

# Notas para la presentación

Celia de Frutos Palacios

## Diapositiva 1

Buenos días, soy Celia de Frutos y hoy voy a presentar mi trabajo *Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones*.

## Diapositiva 2

El principal objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento de las funciones complejas en el disco unidad. Se han estudiado gran cantidad de resultados teóricos y ejemplos prácticos que han servido para analizar el comportamiento que pueden tener algunas funciones en los puntos del borde. Nos hemos centrado por tanto en saber en qué circunstancias se puede extender una función al borde del disco con continuidad. Así como mostrar la relación entre los valores en la frontera y el interior del disco. Para poder visualizar y analizar casos concretos se ha desarrollado una aplicación informática que veremos más adelante.

## Diapositiva 3

A lo largo del trabajo nos adentramos en cuestiones que desarrollan aspectos de nuestro problema desde tres puntos de vista: analítico, geométrico y algebraico como hicieron Cauchy, Riemann y Weierstrass, respectivamente.

## Diapositiva 4

Parte de este trabajo va a estar centrado en resolver el problema de Dirichlet para el disco. Vamos a querer encontrar una función armónica en el disco que coincida con una función continua  $f$  dada en el borde.

## Diapositiva 5

Este problema fue resuelto afirmativamente gracias a la integral de Poisson que viene dada por esta fórmula (señalar formula). Así la función buscada será aquella que tome los valores de la integral de Poisson en los puntos del disco y

los de la función  $f$  en los puntos del borde. Esto se estudiará con más detalle cuando hablemos de la aplicación informática.

### **Diapositiva 6**

Las funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad pueden tener un comportamiento irregular en los puntos del borde del disco, sin admitir una extensión continua. Sin embargo, esta clase de funciones sí tienen límites radiales en casi todo punto. Gracias al teorema de Fatou, la existencia de límites radiales permite definir una función acotada sobre el borde.

A su vez, el Teorema de Carathéodory permite extender con continuidad a la frontera cualquier función conforme entre el disco y un dominio de Jordan. Por función conforme se entiende aquella que preserva tanto la orientación como los ángulos entre curvas.

Intuitivamente, el teorema de Carathéodory nos dice que los dominios de Jordan se comportan particularmente bien.

### **Diapositiva 7**

La siguiente figura muestra cómo una función con una singularidad en el punto  $-i$ , es decir, que no puede extenderse a dicho punto, sí que tiene límite radial.

### **Diapositiva 8**

A continuación voy a hablar de la aplicación informática que he desarrollado. Se pueden distinguir tres funcionalidades distintas. La primera permite representar cualquier función compleja mientras que la segunda resuelve el problema de Dirichlet para el disco unidad. Hay una funcionalidad adicional que realiza la diferencia entre dos dibujos de manera que se puede comprobar la gran precisión de la integral de Poisson pese a los errores numéricos.

### **Diapositivas 9**

Para representar las funciones complejas se ha utilizado la Técnica de coloreado del dominio que asigna a cada número complejo un color según su módulo y su argumento, como se puede ver en la imagen que muestra la representación de la función identidad. Gracias a esta técnica se va a poder visualizar las funciones complejas y gran parte de las propiedades analíticas o geométricas que poseen como por ejemplo la existencia de ceros, polos o singularidades esenciales, como en la imagen anterior.

### Diapositivas 10

Esta imagen representa la función  $z^3$ . Podemos observar que el centro del dibujo tiene un color muy oscuro. La razón es que cuando el módulo de  $z$  es pequeño, el de  $z^3$  lo es mucho más, y por lo tanto el color asignado a  $z^3$  es muy oscuro. También podemos ver que los colores se vuelven más claros conforme nos vamos alejando del centro. Por último cuando avanzamos en el sentido contrario a las agujas del reloj, pasamos por los colores del círculo cromático 3 veces. Esto muestra el hecho de que el argumento de  $z^3$  es tres veces el argumento de  $z$ .

### Diapositiva 11

La siguiente imagen muestra la función  $e^{z^3} - 1$ . Observamos a simple vista que se asemeja a la anterior. De hecho para comprobar que cerca del cero son idénticas, se muestra la diferencia entre ambas funciones en la siguiente diapositiva.

### Diapositiva 12

Como puede observarse, cerca del cero se ve un color muy oscuro, casi negro, puesto que este color está asociado al 0. Además los colores del círculo cromático se repiten 6 veces debido a que la diferencia entre ambas funciones da un polinomio de grado 6.

### Diapositiva 13

Esta figura muestra la extensión al disco de esta función (señalar función) que está definida en el borde. La solución dada por la integral de Poisson definirá una función armónica en el disco abierto. Además, si  $f$  es una función continua, como en este caso, la solución será también una función continua en el disco cerrado, que coincidirá con  $f$  en el borde del disco.

### Diapositiva 14

Como hemos comentado previamente,  $f$  ha de ser continua para que se pueda extender con continuidad al disco cerrado. Pero, ¿qué pasa cuando no lo es? El resultado será una función con parte real e imaginaria armónicas en el interior pero que no se puede prolongar con continuidad a la frontera. Además, si  $f$  es continua a trozos, la función que se obtiene a partir de ella es armónica y continua en los puntos del borde donde lo sea  $f$ , como se ve en las imágenes.

### Diapositiva 15

Para representar el color de las funciones complejas se ha utilizado un modelo de color distinto al usual RGB que se conoce como HSV. Según este modelo, cada color viene determinado por su tono, saturación y valor, que en este código se representan por las variables  $h$ ,  $s$  y  $v$ . Además se utiliza una función para transformar un color HSV a RGB.

### Diapositiva 16

Aquí se puede ver que si un punto pertenece al disco abierto, se calcula la correspondiente integral de Poisson mientras que si el punto pertenece al borde del disco, se calcula la evaluación por  $f$  del punto.

### Diapositiva 17

La integral de Poisson de  $f$  en cada punto del disco se calcula utilizando la regla del trapecio compuesta que sirve para aproximar una integral definida en  $n$  trapecios.

*Realizar demostración de la aplicación:* A continuación voy a hacer una demostración del funcionamiento de la aplicación. La ejecución está realizando el cálculo de la integral de Poisson de la función  $e^{(\cos(t)+i\sin(t))^3} - 1$  que se corresponde con la función  $e^{z^3} - 1$  que se ha mostrado previamente. He tenido que ajustar la resolución de la imagen y el número de pasos de la regla del trapecio para agilizar el proceso. Sin embargo las imágenes que se muestran tanto en la presentación como en el trabajo han sido realizadas con mayor calidad.

### Diapositiva 18

A continuación voy a introducir algunos conceptos sobre álgebras de Banach. (leer las dos definiciones). Así pues, teniendo en cuenta estas dos definiciones, podemos decir que  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es un álgebra de Banach conmutativa. La estructura de álgebra de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  nos servirá para analizar el comportamiento en el borde de algunas funciones.

### Diapositiva 19

Entonces podemos definir el espacio dual de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como el espacio de las aplicaciones de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  en  $\mathbb{C}$  lineales y continuas cuya norma viene dada por la del supremo. A su vez, el espectro de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  será un subconjunto del espacio dual formado por aquellos homomorfismos no nulos.

Vamos a querer asociar cada  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  con una función continua sobre el espectro. Para ello vamos a definir la función  $f$  gorro que es continua para todo  $f$ . Y esto da lugar a la transformada de Gelfand.

### Diapositiva 20

Volviendo al estudio de nuestro trabajo, nos vamos a interesar por cuándo una función  $f$  se puede extender con continuidad a los puntos de la frontera. Para ello introducimos la noción de fibra. La fibra del espectro sobre  $\alpha$  estará constituida por aquellos elementos del espectro tales que al evaluar la identidad da  $\alpha$ .

Las fibras y la transformada de Gelfand van a determinar cuándo podemos extender una función a un punto del borde. De esta manera, la transformada de Gelfand de  $f$  es constante en la fibra de  $\alpha$  si y solo si  $f$  se puede extender con continuidad en  $\alpha$ .

### Diapositiva 21

A continuación definimos el conjunto de valores adherentes y su relación con la transformada de Gelfand y las fibras en puntos del borde.

$\zeta$  pertenecerá al conjunto de valores adherentes de  $f$  en  $\alpha$  si y solo si existe una sucesión  $z_n$  en  $\mathbb{D}$  que tiende a  $\alpha$  tal que  $f(z_n)$  tiende a  $\zeta$ . A cada número  $\zeta \in Cl(f, \alpha)$  se le denomina valor adherente de  $f$  en  $\alpha$ .

El conjunto de valores adherentes determina cuándo una función es continua en un determinado punto. Así,  $f$  será continua en  $\alpha$  si y solo si el conjunto de valores adherentes es un solo punto.

Por último, el conjunto de valores adherentes de  $f$  en un punto del borde  $\alpha$  coincide con la imagen de la fibra de  $\alpha$  a través de la transformada de Gelfand de  $f$ .

### Diapositiva 22

En esta imagen se puede observar la representación de la función  $e^{\frac{z+1}{z-1}}$ . La función tiene una singularidad esencial en 1 por lo que no puede extenderse con continuidad en ese punto y por lo tanto el conjunto de valores adherentes será un conjunto grande. En particular, al ser una función interna, es el disco cerrado.

### Diapositiva 23

Vamos a estudiar un resultado que surge a partir del Lema de Schwarz cuando se le aplica un cambio conforme de variable. La herramienta clave para deducir el Lema de Schwarz-Pick a partir del Lema de Schwarz es la familia de automorfismos  $\alpha_p$  dada por esta fórmula (señalar).

Para poder realizar una interpretación geométrica del Lema de Schwarz-Pick vamos a tener que estudiar los discos asociados con la distancia pseudo-hiperbólica que viene dada por  $\alpha_p(z)$ . De esta manera, un disco no euclídeo de centro  $p$  y radio  $r$  está formado por los puntos que estén a distancia pseudo-hiperbólica de  $p$  menor que  $r$ .

Con estas nociones, el Lema de Schwarz-Pick se puede formular en los mismos términos geométricos en los que solemos interpretar el Lema de Schwarz, referido a los discos no euclídeos  $\Delta(p, r)$ .

#### **Diapositiva 24**

Con el Teorema de Julia se resuelve el equivalente al Lema de Schwarz-Pick para discos que no son interiores al disco unidad, sino tangentes en su borde. El punto de vista geométrico que deseamos destacar del Teorema de Julia nos conduce a describir estos discos tangentes en un punto  $w$  del borde de  $\mathbb{D}$  a través de discos no euclídeos cuyos centros van aproximándose a ese punto  $w$  en la frontera del disco unidad.

La siguiente imagen muestra la evolución de un disco no euclídeo cuando su centro  $p$  se va aproximándose a un punto  $w$  de la frontera.

#### **Diapositiva 25**

Un sector de  $\mathbb{D}$  en un punto  $w \in \partial\mathbb{D}$  es la región entre dos líneas rectas en  $\mathbb{D}$  que parten de  $w$  y son simétricas con respecto al radio que une  $w$  con  $0$ .

A continuación vamos a introducir los conceptos de límite y derivada angular. El límite angular de una función definida en  $\mathbb{D}$  en un punto  $w$  de la frontera viene dado por esta expresión entendiendo que nos estamos aproximando a través de cualquier sector de  $w$ .

A su vez la derivada angular de una función holomorfa del disco en sí mismo se define como el límite angular de los cocientes incrementales y la denotamos por  $\angle f'(w)$ . Basándonos en estas nociones previas, la existencia de derivada angular de  $f$  en  $w$  implica que  $f$  tiene límite radial  $\eta$  en  $w$ .

### **Diapositiva 26**

El Teorema de Julia precisa las condiciones analíticas que garantizan que  $f$  aplique un horodisco en el punto  $w$  en un horodisco en  $\mu$ .

### **Diapositiva 27**

En este ejemplo, la imagen se aparta del borde cerca del punto 1. Esto es debido a que los cocientes  $c$  no están acotados. (Esto lleva asociado que exista o no la derivada angular de la función en el límite angular de la función.)

Como podemos observar, los puntos 1 y -1 son invariantes por  $g$ , pero la imagen del disco cubre solo una región lenticular, lo que se muestra en que, salvo en los dos puntos indicados, la imagen es significativamente más oscura que en una representación de la identidad en el disco.

### **Diapositiva 27**

Bibliografía.