

---

# Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

---



TRABAJO DE FIN DE GRADO DEL DOBLE GRADO  
EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

*Realizado por:*

Celia de Frutos Palacios

*Dirigido por:*

Ángeles Prieto Yerro

Universidad Complutense de Madrid

Curso 2017-2018

Documento maquetado con TEXIS v.1.0.

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

# Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

*Memoria que presenta para optar al título de  
Graduada en Ingeniería Informática y Matemáticas:*

**Celia de Frutos Palacios**

*Dirigido por:*

**Ángeles Prieto Yerro**

**Universidad Complutense de Madrid**

**Curso 2017-2018**

Copyright © Celia de Frutos Palacios

Este trabajo puede encontrarse en <https://github.com/Celia95/TFG>

*A mis padres  
y  
a mi hermana*



# Resumen

En este trabajo se muestra el comportamiento de algunas funciones de variable compleja a lo largo del borde del disco unidad, especialmente de las funciones holomorfas y las armónicas (en el disco). Con este objetivo se detallan resultados teóricos y sus demostraciones y se aportan ejemplos de distinta naturaleza. En la actualidad contamos con herramientas informáticas que permiten enriquecer el estudio analítico usual. Así pues, parte de este trabajo consiste en diseñar aplicaciones apropiadas que permiten visualizar, analizar e ilustrar algunos de estos problemas clásicos como el conocido problema de Dirichlet, resuelto mediante la integral de Poisson.

**Palabras clave:** integral de Poisson, teorema de Fatou, teorema de Carathéodory, producto de Blaschke, álgebra de Banach, espectro, conjunto de valores adherentes, derivada angular, lema de Schwarz-Pick, teorema de Julia.



# Abstract

This paper aims to show the behaviour of some functions of a complex variable on the boundary of the open unit disk, especially the holomorphic and harmonic functions (on the open disk). With this objective, theoretical results and their proofs are detailed and examples of different nature are provided. Currently we have computer tools which allow us to enrich the usual analytical study carried out. Therefore, part of this work consist of designing appropriate applications which allow us to visualize, analyse and illustrate some of these classic problems such as the well-known Dirichlet problem, solved by the Poisson integral.

**Keywords:** Poisson integral, Fatou theorem, Carathéodory theorem, Blaschke product, Banach algebra, spectrum, cluster set, angular derivative, Schwarz-Pick lemma, Julia theorem.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory</b>	<b>5</b>
2.1. La Integral de Poisson . . . . .	6
2.2. El Teorema de Fatou . . . . .	10
2.3. Aplicaciones conformes. Teorema de Carathéodory . . . . .	13
<b>3. Aplicaciones informáticas</b>	<b>21</b>
3.1. Técnica del coloreado del dominio . . . . .	21
3.2. Representación de funciones. Problema de Dirichlet . . . . .	29
<b>4. Series de potencias. Productos infinitos</b>	<b>35</b>
4.1. Ejemplos de series de potencias . . . . .	35
4.2. Productos infinitos . . . . .	43
4.3. Productos de Blaschke . . . . .	45
<b>5. <math>\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})</math> como álgebra de Banach</b>	<b>49</b>
5.1. Álgebra de Banach . . . . .	49
5.2. Espacio dual de un álgebra de Banach . . . . .	50
5.3. El espectro de un álgebra . . . . .	51
5.4. La proyección del espectro sobre el disco . . . . .	52
5.5. El conjunto de valores adherentes . . . . .	55
<b>6. Transformaciones en el disco</b>	<b>63</b>
6.1. Derivada angular . . . . .	63
6.2. Lema de Schwarz-Pick . . . . .	64
6.3. Teorema de Julia . . . . .	66

<b>A. Notación</b>	<b>73</b>
<b>B. Código de las aplicaciones informáticas</b>	<b>75</b>
B.1. plotter.py . . . . .	75
B.2. function.py . . . . .	77
B.3. main.py . . . . .	79
B.4. misc.py . . . . .	84
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

2.1. Las curvas $\gamma_{\delta_n}$ y $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ .	16
3.1. Plano complejo coloreado . . . . .	22
3.2. Representación de la función $f(z) = z^3$ . . . . .	23
3.3. Representación de la función $f(z) = e^{z^3} - 1$ . . . . .	24
3.4. Representación de la función $f(z) = \frac{1}{z}$ . . . . .	25
3.5. Representación de la función $f(z) = e^z$ . . . . .	25
3.6. Representación de la función $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ . . . . .	26
3.7. Representación de la función $f(z) = \log(z)$ . . . . .	26
3.8. $f(z) = z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 - 5z^2 + 4z - 4$ . . . . .	27
3.9. Modelo de color HSV . . . . .	28
3.10. Extensión al disco de la función $f(t) = e^{10\cos(t)+10i\operatorname{sen}(t)}$ . . . . .	30
3.11. Extensión al disco de la función $f(t) = 10(\cos(t) + i\operatorname{sen}(t))$ . . . . .	30
3.12. Extensión al disco de la función $f(t) = (5\cos(t) + 5i\operatorname{sen}(t))^3$ . . . . .	31
3.13. Extensión al disco de la función $f(t) = \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)$ . . . . .	31
3.14. Diferencia entre las figuras 3.10 y 3.5. . . . .	32
3.15. Funciones definidas a trozos. . . . .	33
4.1. Prolongaciones analíticas. . . . .	37
4.2. Representación de la función $\frac{1}{1-z}$ en el disco unidad. . . . .	38
4.3. Representación de la función $\log \frac{1}{1-z}$ en el disco unidad. . . . .	39
4.4. Representación de la función $\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ en el disco unidad. . . . .	42
5.1. Imagen de $C_t$ a través de $T$ . . . . .	59
5.2. Representación de $-z\frac{\bar{z}-1}{z-1}$ . . . . .	61
6.1. Imagen de discos concéntricos por el automorfismo $\alpha_p$ . . . . .	66
6.2. Discos no euclídeos: $\Delta(0, r)$ , $\Delta(p_n, r_n)$ y $H(w, \lambda)$ . . . . .	68
6.3. Transformación del disco mediante la función $g$ . . . . .	71
6.4. Representación de la función $g = \sigma^{-1} \circ \phi_a \circ \sigma$ , con $a = \frac{1}{2}$ . . . . .	71



# Capítulo 1

## Introducción

En 1545, Gerolamo Cardano introduce los números complejos en *Ars Magna*. En 1572, Rafael Bombelli establece las reglas de cálculo correspondientes en su libro *Álgebra*. Sin embargo, la aceptación general dentro de la comunidad matemática de la teoría de funciones complejas precisa logros tan destacados como los de Euler dentro del campo (por ejemplo, el teorema de adición para integrales elípticas, o la identidad que hoy conocemos como de Euler, que relaciona las funciones circulares con la exponencial), más el apoyo decidido de Gauss. Este defiende en una carta de 1811 la importancia de considerar las funciones de argumentos complejos para reconocer propiedades de las correspondientes funciones de argumentos reales, apuntando que pueden quedar ocultas si se evita el uso de magnitudes complejas. Por otro lado, Gauss populariza la imagen actual del conjunto de números complejos como el plano, permitiendo un modelo geométrico sobre el que razonar y desarrollar ideas e intuiciones.

Con este marco consolidado, la teoría de funciones se desarrolla en el siglo XIX, de mano de los pioneros A.L. Cauchy (1789 – 1857), B. Riemann (1826 – 1866) y K. Weierstrass (1815 – 1897). Cada uno de ellos adopta un punto de vista particular. Por un lado, Cauchy fundamenta su trabajo, desarrollado entre 1814 y 1825, en la noción de función holomorfa: aquella que es derivable en sentido complejo, con derivada continua. Cauchy basa sus resultados en la técnica de integración y el concepto de residuo. Riemann, dos décadas más tarde, adopta un punto de vista geométrico, entendiendo que las funciones holomorfas son aquellas que transforman dominios del plano en conjuntos similares a pequeña escala (funciones conformes). Su trabajo se apoya en su intuición y experiencia de la física matemática. Finalmente, el proyecto de Weierstrass arranca de la noción de serie de potencias, dado que localmente toda función holomorfa lo es, en una línea de trabajo, iniciada por Lagrange, que pretende algebrizar el análisis.

A lo largo de esta memoria recogemos ideas de cada uno de estos matemá-

ticos usando técnicas de integración, analizando propiedades de las funciones conformes o el comportamiento en la frontera de las series de potencias. Pero también nos adentramos en problemas más modernos, usando resultados y puntos de vista más actuales. Además, hacemos un tratamiento informático que nos va a permitir realizar una interpretación geométrica de los temas que abordamos.

En el Capítulo 2 estudiamos el núcleo y la integral de Poisson y algunas de sus propiedades más relevantes. Gracias a la integral de Poisson vamos a poder dar solución al problema de Dirichlet en el disco que pretende encontrar una función armónica en el disco que coincide en el borde del disco con una función continua dada  $f$  definida en la frontera. Los problemas relacionados con esta tarea se estudiaron ya en 1840 por Gauss, y luego por Dirichlet. A partir de este resultado, analizamos la existencia de límites radiales mediante el Teorema de Fatou. Además, se introduce la noción de aplicación conforme y se muestra en este contexto la existencia de extensión al borde del disco de funciones holomorfas conformes entre el disco y un dominio de Jordan, resultado conocido como Teorema de Carathéodory. Ambos teoremas, tanto el de Fatou como el de Carathéodory pueden ser considerados una continuación natural en la línea de los trabajos de los pioneros.

Con el fin de complementar el trabajo teórico realizado a lo largo del trabajo, introducimos una técnica diseñada para representar funciones complejas en el plano mediante colores conocida como técnica de coloreado del dominio. Gracias a ella hemos podido realizar una aplicación en Python que permite representar funciones complejas así como resolver el problema de Dirichlet para el disco y representar la función resultante. Estas representaciones nos serán de gran utilidad a la hora de visualizar propiedades tanto geométricas como analíticas de algunas funciones y por ello se incluirán figuras para ayudar al lector a examinar su comportamiento.

Seguidamente se detallan y analizan ejemplos concretos de funciones definidas por series y productos infinitos o por fórmulas explícitas, que ilustran la gran variedad de comportamiento en la frontera de las series en su disco de convergencia. Algunos de estos ejemplos volverán a surgir más adelante para ser estudiados desde una perspectiva distinta, como será el caso de los productos de Blaschke.

A continuación nos adentramos en la estructura como álgebra de Banach del espacio de funciones holomorfas y acotadas en el disco. Esto nos permite hacer una introducción a la teoría desarrollada por Gelfand a partir del trabajo fundamental de su tesis doctoral, presentada en 1936 y conectar con trabajos posteriores, como el estudio en puntos singulares del borde de los valores adhe-

rentes (problema con origen en la década de 1960). Con este propósito analizamos el espectro de dicho álgebra y su relación con el comportamiento en la frontera de una función determinada dada a través de su transformada de Gelfand. Seremos capaces de identificar el comportamiento cerca de puntos  $\alpha$  de la frontera del disco a través de las fibras  $\mathfrak{M}_\alpha$ . Definiremos el conjunto de valores adherentes de una función en un punto y trataremos de desentrañar la estructura de dicho conjunto según el comportamiento de la función en dicho punto. Para concluir, probaremos que el conjunto de puntos adherentes de una función  $f$  en un punto del borde  $\alpha$  coincide con la imagen de la fibra de  $\alpha$  a través de la transformada de Gelfand de  $f$ .

Por último, se da una lectura geométrica del lema de Schwarz y su generalización, el lema de Schwarz-Pick. Se presenta la noción de límite angular en la frontera, para comprender la relación entre el equivalente de los lemas citados para discos que son tangentes en un punto de la frontera. Con la intención de analizar bajo distintos puntos de vista el comportamiento en la frontera de funciones holomorfas, incluimos resultados ya considerados clásicos, como los Teoremas de Julia y Julia-Carathéodory, desde una perspectiva más moderna. Esta línea posee numerosas aplicaciones en problemas actuales, como el análisis de operadores de composición entre distintas álgebras de funciones holomorfas en términos de las propiedades geométricas de la función destacada.



## Capítulo 2

# Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

En este capítulo vamos a abordar varios problemas clásicos relacionados con el comportamiento en la frontera de funciones holomorfas (y armónicas) y la profunda relación existente entre los valores que toma la función en el borde y los que toma en el dominio abierto que limitan, incluso cuando la función no puede extenderse con continuidad al borde.

Vamos a presentar la integral de Poisson para construir explícitamente funciones armónicas en el disco unidad a partir de funciones continuas en el borde. Mediante esta técnica, afrontaremos la existencia de límites radiales en casi todo punto de funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad: es el resultado conocido como Teorema de Fatou. Además, la función definida a través de los límites radiales permite presentar un teorema de identidad referido a arcos del borde del disco.

El capítulo se completa con varios resultados de naturaleza geométrica, en los que se caracterizan las funciones conformes (que conservan ángulos y orientación) y se prueba que las aplicaciones conformes entre el disco y un dominio de Jordan admiten extensiones a la frontera, resultado conocido como Teorema de Carathéodory. El capítulo concluye mostrando cómo la inyectividad en el borde de funciones holomorfas en dominios de Jordan se traduce en inyectividad en todo el dominio.

## 2.1. La Integral de Poisson

En primer lugar vamos a realizar una breve introducción al núcleo de Poisson, una de las muchas herramientas que necesitaremos en la demostración de resultados posteriores de este capítulo. A su vez estudiaremos el concepto de integral de Poisson que nos permitirá la extensión de funciones continuas en el borde del disco a funciones armónicas en el disco unidad.

**Definición 2.1.1** (Núcleo de Poisson). Se llama núcleo de Poisson a la función  $P$  definida por

$$P : (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \quad (2.1)$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables  $r$  y  $t$ , o como una familia de funciones de  $t$  que dependen de  $r$ .

Dado  $z = re^{i\theta}$ , con  $r \in [0, 1)$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] \quad (2.2)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En efecto:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2 \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (re^{it})^n \right] = \operatorname{Re} \left[ 1 + 2 \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{(1 + re^{it})(1 - re^{-it})}{|1 - re^{it}|^2} \right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \quad (2.3)$$

así que

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right]. \quad (2.4)$$

**Proposición 2.1.2.** *El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:*

$$(I) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1;$$

$$(II) \quad P_r(t) > 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R};$$

$$(III) \quad P_r(t) = P_r(-t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ y } P_r(t) \text{ es periódica de periodo } 2\pi;$$

$$(IV) \quad P_r(t) < P_r(\delta) \text{ si } 0 < \delta < |t| \leq \pi;$$

$$(V) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = 0 \text{ para todo } \delta \in (0, \pi].$$

*Demostración.* (I) Dado  $r$ ,  $0 \leq r < 1$ , la serie (2.1) converge uniformemente en  $t$ . Así que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = 1.$$

(II) De las ecuaciones (2.3) y (2.4), tenemos que  $P_r(t) = (1-r^2) |1 - re^{it}|^{-2} > 0$  ya que  $r < 1$ .

(III) Es consecuencia trivial de la expresión (2.4).

(IV) Fijados  $r$ ,  $\delta$  y  $t$  en las condiciones indicadas se verifica que  $\cos t < \cos \delta$ , de donde se sigue que  $P_r(t) < P_r(\delta)$ .

(V) De la ecuación (2.4), tenemos que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1 - r^2) = 0$  y  $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1 - 2r \cos \delta + r^2) \neq 0$  así que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = 0$ .

□

Introducimos la noción de función integrable en el sentido de Lebesgue que utilizaremos a partir de ahora para dar la definición de integral de Poisson o para enunciar el Teorema de Fatou más adelante.

**Definición 2.1.3.** Si  $0 < p < \infty$  y  $f$  es una función compleja medible en un conjunto  $X$  (en el sentido de Lebesgue), definimos la norma de  $f$  como

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

siendo  $\mu$  una medida de Lebesgue en  $X$ .

El conjunto  $L^p(X)$  estará formado por aquellas  $f$  tales que  $\|f\|_p < \infty$ .

Es usual denotar por  $L^0(X)$  al conjunto de las funciones medibles de  $X$ . A su vez, las funciones de  $L^1$  se llaman funciones sumables.

**Definición 2.1.4** (Integral de Poisson). Se llama integral de Poisson de una función  $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$  a la función  $F$  dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como  $F = P[f]$ .

Observamos que si  $f$  lleva la frontera del disco  $\partial\mathbb{D}$  en los reales, (2.2) nos muestra que

$$P[f](z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(e^{it}) dt \right].$$

También haciendo el cambio de variable  $\theta - t = x$  se tiene la igualdad

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i(\theta+x)}) dx.$$

El siguiente teorema proporciona una solución al problema de Dirichlet. De hecho esta solución es única y coincide precisamente con la integral de Poisson de  $f$ .

**Teorema 2.1.5.** *Sean  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $F = P[f]$ . Entonces la función*

$$u : z = re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & \text{si } 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

es continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ , armónica en  $\mathbb{D}$  y coincide con  $f$  en  $\partial\mathbb{D}$ .

*Demostración.* Claramente  $u$  coincide con  $f$  en la frontera del disco, por definición. Para ver que  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , observamos que si  $0 \leq r < 1$  entonces

$$u(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(e^{it}) dt \right].$$

Por lo que  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ . Solo nos falta probar que  $u$  es continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Como  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , es continua en  $\mathbb{D}$ , así que queda probar que  $u$  es

continua en cada punto de  $\partial\mathbb{D}$ .

Vamos a probar que para todo  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  y todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $z \in D(e^{i\alpha}, \delta) \cap \overline{\mathbb{D}}$  se verifica

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \varepsilon.$$

Una vez probemos esto último, tendremos que  $u$  es continua en  $e^{i\alpha}$  puesto que  $f$  es una función continua.

Dado  $\varepsilon > 0$ , la continuidad de  $f$  en  $\alpha$  nos da que existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ si } |t - \alpha| < \delta.$$

Sea  $M = \max\{|f(e^{i\theta})| : |\theta| \leq \pi\}$ . Por la Proposición 2.1.2 (v), existe  $\rho \in (0, 1)$  tal que

$$P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3M}$$

para  $\rho < r < 1$  y  $|\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$ . Consideremos el arco  $A = \{e^{i\theta} : |\theta| < \frac{\delta}{2}\}$ . Entonces, si  $e^{i\theta} \in A$  y  $\rho < r < 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} |u(re^{i\theta}) - u(e^{i\alpha})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i(\theta+x)}) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i\alpha}) dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) [f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{2}} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq \frac{\delta}{2}} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $|x| < \frac{\delta}{2}$ , tenemos que  $|\theta + x - \rho| \leq |\theta - \rho| + |x| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ , se verifica que  $|f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| < \frac{\varepsilon}{3}$ , y como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{2}} P_r(x) dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1,$$

el primer sumando es menor que  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Por otra parte si  $|x| \geq \frac{\delta}{2}$  y  $|\theta| \leq \frac{\delta}{2}$  entonces  $P_r(|x|) \leq P_r(\frac{\delta}{2}) < \frac{\varepsilon}{3M}$  pues  $r \in (\rho, 1)$ . Como  $|f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| \leq M$ , se tiene

que el segundo sumando es menor que  $\frac{\varepsilon}{3}$ , con lo que  $|u(re^{i\theta}) - u(e^{i\alpha})| < \varepsilon$ .

Finalmente, para ver que  $u$  es única, supongamos que  $v$  es una función continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  que es armónica en  $\mathbb{D}$  y  $v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$  para todo  $\theta$ . Entonces  $u - v$  es armónica en  $\mathbb{D}$  y  $(u - v)(z) = 0$  para todo  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Se sigue del Principio del Módulo Máximo que  $u - v \equiv 0$ .

□

Profundizamos un poco más en el último paso de la demostración previa. El Principio del Módulo Máximo para funciones armónicas nos asegura que dichas funciones no pueden alcanzar el máximo en un punto interior del dominio, sino que ha de alcanzarse en la frontera.

**Teorema 2.1.6** (Principio del Módulo Máximo). *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto acotado, y sea  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es armónica en  $U$ . Entonces el máximo de  $|f|$  en  $\overline{U}$  se alcanza en la frontera del conjunto,  $\partial U$ . En otras palabras,*

$$\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f| .$$

En particular, el resultado que hemos utilizado para finalizar la demostración es un caso especial del teorema anterior cuya demostración se puede encontrar en Conway (1978, capítulo 10).

**Corolario 2.1.6.1.** *Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto acotado, y sea  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que es armónica en  $U$ . Si  $f(z) = 0$  para todo  $z \in \partial U$  entonces  $f(z) = 0$  para todo  $z \in U$ .*

## 2.2. El Teorema de Fatou

Como veremos más adelante, las funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad pueden tener un comportamiento irregular en los puntos del borde del disco, sin admitir una extensión continua. Sin embargo, esta clase de funciones sí tienen límites radiales en casi todo punto. Gracias al Teorema de Fatou, la existencia de límites radiales permite definir sobre el borde una función acotada que, a su vez, sirve para recuperar información sobre la función en el interior.

Para demostrar el Teorema de Fatou haremos uso de un resultado clásico, que puede consultarse en Rudin (1970, capítulo 11).

**Teorema 2.2.1.** Si  $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$  y  $F = P[f]$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

en casi todo punto.

En lo sucesivo, nos centraremos en el estudio de las funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad. El conjunto de todas estas funciones es un espacio vectorial, que denotaremos por  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Además, utilizaremos la notación  $\|\cdot\|_\infty$  tanto para la norma del supremo del módulo de  $f$  para las funciones de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como para el supremo esencial de  $|f|$  para las funciones de  $L^\infty$ . Recordamos que si  $f$  es una función compleja medible en un conjunto  $X$ ,  $L^\infty(X)$  estará formado aquellas  $f$  tales que  $\|f\|_\infty < \infty$ . Las funciones de  $L^\infty(X)$  se suelen denominar funciones esencialmente acotadas en  $X$ .

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Fatou). *Para toda función  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , existe una función  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  definida por*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \quad (2.5)$$

en casi todo punto.

Se tiene la igualdad  $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$ . Para todo  $z \in \mathbb{D}$ , la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2.6)$$

se satisface, donde  $\gamma$  es el círculo unidad positivamente orientado:  $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

Las funciones  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \dots \quad (2.7)$$

*Demostración.* La existencia de  $f^*$  se sigue del Teorema 2.2.1 y de la versión para elementos de  $L^\infty$  del Teorema 2.1.5. Además, por (2.5), tenemos que  $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .

Si  $z \in U$  y  $|z| < r < 1$ , tomemos  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} e^{it} dt$$

Sea  $\{r_n\}$  una sucesión tal que  $r_n \rightarrow 1$ . Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(r_n e^{it})}{r_n e^{it} - z} e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt. \quad (2.8)$$

Por lo que ya hemos probado (2.6). Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) \xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \dots$$

Tomando de nuevo una sucesión  $\{r_n\}$  que tienda a 1, el teorema de la convergencia dominada garantiza que  $f^*$  cumple (2.7). Además, podemos convertir (2.8) en una integral de Poisson, si  $z = re^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esto concluimos que  $\|f\|_{\infty} \leq \|f^*\|_{\infty}$ , así que ambas normas coinciden.

Por último, si  $f^*$  satisface (2.7) y definimos  $f$  como (2.8) para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces, por (2.8),  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . Además, (2.7) implica que la integral de Cauchy (2.8) es igual a la integral de Poisson (2.9). Por lo tanto,  $f$  es acotada, y la representación de  $f$  como la integral de Poisson de  $f^*$  muestra que (2.5) se satisface en casi todo punto por el Teorema 2.2.1.

□

Como hemos demostrado,  $f$  es la integral de Poisson de  $f^*$  por lo que  $f^*$  es la solución al problema de Dirichlet de  $f$ .

Gracias a la expresión de la fórmula de Cauchy anterior, tenemos un teorema de identidad si nos restringimos a un subarco del disco unidad.

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ ,  $J$  un subarco de  $\partial\mathbb{D}$  y  $f^*(e^{it}) = 0$  en casi todo punto de  $J$ . Entonces  $f(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Sea  $n > 0$  un entero tal que la longitud de  $J$  es mayor que  $\frac{2\pi}{n}$ , sea  $\eta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$  y tomemos

$$g(z) = \prod_{k=1}^n f(\eta^k z)$$

donde  $z \in \mathbb{D}$ .

Como  $f$  es acotada y  $f^* = 0$  en casi todo punto de  $J$ , tenemos que  $g^* = 0$  en casi todo punto de  $\partial\mathbb{D}$ , y  $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Como  $g$  es la integral de Cauchy de  $g^*$ ,  $g(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Si el conjunto de los ceros de  $f$  es como mucho numerable, entonces también lo es el conjunto de los ceros de  $g$  pues es la unión de  $n$  conjuntos obtenidos por rotaciones. Pero todo punto de  $\mathbb{D}$  es un cero de  $g$  por lo que  $f = 0$ .  $\square$

Como se puede observar de este último resultado, el comportamiento en (un subconjunto de) la frontera determina el comportamiento dentro del disco.

## 2.3. Aplicaciones conformes. Teorema de Carathéodory

En esta sección, vamos a estudiar el concepto de función conforme, que está ligado al de función holomorfa en el contexto de las funciones complejas con derivadas parciales continuas. El resultado principal es el Teorema de Carathéodory, que permite extender con continuidad a la frontera cualquier función conforme entre el disco y un dominio de Jordan.

**Definición 2.3.1** (Aplicación conforme). Sean  $U$  y  $V \subset \mathbb{C}$ . Se dice que una aplicación  $f : U \rightarrow V$  es conforme en un punto  $u \in U$  si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por  $u$ .

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $U \subset \mathbb{C}$ . Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme en  $U$  si  $f \in \mathcal{H}(U)$  y  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f(z)$  es una función holomorfa en  $U$  tal que  $f'(z) \neq 0$  para  $z \in U$  y consideremos  $f : z \rightarrow w = f(z)$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  una curva suave. Tomemos  $\lambda = (f \circ \gamma)(t)$ . Por la regla de la cadena,  $\lambda$  es continuamente diferenciable y como  $f'(\gamma(t)) \neq 0$ , tenemos

$$\lambda'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t). \quad (2.10)$$

Por lo tanto,  $\lambda$  es una curva suave en el plano  $w$ .

Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow U$  curvas suaves tales que  $c = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ . Definimos el ángulo  $\theta$  entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $c$  como el argumento de  $\frac{\gamma'_2(a)}{\gamma'_1(a)}$ . Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos que

$$\begin{aligned}\arg \lambda'_1(a) &= \arg f'(c) + \arg \gamma'_1(a) \\ \arg \lambda'_2(a) &= \arg f'(c) + \arg \gamma'_2(a)\end{aligned}$$

y entonces

$$\arg \frac{\lambda'_2(a)}{\lambda'_1(a)} = \arg \lambda'_2(a) - \arg \lambda'_1(a) = \arg \gamma'_2(a) - \arg \gamma'_1(a) = \arg \frac{\gamma'_2(a)}{\gamma'_1(a)}.$$

Así, el ángulo entre las curvas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en  $d = \lambda_1(a) = \lambda_2(a)$  es igual al ángulo  $\theta$  entre las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $c$ .  $\square$

A continuación, vamos a probar un resultado recíproco a este que incluye algunas restricciones adicionales sobre  $f$ .

**Proposición 2.3.3.** *Sean  $U \subset \mathbb{C}$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación conforme en  $U$  que admite derivadas parciales continuas con respecto a  $x$  e  $y$ . Entonces  $f \in \mathcal{H}(U)$  y  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .*

*Demostración.* Fijemos  $z$  un punto arbitrario de  $U$ , y elijamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(z, \varepsilon) \subset U$ . Consideremos la familia de curvas suaves  $\gamma_\theta(t) = z + te^{i\theta}$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Nótese que el ángulo entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_\theta$  en  $z$  es  $\theta$ .

Tomemos la familia de curvas  $\lambda_\theta = f \circ \gamma_\theta$ . Como  $f$  es conforme, el ángulo entre  $\lambda_0$  y  $\lambda_\theta$ , es decir, el argumento de  $\frac{\lambda'_\theta(0)}{\lambda'_0(0)}$  es igual a  $\theta$ . Si escribimos el argumento de  $\lambda'_0(0)$  como  $\alpha$ , el argumento de  $\lambda'_\theta(0)$  será  $\alpha + \theta$  y, por tanto,

$$e^{-i(\theta+\alpha)} \lambda'_\theta(0) = |\lambda'_\theta(0)| > 0. \quad (2.11)$$

Además, la regla de la cadena nos dice que si  $f = u + iv$

$$\begin{aligned}\lambda'_\theta(0) &= u_x \cos \theta + u_y \sen \theta + i(v_x \cos \theta + v_y \sen \theta) = \\ &= (u_x + iv_x) \cos \theta + (u_y + iv_y) \sen \theta = f_x \cos \theta + f_y \sen \theta.\end{aligned} \quad (2.12)$$

y, por la fórmula de Euler,

$$2\lambda'_\theta(0) = (f_x - if_y)e^{i\theta} + (f_x + if_y)e^{-i\theta}.$$

Entonces por (2.11),

$$(f_x - if_y)e^{-i\alpha} + (f_x + if_y)e^{-2i\theta-i\alpha} = 2|\lambda'_\theta(0)|.$$

Derivando en ambos lados con respecto a  $\theta$ , obtenemos

$$-2i(f_x + if_y)e^{-2i\theta-i\alpha} = \frac{2d}{d\theta}|\lambda'_\theta(0)|.$$

Como el ángulo  $\theta$  es arbitrario,  $e^{-2i\theta-i\alpha}$  es un giro arbitrario. Como además la parte de la derecha de la igualdad solo toma valores reales,  $-2i(f_x + if_y)$  bajo cualquier giro tiene que ser real. De esto se sigue que

$$f_x + if_y = 0$$

por lo que

$$u_x + v_y + i(v_x + u_y) = 0.$$

Como vemos,  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $U$ . Luego  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa en  $z = x + iy \in U$ . Además se tiene que  $f(z) \neq 0, z \in U$ . En efecto, como  $\lambda'_\theta(0) \neq 0$ , (2.12) garantiza que no pueden anularse a la vez  $u_x$  y  $u_y$ . Por lo tanto, como  $|f'(x + iy)|^2 = u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)$ , se tiene el resultado.  $\square$

Una vez llegados a este punto contamos con las herramientas necesarias para demostrar el Teorema de Carathéodory que nos permitirá resolver el problema de Dirichlet para cualquier dominio de Jordan.

**Teorema 2.3.4** (Teorema de Carathéodory). *Sea  $\varphi$  una aplicación conforme del disco unidad  $\mathbb{D}$  en un dominio de Jordan  $\Omega$ . Entonces  $\varphi$  tiene una extensión continua al disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ , y la extensión es inyectiva de  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ .*

*Demostración.* Vamos a suponer que  $\Omega$  está acotado. Fijemos  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ . Primero vamos a probar que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\zeta$ . Sea  $0 < \delta < 1$ ,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos  $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$ . Entonces  $\varphi(\gamma_\delta)$  es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| ds.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 ds,$$

entonces para  $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int \int_{\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho)} |\varphi'(z)|^2 dx dy = \pi \text{Área}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty.$$

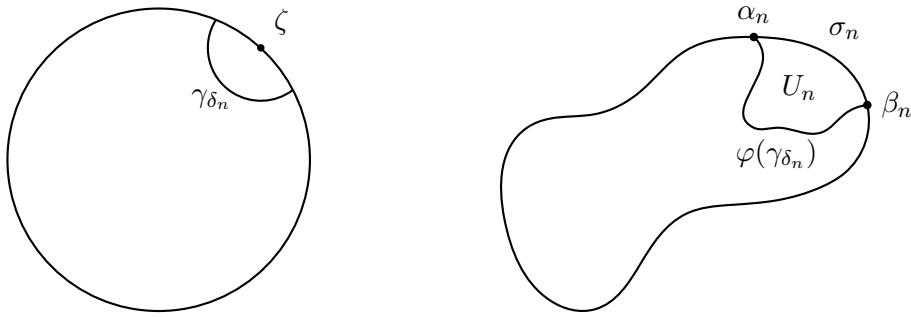


Figura 2.1: Las curvas  $\gamma_{\delta_n}$  y  $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ .

Entonces, existe una sucesión  $\{\delta_n\} \downarrow 0$  tal que  $L(\delta_n) \rightarrow 0$ . Cuando  $L(\delta_n) < \infty$ , la curva  $\varphi(\gamma_{\delta_n})$  tiene extremos  $\alpha_n, \beta_n \in \bar{\Omega}$  y ambos puntos deben estar en  $\Gamma = \partial\Omega$ . De hecho, si  $\alpha_n \in \Omega$ , entonces algún punto cerca de  $\alpha_n$  tiene dos preimágenes distintas en  $\mathbb{D}$  y esto es imposible pues  $\varphi$  es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Sea  $\sigma_n$  el subarco cerrado de  $\Gamma$  que tiene extremos  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  y con un diámetro menor. Entonces (2.13) implica que  $\text{diam}(\sigma_n) \rightarrow 0$  porque  $\Gamma$  es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan,  $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$  divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla  $U_n$  es acotada. Entonces  $U_n \subset \Omega$  ya que  $\mathbb{C}^* \setminus \bar{\Omega}$  es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

concluimos que

$$\text{diam}(U_n) \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Tomamos  $D_n = \mathbb{D} \cap \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$ . Sabemos que para  $n$  suficientemente grande,  $\varphi(D_n) = U_n$ . Si no, por conexión tendríamos que  $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$  y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(D(0, 1/2))) > 0$$

que contradice con (2.15). Entonces  $\text{diam}(\varphi(D_n)) \rightarrow 0$  y  $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$  es un solo punto pues  $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$ . Esto significa que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\overline{\mathbb{D}} \cap \{\zeta\}$ . La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Denotemos ahora por  $\varphi$  a la extensión  $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ . Como  $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$ ,  $\varphi$  lleva  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ . Para probar que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$ ,  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . El argumento utilizado para mostrar que  $\alpha_n \in \Gamma$ , también prueba que  $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$ , así que podemos suponer que  $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$ ,  $j = 1, 2$ . La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio  $W \subset \Omega$ , luego  $\varphi^{-1}(W)$  es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\}).$$

Pero como  $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$ ,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y  $\varphi$  es constante en un arco de  $\partial\mathbb{D}$ . Se tiene que  $\varphi$  es constante, por el principio de reflexión de Schwarz, y esta contradicción prueba que  $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$ .  $\square$

En la sección anterior, hemos utilizado el Teorema de Fatou para resolver el problema de Dirichlet en el disco  $\mathbb{D}$ . De manera análoga, también vamos a poder hacer uso del Teorema de Carathéodory para resolver el problema de Dirichlet, pero esta vez sin restringirnos necesariamente al disco unidad  $\mathbb{D}$  sino a un dominio de Jordan cualquiera  $\Omega$ . Para ello vamos a aplicar una transformación conforme  $\varphi$  que lleva el disco en el dominio  $\Omega$ . Así pues, utilizando la notación del teorema anterior, sea  $f$  una aplicación en  $\Gamma$  tal que  $f \circ \varphi$  es integrable en  $\partial\mathbb{D}$ , entonces

$$u : z = re^{i\theta} \in \Omega \mapsto u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f \circ \varphi(e^{it}) dt$$

es armónica en  $\Omega$ . Por los teoremas 2.3.4 y 2.2.1,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = f(\zeta) \tag{2.16}$$

cuando  $z \in \Omega$  y la función  $f \circ \varphi$  es continua en  $\varphi^{-1}(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$ . En particular, si  $f$  es continua en  $\Gamma$ , entonces (2.16) se satisface para todo  $\zeta \in \Gamma$  y  $u(z)$  resuelve el problema de Dirichlet para  $f$  en  $\Omega$ .

Al final de la demostración del Teorema 2.3.4 hemos utilizado un resultado clásico, el Principio de Reflexión de Schwarz, que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.3.5** (Principio de Reflexión de Schwarz). *Sea  $U^+$  un conjunto abierto conexo del semiplano superior y supongamos que la frontera de  $U^+$  contiene un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$ . Sea  $U^-$  la reflexión de  $U^+$  en el eje real,  $U^- = \{z : \bar{z} \in U^+\}$ , y tomemos  $U = U^+ \cup I \cup U^-$ .*

*Si  $f = u + iv$  es una función holomorfa en  $U^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) = 0$  para toda sucesión  $\{z_n\} \subset U^+$  que converge a un punto de  $I$ . Entonces  $f$  tiene una prolongación analítica única  $F$  en  $U$  que verifica*

$$F(z) = f(z) \text{ si } z \in U^+, \quad F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \text{ si } z \in U^-.$$

El teorema anterior puede aplicarse a situaciones más generales cuando el dominio considerado es equivalente a través de una función biholomorfa al abierto del resultado precedente.

**Teorema 2.3.6** (Principio de Reflexión de Schwarz). *Sea  $V$  un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y supongamos que es la unión disjunta  $V = V^+ \cup \gamma \cup V^-$ , donde  $V^+$  y  $V^-$  son abiertos de  $\mathbb{C}$  y  $\gamma$  es una curva. Suponemos que existe una aplicación biholomorfa entre  $V$  y  $U$*

$$\psi : U \rightarrow V$$

*tal que*

$$\psi(U^+) = V^+, \quad \psi(I) = \gamma \quad \psi(U^-) = V^-.$$

*La notación  $U = U^+ \cup I \cup U^-$  es la misma que antes.*

*Si  $g = u + iv$  es una función holomorfa en  $V^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) = 0$  para toda sucesión  $\{z_n\} \subset V^+$  que converge a un punto de  $\gamma$ . Entonces  $g$  tiene una prolongación analítica en  $V$ .*

Por último, el resultado que presentamos a continuación es un recíproco parcial del teorema de Carathéodory. Muestra que la inyectividad en el borde del dominio se traslada al interior, en condiciones adecuadas.

**Teorema 2.3.7.** *Sea  $\Gamma$  una curva simple, cerrada y suave con interior  $\Omega$ . Sea  $f \in \mathcal{H}(\Gamma \cup \Omega)$  una aplicación inyectiva en  $\Gamma$ . Entonces  $f$  es holomorfa e inyectiva en  $\Omega$ .*

*Demostración.* La aplicación  $w = f(z)$  lleva  $\Gamma$  en un camino simple, cerrado y suave  $\Gamma'$ . Sea  $w_0$  un punto arbitrario que no esté en  $\Gamma'$ . Entonces, si llamamos  $\Gamma_+$  al camino positivamente orientado,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si  $w_0$  está fuera de  $\Gamma'$  y es  $\pm 1$  si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ . Sin embargo,  $n$  no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de  $f(z) - w_0$  dentro de  $\Gamma$ . Entonces,  $n = 1$  si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ .

Esto prueba que  $f(z) = w_0$  tiene una sola solución si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ , que  $f(z)$  es holomorfa e inyectiva en  $\Omega$  y lleva  $\Omega$  en  $\Omega'$  (el interior de  $\Gamma'$ ) y que la dirección positiva de  $\Gamma'$  se corresponde con la dirección positiva de  $\Gamma$ .  $\square$



# Capítulo 3

## Aplicaciones informáticas

En este capítulo se describen las aplicaciones informáticas que se han desarrollado como complemento a las ideas que se exponen a lo largo del trabajo y que servirán de gran ayuda para visualizar los resultados que se exponen.

Se ha desarrollado una aplicación en Python con varias funcionalidades. La primera de ellas permite generar el coloreado de las funciones complejas en un disco de radio arbitrario mientras que la segunda permite extender una función  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  apropiada a una función armónica en el disco abierto. Para producir el coloreado de ambas aplicaciones se utiliza la técnica de visualización de las funciones complejas conocida como coloreado del dominio.

### 3.1. Técnica del coloreado del dominio

En esta sección se presentan técnicas de visualización de las funciones complejas que permiten resaltar algunas propiedades analíticas o geométricas que poseen tales como la existencia de ceros y su multiplicidad, la de polos y su orden, la falta de continuidad, la periodicidad, etcétera.

A la hora de reflejar el comportamiento de funciones complejas, inmediatamente tenemos que lidiar con una dificultad implícita: los números complejos son bidimensionales, así que el grafo de una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , requerirá de cuatro dimensiones. La solución que propone Velleman (2015) y que se va a emplear para representar estas funciones a lo largo del texto es la asignación de un color a cada número complejo. Esta forma de representación se denomina **Coloreado del dominio** (en inglés *Domain Coloring*).

En concreto, la técnica del coloreado consiste en asignar a cada número com-

plejo un determinado color que depende de su módulo y su argumento. La figura 3.1 muestra el plano complejo en el que a cada punto se le ha asignado un color distinto, de acuerdo al procedimiento que se describe a continuación.

En cuanto al argumento, conforme vamos aumentando el argumento el color recorre el círculo cromático, variando de rojo, amarillo, verde, cyan, azul, magenta y volviendo de nuevo al rojo. Según esta asignación, los puntos reales se corresponden con el rojo en el eje positivo mientras que en el eje negativo se corresponden con el cyan.

En lo que respecta al módulo, los puntos cercanos al origen se corresponden con colores oscuros mientras que los puntos alejados tienen colores claros. Así, cuando  $|z|$  tiende a 0, el color asignado se acerca al negro, en cambio cuando  $|z|$  tiende a infinito, el color de  $z$  se aproxima al blanco.

Con esta representación, cada número complejo tiene asignado un color diferente, por lo que un número complejo puede especificarse de manera única por su color. Dado  $U \subset \mathbb{C}$ , podemos representar cualquier función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente manera: a cada punto  $z$  del dominio se le asigna el color correspondiente a  $f(z)$ . De este modo, se representa cualquier función compleja en dos dimensiones con los colores, tomando como referencia la figura 3.1, que representa la función identidad  $f(z) = z$  en el disco de radio 10.

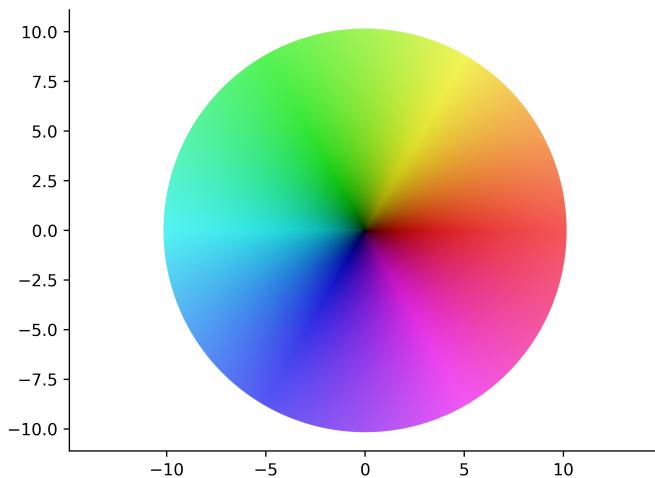


Figura 3.1: Plano complejo coloreado

A continuación mostramos con unos ejemplos la gran cantidad de información

que podemos extraer gracias a la representación de funciones complejas mediante la técnica de coloreado del dominio.

Por ejemplo, la figura 3.2 representa la función  $f(z) = z^3$ . Podemos observar que el centro del dibujo tiene un color muy oscuro. La razón es que cuando  $|z|$  es pequeño,  $|z^3|$  lo es mucho más, y por lo tanto el color asignado a  $z^3$  es muy oscuro. También podemos ver que los colores se vuelven muy claros conforme nos vamos alejando del centro. Esto ocurre porque cuando  $z$  es de módulo grande, también lo es  $z^3$ , y por consiguiente el color correspondiente es muy claro.

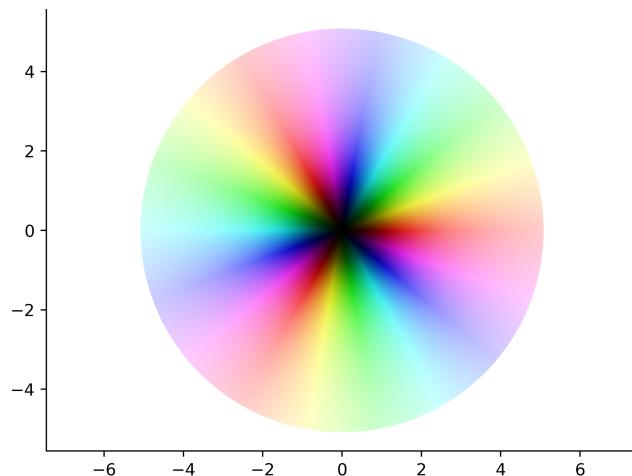


Figura 3.2: Representación de la función  $f(z) = z^3$ .

Puesto que el color asignado al número 0 es el negro, sabemos que las raíces del polinomio se corresponden con los puntos negros. En el caso que nos ocupa, el 0 es una raíz triple de la función y se puede observar en que los colores del círculo cromático la envuelven tres veces.

Por último cuando avanzamos en el sentido contrario a las agujas del reloj, pasamos por los colores del círculo cromático 3 veces. Esto muestra el hecho de que el argumento de  $z^3$  es tres veces el argumento de  $z$ , y por lo tanto la imagen de un círculo centrado en el origen bajo la función cúbica se envuelve alrededor del origen tres veces. Esto se explica porque para cada número de módulo  $s = r^3$  encontramos tres raíces distintas de módulo  $r$ . Si representamos la función  $f(z) = e^{z^3} - 1$ , observamos una imagen que, cerca del 0, es análoga a la anterior, pues tiene un cero triple en  $z = 0$ . La figura 3.3 muestra este último ejemplo.

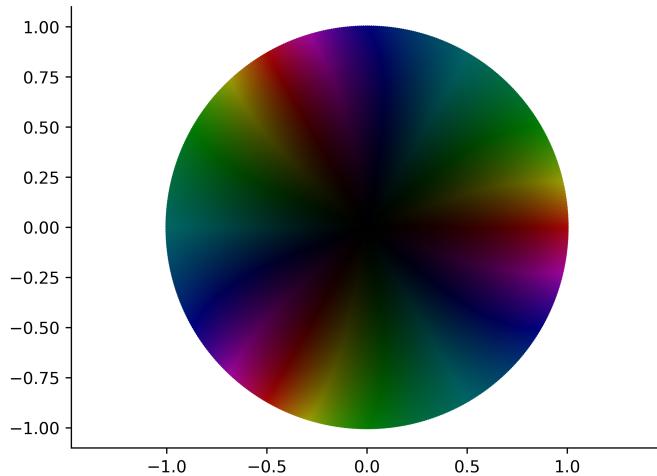


Figura 3.3: Representación de la función  $f(z) = e^{z^3} - 1$ .

La figura 3.4 muestra la representación de la función  $f(z) = \frac{1}{z}$  con la técnica del coloreado. En este caso, el color que se le ha asignado al 0 es blanco, lo que indica que  $\frac{1}{z}$  tiende a infinito cuando  $z$  tiende a 0. Es decir, nos encontramos ante un polo de la función. Podemos observar que en el origen se envuelven los colores del círculo cromático una única vez en sentido contrario, lo que indica que se trata de un polo simple. La función  $\frac{\cos z}{z}$ , por ejemplo, también tiene un cero simple en  $z = 0$  y un representación análoga a  $\frac{1}{z}$  en un entorno del origen.

Las funciones  $e^z$  y  $\operatorname{sen}(z)$  van a ilustrar el caso de las funciones periódicas. Se puede ver su representación en las figuras 3.5 y 3.6, respectivamente. Observamos que en el caso de la exponencial ahora los colores van cambiando conforme avanzamos verticalmente. Si escribimos  $z = x + iy$ , entonces  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ . Por lo que  $y$ , la parte imaginaria de  $z$ , determina el argumento y, por tanto, el color. Queda claro que el argumento es periódico de período  $2\pi$  en la dirección imaginaria.

La figura 3.7 representa la función  $\log(z)$ , una función no continua. Al haber discontinuidad en una semirrecta -porque no se puede definir un argumento continuo-, queda muy patente que la técnica del coloreado permite detectar estas discontinuidades. También es muy drástico cómo se ven las singularidades esenciales, por ejemplo, en  $z = 0$  para  $\operatorname{sen}(\frac{1}{z})$ . En el capítulo 4 se mostrará mediante un ejemplo cómo se representan las singularidades esenciales con la técnica del coloreado.

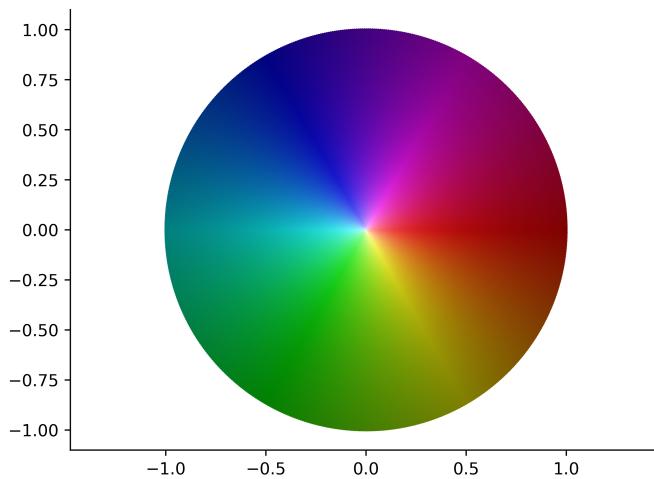


Figura 3.4: Representación de la función  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

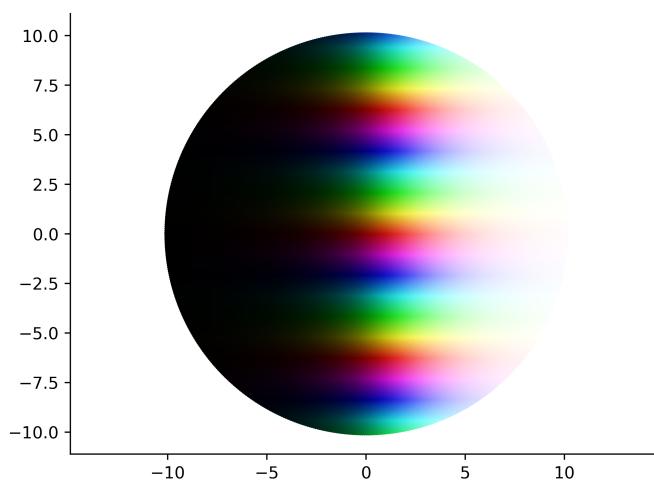


Figura 3.5: Representación de la función  $f(z) = e^z$ .

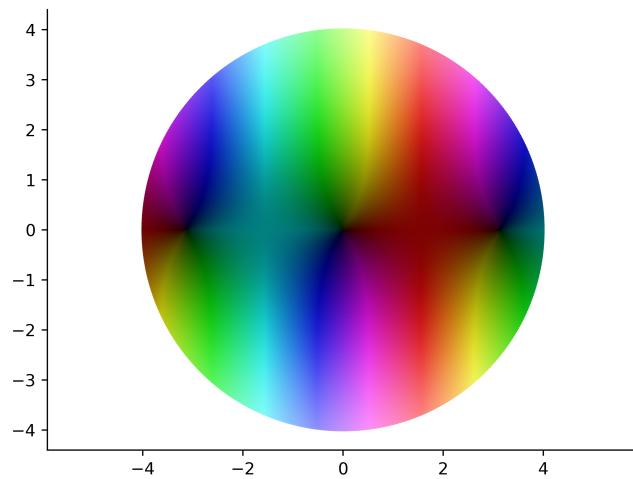


Figura 3.6: Representación de la función  $f(z) = \sin(z)$ .

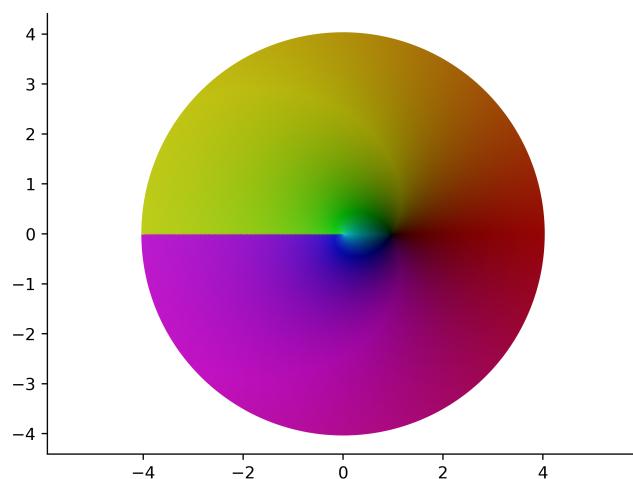


Figura 3.7: Representación de la función  $f(z) = \log(z)$ .

Por último, la figura 3.8 es la representación de la función  $f(z) = z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 - 5z^2 + 4z - 4$  mediante la técnica del coloreado. Las raíces de  $f$  vienen representadas por los 6 puntos negros en el dibujo. Sin embargo, este polinomio tiene 8 raíces de las cuales 2 son raíces dobles. Las raíces simples ocurren en los puntos  $-1, 2$  y  $\frac{(-1 \pm i\sqrt{7})}{2}$ , y las raíces dobles en  $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . La región que rodea a las raíces dobles es algo más oscura que la que rodea a las raíces simples, y en las raíces dobles los colores del círculo cromático la envuelven dos veces, mientras que en las raíces simples la envuelven una sola vez.

Además, el dibujo también muestra que el polinomio es de grado 8. Para  $z$  de módulo grande, el término de  $z^8$  domina a los otros términos, y por consiguiente la parte exterior del dibujo es similar a la representación de la función  $z^8$ . Esto puede observarse en que los colores del círculo cromático aparecen ocho veces.

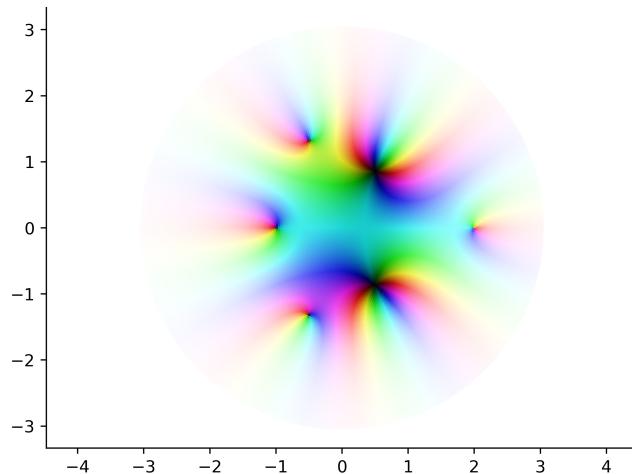


Figura 3.8:  $f(z) = z^8 - 2z^7 + 2z^6 - 4z^5 + 2z^4 - 2z^3 - 5z^2 + 4z - 4$

Introducimos un modelo de color gracias al cual vamos a poder representar fácilmente funciones complejas siguiendo el esquema de asignación de colores explicado anteriormente. Dicho modelo se conoce como HVS (del inglés, *Hue*, *Saturation*, *Value* - Tono, Saturación, Valor).

El primero de los atributos, que determina el tono de un color, se puede especificar por el ángulo que ocupa alrededor de un punto. Según va aumentando el ángulo, el color va variando de rojo -para los números reales positivos-, amarillo, verde, cyan, azul, magenta para volver de nuevo al rojo. Así pues el tono asociado a un número complejo está directamente relacionado con su argumento. Por

otra parte, la saturación es la intensidad de un tono específico, basándose en la pureza del color: un color muy saturado es vivo e intenso, mientras que un color menos saturado es más descolorido y gris. Por último, el valor indica la cantidad de luz que tiene un color. Cuanto más oscuro sea, menor será su valor y cuanto más claro, mayor. De este modo, la saturación y el valor asociadas a un número complejo están relacionados con el módulo del mismo.

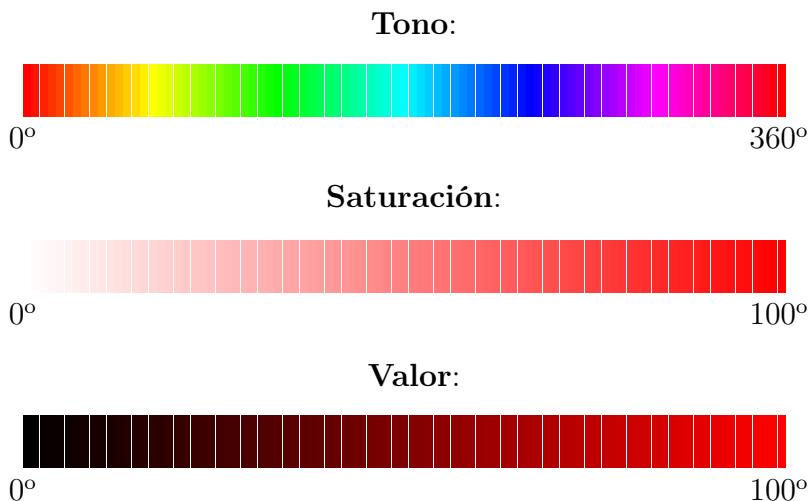


Figura 3.9: Modelo de color HSV

Los colores en Python se pueden dibujar mediante tuplas RGB de valores comprendidos entre el cero y el uno, esto es,  $\text{color } \textit{rgb} = (r, g, b)$ , con  $0 \leq r, g, b \leq 1$ . Cada uno de estos números se corresponde con uno de los tres colores primarios: rojo (*red*), verde (*green*) y azul (*blue*). Estos colores se representan como: *rojo* = (1, 0, 0), *verde* = (0, 1, 0) y *azul* = (0, 0, 1). Además, el blanco y el negro suponen todos estos valores a cero o a uno (*blanco* = (1, 1, 1) y *negro* = (0, 0, 0)).

Ahora bien, Python también admite una representación de colores por medio de tuplas HSV con valores entre el cero y el uno, es decir,  $\text{color } \textit{hsv} = (h, s, v)$ , con  $0 \leq h, s, v \leq 1$ . Así que podremos asociar a cada número complejo una terna en el modelo de colores HSV, cuidándonos de que los valores estén dentro del rango adecuado. Además, gracias a una función de Python podemos transformar directamente un color del modelo HSV en RGB.

De esta manera podremos representar cualquier color en Python como combinación de su tono, saturación y brillo, que dependen a su vez del módulo y el argumento del número complejo.

## 3.2. Representación de funciones. Problema de Dirichlet

A lo largo del trabajo nos vamos a centrar en el comportamiento de funciones en el borde del disco unidad. Por ello, la representación de funciones se realiza en discos centrados en 0 de radio arbitrario, siendo 1 el valor por defecto. La propia forma del dominio sugiere tomar un mallado circular y evaluar la función en cada punto.

La aplicación que se ha desarrollado tiene tres funcionalidades diferentes. En primer lugar, permite representar funciones complejas en un disco de radio determinado, como ya se ha mostrado en las figuras de la sección anterior, cuyas representaciones han sido obtenidos al ejecutar el programa realizado.

Por otra parte, también se puede resolver el problema de Dirichlet para el disco haciendo uso de la integral de Poisson. Dada una función  $f$  definida en el borde del disco, la solución dada por la integral de Poisson definirá una función armónica en el disco abierto. Además, si  $f$  es una función continua, la solución será también una función continua en el disco cerrado, que coincidirá con  $f$  en el borde del disco.

La función  $f$  que recibe el programa parametriza el borde del disco en función del argumento. Así pues, para poder definir funciones con mayor facilidad, su dominio de definición es  $[-\pi, \pi]$  de manera que  $\theta \in [-\pi, \pi]$  se corresponde con el punto  $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \partial\mathbb{D}$ .

Podemos utilizar la representación de funciones que se ha desarrollado para comprobar que la integral de Poisson se comporta como se espera cuando la parametrización dada se corresponde, en el borde, con la función que se va a dibujar. A continuación se pueden observar algunos ejemplos.

La figura 3.10 se corresponde con la extensión al disco de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow e^{10\cos(t)+10i\sin(t)}$ . A su vez, esta función parametriza el borde del disco de tal manera que cada punto  $t \in [-\pi, \pi]$  se corresponde con un punto  $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \partial\mathbb{D}$ . Deshaciendo este cambio, obtenemos que la función  $f$  se puede escribir como  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{10z}$ . Volviendo a la figura 3.5 podemos comprobar que se trata de la misma representación.

La figura 3.11 representa la extensión al disco de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow 10(\cos(t) + 10i \sin(t))$ . Deshaciendo este cambio como en el ejemplo anterior, tenemos que la función  $f$  se puede escribir de la siguiente manera

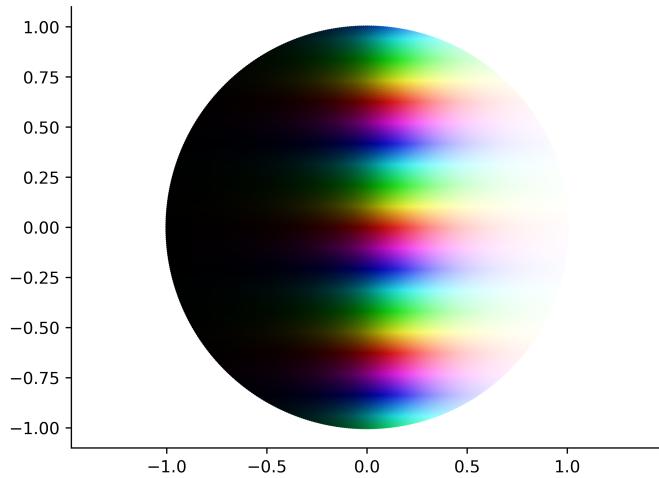


Figura 3.10: Extensión al disco de la función  $f(t) = e^{10 \cos(t) + 10i \sen(t)}$ .

$f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 10z$ . De nuevo, si nos fijamos en la figura 3.1 podemos observar que coinciden.

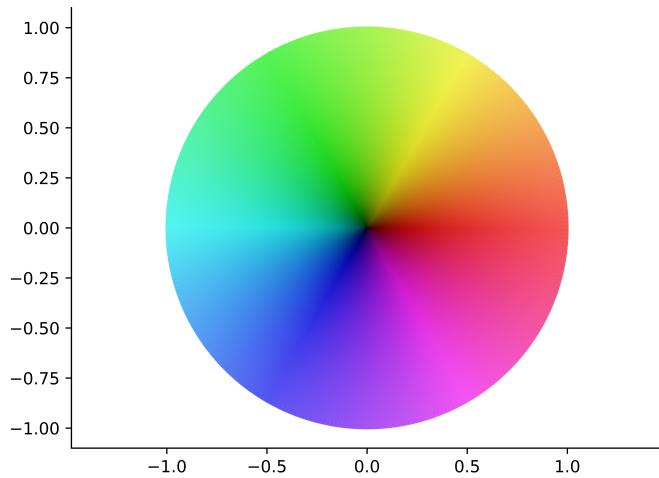


Figura 3.11: Extensión al disco de la función  $f(t) = 10(\cos(t) + i \sen(t))$ .

La figura 3.12 muestra la extensión al disco de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (5 \cos(t) + 5i \sen(t))^3$  que se corresponde con  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (5z)^3$ . Esta representación coincide con la que se observa en la figura 3.2.

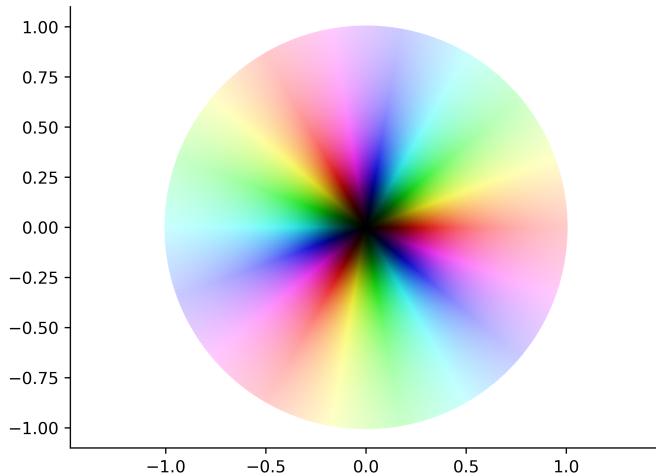


Figura 3.12: Extensión al disco de la función  $f(t) = (5 \cos(t) + 5i \sin(t))^3$ .

Por último, la figura 3.13 se corresponde con la extensión al disco de la función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow \cos^2(t) - \sin^2(t)$  que también puede escribirse como  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re}(z^2)$ .

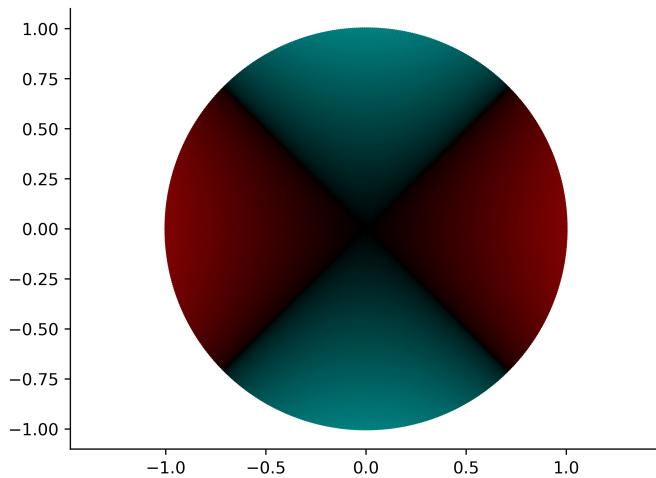


Figura 3.13: Extensión al disco de la función  $f(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ .

Esta misma comprobación se puede llevar a cabo mediante la última funcio-

nalidad de la aplicación que permite representar la diferencia de funciones. Por lo tanto, si el cálculo de la integral de Poisson fuera perfecto, el dibujo resultante sería negro en su totalidad. Esto se consigue en la mayoría de los ejemplos, con funciones acotadas por valores no muy grandes.

Sin embargo, debido a errores numéricos, este cálculo no es totalmente exacto y presenta algunas inexactitudes sobre todo en puntos cercanos al borde del disco o cuyo módulo, a través de la función, es grande. Podemos ver esto reflejado en la figura 3.14 que muestra la diferencia entre las figuras 3.10 y 3.5.

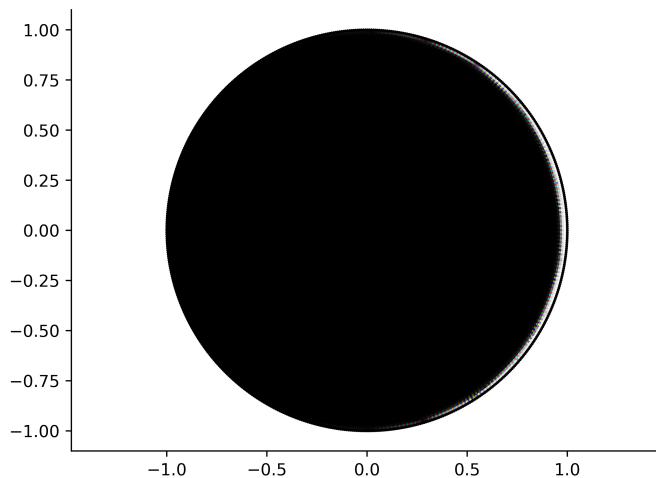


Figura 3.14: Diferencia entre las figuras 3.10 y 3.5.

Como hemos comentado previamente,  $f$  ha de ser continua para que se pueda extender con continuidad al disco cerrado. Pero, ¿qué pasa cuando no lo es? El resultado será una función con parte real e imaginaria armónicas en el interior (no necesariamente una conjugada de la otra) pero que no se puede prolongar con continuidad a la frontera, como es lógico. Además, si  $f$  es continua a trozos, la función que se obtiene a partir de ella es armónica y continua en los puntos del borde donde lo sea  $f$ .

La figura 3.15 ilustra lo que se acaba de comentar. A la izquierda se observa la extensión armónica al disco de la función  $f(t) = 0$  si  $-\pi < t < 0$  y  $f(t) = 100$  si  $0 \leq t \leq \pi$ ; y a la derecha se representa la extensión armónica al disco de la función  $f(t) = 20i$  si  $-\pi < t < 0$ ,  $f(t) = -20$  si  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$  y  $f(t) = 20$  si  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ .

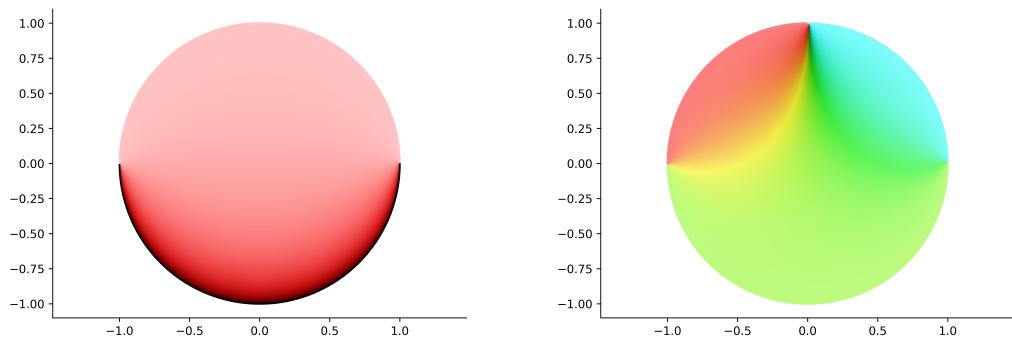


Figura 3.15: Funciones definidas a trozos.



## Capítulo 4

# Series de potencias. Productos infinitos

### 4.1. Ejemplos de series de potencias

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de algunas series de potencias en el borde de su disco de convergencia. Para ello primero vamos a recordar algunos conceptos que nos van a ser de utilidad. Sea  $f(z)$  una serie de potencias con coeficientes  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  centrada en  $z_0$  dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

donde  $z \in \mathbb{C}$ .

**Definición 4.1.1.** Se llama radio de convergencia de una serie de potencias a

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge} \right\} \in [0, \infty].$$

Cuando el radio de convergencia cumple que  $0 < R < \infty$ ,  $R$  es el único número real tal que la serie converge si  $|z - z_0| < R$ , y diverge si  $|z - z_0| > R$ . Por ello, decimos que  $D(z_0, r)$  es el disco de convergencia de la serie.

En la frontera del disco de convergencia, esto es, cuando  $|z - z_0| = r$ , el comportamiento de la serie de potencias puede ser complicado, es decir, puede converger para unos valores de  $z$  y divergir para otros.

Todas las series que vamos a presentar tienen radio de convergencia 1 y están centradas en el origen. Sin embargo, cada una de ellas muestra una situación diferente relacionada con su comportamiento en la frontera del disco unidad.

En primer lugar tenemos la serie geométrica, una serie con radio de convergencia 1, no acotada y que no converge en ningún punto de la frontera de su disco de convergencia. Sin embargo, la serie puede extenderse a una función globalmente analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  mediante una cantidad finita de prolongaciones analíticas.

**Ejemplo 4.1.2.** Mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

diverge en todo punto tal que  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^n)$ . Por lo tanto, si  $z \neq 1$ , se tiene que

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad (4.1)$$

Por un lado, si  $|z| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  y la serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Ahora bien, si  $|z| > 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$  y la serie diverge. Pero, ¿qué pasa cuando  $|z| = 1$ ? La serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  diverge en todos los puntos del radio de convergencia pues  $|z^n|$  no tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sin embargo,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  puede ser extendida a la función globalmente analítica  $\frac{1}{1-z}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  gracias a una cantidad finita de prolongaciones analíticas.

Tomemos  $a$  un punto cualquiera de  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  y conectémoslo al origen 0 mediante la curva de Jordan  $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Fijemos un punto  $z_1$  en  $\gamma$  que cumpla  $|z| < 1$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  puede ser extendida analíticamente en  $z_1$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{1 - z_1 - (z - z_1)} = \frac{1}{1 - z_1} \frac{1}{1 - \frac{z - z_1}{1 - z_1}} = \frac{1}{1 - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_1}{1 - z_1} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z_1)^{n+1}} (z - z_1)^n, |z - z_1| < |1 - z_1|. \end{aligned}$$

De nuevo, tomemos  $z_2$  en  $\gamma$  tal que  $|z_2 - z_1| < |1 - z_1|$  y  $|z_2| \geq 1$ . Podemos extender la serie de potencias a  $z_2$  de la misma forma:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_2)^{n+1}} (z - z_2)^n, |z - z_2| < |1 - z_2|.$$

Después de un número finito de iteraciones, dado que la curva es un conjunto compacto, alcanzaremos el punto  $a$  y tendremos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}} (z - a)^n, |z - a| < |1 - a|.$$

Así, decimos que hemos obtenido la prolongación analítica de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  que pasa por la curva  $\gamma$ .

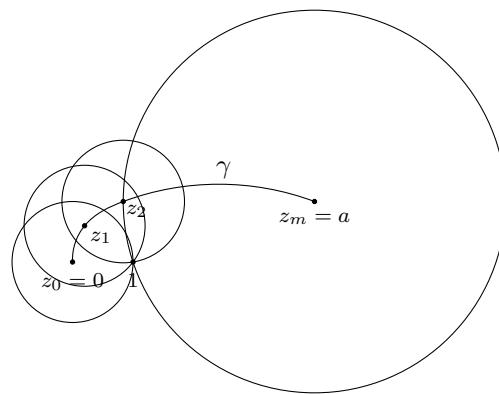


Figura 4.1: Prolongaciones analíticas.

Podemos hacer uso de la aplicación que se ha desarrollado como complemento para visualizar con mayor claridad el comportamiento de esta función en el disco unidad. La figura 4.2 muestra la función globalmente analítica  $\frac{1}{1-z}$  en  $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ .

□

A continuación, presentamos otra serie con radio de convergencia 1, que converge en todos los puntos del borde salvo en  $z = 1$ . Además, podemos expresar la suma de esta serie en términos de la serie anterior si  $z \neq 1$ .

**Ejemplo 4.1.3.** Mostrar que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

diverge en  $z = 1$  y converge en el resto de punto tales que  $|z| = 1$ ;

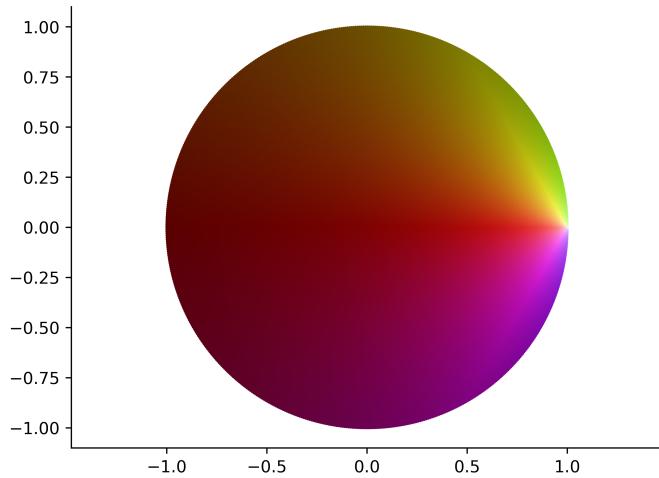


Figura 4.2: Representación de la función  $\frac{1}{1-z}$  en el disco unidad.

*Demostración.* En primer lugar, cabe destacar que la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, por lo que la serie de nuestro ejemplo diverge para  $z = 1$ . Para demostrar que la serie converge en el resto de punto tales que  $|z| = 1$  vamos a aplicar el criterio de Dirichlet, que recordamos a continuación.

Sean  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  y  $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$  sucesiones tales que:

1.  $\{a_n\}$  es monótona con límite 0
2. Las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  están acotadas

entonces  $\sum_{n=1}^N a_n b_n$  converge.

En nuestro caso vamos a tomar  $a_n = \frac{1}{n}$  y  $b_n = z^n$ . La primera condición se cumple, veamos la que resta:

$$\left| \sum_{n=1}^N z^n \right| = \left| \frac{z - z^{N+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|},$$

si  $z \neq 1$ , para todo  $N \in \mathbb{N}$ .

Esto muestra que la condición se satisface para todo  $z \neq 1$  en el disco unidad. Por lo tanto, la serie converge para todo  $z$  tal que  $|z| \leq 1, z \neq 1$  y diverge para  $|z| > 1$ .

Vamos a ver que la suma de la serie es  $\log \frac{1}{1-z}$  cuando  $z \neq 1$ . En efecto, derivando tenemos que

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \Rightarrow zg'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Si integramos ahora la expresión de la derecha tenemos que la suma es  $\log \frac{1}{1-z}$  puesto que  $g(0) = 0$ .

De nuevo, haciendo uso de la aplicación, hemos generado la figura 4.3 que muestra la función  $\log \frac{1}{1-z}$  en  $\partial\mathbb{D}$ .

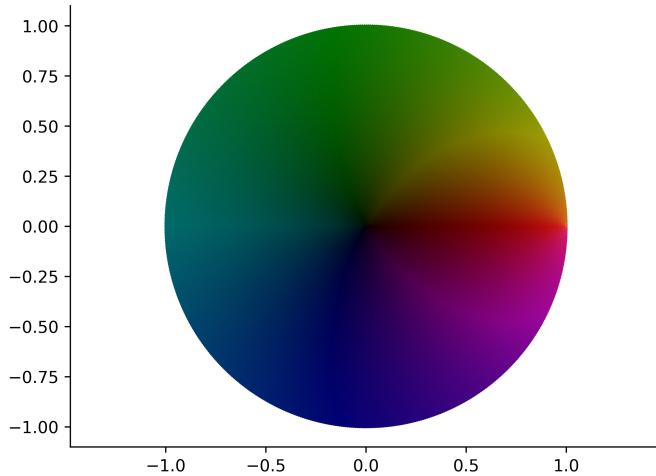


Figura 4.3: Representación de la función  $\log \frac{1}{1-z}$  en el disco unidad.

□

Vamos a estudiar una serie de potencias con radio de convergencia 1, que se puede sumar en todos los puntos del borde, pero no puede extenderse a una función holomorfa.

**Ejemplo 4.1.4.** Mostrar que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, |z| < 1$$

converge absoluta y uniformemente en  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Por el criterio mayorante de Weierstrass, es fácil ver que converge absoluta y uniformemente si  $|z| \leq 1$  dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| < \infty.$$

Esta función  $f$  define una función holomorfa y acotada en el disco abierto  $\mathbb{D}$ , que además es continua en el disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ . Sin embargo, no puede extenderse a una función que sea derivable en  $z = 1$ .

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \Rightarrow zf'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = g(z) = \log \frac{1}{1-z}.$$

Así pues, la derivada de  $f(z)$  es igual a  $\frac{g(z)}{z}$ , siendo  $g$  la función del ejemplo anterior.

□

A continuación, presentamos otro ejemplo de serie de potencias con radio de convergencia 1. En este caso, la serie tiene singularidades en todos los puntos del borde del disco.

**Ejemplo 4.1.5.** Mostrar que la serie lagunar,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, |z| < 1$$

tiene una singularidad en cada punto tal que  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Sea  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$ . Podemos escribir lo siguiente:

$$h(z^2) = h(z) - z, \quad h(z^4) = h(z^2) - z^2,$$

y aplicando inducción tenemos que

$$h(z^{2^k}) = h(z^{2^{k-1}}) - z^{2^{k-1}}.$$

Así,

$$h(z) = z + h(z^2) = z + z^2 + h(z^4) = \dots = z + z^2 + \dots + z^{2^{k-1}} + h(z^{2^k}).$$

Por lo tanto, si  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $r \in (0, 1)$  y tomamos  $r$  como  $e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}$ , tenemos que

$$h(r^{2^n}) = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{2^n})^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^n \cdot 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^{(n+k)}} = \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k}.$$

Como

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \geq \sum_{k=n}^N r^{2^k} > (N+1)r^{2^k} \rightarrow N+1,$$

entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} |h(re^{2\pi i \frac{m}{2^n}})| = \infty$  para todos  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Puesto que  $\{e^{2\pi i \frac{m}{2^n}} : m, n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $\partial\mathbb{D}$ , todos los puntos del borde del disco unidad son singulares.

□

Por último, tenemos una función holomorfa y acotada en el disco unidad, con un punto singular en  $z = 1$ . Por lo tanto, su serie de potencias centrada en 0 tiene radio de convergencia 1 y no puede sumarse en dicho punto.

**Ejemplo 4.1.6.** Mostrar que la función

$$S(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), z \in \mathbb{D}$$

es holomorfa,  $|S(z)| < 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y  $S(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 1^-$ , pero no existe el límite de  $S$  en 1.

*Demostración.* La función  $S$  es holomorfa en el disco unidad ya que es la composición de funciones holomorfas. Obsérvese que el único punto singular es  $z = 1$ . Su desarrollo en serie de potencias en torno al 0 tiene, por tanto, radio de convergencia 1. Además, tanto  $S$  como todas sus derivadas tienen límite radial 0 en  $e^{i\theta} = 1$ .

Consideramos la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$  definida en el disco unidad. La imagen del disco por  $T$  es el semiplano izquierdo  $H = \{w : \operatorname{Re}(w) < 0\}$ . Por lo que la exponencial  $e^{T(z)}$  aplica el disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo. Además, es holomorfa en  $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ , puede extenderse con continuidad a  $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$  y la extensión, en módulo, está acotada por 1.

Veamos a continuación que no podemos extender la función  $S$  con continuidad al punto 1. Tomemos una sucesión  $\{t_n\}$  en el intervalo  $(-1, 1)$  que converge a 1 cuando  $n$  tiende a  $\infty$ . Se tiene que  $T(t_n) = \frac{t_n+1}{t_n-1}$  tiende a  $-\infty$  cuando  $t$  tiende a  $1^-$ . Por lo tanto,

$$\frac{t+1}{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} -\infty \Rightarrow \exp\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 0.$$

Sin embargo, la función  $S$  no tiene límite en 1. Por ejemplo, si tomamos la sucesión  $\{z_n\}$  definida por  $z_n = T(w_n)$ , siendo  $\{w_n\}$  la sucesión de término general  $-1 + 2n\pi i$ . Entonces,

$$z_n = \frac{2n\pi i}{-2 + 2n\pi i} = \frac{n\pi i}{n\pi i - 1} = \frac{(n\pi i + 1)n\pi i}{-n^2\pi^2 - 1} = \frac{-n^2\pi^2 + in\pi}{-n^2\pi^2 - 1}.$$

Como  $T = T^{-1}$  tenemos

$$e^{T(z_n)} = e^{w_n} \rightarrow e^{-1} \neq 0.$$

Gracias a la figura 4.4 se puede observar el comportamiento de la función en el disco. Más concretamente, la singularidad esencial que presenta en el punto  $z = 1$ . Aparentemente el programa está teniendo problemas al representar la función cerca del punto  $z = 1$ . La razón es el Teorema grande de Picard, que dice, en términos generales, que una función holomorfa cercana a una singularidad esencial toma todos los valores complejos posibles salvo a lo sumo un valor excepcional. En nuestro caso particular, la función no puede evaluarse en  $z = 1$ , por lo que a medida que nos acercamos al punto, el argumento (es decir, el color) cambia, gira alrededor, etcétera, de forma cada vez más rápida.

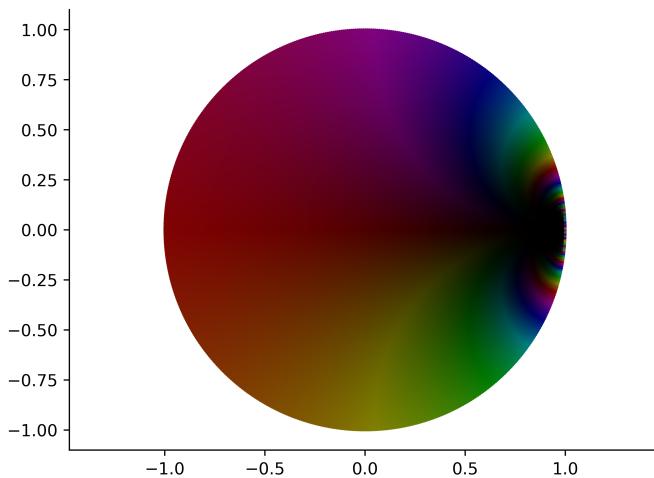


Figura 4.4: Representación de la función  $\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  en el disco unidad.

Estudiaremos este ejemplo con más detalle en el Capítulo 5, centrándonos de nuevo en el comportamiento de la función en el punto singular  $z = 1$ .

□

## 4.2. Productos infinitos

En esta sección, introducimos la noción de producto infinito convergente, relacionándola con la convergencia de una serie numérica. Esta construcción puede extenderse a productos infinitos de funciones holomorfas, lo que da lugar a nuevas familias de funciones holomorfas complejas cuando se obtienen como límite uniforme sobre compactos de productos apropiados.

**Definición 4.2.1.** Sea  $\{u_n\}$  una sucesión de números complejos tal que  $u_n \neq 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Se dice que el producto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$  es convergente cuando el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^N u_n$$

existe y es distinto de cero. En este caso, se define el producto infinito como

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N u_n.$$

Los siguientes dos resultados nos van a permitir relacionar la convergencia de un producto infinito con la convergencia de las series, lo cual nos va a ser de gran ayuda ya que estas últimas son mucho más fáciles de manejar.

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $\{u_n\}$  una sucesión de números complejos no nulos. Si  $\lim u_n = 1$  y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n$$

*converge absolutamente, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\log u_n|$  converge, entonces el producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

*converge absolutamente.*

*Demostración.* Si  $n$  es suficientemente grande, entonces  $u_n$  puede escribirse como  $u_n = 1 - \alpha_n$ , donde  $|\alpha_n| < 1$ , y entonces podemos definir  $\log u_n$  como  $\log(1 - \alpha_n)$ . Por hipótesis, se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \alpha_n)$$

converge. Así que las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^N \log u_n$$

tienen límite y es finito. Como la función exponencial es continua, podemos exponentiar las sumas parciales y vemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N u_n$$

existe.

□

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de números complejos tales que  $\alpha_n \neq 1$  para todo  $n$ . Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

*converge. Entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n)$$

*converge absolutamente.*

*Demostración.* Para una cantidad finita  $n$ , tenemos que  $|\alpha_n| < \frac{1}{2}$ , así que  $\log(1 - \alpha_n)$  está definido por la serie usual, y para alguna constante  $C$ , tenemos

$$|\log(1 - \alpha_n)| \leq C |\alpha_n|.$$

Por tanto, el producto converge absolutamente por definición y utilizando la hipótesis de que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  converge.

□

Una vez que disponemos de las herramientas apropiadas para el estudio de los productos numéricos en términos de las series asociadas, se puede analizar la convergencia (absoluta y uniforme) de productos infinitos de funciones en términos de la convergencia (absoluta y uniforme) de las series correspondientes. En la siguiente sección utilizaremos este resultado para introducir los productos de Blaschke.

La demostración del resultado que presentamos a continuación es análoga a las de los precedentes.

**Teorema 4.2.4.** Si  $\{u_n\}$  es una sucesión de funciones complejas acotadas en un conjunto  $A$  tales que  $\sum |1 - u_n(z)|$  converge uniformemente en  $A$ , entonces el producto  $f(z) = \prod u_n(z)$  converge uniformemente en  $A$  y cumple que  $f(z_0) = 0$  si y solo si existe  $n_0$  tal que  $u_{n_0}(z_0) = 0$ .

### 4.3. Productos de Blaschke

Tras los ejemplos de funciones holomorfas en el disco unidad que presentamos en la primera sección, definidas mediante su serie de potencias centrada en 0 o a través de su expresión analítica explícita, utilizamos la noción de producto infinito de funciones para presentar una clase especial de funciones holomorfas y acotadas en el disco. Se trata de los productos de Blaschke, que se obtienen a través de un producto infinito de automorfismos del disco unidad. Cada uno de ellos está ligado a un valor  $\alpha$  en el disco, el único punto donde el automorfismo se anula, y la convergencia del producto infinito se describe dada en términos de los distintos valores  $\alpha_n$ . En concreto, la sucesión  $\{\alpha_n\}$  debe aproximarse rápidamente al borde del disco, como muestra el resultado que se presenta a continuación.

**Teorema 4.3.1.** Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión en el disco unidad  $\mathbb{D}$  tal que  $\alpha_n \neq 0$  para todo  $n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$  converge. Entonces el producto de Blaschke

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

converge uniformemente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$ . La función  $B(z)$  define una función holomorfa en el disco unidad que tiene los mismos ceros que  $\alpha_n$ . Además  $|B(z)| \leq 1$  y  $|B(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto.

*Demostración.* Sea

$$b_n(z) = \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Por el Lema 4.2.3, sabemos que  $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  converge uniformemente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$  a una función holomorfa que tiene los mismos ceros que  $\{\alpha_n\}$  si y solo si  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n|$  converge uniformemente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$ . Para  $|\alpha_n| < 1$  y  $|z| \leq r < 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} |1 - b_n(z)| &= \left| 1 + \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{(1 - \bar{\alpha}_n z)\alpha_n + (z - \alpha_n)|\alpha_n|}{(1 - \bar{\alpha}_n z)\alpha_n} \right| = \\ &= \left| \frac{\alpha_n + z|\alpha_n|}{\alpha_n(1 - \bar{\alpha}_n z)} \right| (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r} (1 - |\alpha_n|). \end{aligned}$$

pues si  $|\alpha_n| < 1$  y  $|z| \leq r$  se verifican  $|\alpha_n + z\alpha_n| \leq 1 + r$ , y  $|1 - \overline{\alpha_n}z| \geq 1 - |\overline{\alpha_n}| |z| \geq 1 - r$ .

Entonces para  $|z| \leq r < 1$ , se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n(z)| \leq \frac{1+r}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|),$$

y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n(z)|$  converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado de radio  $r$ . Por lo que  $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$  converge uniformemente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$ .

Como  $b_n(z)$  son funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  y su producto infinito converge uniformemente en los compactos de  $\mathbb{D}$ , se tiene que  $B(z)$  define una función holomorfa en el disco unidad. Se está utilizando que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es la apropiada, ya que los límites en ella de elementos de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  existen y son, de nuevo, funciones holomorfas.

Además, se cumple  $|B(z)| \leq 1$  por la caracterización de los automorfismos del disco unidad ya que los términos  $\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z}$  definen un automorfismo del disco unidad que lleva el disco abierto en el disco abierto y el borde en el borde.

Así pues, aplicando el Teorema de Fatou,  $B(z)$  tiene límites radiales  $|B(e^{i\theta})| \leq 1$  en casi todo punto. Para ver que  $|B(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto, tomemos  $B_n(z) = \prod_{k=1}^n b_k(z)$  el producto parcial. Entonces,  $\frac{B}{B_n}$  es otro producto de Blaschke y

$$\left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{B(e^{i\theta})}{B_n(e^{i\theta})} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta = 1,$$

y, por consiguiente,  $|B(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto. □

*Observación.* Cada  $b_n(0)$  es positivo y por lo tanto también lo es  $B(0)$ .

Podemos enunciar un resultado similar al anterior si permitimos que  $\alpha_n$  se anule  $m$  veces, lo que significa que  $B$  se anulará en los mismos puntos que  $\alpha_n$ .

Haciendo uso de la Proposición anterior, lo que ataña a la convergencia y los límites radiales es inmediato y no precisa demostración.

**Corolario 4.3.1.1.** *Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión en el disco unidad  $\mathbb{D}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$  converge. Sea  $m$  el número de  $\alpha_n$  iguales a cero. Entonces el producto de Blaschke*

$$B(z) = z^m \prod_{|\alpha_n| \neq 0} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

*converge uniformemente sobre los compactos de  $\mathbb{D}$ . La función  $B(z)$  define una función holomorfa en el disco unidad que tiene los mismos ceros que  $\alpha_n$ . Además  $|B(z)| \leq 1$  y  $|B(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto.*

Después de la discusión anterior podemos dar una formulación general de los productos de Blaschke.

**Corolario 4.3.1.2.** *Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión en el disco unidad  $\mathbb{D}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$  converge. Sea  $m \geq 0$  el número de  $\alpha_n$  iguales a cero, y  $t \in \mathbb{R}$ . La expresión general de un producto de Blaschke es*

$$B(z) = e^{it} z^m \prod_{|\alpha_n| \neq 0} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$



# Capítulo 5

## $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ como álgebra de Banach

En este capítulo vamos a presentar algunos conceptos y resultados generales sobre álgebras de Banach, particularizando el estudio en el álgebra de las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad,  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . En este caso, el espectro (el espacio de homomorfismos no nulos entre  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\mathbb{C}$ ) se descompone como unión disjunta de las fibras sobre los puntos del disco cerrado. A través de las fibras se estudia el comportamiento de los elementos de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  en los puntos del borde, tanto cuando la función puede extenderse con continuidad como en el caso más interesante, de puntos singulares en el borde. En este análisis recuperamos, bajo la nueva perspectiva, ejemplos concretos que se estudiaron en capítulos previos.

### 5.1. Álgebra de Banach

**Definición 5.1.1.** Un espacio vectorial complejo  $X$ , dotado de una norma  $\|\cdot\|$  se denomina espacio de Banach si es completo.

En nuestro caso particular,  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es un espacio vectorial complejo, que dotado con la norma infinito

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|,$$

es normado y completo sobre  $\mathbb{C}$  puesto que el límite uniforme sobre compactos de una sucesión de funciones holomorfas es una función holomorfa. Atendiendo a la definición anterior, decimos que  $(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.

**Definición 5.1.2.** Decimos que un álgebra  $B$ , dotada de una norma  $\|\cdot\|$  es un álgebra de Banach si como espacio normado  $(B, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach y,

además, para el producto satisface:

$$\forall x, y \in B : \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

De nuevo, podemos ver  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como un álgebra, con las operaciones naturales. En efecto, si  $f, g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$$

$$fg \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}).$$

Así,  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es un álgebra de Banach conmutativa (con la función constante 1 como elemento unidad) puesto que es un álgebra conmutativa y un espacio de Banach cuya norma asociada cumple la siguiente propiedad:

$$\forall f, g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) : \|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

## 5.2. Espacio dual de un álgebra de Banach

**Definición 5.2.1.** Sea  $B$  un espacio de Banach complejo. Consideramos  $B^*$  el espacio de las aplicaciones  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  lineales y continuas.  $B^*$  es un espacio vectorial y tiene una norma natural dada por:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Con esta norma,  $B^*$  es un espacio de Banach al que llamamos espacio dual de  $B$ .

Además de la topología inducida por la norma en el espacio dual  $B^*$ , vamos a considerar otra topología denominada topología débil-\* en  $B^*$  que está definida de la siguiente manera. Sea  $\varphi_0 \in B^*$ , y tomemos una cantidad finita de elementos  $x_1, \dots, x_n \in B$  y  $\varepsilon > 0$ . Los entornos de  $\varphi_0$  serán los conjuntos que contienen uno de la forma  $U$ , donde

$$U = \{\varphi \in B^* : |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon, k = 1, \dots, n\}.$$

Un abierto de esta topología será, por tanto, cualquier unión de tales entornos  $U$ .

Esta topología se denota por  $\sigma(B^*, B)$ . Es la topología más débil de  $B^*$  tal que todas las funciones  $\varphi \rightarrow \varphi(x)$  son continuas de  $B^*$  en  $\mathbb{C}$ , con  $x \in B$ .

Un resultado importante de análisis funcional que usaremos en nuestro desarrollo es el Teorema de Alaoglu, que establece la compacidad de la bola unidad

cerrada de cualquier espacio dual, cuando se considera dotado de la topología débil-\*. Obsérvese que en dimensión infinita, la bola unidad no es compacta en ningún espacio para la topología dada por la norma.

**Teorema 5.2.2** (de Alaouglu). *La bola unidad cerrada de  $B^*$  es compacto en la topología débil-\**.

### 5.3. El espectro de un álgebra

Recordemos que  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  es un homomorfismo de álgebras si para todos  $x, y \in B$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  se cumple:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y) &= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y).\end{aligned}\tag{5.1}$$

El espectro de  $B$ , denotado por  $\mathfrak{M}(B)$ , es el espacio de los homomorfismos  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  no nulos. Observamos que tales homomorfismos verifican que son continuos y  $\|\varphi\| = 1$ .

Tal y como hemos definido  $\mathfrak{M}(B)$ , es un subconjunto del espacio dual  $B^*$ . De hecho, está contenido en la bola unidad de  $B^*$  que, dotada con la topología débil-\*, es un compacto. Por lo que al ser  $\mathfrak{M}(B)$  cerrado en  $B^*$ , este es, a su vez, un espacio Hausdorff compacto.

Llegados a este punto queremos asociar cada elemento  $x$  de  $B$  con una función continua sobre  $\mathfrak{M}(B)$ . Para ello vamos a definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned}\widehat{x} : \mathfrak{M}(B) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x).\end{aligned}$$

Si dotamos a  $\mathfrak{M}(B)$  con la topología débil-\*, tenemos que cada  $\widehat{x}$  es una función continua en  $\mathfrak{M}(B)$ . Más aún, por definición, la topología débil-\* es la topología más débil de  $\mathfrak{M}(B)$  que hace que cada  $\widehat{x}$  sea continua. Así pues, tenemos la siguiente representación a la que se le suele denominar **transformada de Gelfand**

$$x \rightarrow \widehat{x}.$$

La imagen de  $B$  bajo este homomorfismo es el álgebra  $\widehat{B}$  de las funciones continuas sobre  $\mathfrak{M}(B)$  que toman valores complejos. Es decir,

$$\widehat{B} = \{\widehat{x} : \mathfrak{M}(B) \rightarrow \mathbb{C} \mid x \in B\}.$$

Todos los comentarios que hemos desarrollado anteriormente para un álgebra de Banach cualquiera, siguen siendo ciertos si los particularizamos para el álgebra  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Así, el espectro, al que vamos a denotar por  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}))$ , será el espacio de los homomorfismos  $\phi : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  no nulos.

La construcción que se ha realizado previamente para  $B$ , se describe ahora de la siguiente manera. Tenemos la aplicación

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \mathfrak{M} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(f),\end{aligned}$$

para cada  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , donde cada  $\widehat{f}$  es continua sobre el  $\mathfrak{M}$  si dotamos a  $\mathfrak{M}$  con la topología débil-\*. Esto da lugar a la representación  $f \rightarrow \widehat{f}$ . De esta manera, vamos a poder interpretar  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como el álgebra de las funciones continuas en el espacio compacto  $\mathfrak{M}$ .

Al espacio  $\mathfrak{M}$  se le suele denominar espacio de ideales maximales de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Para cada  $\phi \in \mathfrak{M}$ , el núcleo de  $\phi$  es un ideal maximal del álgebra  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Recíprocamente, todo ideal maximal en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  se corresponde con el núcleo de un homomorfismo en  $\mathfrak{M}$ . Más adelante estudiaremos la estructura de este espacio.

En principio, los únicos homomorfismos complejos que se pueden identificar claramente son las evaluaciones en puntos del disco abierto  $\mathbb{D}$ . Si  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\begin{aligned}\delta_z : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(z).\end{aligned}$$

Así pues, las evaluaciones en puntos del disco abierto son elementos del espectro y cumplen  $\|\delta_z\| = 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . En efecto,

$$\|\delta_z\| = \sup_{f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})} |\delta_z(f)|$$

y, como  $\delta_z(1) = 1$ , entonces  $\|\delta_z\| = 1$ .

## 5.4. La proyección del espectro sobre el disco

Existe una proyección natural continua que lleva  $\mathfrak{M}$  en el disco unidad cerrado. Si denotamos por  $\text{id}$  la función identidad de  $\mathbb{D}$ , que pertenece a  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ ,

$$\text{id}(z) = z, z \in \mathbb{D},$$

la aplicación que buscamos lleva los homomorfismos  $\phi \in \mathfrak{M}$  en su correspondiente valor en la función id. Así pues, la aplicación que nos interesa es  $\widehat{\text{id}}$ . Para evitar confusiones, vamos a introducir una notación alternativa para referirnos a la función  $\widehat{\text{id}}$ . Si  $\phi \in \mathfrak{M}$ ,

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{M} &\rightarrow \overline{\mathbb{D}} \\ \phi &\mapsto \phi(\text{id}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nótese que la función identidad tiene norma 1 y cada  $\phi \in \mathfrak{M}$  también, por lo que  $|\pi(\phi)| \leq 1$ . Es decir, la imagen de  $\pi$  está contenida en el disco unidad cerrado.

**Teorema 5.4.1.** *La aplicación  $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  definida por (5.2) es continua.  $\pi$  es inyectiva sobre el disco abierto  $\mathbb{D}$  y  $\pi^{-1}$  aplica homeomórficamente  $\mathbb{D}$  sobre un abierto de  $\mathfrak{M}$ .*

*Demostración.*  $\pi$  es continua por definición. Veamos que  $\pi$  lleva  $\mathfrak{M}$  en el disco cerrado. En efecto, ya hemos observado antes que cada punto del disco abierto  $\mathbb{D}$  está en la imagen de  $\pi$  puesto que  $\pi(\delta_\lambda) = \lambda$ . Como  $\mathfrak{M}$  es un conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{D}$ , y la imagen de un compacto por una aplicación continua es también un compacto, entonces  $\pi(\mathfrak{M})$  es compacto. Así pues, como  $\pi(\mathfrak{M})$  es un conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{D}$ , contiene todo el disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Veamos ahora que  $\pi$  es inyectiva sobre el disco. Para ello supongamos que  $|\lambda| < 1$  y  $\pi(\phi) = \phi(\text{id}) = \lambda$ , con  $\phi \in \mathfrak{M}$ . Si  $f(\lambda) = 0$ , entonces  $f(z) = (z - \lambda)g(z)$  y

$$\phi(f) = \phi(z - \lambda)\phi(f) = 0 \cdot \phi(f) = 0.$$

Si  $f(\lambda) = c$ , entonces  $f(z) = c + g(z)$ , con  $g(z) = 0$  y

$$\phi(f) = \phi(c) + \phi(g) = c + 0 = c.$$

Por lo tanto,  $\phi(f) = f(\lambda)$  para toda  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , es decir,  $\phi$  es la evaluación en  $\lambda$ ,  $\delta_\lambda$ . Esto prueba que  $\pi$  es inyectiva sobre los puntos del disco unidad  $\mathbb{D}$ .

Observamos que la topología usual en  $\mathbb{D}$  se puede describir también a través del álgebra  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . De hecho,  $\{z_j\}$  tiende a  $c$  si y solo si para toda  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ ,  $\{f(z_j)\}$  tiende a  $f(c)$ .

Si tomamos  $\Delta = \pi^{-1}(\mathbb{D}) = \{\delta_z : z \in \mathbb{D}\}$ , entonces  $\pi$  lleva  $\Delta$  homeomórficamente en el disco  $\mathbb{D}$  ya que la topología de  $\Delta$  es la topología débil definida por las aplicaciones  $\widehat{f}$  y la topología de  $\mathbb{D}$  es la topología débil definida por las aplicaciones  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ .

□

**Definición 5.4.2.** Si  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ , decimos que  $\pi^{-1}(\alpha)$  es la fibra de  $\mathfrak{M}$  sobre  $\alpha$  y lo denotamos por  $\mathfrak{M}_\alpha$ ,

$$\mathfrak{M}_\alpha = \pi^{-1}(\alpha) = \{\phi \in \mathfrak{M} : \phi(\text{id}) = \alpha\}.$$

Si  $z \in \mathbb{D}$ , la fibra de  $\mathfrak{M}$  sobre  $z$  coincide con la evaluación en  $z$ , es decir,

$$\mathfrak{M}_z = \{\delta_z\}.$$

Como  $\pi(\mathfrak{M}) = \overline{\mathbb{D}}$ , para cada  $\phi \in \mathfrak{M}$  existe un único escalar  $z \in \overline{\mathbb{D}}$  tal que  $\pi(\phi) = z$ . Entonces podemos descomponer el espectro como la unión disjunta de sus fibras, es decir,  $\mathfrak{M} = \sqcup_z \mathfrak{M}_z$ .

Observemos que la imagen de toda función constante por cualquier elemento del espectro es ella misma. Además, la identidad es una función de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  de norma 1. En efecto, como la función  $1 \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , si tomamos  $\phi \in \mathfrak{M}$  y  $f$  cualquier función en la que  $\phi$  no se anula, puesto que  $\phi$  respeta el producto, tenemos  $\phi(f) = \phi(f \cdot 1) = \phi(f) \cdot \phi(1)$ . Es decir,  $\phi(1) = 1$ .

En relación con la definición 5.4.2, hemos visto previamente que las fibras sobre los puntos del disco abierto tienen un único elemento puesto que si  $\pi(\phi) = \lambda$ , entonces  $\phi = \delta_\lambda$ . Mientras que sobre los números del borde del disco la fibra tiene muchos.

La fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  es un conjunto cerrado de  $\mathfrak{M}$  por ser la imagen inversa de un cerrado por una función continua. Intuitivamente, los elementos de  $\mathfrak{M}_\alpha$  son los homomorfismos complejos de  $\mathfrak{M}$  que se comportan como la “evaluación en  $\alpha$ ”, es decir, los homomorfismos  $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  que llevan cada  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  en algo parecido al valor límite  $f(z)$  cuando  $z$  se aproxima a  $\alpha$ . Vamos a ver esto con más detalle a continuación.

A partir de esto, es evidente que para cualquier función  $f$  que pueda extenderse con continuidad al disco cerrado, la función  $\hat{f}$  es constante en cada fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  puesto que tal  $f$  es el límite uniforme de polinomios en  $z$ . De hecho, la continuidad de  $f$  en cualquier punto de la frontera implica que  $\hat{f}$  es constante en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ .

**Teorema 5.4.3.** *Sea  $f$  una función en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y sea  $\alpha$  un punto del círculo unidad. Sea  $\{z_n\}$  una sucesión de puntos en el disco unidad  $\mathbb{D}$  que converge a  $\alpha$ , y supongamos que el límite*

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

existe. Entonces existe un homomorfismo complejo  $\phi$  en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  tal que  $\phi(f) = \zeta$ .

*Demostración.* Sea  $J = \{h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) : \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = 0\}$ . Observamos que  $J$  es un ideal de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , ya que las combinaciones lineales de elementos de  $J$  son elementos de  $J$  y el producto de  $h \in J$  por cualquier  $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  también está en  $J$ . Además, al ser un ideal propio,  $J$  está contenido en un ideal maximal  $M$ , esto es, existe un homomorfismo complejo  $\phi$  de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  del que  $M$  es el núcleo. En particular,  $\phi(h) = 0$  para todo  $h \in J$ . Las funciones  $(z - \alpha)$  y  $(f - \zeta)$  están ambas en  $J$ . Entonces,  $\phi(z) = \alpha$  y  $\phi(f) = \zeta$ . Por lo tanto  $\phi$  es el homomorfismo buscado.

□

**Teorema 5.4.4.** *Sea  $f$  una función en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y sea  $\alpha$  un punto del círculo unidad. La función  $\widehat{f}$  es constante en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  si y solo si  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ . Esto significa que existe un número complejo  $\zeta$  tal que  $\lim_{z_n \rightarrow \alpha} f(z_n) = \zeta$  para toda sucesión  $\{z_n\}$  en  $\mathbb{D}$  que converge a  $\alpha$ . Queremos mostrar que  $\widehat{f}$  vale constantemente  $\zeta$  en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , es decir,  $\phi(f) = \zeta$  para todo  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ .

Podemos suponer que  $\zeta = 0$ . Sea  $h(z) = \frac{1}{2}(1 + z\alpha^{-1})$ , así que  $h(\alpha) = 1$  y  $|h| < 1$  en cualquier otro lugar dentro del disco unidad cerrado. Como  $f$  es continua en  $\alpha$  y toma el valor 0, es fácil ver que  $(1 - h^n)f$  converge uniformemente a  $f$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si  $\phi$  es un homomorfismo complejo de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  que yace en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , es decir,  $\phi(z) = \alpha$ , entonces  $\phi(h) = 1$ . Por lo tanto,  $\phi[(1 - h^n)f] = 0$ , y, como  $\phi$  es continua,  $\phi(f) = 0$ . Así,  $\widehat{f}$  es la función idénticamente nula en  $\mathfrak{M}_\alpha$ .

Si  $\widehat{f}$  es constante en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , entonces el Teorema 5.4.3 muestra directamente que  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ .

□

## 5.5. El conjunto de valores adherentes

En esta sección analizamos para funciones  $f$  de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y números  $\alpha$  con  $|\alpha| = 1$  cómo es el conjunto formado por los límites de las sucesiones  $\{f(z_n)\}$ , cuando  $z_n$  tiende a  $\alpha$ . Es decir, el conjunto de valores adherentes de  $f$  en  $\alpha$ . Un ingrediente importante en este análisis va a ser el espectro y el modo en que la fibra de  $\alpha$  se relaciona con los homomorfismos correspondientes a los puntos del disco abierto. De hecho, probamos que el conjunto de valores adherentes coincide con la imagen de cada fibra por la transformada de Gelfand de la función.

Para ello recurrimos al Teorema de la Corona. Por otro lado, mostramos algunos ejemplos concretos de funciones internas y completamos el estudio con un ejemplo de función no holomorfa, en que el conjunto de valores adherentes posee una estructura que no se da en el caso holomorfo.

Comencemos con algunas preguntas de carácter topológico sobre el espacio de ideales maximales de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Las evaluaciones en puntos del disco llevan el disco unidad abierto en un conjunto abierto  $\Delta$  de  $\mathfrak{M}$ . El resto de homomorfismos yacen en las fibras  $\mathfrak{M}_\alpha$ . La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿son esos homomorfismos realmente límites de  $\delta_z$  en la topología de  $\mathfrak{M}$ ? En otras palabras, ¿es el disco  $\mathbb{D}$  denso en  $\mathfrak{M}$ ? A esta pregunta se le ha denominado El Problema de la Corona. A continuación vamos a dar una formulación algebraica equivalente.

**Teorema 5.5.1** (Teorema de la Corona). *El problema de la corona es equivalente a:*

*Sean  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que para cada  $z \in \mathbb{D}$  se tiene*

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta,$$

*entonces existen  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tales que  $f_1g_1 + \dots + f_ng_n = 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbb{D}$  es denso. Sean  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que para cada  $z \in \mathbb{D}$  se tiene

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta.$$

Si la función constante 1 no se pudiera escribir de la forma  $f_1g_1 + \dots + f_ng_n$ , con  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , tomemos  $\phi \in \mathfrak{M}$  no nulo tal que el ideal maximal  $\ker \phi$  contiene al ideal propio generado por  $f_1, \dots, f_n$ .

Como  $\mathbb{D}$  es denso en  $\mathfrak{M}$  con la topología débil-\*, existe una red  $\{z_\alpha\} \subset \mathbb{D}$  que tiende a  $\phi$ . En particular, para cada  $f_j$  se tiene que  $\lim_\alpha f_j(z_\alpha) = \tilde{f}_j(\phi) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Esto contradice la acotación relativa a  $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)|$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\mathbb{D}$  no es denso en  $\mathfrak{M}$ , entonces existe un elemento no nulo  $\phi_0 \in \mathfrak{M}$  que no está en la adherencia de  $\mathbb{D}$ . Por definición de la topología de  $\mathfrak{M}$ , existen funciones  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que  $\phi_0(f_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  y el abierto

$$\{\phi \in \mathfrak{M} : |\phi(f_j)| < \delta, 1 \leq j \leq n\}$$

no corta a  $\mathbb{D}$ . En particular, para cada  $z \in \mathbb{D}$  se cumple que

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta$$

y las funciones  $f_1, \dots, f_n$  están en un ideal propio de  $J \subset \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  ya que  $J \subset \ker \phi_0$ .

La afirmación de que  $f_1, \dots, f_n$  están en un ideal propio es equivalente a la afirmación de que la función constante 1 no se puede escribir de la forma  $f_1g_1 + \dots + f_ng_n = 1$ , con  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , ya que  $\phi(1) = 1$  y  $\phi(f_1g_1 + \dots + f_ng_n) = \phi(f_1)\phi(g_1) + \dots + \phi(f_n)\phi(g_n) = 0$ .  $\square$

*Observación.* El problema de la Corona, planteado en 1941 por Kakutani, se mantuvo abierto durante dos décadas. Fue resuelto afirmativamente por L. Carleson en 1962. Usaremos en breve este resultado, aunque su demostración, que incluye técnicas que han tenido gran impacto en el área desde que fueron publicadas, excede los objetivos de esta memoria.

**Definición 5.5.2.** Dados  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ , definimos el conjunto de valores adherentes de  $f$  en  $\alpha$  como

$$Cl(f, \alpha) = \{\zeta : \exists \{z_n\} \in \mathbb{D}, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \zeta\}.$$

Esto es,  $\zeta \in Cl(f, \alpha)$  si y solo si existe una sucesión  $z_n$  en  $\mathbb{D}$  que tiende a  $\alpha$  tal que  $f(z_n)$  tiende a  $\zeta$ . A cada número  $\zeta \in Cl(f, \alpha)$  se le denomina valor adherente de  $f$  en  $\alpha$ .

Si  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ , podemos escribir el conjunto de valores adherentes de  $f$  en  $\alpha$  como

$$Cl(f, \alpha) = \bigcap_{r>0} \overline{f(\mathbb{D} \cap D(\alpha, r))}. \quad (5.3)$$

De la misma manera, si nos restringimos a  $z \in \mathbb{D}$ , entonces  $Cl(f, z) = \{\delta_z(f)\}$ .

El conjunto de valores adherentes es un conjunto compacto, no vacío y conexo. Además, contiene un único punto si y solo si  $f$  es continua en  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ . Si  $f$  es holomorfa en  $\alpha$ , y no constante, entonces  $Cl(f, \alpha) = \{\delta_\alpha(f)\}$ .

Teniendo en cuenta esta definición, otro enunciado alternativo al Teorema 5.4.3 sería el siguiente:

**Teorema 5.5.3.** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ . Si  $\zeta \in Cl(f, \alpha)$ , entonces existe un homomorfismo complejo  $\phi$  en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  tal que  $\phi(f) = \zeta$ , es decir,  $\zeta \in \widehat{f}(\mathfrak{M}_\alpha)$ .*

Por lo tanto, si  $|\alpha| = 1$ , el contenido  $Cl(f, \alpha) \subset \widehat{f}(\mathfrak{M}_\alpha)$  se cumple. Veamos que también tenemos el recíproco.

**Proposición 5.5.4.** *Para todo  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = 1$  se cumple que*

$$\widehat{f}(\mathfrak{M}_\alpha) \subset Cl(f, \alpha).$$

*Demostración.* Sea  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ . Veamos que existe una sucesión  $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$  tal que

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha;$$

$$(II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \widehat{f}(\phi).$$

Como  $\Delta$  es denso en  $\mathfrak{M}$  con la topología débil-\*, se cumple que existe  $\{z_i\} \subset \mathbb{D}$  tal que  $\delta_{z_i} \rightarrow \phi$ . Es decir, para toda función  $h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  se tiene que  $h(z_i) \rightarrow \widehat{h}(\phi)$ . En particular, para la función identidad es cierto por lo que, como  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ , tenemos

$$\widehat{id}(\phi) = \pi(id) = \alpha,$$

y, por lo tanto,  $z_i = id(z_i)$  tiende a  $\widehat{id}(\phi) = \alpha$ .

Si tomamos ahora  $\{z_{i_n}\}$  una subsucesión de  $\{z_i\}$ , dicha sucesión cumplirá al mismo tiempo  $\lim z_{i_n} = \alpha$  y  $\lim f(z_{i_n}) = \widehat{f}(\phi)$ . Es decir,  $\widehat{f}(\phi) \in Cl(f, \alpha)$ .  $\square$

**Definición 5.5.5.** Se dice que una función  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tal que  $|f(z)| \leq 1$ , para todo  $z \in \mathbb{D}$ , es una función interna si  $|f^*(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto.

Los ejemplos más sencillos de funciones internas son la identidad, los giros y las funciones  $f_n(z) = z^n, n \geq 1$ . Si  $f$  es un función interna, lo es si se compone con cualquiera de las anteriores. Además, ya conocemos otros ejemplos de funciones internas tales como los automorfismos del disco unidad, los productos de Blaschke -de los que ya hemos hablado en el Capítulo 4-, o la función  $S(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), z \in \mathbb{D}$ , que introdujimos en el Ejemplo 4.1.6. Recordemos que si  $|w| = 1$  y  $w \neq 1$ , entonces  $S$  puede extenderse a  $w$  y  $|S(w)| = 1$ .

Vamos a retomar el Ejemplo 4.1.6, analizando el conjunto de los valores adherentes de  $S$  en el punto singular 1. Dicho conjunto se corresponde con el disco unidad cerrado, es decir,  $Cl(S, 1) = \overline{\mathbb{D}}$ . Para ver esto, vamos a empezar dando una interpretación geométrica a la transformación de Möbius  $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$  que

hay bajo la exponencial  $S$ .

Las transformaciones de Möbius tienen la propiedad de que llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas. Por lo que  $T$  lleva el eje real en sí mismo, mientras que cada circunferencia con centro en el eje real que pasa por 1 se aplica sobre una recta paralela al eje imaginario, como podemos ver en la figura 5.1. En concreto, si la circunferencia  $C_t$  tiene diámetro de extremos los puntos  $t$  y 1, su imagen es la recta

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \frac{t+1}{t-1} \right\}. \quad (5.4)$$

Utilizamos este hecho para observar que cada  $w \in \overline{\mathbb{D}}$  es límite de una sucesión  $\{S(z_n)\}$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ . Veamos esto último, distinguiendo tres casos:

- Si  $w = 0$ , la sucesión  $z_n = 1 - \frac{1}{n}$  converge a 1 y, como  $S(z_n) = e^{-(2n-1)}$ , la sucesión  $\{S(z_n)\}$  tiende a 0.
- Si  $0 < |w| < 1$ ,  $w = e^{a+bi}$ , con  $a < 0$ , la sucesión  $\{z_n\}$  definida por  $z_n = T^{-1}(a + (b + 2\pi n)i) \in \mathbb{D}$  tiende a 1 y como  $S(z_n) = e^{a+(b+2\pi n)i} = w$ , se cumple que  $\{S(z_n)\}$  tiende a  $w$ .
- Si  $|w| = 1$ , tomando una sucesión  $\{w_n\} \subset \mathbb{D}$  convergente a  $w$  y para cada  $n$  un valor  $z_n \in \mathbb{D}$  con  $S(z_n) = w_n$  y tal que  $|z_n - 1| < 1$ , se tiene que  $w$  es también un valor de adherencia de  $S$  en 1.

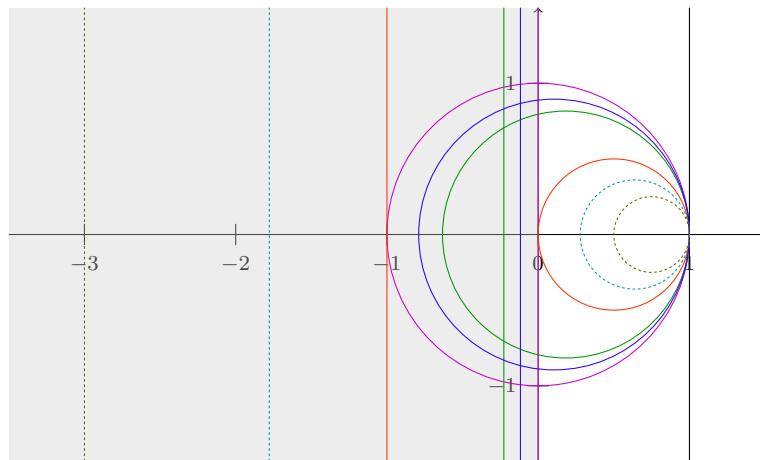


Figura 5.1: Imagen de  $C_t$  a través de  $T$ .

El siguiente resultado nos muestra que la situación que se da en este caso concreto puede generalizarse para las funciones internas. Observamos que el conjunto de valores de adherencia de una función interna en el disco abierto puede

ser, a lo sumo, el disco unidad cerrado, por el teorema de valor máximo. De hecho, esta es la situación general cuando se estudia el conjunto en los puntos singulares. Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en Garnett (2007, chap. 6).

**Teorema 5.5.6.** *Sea  $f$  una función interna en el disco abierto  $\mathbb{D}$  y sea  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$  una singularidad de  $f(z)$ . Entonces  $Cl(f, \alpha) = \overline{\mathbb{D}}$ .*

El Teorema anterior nos muestra que a pesar del Teorema de Fatou, el comportamiento en los puntos de la frontera puede ser impredecible. Por ejemplo, si consideramos un producto de Blaschke cuyos ceros sean densos en  $\partial\mathbb{D}$ , entonces todo  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$  está en las condiciones del teorema y el conjunto de valores adherentes  $Cl(B, \alpha)$  es todo el disco cerrado. Sin embargo, la función tendrá límites radiales en casi todo punto.

Así como para funciones internas se tiene la alternativa de que el conjunto de valores adherentes o bien es un solo punto o bien es todo el disco, tratando con funciones no holomorfas se pueden presentar situaciones intermedias, como puede verse en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.5.7.** Sea  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  dada por

$$h(z) = -z \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}.$$

Entonces el conjunto de valores adherentes  $Cl(h, 1)$  de  $h$  en 1 se corresponde con la circunferencia unidad  $\partial\mathbb{D}$ .

*Demostración.* El conjunto de valores adherentes de  $h$  en 1 viene dado por

$$Cl(h, 1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h(D_n)},$$

donde  $D_n = \{z \in \mathbb{D} : |z - 1| \leq \frac{1}{n}\}$ .  $Cl(h, 1)$  es un conjunto compacto, conexo y no vacío. Ahora bien,  $\lim_{x \rightarrow 1, 0 < x < 1} h(x) = -1$  y  $\lim_{\theta \rightarrow 0} h(e^{i\theta}) = 1$ .

Como  $\mu \in Cl(h, 1)$  si y solo si  $\bar{\mu} \in Cl(h, 1)$ , pues  $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ , y  $|h(z)| = |z| \rightarrow 1$  si  $z \rightarrow 1$ , concluimos que  $Cl(h, 1) = \partial\mathbb{D}$ .

Observamos que la función  $h$  no es holomorfa, aunque sí está acotada en módulo por 1 y tiene límite (radial)  $h^*(w) = 1$  en todo  $w \neq 1$  con  $|w| = 1$ . La figura 5.2 muestra el comportamiento descrito.

□

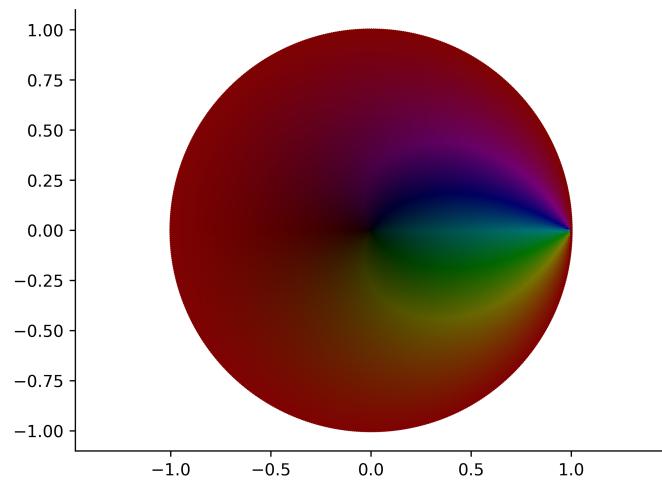


Figura 5.2: Representación de  $-z \frac{\bar{z}-1}{z-1}$ .



# Capítulo 6

## Transformaciones en el disco

Este capítulo se centra en analizar las funciones holomorfas del disco en sí mismo como transformaciones. Con esta nomenclatura queremos remarcar cómo se transforman distintos subconjuntos (discos centrados en el origen, en un punto arbitrario o tangentes al borde) cuando se aplica una función holomorfa. Para abordar el problema en discos a distancia positiva del borde usamos resultados clásicos, introducimos una distancia apropiada y la correspondiente interpretación asociada. Para estudiar las transformaciones de los horodiscos (o discos tangentes en un punto del borde) precisaremos el uso de derivadas angulares. Con las nociones de límite y derivada angular comenzamos el capítulo.

### 6.1. Derivada angular

**Definición 6.1.1.** Un sector de  $\mathbb{D}$  en un punto  $w \in \partial\mathbb{D}$  es la región entre dos líneas rectas en  $\mathbb{D}$  que parten de  $w$  y son simétricas con respecto al radio que une  $w$  con 0.

Así, si  $f$  es una función definida en  $\mathbb{D}$  y  $w \in \partial\mathbb{D}$ , entonces

$$\angle \lim_{z \rightarrow w} f(z) = L \tag{6.1}$$

significa que  $f(z) \rightarrow L$  cuando  $z \rightarrow w$  a través de cualquier sector de  $w$ . Cuando esto ocurre, decimos que  $L$  es el límite angular de  $f$  en  $w$ .

**Definición 6.1.2.** Decimos que una función  $f$  holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo tiene derivada angular en  $w \in \partial\mathbb{D}$  si para algún  $\eta \in \partial\mathbb{D}$ , el límite

$$\angle \lim_{z \rightarrow w} \frac{\eta - f(z)}{w - z}$$

existe. Se dice que dicho límite es la derivada angular de  $f$  en  $w$  y lo denotamos por  $\angle f'(w)$ .

Basándonos en estas nociones previas, la existencia de derivada angular de  $f$  en  $w$  implica que  $f$  tiene límite radial  $\eta$  en  $w$ . De hecho, también se da la posibilidad de que la derivada de  $f$  tenga límite radial en  $w$ .

Enunciamos a continuación un resultado del libro Conway (1995, capítulo 13) que nos va a permitir hacer un refinamiento del Teorema de Fatou introducido en el Capítulo 2.

**Corolario 6.1.2.1.** *Si  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tiene límite radial  $\zeta$  en  $w \in \partial\mathbb{D}$ , entonces  $f$  tiene límite angular  $\zeta$  en  $w$ .*

Por el Teorema de Fatou sabemos que toda función  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tiene límite radial en casi todo punto del borde del disco, entonces también tendrá límite angular en casi todo punto del borde.

## 6.2. Lema de Schwarz-Pick

En esta sección vamos a estudiar un resultado que surge a partir del Lema de Schwarz cuando se le aplica un cambio conforme de variable. A continuación enunciamos el Lema de Schwarz, cuya demostración, bien conocida, omitimos.

**Teorema 6.2.1** (Lema de Schwarz). *Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  una función holomorfa en el disco  $\mathbb{D}$  tal que  $f(0) = 0$ . Entonces:*

- (I)  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .
- (II) Además, si para algún  $z \neq 0$  se verifica que  $|f(z)| = |z|$  o  $|f'(0)| = 1$ , entonces existe  $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$  tal que  $f(z) = \lambda z$ .

*Observación.* El hecho de que  $|f(z)| \leq |z|$  implica que si  $r < 1$  y  $z \in D(0, r)$ , entonces  $f(z) \in D(0, r)$ . Es decir,  $f(D(0, r)) \subset D(0, r)$ .

El resto de la sección está dedicada a mostrar el resultado análogo en el caso general, cuando el origen no es un punto fijo de  $f$ . Este resultado es conocido como Lema de Schwarz-Pick.

La herramienta clave para deducir el Lema de Schwarz-Pick a partir del Lema de Schwarz es la familia de automorfismos  $\{\alpha_p : p \in \mathbb{D}\}$  dada por

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z}$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Todo automorfismo  $\alpha_p$  intercambia el origen con  $p$ . Por tanto, si  $p, q \in \mathbb{D}$ , la composición de  $\alpha_p$  y  $\alpha_q$  permite aplicar  $p$  sobre  $q$ . En particular, esto asegura que el grupo de automorfismos del disco actúa transitivamente sobre  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 6.2.2** (Lema de Schwarz-Pick). *Si  $f$  es holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo, entonces para cualquier par de puntos  $p, q \in \mathbb{D}$ , se tiene que*

$$\left| \frac{f(q) - f(p)}{1 - \overline{f(p)}f(q)} \right| \leq \left| \frac{q - p}{1 - \bar{p}q} \right|.$$

Además, se verifica la igualdad para algún par de puntos si y solo si se da la igualdad para todos los pares. Esto ocurre si y solo si  $f$  es un automorfismo del disco unidad.

*Demostración.* Observamos que si  $f(p) = 0$ , para  $p = 0$  se obtiene el Lema de Schwarz. En otro caso, sea  $b = f(p)$  y tomemos la aplicación  $\alpha_b \circ f \circ \alpha_p$ , que lleva el disco en sí mismo fijando el origen. Si aplicamos el Teorema de Schwarz a esta aplicación, evaluando en el punto  $z = \alpha_p(q)$ , y observando que el automorfismo  $\alpha_p$  es su propia inversa, tenemos la siguiente inecuación

$$|\alpha_b \circ f(q)| \leq |\alpha_p(q)|,$$

que es precisamente lo que queremos. La afirmación sobre la igualdad se sigue de la parte correspondiente del Lema de Schwarz. □

Esta generalización del Lema de Schwarz afirma que cualquier función holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo que no sea un automorfismo, decrece estrictamente la distancia pseudo-hiperbólica, que introducimos a continuación.

**Definición 6.2.3.** La distancia pseudo-hiperbólica entre dos puntos  $p, q \in \mathbb{D}$  viene dada por la siguiente expresión:

$$d(p, q) = |\alpha_p(q)| = \left| \frac{p - q}{1 - \bar{p}q} \right|.$$



Figura 6.1: Imagen de discos concéntricos por el automorfismo  $\alpha_p$ .

Esta distancia es en realidad una métrica en  $\mathbb{D}$  que induce la topología euclídea usual. En particular, la distancia del origen a cualquier otro punto del disco es la euclídea.

La figura 6.1 muestra la imagen de discos concéntricos  $D(0, r)$  mediante la función  $\alpha_p$ . Podemos observar que se trata de discos en  $\mathbb{D}$  que no tienen a  $p$  como centro, salvo cuando aplicamos el único automorfismo que, salvo giros, conserva el centro, es decir,  $\alpha_0$ .

Para poder realizar una interpretación geométrica vamos a tener que estudiar los discos asociados con la distancia pseudo-hiperbólica. Si  $p \in \mathbb{D}$  y  $0 < r < 1$ , denotamos por  $\Delta(p, r)$  al disco no euclídeo de (pseudo-) centro  $p$  y (pseudo-) radio  $r$  dado por  $\Delta(p, r) = \alpha_p(D(0, r))$ . Al ser  $\alpha_p$  autoinversa se tiene que

$$\Delta(p, r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \frac{p - z}{1 - \bar{p}z} \right| < r \right\} = \{z \in \mathbb{D} : |\alpha_p(z)| < r\}.$$

Con esta noción, el Lema de Schwarz-Pick se puede formular en los mismos términos geométricos en que interpretamos el Lema de Schwarz, referido a los discos no euclídeos  $\Delta(p, r)$ .

**Teorema 6.2.4** (Lema de Schwarz-Pick). *Toda función holomorfa  $f$  del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo lleva  $\Delta(p, r)$  en  $\Delta(f(p), r)$ .*

Observamos que si  $p = 0$ , tenemos que  $f(D(0, r)) \subset D(0, r)$ , que coincide con la interpretación geométrica del Lema de Schwarz.

### 6.3. Teorema de Julia

Con el Teorema de Julia se resuelve el equivalente al Lema de Schwarz-Pick para discos que no son interiores al disco unidad, sino tangentes en su borde. El

punto de vista geométrico que deseamos destacar del Teorema de Julia nos conduce a describir estos discos tangentes en un punto  $w$  del borde de  $\mathbb{D}$  a través de discos no euclídeos cuyos centros van aproximándose a ese punto  $w$  en la frontera del disco unidad.

La pregunta natural en este ámbito se centra en la relación que deben guardar los centros  $p_n$  y los radios  $r_n$  para que la sucesión de discos  $\{\Delta(p_n, r_n)\}$  converja (en el sentido adecuado) a un disco tangente. Observamos que cuanto más próximo esté  $r_n$  al valor 1, el disco  $\Delta(p_n, r_n)$  es mayor, y el cociente entre las sucesiones  $1 - |p_n|$  y  $1 - r_n$  determinará el tamaño del disco límite. Observando que

$$\left| \frac{z-p}{1-\bar{p}z} \right| < r \Leftrightarrow 1 - r^2 < 1 - \left| \frac{z-p}{1-\bar{p}z} \right|^2 = \frac{(1-|p|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{p}z|^2},$$

podemos describir los discos no euclídeos como

$$\Delta(p, r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : |1 - \bar{p}z|^2 < \frac{1-|p|^2}{1-r^2}(1-|z|^2) \right\}.$$

Cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = w$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|p_n|^2}{1-r_n^2} = \lambda$ , la expresión de la derecha de la desigualdad que define  $\Delta(p_n, r_n)$  tiende a  $\lambda(1-|z|^2)$ , mientras que la de la izquierda tiende a  $|1 - \bar{w}z|^2$ . Todo ello nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 6.3.1.** Llamaremos horodisco en el punto  $w$  y radio  $\lambda$  al conjunto

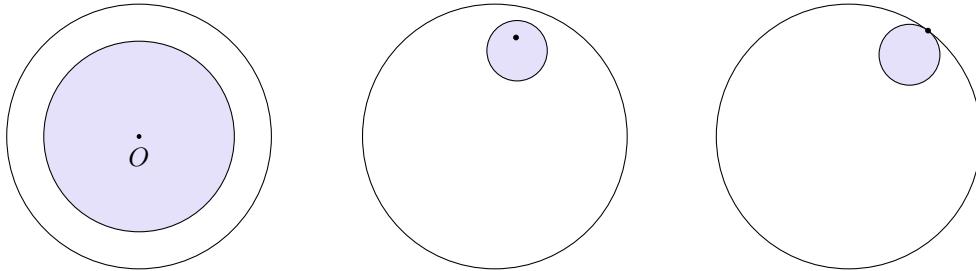
$$H(w, \lambda) = \{z \in \mathbb{D} : |1 - \bar{w}z|^2 < \lambda(1-|z|^2)\}.$$

Es fácil comprobar que este horodisco coincide con el disco euclídeo  $D(\frac{w}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda})$ . En particular,  $H(w, \lambda)$  es tangente a la frontera del disco en el punto  $w$ . Un disco así aumenta de tamaño con  $\lambda$  y ocupa el disco unidad cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . La figura 6.2 muestra la evolución de  $\Delta(p, r)$  cuando  $p$  tiende a un punto  $w$  de la frontera del disco.

El Lema que presentamos a continuación es la herramienta que se precisa para obtener el Teorema de Julia.

**Lema 6.3.2** (de Convergencia de Discos). *Sean  $w \in \partial\mathbb{D}$ ,  $\{p_n\} \subset \mathbb{D}$  y  $\{r_n\} \in (0, 1)$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = w$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|p_n|^2}{1-r_n^2} = \lambda$ . Entonces,*

$$H(w, \lambda) = \{z \in \mathbb{D} : z \in \Delta(p_n, r_n) \text{ para infinitos } n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{H(w, \lambda)}.$$

Figura 6.2: Discos no euclídeos:  $\Delta(0, r)$ ,  $\Delta(p_n, r_n)$  y  $H(w, \lambda)$ .

En este punto podemos hacer uso del Lema de Convergencia de Discos para obtener una versión del Lema de Schwarz-Pick cuando los centros de los discos no euclídeos tienden a un punto del borde del disco unidad.

**Teorema 6.3.3** (de Julia). *Si  $f$  es una función holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo no constante, y existen  $w, \mu \in \partial\mathbb{D}$  y una sucesión  $\{p_n\} \subset \mathbb{D}$  que verifican*

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = w;$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \mu;$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(p_n)|}{1 - |p_n|} = \delta < \infty.$

*Entonces se cumple que*

- (I)  $\delta > 0;$
- (II)  $f(H(w, \lambda)) \subseteq H(\mu, \lambda\delta)$ , para todo  $\lambda > 0$ ;
- (III)  $\angle \lim_{z \rightarrow w} f(z) = \mu.$

*Además, si se da la igualdad en (II) para algún  $\lambda > 0$ , entonces  $f$  es un automorfismo del disco.*

*Demostración.* (I) Cuando  $f(0) = 0$ , el Lema de Schwarz prueba que  $|f(z)| \leq |z|$  y así  $\frac{1 - |f(p_n)|}{1 - |p_n|} \geq 1$ , de donde  $\delta \geq 1$ . En el caso general, puesto que

$$d(f(p), f(0)) \leq d(p, 0) = |p|,$$

para todo  $p \in \mathbb{D}$ . Se deduce fácilmente que

$$\frac{|1 - \overline{f(p)}f(0)|^2}{1 - |f(0)|^2} \leq \frac{1 - |f(p)|^2}{1 - |p|^2}.$$

Por la desigualdad triangular, tenemos

$$\frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} \leq \frac{|1 - \overline{f(p)}f(0)|^2}{1 - |f(0)|^2}$$

Combinando las dos desigualdades y particularizando en  $p_n$  se tiene

$$\frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} \leq \frac{1 - |f(p_n)|^2}{1 - |p_n|^2} \rightarrow \delta,$$

de donde se deduce que  $\delta \geq \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} > 0$ .

(II) La demostración se basa en el Lema de convergencia de discos. Fijemos  $0 < \lambda < \infty$ . Podemos suponer que  $1 - |p_n| < \lambda$ , para todo  $n$  (si  $\lambda \geq 1$  es evidente, mientras que si  $\lambda < 1$  se tiene también puesto que  $|p_n| \rightarrow 1^-$ , excluyendo una cantidad finita de términos de  $\{p_n\}$ ). Por lo que si tomamos una sucesión cuyo término general es

$$r_n = 1 - \frac{1 - |p_n|}{\lambda},$$

estará dentro del intervalo abierto  $(0, 1)$ ,  $r_n \rightarrow 1$ , y la sucesión

$$\left\{ \frac{1 - |p_n|}{1 - r_n} \right\}$$

será constante con límite  $\lambda$ , para todo  $n$ . Así que la sucesión de discos no euclídeos  $\{\Delta(p_n, r_n)\}$  satisface las hipótesis del Lema de Convergencia de Discos.

Por la hipótesis (c), tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(p_n)|}{1 - r_n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(p_n)|}{1 - |p_n|} = \lambda \delta,$$

y los discos  $\Delta(f(p_n), r_n)$  también están bajo las hipótesis del Lema de Convergencia de Discos, para todo  $n$ .

El lema asegura que si  $z \in f(H(w, \lambda))$ , entonces  $z \in f(\Delta(p_n, r_n))$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$  y, por el Lema de Schwarz-Pick,  $z \in \Delta(f(p_n), r_n)$  para infinitos  $n \in \mathbb{N}$ . De nuevo el Lema de Convergencia de Discos garantiza que  $z \in \overline{H(\mu, \lambda \delta)}$ . Como  $f$  no es constante,  $f$  es abierta así que se tiene  $f(H(w, \lambda)) \subset H(\mu, \lambda \delta)$ .

(III) Finalmente, debemos probar que todo entorno usual de  $\mu$  contiene la imagen por  $f$  de un entorno angular de  $w$ . Supongamos que tenemos un sector

$S$  con vértice en  $w$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\lambda > 0$  tal que  $H(\mu, \lambda\delta) \subset D(\mu, \varepsilon)$ . Podemos elegir  $\rho > 0$  tal que  $S \cap D(w, \rho) \subset H(\mu, \lambda)$ . Por la parte (ii), se tiene que  $f(H(w, \lambda)) \subset H(\mu, \lambda\delta)$ , lo que completa la prueba.

□

Veamos con un par de ejemplos qué tipo de condición impone (c) sobre el modo en que la imagen de  $f$  se acerca al borde del disco. Vamos a observar que en el ejemplo 6.3.4 los cocientes valen siempre lo mismo, mientras que en el ejemplo 6.3.5 la imagen se aparta del borde cerca del punto 1. Esto es debido a que en el segundo caso se trata de funciones donde el cociente (c) no está acotado. Esto lleva asociado que exista o no la derivada angular de la función en el límite angular de la función.

**Ejemplo 6.3.4.** La función

$$f(z) = \frac{1+z}{2}$$

tiene cocientes tipo (c) acotados para toda sucesión  $\{p_n\}$  que converja a 1. De hecho, si cada  $p_n > 0$  los cocientes valen exactamente  $\frac{1}{2}$ , que es la derivada angular de  $f$  en el punto 1.

**Ejemplo 6.3.5.** Tomemos la siguiente función

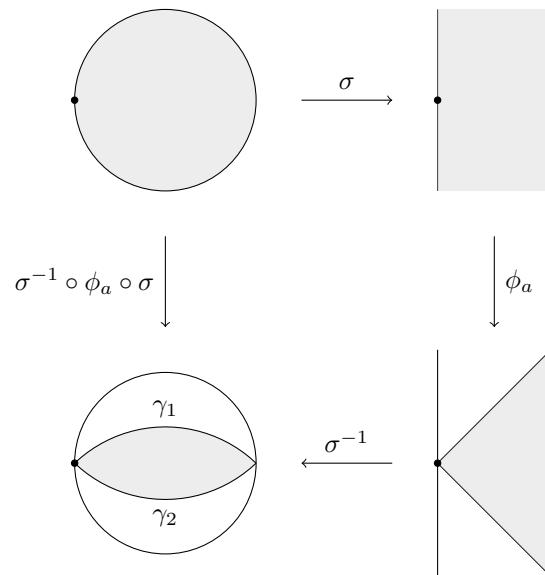
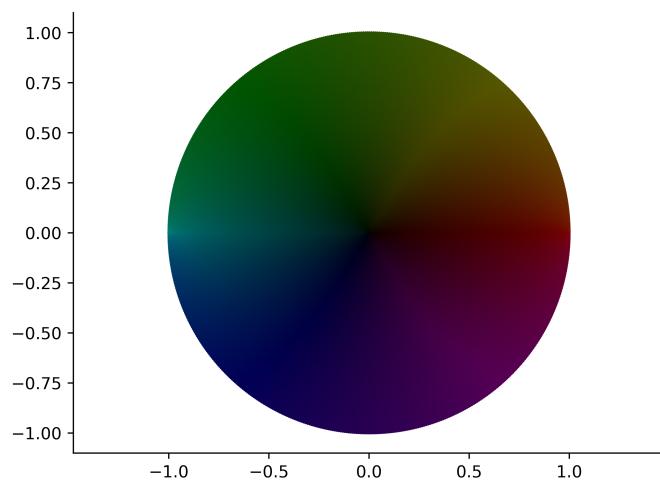
$$g = \sigma^{-1} \circ \phi_a \circ \sigma,$$

donde  $\sigma$  es la transformación de Möbius  $\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$  (que lleva 1,  $i$  y  $-1$  en  $\infty$ ,  $i$  y 0, respectivamente, y aplica el disco unidad en el semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ) y  $\phi_a(z) = z^a$ ,  $a \in (0, 1)$ .

La función  $g$  tiene límite 1 en el punto 1 y es tal que su imagen se aparta del borde de  $\mathbb{D}$  cerca del punto 1, es decir, los cocientes de c no están acotados.

La figura 6.3 muestra cómo se transforma el disco mediante la aplicación  $g$ . Dado que tanto  $\sigma$  como  $\sigma^{-1}$  son transformaciones conformes y, como hemos estudiado anteriormente, transforman circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, la imagen de  $g$  debe ser la región limitada por los arcos de circunferencia  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , que forman con el eje real un ángulo de  $\frac{a\pi}{2}$  y  $-\frac{a\pi}{2}$ , respectivamente.

La figura 6.4 muestra, a su vez, la representación de la función  $g$  mediante la técnica del coloreado. Estas funciones se suelen llamar *lenticulares* ya que la imagen del disco es como una lente. Podemos observar todos los colores, pero bastante oscuros, salvo en los puntos 1 y  $-1$  que tienen la intensidad usual.

Figura 6.3: Transformación del disco mediante la función  $g$ .Figura 6.4: Representación de la función  $g = \sigma^{-1} \circ \phi_a \circ \sigma$ , con  $a = \frac{1}{2}$ .

En 1929, Carathéodory, probó que bajo las hipótesis del Teorema de Julia, la derivada también admite límite radial en dicho punto del borde. A continuación enunciamos sin demostración el teorema de Julia-Carathéodory.

**Teorema 6.3.6** (de Julia-Carathéodory). *Sea  $f$  es una función holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo y sea  $w \in \partial\mathbb{D}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I)  $\liminf_{z \rightarrow w} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} = \delta < \infty$ ;
- (II)  $\lim_{z \rightarrow w} \frac{\eta - f(z)}{w - z}$  existe para algún  $\eta \in \partial\mathbb{D}$ ;
- (III)  $\angle \lim_{z \rightarrow w} f'(z)$  existe y  $\angle \lim_{z \rightarrow w} f(z) = \eta \in \partial\mathbb{D}$ .

Además,  $\delta > 0$  en (I); los puntos del borde  $w$  y  $\eta$  de (II) y (III) son los mismos; y  $\angle \lim_{z \rightarrow w} f'(z) = \angle f'(w) = w\bar{\eta}\delta$ .

Después de las rotaciones preliminares apropiadas, se puede suponer que  $w = \eta$ . Por lo tanto, estos resultados muestran que si  $f$  tiene una derivada angular en algún punto del borde  $w$  tal que  $\angle \lim_{z \rightarrow w} f(z) = w$ , y  $\angle f'(w) < 1$ , entonces  $f$  no puede tener un punto fijo en  $\mathbb{D}$ .

Ahora supongamos únicamente que  $f$  no tiene ningún punto fijo en  $\mathbb{D}$ . La pregunta que nos hacemos es: ¿existe la derivada angular en un cierto punto del borde? La respuesta afirmativa fue dada por J. Wolff en 1926.

A continuación presentamos el Teorema de Wolff que garantiza que toda función  $f$  del disco en sí mismo sin puntos fijos lleva asociado un punto  $w$  con  $|w| = 1$  tal que todo disco tangente en  $w$  al borde del disco se aplica sobre sí mismo por  $f$ .

**Teorema 6.3.7** (de Wolff). *Si  $f$  es una función holomorfa del disco  $\mathbb{D}$  en sí mismo que no tiene puntos fijos, existe un único  $w \in \partial\mathbb{D}$  tal que*

- a)  $\lim_{r \rightarrow 1} f(rw) = w$  ( $w$  es un punto fijo en el borde).
- b) Para todo horodisco  $H(w, \lambda)$  se tiene  $f(H(w, \lambda)) \subset H(w, \lambda)$ .

# Apéndice A

## Notación

$\mathcal{H}(U)$ : espacio de las funciones holomorfas en  $U$ .

$\mathcal{H}^\infty(U)$ : espacio de las funciones holomorfas y acotadas en  $U$ .

$\mathbb{D}$ : disco unidad.

$\overline{\mathbb{D}}$ : disco unidad cerrado.

$\partial\mathbb{D}$ : borde del disco unidad.

$L^\infty(U)$ : espacio de funciones medibles en  $U$ , esencialmente acotadas.

$\mathfrak{M}(B)$ : espacio de los homomorfismos complejos del álgebra  $B$ .



## Apéndice B

# Código de las aplicaciones informáticas

### B.1. plotter.py

```
1 import cmath
2 import math
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import colorsys
5 from misc import frange
6
7
8 class Plotter:
9     def __init__(self, abstract_function, label=''):
10         self.__abstract_function = abstract_function
11         self.label = label
12
13     def plot(self, file_name="disco.png", show=True,
14             radio=1):
15         step_distance = 0.01 * radio
16         x = []
17         y = []
18         rgb = []
19         for r in frange(0, radio + step_distance,
20                         step_distance):
21             delta_theta = self.__delta(r,
22                                       step_distance)
23             for theta in frange(-math.pi, math.pi,
24                                 delta_theta):
```

```
21     try:
22         a = r * cmath.e ** (theta * 1j)
23         x.append(a.real)
24         y.append(a.imag)
25         fa = self.__abstract_function.
26             eval(r, theta)
27         rgb.append(self.__complex_color(
28             fa))
29     except (ArithmetricError, ValueError):
30         rgb.append((1, 1, 1))
31     self.__plot(x, y, rgb, self.label, file_name,
32                 show)
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
```

```
try:
    a = r * cmath.e ** (theta * 1j)
    x.append(a.real)
    y.append(a.imag)
    fa = self.__abstract_function.
        eval(r, theta)
    rgb.append(self.__complex_color(
        fa))
except (ArithmetricError, ValueError):
    rgb.append((1, 1, 1))
self.__plot(x, y, rgb, self.label, file_name,
            show)

@staticmethod
def __delta(r, step_distance):
    if r == 0:
        return 2 * cmath.pi
    else:
        steps = (2 * cmath.pi * r) /
            step_distance
        return (2 * cmath.pi) / steps

@staticmethod
def __brightness(x):
    if x <= 1:
        return math.sqrt(x) / 2
    else:
        return 1 - 8 / ((x + 3) ** 2)

@staticmethod
def __complex_color(z):
    if z == 0:
        return colorsys.hsv_to_rgb(0, 1, 0)
    else:
        b = Plotter.__brightness(abs(z))
        h = Plotter.__decimal_part(cmath.phase(z)
            / (2 * cmath.pi))
        s = Plotter.__truncate((1 - b ** 4) **
            0.25)
        v = Plotter.__truncate(b)
        return colorsys.hsv_to_rgb(h, s, v)
```

```
57     @staticmethod
58     def __truncate(x):
59         if x < 0:
60             return 0
61         elif x < 1:
62             return x
63         else:
64             return 1
65
66     @staticmethod
67     def __decimal_part(x):
68         return x - math.floor(x)
69
70     @staticmethod
71     def __plot(x, y, rgb, label, file_name, show):
72         fig = plt.figure()
73         ax = fig.add_subplot(1, 1, 1)
74
75         # Eliminate upper and right axes
76         ax.spines['right'].set_color('none')
77         ax.spines['top'].set_color('none')
78
79         # Show ticks in the left and lower axes only
80         ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
81         ax.yaxis.set_ticks_position('left')
82
83         ax.axis('equal')
84
85         plt.title(label)
86         plt.scatter(x, y, c=rgb, s=0.5)
87         plt.savefig(file_name, dpi=500)
88         if show:
89             plt.show()
```

## B.2. function.py

```
1 import cmath
2
3
4 class AbstractFunction:
5     def __init__(self, f):
6         self.f = f
```

```
7
8
9 class BoundaryFunction(AbstractFunction):
10    def __init__(self, f, steps=300):
11        AbstractFunction.__init__(self, f)
12        self.__steps = steps
13
14    def eval(self, r, theta):
15        if r < 1:
16            return self.__integral(-cmath.pi, cmath.
17                                   pi, self.__steps, r, theta) / (2 *
18                                   cmath.pi)
19        else:
20            return self.f(theta)
21
22    def __integral(self, limit_inf, limit_sup, n, r,
23                  theta):
24        h = (limit_sup - limit_inf) / n
25        sum = 0
26        for i in range(0, n + 1):
27            aux = self.__poisson_integral(r, theta,
28                                           limit_inf + i * h)
29            if (i == 0) or (i == n):
30                sum = sum + aux
31            else:
32                sum = sum + 2 * aux
33        return sum * h / 2
34
35    @staticmethod
36    def __poisson_kernel(r, theta, t):
37        return (1 - r ** 2) / (1 - 2 * r * cmath.cos(
38                               theta - t) + r ** 2)
39
40    def __poisson_integral(self, r, theta, t):
41        return self.f(t) * self.__poisson_kernel(r,
42                                              theta, t)
43
44
45 class ComplexFunction(AbstractFunction):
46    def __init__(self, f):
47        AbstractFunction.__init__(self, f)
```

```
43     def eval(self, r, theta):
44         a = r * cmath.e ** (theta * 1j)
45         return self.f(a)
46
47
48 class DifferenceFunction(AbstractFunction):
49     def __init__(self, f, g):
50         self.__f = f
51         self.__g = g
52
53     def eval(self, r, theta):
54         return self.__f.eval(r, theta) - self.__g.
55             eval(r, theta)
```

### B.3. main.py

```
1 import cmath
2 import time
3
4 from function import BoundaryFunction
5 from function import ComplexFunction
6 from function import DifferenceFunction
7 from plotter import Plotter
8
9
10 start_time = time.time()
11
12 #plotter = Plotter(DifferenceFunction(
13 #    BoundaryFunction(lambda t: cmath.cos(t) ** 2 -
14 #        cmath.sin(t) ** 2),
15 #    ComplexFunction(lambda t: (t ** 2
16 #        .real)))
17 #plotter.plot('diff.png', show=False)
18
19 #plotter = Plotter(DifferenceFunction(
20 #    BoundaryFunction(lambda t: cmath.cos(t) ** 2 -
21 #        cmath.sin(t) ** 2),
22 #    ComplexFunction(lambda t: t.real
23 #        ** 2 - t.imag ** 2))) #x^2-y^2
24 #plotter.plot('diff5.png', show=True)
25
26 #plotter = Plotter(DifferenceFunction(
```

```
BoundaryFunction(lambda t: cmath.cos(t) ** 2 -
    cmath.sin(t) ** 2 + (2 * cmath.cos(t) * cmath.sin(
    t)) * 1j),
21 #                 ComplexFunction(lambda t: t ** 2))
22 )
#plotter.plot('diff2.png', show=False)
23
24 #plotter = Plotter(DifferenceFunction(
25     BoundaryFunction(lambda t: cmath.cos(t) + 1j *
26         cmath.sin(t)),
27 #                 ComplexFunction(lambda t: t)))
28 #plotter.plot('diff4.png', show=False)
29
30 #plotter = Plotter(DifferenceFunction(
31     BoundaryFunction(lambda t: cmath.e ** (8 * cmath.
32         cos(t) + 8j * cmath.sin(t))),
33 #                 ComplexFunction(lambda t: cmath.e
34         ** (8 * t))))
35 #plotter.plot('diff3.png', show=False)
36
37
38
39
40 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.
41     cos(t / 2)))
42 #plotter.plot('cos(t:2)', show=False)
43
44 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.
45     sin(3 * t)))
46 #plotter.plot('sen(3t)', show=False)
47
48 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.
49     cos(3 * t) + cmath.sin(3 * t)))
50 #plotter.plot('cos(3t)+sen(3t).png', show=False)
51
52 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: 10 *
53     cmath.cos(t) + 10j * cmath.sin(t)))
54 #plotter.plot('10cos(t)+10isen(t).png', show=False)
55
56 plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: (5 *
57     cmath.cos(t) + 5j * cmath.sin(t)) ** 3))
58 plotter.plot('(5cos(t)+5isen(t))^3.png', show=False)
```

```
49 plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.
    cos(t) ** 2 - cmath.sin(t) ** 2))
50 plotter.plot('cos^2(t)-sen^2(t).png', show=False)
51
52 plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.e
    ** (10 * cmath.cos(t) + 10j * cmath.sin(t))))
53 plotter.plot('e^(10cos(t)+10isen(t)).png', show=False)
54
55 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: cmath.
    cos(3 * t + 1j) + cmath.sin(3 * t + 1j)))
56 #plotter.plot('cos(3t+i)+sen(3t+i).png', show=False)
57
58 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: 1 / (1
    + t ** 2)))
59 #plotter.plot('1:(1+t^2).png', show=False)
60
61 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: t ** 2,
    'f(t) = t^2'))
62 #plotter.plot('t^2.png', show=False)
63
64 #plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: t ** 3,
    'f(t) = t^3'))
65 #plotter.plot('t^3.png', show=False)
66
67 plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: 0 if -
    cmath.pi < t < 0 else 100))
68 plotter.plot('atrozos.png', show=False)
69
70 plotter = Plotter(BoundaryFunction(lambda t: 20j if -
    cmath.pi < t < 0 else -20 if 0 <= t < cmath.pi / 2
    else 20))
71 plotter.plot('atrozos(2).png', show=False)
72
73
74 sigma = lambda z: (1+z)/(1-z)
75 sigmainv = lambda z: (z-1)/(z+1)
76 phi = lambda z, a: z ** a
77 g = lambda z, a: sigmainv(phi(sigma(z), a))
78
79 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda z: g(z, a
    =0.5)))
```

```
80 plotter.plot('lente.png', show=False)
81
82 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: 1/(1-t)))
83 plotter.plot('1:(1-z).png', show=False)
84
85 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.log
86     (1/(1-t))))
87 plotter.plot('log(1:(1-z)).png', show=False)
88 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.
89 #    cos(t)))
90 #plotter.plot('cos(z).png', show=False, radio=4)
91 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.sin
92     (t)))
93 plotter.plot('sen(z).png', show=False, radio=4)
94 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.
95 #    sin(1/t)))
96 #plotter.plot('sen(1:z).png', show=False)
97 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.
98 #    tan(t)))
99 #plotter.plot('tan(z).png', show=False, radio=4)
100 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.
101 #    sqrt(t)))
102 #plotter.plot('sqrt(z).png', show=False, radio=4)
103 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.
104 #    log(t)))
105 #plotter.plot('log(z).png', show=False, radio=4)
106 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.e
107     ** t))
108 plotter.plot('e^z.png', show=False, radio=10)
109 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.e
110 #    ** (1 / t)))
111 #plotter.plot('e^(1:z)2.png', show=False)
112 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.e
```

```
    ** (-t ** 2)))
113 #plotter.plot('e^(-z^2).png', show=False, radio=5)
114
115 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.e
    ** ((t + 1) / (t - 1))))
116 plotter.plot('e^((z+1):(z-1)).png', show=False, radio
    =1)
117
118 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: cmath.e
    ** cmath.sin(t)))
119 #plotter.plot('e^(sen(z)).png', show=False, radio=5)
120
121 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: 1/(t **
    3 - 1)))
122 #plotter.plot('1:(z^3 - 1).png', show=False, radio=2)
123
124 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: t))
125 plotter.plot('z.png', show=False, radio=10)
126
127 #plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: t ** 2))
128 #plotter.plot('z^2.png', show=False, radio=1)
129
130 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: t ** 3))
131 plotter.plot('z^3.png', show=False, radio=5)
132
133 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: t ** 8 -
    2 * t ** 7 + 2 * t ** 6 - 4 * t ** 5 + 2 * t ** 4
    - 2 * t ** 3 - 5 * t ** 2 + 4 * t - 4))
134 plotter.plot('z^8-2z^7+2z^6-4z^5+2z^4-2z^3-5z^2+4z-4.
    png', show=False, radio=3)
135
136 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: -t * (t.
    conjugate() - 1) / (t - 1)))
137 plotter.plot('h(z).png', show=False, radio=1)
138
139 plotter = Plotter(ComplexFunction(lambda t: 1 / t))
140 plotter.plot('1:z.png', show=False, radio=1)
141
142 print("--- %s seconds ---" % (time.time() -
    start_time))
```

## B.4. misc.py

```
1 def frange(start, end, step):
2     while start < end:
3         yield start
4         start = start + step
```

# Bibliografía

- ANSEMIL, J. M. M. y PONTE, S. *Análisis de Funciones de Variable Compleja*. Departamento de Análisis Matemático, UCM, 2015.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978. ISBN 0387903283.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable II*. Springer, 1995. ISBN 0387944605.
- DETTMAN, J. W. *Applied Complex Variables*. Dover Publications, 1984. ISBN 048664670X.
- GARNETT, J. *Bounded Analytic Functions*. Springer-Verlag New York, 2007. ISBN 9780387336213.
- GARNETT, J. B. y MARSHALL, D. E. *Harmonic measure*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521720605.
- HOFFMAN, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Dover Publications, 1988. ISBN 048665785X.
- KODAIRA, K. *Complex Analysis*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511804045.
- LANG, S. *Complex Analysis*. Springer, 1999. ISBN 0387985921.
- LIN, I.-H. *Classical Complex Analysis: A Geometric Approach (Volume 2)*. World Scientific, 2010. ISBN 9814271292.
- MORTINI, R. The mapping properties of some non-holomorphic functions on the unit disk. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, vol. 21(1), páginas 117–125, 2014.
- NEEDHAM, T. The geometry of harmonic functions. *Mathematics Magazine*, vol. 67(2), páginas 92–108, 1994.

NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997. ISBN 0198534477.

PRIETO, A. *Vuelta a Algunos Temas Clásicos de Análisis Complejo*. Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales, UPM, 1999.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.

SHAPIRO, J. H. *Composition Operators and Classical Function Theory*. Springer-Verlag, 1993. ISBN 978-0-387-94067-0.

VELLEMAN, D. J. The fundamental theorem of algebra: A visual approach. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 37(4), páginas 12–21, 2015. ISSN 1866-7414.

