1 L'espace réel à n dimensions

On notera $\mathbb{R}^n$ l'espace réel à n dimensions.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R},\ n \text{ fois} \\ &= \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}, ...,\ x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

1.1 Vecteurs

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition

On appelle **vecteur $\overrightarrow{u}$ à n composantes**, un n-uplet de réels $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, que l'on peut aussi écrire $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ sont les composantes de $\overrightarrow{u}$.

Remarques

(x_1, x_2) est un couple
(x_1, x_2, x_3) est un triplet

Propriété

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes composantes.

Notation

Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, a n ses composantes nulles.

Définition : Somme de deux vecteurs

Soient les vecteurs $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est défini par

$$\overrightarrow{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Définition : Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

1.1.2 Familles liées, libres de vecteurs

Définition : Combinaison linéaire

Soit $p \in \mathbb{N}$, tel que $p \geqslant 2$, on appelle **combinaison linéaire** de p vecteurs $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ de $\mathbb{R}^n$ toute expression de la forme :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + ... + \alpha_p \overrightarrow{u_p}$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_p$ sont des réels.

Exemple

$2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

Définition : famille liée

Soient p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$. Ces p vecteurs constituent une famille, notée $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$, qui est un p-uplet de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette famille est **liée** s'il existe une combinaison linéaire non triviale égale au vecteur nul. C'est à dire

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}, \qquad \text{avec} \quad (\alpha_1, ..., \alpha_p) \neq (0, ..., 0)$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ sont **linéairement dépendants**.

Remarques

- Une famille constituée de deux vecteurs colinéaires est liée
- Une famille constituée de trois vecteurs coplanaires est liée
- Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée
- $n + i$ vecteurs, avec $i \geqslant 1$, constituent une famille liée de $\mathbb{R}^n$

Propriété

Toute sur-famille d'une famille liée est liée

Définition : famille libre

Soit $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $p \leqslant n$. Cette famille est **libre** si elle n'est pas liée. C'est à dire

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \ (\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_p = 0)$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ sont **linéairement indépendants**.

Remarque

- Nécessairement, $p \leqslant n$, sinon la famille est liée.

Exemple

- Soient $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (-1,1,3)$ et $\overrightarrow{w} = (1,3,2)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre.

Propriété

Toute sous-famille d'une famille libre est libre

1.1.3 Familles génératrices de vecteurs et bases

Définition : famille génératrice

Soit $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $p \geqslant n$. On dit que cette famille est **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ si

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i},\ (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ **engendrent** $\mathbb{R}^n$.

Remarque

- N ecessairement, $p \geqslant n$, sinon certains vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne pourraient être construits.

Notation

Si $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, on note

$$\mathbb{R}^n = vect\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}\} = \{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{u_i},\ (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

Définition : base

Une famille libre et génératrice est une **base**

Remarques

- Si $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors $n = p$. $\mathbb{R}^n$ est bien de dimension n
- Une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$
- Une famille génératrice de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$
- Les deux points précédant peuvent se généraliser à tout sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
  · la droite vectorielle de dimension 1, engendrée par un vecteur non nul
  · le plan vectoriel de dimension 2, engendré par deux vecteurs non colinéaires
  · l'espace 3D vectoriel de dimension 3, engendré par trois vecteurs non coplanaires

Notations : bases canoniques

- $((1,0),(0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- $((1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

N.B

Il est donc tout à fait possible de construire des bases sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ comme les droites vectorielles, plans vectoriels, espaces 3D vectoriels,..., tous contenant l'origine.

Définition : dimension

Soit A un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admettant une base constituée de p vecteurs, $p \leqslant n$. Alors la dimension de A est $dim(A) = p$.

1.2 Repère, droites, plans

1.2.1 Repère

Définition

Soit $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$, O étant un point de $\mathbb{R}^n$, on dit que $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est un **repère** de $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Pour tout point $M(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ muni du repère $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, on a

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{u_1} + ... + x_n\overrightarrow{u_n}$$

$(x_1, ..., x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Proposition

Soient $A(x_1, ..., x_n)$ et $B(y_1, ..., y_n)$ deux points de $\mathbb{R}^n$ muni du repère $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \ (\equiv B - A) \\ &= (y_1 - x_1)\overrightarrow{u_1} + ... + (y_n - x_n)\overrightarrow{u_n} \end{aligned}$$

$(y_1 - x_1, ..., y_n - x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$.

Proposition

Soit $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ un repère de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$ peut s'Ã©crire de manière unique

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{u_1} + ... + x_n\overrightarrow{u_n}$$

avec $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Remarques

- Bien faire la distinction entre le point M et le vecteur $\overrightarrow{u}$.
- La position du point M est fixe et entièrement déterminé par $x_1, ..., x_n$, puisque l'origine du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est fixe. Même remarque pour les points A et B et le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ n'a pas d'origine fixe : pour le placer, on peut choisir n'importe quel point de $\mathbb{R}^n$ comme origine.

1.2.2 Droites

Définition

On appelle **droite vectorielle** engendrée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ l'ensemble

$$D = \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{\alpha\overrightarrow{u},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Définition

On appelle **droite affine** passant par le point A et dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ (ou encore la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$), l'ensemble

$$D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{A + \alpha\overrightarrow{u},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Remarque

- Une droite affine passant par l'origine peut être considérée comme une droite vectorielle.

1.2.3 Plans

Définition

On appelle **plan vectoriel** engendrée par deux vecteurs libres $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ l'ensemble

$$P = \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \{\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Définition

On appelle **plan affine** passant par le point A et dirigé par deux vecteurs indépendants $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'ensemble

$$P = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} + \mathbb{R}\overrightarrow{v} = \{A + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Remarque

- Un plan affine passant par l'origine peut être considéré comme un plan vectoriel.

1.3 Produit scalaire et norme

1.3.1 Définitions

Définition : produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, ..., y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **produit scalaire** usuel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel (ou scalaire)

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Définition : norme

On appelle **norme usuelle** (ou **norme euclidienne**) d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ le réel positif ou nul

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}$$

Remarque

Le produit scalaire usuel et la norme usuelle sont définis pour des composantes de vecteurs exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée. On peut, bien entendu, étendre ces deux définitions pour des vecteurs dont les composantes sont exprimées dans des bases orthonormées.

Autre définition du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. On appelle aussi **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel (ou scalaire)

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \cos(\theta), \text{ avec } \theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \text{ l'angle orienté entre} \overrightarrow{u} \text{et} \overrightarrow{v}$$

Remarques

1) Le calcul inverse $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}||}$ donne un angle $\theta \in [0, \pi]$ non orienté
2) $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} > 0 \iff \theta$ aigu
3) $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \iff \theta$ droit
4) $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} < 0 \iff \theta$ obtu

Définition

Un vecteur est dit **unitaire** s'il est de norme 1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur alors $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ est unitaire.

Définition

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.

Définition

Une base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ de $\mathbb{R}^n$ est dite **orthonormale** (ou **orthonormée**) si tous ces vecteurs sont orthogonaux et de norme 1. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \overrightarrow{e_i} \bullet \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ est dit **orthonormé**.
La méthode d'**orthogonalisation** de **Gram-Schmidt** permet de rendre une base quelconque en une base orthonormale.

1.3.2 Propriétés

Propriétés

Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

1. $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$
3. $(\overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$
4. $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} \geqslant 0$
5. $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}| \leqslant ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}||$$

On a égalité ssi les deux vecteurs sont dépendants.

Propriétés

Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une norme sur $\mathbb{R}^n$ doit vérifier :

1. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. $||\alpha\overrightarrow{u}|| = |\alpha|\, ||\overrightarrow{u}||$
3. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$

1.3.3 Conséquences

Définition

On appelle **vecteur normal** à un plan affine P tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire Ã P

Propriété

Un plan affine P d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet un vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$

Propriété

Deux plans affines P et Q sont orthogonaux ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Deux plans affines P et Q sont parallèles ssi leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

1.4 Projection, symétrie, distance

- **Cas axial** : le **projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{D} = A + vect\{\overrightarrow{u}\}$, noté $H = proj_{\mathscr{D}}(M)$ est défini par
$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u} \Longleftrightarrow H = A + \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u}$$
En effet, $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u} = \overline{AH}\,\overline{u} = ||\overrightarrow{AM}||\,||\overrightarrow{u}||\cos(\theta)$, donc $\overline{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ et $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}\dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$

  Si $\overrightarrow{u}$ est unitaire, $H = A + (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$

- **Cas planaire** : le **projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{P} = A + vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ orthogonaux, noté $H = proj_{\mathscr{P}}(M)$ est défini par
$$H = A + \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u} + \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||^2}\overrightarrow{v}$$
Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont unitaires,
$$H = A + (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$$

- **Cas général** : le **projeté orthogonal** de M sur un espace affine de dimension p noté $\mathscr{W} = A + vect(\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}\}$ avec $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ une base orthogonale de $\mathscr{W}$, est
$$H = proj_{\mathscr{W}}(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u_1}}{||\overrightarrow{u_1}||^2}\overrightarrow{u_1} + ... + \frac{\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u_p}}{||\overrightarrow{u_p}||^2}\overrightarrow{u_p}$$
Si la base est orthonormée, on a
$$H = A + (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u_1})\overrightarrow{u_1} + ... + (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{u_p})\overrightarrow{u_p}$$

- Le **symétrique** de M par rapport à $\mathscr{W}$ de dimension p, noté $S = sym_{\mathscr{W}}(M)$ est défini par
$$\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow S = 2H - M$$
avec $H = proj_{\mathscr{W}}(M)$

- La **distance** entre le point M et $\mathscr{W}$ est définie par
$$d(M, \mathscr{W}) = MH = ||\overrightarrow{MH}||, \qquad \text{avec} \quad H = proj_{\mathscr{W}}(M)$$

Remarque importante

Dans un repère orthonormé (ou un espace affine muni d'une base orthonormée), les coordonnées d'un point (ou d'un vecteur) sont caractérisées par les projections orthogonales de ce point (ou vecteur) sur chaque axe de coordonnées

2 Exercices

Exercice 1

Déterminer si les familles suivantes sont libres, liées, génératrices ou bases :

1. dans $\mathbb{R}^2$: $((1,3),(2,-1))$
2. dans $\mathbb{R}^3$: $((1,2,3),(1,-2,-3),(3,-2,-3))$
3. dans $\mathbb{R}^3$: $((1,2,3),(3,2,1),(-1,2,1))$
4. dans $\mathbb{R}^4$: $((1,1,2,2),(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,2,3),(2,2,1,1))$

Exercice 2

Exprimer les $\mathbb{R}$-ev ($\mathbb{R}$-espaces vectoriels) suivants sous forme de sous-espaces vectoriels engendrés, c'est à dire trouver pour chacun d'eux une famille génératrice B et les écrire comme $vect(B)$.

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = z \text{ et y=0}\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\}$
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = 2z\}$
4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$
5. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$ et $w = (-1,1,1)$.
Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer les coordonnées du vecteur $a = (1,2,-3,-4)$ dans le repère (A,u,v,w,k) tels que $A(1,1,1,2),\ u = (1,0,0,0),\ v = (1,1,0,0),\ w = (1,1,1,0),\ k = (1,1,1,1)$

Exercice 5

Soient F et G deux sev (sous espaces vectoriels) de $\mathbb{R}^4$, tels que :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y + z - t = 0\} \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y - z = 0 \text{ et } y + t = 0\}.$$

Préciser une base et la dimension de F et G.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, soient un point $A(3,4,5)$ et $\mathscr{D}$ une droite linéaire dirigée selon le vecteur $\overrightarrow{u} = (0,0,1)$.

1. A l'aide de la foction cos^{-1}, déterminer l'angle non orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{0A})$
2. Calculer $proj_{\mathscr{D}}(A)$, $sym_{\mathscr{D}}(A)$ et la distance entre A et $\mathscr{D}$
3. Faire un dessin
4. Reprendre les questions 1. et 2. dans $\mathbb{R}^5$ avec $A(1,2,3,0,-1)$ et $\overrightarrow{u} = (-1,0,1,2,0)$

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $u = (1,0,1), v = (1,0,2), w = (1,1,1)$

1. Montrer que (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer le vecteur k projeté de w sur le plan engendré par u, v
3. Donner les coordonnées de k dans le repère (O,u,v)

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^5$, on pose : $F = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5,\ x = 1,\ y - z + t = 0,\ u - x = 1\}$ et $M(1,2,3,4,5)$

1. Donner F sous forme de sous-espace vectoriel engendré (c'est à dire exprimé à l'aide de vect). Que représente F géométriquement ?
2. Déterminer le point de F le plus proche de M
3. Calculer le symétrique de M par rapport à F
4. Calculer la distance entre M et F

3 Les matrices

3.1 Rappels

3.1.1 Définition

Définition

On appelle A une **matrice** constituée de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ par un tableau d'éléments réels de taille $n \times p$. On la note

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarques

- L'élément a_{ij} est situé sur la ième ligne et la jème colonne. En faisant varier i dans $[\![1, n]\!]$ et j dans $[\![1, p]\!]$, on construit A
- A est une matrice de taille $n \times p$. On dit aussi qu'elle est de type (n, p)
- Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n
  Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne (ou vecteur ligne) de taille $1 \times p$
  Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne (ou vecteur colonne) de taille $n \times 1$
- Une matrice est un "assemblage" de vecteurs lignes ou colonnes de même taille

Notations

- On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$
- On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

3.1.2 Opérations élémentaires

Définition

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la somme et le produit avec un réel :

1. $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$
2. $\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $-2A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : toute matrice A de type (n,p) se décompose de manière unique :

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{ij}$$

avec E_{ij} la matrice de type (n,p) constituée d'un 1 à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne, et de 0 partout ailleurs.

On notera $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ la base canonique des matrices de type (n,p). Ainsi $\dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) = np$

3.1.3 Produit de matrices

Définition

Soient A et B deux matrices de, respectivement, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_{q,m}(\mathbb{R})$.

Le **produit matriciel** (ou **produit**) $A \times B$ existe ssi $p = q$, à savoir le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. La matrice $A \times B$ est de type (n,m).

Remarques

- $(n,p) \times (p,m) \longrightarrow (n,m)$
- On note aussi le produit AB

Définition : calcul du produit

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

Le produit AB est défini par une matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a

$AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, mais par exemple $A^2 = A \times A$ n'existe pas.

Définition : puissance de matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit $A^k = A \times ... \times A$, $k \in \mathbb{N}$ fois, avec $A^0 = I_n$

PropriétésSoit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $k, m \in \mathbb{N}$. On a :

- $(AB)^k = (A^k)(B^k)$

- $(A^k)^m = A^{km}$
- $A^{k+m} = (A^k)(A^m)$

Définition : matrice identité

La **matrice identité** est une matrice carrée constituée uniquement de 1 sur sa diagonale et de 0 ailleurs.

A l'ordre n, on la note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques

- Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(I_n)^k = I_n$
- I_n est une matrice remarquable car $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ AI_n = I_nA = A$. Elle représente donc **l'élément neutre** de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel.

Propriétés

1. **Associativité** : $\forall (A, B, C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{p,q}(\mathbb{R}) \times M_{q,m}(\mathbb{R}),\ (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2. **Distributivité**
   - à droite : $\forall (A, B, C) \in \left(M_{n,p}(\mathbb{R})\right)^2 \times M_{p,m}(\mathbb{R}),\ (A + B) \times C = A \times C + B \times C$
   - à gauche : $\forall (A, B, C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times \left(M_{p,m}(\mathbb{R})\right)^2,\ A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3. **Non commutativité (en général)** : $\exists (A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2,\ A \times B \neq B \times A$

Remarques

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Si A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, si $AB \neq BA$
- Si $C_1, C_2, ..., C_p$ désignent les vecteurs colonnes de A de type (n, p), on vérifie :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & \cdots & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,\ AX = x_1C_1 + ... + x_pC_p :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

3.2 Transposition, trace, rang et inversion

3.2.1 Matrices transposées

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, la **transposée** de A est une matrice obtenue en échangeant les lignes avec les colonnes. Elle se note A^T telle que

$$A^T \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \quad A^T = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}, \quad \text{avec} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Exemples

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont considérés comme des matrices de genre $(n, 1)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Propriétés

- $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
  2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{p,m}(\mathbb{R}),\ (AB)^T = (B)^T(A)^T$

3.2.2 Trace

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$, la **trace** de A est la somme des coefficients diagonaux de A. C'est le nombre $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 2$

Propriétés

- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
  2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(AB) = tr(BA)$

Remarque

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable, on a $A = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale des valeurs propres et P la matrice de passage des vecteurs propres de A. On a

$$tr(A) = tr(PDP^{-1}) = tr(PP^{-1}D) = tr(D)$$

3.2.3 Rang d'une matrice

Définition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit le rang de A, noté $rg(A)$, par le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendants.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminons le rang de A avec l'échelonnement ligne, puis colonne.

- Echelonnement lignes : toutes les lignes ont des échelons différents

  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $rg(A) = 2$

  Traitements : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$, $L_4 \longleftarrow L_3 - 3L_1$; $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$, $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$; $L_4 \longleftarrow L_4 + L_3$

- Echelonnement colonnes : toutes les colonnes ont des échelons différents

  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $rg(A) = 2$, en faisant des opérations semblables sur les colonnes

3.2.4 Inversion

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **inversible** si

$$\exists B \in M_n(\mathbb{R}), AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, on note $A^{-1} = B$, l'inverse de A.

Remarques

- Les matrices non carrées ne peuvent pas s'inverser.

Méthode d'inversion

Pour montrer que $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est inversible et pour calculer son inverse, il suffit de montrer que :

$$\forall (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n, \text{ le } \textbf{système } (1) : \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i \text{ , possède } \textbf{une unique solution}$$

Remarques

- En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on a

$$(1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow AX = Y$$

  Trouver une unique solution X (obtenue en fonction de A et Y) revient à inverser le système (1). On détiendra alors A^{-1} obtenue grace au système inverse $X = A^{-1}Y$.

- La résolution d'un système d'équations peut s'effectuer à l'aide du **pivot de Gauss** qui consiste à rendre le **système d'équations triangulaire inférieur** et de remonter le calcul afin de calculer toutes les composantes de X.

- L'implementation du calcul de A^{-1} peut s'effectuer à l'aide de la matrice A augmentée de I_n que l'on note $\big(A\ I_n\big)$. On a bien

$$AX = Y \Longleftrightarrow AX = I_nY \Longleftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}I_nY \Longleftrightarrow I_nX = A^{-1}Y \Longleftrightarrow X = A^{-1}Y$$

  qui se résume $(A\ I_n) \sim (I_n\ A^{-1})$

Exemple Inversion de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A & I_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On vérifie que $A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient A, B inversibles d'ordre n, alors

- A^T inversible, d'ordre n et $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- AB inversible d'ordre n et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.3 Déterminant

3.3.1 Définitions

Définitions récursives :

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$. Le **déterminant** de A, noté $det(A)$ ou $|A|$ est défini par

- un développement suivant une colonne $j \in [\![1, n]\!]$

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\triangle_{i,j}$$

- ou un développement suivant une ligne $i \in [\![1, n]\!]$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\triangle_{i,j}$$

avec $\triangle_{i,j}$ le déterminant de la **sous-matrice** (ou **matrice extraite**) de A obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A.

Condition d'arrêt

- $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Remarque

- $\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2p} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & \ddots & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & \ddots & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 2p+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & \ddots & & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & & & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-2) = -6$, développement suivant la colonne $j = 2$

3.3.2 Propriétés

- Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$, une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a
  1. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| > 0$ ssi $\mathscr{B}$ est une **base directe** de $\mathbb{R}^n$.
     Dans ce cas, $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est un **repère direct**.
  2. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| < 0$ ssi $\mathscr{B}$ est une **base indirecte** de $\mathbb{R}^n$.
     Dans ce cas, $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est un **repère indirect**.
  3. $|\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}| = 0$, alors $\mathscr{B}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs sont **linéairement dépendants**.
- Le déterminant est application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ **linéaire par rapport à chaque colonne**.
  Pour $A = (C_1, ..., C_n) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ C_i \in \mathbb{R}^n$ ième vecteur colonne de A et $\alpha \in \mathbb{R}$,
  1. $|C_1, ..., C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, ..., C_n| = \alpha|C_1, ..., C_i, ..., C_n|$
  2. $|C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_i', C_{i+1}, ..., C_n| = |C_1, ..., C_i, ..., C_n| + |C_1, ..., C_i', ..., C_n|$
- Le déterminant d'une matrice constituée de deux lignes (ou de deux colonnes) identiques est **nul**.
  Le déterminant d'une matrice constituée d'une ligne (ou d'une colonne) de 0 est **nul**.
- L'**échange** de deux colonnes (ou deux lignes) multiplie le déterminant par -1, on **inverse l'orientation**.
- Un déterminant dont une ligne (respectivement une colonne) est combinaison linéaire des **autres** lignes (respectivement colonnes) est **nul**.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on ajoute à une ligne (respectivement colonne) une combinaison linéaire des **autres** lignes (respectivement colonnes).
- Soient $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
  1. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

2. $|AB| = |BA| = |A||B|$

3. A inversible $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.
   Une matrice est donc **inversible** si ses **vecteurs lignes** (ou **colonnes**) sont **linéairement indépendants**.

4. $|A^T| = |A|$

5. Si A inversible d'ordre n, $|AA^{-1}| = |I_n| = 1$, donc $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

3.3.3 Inversion : co-matrice

Propriété

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, il est possible d'inverser A à l'aide de la méthode utilisant la **co-matrice** de A.

$$\text{Si } |A| \neq 0,\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(com(A))^T$$

On définit la co-matrice de A par $com(A) = \left(c_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \triangle_{i,j}$, avec $\triangle_{i,j}$ le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A.

Exemple

Reprise de l'exemple d'inversion de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $|A| = 1$ et

$$com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(com(A))^T = (com(A))^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $dim(E) = n$.

Soient $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p})$ base de E (appelée ancienne base) et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n})$ base de E (appelÃ©e nouvelle base).

Les composantes d'un vecteur dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont appelées respectivement anciennes et nouvelles composantes.

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est constituée des vecteurs colonnes $\overrightarrow{e'_j}$, $j \in [\![1, n]\!]$, dont les composantes sont exprimées dans la base $\mathscr{B}$. On a :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{e'_1} & \cdots & \overrightarrow{e'_j} & \cdots & \overrightarrow{e'_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{e_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

On remarque que $\forall j \in [\![1, n]\!], \overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{e_i}$

Utilisation

Soient $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \overrightarrow{e'_j}$.

En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}'$, on a

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X'$$

Remarques

- La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est toujours inversible. On a :

$$\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

- Si l'on veut exprimer X' en fonction de X, on notera

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X' \iff \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} X = X' \iff P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} X = X'$$

- En notant $\mathscr{C}$ la base canonique, on a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}'} = \left(P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\right)^{-1} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}'}$$

- $I_n = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e'_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e'_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On cherche $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, avec $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ et $\mathscr{B}' = \{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}$

En reprenant la méthode de la partie 1, avec $f = Id$, et en posant $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3.5 Exercices

Exercice 1

Résoudre les systèmes d'équations suivants

$$(R) : \left\{ \begin{array}{c} 2x - y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{array} \right. , (S) : \left\{ \begin{array}{c} -4x + y = 2 \\ 8x - 2y = -6 \end{array} \right. , (T) : \left\{ \begin{array}{c} 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 6 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{array} \right. \text{ et } (U) : \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ -3x - 9y - 5z = 1 \end{array} \right.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants, puis dessiner représenter les solutions dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 1 \text{ et } -3x + 2y = 2\}$

2. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \text{ et } 2x + y \leqslant 1\}$

3. $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$

Exercice 3

Chaque année, environ 7% de la population d'une ville va s'installer dans la banlieue environnante et environ 3% de la population de la banlieue déménage en ville. En 2020, ils étaient $x_0 = 600000$ citadins et $y_0 = 400000$ banlieusards.

Traduire cette situation en une équation de récurrence où $X_0 = (x_0\ y_0)^T$ est la population en 2020. Estimer ensuite la population de la ville et de la banlieue deux ans plus tard, en 2022.

Exercice 4

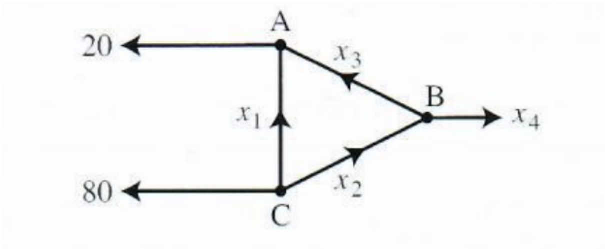
La société de location de voitures "LouerCTop" dispose d'une flotte de 450 véhicules, répartie sur trois sites. Une voiture louée sur un site peut être restituée sur un autre site de la façon suivante :
- 97% louées à l'aéroport y sont restituées et 3% sur le site Ouest
- 90% louées sur le site Est y sont restituées, 5% à l'aéroport et le reste sur le site Ouest
- 85% louées sur le site Ouest y sont restituées, 10% à l'aéroport et le reste sur le site Est

1. Donner la matrice de transition présentant les proportions de voitures louées sur chaque site

2. En supposant que le lundi il y ait 304 voitures à l'aéroport (ou louées là), 48 sur le site Est et 98 sur le site Ouest, quelle sera la répartition approximative le lendemain ?

Exercice 5

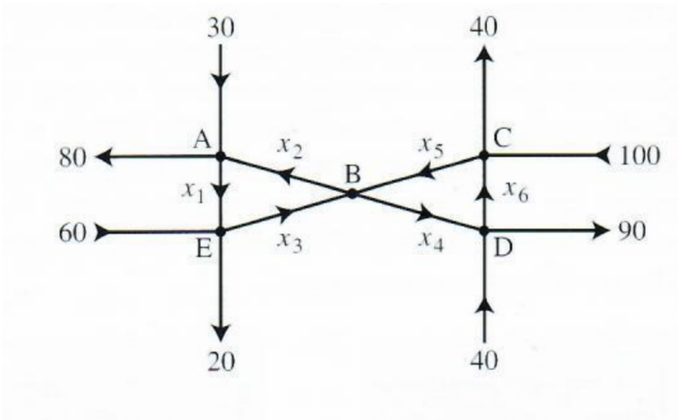
Voici un flux de trafic du réseau représenté par la figure suivante (les flux sont supposés mesurer le nombre de voitures à la minute).



1. Donner le système d'équations schématisant ce flux.
2. Quelle est la plus grande valeur possible pour x_3 ?

Exercice 6

Voici un autre flux de trafic représenté par la figure suivante (les flux sont positifs ou nuls).



1. Donner le système d'équations schématisant ce flux.
2. Déterminer les flux minimaux dans les branches désignées par x_2, x_3, x_4 et x_5

Exercice 7

Soient deux matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Donner $rg(A)$ et $rg(B)$.
2. Construire une matrice de genre $(4,3)$ et de rang 1.

Exercice 8

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 12 & -7 \end{pmatrix}$$

On pose le vecteur $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui donner leurs matrices inverses respectives.
2. Résoudre $AX = b$, $BX = b$, $CX = b$, $DX = b$

Exercice 9

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - 3A^3 + A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 10

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$$

Donner $det(A)$ et $det(B)$ sous forme factorisée

Exercice 11

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs de m, A est-elle inversible ? Donner A^{-1}.

Exercice 12

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $X = (3, 5)$, une base $\mathscr{B} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ et $A(2, -1)$

1. Sans la formule des matrices de passage, donner $X_{\mathscr{B}}$ les coordonnées de X dans $\mathscr{B}$
2. Retrouver le résultat précédent à l'aide des matrices de passage
3. Donner les coordonnées de X dans le repère $(A, \mathscr{B})$

Exercice 13

Soient $B = \{b_1, b_2\}$ et $C = \{c_1, c_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de passage de B à C et la matrice de passage de C à B dans las cas suivants :

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14

Soit la famille de vecteurs $\mathscr{B} = \{(1, -1, 2), (0, 1, -1), (1, -1, 1)\}$. On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $X = (1, 2, 3)$

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner $P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$ et $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$
3. Donner $X_{\mathscr{B}}$

Exercice 15

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On pose $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

1. Chercher une base $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de A vers B.
2. Chercher une base $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de B vers C.

4 Dénombrement

4.1 Définitions

- Une **p-liste** d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non. Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, a, b), (e, e, e)$ sont des 3-listes d'éléments de E. Il y en a $5^3 = 125$

- Un **arrangement** à p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts. On a obligatoirement $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble E à n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1)$.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, c, b), (c, d, e)$ sont des arrangements à 3 éléments de E. Il y en a $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement à n éléments de E. C'est un cas particulier d'arrangement avec $p = n$. Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $A_n^n = n!$
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$, alors $(a, b, c, d, e), (b, c, a, e, d), (c, a, b, d, e)$ sont des permutations de E. Il y en a $5! = 120$

- On appelle **combinaison** de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie de E à p éléments. On a obligatoirement $p \leqslant n$.
  rq : il y a A_n^p arrangements de p éléments pris parmi n. Toute permutation de p éléments donne la même combinaison. Pour chaque combinaison, il y a $p!$ arrangements. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.
  Ainsi, le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, b, d), (a, b, e)$ sont des combinaisons à 3 éléments de E. Il y en a $C_5^3 = \dfrac{60}{3!} = 10$

Convention : $0! = 1$

Exemple à savoir : $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ et $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

4.2 Propriétés liées aux combinaisons

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. On a :

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. avec $n, p \neq 0$, $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
3. avec $n, p \neq 0$, $\quad pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

4.3 Exercices

Exercice 1

1. Combien de chaînes de n lettres peut-on construire avec des lettres prises dans l'alphabet $E = \{a, b, c\}$?

2. Etant donné un ensemble de n lettres différentes, combien peut-on construire de sous-ensembles ?

3. Etant donné une chaîne de $n \geqslant 5$ lettres différentes, combien peut-on construire de sous-chaînes de 5 lettres ?
   Rq : une sous-chaîne hérite de la chaîne principale, donc conserve les mêmes caractéristiques.

4. Donner le nombre d'anagrammes du mot FACILE, puis du mot DIFFICILE. Ici, les anagrammes sont considérés comme des mots quelconques obtenus par permutation de lettres.

Exercice 2

Le digicode ci-dessous se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir, il faut composer un code formé d'abord de deux lettres, puis de trois chiffres. Par exemple : CB445.

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Déterminer le nombre total de codes possibles.

2. Parmi ces codes, combien y en a-t-il qui :

   a. ont leur trois chiffres pairs ?

   b. ont trois chiffres distincts ?

   c. ont deux lettres distinctes et trois chiffres distincts, sans que les chiffres ne soient ordonnés ?

3. A l'aide du même digicode, déterminer le nombre total de codes en composant 2 lettres et 3 chiffres quelconques sans contrainte d'ordre d'apparition. Par exemple B44C5 et 445CB deviennent possibles.

Exercice 3

1. De combien de façons peut-on ranger n stylos dans p tiroirs ?
2. De combien de façons peut-on garer 10 voitures dans un parking comprenant 20 places ?
3. Un représentant de commerce doit visiter les villes A,B,C,D et E. Combien y a-t-il de trajets possibles ?
4. Même si les gestes barrières ne sont pas respectés, 32 élèves d'une classe se serrent la main. Donner le nombre de poignées de mains échangées.

Exercice 4

1. Démontrer que $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$, pour $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant p \leqslant n-2$
2. Démontrer que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^p C_p^k$, pour $n > 0$ et $k \leqslant p \leqslant n$

Exercice 5

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.

1. Donner le nombre de mains contenant exactement 2 rois.
2. Donner le nombre de mains contenant un carré.
3. Donner le nombre de mains contenant un full.
4. Donner le nombre de mains contenant exactement une paire.
5. Donner le nombre de mains contenant une double paire.

5 Calcul des probabilités et probabilités conditionnelles

On utilise les notions vues sur les ensembles.

5.1 Vocabulaire

Soit l'**expérience aléatoire** : on lance un dé.

- L'**univers** Ω est l'ensemble des résultats possibles (ou **éventualité**).
  Pour le lancer d'un dé on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un **événement** A est une partie de Ω, c'est à dire $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
  Par ex, si A : "le nombre obtenu est pair", $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'**ensemble des événements** est l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Un **événement élémentaire** est un événement ne comportant qu'un seul élément. Par ex $\{6\}$.
- L'**événement impossible** est $\emptyset$, il ne se réalise jamais (il ne contient aucun élément).
- L'**événement certain** est Ω, qui se réalise toujours.
- L'**événement contraire**, noté $\overline{A}$, de l'événement A est l'ensemble des événements de Ω qui ne sont pas dans A.
- L'**événement** $A \cap B$ est l'événement constitué des éléments de Ω qui appartiennent à la fois à A et B. A et B sont donc réalisés simultanément.
- L'**événement** $A \cup B$ est l'événement constitué des éléments de Ω qui appartiennent à A **ou** B. Ici le **ou est inclusif** (ne pas confondre avec ou bien).
- A et B sont des **événements incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire que A et B ne se réalisent pas simultanément.

5.2 Probabilité d'un événement

Définition :

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité en associant à chaque événement, un nombre compris entre 0 et 1. Une probabilité est donc une application $P : \Omega \longrightarrow [0,\ 1]$, qui vérifie de plus :

- $P(\Omega)$=1
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pour tous les événements A et B incompatibles.

On déduit du deuxième point que $P(\emptyset) = 0$.

5.3 Equiprobabilité

Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Ainsi, on notera pour tout événement A d'un univers Ω fini

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Par exemple, si le dé est non truqué, il y a équiprobabilité d'apparition des faces.

5.4 Propriétés

Soient Ω un univers et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Pour le troisième point, on peut se servir d'un dessin, puis remarquer :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

5.5 Probabilités conditionnelles

Définition :

Soit P une probabilité sur un univers fini Ω et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, tel que $P(B) \neq 0$.

On définit la probabilité de $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ sachant que B est réalisé par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P_B(A).P(B)$$

Remarque : si $P(A) \neq \emptyset$, on a

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P_B(A).P(B)}{P(A)}$$

Définition : partitionnement de Ω

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n événements d'une même expérience aléatoire. On dit que cette famille réalise une **partition** de l'univers Ω si :

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, $A_i \cap B_j = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Formule des probabilités totales :

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n événements réalisant une **partition** de l'univers Ω. Alors pour tout B de Ω,

$$P(B) = P(B\cap A_1) + ... + P(B\cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$$

Ou encore

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

En particulier,

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

5.6 Evénements indépendants

Définition :

Deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

Remarque importante :

Deux événements de probabilité non nulle sont indépendants si la réalisation de l'un n'agit pas sur la réalisation de l'autre. On a aussi :

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B)$$

Propriété :

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

5.7 Exercices

Exercice 1

Un lot de 100 pièces comprend 5 pièces défectueuses.

Partie A
On tire au hasard 10 pièces, une à une, avec remise dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux pièces défectueuses parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Partie B
On tire au hasard 10 pièces, une à une, sans remise dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux pièces défectueuses parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?

Exercice 2

Une urne contient 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues.

1. On tire au hasard 2 boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rouges ? 1 rouge et une bleue ? 2 boules de même couleur ?
2. On tire au hasard 3 boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ? au moins une rouge ? au plus une bleue ?

Exercice 3

Une grande compagnie aérienne a, au 1er janvier 2022, un parc d'avions composé ainsi :

- 40 avions ont moins de 3 ans ; 75 avions ont entre 3 et 7 ans ; 35 ont plus de 7 ans.
  On admet que, pour un avion pris au hasard dans le parc :
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a moins de 3 ans est égale à 0.05 ;
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a entre 3 et 7 ans est égale à 0.09 ;
- la probabilité qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année sachant qu'il a plus de 7 ans est égale à 0.11.

On choisit un avion au hasard dans le parc.

1. a. Calculer la probabilité pour qu'il ait moins de 3 ans.

   b. Calculer la probabilité pour qu'il ait entre 3 et 7 ans.

   c. Calculer la probabilité pour qu'il ait plus de 7 ans.

2. Calculer la probabilité pour qu'il soit victime de plus d'un incident technique en cours de vol dans l'année.

Exercice 4

Une usine produit en grande série des tiges métalliques.
La production est assurée par 2 machines A et B fournissant respectivement 40% et 60% de la production. Un contrôle d'aspect sur la totalité de la production fait apparaître que le pourcentage de pièces défectueuses est de 3% sur la machine A et 6% sur la machine B.

1. Montrer que le pourcentage de tiges défectueuses pour l'ensemble de la production est de 4.8%.

2. On prélève une tige au hasard dans la production, calculer la probabilité pour qu'elle provienne de la machine A, sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 5

Dans un parking d'un centre ville, les différents niveaux sont desservis par deux ascenseurs A et B qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre.
On s'intéresse au fonctionnement de ces ascenseurs.
Pour chaque ascenseur, la probabilité de tomber en panne au cours d'une année est 0.1. On considère les événements suivants :
E_1 : "aucun des deux ascenseurs ne tombe en panne au cours d'une année" ;
E_2 : "au moins un ascenseur tombe en panne au cours d'une année".

Calculer les probabilités des événements E_1 et E_2. Sont-ils indépendants ?

Exercice 6

Lors d'une future épidémie, 15% des animaux d'un élevage de lapins des hautes terres d'Ecosse seront atteints par la maladie du lapin fou du Loch Ness (la MLFLN). On décidera alors d'effectuer un dépistage qui sera :
La probabilité qu'un animal atteint par la MLFLC ait une réaction positive au test est 0.9.
La probabilité qu'un animal non atteint par la MLFLC ait une réaction négative au test est 0.8.

1. Dans ce contexte, quelle pourrait être la probabilité qu'un lapin ayant eu un test positif soit réellement atteint par la maladie ?

2. Dans ce contexte, quelle pourrait être la probabilité qu'un lapin ayant eu un test négatif soit réellement atteint par la maladie ?

3. Est-ce satisfaisant ? Ou bien faut-il une autre dose ? Ou changer de test ?

6 Variables aléatoires discrètes

6.1 Définitions

- Soit une expérience aléatoire. On se munit d'un univers Ω et de P : probabilités sur Ω. On appelle **variable aléatoire réelle** (**var**) toute fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

- La **loi de probabilité** de X est la fonction qui, pour chaque valeur x_i prise par X, associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ qui est donc composé de tous les antécédents de x_i dans Ω.

- **Exemple** : lancer d'un dé équilibré à six faces. Règle :
  obtention d'un chiffre impair : perte de 4e, Obtention de 1 ou 3 : gain de 1e, obtention du 6 : gain de 6e

  On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et la var X donnant le gain algébrique (+ ou -) après le lancer.

  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $X(\Omega) = \{-4, 1, 6\}$, plus précisément $X(\{2, 4, 6\}) = \{-4\}$, $X(\{1, 3\}) = \{1\}$ et $X(\{6\}) = \{6\}$. La loi de probabilité de X est :

Valeurs prises par X	$x_1 = -4$	$x_2 = 1$	$x_3 = 6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

6.2 Espérance et écart-type

- L'**espérance** d'une var X telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i$$

  C'est en fait la moyenne (espérée) de X.

- En reprenant l'exemple, $E(X) = \dfrac{1}{2}(-4) + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}(6) = \dfrac{-2}{3}$.

  $E(X) < 0$, le jeu n'est pas intéressant. Si $E(X) = 0$, on le dit équitable.

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b$

- La **variance** d'une var X telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

  $V(X)$ permet de mesurer la dispersion au carré de X par rapport à sa moyenne. On effectue la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

- L'**écart-type**, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, la racine carré permet de revenir à l'unité. L'écart-type permet de mesurer la dispersion de X par rapport à sa moyenne

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ V(aX+b) = a^2V(X)$
- Soit X une var d'espérance m et d'écart-type $\sigma \neq 0$, alors $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée réduite. On a $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1 = \sigma_{X^*}$

6.3 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit la fonction de répartition de X par la fonction F_X :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x),\ \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

6.4 Loi Binomiale

- Une var X suit la loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ quand :

  $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

  on note que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$
- Cas où $n=1$. On a $X \sim \mathscr{B}(1,p)$, appelée aussi variable de Bernouilli. Sa loi de probabilité est :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

  On a un schéma de Bernouilli, deux possibilités : le succès (de proba p) et l'échec (de proba $1-p$).
- Domaine d'application de la loi Binomiale :

  1) Soit A un événement lié à une épreuve aléatoire donnant un schéma de Bernouilli
  2) On réalise n fois cette épreuve.
  3) Les n épreuves sont indépendantes

  Alors, si X est la var donnant le nombre de succès, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

6.5 Loi de Poisson

- Une var X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ quand :

  $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

  on note que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- Domaine d'application :

  1) Il est très rare d'avoir deux succès simultanément (voire impossible)
  2) Le nombre moyen de succès pendant une période de temps T ne dépend que de la durée
  3) L'arrivée d'un succès est indépendant du précédent (et ainsi de suite)

  Alors, si X est le nombre de succéès durant T et λ le nombre moyen de succès durant T, on a $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

6.6 Exercices

Exercice 1

Dans un jeux vidéo, on vise une cible circulaire avec un rayon laser. La cible est formée de trois cercles concentriques, de rayons $r_1 = 10$, $r_2 = 20$ et $r_3 = 30$. Le disque de rayon r_1 est colorié en rouge, la couronne de rayon $r_2 - r_1$ en vert et la couronne de rayon $r_3 - r_2$ en bleue. Chaque rayon laser touche la cible et une probabilité est proportionnelle à l'aire de la zone touchée.

1. Calculer, pour un lancer et pour chaque zone la probabilité de toucher cette zone.
2. Une partie se déroule en deux lancers. A chaque lancer, si l'on touche la zone rouge, on marque 10 pts, la zone verte 5 pts et la zone bleue 1 pt.On appelle X la var qui, à chaque partie, associe le nombre de points obtenus. On suppose que les résultats des deux lancers sont indépendants.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X
   c. Calculer $E(X)$

Exercice 2

Dans une urne, on a placé 20 boules, dont 4 noires. On tire successivement, avec remise, 8 boules de l'urne. Soit X la var qui est égal au nombre de boules noires tirées.

1. Calculer la probabilité de tirer exactement 3 boules noires
2. Calculer la probabilité de ne tirer aucune boule noire
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une boule noire
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Interpréter.

Exercice 3

Un événement E se réalise avec une probabilité de 0.01. On répète n fois cet événement, les résultats sont indépendants. Soit X la var qui à chaque épreuve associe le nombre de réalisations de E

1. Quelle loi suit X ?
2. Combien d'épreuves doit-on faire pour que la probabilité que E se réalise au moins une fois soit supérieure à 0.95.

Exercice 4

Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1.8 par minute et que les appels sont indépendants les uns des autres, calculer la probabilité pour qu'entre 10h45 et 10h46, il y ait :

1. aucun appel
2. un appel
3. au moins deux appels
4. plus de deux appels

Exercice 5

M.Donald gère un parc de 100 flippers placés dans des cafés/casino. Il a remarqué que, sur les 100 flippers, 20 n'avaient jamais eu de panne. On suppose que le nombre de pannes d'un flipper suit une loi de poisson

1. Calculer le paramètre λ à 10^{-1} près
2. Calculer la probabilité pour qu'un flipper ait plus de deux pannes

7 Série statistique à une et deux variables

7.1 Série statistique à une variable

7.1.1 Vocabulaire

- **Population** : ensemble que l'on observe et dont chaque élément est appelé **individu**
- **Echantillon** : c'est une partie de la population
- Le **caractère** étudié est la propriété que l'on veut observer sur la population. Il peut être **qualitatif** ou **quantitatif**
- La **fréquence** d'une modalité ou d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de la modalité (ou valeur) par l'effectif total

7.1.2 Caractéristiques

- **Moyenne**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N}, \qquad \text{où } N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

avec n_i le nombre de x_i avec $i \in [\![1, n]\!]$

- **Médiane** : permet de séparer en deux une série statistique. Si on ordonne la série par ordre croissant, la médiane M est :
1) x_k, avec $k = \lceil \frac{N}{2} \rceil$, si N est impair
2) $\dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}$, avec $k = di\frac{N}{2}$, si N est pair
- **Mode** : valeur de la fréquence du caractère
- **Etendue** : si la série est ordonnée par ordre croissant, c'est $x_n - x_1$
- **Variance et écart-type**

$$V_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{N} \qquad \text{et } \sigma_x = \sqrt{V_x}$$

- **Quartiles** : $Q(u)$ permet de séparer en 4 parts une série statistique. Si on ordonne la série par ordre croissant, $Q(u)$, $u = 0.25$ ou $u = 0.75$ est la valeur du terme x_k de cette série dont l'indice $k = \lceil Nu \rceil$ et $Q(0.5) = M$ la médiane.

Notation $Q_1 = Q(0.25)$, $Q_2 = Q(0.5) = M$ et $Q_3 = Q(0.75)$

7.2 Série statistique à 2 variables : approximation par moindres carrés

7.2.1 Présentation

Cette fois-ci une population donnée possède deux caractères. Le but étant de déterminer un lien entre ces deux caractères (s'il existe !), de le quantifier, puis éventuellement de faire des prévisions (si le modèle est précis).

On notera les valeurs de ces deux caractères sous forme de couple (x_i, c_i) pour la population étudiée. On considérera un nuage de points $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ dans le plan.

7.2.2 Principe et critère des moindres carrés

Soient $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ un ensemble de $n+1$ points du plan. On cherche à construire une courbe qui approxime (ou approche) cet ensemble de points. Ces points pouvant provenir de mesures (donc contenir des erreurs expérimentales) ne nécessitent pas forcément d'être interpolés.

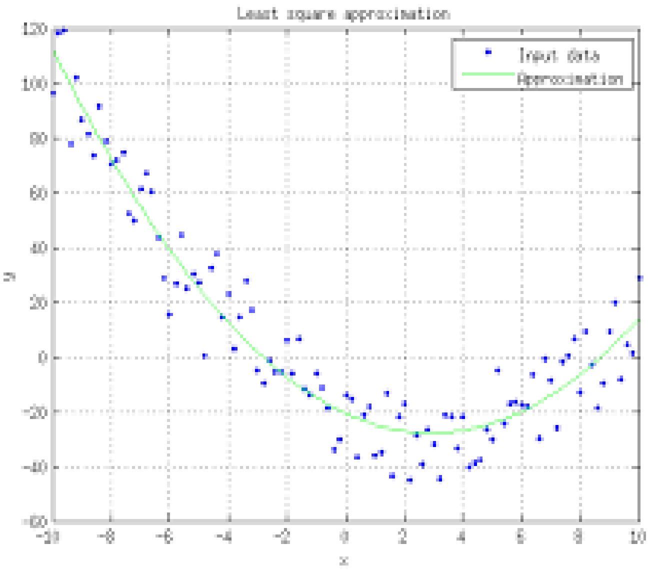


FIGURE 1 – Approximation polynômiale

On note $p(x)$ la fonction d'approximation appelée aussi modèle qui dépend de paramètres (dans la cas polynômial, ce sont les coefficients). Il s'agit donc de déterminer les paramètres les mieux adaptés afin que le modèle soit le plus précis possible (passe au plus près des points donnés).

La recherche de la meilleure approximation $p(x)$ est déterminée par le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2$$

qui permettra le calcul des paramètres de $p(x)$ correspondant ainsi à l'ajustement du modèle par rapport aux points donnés.

7.2.3 Régression linéaire

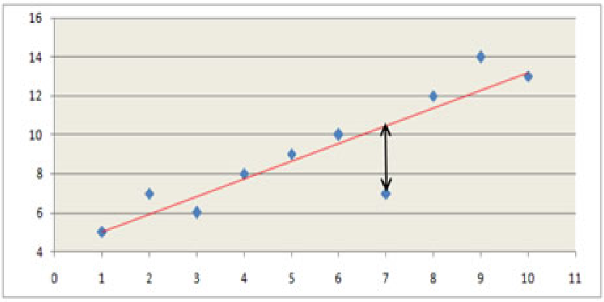


FIGURE 2 – Regression linéaire

On recherche la droite d'équation $y = ax + b$ la plus proche de $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ au sens des moindres carrés. En notant $e_i = c_i - (ax_i + b)$ l'erreur d'approche pour $x = x_i$, on cherche le minimum de

$$F(a, b) = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b)^2$$

afin d'obtenir a et b les paramètres du modèle. Le minimum est atteint si

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0 \text{ et } \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0$$

Résolution du système linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = -2\sum_{i=0}^{n} x_i(c_i - ax_i - b) = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = -2\sum_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

. C'est à dire

$$\begin{cases} a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i \\ a\sum_{i=0}^{n} x_i + (n+1)b = \sum_{i=0}^{n} c_i \end{cases}$$

En notant $\overline{x}$ et $\overline{c}$ les moyennes des x_i et c_i, de la dernière équation, on a

$$b = \overline{c} - a\overline{x}$$

En substituant dans la première équation, on a

$$a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + (\overline{c} - a\overline{x})\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i$$

En utilisant la variance,

$$V_x = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

on a

$$a(n+1)V_x = (\sum_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}$$

et on déduit

$$a = \frac{(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}}{(n+1)V_x}$$

7.2.4 Généralisation aux modèles linéaires

A partir des données (x_i, c_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, on introduit un modèle d'approximation linéaire plus général du type :

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x)$$

Les fonctions ϕ_j sont connues (ex : ln, exp, cos, monôme,...) alors que les coefficients α_j sont les paramètres à ajuster par rapport aux données concernées.
Un tel modèle est appelé linéaire de par son expression linéaire par rapport aux paramètres α_j.

Remarque : on retrouve le modèle de régression linéaire en posant $m = 1$, $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = x$. On a bien $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.

Comme pour le calcul de regression linéaire, on applique le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} S(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))^2 \end{aligned}$$

Ce minimum est atteint lorsque les dérivées partielles de S par rapport à chaque coefficient α_k, $k = 0, ..., m$, sont nulles. On a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S(\alpha_0, ..., \alpha_m)}{\partial \alpha_k} = 0 \\ &2\sum_{i=0}^{n} (c_i - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))(-\phi_k(x_i)) = 0 \\ &\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_k(x_i) \\ &\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) c_i \end{aligned}$$

En faisant varier $k = 0, ..., m$, on a un système linéaire de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues α_j, $j = 0, ..., m$. D'où

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) c_i, \text{ pour } k = 0, ..., m$$

signifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_0(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_0(x_i) c_i \\ ... \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_m(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_m(x_i) c_i \end{array} \right.$$

En posant la matrice $F = (F_{ji})_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ 0 \leqslant i \leqslant n}} = (\phi_j(x_i))_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ 0 \leqslant i \leqslant n}}$, on constate que

$$F(F^T) = (\sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i))_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ 0 \leqslant k \leqslant m}}$$

En posant les vecteurs $X^T = (\alpha_0 \ ... \ \alpha_m)$ et $C^T = (c_0 \ ... \ c_n)$, on obtient finalement

$$F(F^T)X = FC$$

Et avec $A = F(F^T)$, symétrique d'ordre $m + 1$ et $Y = FC$, si A est inversible, on déduit

$$X = A^{-1}Y$$

7.3 Exercices

Exercice 1

On donne la série unidimensionnelle suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaire en millions d'euros.

Chiffres d'affaires	$[0, 0.25[$	$[0.25, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2.5[$	$[2.5, 5[$	$[5, 10[$
Nombres d'entreprises	137	106	112	154	100	33

1. Calculer le chiffre d'affaire moyen et l'écart-type de la série.
2. Construire l'histogramme des fréquences.
3. Construire les deux polygones (croissant et décroissant) des fréquences cumulées
4. Calculer la médiane, les quartiles et la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 3 millions d'euros.

Exercice 2

Donner deux exemples de séries statistiques unidimensionnelles telles que :

1. pour la première, il est plus pertinent de calculer la médiane plutôt que la moyenne.
2. pour la seconde, il est plus pertinent de calculer la moyenne plutôt que la médiane.

Exercice 3

Soient les points $\{(1, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 10), (7, 15)\}$. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer la droite d'approximation affine de cet ensemble de points. Retrouver ce résultat en traduisant le problème matriciellement.

Exercice 4

Soient les points $\{(0, 7), (1, 4), (2, 2), (4, 4), (6, 12)\}$. Placer les points et choisir un modèle d'approximation linéaire. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer les paramètres du modèle choisi.

Exercice 5

L'indice moyen d'un salaire a évolué de la façon suivante :

année	1	2	3	4	5	6	7
indice	165	176	193	202	222	245	253

1. Représenter cette série statistique par un nuage de points.
2. En utilisant la méthode des moindres carrées, calculer l'équation de la droite représentant l'indice en fonction de l'année.
3. Comment pourrait-on prévoir l'indice à l'année 9 ?

Faire en cours une partie sur les densités de probabilités et la loi normale.