1 Eléments de logique

1.1 Définitions

Déf 1 : propositions
Une **proposition** ou phrase assertive (ou encore **assertion** : terme mathématique) est une phrase obéissant à une certaine syntaxe susceptible de faire l'objet d'un jugement de vérité, c'est à dire à laquelle on peut lui attribuer une valeur de vérité 1 (V : "vrai") ou 0 (F : "faux").

Exemples : "il pleut", "demain, j'irai au cinéma", "L'homme est mortel", "3 est un entier pair", "$(500+1)^2 = 500^2 + 1000 + 1$", "$2 = 3\times$"

"3 est un entier pair" est une assertion fausse
"$(500+1)^2 = 500^2 + 1000 + 1$" est une assertion vraie
"$2 = 3\times$" n'est pas une assertion
Une proposition ne se limite pas à l'énoncé d'une vérité absolue (comme "l'homme est mortel" ou les deux exemples précédents). De façon plus générale, la vérité d'une proposition est relative à certaines situations réelles ou imaginaire susceptibles d'être vérifiées ou pas. En effet les propositions "il pleut" ou "demain, j'irai au cinéma" peuvent être vraies ou fausses.

Remarque : en mathématique, pour effectuer une démonstration, on utilise des déductions logiques d'assertions vraies utilisant les propriétés des connecteurs et des raisonnements logiques (voir partie 4).

Déf 2 : négation
Soit p une proposition, on note **non**(p) ou $\neg p$ la négation de p ($\neg$: opérateur logique de négation). $\neg p$ est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie. L'opérateur de négation s'applique immédiatement à la proposition qui la suit. La table de vérité d'une proposition p et $\neg p$ est :

p	$\neg p$
1	0
0	1

Déf 3 : les connecteurs logiques
A partir d'un certain nombre d'assertions, on peut en fabriquer de nouvelles en utilisant des connecteurs logiques. Ils permettent de construire des énoncés complexes dont la valeur de vérité est fonction de la valeur de vérité des énoncés élémentaires qui les composent.

Remarques : en automatique ou en électronique, on utilisera plutôt le terme d'opérateur logique.

Soient p et q deux propositions, on définit :

— **la conjonction logique ET** notée $\wedge$, définie par :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Par exemple si p : "il pleut" et q : "il fait froid", $p \wedge q$: "il pleut et il fait froid" est vraie lorsque chacune des deux phrases élémentaires p et q sont vraies, fausse si l'une des deux est fausse.

— **la disjonction logique OU** notée $\vee$, définie par :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Par exemple si p : "Jean a eu plus de la moyenne générale au BAC" et q : "Jean a réussi ses rattrapages", $p \vee q$: "Jean a eu plus de la moyenne générale au BAC ou Jean a réussi ses rattrapages" est vraie lorsque l'une ou l'autre des deux phrases élémentaires p et q sont vraies. $p \vee q$ est faux lorsque Jean n'a pas eu la moyenne générale au BAC et n'a pas réussi ses rattrapages.

Remarques : le ou dans le langage courant peut être utilisé avec des sens différents. Par **exemple** :
. ou exclusif (disjonction exclusive) : "fromage ou dessert" (ou = ou bien)
. ou mathématique (disjonction logique, ou inclusif) : "on recherche une personne parlant l'anglais ou l'espagnol"
. ou conditionnel (mettant en jeu une implication logique) : "fait tes devoirs ou tu auras une mauvaise note", qui a le même sens logique que "si tu ne fais pas tes devoirs alors tu auras une mauvaise note"

— **la disjonction exclusive** notée $\triangle$, définie par :

p	q	$p \triangle q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Par exemple si p : "viande" et q : "poisson", $p \triangle q$: "viande ou poisson" est vraie lorsqu'exclusivement l'une ou l'autre des deux phrases élémentaires p et q sont vraies, mais pas les deux. $p \triangle q$ est faux lorsque p et q ont même valeur de vérité.

— **l'implication logique** notée $\Longrightarrow$, définie par :

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Par exemple si p : "il pleut demain" et q : "j'irai au cinéma", $p \Longrightarrow q$ signifie : "s'il pleut demain, j'irai au cinéma" On peut remplacer la virgule par alors. Au moment où j'énonce cette phrase, je la considère comme vraie, et que s'il ne pleut pas, j'ai le choix de faire ce que je veux. J'envisage donc que demain il puisse pleuvoir ou ne pas pleuvoir, que je puisse aller ou non au cinéma, mais j'exclus de ne pas aller au cinéma en cas de pluie. Pour résumer, s'il ne pleut pas demain, j'ai le choix d'aller au cinéma ou non (l'implication restera vraie), en revanche, une seule possibilité est exclue (implication est fausse) : celle où on a simultanément "il pleut demain" vrai et "j'irai au cinéma" faux.

Dans la Grèce antique, les stoïciens disaient : " Du vrai suit le vrai... Du faux suit le faux... Du faux suit le vrai... Mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre ".

Autre exemple : Soit l'implication $(x > 1) \Longrightarrow (x > 0)$. Prouvons que cette implication est une assertion vraie pour certaines valeurs réelles de x.

pour $x =$	$x > 1$	$x > 0$	$(x > 1) \Longrightarrow (x > 0)$
-3	F	F	V
1	F	V	V
2	V	V	V

En fait, cette implication est vraie pour tout x réel. (Voir la quantification dans le chapitre suivant).

Remarque 1. Dans l'implication $p \Longrightarrow q$, p s'appelle l'**hypothèse** et q la **conclusion**.
L'implication $q \Longrightarrow p$ s'appelle la **réciproque** de l'implication $p \Longrightarrow q$.

Remarque 2. Dans l'implication $p \Longrightarrow q$, en mathématiques, on dira aussi :
. pour que p soit vraie il faut que q soit vraie
. la condition nécessaire (à voir comme une obligation, une nécessité) de l'implication est q
. pour que q soit vraie il suffit que p soit vraie
. la condition suffisante de l'implication est p

— **l'équivalence logique** notée $\Longleftrightarrow$, définie par :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

L'équivalence $p \Longleftrightarrow q$ est vraie uniquement lorsque les propositions p et q sont **logiquement équivalentes**, c'est à dire qu'elles ont même valeur de vérité (en effet, on a simultanément $p \Longrightarrow q$ et $p \Longleftarrow q$). Ce connecteur correspond au **si et seulement si** du langage mathématique. Par exemple p : "il fait beau" et q : "je fais une promenade", $p \Longleftrightarrow q$ signifie : "s'il fait beau, et seulement dans ce cas, je fais une promenade".

Remarque : en mathématiques, on dira aussi :
. pour que p soit vraie, il faut et il suffit que q soit vraie
. p est vraie si et seulement si q est vraie
. une condition nécessaire et suffisante (ou **CNS**) pour que p soit vraie est que q soit vraie
. p équivaut à q

1.2 Propriétés

Deux énoncés sont équivalents s'ils ont une même table de vérité.
Soient p, q et r trois propositions, on a les propriétés suivantes :

1) la **double négation**
$\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p$

2) La **commutativité** de $\wedge$ et $\vee$
$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$
$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$

3) L'**associativité** de $\wedge$ et $\vee$
$(p \wedge (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
$(p \vee (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$

4) La **distributivité** de $\wedge$ sur $\vee$ et réciproquement
$(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

5) **Les lois de De Morgan**
$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

6) **L'implication et sa négation**
$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$
$\neg(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$

7) **L'équivalence et sa négation**
$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p))$
$\neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

En guise d'entraînement, ces propriétés sont toutes à démontrer

Exemple 1. montrons que : $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

On verra dans la partie 3 une autre façon de présenter ce type de tableau.

Exemple 2. les assertions $p \Longleftrightarrow p$, $(p \wedge q) \Longrightarrow p$ et $p \Longrightarrow (p \vee q)$ sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des assertions p et q. De telles assertions sont appelées **tautologies**.

Conséquences des lois de De Morgan pour l'électronique :

1) L'opérateur **NAND** : NON-ET
   L'opérateur NAND est aussi connu sous le non de barre de **Sheffer** notée |
   On définit A NAND B par $(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. On a :

A	B	A NAND B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

   Illustration : Soient deux interrupteurs initialement fermés et une lampe allumée dans un circuit. La lampe reste allumée sauf si l'on appuie sur les deux interrupteurs A et B (ils s'ouvrent). L'opérateur NAND est caractérisé par des contacts NF (normalement fermés) montés en parallèle.

2) L'opérateur **NOR** : NON-OU
   On définit A NOR B par $(\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$. On a :

A	B	A NOR B
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

   Illustration : Soient deux interrupteurs initialement fermés et une lampe allumée dans un circuit. La lampe reste allumée sauf si l'on appuie sur A ou B ou bien A et B. L'opérateur NOR est caractérisé par des interrupteurs NF (normalement fermés) montés en série.

Intérêt : On peut exprimer tous les opérateurs existants uniquement a' l'aide des opérateurs ET, OU et NON. Ceci est pratique dans la mesure où, en automatisme, chaque opérateur est représenté par un composant (appelé PORTE). Mais on peut se limiter à 2 opérateurs, ET et NON par exemple :
$(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

On peut même se limiter à un seul opérateur NAND ou NOR :
$(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg(A \text{ NAND } B)$; $(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \text{ NAND } \neg B)$; $\neg A \Longleftrightarrow (A \text{ NAND } A)$

Notation : en électronique, on note $\neg A$ par $\overline{A}$

1.3 Le calcul des propositions

Présentation : méthode qui fait abstraction de la structure interne des énoncés simples et se limite à étudier la relation entre la vérité/fausseté d'énoncés complexes et la vérité/fausseté des énoncés élémentaires qui les composent, avec comme objectif de pouvoir reconnaître comme valides ou invalides certains raisonnements.

Une **expression propositionnelle** est un énoncé complexe formé par combinaison d'énoncés élémentaires au moyen de connecteurs logiques. On ne s'occupe pas de la structure interne des énoncés élémentaires mis en jeu.
Une expression propositionnelle est donc une séquence de symboles pouvant appartenir à trois catégories différentes :

- les **variables propositionnelles** : phrases assertives élémentaires
- les **opérateurs logiques**
- les **parenthèses** indiquant l'ordre d'application des connecteurs

On dit qu'une expression propositionnelle est **bien formée** si l'application des opérateurs logiques à partir des variables propositionnelle et l'imbrication des parenthèses fournissent un résultat sans ambiguïté.

Règles de syntaxe :

- une variable propositionnelle constitue une expression propositionnelle bien formée
- si E est une expression propositionnelle bien formée, $\neg E$ est aussi une expression propositionnelle bien formée
- si E et F sont des expressions propositionnelles bien formées et c un connecteur logique, $E\ c\ F$ est aussi une expression propositionnelle bien formée.

Remarque 1. La construction d'une expression propositionnelle peut se visualiser sous forme d'un **graphe arborescent** (ou **arbre**) dont les expressions élémentaires ainsi que les opérateurs logiques constitueraient les feuilles, elles-mêmes regroupées par paquet constituant un noeud.

Remarque 2. Evaluer une expression propositionnelle, c'est indiquer la valeur de vérité qu'elle prend pour toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité des variables qu'elle comporte. On peut utiliser l'arbre de la remarque.1.
On présentera, ensuite, l'évaluation de l'expression propositionnelle dans un **tableau**, sous chaque opérateur apparaît l'évaluation du constituant dont il est l'opérateur principal.

Exemple En reprenant l'exemple de la partie précédente : $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$, on construit aisément l'arbre de cette expression, on en déduit ce tableau, un peu différent que celui mentionné plus haut.

$(p$	$\Longrightarrow$	$q)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0

1.4 Méthodes de démonstration

Dans une théorie mathématique :

- un **axiome** est une assertion que l'on pose vraie à priori. Par exemple les axiomes d'Euclide en géométrie plane
- un **théorème** est une assertion que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres théorèmes. Le théorème de Thalès en est un exemple en géométrie plane.

Les règles de déduction sont fondées sur les propriétés élémentaires des connecteurs logiques ainsi que sur des règles tautologiques constituant un raisonnement valide.

Remarques :
une **tautologie** est une assertion toujours vraie
une **contradiction** est une assertion toujours fausse

Soient p, q et r trois assertions, voici quelques types de raisonnement :

1) Le **syllogisme** (ou **modus ponens**)
Si l'on a $p \wedge (p \Longrightarrow q)$ alors on a q. Ce raisonnement est fondé sur la tautologie $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow q$ que l'on vérifie facilement Ã l'aide des tables de vérité.
Ainsi, en mathématiques, pour démontrer que q est un théorème, il suffit de vérifier que p et $p \Longrightarrow q$ sont des théorème ou des axiomes.

Exemple : "Tous les hommes sont mortels, or Socrates est un homme, donc Socrates est mortel"
Grossièrement : Homme implique mortel et on choisit un homme : Socrates, donc Socrates est mortel.
On reverra ce type de raisonnement dans le chapitre des ensembles, quand les quantificateurs seront abordés.

2) Raisonnement utilisant la **transitivité de l'implication**
Si l'on a $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$, alors on a $p \Longrightarrow r$.
Ainsi, pour démontrer $p \Longrightarrow r$, il suffit de montrer que r est conséquence de q, lui-même conséquence de p.

Exemple : "Si j'appuie sur l'interrupteur quand il fait nuit, la lampe s'allume et si la lampe s'allume, la pièce est éclairée"
On a "Si j'appuie sur l'interrupteur quand il fait nuit, la pièce est éclairée"

3) Raisonnement par **contraposition** (ou **modus tollens**)
On a $p \Longrightarrow q$ si et seulement si, on a $\neg q \Longrightarrow \neg p$.
$\neg q \Longrightarrow \neg p$ est appelée la **contraposée** de $p \Longrightarrow q$.
Pour démontrer l'implication $p \Longrightarrow q$, il suffit de montrer sa contraposée.

Exemple : "S'il pleut, la route est mouillée".
Ce qui équivaut à "Si la route n'est pas mouillée, il ne pleut pas."

4) Raisonnement par le **contre-exemple**
Si l'on veut démontrer que $p \Longrightarrow q$ est fausse, il suffit de montrer qu'il existe un exemple de p qui est vrai mais pour lequel q est faux.
En effet on veut démontrer $\neg(p \Longrightarrow q)$ est vraie c'est à dire $(p \wedge \neg q)$ vraie.

5) Raisonnement par **disjonction des cas**
Si l'on a $(p \vee q) \wedge (p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)$, alors on a r.
Ainsi pour démontrer le résultat r, il suffit de montrer que l'on a p ou q et que dans chacun des cas on peut en déduire r.

Exemple : on peut appliquer ce raisonnement en posant p : "avoir plus de la moyenne à l'épreuve du BAC", q : " réussir ses rattrapages" et r : "obtenir son diplôme du BAC"

6) Raisonnement par l'**absurde**
Si l'on a $(\neg p \Longrightarrow q) \wedge (\neg p \Longrightarrow \neg q)$ alors on a p.
Ainsi, pour démontrer p, on montre que sa négation $\neg p$ entraîne une assertion et son contraire, c'est-à-dire une contradiction.

Remarque : ce raisonnement est utilisé en mathématiques (on aura l'occasion de le rencontrer) ou en philosophie.

Exemple : Selon **Spinoza** (philosophe néerlandais, milieu du 17ème siècle), la substance est " ce qui est en soi et est conçu par soi, c'est-à-dire ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose pour être formé".
Ainsi :
Spinoza démontre par l'absurde que " la production d'une substance est chose absolument impossible " (Ethique I, proposition VI, corollaire). En effet, si une substance pouvait être produite, la connaissance de cette substance devrait dépendre de la connaissance de sa cause (sachant que la connaissance de l'effet suppose celle de la cause) et ainsi elle ne serait plus une substance, puisqu'une substance est précisément ce qui est en soi et est conÃ§u par soi.

1.5 Exercices

On considérera que p, q et r sont des propositions

Exercice 1

Démontrer que :

1. $(p \wedge (q \vee r)) \iff ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
2. $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$
3. $\neg(p \iff q) \iff ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$
4. $(p \vee q) \iff \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Exercice 2

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont des tautologies, des contradictions, ni l'une ni l'autre ? Justifier.

1. $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$
2. $(p \implies (q \implies r)) \iff ((p \wedge q) \implies r)$
3. $((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q)) \iff q$
4. $((p \implies q) \wedge q) \implies p$
5. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \iff (p \vee \neg q)$
6. $p \wedge \neg p$

Exercice 3

A l'aide des lois de De Morgan et des propriétés classiques de logique, simplifier au mieux les expressions suivantes :

1. $(p \implies q) \implies (p \vee q)$
2. $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \implies \neg(q \vee \neg r)$
3. $\neg(\neg((p \vee q) \implies (p \wedge \neg q)) \iff r)$

Exercice 4

Pour chacune des phrases assertives suivantes, identifier celles qui utilisent une implication logique. On donnera, dans ce cas, la réciproque, la contraposée et la négation. Pour les autres donner uniquement la négation.

1. S'il pleut, mon jardin est mouillé
2. S'il fait froid, et seulement dans ce cas, je reste à la maison
3. Il suffit que a soit un réel strictement positif, pour que $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$
4. Il faut parler anglais pour trouver un stage Ã l'international
5. Arrive à l'heure ou tu seras exclu

Exercice 5

Les différents connecteurs logiques : $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\Longrightarrow$ sont redondants, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre plus petit de connecteurs.

1. Montrer que $p \wedge q$ et $p \Longrightarrow q$ peuvent s'exprimer à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\vee$
2. Montrer que l'on peut exprimer tous les connecteurs logiques à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\wedge$
3. Montrer que la barre de Sheffer est un connecteur universel

Exercice 6

Ecrire une expression à l'aide d'une petit nombre de connecteurs logiques permet d'obtenir une écriture normalisée des propositions.

1. Ecrire $p \Longleftrightarrow q$ à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\vee$
2. **Forme normale conjonctive** : écrire $p \Longleftrightarrow q$ comme conjonction de disjonctions
3. **Forme normale disjonctive** : écrire $p \Longleftrightarrow q$ comme disjonction de conjonctions

Exercice 7

On considère une expression propositionnelle bien formée. L'évaluer c'est indiquer les valeurs qu'elle prend pour toute combinaison de valeurs de vérité des variables propositionnelles qu'elle comporte.

1. Soit l'expression propositionnelle E : $(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg(p \Longrightarrow q) \wedge q)$

   a. Donner l'arbre associé à E

b. Evaluer E, donner les résultat dans un tableau.
Le raisonnement E est-il valide (à savoir est-ce une tautologie) ? Si non, donner une situation dans lequel il est faux.

2. On considère le raisonnement suivant :
"Daniel est toujours bouleversé lorqu'il commence à 8 AM. Or Daniel est bouleversé, donc Daniel commence à 8 AM".
On donne pour formaliser le raisonnement les assertions suivantes :
. p : "Daniel est bouleversé"
. q : "Daniel commence à 8 AM"

a. Donner l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement

b. Evaluer cette expression

c. Le raisonnement est-il valide ? Si non, donner une situation dans lequel il est faux.

2 Ensembles, quantificateurs, prédicats

2.1 Ensembles : définitions et notations

1) De façon intuitive, un **ensemble** est une collection (finie ou infinie) d'objets (qui peuvent être de nature différente). Les objets regroupés en un ensemble sont désignés comme les **éléments** de cet ensemble.

   - Pour signifier que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$ et on lit "x appartient à E"
   - Si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$ et on dit que "x n'appartient pas à E"
   - Soient x, y deux éléments de E.
     On note $x = y$, si les deux éléments sont **égaux**
   - Soient x, y deux éléments de E.
     On note $x \neq y$, si les deux éléments sont **différents**

2) Deux ensembles E et F sont considérés comme **identiques** si et seulement si ils comprennent exactement les mêmes éléments. On note dans ce cas $E = F$

3) Exemples d'**ensembles numériques** :

   - **l'ensemble des entiers naturels**, $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$
   - **l'ensemble des entiers relatifs**, $\mathbb{Z} = \{...,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}$
   - **l'ensemble des rationnels**, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \text{ avec pgcd}(a,\ b) = 1\}$.
     $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions irréductibles
   - **l'ensemble des réels** $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est à dire des rationnels et des irrationnels (nombres ne pouvant se mettre sous la forme d'une fraction, ex : e, π, $\sqrt{2}$)
   - **l'ensemble des complexes**, $\mathbb{C} = \{a + ib,\ avec\, a \in \mathbb{R}\ ,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

   Si E est un ensemble numérique, on note E^* l'ensemble $E \backslash \{0\}$: E privé de 0.

4) Un ensemble peut se définir de deux manières :

   - **en extension** (ou **par énumération**) : on dresse la liste de tous les éléments.

     Exemples : . $A = \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit\}$
     . $B = \{a,\ b,\ c\}$

     Remarque : l'ordre et la répétition d'éléments sont sans influence. Par exemple, $B = \{b, c, a\} = \{a,\ a,\ c,\ b,\ b,\ b\}$

   - **en compréhension (ou par description)** : on énonce une propriété caractéristique sur les éléments le constituant.

     Exemple : $C = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 - 7x + 10 = 0\}$

5) Un ensemble E est **fini** lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Dans ce cas le nombre d'éléments est appelé **cardinal** de l'ensemble E et on le note card(E) ou $|E|$. Un ensemble qui n'est pas fini est **infini**.

   Exemples :

   - $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont infinis
   - card(A)=4 et card(B)=3
   - Après calcul des solutions de l'équation dÃ©finie dans C, on trouve $C = \{2,\ 5\}$. Ainsi card(C)=2
   - $D = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 \leqslant x < 4\} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, donc card$(D)$=7

6) L'**ensemble vide** noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On a donc card$(\emptyset)$=0.

7) On appelle **singleton** un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. Ex : $\{1\}$.

2.2 Quantificateurs

Remarque : **quantificateur** est un mot de la famille de quantité, quantitatif, quantum.

A partir d'une proposition $P(x)$ à une variable x dans un ensemble E, on peut construire trois assertions :

1) $\forall x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**pour tout** élément x de E, on a $P(x)$".
   Cette assertion est vraie lorsque $P(a)$ est vraie quel que soit l'élément a de E.
   Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

   Exemples :

   - $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ est une assertion fausse. Il suffit de prendre le contre-exemple $x = 0$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ est une assertion vraie

2) $\exists x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**il existe** un élément x de E tel que $P(x)$".
   Cette assertion est vraie lorsque $P(a)$ est vraie pour au moins un élément a de E.
   Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

   Remarque $\exists x \in E,\ P(x)$ qui se lit aussi "certains x de E vérifient $P(x)$"

   Exemples

   - $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ est une assertion vraie. Il suffit de prendre l'exemple $x = 1$
   - $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x < 0$ est une assertion fausse

3) $\exists! x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**il existe un unique** élément x de E tel que $P(x)$".
   Cette assertion est équivalente à :
   $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (P(x)$ et $P(y)) \Longrightarrow x = y)$

Exemples

- $\exists! x \in \mathbb{R},\ \ln(x) = 0$ est une assertion vraie. Il suffit de prendre l'unique exemple $x = 1$
- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ est une assertion fausse, car -1 et 1 sont solutions

Remarques importantes :

1) $(\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall y \in E,\ P(y))$ et $(\exists x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\exists y \in E,\ P(y))$.
Le nom des variables x et y n'ont pas de signification particulière.
2) Si l'on change l'ordre des quantificateurs dans une proposition qui s'écrit avec $\forall$ et $\exists$, sa signification en est totalement changée.
En effet, considérons la proposition $P(x,\ y)$: "$y = -x$" avec $x,\ y$ des réels. On peut construire les deux propositions :
   - "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = -x$" : qui est vraie
   - "$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = -x$" : qui est fausse car elle signifie que "tous les réels ont le même opposé"
3) Dans une phrase du type : $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,\ y)$: y s'exprime en fonction de x. En effet le sens de cette phrase est parmi tous les éléments x de E, il existe certains $y \in E$, tel que l'on a $P(x,\ y)$.

2.3 Proposition quantifiée et négation

L'utilisation de propositions à une variable limite l'étude de la quantification à l'étude de la possibilité de manipuler dans le raisonnement des propositions susceptibles d'être caractÃ©risées comme :

1. **universelles affirmatives**, paraphrasables comme "la propriété P est vérifiée par toutes les entités vérifiant la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "tout P est Q"
Formalisation : $\forall x\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$
2. **universelles négatives**, paraphrasables comme "la propriété P n'est vérifiée par aucune entité vérifiant la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "aucun P n'est Q"
Formalisation : $\forall x\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))$
3. **particulières affirmatives**, paraphrasables comme "il y a au moins une entité vérifiant la propriété P qui vérifie la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "un P au moins est Q"
Formalisation : $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

   Remarque :
   une particulière affirmative est la négation d'une universelle négative, et réciproquement.
   En effet, $\neg(\forall x\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \Longrightarrow \neg Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
4. **particulières négatives**, paraphrasables comme "il y a au moins une entité vérifiant la propriété P qui ne vérifie pas la propriété Q", en abrégÃ©, on dit aussi "un P au moins n'est pas Q"
Formalisation : $\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

   Remarque :
   une particulière négative est la négation d'une universelle affirmative, et réciproquement.
   En effet, $\neg(\forall x\ (P(x) \Longrightarrow Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \Longrightarrow Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Exemple :

On pose E l'ensemble des êtres vivants, $P(x)$: "x est un chat" et $Q(x)$: "x est gris". **Alors** :

— "tous les chats sont gris" se formalise par : $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$.

— "aucun chat n'est gris" se formalise par : $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))$.

— "certains chats au moins sont gris" se formalise par : $\exists x \in E,\ (P(x) \wedge Q(x))$.

— "certains chats au moins ne sont pas gris" se formalise par : $\exists x \in E,\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

2.4 Logique des prédicats : langage

Un prédicat permet d'exprimer une relation entre plusieurs objets, comme père(Jean,Pierre) ou plusPetitQue(3,7). Un prédicat a 0, 1, ou plusieurs arguments. Les variables propositionnelles (ou formules atomiques, ou encore atomes) de la logique propositionnelle peuvent être vus comme des prédicats à 0 argument. Ceci justifie le nom logique des prédicats. La logique des prédicats est aussi appelée logique du premier ordre, par opposition à la logique de second ordre et aux logiques d'ordre supérieur. En particulier la logique du second ordre permet de quantifier sur des fonctions (vues comme des cas particuliers de relations). La logique propositionnelle peut alors être vue comme logique d'ordre 0.

Ainsi le syllogisme : "tout être humain est mortel, or Socrates est un être humain, donc Socrates est mortel", se modélise par :

$$((\forall x, (\text{êtreHumain}(x) \Longrightarrow \text{mortel}(x))) \wedge \text{êtreHumain}(\text{Socrate})) \Longrightarrow \text{mortel}(\text{Socrate})$$

Remarque : $\forall$ rappelle la similarité avec la conjonction $\wedge$. Si on se limite à un ensemble fini d'objets O_1,..., O_n, alors $(\forall x, p(x))$ correspond à la conjonction $(p(O_1) \wedge ... \wedge p(O_n))$

Définition : l'alphabet de la logique des prédicats est constitué de

- un ensemble dénombrable de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés p, q, r, ..., homme, mortel, père, ...
- un ensemble dénombrable de variables d'objets (ou variables d'individu), notées x, y, z, x_1, x_2, ...
- un ensemble dénombrable de prédicats (ou fonctions) à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $f, g, ...$, pèreDe, ...
- quantificateurs $\forall$, $\exists$
- connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, ... ainsi que les parenthèses de la logique propositionnelle.

Les fonctions à 0 arguments sont appelées constantes (souvent notées a, b, ..., Socrates, ...). Les prédicats à 0 arguments ne sont rien d'autre que des variables propositionnelles.

Définition : terme
L'ensemble des termes est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que

- toute variable est un terme
- $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme si f est une fonction a n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes

Définition : formule
Si P est un prédicat à n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes alors $P(t_1, ..., t_n)$ est une formule atomique. L'ensemble des formules (ou formules bien formées) de la logique des prédicats est alors défini de la même manière qu'en logique propositionnelle, en rajoutant une clause pour les quantificateurs.

Exemples de traduction d'énoncés en formules :

- "Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir."
$(\exists x,\ \text{peine}(x)) \wedge (\exists x,\ \text{plaisir}(x)) \wedge (\forall x,\ (\text{peine}(x) \Longrightarrow \neg\text{plaisir}(x)))$
- " Il existe un plus grand entier."
$(\exists x,\ (\text{entier}(x)) \wedge (\forall y,\ (\text{entier}(y) \Longrightarrow \text{plusGrand}(x, y)))$

2.5 Quantification, négation, prédicat

Exercice 1

Modéliser les propositions suivantes et donner leurs négations :

A : "Tous les étudiants doivent passer le toeic"
Poser $P(x)$: "x est un étudiant" et $Q(x)$: "x passe le toeic"

B : "Certains élèves de l'ESGI veulent devenir logicien", poser 2 prédicats

C : "$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists q \in \mathbb{Q},\ 0 \leqslant q \leqslant \varepsilon$"

D : "Aucun étudiant ne sera absent à la dernière séance de logique", poser 2 prédicats

E : "Dans toutes les matieres, il y a au moins un étudiant qui ne travaille pas régulièrement", poser 3 prédicats

Exercice 2

Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un homme, y un film et que $p(x, y)$ est le prédicat "l'individu x a vu le film y". Donner les propositions qui sont équivalentes.

1. $\forall x,\ \forall y,\ p(x, y)$
2. $\forall x,\ \exists y,\ p(x, y)$
3. $\exists x,\ \forall y,\ p(x, y)$
4. $\exists x,\ \exists y,\ p(x, y)$
5. $\forall y,\ \forall x,\ p(x, y)$
6. $\forall y,\ \exists x,\ p(x, y)$
7. $\exists y,\ \forall x,\ p(x, y)$
8. $\exists y,\ \exists x,\ p(x, y)$

Exercice 3

Modéliser les propositions suivantes :

1. A : "Une personne n'a qu'un seul père biologique"
   Toutes les variables représentent des individus, utiliser le prédicat PereBio(x,y) : x est le père biologique de y. Ne pas utiliser $\exists!$
2. B : "Un habit ne peut être que de taille S, M, L, XL"
   Utiliser les prédicats Habit(h) : h est un habit et Taille(h, x) : h est de taille x

3. C : "Les étudiants et les enseignants sont des personnes"
   Utiliser les prédicats enseignant(x), étudiant(x) et personne(x)

4. D : "Seuls les étudiants peuvent s'inscrire à des cours."
   Utiliser les prédicats inscription(x, y) et étudiant(x)

5. E : "On ne peut s'inscrire à un cours que s'il est enseigné par quelqu'un
   Utiliser inscription(x, y), personne(z) et enseigne(z, y)

Exercice 4

Soit la proposition $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2)$.

1. Donner la valeur de vérité de P.

2. Existe-t-il un contre-exemple ?.

3. Présenter un exemple.

4. Présenter un hors-sujet.

3 Opérations entre ensembles et propriétés

3.1 Inclusion

1) **Définition**

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** de E ou que F est **inclus** dans E ou que F est **une partie** de E ou encore que E **contient** F si tout élément de F appartient Ã E. C'est à dire :

$$\forall x \in F,\ x \in E \text{ qui se note aussi } \forall x\ (x \in F \Longrightarrow x \in E)$$

On écrira, dans ce cas, $F \subset E$ (F est inclus dans E) ou $E \supset F$ (E contient F) . On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2) **Sous-ensembles définis par une proposition à variable :**

Si P est une proposition à une variable et si E est un ensemble, on peut définir la partie de E constituée des éléments de E vérifiant P. On la note :

$$F = \{x \in E \,/\, P(x)\}.$$

Cette partie est donc caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\forall x \in E,\ (x \in F \Longleftrightarrow P(x)).$$

Exemple : l'ensemble des entiers naturels pairs peut se définir en extension par :

$$\{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$$

Remarque

- Si A et B sont deux parties de E, définies respectivement par les propositions $P(x)$ et $Q(x)$,
  $A \subset B$ est équivalente à l'assertion $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$
  $A = B$ est équivalente à l'assertion $\forall x \in E,\ (P(x) \Longleftrightarrow Q(x))$

3) **Propriétés**

Prop 1 : Soient E, F et G trois ensembles, on a :

$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$

$E \in \mathscr{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E)$

$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Longrightarrow E \subset G$

Exemple : Soit $A = \{1,\ 2,\ 3\}$
On a $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$
Ne pas confondre $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ et $\{1,\ 2\} \in \mathscr{P}(\{1,\ 2,\ 3\})$

Prop 2 : Soit A un ensemble fini à n éléments, alors $\mathscr{P}(A)$ est fini, on a card($\mathscr{P}(A)$)=2^n

Démonstration :

Rappel : une combinaison de p éléments de A (constitué de n éléments) est une partie de A de p éléments
On note C_n^p ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments.
C'est aussi le nombre de façons de choisir p éléments parmi n éléments. On a $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Dans l'**exemple précédent**, on a $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$ ce qui donne : 1+3+3+1=8=2^3, OK

En généralisant pour un ensemble A à n éléments, on a card($\mathscr{P}(A)$)=$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$
Donc card($\mathscr{P}(A)$)=$\sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p = (1+1)^n = 2^n$, par la formule du binôme de Newton, $(a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p\, b^{n-p}$

3.2 Opérations dans $\mathscr{P}(E)$

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit les parties suivantes :

$C_E(A) = \{x \in E,\ x \notin A\}$, le **complémentaire** de A dans E, notée aussi $\overline{A}$

$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \,\text{et}\, x \in B\}$, l'**intersection** de A et B

$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \,\text{ou}\, x \in B\}$, la **réunion** de A et B

$A \backslash B = \{x \in E,\ x \in A \,\text{et}\, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$, la **différence** de A et B, notée aussi $A - B$

$A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$, la **différence symétrique : ou exclusif ensembliste** de A et B

$A \cap B = \emptyset$ signifie que A et B sont **disjoints**

Propriétés

1. Soient A et B deux ensembles finis, on a :
   card$(A \cup B)$ = card(A) + card(B) − card$(A \cap B)$

2. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E fini. On a :
   . Si $A \subset B$ et card(A) = card(B), alors $A = B$
   . card$(C_E(A))$ = card(E) − card(A)

Remarque

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions à variable. On définit les ensembles :

$$A = \{x \in E \,/\, P(x)\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in E \,/\, Q(x)\}$$

On a ($P(x)$ et $Q(x)$), ($P(x)$ ou $Q(x)$) et (non($P(x)$)) qui sont alors associés respectivement aux ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $C_E(A)$

3.3 Propriétés

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. On a :

- $C_E(\emptyset) = E$, $C_E(E) = \emptyset$, $C_E(C_E(A)) = A$
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$, $A \cup A = A$, $A \cup E = E$
- $(A \cup B = B) \Longleftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cap E = A$
- $(A \cap B = A) \Longleftrightarrow A \subset B$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$, $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
- $C_E(A) = E \backslash A$, $A \backslash \emptyset = A$
- $(A \backslash B = \emptyset) \Longleftrightarrow A \subset B$, $A \backslash B = A \cap C_E(B) = A \backslash (A \cap B)$
- $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$, $A \bigtriangleup \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

3.4 Couples, produit cartésien

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble des **couples** (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$. On écrit $E \times F = \{(x, y) \,/\, x \in E, \, y \in F\}$.
L'ensemble $E \times E$ se note aussi E^2. Ex : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, le plan 2D.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_i des ensembles pour tout $i = 1, ..., n$. On dÃ©finit l'ensemble des $n-$uplets par $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,/\, x_i \in E_i, \, i = 1, ..., n\}$. On note $E_1 \times ... \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$.
On a $(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, ..., n$.

Exemple

Soient $E = \{0, 1\}$ et $F = \{a, b, c\}$. On a :
$E \times F = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$
Attention, $E \times F \neq F \times E = \{(a, 0), (b, 0), ...\}$.

Remarques

Soient E et F deux ensembles. Si $x \in E$ et $y \in F$, on a $(x, y) \in E \times F$ et $\{x, y\} \in P(E \cup F)$.
En particulier, $\{x, y\} = \{y, x\}$, en revanche, $(x, y) \in E \times F \iff (y, x) \in F \times E$.

Propriétés

Soient E, F, G et H quatre ensembles, on a :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$
- $E \times F = F \times E \iff (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \text{ ou } E = F)$
- $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$, $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F)$
- $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

3.5 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. Déterminer $\mathscr{P}(A)$: l'ensembles des parties de A.

Exercice 2

Soient a et b deux réels et $A = \{a,\ b\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. $a \in A$
2. $\{a\} \in A$
3. $\emptyset \in A$
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$
5. $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$

Exercice 3

Soit $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ et soient les parties suivantes de E

1. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
2. $B = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
3. $C = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
4. $D = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $\overline{\overline{A} \cap D} \cap \overline{B \cup C}$

Exercice 4

1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ et que $\overline{\overline{A}} = A$
2. Simplifier les expressions suivantes : $A \cup (A \cap B)$, $A \cap (A \cap B)$, $A \cup (A \cup B)$, $A \cap (A \cup B)$.

Exercice 5

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cup (A \cap B)) \cap B$
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
3. $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A})$

Exercice 6

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
2. $(A \cap B) \,\Delta (A \cap C) = A \cap (B \,\Delta\, C)$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
4. $(A \cup B = A \cap C$ et $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B) \Longrightarrow A = B = C$

Exercice 7

Pour la question 1, calculer l'ensemble des solutions, pour les deux autres, dessiner les parties de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

1. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 1 \text{ et } -3x + 2y = 2\}$
2. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \text{ et } 2x + y \leqslant 1\}$
3. $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$

4 Somme, produit, logarithme, exponentielle

4.1 Somme

4.1.1 Définition

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p + a_{p+1} + ... + a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette somme comporte $n - p + 1$ termes, on peut la noter aussi $\sum\limits_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\sum\limits_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

Remarque :

- La variable i est muette, on a $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k$

4.1.2 Règles de calcul et méthodes

1) **Linéarité** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \sum_{i=p}^{n} b_i \quad \textbf{et} \quad \sum_{i=p}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i$$

Ce qui se résume par $\sum\limits_{i=p}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum\limits_{i=p}^{n} a_i + \mu \sum\limits_{i=p}^{n} b_i$

2) **Attention**, en général :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=p}^{n} a_i \sum_{i=p}^{n} b_i$$

3) **Télescopage** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$$

4) **Changement d'indice**, par exemple :

$$\sum_{i=p}^{n} a_{i+m} = \sum_{k=p+m}^{n+m} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i + m$, avec $k : p + m \longrightarrow n + m$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k - m$

$$\sum_{i=p}^{n+p} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{k+p}$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i - p$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k + p$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = n - i$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $n - k$

5) **Sommation par séparation** :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{n} a_i\,, \quad \text{avec } p \leqslant q \leqslant n$$

Par exemple, séparation des termes suivant les restes possibles r modulo b des indices. On pose : $i = bq + r$, avec $i, q, r \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $r < b$, c'est à dire $r \in \{0, 1, ..., b-1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{n} a_i &= \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq}} a_i + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq+1}} a_i + ... + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n \\ i=bq+b-1}} a_i \\
&= \sum_{p\leqslant bq\leqslant n} a_{bq} + \sum_{p\leqslant bq+1\leqslant n} a_{bq+1} + ... + \sum_{p\leqslant bq+b-1\leqslant n} a_{bq+b-1} \\
&= \sum_{q=\lceil \frac{p}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n}{b}\rfloor} a_{bq} + \sum_{q=\lceil \frac{p-1}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n-1}{b}\rfloor} a_{bq+1} + ... + \sum_{q=\lceil \frac{p-b+1}{b}\rceil}^{\lfloor \frac{n-b+1}{b}\rfloor} a_{bq+b-1}
\end{aligned}$$

On notera la partie entière par défaut $\lfloor\ \rfloor$ et la partie entière par excès $\lceil\ \rceil$, on vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lceil x\rceil - 1 \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil$
$\lfloor x\rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z},\ m \leqslant x\}$ et $\lceil x\rceil = \min\{n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n\}$

4.1.3 Sommes classiques

1) Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}
\end{aligned}$$

2) Soient (a_n) une suite arithmétique et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = N\frac{a_p + a_n}{2}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

3) Soient (a_n) une suite géométrique de raison q et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \begin{cases} a_p \dfrac{1 - q^N}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ N a_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

4.1.4 Sommes binomiales

On rappelle pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} & \text{, si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$$

C_n^k qui se note aussi $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ est le nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n.

Propriété : Formule du binôme de Newton :

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

4.2 Doubles sommes

4.2.1 Définition et notations

Pour $p \leqslant n$ et $q \leqslant m$ des entiers positifs, une double somme est du type $\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{i=p}^{n} S_i \text{ , avec } S_i = \sum_{j=q}^{m} a_{ij}$$

Autre notation $\sum_{\substack{p \leqslant i \leqslant n \\ q \leqslant j \leqslant m}} a_{ij}$. Si $n = m$ et $p = q$, on la notera $\sum_{p \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$

Attention
Les bornes de la deuxième somme peuvent dépendre de l'indice de la première, mais jamais l'inverse. Par exemple :

- Valide : $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$
- Non valide : $\sum_{i=2}^{j}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

4.2.2 Règles de calculs et méthodes

1) Factorisation à bornes quelconques. Cas 1 : le premier terme ne dépend pas du deuxième indice :

$$\sum_i \sum_j a_i b_{ij} = \sum_i a_i (\sum_j b_{ij})$$

2) Factorisation à bornes quelconques. Cas 2 : termes d'indices **séparables** :

$$\sum_i \sum_j a_i b_j = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j)$$

3) Inversion des sommes. Cas 1 : les bornes ne dépendent pas d'indices :

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{j=q}^{m} \sum_{i=p}^{n} a_{ij}$$

4) Inversion des sommes. Autre cas, utiliser éventuellement un tableau, par ex :

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} a_{ij}$$

4.3 Produit

4.3.1 Définition et notations

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p a_{p+1} ... a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet produit comporte $n - p + 1$ facteurs, on peut le noter aussi $\prod\limits_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\prod\limits_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

4.3.2 Règles de calculs et méthodes à bornes quelconques

1) $\prod\limits_i a_i b_i = (\prod\limits_i a_i)(\prod\limits_i b_i)$

2) Par **récurrence** du 1), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod\limits_i (a_i)^n = (\prod\limits_i a_i)^n$

3) **Déduction** de 2), $\forall i,\ a_i \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\prod\limits_i (a_i)^n = (\prod\limits_i a_i)^n$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$

5) **Produit télescopique** :

$$\forall i \in [\![p, n]\!],\ a_i \neq 0,\ \prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

4.4 Exponentielle et logarithme

4.4.1 Exponentielle

- On définit la fonction exponentielle :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$$

En utilisant la formule de Taylor, $f(1) = e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828$ un irrationnel.

- f est continue, dérivable, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^a > 0$, en particulier $e^0 = 1$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^a e^b = e^{a+b}$

3) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$

4) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

6) $\forall (n,p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R},\ \prod_{k=p}^{n} e^{a_k} = e^{\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right)}$

4.4.2 Logarithme

- On définit la fonction logarithme Népérien :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

- f est continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. f est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. On a $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \ln(x)$ n'existe pas

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

3) $\forall (a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n \ln(a)$

4) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln(a)$

5) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

6) $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(X)} = X$ et $\forall X \in \mathbb{R},\ \ln(e^X) = X$

7) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ X^n = e^{\ln(X^n)} = e^{n\ln(X)}$

8) $\forall (n,p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p,n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\prod_{k=p}^{n} a_k) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$

4.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les sommes et produits suivants en fonctions de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 1, \qquad \prod_{i=0}^{n-42} 2, \qquad \prod_{i=8}^{2n-3} \frac{i}{i+1}, \qquad \prod_{k=1}^{n-2} 2k, \qquad \sum_{j=0}^{n} j, \qquad \sum_{k=3}^{n} 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$$

Exercice 2

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en calculant a, b tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, en calculant a, b, c tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

Exercice 3

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, pour le second, dériver $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

Exercice 4

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$
2. Ecrire de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{3 \leqslant i < j < n} a_{ij}$
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 2^k$, puis la calculer en inversant les deux sommes

Exercice 5

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$
2. En utilisant la fonction ln, montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

Exercice 6

Calculer

$$\prod_{k=12}^{87} \frac{2k+1}{2k-1} \text{ puis } \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} \text{ et enfin } \forall x > 0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$$