

传热学笔记

2024.09.13

本文档为《传热学》课程笔记，主要基于教材和PPT整理，仅供个人学习用。参考教材为《传热学》（第六版）（章熙民等编著），授课教师为胥蕊娜，上课时间为2024年秋季学期。最后修改日期为2025年1月8日。

目录

0 绪论	3
0.1 热传递的基本方式	3
0.1.1 导热	3
0.1.2 热对流	3
0.1.3 热辐射	4
0.2 传热过程	4
1 导热理论基础	5
1.1 温度场	5
1.2 傅里叶定律	5
1.3 热导率	5
1.4 导热微分方程式	6
1.5 导热过程的单值性条件	7
2 稳态导热	7
2.1 通过平壁的导热	7
2.2 通过圆筒壁的导热	8
2.3 通过肋臂的导热	10
2.4 通过接触面的导热	11
3 非稳态导热	11
3.1 无限大平壁的瞬态导热	11
3.1.1 严格数学方法	12
3.1.2 集总参数法	13
3.2 半无限大平壁的瞬态导热	14
3.3 周期性非稳态导热	14
4 导热数值解法基础	15
4.1 建立离散方程的方法	15
4.1.1 有限差分法	15
4.1.2 热平衡法	16
4.2 稳态导热的数值计算	16
4.3 非稳态导热的数值计算	17

4.3.1	显式离散格式	17
4.3.2	隐式离散格式	17
4.3.3	边界条件	18
5	对流传热分析	18
5.1	对流换热概述	18
5.2	对流换热微分方程组	19
5.3	边界层换热微分方程组	20
5.4	相似理论基础	21
6	单相流体对流换热	22
6.1	管内受迫对流换热	22
7	凝结与沸腾换热	23
7.1	凝结换热	23
7.2	沸腾换热	24
8	热辐射的基本定理	25
8.1	热辐射的本质和特点	25
8.2	吸收、反射和穿透	25
8.3	定向辐射强度与定向辐射力	25
8.4	热辐射定律	26
8.4.1	普朗克定律	26
8.4.2	兰贝特余弦定律	26
8.4.3	斯蒂芬-玻尔兹曼定律	27
8.4.4	基尔霍夫定律	27
9	辐射传热计算	27
9.1	角系数	27
9.2	灰表面间的辐射传热	28
9.2.1	辐射表面热阻	28
9.2.2	灰表面间辐射传热计算	29
10	传热和换热器	29
10.1	换热器的型式与基本构造	29
10.2	通过肋壁的传热	29
10.3	基于平均温度差的换热计算	30

0 绪论

热力学与传热学的区别：

- 热力学研究平衡态或无限缓慢过程，而传热学研究传热这一非平衡过程。
- 热力学研究平衡态间的转换，与时间无关，而传热学研究传热过程的速率。

0.1 热传递的基本方式

0.1.1 导热

定义：导热（Heat conduction），又称热传导，指温度不同的物体各部分或温度不同的两物体间直接接触时，依靠分子、原子及自由电子等微观粒子热运动而进行的热量传递现象。

导热基本定律

垂直导过等温面的热流密度，正比于该点的温度梯度，方向与温度梯度相反。

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t = -\lambda \nabla t$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t A = -\lambda A \nabla t$$

- Φ ：热流量[W]，单位时间传递的热量。
- q ：热流密度[W/m²]，单位时间通过单位面积传递的热量。
- t ：温度[K]。
- λ ：导热系数[W/(m·K)]。
- A ：壁面积[m²]。
- δ ：壁厚[m]。

0.1.2 热对流

定义：热对流（Convection）是指流体中温度不同的各部分之间，由于发生相对的宏观运动而把热量由一处传递到另一处的现象¹。

热对流的热流密度：

$$\Phi = \dot{m} c_p (t_2 - t_1)$$

对流传热：工程及生活实际中，流体与固体壁间（而非流体内部）换热的热量传递过程。

- 是导热与热对流同时存在的复杂热传递过程，不是传热的基本形式。
- 必须有直接接触和宏观运动，也必须有温差。
- 由于流体的粘性和受壁面摩擦阻力影响，紧贴壁面处会形成速度梯度很大的边界层。

对流传热计算式（牛顿冷却公式）

一个热的物体的冷却速率与该物体和周围环境的温度差成正比。

$$\Phi = hA(t_w - t_f)$$

$$q = h(t_w - t_f)$$

- h ：表面传热系数[W/m²·K]。影响 h 的因素：流速、流体物性、壁面形状大小等。

¹由于流体中有温差，所以热对流必然同时伴随着热传导。

- t_w : 固壁表面温度[K]。
- t_f : 流体温度[K]。
- q : 热流密度[W/m²]。
- Φ : 热流量[W]。

0.1.3 热辐射

定义：热辐射（Thermal Radiation），是指由于自身温度或热运动的原因而激发产生的电磁波传播物体转化本身的热力学能向外发射辐射能的现象²。

斯蒂芬-玻尔兹曼定律（Stefan-Boltzmann Law）

$$E_b = \sigma_b T^4 \quad [\text{W/m}^2]$$
$$\Phi = \sigma_b T^4 A$$

- E_b : 绝对黑体辐射力[W/m²]。
- T : 黑体表面的热力学温度[K]。
- σ_b : 斯蒂芬-玻尔兹曼常数， $5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。
- A : 表面积[m²]。

实际物体辐射力

$$E_{real} = \varepsilon \sigma_b T^4 \quad [\text{W/m}^2]$$

- ε : 实际物体表面的发射率（黑度）， $\varepsilon \in [0, 1]$ ，与物体的种类、表面状况和温度有关。

一切实际物体的辐射能力都低于同温度黑体。

0.2 传热过程

³类似于电学欧姆定律，可引入热阻 R_t ⁴。用 R_λ 表示导热热阻，用 R_h 表示对流传热热阻。

热流量	$\Phi = \frac{\Delta t}{R_t}$	W
热流密度	$q = \frac{\Delta t}{r_t}$	W/m ²
导热热阻	$R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda A}$	K/W
单位面积导热热阻	$r_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$	m ² · K/W
对流换热热阻	$R_h = \frac{1}{hA}$	K/W
单位面积对流换热热阻	$r_h = \frac{1}{h}$	m ² · K/W

热阻串、并联的计算与电阻相同：

串联： $R' = R_1 + R_2$

并联： $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

² 凡物体都具有辐射能力，发射辐射能是物质的固有特性。

³ 传热过程一般是自发、不可逆的。

⁴ 严格地说，热阻概念只适用于一维热量传递过程，且在传递过程中热量不能有任何形式的损耗。

总传热系数：将传热热流密度的计算公式写成

$$\Phi = A \frac{\Delta t}{\sum r_{\lambda} + \sum r_h} = Ak\Delta t$$

$$q = k\Delta t$$

则 k 称为总传热系数(Overall htc)。

k 越大，传热越好。若要增大 k ，可增大 h_1, λ_i 或减小 δ_i 。

1 导热理论基础

1.1 温度场

温度场是描绘物体温度的时空分布的数学工具。对于直角坐标系，温度场可表述为：

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

t ：温度； x, y, z ：空间坐标； τ ：时间。

如果温度场不随时间而变化，即 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ ，则为稳态温度场，此时导热过程称为稳态导热；反之，为非稳态导热。

温度场中所有温度相同的点构成的面叫做等温面，不同等温面与同一平面相交形成的一簇曲线称为等温线。两个不同温度的等温面/等温线不会彼此相交。

温度梯度：温度上升率最大的方向矢量，可表述为 $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\mathbf{k}$ （直角坐标系）。

热流矢量：表征单位时间通过单位面元的热能的矢量，记为 q 。直角坐标系中，热流矢量 q 在三个坐标轴上的分量可记为 q_x, q_y, q_z ， $q = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j} + q_z\mathbf{k}$ 。

1.2 傅里叶定律

傅里叶定律

傅里叶定律确定了热流矢量与温度梯度的关系：热流矢量方向与温度梯度相反，指向温度降低的方向。

$$q = -\lambda \nabla t$$

因此，要确定热流矢量的大小和方向，就必须知道温度梯度，即知道物体的温度场。

傅里叶定律的局限性：

- 只适用于稳态及弱瞬态热过程：与热的扰动相对应，热流矢量和温度梯度的建立是不需时间的。
- 只适用于各向同性材料。

1.3 热导率

热导率是物体中单位温度降度单位时间通过单位面积的导热量，单位为 $W/(m \cdot K)$ 。热导率表征物质导热能力大小，是物体的一个重要热物性参数，

- 气体热导率：气体热导率的数值约在 $0.006 \sim 0.6 W/(m \cdot K)$ 范围内。气体的导热是由于分子的热运动和相互碰撞时所发生的能量传递。

常温常压下气体热导率可表示为：

$$\lambda = \frac{1}{3} \bar{u} l \rho c_v$$

- \bar{u} : 气体分子运动的平均速度。
- l : 气体分子两次碰撞间的平均自由程。
- ρ : 气体密度。
- c_v : 气体的比定容热容。

气体热导率随温度升高而增大。

- 液体热导率: 液体热导率数值约在 $0.07 \sim 0.7 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 范围内。液体的导热主要是靠晶格的振动来实现。影响液体导热特性的因素很复杂, 暂时还没有公认的理论可以解释。
- 金属热导率: 金属热导率数值约在 $12 \sim 428 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 范围内。金属的导热主要依靠自由电子迁移, 以晶格震动为辅。金属导热机理与导电一致, 热导率与电导率互成比例。大多数纯金属的热导率随温度升高而减小, 大多数合金的热导率随温度升高而增大。
- 非金属热导率: 建筑材料、保温材料的热导率数值约在 $0.025 \sim 3.0 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 范围内。非金属中自由电子被束缚, 依靠晶格振动导热。它们的热导率随温度升高而增大。

1.4 导热微分方程式

直角坐标系中的导热微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + q_v = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla t) + q_v = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

- λ : 热导率 $[\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})]$ 。
- q_v : 单位体积单位时间发热量 $[\text{W}/\text{m}^3]$ 。
- ρ : 密度 $[\text{kg}/\text{m}^3]$ 。
- c : 比热容 $[\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$ 。
- t : 温度 $[\text{K}]$ 。

导热微分方程式的推导

直角坐标系中, 取一微元体 $dV = dxdydz$, 考察其单位时间 $d\tau$ 内的能量变化。

- 导入与导出微元体的净热量:

- $d\tau$ 时间内, 沿着 x 轴方向, 导入微元体的热量为

$$d\Phi_x = q_x dydzd\tau$$

- 导出微元体的热量为

$$d\Phi_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau = (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dydzd\tau$$

- 故沿 x 轴方向导入与导出微元体的净热量为

$$d\Phi_x - d\Phi_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzd\tau$$

- x, y, z 三个方向导入和导出微元体的净热量之和为

$$I_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dxdydzd\tau$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z})\right] dxdydzd\tau$$

- 微元体内热源发热量:

$$I_2 = q_v dx dy dz d\tau$$

- 微元体热力学能增量:

$$I_3 = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz d\tau$$

由 $I_1 + I_2 = I_3$ 得导热微分方程式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

1.5 导热过程的单值性条件

- 时间条件: 稳态过程没有单值性的时间条件, 因为温度场不随时间发生变化。对于非稳态导热过程, 应该说明导热过程开始时物体内的温度场, 即 $t|_{\tau=0} = f(x, y, z)$ 。
- 第一类边界条件: 已知任何时刻物体边界面上的温度值, 即 $t|_s = t_w$ 。
- 第二类边界条件: 已知任何时刻物体边界面上的热流密度值, 即 $q|_s = q_w$, 或 $-\frac{\partial t}{\partial n}|_s = \frac{q_w}{\lambda}$ 。
- 第三类边界条件: 已知边界面周围流体温度 t_f 与边界面和流体之间的表面传热系数 h , 即 $-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}|_s = h(t|_s - t_f)$ 。
- 第四类边界条件: 又称接触面边界条件, 即两物体紧密接触, 温度相等, 通过接触面的热流密度也相等, 可表示为 $t_1|_s = t_2|_s, \lambda \frac{\partial t_1}{\partial n}|_s = \lambda \frac{\partial t_2}{\partial n}|_s$ 。

2 稳态导热

在稳态导热过程中, 物体的温度不随时间发生变化, 即 $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ 。此时, 若物体的热物性为常数, 导热微分方程式具有以下形式:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

无内热源情况下, 上式简化为

$$\nabla^2 t = 0$$

2.1 通过平壁的导热

若平壁的高度和宽度远大于厚度, 可视为无限大平壁, 此时可认为温度沿高度和宽度的变化率很小, 仅沿厚度方向变化, 即一维稳态导热:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) + q_v = 0$$

第一类边界条件下的平壁导热

对于 λ 为常数, 厚度为 δ 的单层平壁, 导热微分方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

边界条件:

$$x = 0, \quad t = t_{w1}$$

$$x = \delta, \quad t = t_{w2}$$

温度分布:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} + \frac{q_v}{2\lambda}\delta\right) + t_{w1} \\ &= \frac{\delta x - x^2}{2\lambda}q_v + \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta}x + t_{w1} \\ \frac{dt}{dx} &= 0 \Rightarrow x = \frac{\delta}{2} + \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} \frac{\lambda}{q_v} \end{aligned}$$

热流密度:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \left[\frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} + \frac{\delta - 2x}{2\lambda} q_v \right]$$

第三类边界条件下的平壁导热

对于 λ 为常数, 无内热源, 厚度为 δ 的单层平壁, 导热微分方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

边界条件:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{x=0} &= h_1(t_{f1} - t \Big|_{x=0}) \\ -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{x=\delta} &= h_2(t \Big|_{x=\delta} - t_{f2}) \end{aligned}$$

热流密度:

$$q \Big|_{x=0} = h_1(t_{f1} - t_{w1}), \quad q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2}) \quad q \Big|_{x=\delta} = h_2(t_{w2} - t_{f2})$$

联立解得

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}$$

或写作

$$q = k(t_{f1} - t_{f2})$$

其中 k 为传热系数。

热阻:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}$$

对于沿复合平壁的导热, 仍可近似地当作一维导热问题处理, 按照串并联思想求出热阻 R , 则 $q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \frac{\Delta t}{R} = k\Delta t$ 。

2.2 通过圆筒壁的导热

考虑一长为 l , 内半径为 r_1 , 外半径为 r_2 的圆筒壁的导热过程。

第一类边界条件下的单层圆筒壁导热

对于 λ 为常数的单层圆筒壁, 导热微分方程:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = 0$$

边界条件:

$$r = r_1, \quad t = t_{w1}$$

$$r = r_2, \quad t = t_{w2}$$

温度分布：

$$t = C_1 \ln r + C_2 = t_{w1} - (t_{w1} - t_{w2}) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

热流量：

$$\Phi = -\lambda \frac{dt}{dr} 2\pi r l = 2\pi \lambda l \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

单位管长导热热阻：

$$R_l = \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

热流密度：记单位管长的热流量为 q_l ，则

$$q_l = \frac{\Phi}{l} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

第三类边界条件下的单层圆筒壁导热

边界条件：

$$r = r_1, \quad -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{r_1} = h(t_{f1} - t_{w1})$$

$$r = r_2, \quad -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{r_2} = h(t_{w2} - t_{f2})$$

温度分布：

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}$$

单位管长导热热阻：

$$R_l = \frac{1}{h_1 \cdot \pi d_1} + \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{h_2 \cdot \pi d_2}$$

热流密度：记单位管长的热流量为 q_l ，则

$$q_l \Big|_{r=r_1} = h_1 \cdot 2\pi r_1 (t_{f1} - t_{w1}) \quad q_l \Big|_{r=r_2} = h_2 \cdot 2\pi r_2 (t_{w2} - t_{f2}) \quad q_l = \frac{(t_{w1} - t_{w2})}{\frac{1}{2\pi \lambda \ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

在稳态传热过程中， $q_l \Big|_{r=r_1} = q_l \Big|_{r=r_2} = q_l$ ，联立解得

$$q_l = \frac{(t_{f1} - t_{f2})}{\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi r_1} + \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi r_2}}$$

第三类边界条件下的多层圆筒壁导热

考虑由 n 层不同材料组成的多层圆筒壁。

边界条件：

$$r = r_1, \quad -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{r_1} = h(t_{f1} - t_{w1})$$

$$r = r_2, \quad -\lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{r_2} = h(t_{w2} - t_{f2})$$

热流密度：记单位管长的热流量为 q_l ，则

$$q_l = \frac{(t_{f1} - t_{f2})}{\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi r_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi \lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{h_2 \cdot 2\pi r_{n+1}}}$$

临界热绝缘直径

工程上，为减少管道的散热损失，常在管道外侧覆盖热绝缘层或称隔热保温层。设 d_1, d_2 分别为管道的内径、外径， d_x 为保温层的外径， λ_1 为管道材料的热导率， λ_{ins} 为保温层材料的热导率。

覆盖保温层的管道单位长度热阻为

$$R_l = \frac{1}{h_1 \cdot \pi d_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_{\text{ins}}} \ln \frac{d_x}{d_2} + \frac{1}{h_2 \cdot \pi d_x}$$

随着 d_x 的增大，总热阻先减小后增大，具有极小值。对应于总热阻达到极小值时的保温层外径记为 d_c ，可解得

$$d_c = \frac{2\lambda_{\text{ins}}}{h_2}$$

因此在管道外侧覆盖保温层时，必须注意，如果管道外径 d_2 小于临界热绝缘直径 d_c ，则覆盖保温层使得管道传热量变得更大。只有管道外径 d_2 大于临界热绝缘直径 d_c 时，覆盖保温层才能够减小热损失。

2.3 通过肋臂的导热

从平直基面上伸出而本身具有不变截面的肋称为等截面直肋。设肋片高为 l ，宽为 L ，厚为 δ ，横截面积为 $A_L = L \times \delta$ ，周边长度为 $U = 2(L + \delta)$ 。

分析肋片的热量传递过程可知：在 x 方向（肋片高度方向）上，热量以导热方式从肋基导入，随后热量除了以导热形式继续沿 x 方向传递外，同时在 y 方向（肋片厚度方向）上通过对流传热向周围介质散热。由于肋片高度 l 往往比厚度 δ 大得多，可近似认为肋片内的温度分布是沿 x 方向的一维稳态温度场。

关于对流传热的影响，可将其等效为负内热源。值得注意的是，肋片温度沿 x 方向变化，故肋片表面对流传热密度也沿 x 方向变化。若在距肋基 x 处取一长度为 dx 的微元，该段的对流传热量为 $h(t - t_f)Udx$ ，故微元段内热元强度应为 $q_v = -\frac{h(t - t_f)Udx}{A_L dx}$ 。

肋臂的导热微分方程：

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \implies \frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{hU}{\lambda A_L}(t - t_f) = 0$$

该方程亦可写作

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = m^2(t - t_f)$$

其中 $m = \sqrt{\frac{hU}{\lambda A_L}}$ ，单位是 m^{-1} 。

在 $x = 0$ 处，边界条件是给定的肋基温度，即 $x = 0, t = t_0$ ；在 $x = l$ 处，假定肋端是绝热的，则边界条件为 $x = l, \frac{dt}{dx} = 0$ 。

定义过余温度 $\theta = t - t_f$ ，则肋片内温度场的完整数学描述为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{dx^2} = m^2 \theta \\ x = 0, \quad \theta = \theta_0 \\ x = l, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \end{cases}$$

上式是二阶线性常微分方程，其通解为

$$\theta(x) = c_1 \exp(mx) + c_2 \exp(-mx)$$

根据边界条件，可解得

$$\theta(x) = \theta_0 \frac{\exp[m(l-x)] + \exp[-m(l-x)]}{\exp(ml) + \exp(-ml)} = \theta_0 \frac{\cosh[m(l-x)]}{\cosh(ml)}$$

将 $x = l$ 代入，可得肋端的过余温度为

$$\theta(l) = \theta_0 \frac{1}{\cosh(ml)}$$

稳态条件下，肋片表面散至周围介质的热量应等于从肋基导入肋片的热量，因此，肋片表面的散热量为

$$\begin{aligned} \Phi &= -\lambda A_L \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \lambda A_L m \theta_0 \frac{\exp(ml) - \exp(-ml)}{\exp(ml) + \exp(-ml)} \\ &= \sqrt{hU\lambda A_L} \theta_0 \tanh(ml) \end{aligned}$$

肋片效率：在肋片表面平均温度 t_m 下，肋片的实际散热量 Φ 与假定整个肋片表面都处在肋基温度 t_0 时的理想散热量 Φ_0 的比值。

$$\eta_f = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{hUl(t_m - t_f)}{hUl(t_0 - t_f)}$$

等截面直肋肋片表面的平均过余温度 θ_m 可以按下式计算：

$$\theta_m = \frac{1}{l} \int_0^l \theta(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \theta_0 \frac{\cosh[m(l-x)]}{\cosh(ml)} dx = \frac{\theta_0}{ml} \tanh(ml)$$

代回上式，得肋片效率计算式为

$$\eta_f = \frac{\tanh(ml)}{ml}$$

2.4 通过接触面的导热

实际固体表面不是理想平整的⁵，给导热带来额外热阻：接触热阻（Thermal Contact Resistance）

- 两固体壁具有温差时，接合处的热传递机理为接触点间的固体导热和间隙中的空气导热。
- 当空隙中充满导热系数远小于气体的气体时，接触热阻的影响更突出。

$$q = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}$$

3 非稳态导热

- 瞬态导热：物体的温度随时间不断地升高或不断地降低，在经历相当长时间后，物体温度逐渐趋近于周围介质温度，最终达到热平衡。
- 周期性非稳态导热：物体温度按一定的周期发生变化。

3.1 无限大平壁的瞬间导热

⁵两固体表面直接接触的界面容易出现点接触，或者部分的面接触。

3.1.1 严格数学方法

设有一厚度为 2δ 的无限大平壁，其热导率 λ 、热扩散率 a 为已知常数；无内热源；初始时刻平壁温度与两侧流体相同，均为 t_0 ；壁面与流体间对流换热的表面传热系数 h 为常数。令两侧流体温度突然降低为 t_f ，并保持不变。

平壁冷却过程满足的微分方程为：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v$$

设壁面法向量与 x 轴共线，定义过余温度 $\theta = t - t_f$ ，则数学模型可表示为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad \theta = \theta_0 = t_0 - t_f \\ x = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \end{cases}$$

定义傅里叶数、毕渥数两个无量纲特征数：

- 傅里叶数： $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{\tau}{\delta^2/a}$ 。 Fo 是非稳态导热过程的无量纲时间。
- 毕渥数： $Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{\delta/\lambda}{1/h}$ 。 Bi 为物体内部的导热热阻与边界处的对流换热热阻之比。

引进无量纲过余温度 $\Theta = \theta/\theta_0$ 、无量纲坐标 $X = x/\delta$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &\Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \left(\frac{a\tau}{\delta^2} \right)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial (Fo)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \\ \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a}{\delta^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \\ \tau = 0, \quad \Theta = \Theta_0 = 1 \\ X = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ X = 1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = -\frac{h\delta}{\lambda} \Theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial (Fo)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \\ \tau = 0, \quad \Theta = \Theta_0 = 1 \\ X = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ X = 1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial X} = -Bi \cdot \Theta \end{cases} \end{aligned}$$

由无量纲数学模型可知， Θ 是 Fo, Bi, X 三个无量纲参数的函数： $\Theta = f(Fo, Bi, X)$ 。由数学物理方法，解得

$$\Theta = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \beta_n}{\beta_n + \sin \beta_n \cos \beta_n} \cos \left(\beta_n \frac{x}{\delta} \right) e^{-\beta_n^2 \cdot Fo}$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是特征方程的正根： $\cot \beta = \frac{\beta}{Bi}$ 。

当 $Fo \geq 0.2$ ，近似取级数的第一项已足够精确，此时非稳态导热问题的解为：

$$\Theta = \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \beta_1}{\beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_1} \cos \left(\beta_1 \frac{x}{\delta} \right) e^{-\beta_1^2 \cdot Fo}$$

取对数得

$$\ln \theta = -m\tau + \ln \left[\theta_0 \frac{2 \sin \beta_1}{\beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_1} \cos \left(\beta_1 \frac{x}{\delta} \right) \right], \quad m = \beta_1^2 \frac{a}{\delta^2}$$

截距是与时间、位置无关的常数，只取决于第三类边界条件、平壁的物性和几何尺寸。

当 $Fo \geq 0.2$ 时，平壁内所有各点过余温度的对数都随时间线性变化，并且变化曲线的斜率都相等，这一温度变化阶段称为非稳态导热的正规阶段（物体内部各点温度变化率遵循相同规律）。

3.1.2 集总参数法

无限大平板在冷却时，其第三类边界条件为

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\pm\delta} = h\theta \Big|_{x=\pm\delta}$$

该条件的几何意义：在整个非稳态导热过程中，平壁内过余温度分布曲线在边界处的切线都通过点 $O'(\delta + \frac{\lambda}{h}, 0)$ ，即 $O'(\delta + \delta/Bi, 0)$ 。该点称为第三类边界条件的定向点。

- $Bi \rightarrow \infty$ ：对流换热热阻趋于零，一开始平壁表面温度就立即变为流体温度，相当于给定了壁面温度，平壁内部的温度变化完全取决于平壁的导热热阻。此时定向点在平壁表面上。当 $Bi > 100$ ，可按此情况处理。
- $Bi \rightarrow 0$ ：平壁导热热阻趋于零，平壁内部各点温度在任一时刻都趋于一致，只随时间而变化，变化的快慢主要取决于平壁表面的对流换热强度。此时定向点在无穷远处。当 $Bi < 0.1$ ，可按此情况处理。

集总参数法

集总参数法，指忽略物体内部导热热阻，认为物体温度均匀一致的分析方法。当导热过程 $Bi \rightarrow 0$ ，可使用集总参数法求解。

根据能量守恒，单位时间内物体热力学能的变化量应该等于物体表面与流体之间的对流换热量，故有：

$$\begin{aligned} \rho c V \frac{dt}{d\tau} &= -hA(t - t_f) \\ \Rightarrow \rho c V \frac{d\theta}{d\tau} &= -hA\theta \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} &= -\frac{hA}{\rho c V} d\tau; \quad \tau = 0, \quad \theta = \theta_0 = t_0 - t_f \\ \Rightarrow \ln \frac{\theta}{\theta_0} &= -\frac{hA}{\rho c V} \tau \\ \Rightarrow \theta &= \theta_0 \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right) \end{aligned}$$

- c ：比热容[J/(kg·K)]。
- A ：总表面积[m²]。
- V ：体积[m³]。
- θ ：过余温度 $t - t_f$ [K]。
- h ：对流换热系数[W/m²·K]。

导热体在 τ 时刻，单位时间内传给流体的热量：

$$\Phi(\tau) = hA(t(\tau) - t_\infty) = hA\theta = hA\theta_0 \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$$

导热体在时间 $0 \sim \tau$ 内传给流体的总热量：

$$Q_\tau = \int_0^\tau \Phi(\tau) d\tau = \rho c V \theta_0 \left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau}\right)$$

时间常数： $\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$ 。当 $\tau = \tau_c$ 时， $\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} \approx 0.3679$ 。

时间常数反映物体对环境温度变化响应的快慢，时间常数越小，物体的温度变化越快。工程上认为 $\tau = 4\tau_c = 4\frac{\rho c V}{hA}$ 时导热体已达到热平衡状态（此时 $\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-4} \approx 0.0183$ ）。

集总参数法不仅适用于无限大平板。对于形状如平板、柱体或球的物体，只要满足 $Bi < 0.1$ ，就可以使用集总参数法计算。（注意：对于无限大平壁，厚度为 2δ 而非 δ ，面积取 $2A$ 而非 A ）

无限大平壁	$Bi = \frac{h\delta}{\lambda}$	$ Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$
无限长圆柱	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$	$ Fo = \frac{a\tau}{R^2}$
圆球	$Bi = \frac{hR}{\lambda}$	$ Fo = \frac{a\tau}{R^2}$

对于非稳态导热问题，首先应判断 Bi 是否小于0.1。若是，可用集总参数法；若不是，再判断 $Fo \geq 0.2$ ，若是，可采用线算图。

3.2 半无限大平壁的瞬态导热

半无限大物体,是指以无限大的 $y-z$ 平面为界面,在 $+x$ 方向延伸至无穷远的物体,例如大地。对于半无限大均质物体,设其初始温度为 t_0 ;导热过程开始时,表面温度突然升为 t_w ,并维持不变。设过余温度 $\theta = t - t_0$,导热过程的数学模型可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \tau = 0, \quad \theta = 0 \\ x = 0, \quad \theta = t_w - t_0 = \theta_w \\ x \rightarrow \infty, \quad \theta = 0 \end{cases}$$

由数学物理方法,可以求出温度场的分析解:

$$\theta(x, \tau) = (t_w - t_0) \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-u^2) du \right] = \theta_w \operatorname{erfc}(u)$$

- $u = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$;
- $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-u^2) du$, 是高斯误差函数;
- $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-u^2) du$, 是高斯误差补函数。

当 $u = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 2$, $\frac{\theta}{\theta_w} = \operatorname{erfc}(u) \approx 4.68 \times 10^{-3} \approx 0$ 。工程上认为, $u \geq 2$ 时, 相对过余温度 $\frac{\theta}{\theta_w}$ 为0。亦即:

- 在 τ 时刻, $x \geq 4\sqrt{a\tau}$ 深处的温度尚未变化, 仍为 t_0 , $4\sqrt{a\tau}$ 也称为时刻 τ 的渗透厚度;
- 当 $\tau \leq \frac{x^2}{16a}$ 时, 深度 x 处的温度保持不变, 时间 $\frac{x^2}{16a}$ 称为深度 x 处的惰性时间。

根据傅里叶定律, 半无限大物体内任意一点在 τ 时刻的热流密度为

$$q(x, \tau) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right)$$

表面($x = 0$)在 τ 时刻的热流密度为

$$q_w(\tau) = \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} = (t_w - t_0) \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi \tau}}$$

在 $0 \sim \tau$ 时间间隔内, 流过单位表面积的热量为

$$Q = \int_0^\tau q_w d\tau = 2(t_w - t_0) \sqrt{\lambda \rho c} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$$

可见, 在温差一定的情况下, $\sqrt{\lambda \rho c}$ 越大, 通过表面的热量越多。 $\sqrt{\lambda \rho c}$ 称为吸热系数, 反映物体对与其接触的高温物体的吸热能力。

3.3 周期性非稳态导热

考虑均质半无限大物体周期性变化边界条件下的温度场, 其边界条件为

$$t(0, \tau) = t_m + A_w \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right)$$

定义过余温度 $\theta = t - t_m$, 则半无限大物体内的温度场可描述为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ x = 0, \quad \theta(0, \tau) = A_w \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) \\ x \rightarrow \infty, \quad \theta(\infty, \tau) = 0 \end{cases}$$

应用分离变量法可求得

$$\theta(x, \tau) = A_w \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{aT}}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau - \sqrt{\frac{\pi}{aT}}x\right)$$

- 周期性：各空间位置上的温度都以相同周期 T 波动。
- 衰减性：温度波振幅沿深度方向按指数规律衰减：

$$A(x) = A_w \exp\left(\sqrt{-\frac{\pi}{aT}}x\right)$$

衰减度： $V = \frac{A_w}{A_x} = \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{aT}}x\right)$ 。工程上通常将 $V < 100$ 的地段称为显波层，将 $V > 100$ 的地段称为等温层。等温层以上的建筑称为浅埋建筑，等温层以下的建筑称为深埋建筑。

- 延迟性：深度 x 处的温度达到最大值的时间要比表面的迟，延迟时间为：

$$\tau' = \left(\sqrt{\frac{\pi}{aT}}x\right) / \left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{T}{a\pi}}$$

4 导热数值解法基础

4.1 建立离散方程的方法

在分析解法中，求解过程是应用数学物理方法求解偏微分方程，得到温度 t 与空间变量 (x, y, z) 与时间变量 τ 之间的函数关系式，由此可获得物体任一位位置任一时刻的温度值。

基于有限差分法或控制容积法的数值解法，则把物体分割为有限数目的网格单元，把原来在空间和时间上连续的物理量的场，转变为有限个离散的网格单元节点上的物理量的集合，然后用数值解法求解针对各个节点建立起来的离散方程，得到各节点上所求物理量的集合。

以二维稳态导热为例，常常将求解区域沿 x 方向和 y 方向分别按间距 Δx 和 Δy 用一系列与坐标轴平行的网格线分割成许多小的矩形网格，网格线的交点称为网格单元节点，各节点位置用 (i, j) 表示。

对于非稳态导热，除了在空间上把物体分割成网格单元外，还要把时间分割成许多间隔 $\Delta \tau$ ，时间间隔的顺序用 k 表示，网格单元的时空坐标用 (i, j, k) 表示。

4.1.1 有限差分法

有限差分法应用泰勒级数展开式，把导热微分方程中的各阶导数用相应的差分表达式来代替。例如，用节点 (i, j) 的温度参数来表示节点 $(i+1, j)$ 的温度时，根据泰勒展开有

$$t_{i+1,j} = t_{i,j} + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

由此可得节点 (i, j) 温度对 x 的一阶导数的向前差分表达式：

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

类似地，可用节点 (i, j) 的温度参数来表示节点 $(i-1, j)$ 的温度：

$$t_{i-1,j} = t_{i,j} - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

由此可得节点 (i, j) 温度对 x 的一阶导数的向后差分表达式：

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{t_{i,j} - t_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

以上两式相减，移项整理可得节点 (i, j) 温度对 x 的一阶导数的中心差分表达式：

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} - t_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

以上表达式是一个二阶截差公式。前两式分别为向前差分表达式、向后差分表达式，是一阶截差公式。当 Δx 足够小，二阶截差公式更为精确。

根据同样规则，可以写出节点 (i, j) 温度对 x 的二阶导数的中心差分表达式：

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

尽管中心差分表达式的截差较小，表示温度对时间的一阶导数时，仍然只采用向前差分或向后差分，因为应用温度对时间一阶导数的中心差分表达式求解非稳态导热问题将导致数值解不稳定。

考虑常物性、无热源二维稳态导热过程，应用上述分析方法，可得出其节点温度离散方程：

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= 0 \\ \lambda \frac{t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \lambda \frac{t_{i,j+1} - 2t_{i,j} + t_{i,j-1}}{\Delta y^2} &= 0 \end{aligned}$$

4.1.2 热平衡法

热平衡法通过分析每个网格单元能量的流入与流出建立方程。例如，对于常物性、无热源二维稳态导热过程，考虑节点 $P(i, j)$ ，以及在 x, y 方向上与 P 相邻的节点 $R(i+1, j), L(i-1, j), T(i, j+1), B(i, j-1)$ 。则节点 P 与周围各网格单元间的导热量可由傅里叶导热定律直接求得：

$$\begin{aligned} \Phi_{LP} &= \lambda \frac{t_{i-1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} \Delta y, & \Phi_{RP} &= \lambda \frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} \Delta y \\ \Phi_{TP} &= \lambda \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j}}{\Delta y} \Delta x, & \Phi_{BP} &= \lambda \frac{t_{i,j-1} - t_{i,j}}{\Delta y} \Delta x \end{aligned}$$

导入与导出微元体的净热量等于0，即得节点 $P(i, j)$ 温度的离散方程：

$$\begin{aligned} \Phi_{LP} + \Phi_{RP} + \Phi_{TP} + \Phi_{BP} &= 0 \\ \lambda \frac{\Delta y}{\Delta x} (t_{i+1,j} - 2t_{i,j} + t_{i-1,j}) + \lambda \frac{\Delta x}{\Delta y} (t_{i,j+1} - 2t_{i,j} + t_{i,j-1}) &= 0 \end{aligned}$$

4.2 稳态导热的数值计算

以常物性、无热源的二维稳态导热过程为例，若网格划分是均匀的，即 $\Delta x = \Delta y$ ，则内节点离散方程为：

$$t_{i+1,j} + t_{i-1,j} + t_{i,j+1} + t_{i,j-1} - 4t_{i,j} = 0$$

对于边界节点，考虑右侧边界节点 $P(i, j)$ ：

- 第一类边界条件：边界节点温度恒定，直接以数值形式参与到离散方程中。
- 第二类边界条件：边界热流密度恒定，记为 q_w ，

$$\begin{aligned} \lambda \frac{t_{i-1,j} - t_{i,j}}{\Delta x} \Delta y + \lambda \frac{t_{i,j-1} - t_{i,j}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} + \lambda \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j}}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} + q_w \Delta y &= 0 \\ t_{i,j} &= \frac{1}{4} \left(2t_{i-1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1} + \frac{2\Delta x q_w}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

特别地，对于绝热边界条件，有

$$t_{i,j} = \frac{1}{4} \left(2t_{i-1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1} \right)$$

- 第三类边界条件：已知对流传热表面传热系数 h 和周围流体温度 t_f ，此时 $q_w = h(t_f - t_{i,j})$ ，与第二类边界条件类似地，可得

$$t_{i,j} = \frac{\left(2t_{i-1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1} + \frac{2h\Delta x}{\lambda} t_f \right)}{4 + 2\frac{h\Delta x}{\lambda}}$$

4.3 非稳态导热的数值计算

本节中, 考虑常物性、无内热源的一维非稳态导热, 其导热微分方程式为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

将物体沿 x 方向按间距 Δx 分为 n 段, 沿时间轴从 $\tau = 0$ 开始按间距 $\Delta \tau$ 分为 K 段。用 i 表示内节点位置, k 表示 $k\Delta \tau$ 时刻。

4.3.1 显式离散格式

温度对 x 的二阶导数的离散方程为

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{i,k} = \frac{t_{i-1}^k - 2t_i^k + t_{i+1}^k}{\Delta x^2}$$

温度对时间的一阶导数, 若采用向前差分, 则有

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{i,k} = \frac{t_i^{k+1} - t_i^k}{\Delta \tau}$$

由以上两式得内节点离散方程

$$\frac{t_i^{k+1} - t_i^k}{\Delta \tau} = a \frac{t_{i-1}^k - 2t_i^k + t_{i+1}^k}{\Delta x^2}$$

移项整理得

$$t_i^{k+1} = \frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2}(t_{i-1}^k + t_{i+1}^k) + \left(1 - 2\frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2}\right)t_i^k$$

亦即

$$t_i^{k+1} = \text{Fo}(t_{i-1}^k + t_{i+1}^k) + (1 - 2\text{Fo})t_i^k$$

用上式可以由 $k\Delta \tau$ 时刻各节点温度直接求出 $(k+1)\Delta \tau$ 时刻各节点温度。由于节点温度 t_i^{k+1} 可以被 $k\Delta \tau$ 时刻的各节点温度以显函数的形式表示, 故这种计算公式被称为显式离散格式。

值得注意的是, 在显式格式中, t_i^k 系数 $\left(1 - 2\frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2}\right)$ 必须大于或等于0, 即 $\text{Fo} = \frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$ 。否则, 计算值将出现波动, 违反热力学第二定律。同理可以证明, 对于二维非稳态导热均匀网格的显式离散格式, 稳定性条件为 $\text{Fo} = \frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}$ 。

4.3.2 隐式离散格式

对于温度对时间的一阶导数, 若采用向后差分, 则有

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_{i,k} = \frac{t_i^k - t_i^{k-1}}{\Delta \tau}$$

由此可得内节点离散方程

$$\frac{t_i^k - t_i^{k-1}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{i-1}^k - 2t_i^k + t_{i+1}^k}{\Delta x^2}$$

移项整理, 并平移一个时间步, 可得

$$\left(1 + 2\frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2}\right)t_i^{k+1} = \frac{a\Delta \tau}{\Delta x^2}(t_{i-1}^{k+1} + t_{i+1}^{k+1}) + t_i^k$$

亦即

$$\left(1 + 2\text{Fo}\right)t_i^{k+1} = \text{Fo}(t_{i-1}^{k+1} + t_{i+1}^{k+1}) + t_i^k$$

由上式不能直接根据 $k\Delta \tau$ 时刻各节点温度求出 $(k+1)\Delta \tau$ 时刻各节点温度, 需要列方程组联立求解。这种格式被称为隐式离散格式。此时 Δx 和 $\Delta \tau$ 的选取可以是任意的。

4.3.3 边界条件

对于边界节点，考虑左侧边界节点 $P(0)$ ：

- 第一类边界条件：给定边界温度，直接以数值形式参与到离散方程中。
- 第二类边界条件⁶：给定边界热流密度，记为 q_w^k ，列出热平衡方程得：

$$q_w^k + \lambda \frac{t_1^k - t_0^k}{\Delta x} = \rho c \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Rightarrow t_0^{k+1} = t_0^k + \frac{2\Delta \tau}{\rho c} \left(\frac{q_w^k}{\Delta x} + \frac{\lambda(t_1^k - t_0^k)}{\Delta x^2} \right)$$

特别地，对于绝热边界条件，有

$$t_0^{k+1} = t_0^k + \frac{2\lambda(t_1^k - t_0^k)}{\rho c \Delta x^2} \Delta \tau$$

- 第三类边界条件：给定对流传热表面传热系数 h 和周围流体温度 t_f^k ，

— 显式格式：列出热平衡方程得：

$$h(t_f^k - t_0^k) + \lambda \frac{t_1^k - t_0^k}{\Delta x} = \rho c \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Rightarrow t_1^k - t_0^k + \frac{h\Delta x}{\lambda}(t_f^k - t_0^k) = \frac{\rho c \Delta x^2}{2\lambda \Delta \tau}(t_0^{k+1} - t_0^k)$$

$$\Rightarrow t_1^k - t_0^k + \text{Bi}(t_f^k - t_0^k) = \frac{1}{2\text{Fo}}(t_0^{k+1} - t_0^k)$$

$$\Rightarrow t_0^{k+1} = 2\text{Fo}(t_1^k + \text{Bi}t_f^k) + (1 - 2\text{Fo} - 2\text{BiFo})t_0^k$$

稳定性条件：

$$1 - 2\text{Fo} - 2\text{BiFo} \geq 0, \quad \text{Fo} \leq \frac{1}{2 + 2\text{Bi}}$$

同理可以证明，在第三类边界条件下，二维非稳态导热均匀网格的显式离散格式的稳定性条件为：

$$\text{Fo} \leq \frac{1}{4 + 2\text{Bi}}$$

— 隐式格式：使用向后差分法可得

$$h(t_f^{k+1} - t_0^{k+1}) + \lambda \frac{t_1^{k+1} - t_0^{k+1}}{\Delta x} = \rho c \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Rightarrow t_1^{k+1} - t_0^{k+1} + \frac{h\Delta x}{\lambda}(t_f^{k+1} - t_0^{k+1}) = \frac{\rho c \Delta x^2}{2\lambda \Delta \tau}(t_0^{k+1} - t_0^k)$$

$$\Rightarrow t_1^{k+1} - t_0^{k+1} + \text{Bi}(t_f^{k+1} - t_0^{k+1}) = \frac{1}{2\text{Fo}}(t_0^{k+1} - t_0^k)$$

$$\Rightarrow (1 + 2\text{Fo} + 2\text{BiFo})t_0^{k+1} = 2\text{Fo}(t_1^{k+1} + \text{Bi} \cdot t_f^{k+1}) + t_0^k$$

隐式离散格式是无条件稳定的。

5 对流传热分析

5.1 对流换热概述

- 对流换热过程定义：流体与固体壁直接接触时所发生的热量传递过程。
 - 对流换热不同于热对流，它既有热对流，也有导热，不是基本热量传递方式。
 - 回顾：热对流：物体不同的各部分之间，由于发生相对的宏观运动而把热量由一处传递到另一处的现象。

⁶个人补充，不保证正确。

- 对流换热的特点：

- 导热与热对流同时存在的复杂热传递过程；
- 必须有直接接触（流体与壁面）和宏观运动；
- 必须有温差；
- 由于流体粘性和壁面摩擦阻力，紧贴壁面处会形成速度梯度很大的速度边界层，以及温度场梯度很大的热边界层。

- 对流换热基本计算式：

$$\Phi = hA(t_w - t_\infty)$$

其中 Φ 为热流量， h 为对流传热系数， A 为壁面积， t_w 为壁面温度， t_∞ 为流体温度。

- 对流换热影响因素：

- 流动起因：
 - * 自然对流：流体因各部分温度不同而引起的密度差异所产生的流动；
 - * 强制对流：由外力（如：泵、风机、水压头）作用所产生的流动；
- 流动状态：
 - * 层流运动：流体质点的运动轨迹光滑而有规则；各部分的分层流动互不掺混、扰动，流场是稳定的；
 - * 湍流运动：与层流运动相反，是很粗糙的、不规则的、混乱的、随机性的流动；
- 流体有无相变：
 - * 单相换热；
 - * 相变换热：凝结、沸腾、升华、凝固、融化等；
- 换热表面的几何因素；
- 流体的热物理性质：热导率、密度、比热容、动力粘度、运动粘度、体胀系数等。

5.2 对流传热微分方程组

当粘性流体在壁面上流动时，由于粘性作用，流体流速在靠近壁面处随离壁面距离缩短而逐渐降低；在贴壁处被滞止，处于无滑移状态（ $y = 0, u = 0$ ）。在这极薄的贴壁流体层中，热量只能以导热方式传递。

$$\text{傅里叶定律：} \quad q_{w,x} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{w,x}$$

$$\text{牛顿冷却公式：} \quad q_{w,x} = h_x(t_w - t_\infty)$$

由上式可得对流传热过程微分方程式：

$$h_x = -\frac{\lambda}{t_w - t_\infty} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{w,x}$$

故 h_x 取决于流体热导率、温度差和贴壁流体的温度梯度。温度梯度或温度场取决于流体热物性、流动状态（层流或紊流）、流速的大小及其分布、表面粗糙度等。

温度场由对流传热微分方程组的其余方程确定：

- 质量守恒（连续性方程）：

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

对于密度为常数的二维稳态流动，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- 动量守恒:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

对于稳态流动, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$; 只有重力场时, $F_x = \rho g_x$, $F_y = \rho g_y$ 。

- 能量守恒:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

柱坐标系:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)$$

常物性、无内热源、二维、不可压缩牛顿流体:

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t$$

总结: 常物性、无内热源、二维、不可压缩牛顿流体的对流换热微分方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

四个方程, 可求解四个未知量, 对应于温度场和速度场。

5.3 边界层换热微分方程组

- 流动边界层: 当粘性流体流过物体表面时, 壁面处速度为0, 壁面附近区域速度梯度很大, 称为流动边界层, 其厚度记为 δ 。
- 热边界层: 当壁面与粘性流体间有温差时, 壁面附近温度梯度很大, 称为温度边界层/热边界层, 其厚度记为 δ_t 。
- 边界层特点:
 - 边界层厚度 δ 与壁的定型尺寸 L 相比极小 ($\delta \ll L$)
 - 边界层内存在较大的速度梯度, $y = 0$ 处的速度梯度最大;
 - 流场可以划分为边界层区与主流区:
 - * 边界层区: 流体的粘性作用起主导作用, 流体的运动可用粘性流体运动微分方程组 (N-S方程) 描述;
 - * 主流区: 速度梯度为0, 粘滞应力 $\tau = 0$, 视为无粘性理想流体, 可使用欧拉方程;
 - 流动边界层与热边界层的状况决定了热量传递过程和边界层内的温度分布。
- 湍流边界层:
 - 粘性底层 (层流底层): 紧靠壁面处, 粘滞力会占绝对优势, 使粘附于壁的一极薄层仍然会保持层流特征, 具有最大的速度梯度;
 - 临界距离: 由层流边界层向紊流边界层过渡的距离;
 - 湍流边界层贴壁处的温度梯度明显大于层流, 湍流换热比层流换热强;

- 普朗特数: $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$, 反映流体物性对换热的影响, 即流体动量扩散能力与热量扩散能力的比值。
 - ν : 运动粘度; a : 热扩散系数, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$; η : 动力粘度; c_p : 比定压热容; λ : 热导率;
 - 热边界层厚度随 Pr 增大而减小;
 - 对于 $Pr = 1$ 的流体, 无量纲速度场与温度场的分布曲线完全相同; 对于 $Pr \neq 1$ 的流体, $\frac{\delta_t}{\delta} = Pr^{-\frac{1}{3}}$
- 努谢尔特数: $Nu = \frac{hl}{\lambda}$, 反映对流换热的强度。
 - h : 对流传热系数; l : 特征长度; λ : 热导率。

5.4 相似理论基础

- 基本概念:
 - 同类物理现象: 具有相同性质、服从于同一自然规律、用形式和内容相同的方程式来描写的物理现象。
 - 相似物理现象: 如果同类物理现象之间所有同名物理量场都相似, 即同名的物理量在所有对应时间、对应地点的数值成比例, 则称物理现象相似。
 - 物理现象相似的性质: 彼此相似的物理现象, 同名的相似特征数相等。
- 相似特征数涉及的物理量 (‘和’’代表两相似物理现象的对应物理量):
 - 定性温度: 包含在相似特征数中的温度参数。
 - * 流体温度:
 - 平板流动换热: $t_f = t_{\infty}$
 - 管内流动换热: $t_f = \frac{t'_f + t''_f}{2}$
 - * 热边界层平均温度: $t_m = \frac{t_w + t_f}{2}$
 - * 壁面温度: t_w
 - 特征长度: 包含在相似特征数中的几何长度。
 - * 圆管内流动换热: 直径 d
 - * 沿平板流动换热: 板长 l 或坐标 x
 - * 形状不规则管内流动换热: 当量直径 $4A/U$ (A -截面积; U -湿周)
 - 特征速度: 雷诺数中的流体速度。
 - * 流体外掠平板或绕流圆柱: 取来流速度 u_{∞}
 - * 管内流动: 取截面上的平均速度 u_m
 - * 流体绕流管束: 取最小流通截面的最大速度 u_{\max}
- 物理现象相似的条件:
 - 同类物理现象: 用相同形式和内容的微分方程式描述;
 - 单值性条件相似: 初始、边界条件相似;
 - 同名已定特征数相等。

对流换热的解也可以表示成特征数函数的形式, 称为特征数关联式。一般流体的强迫对流换热特征数关联式为:

$$Nu = C Re^n Pr^m$$

常用特征数总结:

$Nu = \frac{hl}{\lambda}$	努谢尔特数 (Nusslet)
$Re = \frac{\rho ul}{\eta} = \frac{ul}{\nu}$	雷诺数 (Reynolds)
$Pr = \frac{\nu}{a}$	普朗特数 (Prandtl)
$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2}$	欧拉数 (Euler)
$Pe = \frac{ul}{a} = Re \cdot Pr$	贝克利数 (Peclet)
$Ra = Gr \cdot Pr$	瑞利数 (Rayleigh)
$Gr = \frac{g\alpha\Delta tl^3}{\nu^2}$	格拉晓夫数 (Grashof)

6 单相流体对流换热

6.1 管内受迫对流换热

- 流动发展阶段:

- 流动进口段: 流体从进入管口开始, 需经历一段距离, 管断面流速分布和流动状态才能达到定型, 这段距离称为进口段; 此后的稳定阶段称为充分发展段;
- 层流充分发展段: 圆管截面上速度分布为抛物线形; 沿流动方向压力梯度不变;
- 热进口段:

- * 由壁面温度 t_w 、流体温度 t_f 和管内任一点的温度 $t = t(x, r)$ 组成的无量纲温度 $\frac{t_w - t}{t_w - t_f}$ 随管长保持不变;
- * 进口处边界层最薄;
- * 层流热进口段的 h_x 在进口处具有最高值, 随后降低; 若边界层转变为紊流, 则 h_x 先回升, 再降低, 最后趋于不变;
- * 紊流热进口段相比层流短得多;
- * 流动进口段和热进口段的长度不一定相等, $Pr = \frac{\nu}{a} > 1$ 时, 热进口段长, $Pr = \frac{\nu}{a} < 1$ 时, 流动进口段长;

- 热充分发展段:

- * 常物性流体在热充分发展段的对流传热系数 h 为常数;
- * 在常热流条件下, 充分发展段的管壁温度也是呈线性变化的, 且变化速率与流体断面温度的变化速率一致。

- 影响对流换热的几个因素:

- 进口效应: 进口段的对流传热系数 h 比充分发展段的大;
- 弯管效应: 弯管的离心力造成二次环流, 使得换热增强;
- 管壁粗糙度:
 - * 层流: 影响不大;
 - * 湍流: 粗糙点平均高度 $<$ 层流底层厚度时, 影响不大; 粗糙点平均高度 $>$ 层流底层厚度时, 换热增强;
- 流体热物性变化:
 - * 对于液体: 主要是粘性随温度而变化
 - * 对于气体: 粘性、密度、热导率等均随温度变化;
- 管道形状: 在不改变流速及温度的条件下, 管径越小, 传热越强;
 - * 例: 圆管改成椭圆管可以在保证周长不变时, 断面面积及当量直径减小, 传热系数 h 增强 (但阻力升高的幅度更大)。

- 对流换热计算特征数关联式:

- 湍流换热:

- * 迪图斯-玻尔特 (Dittus-Boelter) 关联式: 简单, 便于估算;
- * 西得-塔特 (Sieder-Tate) 关联式;
- * 彼都霍夫 (B.S.Petukhov) 关联式: 准确;
- * 格尼林斯基 (Gnielinski) 关联式;

— 层流换热:

- * 西得-塔特 (Sieder-Tate) 关联式;
- * 热充分发展段:

$$\text{Nu}_f = 3.66 \quad (t_w = \text{const})$$

$$\text{Nu}_f = 4.36 \quad (q_w = \text{const})$$

— 过渡区中对流换热: 格尼林斯基 (V.V.Gnielinski) 关联式;

除管内受迫对流换热外, 还有外掠圆管对流传热、自然对流传热、混合对流传热等, 均可用特征数关联式求解。

7 凝结与沸腾换热

凝结换热与沸腾换热都属于相变换热, 主要是发生在固体与流体界面上的过程。主要特点:

- 流体温度基本保持不变, 在相对较小温差下达到较高放热和吸热目的;
- 换热量主要是潜热 r , r 通常较大。如: $r_{\text{water}} = 2000\text{kJ/kg}$;
- 影响相变换热的物性除了单相流体的影响因素外, 还有 r 、 σ 、 $\rho_l - \rho_v$ (表面张力、浮升力)。

7.1 凝结换热

凝结换热: 蒸气被冷却凝结成液体的换热过程。可分为膜状凝结、珠状凝结、均相凝结三大类。本课程主要学习蒸气同低于其饱和温度的冷壁面接触时发生的凝结换热。

- 膜状凝结 (Film Condensation):

— 特点:

- * 凝液能较好润湿壁面, 在壁面上形成液膜;
- * 凝结时蒸气放出的潜热通过液膜传至壁面;
- * 局部表面传热系数的大小与液膜流态和厚度直接相关:
 - 层流状态: 上部、流速低、换热依靠膜层导热、膜层愈厚、局部表面传热系数愈小;
 - 湍流状态: 膜层增厚、流速增大、对流换热主要通过膜层内的热对流、膜层愈厚、局部表面传热系数愈大。

— 条件: 表面张力 $<$ 附着力; 润湿表面。

— 工业中98% ~ 99%冷凝器是膜状凝结。

- 珠状凝结 (Dropwise Condensation):

— 特点: 凝液不能润湿壁面, 而在壁面上形成小液珠珠状凝结时、液珠下落时清扫壁面; 部分壁面直接与蒸汽接触, 热阻较小, 换热强; 寿命短、成本高、不稳定。

— 条件: 表面张力 $>$ 附着力; 不润湿表面

增强凝结换热的措施:

- 运行上: 排除不凝气体; 及时排油;
- 设计上: 尽量采用水平横管; 控制适当的蒸汽速度; 采用利于排冷凝液的高效冷凝表面; 造成珠状凝结。

7.2 沸腾换热

沸腾 (Boiling): 液体内部产生气泡的剧烈汽化过程。可分为容积沸腾、表面沸腾两大类。

沸腾换热: 加热壁面温度高于液体饱和温度时, 发生液体的沸腾换热过程。

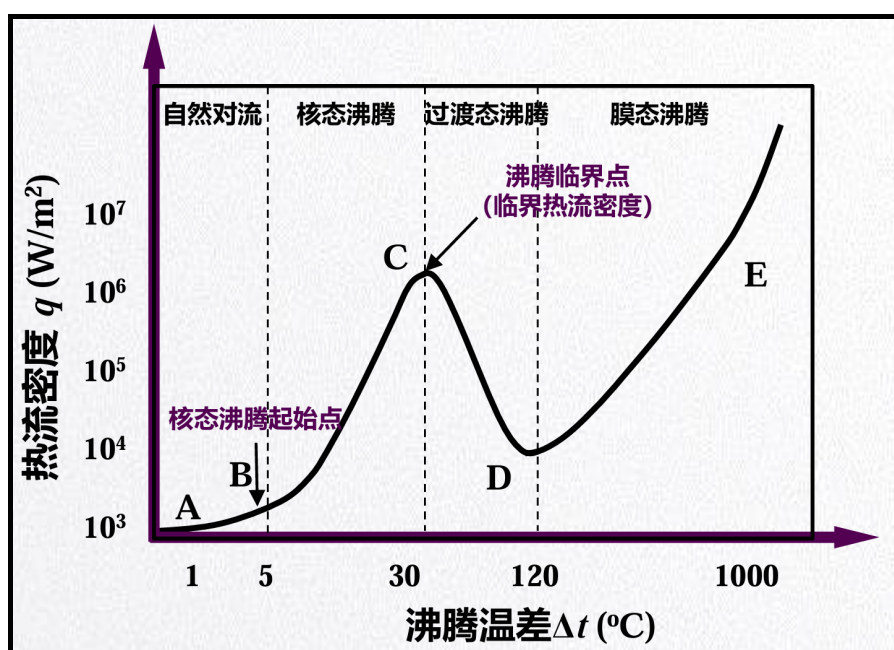
- 容积沸腾 (均相沸腾, homogeneous boiling): 沸腾直接发生在液体容积内部, 且不存在固体加热壁面。
- 表面沸腾 (非均相沸腾, heterogeneous boiling): 沸腾发生在与液体相接触的加热面上。
 - 大空间沸腾 (或大容器沸腾、池沸腾): 热壁面沉浸在具有自由表面的液体中的沸腾;
 - 有限空间沸腾 (或称受迫对流沸腾、管内沸腾)。

沸腾温差: 壁面温度 t_w 与饱和温度 t_s 的差值。

沸腾曲线: 沸腾时热流密度 (热流密度) q 随沸腾温差 $t_w - t_s$ 变化的关系曲线。

大空间沸腾机理:

- A-B: 自然对流沸腾: 液体主体温度低于饱和温度 (沸点), 热量靠自然对流传递, 可按单相流体自然对流规律计算。
- B-C: 核态沸腾 (泡态沸腾): 液体有一定过热度, 气泡大量产生, 并逸出液面, 传热强度剧增, 直至达到热流密度的峰值 q_c , 此时对应的沸腾温差称为临界温度差 Δt_c ; 一般工业设备的沸腾传热都在泡态沸腾下进行。
- C-D: 过渡态沸腾: 生成的气泡过多, 形成不稳定的气膜, 阻碍了传热, 热流密度下降, 直到谷值; 该热流极小值对应点为莱顿-弗罗斯特点 (Leidenfrost Point)。
 - 莱顿-弗罗斯特现象: 将水滴落在滚烫的铁板上, 当铁板温度到达莱顿弗罗斯特点 (193°C 左右) 时, 水珠能够悬浮起来, 并缓慢地逐渐蒸发 (可持续30s左右), 而非立即蒸发。这是因为水珠中跟铁板接触的部分会迅速沸腾形成水蒸气, 使得水珠悬浮起来, 与铁板隔开。由于水蒸气的传热比液体水慢得多, 水滴沸腾的速度大大降低。踏火等杂技的原理即为此。
- D-E: 膜态沸腾: 壁面被稳定的气膜覆盖, 气化只能在气膜-液交界面上进行, 辐射热量急剧增加, 换热强度增加。



8 热辐射的基本定理

8.1 热辐射的本质和特点

发射辐射能是各类物质的固有特性。当原子内部的电子受激和振动时，产生交替变化的电场和磁场，发射电磁波向空间传播，也就是辐射。如果是由于自身温度或热运动而激发产生的电磁波传播，就称为热辐射。

凡波长 $\lambda = 0.38 \sim 0.76\mu\text{m}$ 范围的电磁波属可见光，通常把波长 $\lambda = 0.1 \sim 100\mu\text{m}$ 范围的电磁波称为热射线。

热辐射的本质决定其具有如下几个特点：

- 辐射传热不同于导热、对流传热，它不依赖物体的接触而进行热量传递。
- 辐射传热过程伴随着能量形式的二次转化，即物体的部分热力学能转化为电磁波发射出去。当此电磁波传至另一物体而被吸收时，电磁波能又转化为热能。
- 一切物体（只要温度大于0K）都会不断发射热射线。高温物体和低温物体之间通过辐射互相传递能量，但高温物体传递的多，因此结果是高温物体把能量传给低温物体。

8.2 吸收、反射和穿透

当热射线投射到物体上，遵循可见光的规律，热辐射部分被吸收，部分被反射，其余则透过物体。设投射到物体上全波长范围的总能量为 Φ ，其中吸收量为 Φ_α ，反射量为 Φ_ρ ，穿透量为 Φ_τ ，根据能量守恒定律，有

$$\Phi = \Phi_\alpha + \Phi_\rho + \Phi_\tau$$

等式两端同除以 Φ ，可得

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

- $\alpha = \frac{\Phi_\alpha}{\Phi}$ 称为物体的吸收率，代表被物体吸收的能量所占比例；
- $\rho = \frac{\Phi_\rho}{\Phi}$ 称为物体的反射率，代表被物体反射的能量所占比例；
- $\tau = \frac{\Phi_\tau}{\Phi}$ 称为物体的穿透率，代表穿透物体的能量所占比例。

如果投射的能量是某一波长下的辐射能，上述关系同样适用，即

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

其中 α_λ 、 ρ_λ 、 τ_λ 分别为光谱吸收率、光谱反射率、光谱穿透率。

能全部吸收外来射线（ $\alpha=1$ ）的物体称为**黑体**，能反射所有外来射线（ $\rho=1$ ）的物体称为**白体**，能透过所有外来射线（ $\tau=1$ ）的物体称为**透明体**。

一般气体几乎没有反射能力（ $\rho=0, \alpha+\tau=1$ ），固体和液体几乎没有透射能力（ $\tau=0, \alpha+\rho=1$ ）。

反射角等于入射角的反射现象称为**镜反射**（Specular Reflection），反射光线向各个方向分布的称为**漫反射**（Diffuse Reflection）。

8.3 定向辐射强度与定向辐射力

- 定向辐射强度：在某给定辐射方向上，单位时间、单位可见辐射面积、单位立体角内发射的全部波长的能量。记为 I_θ ，单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$ 。
- 光谱定向辐射强度：在某给定辐射方向上，单位时间、单位可见辐射面积、波长 λ 附近的单位波长间隔内、单位立体角内发射的能量。记为 $I_{\lambda,\theta}$ ，单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \mu\text{m})$ 。

$$I_{\lambda,\theta} = \frac{dI_\theta}{d\lambda}, \quad I_\theta = \int_0^\infty I_{\lambda,\theta} d\lambda$$

- 定向辐射力：在某给定辐射方向上，单位时间、物体单位辐射面积、单位立体角内发射的全部波长的能量。记为 E_θ ，单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr})$ 。定向辐射力 E_θ 与定向辐射强度 I_θ 间的关系为 $E_\theta = I_\theta \cos \theta$ 。
- 辐射力：单位时间、物体单位辐射面积向半球空间发射的全部波长的总能量。记为 E ，单位为 W/m^2 。辐射力 E 与定向辐射力 E_θ 的关系为 $E = \int_{\omega=2\pi} E_\theta d\omega$ ，或 $E_\theta = \frac{dE}{d\omega}$ 。
- 光谱辐射力：单位时间、物体单位辐射面积、波长 λ 附近的单位波长间隔内，向半球空间发射的能量。记为 E_λ ，单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$ 。
- 光谱定向辐射力：在某给定辐射方向上，单位时间、物体单位辐射面积、波长 λ 附近的单位波长间隔内，向单位立体角发射的能量，记为 $E_{\lambda,\theta}$ ，单位为 $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \mu\text{m})$ 。 $E_{\lambda,\theta} = \frac{d^2 E}{d\lambda d\omega}$ 。

8.4 热辐射定律

- 黑体：一个理想的吸收体，能够吸收来自空间各个方向、各种波长的全部投射能量。
- 灰体：光谱发射率 ε_λ 和光谱吸收率 α_λ 与波长 λ 无关的物体。

8.4.1 普朗克定律

- 普朗克定律：黑体光谱辐射力 $E_{b\lambda}$ 和波长 λ 、热力学温度 T 之间满足函数关系：

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(\frac{C_2}{\lambda T}) - 1} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})]$$

- λ ：波长， μm ；
- T ：热力学温度，K；
- C_1 ：普朗克第一常数， $C_1 = 3.743 \times 10^8 \text{W} \cdot \mu\text{m}^4/\text{m}^2$ ；
- C_2 ：普朗克第二常数， $C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ ；

- 维恩位移定律：黑体最大光谱辐射力对应的波长 λ_{\max} 与黑体表面热力学温度 T 的乘积为定值：

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2897.6 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

随着温度 T 升高，峰值波长减小，即逐渐向短波方向移动。

- 维恩公式（适用于短波区）：

$$E_{b\lambda} = C_1 \lambda^{-5} \exp(-\frac{C_2}{\lambda T})$$

- 瑞利-金斯公式（适用于长波区）：

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-4} T$$

8.4.2 兰贝特余弦定律

- 黑体表面具有漫反射的性质，即定向辐射强度在半球空间各个方向上相等：

$$I_{\theta_1} = I_{\theta_2} = \cdots = I_n$$

- 黑体的定向辐射力随与法线夹角 θ 按余弦规律变化：

$$E_\theta = I_n \cos \theta$$

8.4.3 斯蒂芬-玻尔兹曼定律

黑体辐射力 E_b 与表面温度 T 呈四次方关系:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} d\lambda = \sigma_b T^4$$

σ_b 为斯蒂芬-玻尔兹曼常数, $\sigma_b = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 。

实际物体表面的辐射力与同温度下黑体辐射力的比值为物体表面的**发射率**, 记为 ε 。 $\varepsilon = E/E_b$ 。类似地, 还可以定义物体的光谱发射率 $\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$ 、定向发射率 $\varepsilon_\theta = \frac{E_\theta}{E_{b\theta}}$, 定向光谱发射率 $\varepsilon_{\lambda,\theta} = \frac{E_{\lambda,\theta}}{E_{b\lambda,\theta}}$ 。

实际物体的光谱辐射力 E_λ 随着波长和温度的变化是不规则的, 并非严格遵循温度的四次方定律, 但为了简化, 仍按四次方规律计算, 将不规则部分归入发射率 ε 的变化。

8.4.4 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律: 在热平衡状态下, 任意物体表面的光谱定向发射率 $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ 等于它的光谱定向吸收率 $\alpha_{\lambda,\theta}$, 即

$$\alpha_{\lambda,\theta,T} = \varepsilon_{\lambda,\theta,T}$$

同时, 实验证明物体表面的光谱定向发射率和光谱定向吸收率均为物体表面的辐射特性, 它们仅取决于自身的温度 T 。基尔霍夫定律说明, 发射辐射能的能力愈强的物体, 其吸收辐射能的能力也愈强。若表面满足特殊性质, 还可以进一步建立其它发射率与吸收率的联系:

- 漫辐射表面: 光谱发射率等于光谱吸收率, $\alpha_{\lambda,T} = \varepsilon_{\lambda,T}$;
- 灰表面: 定向发射率等于定向吸收率, $\alpha_{\theta,T} = \varepsilon_{\theta,T}$;
- 漫-灰表面: 发射率等于吸收率, $\alpha(T) = \varepsilon(T)$ 。

9 辐射传热计算

9.1 角系数

- 角系数: 表面 i 发射的辐射能中到达表面 j 的能量占总辐射能的份额, 记为 $X_{i,j}$ 。一般情况下, 角系数只与物体的几何形状和相对空间位置相关。

— 两无限大平行平板间的角系数等于1, 在同一平面内的两表面间的角系数等于0。

- 角系数的应用前提:

— 物体表面为漫表面, 即物体发射和反射的定向辐射强度与方向无关;
— 物体表面辐射物性均匀, 即温度、发射率、反射率均匀。

- 角系数的性质:

— 相对性/互换性: 两任意表面间的辐射传热量具有对称性:

$$X_{1,2}A_1 = X_{2,1}A_2$$

— 完整性: 在由 n 个表面组成的封闭空腔中, 任何一个表面发出的辐射能必定全部落在组成封闭系统的各表面上:

$$\sum_{j=1}^n X_{i,j} = 1$$

- 分解性：表面*i*发出的辐射能到达表面*j*的部分等于表面*i*发出的辐射能到达组成表面*j*的各子表面*k*的能量之和：

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^n X_{i,k}$$

- 角系数的求解：

- 积分法：

$$X_{1,2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$

其中 A_1, A_2 为表面积， ϕ_1, ϕ_2 为两表面微元连线与各自法线的夹角。

- 代数法：利用角系数的性质，列出代数方程组求解。

* 例：三个非凹表面组成的空腔：

$$X_{1,2}A_1 + X_{1,3}A_1 = A_1, \quad X_{2,1}A_2 + X_{2,3}A_2 = A_2, \quad X_{3,1}A_3 + X_{3,2}A_3 = A_3$$

$$X_{1,2}A_1 = X_{2,1}A_2, \quad X_{1,3}A_1 = X_{3,1}A_3, \quad X_{2,3}A_2 = X_{3,2}A_3$$

由此可解得各表面间的角系数：

$$X_{1,2} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2A_1}, \quad X_{2,3} = \frac{A_2 + A_3 - A_1}{2A_2}, \quad X_{3,1} = \frac{A_3 + A_1 - A_2}{2A_3}$$

- 两共边垂直矩形截面间角系数公式：

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi W} \left(W \arctan \frac{1}{W} + H \arctan \frac{1}{H} - (H^2 + W^2)^{1/2} \arctan \frac{1}{(H^2 + W^2)^{1/2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2} \times \left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)} \right]^{W^2} \times \left[\frac{H^2(1+H^2+W^2)}{(1+H^2)(H^2+W^2)} \right]^{H^2} \right\} \right)$$

其中 $W = Y/X, H = Z/X$ ， X 为交棱长度， Y, Z 分别为为矩形*i, j*非共边的边长。

- 辐射空间热阻：任意放置两黑表面间的辐射传热为

$$\Phi_{1,2} = (E_{b1} - E_{b2})X_{1,2}A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{X_{1,2}A_1}}$$

此形式可以类比欧姆定律，黑体辐射力 E_{b1}, E_{b2} 为势， $\frac{1}{X_{1,2}A_1}$ 则记为辐射空间热阻，该热阻仅取决于表面间的几何关系。

- 黑表面间辐射传热量求解：类比于电路图，可使用辐射网络图分析。

9.2 灰表面间的辐射传热

9.2.1 辐射表面热阻

投入辐射：投射到表面单位面积上的辐射能，记为 G 。

有效辐射：单位时间离开单位面积表面的总辐射能，记为 J 。该能量包括表面自身的辐射 εE_b 和它对投入辐射的反射 ρG ，即

$$J = \varepsilon E_b + \rho G = \varepsilon_1 E_b + (1 - \alpha)G \quad \text{W/m}^2$$

辐射传热量是有效辐射和投射辐射之差（从表面外部来看），也是自身辐射和吸收辐射之差（从表面内部来看），亦即

$$\frac{\Phi}{A} = J - G = \varepsilon E_b - \alpha G$$

从上式中消去 G ，并考虑漫射灰表面（ $\alpha = \varepsilon$ ），有

$$\Phi = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}}$$

$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}$ 就是漫射灰表面的辐射表面热阻。对黑体而言，表面热阻为零，有效辐射 J 就是黑体辐射力 E_b 。

9.2.2 灰表面间辐射传热计算

只需在每个节点和热源之间加入相应的辐射表面热阻 $\frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i X_i}$ 即可。

对于两灰表面组成的封闭空腔，辐射传热网络为串联，易解得辐射传热量为

$$\Phi_{1,2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{X_{1,2} A_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

引入系统发射率 ε_s ，上式亦可写为

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2} &= \varepsilon_s X_{1,2} A_1 (E_{b1} - E_{b2}) \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{1 + X_{1,2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1 - 1} \right) + X_{2,1} \left(\frac{1}{\varepsilon_2 - 1} \right)}\end{aligned}$$

对于常见辐射问题，还可进行简化：

- 两无限大平行灰平壁的辐射传热：

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2} &= \varepsilon_s A \sigma_b (T_1^4 - T_2^4) \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}\end{aligned}$$

- 其中一表面为非凹表面的辐射传热：设 A_1 为非凹表面，则 $X_{1,2} = 1$ ，并有

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2} &= \varepsilon_s A \sigma_b (T_1^4 - T_2^4) \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}\end{aligned}$$

大球壳套小圆球、大圆柱套小圆柱等均可视为此类情形。

对于多灰表面组成的系统，也可类似地作辐射网络图计算，其中每个节点与热源间增加一个辐射表面热阻。类比基尔霍夫电流定律，可知流入每个节点的热流总和为零，亦即

$$\frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}} + \sum_{j=1, j \neq i} \frac{J_j - J_i}{\frac{1}{X_{i,j} A_i}} = 0$$

由此可建立方程组求解。

10 传热和换热器

10.1 换热器的型式与基本构造

- 间壁式换热器：换热器内冷、热流体由壁面隔开，热量由热流体到冷流体传递过程是由热流体与壁面间的对流换热、壁的导热、壁面与冷流体间的对流换热三个环节组成的传热过程。
- 混合式（直接接触式）换热器：换热器内冷、热流体直接接触、互相混合来实现热量交换。
- 回热式（蓄热式）换热器：冷、热两种流体依次交替地流过换热器的同一换热面（蓄热体）实现非稳态的热量交换。

10.2 通过肋壁的传热

设平壁一侧加装肋片，基部（肋间）面积为 A_0 ，肋片面积为 A_f ，则该侧总面积为 $A_2 = A_0 + A_f$ ；设另一侧（平滑侧）面积为 A_1 。假设传热过程处于稳态，则

$$\Phi = h_1 A_1 (t_{f1} - t_{w1}) = \frac{\lambda A_1 (t_{w1} - t_{w2})}{\delta}$$

设肋片效率为 η_f ，肋壁效率为 η_t ，则还有

$$h_2 A_0 (t_{w2} - t_{f2}) + h_2 A_f \eta_f (t_{w2} - t_{f2}) = h_2 A_2 \eta_t (t_{w2} - t_{f2})$$

综合以上各式，消去 t_{w1}, t_{w2} ，并定义肋化系数 $\beta = A_2/A_1$ （有肋一侧与光壁面面积之比），可得

$$\Phi = \frac{A(t_{f1} - t_{f2})}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2 \eta_t \beta}}$$

此过程以光壁面面积为基准的传热系数为

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2 \eta_t \beta}}, \quad \Phi = k_1 A_1 (t_{f1} - t_{f2})$$

为使传热更有效，肋片应加装在表面传热系数 h 小的一侧。

10.3 基于平均温度差的换热计算

一般的传热过程可表示为 $\Phi = kA\Delta t$ ，其中 k 为传热系数， Δt 为冷热流体的传热温差。对于换热器，由于冷热流体换热， Δt 不是定值。换热器传热过程计算式中应使用平均温差 Δt_m ，此时 $\Phi = kA\Delta t_m$ 。

- 平均温差 Δt_m 的计算方法：设 t'_1, t''_1 为热流体的进、出口温度， t'_2, t''_2 为冷流体的进、出口温度。顺流时， $\Delta t' = t'_1 - t'_2, \Delta t'' = t''_1 - t''_2$ ；逆流时， $\Delta t' = t'_1 - t''_2, \Delta t'' = t''_1 - t'_2$ 。平均温度差由下式给出：

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}$$

若进出口温差相同（ $\Delta t' = \Delta t''$ ），则取 $\Delta t_m = \Delta t' = \Delta t''$ 。

- 换热器中流体流动形式的比较：
 - 逆流比顺流平均温差大；
 - 顺流时冷流体的出口温度必然低于热流体的出口温度，而逆流时没有此限制；
 - 工程上尽可能采用逆流布置。
- 顺流与逆流的比较：
 - 顺流时冷流体的终温永远低于热流体的终温，而逆流时冷流体的终温可以超过热流体的终温；
 - 当冷、热流体进出口温度相同时，逆流的平均温差大于顺流，传热能力大；
 - 一种流体为定温时，逆流与顺流传热能力相同；
 - 逆流时换热面的温度变化大，容易造成热应力破坏。