，此情况很少见。大多数情况下无摩擦流动区域无旋。无旋流动时，伯努利常数处处相同。

5.4 牛顿第二定律：动量和动量矩方程

- 对不可变形控制体：

$$\sum \boldsymbol{M}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{CV}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\rho dV\right]+\int_{CS}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dA$$

- 对出入口可一维化的不可变形控制体：

$$\int_{CS}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dA=\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})_{out}\dot{m}_{out}-\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})_{in}\dot{m}_{in}$$

5.5 热力学第一定律：能量方程

- 对固定控制体：

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW}{dt}=\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{CV}e\rho dV+\int_{CS}e\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dA=0$$

  其中$e=\hat{u}+\frac{1}{2}v^2+gz$。

6 微分型控制方程

6.1 微分形式的连续性方程

- 非定常流动的连续性方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho w)=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0$$

- 定常可压缩流动的连续性方程：

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0$$

- 不可压缩流动的连续性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$$

6.2 微分形式的动量

- 作用在控制体上的粘性应力张量：

$$\boldsymbol{\tau_{ij}}=\begin{bmatrix}\tau_{xx}&\tau_{yx}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\tau_{yy}&\tau_{zy}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\tau_{zz}\end{bmatrix}$$

- 应力张量：

$$\boldsymbol{\sigma_{ij}}=\begin{bmatrix}-p+\tau_{xx}&\tau_{yx}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&-p+\tau_{yy}&\tau_{zy}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&-p+\tau_{zz}\end{bmatrix}$$

- 表面力=压力梯度矢量+粘性应力张量矢量

- 无穷小微元的基本动量微分方程：
$$\rho\boldsymbol{g}-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}=\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$
- 柯西运动方程：
$$\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}=\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
如果密度和速度是连续函数，此方程的成立不需要任何其他的假设。即，流动可以定常、非定常、有粘、无粘、可压缩、不可压缩。（满足连续介质条件，固体也成立）（注意两相流密度不连续）但该方程不适用于微元内有任何点源、点汇（奇点，质量不守恒）的情况。
- 欧拉方程（无粘流动的动量方程）：
$$\rho\boldsymbol{g}-\nabla p=\rho\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$$
- 本构方程：
$$\begin{bmatrix}\tau_{xx}&\tau_{yx}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\tau_{yy}&\tau_{zy}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\tau_{zz}\end{bmatrix}=2\mu\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)&\frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$
- Navier-Stokes方程：
  - 分量形式：
$$\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{du}{dt}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{dv}{dt}=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{dw}{dt}=\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
  - 向量形式：$\rho\boldsymbol{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{V}=\rho\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$
  - 应用条件：不可压缩牛顿流体。

6.3 微分形式的能量方程

$$\rho\frac{de}{dt}+p(\nabla\cdot\boldsymbol{V})=\nabla\cdot(k\nabla T)+\Phi$$
令$\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\tau_{ij}})=\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau_{ij}})+\Phi$，$\Phi$为粘性耗散函数。
$$\Phi=\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]>0$$

6.4 基本方程的边界条件

通常可以补充热力学性质的状态方程：

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$\hat{u} = \hat{u}(p, T)$$

对于理想流体，$\mu = 0$，N-S方程变为不可压缩理想流体运动微分方程：

$$\rho \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho \boldsymbol{g} - \nabla p$$

对于静止流体$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0$，得静力学平衡方程：

$$\rho \boldsymbol{g} - \nabla p = 0$$

常用边界条件：

- 壁面无滑移条件：壁面处流体与壁面相对静止，$V_{fluid} = V_{wall}$。
- 壁面热条件：绝热壁面热通量为零，$T_{fluid} = T_{wall}$。
- 运动学边界条件：跨越界面的垂直速度必须相等。

7 量纲分析

- 量纲齐次性原理
- PI定理

8 管内粘性流动

不加特殊控制的圆管内部流动，转捩点的临界雷诺数$Re_{cr} \approx 2300$。发生转捩时的Re并非绝对确定的，在一定条件下可能变化。

8.1 管内流动损失

8.1.1 进口段长度

量纲分析表明，雷诺数是影响进口段长度的唯一参数。

$$L_e = f(d, V, \rho, \mu) \Longrightarrow \frac{L_e}{d} = f'(\frac{\rho V d}{\mu}) = f'(Re_d)$$

当圆管内为层流，$\frac{L_e}{d} \approx 0.06 Re_d$。雷诺数达到临界值($Re = 2300$)时，$L_e$有最大值，$L_e = 138d$。
当圆管内为湍流，流动发展快，边界层增长快，L_e相对较短，$\frac{L_e}{d} \approx 1.6 Re_d^{\frac{1}{4}}$。

8.1.2 倾斜定截面圆管内的流动损失

对于非理想流体，有能量守恒方程：

$$\frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + z \Big|_1 = \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + z \Big|_2 + h_f$$

其中，p为圆管截面的压强，z为截面中心的垂直高度，α为截面速度分布系数，h_f为流动损失。

对于充分发展的流动，圆管截面速度分布曲线相同，流动损失等于两个截面上静压与动力水头之和的差值。

$$h_f = \Delta z + \frac{\Delta p}{\rho g}$$

沿流向的合力为0，故

$$0=(p_1-p_2)\pi R^2+\rho g\sin\theta(\pi R^2)L-\tau_w(2\pi R)L$$

$$\Delta p+\rho g\Delta z=2\tau_w\frac{L}{R}$$

结合$h_f=\Delta z+\frac{\Delta p}{\rho g}$得

$$h_f=\frac{2\tau_w L}{\rho g R}=\frac{4\tau_w L}{\rho g d}$$

定义无量纲参数f：达西摩擦因数：

$$f=\frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

达西摩擦因数取决于管道雷诺数、粗糙度、管道截面形状。

使用达西摩擦因数，倾斜定截面圆管内流动损失的计算公式为：

$$h_f=f\frac{LV^2}{2gd}$$

其中，f为达西摩擦因数，L为圆管长度，d为圆管直径，V为圆管截面上平均流速，g为重力加速度。

该式计算的流动损失h_f称为圆管沿程损失，单位为m（液柱）。

8.1.3 管内充分发展的层流

长圆管内充分发展的不可压流动（压力梯度驱动的泊肃叶流）流动特征：

- 黏性流动。
- 稳态流动，即不随时间变化的流动。
- 流动充分发展，即任意截面的流速分布规律不变。
- 以圆管轴线为基准的轴对称流动，即流体只有轴向速度分量。
- 圆管壁面为流动滞止区，即沿壁面的流速为零。

由柱坐标下的连续性方程知流速无径向和角向分量：

$$v_r=0,\qquad v_\theta=0,\qquad v_z=v_z(r)$$

由动量方程知截面上速度分布与压力梯度的微分关系式：

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=\frac{dp}{dz}$$

其中$\frac{dp}{dz}<0$，称为顺压梯度。对于充分发展的恒定流动，压力梯度为常数。

截面上速度分布：

$$v_z(r)=\frac{-1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2-r^2)$$

通过截面的平均流速：

$$V=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_z(r)2\pi r dr=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\frac{-1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2-r^2)2\pi r dr=\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2$$

即

$$\frac{dp}{dz}=\frac{8\mu V}{R^2}$$

作用于圆管壁面的剪切应力：

$$\tau_w = \mu \left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|\Big|_{r=R} = \frac{-R}{2}\frac{dp}{dz} \overset{\frac{dp}{dz}=\frac{8\mu V}{R^2}}{=} \frac{4\mu V}{R} = \frac{8\mu V}{d}$$

壁面剪切应力与动力粘性、截面平均速度成正比，与管径成反比。

代入达西摩擦系数的定义式，得

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = \frac{8}{\rho V^2}\frac{8\mu V}{d} = \frac{64}{\rho V d/\mu} = \frac{64}{Re}$$

可见摩擦系数与雷诺数呈反比（前提：层流）。

8.2 雷诺应力和混合长度理论

湍流概述：假设密度和粘度恒定，没有热交换。湍流中的流动参数是随时间变化的随机函数，每个变量包括平均值和波动量。

- 时间平均的质量守恒方程：

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

- 时间平均的动量守恒方程：

$$\rho\frac{d\overline{u}}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \rho\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \rho\overline{u'w'}\right)$$

  其中$\rho\overline{u'^2}, \rho\overline{u'v'}, \rho\overline{u'w'}$是速度波动量导致的应力项。

  在管道和边界层的流动中，垂直于壁面的y方向的应力项占据主导，上式可简化为

$$\rho\frac{d\overline{u}}{dt} \approx \rho g_x - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

  其中

$$\tau = \mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \rho\overline{u'v'} = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

  τ_{turb}是由于湍流粘性产生的附加切应力，亦称雷诺切应力。

壁面附近的速度分布：

- 黏性底层区：时均速度梯度极大，雷诺切应力很小，黏性切应力占主导作用。Prandtl推导出时均速度与剪切层厚度无关，通过量纲分析推导出壁面定律：

$$\frac{u}{u^*} = F\left(\frac{yu^*}{v}\right)$$

  其中$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$为摩擦速度，$y$为距壁面的垂直坐标。

- 湍流核心区：时均速度均匀分布，黏性切应力很小，雷诺切应力占主导作用。Von Kármán推导出时均速度u与分子粘性无关，但u与流速U的偏离取决于边界层厚度δ和其他参数，通过量纲分析推导出速度-缺陷定律：

$$\frac{U-u}{u^*} = G\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

  其中U为主流速度（不受边界层影响），y为距壁面的垂直坐标。

- 过渡区：粘性切应力与雷诺切应力数量级相当。米利根推导出，过渡区的速度相对y呈对数规律变化时，才能平滑地与其他两个区重合，即速度应符合壁面湍流普适速度分布律（对数律）：

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu^*}{v} + B$$

  其中κ，B为常数。

8.3 管内充分发展的湍流

8.4 粗糙壁面下管内充分发展的湍流

壁面粗糙度：ε；无量纲化壁面粗糙度：$\varepsilon^+ = \frac{\varepsilon u^*}{v}$。

湍流区可划分为：

- $\frac{\varepsilon u^*}{v} < 5$，湍流光滑管区，粗糙度对达西摩擦因子无影响。
- $5 \leq \frac{\varepsilon u^*}{v} \leq 70$，过渡粗糙管区，中等雷诺数下达西摩擦因子受粗糙度与雷诺数影响。
- $\frac{\varepsilon u^*}{v} > 70$，完全粗糙管区，线性层完全破碎，达西摩擦因子与雷诺数无关。

查莫迪图(Moody Diagram)可以得到不同相对粗糙度（ε/d）下f与Re_d的关系。

8.5 非圆管流动

- 水力半径/水力直径：在等截面非圆管流动中，设截面积为A，周长为Φ，则计算流动损失时可用水力半径r_h和水力直径D_h替代圆管计算中的半径与直径。

  $$r_h = \frac{2A}{\Phi} \qquad D_h = \frac{4A}{\Phi}$$

  对于圆环管，周长Φ应同时包括内外周长。

- 等效直径：为了使用圆管的达西摩擦因子公式（如莫迪图）计算平板流动的摩擦阻力系数，无论何种流动状态，均可采用等效直径D_{eff}替代水力直径D_h作为流动的特征尺度来计算雷诺数，进而求出对应的摩擦因子。例如，对于平板，$D_{eff} = \frac{2}{3}D_h$

- 非圆管流动的雷诺数：

  $$Re_{D_h} = \frac{VD_h}{\nu}$$

  临界雷诺数约为2300。

- 非圆管流动的摩擦因子：

  $$f_n = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} = f(Re_{D_h}, \frac{\varepsilon}{D_h})$$

  f_n与基于水力直径的雷诺数和相对粗糙度有关，与圆管情况不完全相同。

- 非圆管的流动损失：

  $$h_f = f_n \frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g}$$

8.5.1 两个无限平行平板间的流动：库埃特流

库埃特流(Couette Flow)特征：

- 层流：固定板+移动板之间的流动。
- 不可压缩，基本可视为二维流动。
- 仅有流动方向速度分量u，$v = w = 0$。

假设板很宽很长，两板间距为$2h$，则由质量守恒方程和二维N-S方程可得流场速度分布：

$$u(y) = \frac{V}{2h}y + \frac{V}{2} \ (-h \leq y \leq +h)$$

8.5.2 两个无限平行平板间的流动：泊肃叶流

泊肃叶流(Poiseuille Flow)特征：

- 层流：两个固定平板之间的流动。
- 不可压缩，是压力梯度下的二维流动。
- 仅有流动方向速度分量u，$v = w = 0$。

假设板很宽很长，两板间距为$2h$，则

- 流速分布：$u(y) = -\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}(1 - \frac{y^2}{h^2})$
- 横截面水力直径：$D_h = \lim_{b\to\infty} \frac{4A}{\Phi} = 4h$
- 通过横截面的流量：$Q = \int_{-h}^{+h} u_{max}(1 - \frac{y^2}{h^2})bdy = \frac{4}{3}bhu_{max}$
- 横截面平均速度：$V = \frac{Q}{A} = \frac{4bhu_{max}/3}{2bh}$
- 平板壁面摩擦力：$\tau_w = \mu \left|\frac{du}{dy}\right|\Big|_{y=h} = \frac{2\mu u_{max}}{h}$
- 流动损失：$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{3\mu LV}{\rho g h^2}$
- 摩擦阻力系数： $f_n = \frac{96}{Re_{D_h}}$

8.5.3 两个无限平行平板间湍流

8.5.4 同心圆管中充分发展的层流

设同心圆管外圆管半径为a，内圆管半径为b。

- 流速分布：$u = \frac{1}{4\mu}\left[-\frac{d}{dx}(p+\rho gz)\right]\left[a^2 - r^2 + \frac{a^2-b^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{a}{r}\right]$
- 通过横截面的流量：$Q = \int_a^b u(r)2\pi r dr = \frac{\pi}{8\mu}\left[-\frac{d}{dx}(p+\rho gz)\right]\left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2-b^2)^2}{\ln(a/b)}\right]$
- 截面平均速度：$V = \frac{Q}{\pi(a^2-b^2)} = \frac{-1}{8\mu}\frac{d(p+\rho gz)}{dx}\left[a^2 + b^2 - \frac{a^2-b^2}{\ln(a/b)}\right]$
- 水力直径：$D_h = \frac{4\pi(a^2-b^2)}{2\pi a + 2\pi b} = 2(a-b)$
- 达西摩擦因子：$f_n = \frac{64\zeta}{Re_{D_h}}$。其中形状常数$\zeta = \frac{(a-b)^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4-(a^2-b^2)^2/\ln(a/b)}$
- 流动损失：$h_f = f_n\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g}$

8.6 局部损失

- 局部损失的来源：当流动发生急剧变化时，流体微团发生碰撞、摩擦，带来能量损耗，即局部损失，记为$h_m = \xi\frac{V^2}{2g}$。
- 典型的局部流动损失：
  - 圆管入口：$\xi \in [0, 1]$
  - 圆管出口：$\xi \in [0, 1]$
  - 圆管直径突然扩大：$\xi = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
  - 圆管直径突然缩小：$\xi \approx 0.42\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
  - 其它：渐扩管、渐缩管、弯管、分叉管、阀门……
- 管路损失计算：分别列出管道系统中的各种沿程损失和局部损失，将二者加和。

$$h = \sum h_f + \sum h_m = \sum_i f_i \frac{L_i}{d_i}\frac{V_i^2}{2g} + \sum_j \xi_j \frac{V_j^2}{2g}$$

9 壁面边界层

- 壁面边界层：流体中紧接着管壁或其他固定表面的部分。边界层是由黏滞力产生的效应，和雷诺数Re有关。流体在固定表面上流速为0，距固定表面越远，速度会趋近一定值，即粘性对流动的影响仅限于紧贴物体壁面的薄层中，这一薄层即边界层。

- 普朗特理论：边界层内惯性力与粘性力量级相等。设平板尺度为l，对应边界层厚度为δ，则有

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Longrightarrow\frac{\rho U^2}{l^2}\sim\frac{\mu U}{\delta^2}\Longrightarrow\frac{\delta^2}{l^2}\sim\frac{\mu}{\rho Ul}\Longrightarrow\frac{\delta}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{Re_l}}$$

  沿流向坐标x，对应边界层厚度为

$$\frac{\delta^2}{x^2}\sim\frac{\mu}{\rho Ux}\Longrightarrow\delta(x)\sim\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U}}$$

  实验测量表明边界层内层流向湍流转捩的当地雷诺数为

$$Re_{x,cr}=\frac{\rho Ux_{cr}}{u}=3.2\times10^5$$

- 三种边界层厚度：设距壁面y处流速为$u=u(y)$，则

  – 名义厚度δ：流速$u=0.99U$处的厚度。

$$\frac{\delta}{x}=\begin{cases}5.0/Re_x^{\frac{1}{2}} & \text{laminar} \quad (10^3<Re_x<10^6)\\ 0.16/Re_x^{\frac{1}{7}} & \text{turbulent} \quad (Re_x>10^6)\end{cases}$$

  – 动量厚度θ：边界层内动量损失的等效厚度，满足$D=\rho bU^2\theta$。

$$\theta=\int_0^{\delta(x)}\frac{u}{U}(1-\frac{u}{U})dy$$

  – 位移厚度δ^*：流体因粘滞力增加的厚度，满足$\int_0^{\delta-\delta^*}\rho Ubdy=\int_0^{\delta}\rho ubdy$。

$$\delta^*=\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U})dy$$

9.1 不可压缩二维边界层动量积分方程

考虑可二维化的流体控制体，其垂直纸面的高度为b，入口处垂直平板的厚度为h。

由动量方程

$$\int_0^{\delta(x)}\rho buudy-\int_0^{h}\rho bUUdy=-D$$

可求出

- 壁面阻力$D(x)$：

$$D=\rho bU^2\theta$$

- 阻力系数C_D：在平板长度L处，定义阻力系数C_D：

$$C_D=\frac{2D(L)}{\rho U^2bL}$$

  代入阻力D表达式，则有：

$$C_D=\frac{2\theta(L)}{L}$$

- 壁面切应力：由阻力和壁面切应力的关系：
$$D(x) = b\int_0^x \tau_w dx$$
求得壁面切应力：
$$\tau_w = \frac{dD}{bdx} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$
- 壁面摩擦系数c_f：
$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2}$$
代入壁面切应力表达式$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$，则有
$$c_f = 2\frac{d\theta}{dx}$$
- 形状因子H：
$$H = \frac{\delta^*}{\theta}$$
形状因子可用于判断边界层是否分离，也可以判断流动是层流还是湍流。层流的形状因子较大，湍流的形状因子较小，一般以2.0为分界。

9.2 不可压缩二维平板边界层

9.2.1 基于抛物线假设的层流边界层

假设边界层内流向速度近似抛物线分布：
$$u(x,y) \approx U(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2})$$
此时，动量边界层厚度
$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U}(1-\frac{u}{U})dy = \int_0^\delta \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right)dy = \frac{2}{15}\delta$$
壁面切应力
$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{2\mu U}{\delta}$$
由于
$$\tau_w = \rho U^2\frac{d\theta}{dx} = \frac{2\mu U}{\delta}, \quad \theta = \frac{2}{15}\delta$$
故
$$\delta d\delta = 15\frac{\nu}{U}dx$$
解得
$$\frac{\delta^2}{x^2} = 30\frac{\nu}{Ux}$$
- 边界层名义厚度：
$$\delta = \sqrt{30}x\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \sqrt{30}x\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$
- 沿平板壁面的切应力：
$$\tau_w = \rho U^2\frac{d\theta}{dx} = \rho U^2\frac{d(2\delta/15)}{dx} = \frac{\sqrt{30}}{15}\rho U^2\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{\sqrt{30}}{15}\rho U^2\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$
- 沿平板壁面的摩擦系数：
$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = \frac{2\sqrt{30}}{15}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$
- 边界层位移厚度：
$$\delta^* = \int_0^\delta (1-\frac{u}{U})dy = \int_0^\delta \left[1 - (\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2})\right]dy = \frac{1}{3}\delta = \frac{\sqrt{30}}{3}x\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$

- 边界层动量厚度：

$$\theta = \frac{2\delta}{15} \Longrightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{2\sqrt{30}}{15}\sqrt{\frac{1}{Re_x}}$$

- 形状因子：

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{5}{2}$$

当边界层内流向速度分布为其它形式（如1/7次幂），也可用以上范式求解。

9.2.2 层流的布拉修斯精确解

布拉修斯（Blasius）证明了$\frac{u}{U}$是复合无量纲变量η的函数：

$$\eta = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)$$

$$\frac{u}{U} = f'(\eta) = \frac{y}{2}\frac{U}{\nu}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

代入边界层微分方程，有

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta) = 0$$

该方程无解析解，可通过数值积分求解。

9.2.3 粗糙平板湍流

引入粗糙度参数L/ε，有拟合公式：

$$c_f \approx (2.87 + 1.58\ln\frac{x}{\varepsilon})^{-2.5}$$

粗糙平板湍流阻力系数

$$C_D \approx (1.89 + 1.62\ln\frac{L}{\varepsilon})^{-2.5}$$

光滑平板湍流阻力系数：

$$C_D \approx \frac{0.315}{Re_L^{\frac{1}{7}}}$$

平板层流阻力系数：

$$C_D \approx \frac{1.328}{Re_L^{\frac{1}{2}}}$$

9.3 有压力梯度的边界层及其分离现象

9.3.1 三种压力梯度

由普朗特边界层方程可知沿壁面流速二阶导数与压力梯度的关系：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{wall} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

- 顺压梯度（$dp/dx < 0$，$dU/dx > 0$），速度二阶导数在壁面处为负，流向速度分布曲线光滑，曲线无拐点。

- 零梯度（$dp/dx = 0$，$dU/dx = 0$），速度的二阶导数在壁面处为零，流向速度分布曲线光滑，曲线拐点在壁面上。

- 逆压梯度（$dp/dx > 0$，$dU/dx < 0$），速度的二阶导数在壁面处为正，流向速度分布曲线的拐点与壁面的距离随逆压梯度增大而增大。

9.3.2 有压力梯度的动量积分方程

有压力梯度时，外层速度U不再为常数，即$U = U(x)$。但下列关系仍成立：

$$c_f = 2\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (2+H)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}$$

式中，$\theta(x)$为动量厚度，$H(x) = \delta^*(x)/\theta(x)$为形状因子。

H是压力梯度的一个很好的指示器，H越大，逆压梯度越强，分离点大致位于

$$H = \begin{cases} 3.5 & \text{laminar} \\ 2.4 & \text{turbulent} \end{cases}$$

9.3.3 绕流物体的阻力和升力

- 阻力系数：

  $$C_D = \frac{D}{\rho V^2 A/2}$$

  其中，D为阻力，A为特征面积。

- 阻力分类：

  – 形状阻力D_p，亦称压差阻力，是由于绕流物体周围压力分布不均衡造成的作用力。对应的阻力系数称为形状阻力系数C_{Dp}。

  – 摩擦阻力D_f，是由于流体与绕流体壁面之间粘性摩擦造成的作用力。对应的阻力系数称为摩擦阻力系数C_{Df}。

  绕流体所受的阻力为两种阻力之和，即$C_D = C_{Dp} + C_{Df}$。

- 升力系数：

  $$C_L = \frac{L}{\rho V^2 A/2}$$

  其中L为升力，A是翼面积。

  $$C_l = f(\alpha, Re_l)$$

  其中α为相对于来流方向的攻角，Re_l为翼型雷诺数。

10 势流理论

10.1 势函数

如果速度场无旋，则有速度势ϕ：

$$\boldsymbol{V} = \nabla\phi$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

无粘、不可压缩、无旋流场满足拉普拉斯方程$\nabla^2\phi = 0$，被称为势流。

连续性方程即为ϕ的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

动量方程变为伯努利方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = const \quad (V = |\nabla\phi|)$$

不需考虑壁面无滑移条件。

10.2 流函数

二维流动中，定义流函数ψ满足$d\psi = -vdx + udy$。此时

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

柱坐标系中，流函数满足

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta = -v_\theta dr + rv_r d\theta$$

性质：

- 流线即流函数ψ的等值线。沿流线，流函数ψ的值保持不变：

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -vdx + udy = 0$$

- 平面流动的流线微分方程：

$$-vdx + udy = 0$$

- ψ的差值是（垂直纸面）单位深度的流量。

$$Q = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

10.3 流体微元

- 线变形速率：

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- 角变形速率：

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- 旋转速度：

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

10.4 绕流

圆柱坐标系下绕钝体流动可视为均匀等速流与线源的结合，流函数与速度势函数为：

$$\psi = \psi_{sourcec} + \psi_{uniform} = \frac{Q}{2\pi b}\theta + Ur\sin\theta$$

$$\phi = \phi_{sourcec} + \phi_{uniform} = \frac{Q}{2\pi b}\ln r + Ur\cos\theta$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi br}\cos\theta$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi br}\sin\theta$$

滞流点（驻点）位置为

$$\theta = \pm\pi \qquad a = \frac{Q}{2\pi bU}$$

通过伯努利方程确定压强分布：

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

10.5 其它

- 涡量：速度场的旋度。
$$\overrightarrow{\zeta} = 2\overrightarrow{\omega}$$
- 涡通量：通过某开口曲面的涡量总和。
$$I = \iint_A \zeta \cdot \boldsymbol{n} dA$$
- 速度环量：速度场中封闭线的线积分称为绕该线的速度环量。
$$\Gamma_c = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{s}$$
- 流函数与势函数的正交性：等势线与流线垂直；平面上等势线簇和流线簇构成正交网络。
- 拉普拉斯方程是线性方程，满足叠加原理
$$\phi = \sum_j \phi_j \qquad \psi = \sum_i \psi_i$$
- 线源的流函数与势函数：
$$\psi = \frac{Q}{2\pi b}\theta$$
$$\phi = \frac{Q}{2\pi b}\ln r$$
- 线涡的流函数与势函数：
$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y}{x} = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$
- 偶极子流的流函数与势函数：
$$\psi = -\frac{Q}{2\pi b}\frac{2a\sin\theta}{r}$$
$$\phi = \frac{Q}{2\pi b}\frac{2a\cos\theta}{r}$$

11 可压缩流动

11.1 概念

若马赫数大于0.3或密度变化大于5%，则认为流动可压缩。为求解可压缩流动，除了连续方程、动量方程，还需利用能量方程、状态方程。

- 连续方程：
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
- 状态方程：
$$p = \rho R T$$
  - 理想气体常数：$R = c_p - c_v = const$
  - 比热比：$k = \frac{c_p}{c_v} = const$

11.2 声速

声速是指强度无穷小的压力脉冲通过静止流体的传播速率，是流体的热力学性质。
声速的表达式：

$$a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_s \right)^{\frac{1}{2}} = \left(k\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_T \right)^{\frac{1}{2}}$$

对于理想气体：

$$a = \left(\frac{kp}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = (kRT)^{\frac{1}{2}}$$

11.3 绝热和等熵定常流

考虑气体沿绝热壁的高速流动，且没有轴功传递，则能量方程：

$$h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 - q + w_v$$

忽略势能变化，在边界层外体积功和热量传递可忽略，则

$$h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 = const$$

其中常数等于使流体绝热静止时所能达到的最大焓，即：

$$h + \frac{1}{2}V^2 = h_0 = const$$

对于理想气体，$h = c_pT$，故

$$c_pT + \frac{1}{2}V^2 = c_pT_0$$

其中T_0被称为理想气体的绝热滞止温度。
上式左右同除c_pT，得

$$1 + \frac{V^2}{2c_pT} = \frac{T_0}{T}$$

工程热力学中

$$c_pT = \left[\frac{kR}{k-1} \right] T = \frac{a^2}{k-1}$$

故

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}Ma^2, \quad Ma = \frac{V}{a}$$

等熵流动下的理想气体：

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2}Ma^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2}Ma^2 \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

p_0和ρ_0分别是等熵滞止压强和密度，也就是等熵静止时流体的压强和密度。在绝热非等熵流动中，p_0和ρ_0保持其局部意义，但在整个流动中随摩擦或激波的熵变化而变化；物理量h_0、T_0和a_0是恒定的。

11.4 随面积变化的等熵流

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}(k-1)Ma^2}{\frac{1}{2}(k+1)} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{1}{Ma}\left[\frac{(1+0.2Ma^2)^3}{1.728} \right] \text{ (when } k = 1.4\text{)}$$

声速（临界）状态下的某参数x记为x^*，此时$Ma = 1$。本处A为流体截面积。

11.5 激波

激波是一种强压力波，激波在超音速流动中几乎是不连续的变化，可能是由于下游压力升高、流向突然改变、下游物体堵塞或爆炸造成的。激波中可以产生流动物理量间断面。正激波即激波前后流动方向均垂直于激波面的激波。激波中的熵产生是由可压缩气体流动的突然压缩引起的。滞止温度由于能量守恒保持不变，但滞止压力与密度以相同的比例减小；换句话说，通过激波的流动是绝热的，但非等熵的。

正激波性质归纳如下：1.上游流动是超音速的，下游流动是亚音速的（注意：超音速来流的条件对激波是必要的，但不是充分的）。2.对于理想气体（以及真实的流体，除非在奇异的热力学条件下），膨胀激波是不可能存在的，只有压缩激波才能存在。3.在激波中熵增加，随之而来的滞止压力和滞止密度降低，实际声速喉部面积增加。4.弱激波几乎是等熵的。