

Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Celia de Frutos Palacios

26 de marzo de 2018

Capítulo 1

Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

1.1. Integral de Poisson y Teorema de Fatou

1.1.1. La Integral de Poisson

Definición 1.1.1. Se llama núcleo de Poisson a la función P definida por

$$P : (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \quad (1.1)$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables r y t o como una familia de funciones de t que dependen de r .

Dados $z = re^{i\theta}$, con $r \in [0, 1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \quad (1.2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2 \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (re^{it})^n \right] = \operatorname{Re} \left[1 + 2 \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{(1 + re^{it})(1 - re^{it})}{|1 - re^{it}|^2} \right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}.$$

Propiedades del núcleo de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1, \forall r \in [0, 1). \quad (1.3)$$

$$P_r(t) > 0, \forall r \in [0, 1), t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

$$P_r(t) = P_r(-t), \forall r \in [0, 1), t \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

$$P_r(t) < P_r(\delta), 0 < \delta < |t| \leq \pi \quad (1.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\delta) = 0, \forall \delta \in (0, \pi] \quad (1.7)$$

Definición 1.1.2. Se llama integral de Poisson de una función $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ a la función F dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como $F = P[f]$.

Además si f lleva $\partial\mathbb{D}$ en los reales, 1.2 nos muestra que

$$P[f] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t) dt \right].$$

1.1.2. Teorema de Fatou

Teorema 1.1.1 (Teorema de Fatou). *Para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, existe una función $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ definida en casi todo punto tal que*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \quad (1.8)$$

Se tiene la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^\|_\infty$. Para todo $z \in U$, la fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.9)$$

se satisface, donde γ es el círculo unidad positivamente orientado: $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Las funciones $f^ \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \dots \quad (1.10)$$

Demostración. La existencia de f^* se sigue de las observaciones anteriores.

Por 1.8, tenemos que $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Si $z \in U$ y $|z| < r < 1$, tomemos $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} dt$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión tal que $r_n \rightarrow 1$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{it}} dt \quad (1.11)$$

Por lo que ya hemos probado 1.9. Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) \xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \dots$$

Pasando al límite tenemos que f^* cumple 1.10. Además, podemos convertir 1.11 en una integral de Poisson, si $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt \end{aligned}$$

De esto concluimos que $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$, así que ambas normas coinciden. \square

1.2. Teorema de Carathéodory

Definición 1.2.1. Aplicación conforme Sean U y $V \subset \mathbb{C}^n$. Una aplicación $f : U \rightarrow V$ se llama conforme en un punto $u \in U$ si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por u .

Proposición 1.2.0.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$. Una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme en U si (y solo si) $f \in \mathcal{H}(U)$ y $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$.

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en U y $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ una curva simple y sea $z = z(t) = x(t) + iy(t) = \gamma(t)$ la ecuación paramétrica de γ . Consideremos $w = (f \circ \gamma)(t)$ holomorfa en U .

Ahora por la regla de la cadena $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$. Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0)$$

$f(z)$ rota el vector tangente a $\gamma(t_0) = z_0$ por el mismo ángulo ($\arg f'(z_0)$), independientemente del camino γ .

Si nos fijamos en el módulo, obtenemos un resultado similar,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Así, $f(z)$ cambia el módulo de la distancia entre los puntos por el mismo factor, independientemente de la dirección en la que nos aproximemos a z_0 .

Podemos escribir

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$$

Entonces

Entonces

$$\arg(w - w_0) = \arg\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) + \arg(z - z_0)$$

Como $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$, tomando límites tenemos

$$\phi = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) = \arg f'(z_0) + \theta$$

La aplicación f ha rotado el vector tangente a z_0 un ángulo dado por $\arg f'(z_0)$. Sean dos curvas que pasan por z_0 con ángulos θ_1 y θ_2 con respecto al eje x . Entonces el ángulo entre sus imágenes en w_0 es

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 + \arg f'(z_0) - \theta_1 - \arg f'(z_0) = \theta_2 - \theta_1$$

Por lo tanto, f preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por z , $\forall z \in U$.

□

Teorema 1.2.1 (Teorema de Carathéodory). *Sea φ una aplicación conforme del disco unidad \mathbb{D} en un dominio de Jordan Ω . Entonces φ tiene una extensión continua al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y la extensión es inyectiva de $\overline{\mathbb{D}}$ en Ω .*

Demostración. Vamos a suponer que Ω está acotado. Fijemos $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Primero vamos a probar que φ tiene una extensión continua en ζ . Sea $0 < \delta < 1$,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$. Entonces $\varphi(\gamma_\delta)$ es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| ds$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi \delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 ds$$

entonces para $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int \int_{\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho)} |\varphi'(z)|^2 dx dy = \pi \text{Area}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty$$

Entonces, existe una sucesión $\{\delta_n\} \downarrow 0$ tal que $L(\delta_n) \rightarrow 0$. Cuando $L(\delta_n) < \infty$, la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ tiene extremos $\alpha_n, \beta_n \in \bar{\Omega}$ y ambos puntos deben estar en $\Gamma = \partial\Omega$. De hecho, si $\alpha_n \in \Omega$, entonces algún punto cerca de α_n tiene dos preimágenes distintas en \mathbb{D} y esto es imposible pues φ es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

Sea σ_n el subarco cerrado de Γ que tiene extremos α_n y β_n y con un diámetro menor. Entonces 1.12 implica que $\text{diam}(\sigma_n) \rightarrow 0$ porque Γ es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan, $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla U_n es acotada. Entonces $U_n \subset \Omega$ ya que $\mathbb{C}^* \setminus \bar{\Omega}$ es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \rightarrow 0, \text{ concluimos que } \text{diam}(U_n) \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Tomamos $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$. Sabemos que para n suficientemente grande, $\varphi(D_n) = U_n$. Si no, por conexión tendríamos que $\varphi(\mathbb{D} \setminus \bar{D}_n) = U_n$ y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contradice con 1.13. Entonces $\text{diam}(\varphi(D_n)) \rightarrow 0$ y $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$ es un solo punto pues $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$. Esto significa que φ tiene una extensión continua en $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$. La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en $\bar{\mathbb{D}}$.

Denotemos ahora por φ a la extensión $\varphi : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\Omega}$. Como $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$, φ lleva $\bar{\mathbb{D}}$ en $\bar{\Omega}$. Para probar que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$. El argumento utilizado para mostrar que $\alpha_n \in \Gamma$, también prueba que $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$, así que podemos suponer que $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, 2$. La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio $W \subset \Omega$, luego $\varphi^{-1}(W)$ es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\})$$

Pero como $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y φ es constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$, se tiene que φ es constante y esta contradicción prueba que $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$. \square

Teorema 1.2.2. *Sea C un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable con interior D . Sea $f \in \mathcal{H}(C \cup D)$ una aplicación inyectiva en C . Entonces f es holomorfa e inyectiva en D .*

Demostración. La aplicación $w = f(z)$ lleva C en un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable C' . Sea w_0 un punto arbitrario que no esté en C' . Entonces,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si w_0 está fuera de C' y es ± 1 si w_0 está dentro de C' . Sin embargo, n no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de $f(z) - w_0$ dentro de C . Entonces, $n = 1$ si w_0 está dentro de C' .

Esto prueba que $f(z) = w_0$ tiene una sola solución si w_0 está dentro de C' , que $f(z)$ es holomorfa e inyectiva en D y lleva D en D' (el interior de C') y que la dirección positiva de C' se corresponde con la dirección positiva de C . \square

Apéndice A

Notación

$\mathcal{H}(U)$: holomorfa en U

$\mathcal{H}^\infty(U)$: holomorfa y acotada en U

\mathbb{D} : disco unidad

$\overline{\mathbb{D}}$: disco unidad cerrado

$\partial\mathbb{D}$: borde del disco unidad

$L^\infty(U)$:

