Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Celia de Frutos Palacios

28 de marzo de 2018

Capítulo 1

Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

1.1. Integral de Poisson y Teorema de Fatou

1.1.1. La Integral de Poisson

Definición 1.1.1. Se llama núcleo de Poisson a la función P definida por

$$P : (r,t) \in [0,1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \tag{1.1}$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables r y t o como una familia de funciones de t que dependen de r.

Dados $z = re^{i\theta}$, con $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \tag{1.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2 \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (re^{it})^n\right] = \operatorname{Re}\left[1 + 2\frac{re^{it}}{1 - re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right].$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{(1 + re^{it})(1 - re^{it})}{|1 - re^{it}|^2}\right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}.$$

Propiedades del núcleo de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1, \forall r \in [0,1). \tag{1.3}$$

$$P_r(t) > 0, \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

$$P_r(t) = P_r(-t), \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$P_r(t) < P_r(\delta), 0 < \delta < \ |t| \leq \pi \tag{1.6}$$

$$\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0, \forall \delta \in (0,\pi] \tag{1.7}$$

Definición 1.1.2. Se llama integral de Poisson de una función $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ a la función F dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como $F = P[f]$.

Además si f lleva $\partial\mathbb{D}$ en los reales, 1.2 nos muestra que

$$P[f] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt\right].$$

1.1.2. Teorema de Fatou

Para demostrar el Teorema de Fatou nos vamos a basar en unos resultados clásicos del libro [chap. 11]rudin que no vamos a probar.

Teorema 1.1.1. *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ y $F = P[f]$, entonces*

$$\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

Teorema 1.1.2. *Sean $f \in C(\partial\mathbb{D}), F = P[f]$ y*

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(re^{i\theta}) & si\ r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & si\ 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Entonces u es una función continua en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Fatou)**.** *Para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, existe una función $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ definida en casi todo punto tal que*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it}) \tag{1.8}$$

Se tiene la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$. Para todo $z \in U$, la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{1.9}$$

se satisface, donde γ es el círculo unidad positivamente orientado: $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Las funciones $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})e^{-int}dt = 0, n = -1, -2, \ldots \tag{1.10}$$

Demostración. La existencia de f^* se sigue de los teoremas 1.1.1 y 1.1.2.

Por 1.8, tenemos que $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Si $z \in U$ y $|z| < r < 1$, tomemos $\gamma_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z}dt$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión tal que $r_n \to 1$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{it}}dt \tag{1.11}$$

Por lo que ya hemos probado 1.9. Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \ldots$$

Pasando al límite tenemos que f^* cumple 1.10. Además, podemos convertir 1.11 en una integral de Poisson, si $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f^*(e^{it})dt \end{aligned}$$

De esto concluimos que $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$, así que ambas normas coinciden. $\square$

1.2. Teorema de Carathéodory

Definición 1.2.1. Aplicación conforme Sean U y $V \subset \mathbb{C}^n$. Una aplicación $f : U \to V$ se llama conforme en un punto $u \in U$ si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por u.

Proposición 1.2.0.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$. Una aplicación $f : U \to \mathbb{C}$ es conforme en U si (y solo si) $f \in \mathcal{H}(U)$ y $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in U$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en U y $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in U$. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva simple y sea $z = z(t) = x(t) + iy(t) = \gamma(t)$ la ecuación paramétrica de γ. Consideremos $w = (f \circ z)(t)$ holomorfa en U.

Ahora por la regla de la cadena $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$. Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0)$$

$f(z)$ rota el vector tangente a $\gamma(t_0) = z_0$ por el mismo ángulo ($\arg f'(z_0)$), independientemente del camino γ.

Si nos fijamos en el módulo, obtenemos un resultado similar,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Así, $f(z)$ cambia el módulo de la distancia entre los puntos por el mismo factor, independientemente de la dirección en la que nos aproximemos a z_0.

Podemos escribir

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

Entonces

Entonces

$$\arg(w - w_0) = \arg\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) + \arg(z - z_0)$$

Como $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in U$, tomando límites tenemos

$$\phi = \lim_{z \to z_0} \arg(w - w_0) = \arg f'(z_0) + \theta$$

La aplicación f ha rotado el vector tangente a z_0 un ángulo dado por arg $f'(z_0)$. Sean dos curvas que pasan por z_0 con ángulos θ_1 y θ_2 con respecto al eje x. Entonces el ángulo entre sus imágenes en w_0 es

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 + \arg\, f'(z_0) - \theta_1 - \arg\, f'(z_0) = \theta_2 - \theta_1$$

Por lo tanto, f preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por z, $\forall z \in U$.

□

Teorema 1.2.1 (Teorema de Carathéodory)**.** *Sea φ una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en un dominio de Jordan Ω. Entonces φ tiene una extensión continua al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y la extensión es inyectiva de $\overline{\mathbb{D}}$ en Ω.*

Demostración. Vamos a suponer que Ω está acotado. Fijemos $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Primero vamos a probar que φ tiene una extensión continua en ζ. Sea $0 < \delta < 1$,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$. Entonces $\varphi(\gamma_\delta)$ es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|\, ds$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2\, ds$$

entonces para $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int\int_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\rho)} |\varphi'(z)|^2\, dxdy = \pi \mathrm{Area}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty$$

Entonces, existe una sucesión $\{\delta_n\} \downarrow 0$ tal que $L(\delta_n) \to 0$. Cuando $L(\delta_n) < \infty$, la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ tiene extremos $\alpha_n, \beta_n \in \overline{\Omega}$ y ambos puntos deben estar en $\Gamma = \partial\Omega$. De hecho, si $\alpha_n \in \Omega$, entonces algún punto cerca de α_n tiene dos preimágenes distintas en $\mathbb{D}$ y esto es imposible pues φ es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \to 0 \tag{1.12}$$

Sea σ_n el subarco cerrado de Γ que tiene extremos α_n y β_n y con un diámetro menor. Entonces 1.12 implica que $\mathrm{diam}(\sigma_n) \to 0$ porque Γ es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan, $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla U_n es acotada. Entonces $U_n \subset \Omega$ ya que $\mathbb{C}^* \setminus \overline{\Omega}$ es conexo por arcos. Como

$$\mathrm{diam}(\partial U_n) = \mathrm{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \to 0, \text{ concluimos que } \mathrm{diam}(U_n) \to 0. \tag{1.13}$$

Tomamos $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$. Sabemos que para n suficientemente grande, $\varphi(D_n) = U_n$. Si no, por conexión tendríamos que $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$ y

$$\mathrm{diam}(U_n) \geq \mathrm{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contracide con 1.13. Entonces $\mathrm{diam}(\varphi(D_n)) \to 0$ y $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$ es un solo punto pues $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$. Esto significa que φ tiene una extensión continua en $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$. La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Denotemos ahora por φ a la extensión $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \bar{\Omega}$. Como $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$, φ lleva $\overline{\mathbb{D}}$ en $\bar{\Omega}$. Para probar que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2), \zeta_1 \neq \zeta_2$. El argumento utilizado para mostrar que $\alpha_n \in \Gamma$, también prueba que $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$, así que podemos suponer que $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}, j = 1, 2$. La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio $W \subset \Omega$, luego $\varphi^{-1}(W)$ es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\})$$

Pero como $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y φ es constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$, se tiene que φ es constante y esta contradicción prueba que $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$. □

Teorema 1.2.2. *Sea C un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable con interior D. Sea $f \in \mathcal{H}(C \cup D)$ una aplicación inyectiva en C. Entonces f es holomorfa e inyectiva en D.*

Demostración. La aplicación $w = f(z)$ lleva C en un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable C'. Sea w_0 un punto arbitrario que no esté en C'. Entonces,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si w_0 está fuera de C' y es ± 1 si w_0 está dentro de C'. Sin embargo, n no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de $f(z) - w_0$ dentro de C. Entonces, $n = 1$ si w_0 está dentro de C'.

Esto prueba que $f(z) = w_0$ tiene una sola solución si w_0 está dentro de C', que $f(z)$ es holomorfa e inyectiva en D y lleva D en D' (el interior de C') y que la dirección positiva de C' se corresponde con la dirección positiva de C. □

Apéndice A

Notación

$\mathcal{H}(U)$: holomorfa en U
$\mathcal{H}^{\infty}(U)$: holomorfa y acotada en U
$\mathbb{D}$: disco unidad
$\overline{\mathbb{D}}$: disco unidad cerrado
$\partial\mathbb{D}$: borde del disco unidad
$L^{\infty}(U)$: