

---

# Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

---



## TRABAJO DE FIN DE GRADO

Celia de Frutos Palacios

Universidad Complutense de Madrid

Curso 2017-2018

Documento maquetado con T<sub>E</sub>X<sub>S</sub> v.1.0.

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

# Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

*Memoria que presenta para optar al título de Graduada en Ingeniería  
Informática y Matemáticas*

**Celia de Frutos Palacios**

*Dirigido por la Doctora*

**Ángeles Prieto Yerro**

**Universidad Complutense de Madrid**

**Curso 2017-2018**

Copyright © Celia de Frutos Palacios

Este trabajo puede encontrarse en <https://github.com/Celia95/TFG>

*A mis padres  
y  
a mi hermana*



# Agradecimientos

*A todos los que la presente vieron y  
entendieron.*

Inicio de las Leyes Orgánicas. Juan Carlos I

Groucho Marx decía que encontraba a la televisión muy educativa porque cada vez que alguien la encendía, él se iba a otra habitación a leer un libro. Utilizando un esquema similar, nosotros queremos agradecer al Word de Microsoft el habernos forzado a utilizar  $\text{\LaTeX}$ . Cualquiera que haya intentado escribir un documento de más de 150 páginas con esta aplicación entenderá a qué nos referimos. Y lo decimos porque nuestra andadura con  $\text{\LaTeX}$  comenzó, precisamente, después de escribir un documento de algo más de 200 páginas. Una vez terminado decidimos que nunca más pasaríamos por ahí. Y entonces caímos en  $\text{\LaTeX}$ .

Es muy posible que hubiéramos llegado al mismo sitio de todas formas, ya que en el mundo académico a la hora de escribir artículos y contribuciones a congresos lo más extendido es  $\text{\LaTeX}$ . Sin embargo, también es cierto que cuando intentas escribir un documento grande en  $\text{\LaTeX}$  por tu cuenta y riesgo sin un enlace del tipo “*Author instructions*”, se hace cuesta arriba, pues uno no sabe por donde empezar.

Y ahí es donde debemos agradecer tanto a Pablo Gervás como a Miguel Palomino su ayuda. El primero nos ofreció el código fuente de una programación docente que había hecho unos años atrás y que nos sirvió de inspiración (por ejemplo, el fichero `guionado.tex` de  $\text{\TeX}$ IS tiene una estructura casi exacta a la suya e incluso puede que el nombre sea el mismo). El segundo nos dejó husmear en el código fuente de su propia tesis donde, además de otras cosas más interesantes pero menos curiosas, descubrimos que aún hay gente que escribe los acentos españoles con el `\'{\i}`.

No podemos tampoco olvidar a los numerosos autores de los libros y tutoriales de  $\text{\LaTeX}$  que no sólo permiten descargar esos manuales sin coste adicional, sino que también dejan disponible el código fuente. Estamos pensando en Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna y Elisabeth Schlegl, autores del famoso “The Not So Short Introduction to  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ ” y en Tomás Bautista, autor de la traducción al español. De ellos es, entre otras muchas cosas, el entorno `example` utilizado en algunos momentos en este manual.

También estamos en deuda con Joaquín Ataz López, autor del libro “Creación de ficheros  $\text{\LaTeX}$  con GNU Emacs”. Gracias a él dejamos de lado a WinEdt y a Kile, los editores que por entonces utilizábamos en entornos Windows y Linux respectivamente, y nos pasamos a emacs. El tiempo de escritura que nos ahorramos por no mover las manos del teclado para desplazar el cursor o por no tener que escribir `\emph` una y otra vez se lo debemos a él; nuestro ocio y vida social se lo agradecen.

Por último, gracias a toda esa gente creadora de manuales, tutoriales, documentación de paquetes o respuestas en foros que hemos utilizado y seguiremos utilizando en nuestro quehacer como usuarios de  $\text{\LaTeX}$ . Sabéis un montón.

Y para terminar, a Donal Knuth, Leslie Lamport y todos los que hacen y han hecho posible que hoy puedas estar leyendo estas líneas.



# Resumen

*Frase célebre pedante*

Fuente de la frase célebre pedante

Resumen de lo que hago en mi TFG



# Índice

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Introducción	1
1. Ejemplos	3
2. Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory	9
2.1. La Integral de Poisson . . . . .	9
2.2. El Teorema de Fatou . . . . .	12
2.3. Teorema de Carathéodory y aplicaciones conformes . . . . .	14
3. Productos infinitos	21
3.1. Productos de Blaschke . . . . .	22
4. $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ como álgebra de Banach	25
A. Notación	33
Bibliografía	35



# Introducción

Introducción del TFG ...



# Capítulo 1

## Ejemplos

Empezar comentando cómo calcular el radio de convergencia, que los ejemplos son de series con radio de convergencia 1 y que vas a mostrar cómo difieren el comportamiento en la frontera de unos a otros.

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de algunas series de potencias en el borde de su disco de convergencia.

**Ejemplo 1.0.1.** Mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

diverge en todo punto tal que  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$ . Por lo tanto, si  $z \neq 1$ , se tiene que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad (1.1)$$

Si  $|z| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  y la serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Si  $|z| > 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$  y la serie diverge. Pero, ¿qué pasa cuando  $|z| = 1$ ? La serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  diverge en todos los puntos del radio de convergencia pues  $|z^n|$  no tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sin embargo,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  puede ser extendida a la función globalmente analítica  $\frac{1}{1-z}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  gracias a una cantidad finita de prolongaciones analíticas.

Tomemos  $a$  un punto cualquiera de  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  y conectémoslo al origen 0 mediante la curva de Jordan  $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Fijemos un punto  $z_1$  en  $\gamma$  que cumpla  $|z| < 1$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

puede ser extendida analíticamente en  $z_1$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-z_1-(z-z_1)} = \frac{1}{1-z_1} \frac{1}{1-\frac{z-z_1}{1-z_1}} = \frac{1}{1-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_1}{1-z_1} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_1)^{n+1}} (z-z_1)^n, |z-z_1| < |1-z_1|. \end{aligned}$$

De nuevo, tomemos  $z_2$  en  $\gamma$  tal que  $|z_2 - z_1| < |1 - z_1|$  y  $|z_2| \geq 1$ . Podemos extender la serie de potencias a  $z_2$ .

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_2)^{n+1}} (z-z_2)^n, |z-z_2| < |1-z_2|.$$

Hacer dibujo, como en el libro de Lin.

Después de un número finito de iteraciones, dado que la curva es un conjunto compacto, alcanzaremos el punto  $a$  y tendremos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}} (z-a)^n, |z-a| < |1-a|.$$

Así, decimos que hemos obtenido la prolongación analítica de  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  que pasa por la curva  $\gamma$ .  $\square$

**Ejemplo 1.0.2.** Mostrar que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

diverge en  $z = 1$  y converge en el resto de punto tales que  $|z| = 1$ ;

*Demostración.* En primer lugar, cabe destacar que la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge. Para demostrar que la serie diverge en  $z = 1$  y converge en el resto de punto tales que  $|z| = 1$  vamos a aplicar el criterio de Dirichlet:

Sean  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  y  $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$  sucesiones tales que:

1.  $\{a_n\}$  es monótona con límite 0
2. Las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  están acotadas

entonces  $\sum_{n=1}^N a_n b_n$  converge.

En nuestro caso vamos a tomar  $a_n = \frac{1}{n}$  y  $b_n = z^n$ . La primera condición se cumple, veamos la que resta:

$$\left| \sum_{n=1}^N z^n \right| = \left| \frac{z - z^{N+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|}, \text{ si } z \neq 1, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$



Esto muestra que la condición se satisface para todo  $z \neq 1$  en el disco unidad. Por lo tanto, la serie converge para todo  $z$  tal que  $|z| \leq 1, z \neq 1$  y diverge para  $|z| > 1$ .

Vamos a ver que la suma de la serie es  $\log \frac{1}{1-z}$ . En efecto, derivando tenemos que

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \Rightarrow zg'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Si integramos ahora la expresión de la derecha tenemos que la suma es  $\log \frac{1}{1-z}$  puesto que  $g(0) = 0$ . □

**Ejemplo 1.0.3.** Mostrar que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| < 1$$

converge absoluta y uniformemente en  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Por el criterio mayorante de Weierstrass, es fácil ver que converge absoluta y uniformemente si  $|z| \leq 1$  dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| < \infty.$$

Esta función  $f$  define una función holomorfa y acotada en el disco abierto  $\mathbb{D}$ , que además es continua en el disco cerrado  $\bar{\mathbb{D}}$ . Sin embargo, no puede extenderse con continuidad en  $z = 1$ .

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \Rightarrow zf'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = g(z) = \log \frac{1}{1-z}.$$

□

**Ejemplo 1.0.4.** Mostrar que la serie lagunar,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad |z| < 1$$

tiene una singularidad en cada punto tal que  $|z| = 1$ .

*Demostración.* Sea  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$ . Podemos escribir lo siguiente:

$$h(z^2) = h(z) - z, \quad h(z^4) = h(z^2) - z^2,$$

y aplicando inducción tenemos que

$$h(z^{2^k}) = h(z^{2^{k-1}}) - z^{2^{k-1}}$$

Así,

$$h(z) = z + h(z^2) = z + z^2 + h(z^4) = \cdots = z + z^2 + \cdots + z^{2^{k-1}} + h(z^{2^k}).$$

Si  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $r \in (0, 1)$  y llamamos  $r$  a  $e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}$ , tenemos que

$$h(r^{2^n}) = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{2^n})^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^n \cdot 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^{n+k}} = \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k}.$$

Como

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \geq \sum_{k=n}^N r^{2^k} > (N+1)r^{2^N} \rightarrow N+1,$$

entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} |h(re^{2\pi i \frac{m}{2^n}})| = \infty \forall m, n$ .

Puesto que  $\{e^{2\pi i \frac{m}{2^n}} : m, n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $\partial\mathbb{D}$ , todos los puntos del borde del disco unidad son singulares.  $\square$

**Ejemplo 1.0.5.** Mostrar que la función

$$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

es holomorfa,  $|f(z)| < 1$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y  $f(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 1^-$ .

*Demostración.* La función  $f$  es holomorfa ya que es la composición de funciones holomorfas. Obsérvese que el único punto singular es  $z = 1$ .

La función  $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$  lleva el disco en el semiplano  $H = \{w : \operatorname{Re}(w) < 0\}$ . Así pues, la exponencial lleva  $H$  en  $\mathbb{D}$ :

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x < 1.$$

La aplicación  $g$  es una transformación de Möbius, y las transformaciones de Möbius tienen la propiedad de que llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas. Como la función lleva  $-1$  a  $0$ ,  $i$  a  $-i$  y  $-i$  a  $i$ , la imagen del círculo  $|z| = 1$ , ha de ser una recta.

Si tomamos una sucesión  $\{t_n\}$  en el intervalo  $(-1, 1)$  que converge a  $1$ , se tiene que  $g(t_n) \rightarrow -\infty$ . Por lo tanto,

$$\frac{t+1}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} -\infty \Rightarrow \exp\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0.$$

Sin embargo, la función  $f$  no tiene límite en  $1$ . Por ejemplo, si tomamos la sucesión  $\{z_n\}$  definida por  $z_n = g(w_n)$ , siendo  $\{w_n\}$  la sucesión de término general  $-1 + 2n\pi i$ . Entonces,

$$z_n = \frac{2n\pi i}{-2 + 2n\pi i} = \frac{n\pi i}{n\pi i - 1} = \frac{(n\pi i + 1)n\pi i}{-n^2\pi^2 - 1} = \frac{-n^2\pi^2 + in\pi}{-n^2\pi^2 - 1}.$$

Como  $g = g^{-1}$  tenemos

$$e^{g(z_n)} = e^{w_n} \rightarrow e^{-1} \neq 0.$$

Decir que en un capítulo posterior vamos a extender este ejemplo (en el capítulo de espacios de Banach).

□



## Capítulo 2

# Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

Para empezar vamos a realizar una pequeña introducción a la integral de Poisson. A continuación probaremos el Teorema de Fatou para límites radiales. Por último hablaremos sobre aplicaciones conformes y demostraremos el Teorema de Carathéodory.

### 2.1. La Integral de Poisson

**Definición 2.1.1.** Se llama núcleo de Poisson a la función  $P$  definida por

$$P : (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \quad (2.1)$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables  $r$  y  $t$  o como una familia de funciones de  $t$  que dependen de  $r$ .

Dado  $z = re^{i\theta}$ , con  $r \in [0, 1)$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] \quad (2.2)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En efecto:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2 \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (re^{it})^n \right] = \operatorname{Re} \left[ 1 + 2 \frac{re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{(1 + re^{it})(1 - re^{it})}{|1 - re^{it}|^2} \right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \quad (2.3)$$

así que

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right]. \quad (2.4)$$

**Proposición 2.1.2.** *El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:*

- (a)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1;$
- (b)  $P_r(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R};$
- (c)  $P_r(t) = P_r(-t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y  $P_r(t)$  es periódica en  $t$  de periodo  $2\pi;$
- (d)  $P_r(t) < P_r(\delta)$  si  $0 < \delta < |t| \leq \pi;$
- (e)  $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = 0$  para todo  $\delta \in (0, \pi].$

*Demostración.* (a) Dado  $r$ ,  $0 \leq r < 1$ , la serie 2.1 converge uniformemente en  $t$ . Así que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = 1.$$

(b) De las ecuaciones (2.3) y (2.4), tenemos que  $P_r(t) = (1 - r^2) |1 - re^{it}|^{-2} > 0$  ya que  $r < 1$ .

(c) Es consecuencia trivial de la expresión (2.4).

(d) Fijados  $r$ ,  $\delta$  y  $t$  en las condiciones indicadas se verifica que  $\cos t < \cos \delta$ , de donde se sigue que  $P_r(t) < P_r(\delta)$ .

(e) De la ecuación (2.4), tenemos que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1 - r^2) = 0$  y  $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1 - 2r \cos \delta + r^2) \neq 0$  así que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = 0$ . □

**Definición 2.1.3.** Se llama integral de Poisson de una función  $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$  a la función  $F$  dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como  $F = P[f]$ .

Además si  $f$  lleva  $\partial\mathbb{D}$  en los reales, 2.2 nos muestra que

$$P[f] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(e^{it}) dt \right].$$

También haciendo el cambio de variable  $\theta - t = x$  se tiene la igualdad

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i(\theta+x)}) dx.$$

El siguiente teorema proporciona una solución al problema de Dirichlet. De hecho esta solución es única y coincide precisamente con la integral de Poisson de  $f$ .

**Teorema 2.1.4.** Sean  $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $F = P[f]$ . Entonces la función

$$u : z = re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & \text{si } 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

es continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ , armónica en  $\mathbb{D}$  y coincide con  $f$  en  $\partial\mathbb{D}$ .

*Demostración.* Claramente  $u$  coincide con  $f$  en la frontera del disco, por definición. Para ver que  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , observamos que si  $0 \leq r < 1$  entonces

$$u(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(e^{it}) dt \right].$$

Por lo que  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ . Solo nos falta probar que  $u$  es continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Como  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , es continua en  $\mathbb{D}$ , así que queda probar que  $u$  es continua en cada punto de  $\partial\mathbb{D}$ .

Vamos a probar que para todo  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  y todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $z \in D(e^{i\alpha}, \delta) \cap \overline{\mathbb{D}}$  se verifica

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \varepsilon$$

Una vez probemos esto último, tendremos que  $u$  es continua en  $e^{i\alpha}$  puesto que  $f$  es una función continua.

Dado  $\varepsilon > 0$ , la continuidad de  $f$  en  $\alpha$  nos da que existe un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ si } |t - \alpha| < \delta.$$

Sea  $M = \max\{|f(e^{i\theta})| : |\theta| \leq \pi\}$ . Por la Proposición 2.1.2 (e), existe  $\rho \in (0, 1)$  tal que

$$P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3M}$$

para  $\rho < r < 1$  y  $|\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$ . Consideremos el arco  $A = \{e^{i\theta} : |\theta| < \frac{\delta}{2}\}$ . Entonces, si  $e^{i\theta} \in A$

y  $\rho < r < 1$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - u(e^{i\alpha})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i(\theta+x)}) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) f(e^{i\alpha}) dx \right| = \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) [f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})] dx \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{2}} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \geq \frac{\delta}{2}} P_r(x) |f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, si  $|x| < \frac{\delta}{2}$ , tenemos que  $|\theta + x - \rho| \leq |\theta - \rho| + |x| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ , se verifica que  $|f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| < \frac{\varepsilon}{3}$ , y como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{2}} P_r(x) dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1,$$

el primer sumando es menor que  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Por otra parte si  $|x| \geq \frac{\delta}{2}$  y  $|\theta| \leq \frac{\delta}{2}$  entonces  $P_r(|x|) \leq P_r(\frac{\delta}{2}) < \frac{\varepsilon}{3M}$  pues  $r \in (\rho, 1)$ . Como  $|f(e^{i(\theta+x)}) - f(e^{i\alpha})| \leq M$ , se tiene que el segundo sumando es menos que  $\frac{\varepsilon}{3}$ , con lo que  $|u(re^{i\theta}) - u(e^{i\alpha})| < \varepsilon$ .

Finalmente, para ver que  $u$  es única, supongamos que  $v$  es una función continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  que es armónica en  $\mathbb{D}$  y  $v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$  para todo  $\theta$ . Entonces  $u - v$  es armónica en  $\mathbb{D}$  y  $(u - v)(z) = 0$  para todo  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Se sigue del Principio del Módulo Máximo que  $u - v \equiv 0$ .

□

## 2.2. El Teorema de Fatou

Para demostrar el Teorema de Fatou nos vamos a basar en unos resultados clásicos del libro Rudin (1970, chap. 11).

**Teorema 2.2.1.** Si  $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$  y  $F = P[f]$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Fatou). Para toda función  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , existe una función  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  definida por

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \tag{2.5}$$



en casi todo punto.

Se tiene la igualdad  $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$ . Para todo  $z \in \mathbb{D}$ , la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2.6)$$

se satisface, donde  $\gamma$  es el círculo unidad positivamente orientado:  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Las funciones  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \dots \quad (2.7)$$

*Demostración.* La existencia de  $f^*$  se sigue de los teoremas 2.2.1 y 2.1.4. Además, por (2.5), tenemos que  $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .

Si  $z \in U$  y  $|z| < r < 1$ , tomemos  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} e^{it} dt$$

Sea  $\{r_n\}$  una sucesión tal que  $r_n \rightarrow 1$ . Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(r_n e^{it})}{r_n e^{it} - z} e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt. \quad (2.8)$$

Por lo que ya hemos probado (2.6). Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) \xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \dots$$

Tomando de nuevo una sucesión  $\{r_n\}$  que tienda a 1, el teorema de la convergencia dominada garantiza que  $f^*$  cumple (2.7). Además, podemos convertir (2.8) en una integral de Poisson, si  $z = re^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esto concluimos que  $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$ , así que ambas normas coinciden.

Por último, si  $f^*$  satisface (2.7) y definimos  $f$  como (2.8) para todo  $z \in \mathbb{D}$ , entonces, por (2.8),  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . Además, (2.7) implica que la integral de Cauchy (2.8) es igual a la

integral de Poisson (2.9). Por lo tanto,  $f$  es acotada, y la representación de  $f$  como la integral de Poisson de  $f^*$  muestra que (2.5) se satisface en casi todo punto por el Teorema 2.2.1. □

Como hemos demostrado,  $f$  es la integral de Poisson de  $f^*$  por lo que  $f^*$  es la solución al problema de Dirichlet de  $f$ , incluso aunque  $f$  converja a  $f^*$  en  $\partial\mathbb{D}$  radialmente en casi todo punto.

Repasar lo que viene a continuación.

Gracias a la expresión de la fórmula de Cauchy anterior, tenemos un teorema de unicidad si nos restringimos a un subarco del disco unidad.

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ ,  $J$  un subarco de  $\partial\mathbb{D}$  y  $f(e^{it}) = 0$  en casi todo punto de  $J$ . Entonces  $f(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Sea  $n > 0$  un entero tal que la longitud de  $J$  es mayor que  $\frac{2\pi}{n}$ , sea  $\eta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$  y tomemos

$$g(z) = \prod_{k=1}^n f(\eta^k z)$$

donde  $z \in \mathbb{D}$ .

Como  $f$  es acotada y  $f^* = 0$  en casi todo punto de  $J$ , tenemos que  $g^* = 0$  en casi todo punto de  $T$ , y  $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Como  $g$  es la integral de Cauchy de  $g^*$ ,  $g(z) = 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Si el conjunto de los ceros de  $f$  es como mucho numerable, entonces también lo es el conjunto de los ceros de  $g$  pues es la unión de  $n$  conjuntos obtenidos por rotaciones. Pero todo punto de  $\mathbb{D}$  es un cero de  $g$  por lo que  $f = 0$ . □

Como se puede observar de este último resultado, el comportamiento en (un subconjunto de) la frontera determina el comportamiento dentro del disco.

## 2.3. Teorema de Carathéodory y aplicaciones conformes

**Definición 2.3.1.** Sean  $U$  y  $V \subset \mathbb{C}^n$ . Se dice que una aplicación  $f : U \rightarrow V$  es conforme en un punto  $u \in U$  si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por  $u$ .

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $U \subset \mathbb{C}$ . Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme en  $U$  si  $f \in \mathcal{H}(U)$  y  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f(z)$  es una función holomorfa en  $U$  tal que  $f'(z) \neq 0$  para  $z \in U$  y consideremos  $f : z \rightarrow w = f(z)$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  una curva suave. Consideremos  $\lambda = (f \circ \gamma)(t)$ . Por la regla de la cadena,  $\lambda$  es continuamente diferenciable y como  $f'(\gamma(t)) \neq 0$ , tenemos

$$\lambda'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t). \quad (2.10)$$

Por lo tanto,  $\lambda$  es una curva suave en el plano  $w$ .

Sean  $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow U$  curvas suaves tales que  $c = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ . Definimos el ángulo  $\theta$  entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $c$  como el argumento de  $\frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}$ . Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \arg \lambda_1'(a) &= \arg f'(c) + \arg \gamma_1'(a) \\ \arg \lambda_2'(a) &= \arg f'(c) + \arg \gamma_2'(a) \end{aligned}$$

y entonces

$$\arg \frac{\lambda_2'(a)}{\lambda_1'(a)} = \arg \lambda_2'(a) - \arg \lambda_1'(a) = \arg \gamma_2'(a) - \arg \gamma_1'(a) = \arg \frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}.$$

Así, el ángulo entre las curvas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en  $d = \lambda_1(a) = \lambda_2(a)$  es igual al ángulo  $\theta$  entre las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $c$ . □

A continuación, vamos a probar un resultado recíproco a éste que incluye algunas restricciones adicionales sobre  $f$ .

**Proposición 2.3.3.** *Sean  $U \subset \mathbb{C}$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación conforme en  $U$  que admite derivadas parciales continuas con respecto a  $x$  e  $y$ . Entonces  $f \in \mathcal{H}(U)$  y  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .*

*Demostración.* Fijemos  $z$  un punto arbitrario de  $U$ , y elijamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $D(z, \varepsilon) \subset U$ . Consideremos la familia de curvas suaves  $\gamma_\theta(t) = z + te^{i\theta}$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Nótese que el ángulo entre  $\gamma_0$  y  $\gamma_\theta$  en  $z$  es  $\theta$ .

Tomemos la familia de curvas  $\lambda_\theta = f \circ \gamma_\theta$ . Como  $f$  es conforme, el ángulo entre  $\lambda_0$  y  $\lambda_\theta$ , es decir, el argumento de  $\frac{\lambda_\theta'(0)}{\lambda_0'(0)}$  es igual a  $\theta$ . Si escribimos el argumento de  $\lambda_0'(0)$  como  $\alpha$ , el argumento de  $\lambda_\theta'(0)$  será  $\alpha + \theta$  y, por tanto,

$$e^{-i(\theta+\alpha)}\lambda_\theta'(0) = |\lambda_\theta'(0)| > 0. \quad (2.11)$$

Además, la regla de la cadena nos dice que

$$\begin{aligned} \lambda_\theta'(0) &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta + i(v_x \cos \theta + v_y \sin \theta) = \\ &= (u_x + iv_x) \cos \theta + (u_y + iv_y) \sin \theta = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

y, por la fórmula de Euler,

$$2\lambda'_\theta(0) = (f_x - if_y)e^{i\theta} + (f_x + if_y)e^{-i\theta}.$$

Entonces por 2.11,

$$(f_x - if_y)e^{-i\alpha} + (f_x + if_y)e^{-2i\theta-i\alpha} = 2|\lambda'_\theta(0)|.$$

Derivando en ambos lados con respecto a  $\theta$ , obtenemos

$$-2i(f_x + if_y)e^{-2i\theta-i\alpha} = \frac{2d}{d\theta}|\lambda'_\theta(0)|.$$

Como el ángulo  $\theta$  es arbitrario,  $e^{-2i\theta-i\alpha}$  es un giro arbitrario. Como además la parte de la derecha de la igualdad solo toma valores reales,  $-2i(f_x + if_y)$  bajo cualquier giro tiene que ser real. De esto se sigue que

$$f_x + if_y = 0$$

por lo que

$$u_x + v_y + i(v_x + u_y) = 0.$$

Como vemos,  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $U$ . Luego  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa en  $z = x + iy \in U$ . Además se tiene que  $f(z) \neq 0, z \in U$ . En efecto, como  $\lambda'_\theta(0) \neq 0$ , 2.12 garantiza que no pueden anularse a la vez  $u_x$  y  $u_y$ . Por lo tanto, como  $|f'(x + iy)|^2 = u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)$ , se tiene el resultado.  $\square$

**Proposición 2.3.4.** *Sea  $U \subset \mathbb{C}$ . Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme en  $U$  si satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ .*

*Demostración.* Sea  $f$  una función continua tal que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ . Sabemos, por hipótesis, que  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son funciones continuamente diferenciables.

Consideremos la curva suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ , que escribimos como  $\gamma(t) = \rho(t) + i\sigma(t)$ . Entonces,

$$f(\gamma(t)) = u(\rho(t), \sigma(t)) + iv(\rho(t), \sigma(t)).$$

Como  $f(\gamma(t))$  es continuamente diferenciable,

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = u_x\rho'(t) + u_y\sigma'(t) + i(v_x\rho'(t) + v_y\sigma'(t)). \quad (2.13)$$

Por hipótesis tenemos que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0,$$

por lo que  $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \neq 0$  en  $t = 0$  pues  $\rho'(t) + i\sigma'(t) = \gamma'(t) \neq 0$ . Es decir, la curva  $f(\gamma)$  es suave en un entorno de su origen. Por lo tanto, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son curvas suaves con origen  $c$ , el ángulo entre  $f(\gamma_1)$  y  $f(\gamma_2)$  en  $f(c)$  está bien definido.  $\square$

**Teorema 2.3.5** (Teorema de Carathéodory). *Sea  $\varphi$  una aplicación conforme del disco unidad  $\mathbb{D}$  en un dominio de Jordan  $\Omega$ . Entonces  $\varphi$  tiene una extensión continua al disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ , y la extensión es inyectiva de  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ .*

*Demostración.* Vamos a suponer que  $\Omega$  está acotado. Fijemos  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ . Primero vamos a probar que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\zeta$ . Sea  $0 < \delta < 1$ ,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos  $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$ . Entonces  $\varphi(\gamma_\delta)$  es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| ds.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 ds,$$

entonces para  $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int \int_{\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho)} |\varphi'(z)|^2 dx dy = \pi \text{Área}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty.$$

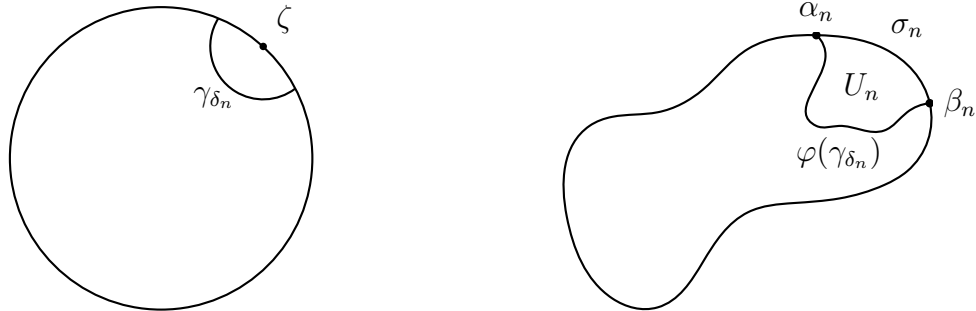


Figura 2.1: Las curvas  $\gamma_{\delta_n}$  y  $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ .

Entonces, existe una sucesión  $\{\delta_n\} \downarrow 0$  tal que  $L(\delta_n) \rightarrow 0$ . Cuando  $L(\delta_n) < \infty$ , la curva  $\varphi(\gamma_{\delta_n})$  tiene extremos  $\alpha_n, \beta_n \in \overline{\Omega}$  y ambos puntos deben estar en  $\Gamma = \partial\Omega$ . De hecho, si  $\alpha_n \in \Omega$ , entonces algún punto cerca de  $\alpha_n$  tiene dos preimágenes distintas en  $\mathbb{D}$  y esto es imposible pues  $\varphi$  es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Sea  $\sigma_n$  el subarco cerrado de  $\Gamma$  que tiene extremos  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  y con un diámetro menor. Entonces (2.14) implica que  $\text{diam}(\sigma_n) \rightarrow 0$  porque  $\Gamma$  es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan,  $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$  divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla  $U_n$  es acotada. Entonces  $U_n \subset \Omega$  ya que  $\mathbb{C}^* \setminus \overline{\Omega}$  es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

concluimos que

$$\text{diam}(U_n) \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Tomamos  $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$ . Sabemos que para  $n$  suficientemente grande,  $\varphi(D_n) = U_n$ . Si no, por conexión tendríamos que  $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$  y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contradice con (2.16). Entonces  $\text{diam}(\varphi(D_n)) \rightarrow 0$  y  $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$  es un solo punto pues  $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$ . Esto significa que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$ . La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Denotemos ahora por  $\varphi$  a la extensión  $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ . Como  $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$ ,  $\varphi$  lleva  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ . Para probar que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$ ,  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . El argumento utilizado para mostrar que  $\alpha_n \in \Gamma$ , también prueba que  $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$ , así que podemos suponer que  $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$ ,  $j = 1, 2$ . La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio  $W \subset \Omega$ , luego  $\varphi^{-1}(W)$  es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\}).$$

Pero como  $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$ ,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y  $\varphi$  es constante en un arco de  $\partial\mathbb{D}$ . Se tiene que  $\varphi$  es constante, por el principio de reflexión de Schwarz, y esta contradicción prueba que  $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$ . □

También podemos utilizar el Teorema de Carathéodory para resolver el problema de Dirichlet como hemos hecho empleando el Teorema de Fatou pero esta vez no necesariamente en el disco unidad. Sea  $f$  una aplicación en  $\Gamma$  tal que  $f \circ \varphi$  es integrable en  $\partial\mathbb{D}$ , entonces

Revisar

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f \circ \varphi(e^{it}) dt$$

es armónica en  $\Omega$  y por los teoremas 2.3.5 y 2.2.1,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = f(\zeta) \quad (2.17)$$

cuando  $z \in \Omega$  y la función  $f \circ \varphi$  es continua en  $\varphi^{-1}(\zeta) \in \partial\mathbb{D}$ . En particular, si  $f$  es continua en  $\Gamma$ , entonces (2.17) se satisface para todo  $\zeta \in \Gamma$  y  $u(z)$  resuelve el problema de Dirichlet para  $f$  en  $\Omega$ .

Al final de la demostración del Teorema 2.3.5 hemos utilizado el resultado que enunciamos a continuación:

**Teorema 2.3.6** (Principio de Reflexión de Schwarz). *Sea  $U^+$  un conjunto abierto conexo del semiplano superior y supongamos que la frontera de  $U^+$  contiene un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$ . Sea  $U^-$  la reflexión de  $U^+$  en el eje real,  $U^- = \{z : \bar{z} \in U^+\}$ , y tomemos  $U = U^+ \cup I \cup U^-$ .*

- *Si  $f$  es una función en  $U$ , holomorfa en  $U^+ \cup U^-$ , y continua en  $I$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $V$ .*
- *Si  $f$  es una función en  $U^+ \cup I$ , holomorfa en  $U^+$  y continua en  $I$ , y toma valores reales en  $I$ , entonces  $f$  tiene una continuación analítica única  $F$  en  $U$  que verifica*

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

- *Si  $f = u + iv$  es una función holomorfa en  $U^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) = 0$  para toda sucesión  $\{z_n\} \subset U^+$  que converge a un punto de  $I$ . Entonces  $f$  tiene una continuación analítica única  $F$  en  $U$  que verifica*

$$F(z) = f(z) \text{ si } z \in U^+, \quad F(\bar{z}) = \overline{F(z)} \text{ si } z \in U.$$

El teorema anterior puede aplicarse a situaciones más generales que son isomorfas a la de dicho teorema.

**Teorema 2.3.7** (Principio de Reflexión de Schwarz). *Sea  $V$  un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y supongamos que es la unión disjunta  $V = V^+ \cup \gamma \cup V^-$ , donde  $V^+$  y  $V^-$  son abiertos de  $\mathbb{C}$  y  $\gamma$  es una curva. Suponemos que existe un isomorfismo*

$$\psi : U \rightarrow V$$

*tal que*

$$\psi(U^+) = V^+, \quad \psi(I) = \gamma, \quad \psi(U^-) = V^-.$$

*La notación  $U = U^+ \cup I \cup U^-$  es la misma que antes.*

- *Si  $g$  es una función en  $V$ , holomorfa en  $V^+ \cup V^-$ , y continua en  $\gamma$ , entonces  $g$  es holomorfa en  $V$ .*
- *Si  $g$  es una función holomorfa en  $V^+$  que se extiende a una función continua en  $V^+ \cup \gamma$ , y toma valores reales en  $\gamma$ , entonces  $g$  tiene una continuación analítica en  $V$ .*
- *Si  $g = u + iv$  es una función holomorfa en  $V^+$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(z_n) = 0$  para toda sucesión  $\{z_n\} \subset V^+$  que converge a un punto de  $\gamma$ . Entonces  $g$  tiene una continuación analítica en  $V$ .*

El resultado que presentamos a continuación es un recíproco parcial del teorema de Carathéodory. Muestra que la inyectividad en el borde del dominio se traslada al interior, en condiciones adecuadas.

**Teorema 2.3.8.** *Sea  $\Gamma$  una curva simple, cerrada y suave con interior  $\Omega$ . Sea  $f \in \mathcal{H}(\Gamma \cup \Omega)$  una aplicación inyectiva en  $\Gamma$ . Entonces  $f$  es holomorfa e inyectiva en  $\Omega$ .*

*Demostración.* La aplicación  $w = f(z)$  lleva  $\Gamma$  en un camino simple, cerrado y suave  $\Gamma'$ . Sea  $w_0$  un punto arbitrario que no esté en  $\Gamma'$ . Entonces, si llamamos  $\Gamma_+$  al camino positivamente orientado,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si  $w_0$  está fuera de  $\Gamma'$  y es  $\pm 1$  si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ . Sin embargo,  $n$  no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de  $f(z) - w_0$  dentro de  $\Gamma$ . Entonces,  $n = 1$  si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ .

Esto prueba que  $f(z) = w_0$  tiene una sola solución si  $w_0$  está dentro de  $\Gamma'$ , que  $f(z)$  es holomorfa e inyectiva en  $\Omega$  y lleva  $\Omega$  en  $\Omega'$  (el interior de  $\Gamma'$ ) y que la dirección positiva de  $\Gamma'$  se corresponde con la dirección positiva de  $\Gamma$ .  $\square$



# Capítulo 3

## Productos infinitos

Cambiar esta definición para que admita una cantidad finita de ceros que estarán hasta un cierto  $n_0$ , a partir del cual todos los elementos serán no nulos.

**Definición 3.0.1.** Sea  $\{u_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una sucesión de números complejos. Su producto infinito se define como el límite de los productos parciales  $u_1 u_2 \cdots u_N$  cuando  $N$  tiende a infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N u_n.$$

Además, decimos que el producto converge cuando el límite existe y no es cero. En otro caso, se dice que el producto diverge.

Añadir resultados de convergencia y convergencia absoluta en productos infinitos

**Proposición 3.0.2.** Sea  $\{u_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una sucesión de números complejos no nulos. Si  $\lim u_n = 1$  y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n$$

converge absolutamente, es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\log u_n|$  converge, entonces el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

converge absolutamente.

*Demostración.* Si  $n$  es suficientemente grande, entonces  $u_n$  puede escribirse como  $u_n = 1 - \alpha_n$ , donde  $|\alpha_n| < 1$ , y entonces podemos definir  $\log u_n$  como  $\log(1 - \alpha_n)$ . Por hipótesis, se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \alpha_n)$$

converge. Así que las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^N \log u_n$$

tienen límite. Como la función exponencial es continua, podemos exponenciar las sumas parciales y vemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N u_n$$

existe. □

**Lema 3.0.3.** *Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de números complejos tales que  $\alpha_n \neq 1$  para todo  $n$ . Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

*converge. Entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n)$$

*converge absolutamente.*

*Demostración.* Para una cantidad finita  $n$ , tenemos que  $|\alpha_n| < \frac{1}{2}$ , así que  $\log(1 - \alpha_n)$  está definido por la serie usual, y para alguna constante  $C$ , tenemos

$$|\log(1 - \alpha_n)| \leq C |\alpha_n|.$$

Por tanto, el producto converge absolutamente por definición y utilizando la hipótesis de que  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$  converge. □

Añadir comentario sobre la equivalencia de las tres situaciones.

### 3.1. Productos de Blaschke

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión en el disco unidad tal que  $\alpha_n \neq 0 \forall n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$  converge. Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

*converge uniformemente para  $|z| \leq r < 1$  y define una función holomorfa en el disco unidad que tiene los mismos ceros que  $\alpha_n$ . Además  $|f(z)| \leq 1$ .*

*Demostración.* Sea

$$b_n(z) = \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Por el lema 3.0.3, sabemos que  $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$  converge uniformemente si  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n|$  converge.

$$\begin{aligned} |1 - b_n(z)| &= \left| 1 + \frac{z - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n}z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{(1 - \overline{\alpha_n}z)\alpha_n + (z - \alpha_n)|\alpha_n|}{(1 - \overline{\alpha_n}z)\alpha_n} \right| = \\ &= \left| \frac{(1 - |\alpha_n|)(\alpha_n + |\alpha_n|z)}{(1 - \overline{\alpha_n}z)\alpha_n} \right| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |\alpha_n|). \end{aligned}$$

Entonces si  $|z| \leq r$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1 + r}{1 - r} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|).$$

Lo que prueba que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b_n(z)|$  converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado de radio  $r$ . Por lo que  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$  converge uniformemente para  $|z| \leq r < 1$ . Además  $f$  define una función holomorfa en el disco unidad ya que  $b_n$  son funciones holomorfas y su producto infinito converge uniformemente en los compactos.

Que  $|f(z)| \leq 1$  se tiene porque los términos  $\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z}$  definen un automorfismo del disco unidad que lleva el disco abierto en el disco abierto y el borde en el borde. Falta ver que  $f(z)$  tiene los mismos ceros que  $\alpha_n$ .

Sea  $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$  el producto infinito y  $B_n(z) = \prod_{k=1}^n b_k$  el producto parcial,

$$\left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{B(e^{i\theta})}{B_n(e^{i\theta})} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta = 1,$$

y, por consiguiente,  $|B(e^{i\theta})| = 1$  en casi todo punto. Es decir,  $|f(z)| = 1$  en  $\partial\mathbb{D}$ . □



## Capítulo 4

### $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ como álgebra de Banach

En este capítulo vamos a trabajar con  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como el álgebra de las funciones holomorfas acotadas en el disco unidad.

**Definición 4.0.1.** Un espacio vectorial complejo  $X$ , dotado de una norma  $\|\cdot\|$  se denomina espacio de Banach si es completo.

$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es un espacio vectorial complejo, que dotado con la norma infinito

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z| < 1} |f(z)|,$$

es normado y completo sobre  $\mathbb{C}$ . Atendiendo a la definición anterior, decimos que  $(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.

**Definición 4.0.2.** Decimos que un álgebra  $B$ , dotada de una norma  $\|\cdot\|$  es un álgebra de Banach si como espacio normado  $(B, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach y, además, para el producto satisface:

$$\forall x, y \in B : \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Con las operaciones naturales, podemos ver  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como un álgebra. En efecto, si  $f, g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g &\in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \\ fg &\in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  es un álgebra de Banach conmutativa (con la función constante 1 como elemento unidad) puesto que es un álgebra conmutativa y un espacio de Banach cuya norma asociada cumple la siguiente propiedad:

$$\forall f, g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) : \|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

**Definición 4.0.3.** Sea  $B$  un espacio de Banach. Consideramos  $B^*$  el espacio de las aplicaciones  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  continuas.  $B^*$  es un espacio vectorial y tiene una norma natural dada por:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Con esta norma,  $B^*$  es un espacio de Banach al que llamamos espacio dual de  $B$ .

Además de la topología inducida por la norma en el espacio dual  $B^*$ , vamos a considerar otra topología denominada topología débil-\* en  $B^*$ . Está definida de la siguiente manera. Sea  $\varphi_0 \in B^*$  y tomemos una cantidad finita de elementos  $x_1, \dots, x_n \in B$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea

$$U = \{\varphi \in B^* : |\varphi(x_k) - \varphi_0(x_k)| < \varepsilon, k = 1, \dots, n\}.$$

un entorno  $\varphi_0$ . Un abierto de esta topología será, por tanto, cualquier unión de tales entornos  $U$ .

Esta topología se denota por  $\sigma(B^*, B)$ . Es la topología más débil de  $B^*$  tal que todas las funciones  $\varphi \rightarrow \varphi(x)$  son continuas de  $B^*$  en  $\mathbb{C}$ , con  $x \in B$ .

**Teorema 4.0.4** (de Alouglu). *La bola unidad cerrada de  $B^*$  es compacto en la topología débil-\*.*

Recordemos que  $\phi : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  es un homomorfismo de álgebras si para todos  $f, g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  se cumple:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha f + \beta g) &= \alpha \phi(f) + \beta \phi(g) \\ \phi(f \cdot g) &= \phi(f) \cdot \phi(g). \end{aligned} \tag{4.1}$$

El espectro de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , denotado por  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}))$ , es el espacio de los homomorfismos  $\phi : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  no nulos. Observamos que tales homomorfismos verifican que son continuos y  $\|\phi\| = 1$ .

Reestructurar estos dos parrafos siguientes:

$\mathfrak{M}$  es un subconjunto del espacio dual  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})^*$  y, de hecho, está contenido en la bola unidad de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})^*$ . Además,  $\mathfrak{M}$  es cerrado en la topología débil estrella en  $B^*$ .

Como la bola unidad en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})^*$  dotada con la topología débil-\* es compacto, se sigue que  $\mathfrak{M}$  (como subconjunto de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})^*$ ) dotado con la topología débil estrella es un espacio Hausdorff compacto.

En este punto queremos asociar a cada elemento de  $x$  de  $B$  con una función continua sobre  $\mathfrak{M}(B)$ . Para ello vamos a definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathfrak{M}(B) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Cada  $\widehat{x}$  es una función continua en  $\mathfrak{M}(B)$ . De hecho, por definición, la topología débil-\* es la topología más débil de  $\mathfrak{M}(B)$  que hace que cada  $\widehat{x}$  sea continua. Así pues, tenemos la siguiente representación a la que se le suele denominar **transformada de Gelfand**

$$x \rightarrow \widehat{x}.$$

La imagen de  $B$  bajo este homomorfismo es el álgebra  $\widehat{B} = \{\widehat{x} : \mathfrak{M}(B) \rightarrow \mathbb{C} \mid x \in B\}$ .

Lo que hemos comentado puede aplicarse a  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Así tenemos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathfrak{M} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(f), \end{aligned}$$

para cada  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , que da lugar a la representación  $f \rightarrow \widehat{f}$ . Vamos a poder interpretar  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  como el álgebra de las funciones continuas en el espacio compacto de los ideales maximales  $\mathfrak{M}$ . Hay que hablar más de la relación de  $\mathfrak{M}$  y los ideales maximales.

$\widehat{f}$  es continua sobre el espectro.

Al espacio  $\mathfrak{M}$  se le suele llamar el espacio de ideales maximales de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Para cada  $\phi \in \mathfrak{M}$ , el núcleo de  $\phi$  es un ideal maximal del álgebra  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Recíprocamente, todo ideal maximal en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  se corresponde con el núcleo de un homomorfismo en  $\mathfrak{M}$ . Vamos a estudiar la estructura de este espacio.

Los únicos homomorfismos complejos evidentes de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  son las evaluaciones

$$\delta_z(f) = f(z).$$

Hablar más de las evaluaciones. Las evaluaciones en puntos del disco abierto son elementos del espectro.

Existe una aplicación continua que lleva  $\mathfrak{M}$  en el disco unidad cerrado. Si denotamos por  $\text{id}$  la función identidad de  $\mathbb{D}$ ,

$$\text{id}(z) = z, z \in \mathbb{D},$$

la proyección que buscamos lleva los homomorfismos  $\phi \in \mathfrak{M}$  en su correspondiente valor en la función  $\text{id}$ . Así pues, la aplicación que nos interesa es  $\widehat{\text{id}}$ . Para evitar confusiones, vamos a introducir una notación alternativa para referirnos a la función  $\widehat{\text{id}}$ . Si  $\phi \in \mathfrak{M}$ ,

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{M} &\rightarrow \overline{\mathbb{D}} \\ \phi &\mapsto \phi(\text{id}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aquí conviene decir que la función identidad tiene norma 1 y cada  $\varphi$  también, por lo que  $|\pi(\varphi)| \leq 1$ . Es decir, que la imagen de  $\pi$  está contenida en el disco unidad cerrado.

**Teorema 4.0.5.** *La aplicación  $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  definida por 4.2 es continua.  $\pi$  es inyectiva sobre el disco abierto  $\mathbb{D}$  y  $\pi^{-1}$  aplica homeomórficamente  $\mathbb{D}$  sobre un abierto de  $\mathfrak{M}$ .*

**En esta prueba llamo  $\lambda$  a los puntos del disco y  $z$  a la variable de la función  $f$ .**

*Demostración.*  $\pi$  es continua por definición. Veamos que  $\pi$  lleva  $\mathfrak{M}$  en el disco cerrado. En efecto, ya hemos observado antes que cada punto del disco abierto  $\mathbb{D}$  está en la imagen de  $\pi$  puesto que  $\pi(\delta_\lambda) = \lambda$ . Como  $\mathfrak{M}$  es un conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{D}$ , y la imagen de un compacto por una aplicación continua es también un compacto, entonces  $\pi(\mathfrak{M})$  es compacto. Así pues, como  $\pi(\mathfrak{M})$  es un conjunto compacto que contiene a  $\mathbb{D}$ , contiene todo el disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Veamos ahora que  $\pi$  es inyectiva sobre el disco. Para ello supongamos que  $|\lambda| < 1$  y  $\pi(\phi) = \phi(\text{id}) = \lambda$ , con  $\phi \in \mathfrak{M}$ . Si  $f(\lambda) = 0$ , entonces  $f(z) = (z - \lambda)g(z)$  y

$$\phi(f) = \phi(z - \lambda)\phi(f) = 0 \cdot \phi(f) = 0.$$

Si  $f(\lambda) = c$ , entonces  $f(z) = c + g(z)$ , con  $g(z) = 0$  y

$$\phi(f) = \phi(c) + \phi(g) = c + 0 = c.$$

Por lo tanto,  $\phi(f) = f(\lambda)$  para toda  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , es decir,  $\phi$  es la evaluación en  $\lambda$ . Esto prueba que  $\pi$  es inyectiva sobre los puntos del disco unidad  $\mathbb{D}$ .

Si tomamos  $\Delta = \pi^{-1}(\mathbb{D}) = \{\phi_z : z \in \mathbb{D}\}$ , entonces  $\pi$  lleva  $\Delta$  homeomórficamente en el disco  $\mathbb{D}$  ya que la topología de  $\Delta$  es la topología débil definida por las aplicaciones  $\hat{f}$  y la topología de  $\mathbb{D}$  es la topología débil definida por las aplicaciones  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . □

Aquí conviene ligarlo con lo anterior, cuando has visto que la fibra de cada  $z$  del disco abierto es la evaluación en  $z$ . Y decir que puedes descomponer el espectro como unión disjunta de sus fibras.

Si  $|\alpha| = 1$ , decimos que  $\pi^{-1}(\alpha)$  es la fibra de  $\mathfrak{M}$  sobre  $\alpha$  y lo denotamos por  $\mathfrak{M}_\alpha$ :

$$\mathfrak{M}_\alpha = \pi^{-1}(\alpha) = \{\phi \in \mathfrak{M} : \phi(\text{id}) = \alpha\}.$$

La fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  es un conjunto cerrado de  $\mathfrak{M}$ . Intuitivamente, los elementos de  $\mathfrak{M}_\alpha$  son los homomorfismos complejos de  $\mathfrak{M}$  que se comportan como la “evaluación en  $\alpha$ ”, es decir, los homomorfismos  $\phi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  que llevan cada  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  en algo parecido al valor límite  $f(z)$  cuando  $z$  se aproxima a  $\alpha$ . Vamos a ver esto con más detalle a continuación.

Observemos que la imagen de toda función constante por cualquier elemento del espectro es ella misma. Además, la identidad es una función de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  de norma 1.

Las fibras sobre los puntos del disco abierto tienen un único elemento, pero que sobre los números del borde del disco la fibra tiene muchos.



**Teorema 4.0.6.** *Sea  $f$  una función en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y sea  $\alpha$  un punto del círculo unidad. Sea  $\{z_n\}$  una sucesión de puntos en el disco unidad  $\mathbb{D}$  que converge a  $\alpha$ , y supongamos que el límite*

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

*existe. Entonces existe un homomorfismo complejo  $\phi$  en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  tal que  $\phi(f) = \zeta$ .*

*Demostración.* Sea  $J = \{h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) : \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = 0\}$  un ideal propio en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ .  $J$  está contenido en un ideal maximal  $M$ , esto es, existe un homomorfismo complejo  $\phi$  de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  del que  $M$  es el núcleo. En particular,  $\phi(h) = 0$  para todo  $h \in J$ . Las funciones  $(z - \alpha)$  y  $(f - \zeta)$  están ambas en  $J$ . Entonces,  $\phi(z) = \alpha$  y  $\phi(f) = \zeta$ . Por lo tanto  $\phi$  es el homomorfismo buscado.  $\square$

**Teorema 4.0.7.** *Sea  $f$  una función en  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y sea  $\alpha$  un punto del círculo unidad. La función  $\hat{f}$  es constante en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$  si y solo si  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ . Esto significa que existe un número complejo  $\zeta$  tal que  $\lim_{z_n \rightarrow \alpha} f(z_n) = \zeta$  para toda sucesión  $\{z_n\}$  en  $\mathbb{D}$  que converge a  $\alpha$ . Queremos mostrar que  $\hat{f}$  vale constantemente  $\zeta$  en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , es decir,  $\phi(f) = \zeta$  para todo  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ .

Podemos suponer que  $\zeta = 0$ . Sea  $h(z) = \frac{1}{2}(1 + z\alpha^{-1})$ , así que  $h(\alpha) = 1$  y  $|h| < 1$  en cualquier otro lugar dentro del disco unidad cerrado. Como  $f$  es continua en  $\alpha$  y toma el valor 0, es fácil ver que  $(1 - h^n)f$  converge uniformemente a  $f$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Si  $\phi$  es un homomorfismo complejo de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  que yace en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , es decir,  $\phi(z) = \alpha$ , entonces  $\phi(h) = 1$ . Por lo tanto,  $\phi[(1 - h^n)f] = 0$ , y, como  $\phi$  es continua,  $\phi(f) = 0$ . Así,  $\hat{f}$  es la función idénticamente nula en  $\mathfrak{M}_\alpha$ .

Si  $\hat{f}$  es constante en la fibra  $\mathfrak{M}_\alpha$ , entonces el Teorema 4.0.6 muestra directamente que  $f$  se puede extender con continuidad a  $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ .  $\square$

Podemos ahora hacernos algunas preguntas de carácter topológico sobre el espacio de ideales maximales de  $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ . Las evaluaciones punto a punto llevan el disco unidad abierto en un conjunto abierto  $\Delta$  de  $\mathfrak{M}$ . El resto de homomorfismos yacen en las fibras  $\mathfrak{M}_\alpha$ . La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿son esos homomorfismos realmente límites de  $\delta_z$  en la topología de  $\mathfrak{M}$ ? En otras palabras, ¿es el disco  $\mathbb{D}$  denso en  $\mathfrak{M}$ ? A esta pregunta se le ha denominado El Problema de la Corona. A continuación vamos a dar una formulación algebraica equivalente.

**Teorema 4.0.8** (Teorema de la Corona). *El problema de la corona es equivalente a: Sean  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que para cada  $z \in \mathbb{D}$  se tiene*

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta,$$

*entonces existen  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  tales que  $f_1g_1 + \dots + f_ng_n = 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbb{D}$  es denso. Sean  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que para cada  $z \in \mathbb{D}$  se tiene

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta.$$

Si la función constante 1 no se pudiera escribir de la forma  $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$ , con  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , tomemos  $\phi \in \mathfrak{M}$  no nulo tal que el ideal maximal  $\ker \phi$  contiene al ideal propio generado por  $f_1, \dots, f_n$ .

Como  $\mathbb{D}$  es denso en  $\mathfrak{M}$  con la topología débil-\*, existe una red  $\{z_\alpha\} \subset \mathbb{D}$  que tiende a  $\phi$ . En particular, para cada  $f_j$  se tiene que  $\lim_\alpha f_j(z_\alpha) = \widehat{f_j}(\phi) = 0, 1 \leq j \leq n$ . Esto contradice la acotación relativa a  $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)|$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\mathbb{D}$  no es denso en  $\mathfrak{M}$ , entonces existe un elemento no nulo  $\phi_0 \in \mathfrak{M}$  que no está en la adherencia de  $\mathbb{D}$ . Por definición de la topología de  $\mathfrak{M}$ , existen funciones  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\delta > 0$  tales que  $\phi_0(f_j) = 0, j = 1, \dots, n$  y el abierto

$$\{\phi \in \mathfrak{M} : |\phi(f_j)| < \delta, 1 \leq j \leq n\}$$

no corta a  $\mathbb{D}$ . En particular, para cada  $z \in \mathbb{D}$  se cumple que

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta$$

y las funciones  $f_1, \dots, f_n$  están en un ideal propio de  $J \subset \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  ya que  $J \subset \ker \phi_0$ .

La afirmación de que  $f_1, \dots, f_n$  están en un ideal propio es equivalente a la afirmación de que la función constante 1 no se puede escribir de la forma  $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1$ , con  $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , ya que  $\phi(1) = 1$  y  $\phi(f_1 g_1 + \dots + f_n g_n) = \phi(f_1)\phi(g_1) + \dots + \phi(f_n)\phi(g_n) = 0$ .

□

Introducir la noción de  $Cl(f, \alpha)$  y explicitar que el otro contenido también es cierto.

**Proposición 4.0.9.** Para todo  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = 1$  se cumple que

$$\widehat{f}(\mathfrak{M}_\alpha) \subset Cl(f, \alpha).$$

*Demostración.* Sea  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ . Veamos que existe una sucesión  $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$  tal que

$$(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$$

$$(IV) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \widehat{f}(\phi).$$

Como  $\Delta$  es denso en  $\mathfrak{M}$  con la topología débil-\*, se cumple que existe  $\{z_\alpha\} \subset \mathbb{D}$  tal que  $\delta_{z_\alpha} \rightarrow \phi$ . Es decir, para toda función  $h \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$  se tiene que  $h(z_\alpha) \rightarrow \widehat{h}(\phi)$ . En particular, para la función identidad es cierto por lo que, como  $\phi \in \mathfrak{M}_\alpha$ , tenemos

$$\widehat{\text{id}}(\phi) = \pi(\text{id}) = \alpha.$$

Podemos elegir una sucesión  $(i_n)$  tal que a la vez  $\lim z_{i_n} = \alpha$  y  $\lim f(z_{i_n}) = \widehat{f}(\phi)$ . Es decir...

Si tomamos ahora  $\{z_{\alpha_n}\}$  una subsucesión de  $\{z_\alpha\}$  cumplirá que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$  y, además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \widehat{f}(\phi)$ . Es decir,  $\widehat{f}(\phi) \in Cl(f, \alpha)$ . □

Comentar el resultado 6.6 del libro de Garnett y compararlo con lo de Mortini, donde la función no es holomorfa, que está en la página 124.



# Apéndice A

## Notación

$\mathcal{H}(U)$ : espacio de las funciones holomorfas en  $U$ .

$\mathcal{H}^\infty(U)$ : espacio de las funciones holomorfas y acotadas en  $U$ .

$\mathbb{D}$ : disco unidad.

$\overline{\mathbb{D}}$ : disco unidad cerrado.

$\partial\mathbb{D}$ : borde del disco unidad.

$L^\infty(U)$ : espacio de funciones medibles en  $U$ , esencialmente acotadas.

$\mathfrak{M}(B)$ : espacio de los homomorfismos complejos del álgebra  $B$ .



# Bibliografía

- ANSEMIL, J. M. M. y MIRAMONTES, S. P. *Análisis de Funciones de Variable Compleja*, 2015.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978. ISBN 0387903283.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable II*. Springer, 1995. ISBN 0387944605.
- DETTMAN, J. W. *Applied Complex Variables*. Dover Publications, 1984. ISBN 048664670X.
- GARNETT, J. *Bounded Analytic Functions*. Springer-Verlag New York, 2007. ISBN 9780387336213.
- GARNETT, J. B. y MARSHALL, D. E. *Harmonic measure*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521720605.
- HOFFMAN, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Dover Publications, 1988. ISBN 048665785X.
- KODAIRA, K. *Complex Analysis*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511804045.
- LANG, S. *Complex Analysis*. Springer, 1999. ISBN 0387985921.
- LIN, I.-H. *Classical Complex Analysis: A Geometric Approach (Volume 2)*. World Scientific, 2010. ISBN 9814271292.
- MORTINI, R. The mapping properties of some non-holomorphic functions on the unit disk. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, vol. 21(1), páginas 117–125, 2014.
- NEEDHAM, T. The geometry of harmonic functions. *Mathematics Magazine*, vol. 67(2), páginas 92–108, 1994.
- NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997. ISBN 0198534477.
- RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.





# Todo list

■ Empezar comentando cómo calcular el radio de convergencia, que los ejemplos son de series con radio de convergencia 1 y que vas a mostrar cómo difieren el comportamiento en la frontera de unos a otros. . . . .	3
■ Hacer dibujo, como en el libro de Lin. . . . .	4
■ Decir que en un capítulo posterior vamos a extender este ejemplo (en el capítulo de espacios de Banach). . . . .	7
■ Repasar lo que viene a continuación. . . . .	14
■ Revisar . . . . .	18
■ Cambiar esta definición para que admita una cantidad finita de ceros que estarán hasta un cierto $n_0$ , a partir del cual todos los elementos serán no nulos. . . . .	21
■ Añadir resultados de convergencia y convergencia absoluta en productos infinitos . . .	21
■ Añadir comentario sobre la equivalencia de las tres situaciones. . . . .	22
■ Que $ f(z)  \leq 1$ se tiene porque los términos $\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z}$ definen un automorfismo del disco unidad que lleva el disco abierto en el disco abierto y el borde en el borde. Falta ver que $f(z)$ tiene los mismos ceros que $\alpha_n$ . . . . .	23
■ Reestructurar estos dos párrafos siguientes: . . . . .	26
■ Hablar más de las evaluaciones. Las evaluaciones en puntos del disco abierto son elementos del espectro. . . . .	27
■ Aquí conviene decir que la función identidad tiene norma 1 y cada $\varphi$ también, por lo que $ \pi(\varphi)  \leq 1$ . Es decir, que la imagen de $\pi$ está contenida en el disco unidad cerrado. . . . .	27
■ Aquí conviene ligarlo con lo anterior, cuando has visto que la fibra de cada $z$ del disco abierto es la evaluación en $z$ . Y decir que puedes descomponer el espectro como unión disjunta de sus fibras. . . . .	28
■ Observemos que la imagen de toda función constante por cualquier elemento del espectro es ella misma. Además, la identidad es una función de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ de norma 1. . . . .	28
■ Las fibras sobre los puntos del disco abierto tienen un único elemento, pero que sobre los números del borde del disco la fibra tiene muchos. . . . .	28
■ Introducir la noción de $Cl(f, \alpha)$ y explicitar que el otro contenido también es cierto. . .	30
■ Podemos elegir una sucesión $(i_n)$ tal que a la vez $\lim z_{i_n} = \alpha$ y $\lim f(z_{i_n}) = \widehat{f}(\phi)$ . Es decir... . . . . .	30
■ Comentar el resultado 6.6 del libro de Garnett y compararlo con lo de Mortini, donde la función no es holomorfa, que está en la página 124. . . . .	31