Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Celia de Frutos Palacios

Universidad Complutense de Madrid

Junio 2018

Documento maquetado con TEXIS v.1.0.

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Memoria que presenta para optar al título de Graduada en Ingeniería Informática y Matemáticas

Celia de Frutos Palacios

Dirigida por la Doctora

Ángeles Prieto Yerro

Universidad Complutense de Madrid

Junio 2018

A mis padres
y
a tí, lector carísimo

Agradecimientos

A todos los que la presente vieren y entendieren.

Inicio de las Leyes Orgánicas. Juan Carlos I

Groucho Marx decía que encontraba a la televisión muy educativa porque cada vez que alguien la encendía, él se iba a otra habitación a leer un libro. Utilizando un esquema similar, nosotros queremos agradecer al Word de Microsoft el habernos forzado a utilizar LaTeX. Cualquiera que haya intentado escribir un documento de más de 150 páginas con esta aplicación entenderá a qué nos referimos. Y lo decimos porque nuestra andadura con LaTeX comenzó, precisamente, después de escribir un documento de algo más de 200 páginas. Una vez terminado decidimos que nunca más pasaríamos por ahí. Y entonces caímos en LaTeX.

Es muy posible que hubíeramos llegado al mismo sitio de todas formas, ya que en el mundo académico a la hora de escribir artículos y contribuciones a congresos lo más extendido es LaTeX. Sin embargo, también es cierto que cuando intentas escribir un documento grande en LaTeX por tu cuenta y riesgo sin un enlace del tipo "*Author instructions*", se hace cuesta arriba, pues uno no sabe por donde empezar.

Y ahí es donde debemos agradecer tanto a Pablo Gervás como a Miguel Palomino su ayuda. El primero nos ofreció el código fuente de una programación docente que había hecho unos años atrás y que nos sirvió de inspiración (por ejemplo, el fichero `guionado.tex` de TeXiS tiene una estructura casi exacta a la suya e incluso puede que el nombre sea el mismo). El segundo nos dejó husmear en el código fuente de su propia tesis donde, además de otras cosas más interesantes pero menos curiosas, descubrimos que aún hay gente que escribe los acentos españoles con el `\'{\i}`.

No podemos tampoco olvidar a los numerosos autores de los libros y tutoriales de LaTeX que no sólo permiten descargar esos manuales sin coste adicional, sino que también dejan disponible el código fuente. Estamos pensando en Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna y Elisabeth Schlegl, autores del famoso "The Not So Short Introduction to LaTeX 2_{ε}" y en Tomás Bautista, autor de la traducción al español. De ellos es, entre otras muchas cosas, el entorno `example` utilizado en algunos momentos en este manual.

También estamos en deuda con Joaquín Ataz López, autor del libro "Creación de ficheros LaTeX con GNU Emacs". Gracias a él dejamos de lado a WinEdt y a Kile, los editores que por entonces utilizábamos en entornos Windows y Linux respectivamente, y nos pasamos a emacs. El tiempo de escritura que nos ahorramos por no mover las manos del teclado para desplazar el cursor o por no tener que escribir `\emph` una y otra vez se lo debemos a él; nuestro ocio y vida social se lo agradecen.

Por último, gracias a toda esa gente creadora de manuales, tutoriales, documentación de paquetes o respuestas en foros que hemos utilizado y seguiremos utilizando en nuestro quehacer como usuarios de LaTeX. Sabéis un montón.

Y para terminar, a Donal Knuth, Leslie Lamport y todos los que hacen y han hecho posible que hoy puedas estar leyendo estas líneas.

Resumen

...

...

...

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Introducción

Introducción del TFG ...

Capítulo 1

Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

1.1. Integral de Poisson y Teorema de Fatou

1.1.1. La Integral de Poisson

Definición 1.1.1. Se llama núcleo de Poisson a la función P definida por

$$P : (r,t) \in [0,1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \tag{1.1}$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables r y t o como una familia de funciones de t que dependen de r.

Dados $z = re^{i\theta}$, con $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \tag{1.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) =$$
$$1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n 2\operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{it})^n\right] = \operatorname{Re}\left[1+2\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right].$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{(1+re^{it})(1-re^{it})}{|1-re^{it}|^2}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

Propiedades del núcleo de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1, \forall r \in [0,1). \tag{1.3}$$

$$P_r(t) > 0, \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

$$P_r(t) = P_r(-t), \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$P_r(t) < P_r(\delta), 0 < \delta < \ |t| \leq \pi \tag{1.6}$$

$$\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0, \forall \delta \in (0,\pi] \tag{1.7}$$

Definición 1.1.2. Se llama integral de Poisson de una función $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ a la función F dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como $F = P[f]$.

Además si f lleva $\partial\mathbb{D}$ en los reales, 1.2 nos muestra que

$$P[f] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt\right].$$

1.1.2. Teorema de Fatou

Para demostrar el Teorema de Fatou nos vamos a basar en unos resultados clásicos del libro Rudin (1970, chap. 11) que no vamos a probar.

Teorema 1.1.1. *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ y $F = P[f]$, entonces*

$$\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

Teorema 1.1.2. *Sean $f \in C(\partial\mathbb{D}), F = P[f]$ y*

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(re^{i\theta}) & si\ r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & si\ 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Entonces u es una función continua en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Fatou)**.** *Para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, existe una función $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ definida en casi todo punto tal que*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it}) \tag{1.8}$$

Se tiene la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$. Para todo $z \in U$, la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{1.9}$$

se satisface, donde γ es el círculo unidad positivamente orientado: $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Las funciones $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \ldots \tag{1.10}$$

Demostración. La existencia de f^* se sigue de los teoremas 1.1.1 y 1.1.2.

Por 1.8, tenemos que $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Si $z \in U$ y $|z| < r < 1$, tomemos $\gamma_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} dt$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión tal que $r_n \to 1$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{it}} dt \tag{1.11}$$

Por lo que ya hemos probado 1.9. Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \ldots$$

Pasando al límite tenemos que f^* cumple 1.10. Además, podemos convertir 1.11 en una integral de Poisson, si $z = re^{i\theta}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt$$

De esto concluimos que $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$, así que ambas normas coinciden. $\square$

1.2. Teorema de Carathéodory

Definición 1.2.1. Aplicación conforme Sean U y $V \subset \mathbb{C}^n$. Una aplicación $f : U \to V$ se llama conforme en un punto $u \in U$ si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por u.

Proposición 1.2.0.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$. Una aplicación $f : U \to \mathbb{C}$ es conforme en U si y solo si $f \in \mathcal{H}(U)$ y $f'(z) \neq 0 \,\forall z \in U$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $f(z)$ es una función holomorfa en U tal que $f'(z) \neq 0$ para $z \in U$ y consideremos $f : z \to w = f(z)$. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva simple. Consideremos $\lambda = (f \circ \gamma)(t)$. Por la regla de la cadena, λ es continuamente diferenciable y como $f'(\gamma(t)) \neq 0$, tenemos

$$\lambda'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t). \tag{1.12}$$

Por lo tanto, λ es una curva simple en el plano w.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ curvas simples tales que $c = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$. Definimos el ángulo θ entre γ_1 y γ_2 en c como el argumento de $\frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}$, es decir,

$$\frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)} = \left|\frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}\right| e^{i\theta}.$$

La aplicación f lleva las curvas γ_1 y γ_2 en curvas simples $\lambda_1 = f(\gamma_1)$ y $\lambda_2 = f(\gamma_2)$ que tienen como punto inicial $d = f(c)$. Por 1.12 tenemos

$$\frac{\lambda_2'(a)}{\lambda_1'(a)} = \frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}$$

entonoces el ángulo entre las curvas λ_1 y λ_2 en $d = \lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ es igual al ángulo θ entre las curvas γ_1 y γ_2 en c.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es conforme. Fijamos z un punto arbitrario de U, y elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) \subset U$. Consideremos la familia de curvas simples $\gamma_\theta(t) = z + te^{i\theta}, 0 \leq t \leq \varepsilon, \theta \in \mathbb{R}$. Nótese que el ángulo entre γ_0 y γ_θ en z es θ.

Tomemos $\lambda_\theta = (f \circ \gamma_\theta)(t)$ la familia de curvas simples. Como f es conforme, el ángulo entre λ_0 y λ_θ en $f(z)$ es θ. Si escribimos el argumento de $\lambda_0'(0)$ como α, tenemos

$$e^{-i(\theta+\alpha)}\lambda_\theta'(0) = |\lambda_\theta'(0)| > 0.$$

??, nos dice que

$$\begin{aligned}\lambda_\theta'(0) &= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta + i(v_x \cos\theta + v_y \sin\theta) = \\ &= (u_x + iv_x)\cos\theta + (u_y + iv_y)\sin\theta = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta,\end{aligned}$$

por lo que

$$2\lambda_\theta'(0) = (f_x - if_y)e^{i\theta} + (f_x + if_y)e^{-i\theta}.$$

Entonces por **??**,

$$(f_x - if_y)e^{-i\alpha} + (f_x + if_y)e^{-2i\theta} = 2\,|\lambda_\theta'(0)|\,.$$

Derivando en ambos lados con respecto a θ, obtenemos

$$-2i(f_x + if_y)e^{-2i\theta - i\alpha} = \frac{2d}{d\theta}\,|\lambda_\theta'(0)|\,.$$

Como θ es una variable real y la parte de la derecha de la igualdad solo toma valores reales, concluimos que

$$f_x + if_y = 0$$

por lo que

$$u_x + v_y + i(v_x + u_y) = 0.$$

Como vemos, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U. Luego $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $z = x + iy \in U$. Falta ver que $f(z) \neq 0, z \in U$. $\square$

Teorema 1.2.1 (Teorema de Carathéodory)**.** *Sea φ una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en un dominio de Jordan Ω. Entonces φ tiene una extensión continua al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y la extensión es inyectiva de $\overline{\mathbb{D}}$ en Ω.*

Demostración. Vamos a suponer que Ω está acotado. Fijemos $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Primero vamos a probar que φ tiene una extensión continua en ζ. Sea $0 < \delta < 1$,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$. Entonces $\varphi(\gamma_\delta)$ es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|\,ds$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2\,ds$$

entonces para $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int\int_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\rho)} |\varphi'(z)|^2\,dxdy = \pi \text{Area}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty$$

Entonces, existe una sucesión $\{\delta_n\} \downarrow 0$ tal que $L(\delta_n) \to 0$. Cuando $L(\delta_n) < \infty$, la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ tiene extremos $\alpha_n, \beta_n \in \overline{\Omega}$ y ambos puntos deben estar en $\Gamma = \partial\Omega$. De hecho, si

$\alpha_n \in \Omega$, entonces algún punto cerca de α_n tiene dos preimágenes distintas en $\mathbb{D}$ y esto es imposible pues φ es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \to 0 \tag{1.13}$$

Sea σ_n el subarco cerrado de Γ que tiene extremos α_n y β_n y con un diámetro menor. Entonces 1.13 implica que $\text{diam}(\sigma_n) \to 0$ porque Γ es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan, $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla U_n es acotada. Entonces $U_n \subset \Omega$ ya que $\mathbb{C}^* \setminus \overline{\Omega}$ es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \to 0, \text{ concluimos que } \text{diam}(U_n) \to 0. \tag{1.14}$$

Tomamos $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$. Sabemos que para n suficientemente grande, $\varphi(D_n) = U_n$. Si no, por conexión tendríamos que $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$ y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contracide con 1.14. Entonces $\text{diam}(\varphi(D_n)) \to 0$ y $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$ es un solo punto pues $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$. Esto significa que φ tiene una extensión continua en $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$. La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Denotemos ahora por φ a la extensión $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$. Como $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$, φ lleva $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$. Para probar que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2), \zeta_1 \neq \zeta_2$. El argumento utilizado para mostrar que $\alpha_n \in \Gamma$, también prueba que $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$, así que podemos suponer que $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}, j = 1, 2$. La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio $W \subset \Omega$, luego $\varphi^{-1}(W)$ es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\})$$

Pero como $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y φ es constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$, se tiene que φ es constante y esta contradicción prueba que $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$. □

Teorema 1.2.2. *Sea C un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable con interior D. Sea $f \in \mathcal{H}(C \cup D)$ una aplicación inyectiva en C. Entonces f es holomorfa e inyectiva en D.*

Demostración. La aplicación $w = f(z)$ lleva C en un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable C'. Sea w_0 un punto arbitrario que no esté en C'. Entonces,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si w_0 está fuera de C' y es ± 1 si w_0 está dentro de C'. Sin embargo, n no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de $f(z) - w_0$ dentro de C. Entonces, $n = 1$ si w_0 está dentro de C'.

Esto prueba que $f(z) = w_0$ tiene una sola solución si w_0 está dentro de C', que $f(z)$ es holomorfa e inyectiva en D y lleva D en D' (el interior de C') y que la dirección positiva de C' se corresponde con la dirección positiva de C. $\square$

Capítulo 2

Productos infinitos

2.1. Productos de Blaschke

Proposición 2.1.0.1. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión en el disco unidad tal que $\alpha_n \neq 0\,\forall n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)$ converge. Entonces el producto*

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

converge uniformemente para $|z| \leq r < 1$ y define una función holomorfa en el disco unidad que tiene los mismos ceros que α_n. Además $|f(z)| \leq 1$.

Demostración. Sea

$$b_n(z)=\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Por el Lema 1.1 de Lang (1999, chap. 13), sabemos que $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge uniformemente si $\sum_{n=1}^{\infty}|1-b_n|$ converge.

$$\begin{aligned}|1-b_n(z)| &= \left|1+\frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n + (z-\alpha_n)\,|\alpha_n|}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\right| = \\ &= \left|\frac{(1-|\alpha_n|)(\alpha_n+|\alpha_n|\,z)}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|\alpha_n|).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|1-b_n(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)$$

converge uniformemente. □

Apéndice A

Notación

$\mathcal{H}(U)$: holomorfa en U
$\mathcal{H}^{\infty}(U)$: holomorfa y acotada en U
$\mathbb{D}$: disco unidad
$\overline{\mathbb{D}}$: disco unidad cerrado
$\partial\mathbb{D}$: borde del disco unidad
$L^{\infty}(U)$:

Bibliografía

Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable II*. Springer, 1995. ISBN 0387944605.

Dettman, J. W. *Applied Complex Variables*. Dover Publications, 1984. ISBN 048664670X.

Garnett, J. B. y Marshall, D. E. *Harmonic measure*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521720605.

Hoffman, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Dover Publications, 1988. ISBN 048665785X.

Kodaira, K. *Complex Analysis*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511804045.

Lang, S. *Complex Analysis*. Springer, 1999. ISBN 0387985921.

Lin, I.-H. *Classical Complex Analysis: A Geometric Approach (Volume 2)*. World Scientific, 2010. ISBN 9814271292.

Needham, T. The geometry of harmonic functions. *Mathematics Magazine*, vol. 67(2), páginas 92–108, 1994.

Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997. ISBN 0198534477.

Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.

–¿Qué te parece desto, Sancho? – Dijo Don Quijote –
Bien podrán los encantadores quitarme la ventura,
pero el esfuerzo y el ánimo, será imposible.

Segunda parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes

–Buena está – dijo Sancho –; fírmela vuestra merced.
–No es menester firmarla – dijo Don Quijote–,
sino solamente poner mi rúbrica.

Primera parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes