Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Celia de Frutos Palacios [1]

19 de septiembre de 2018

[1] https://github.com/Celia95/TFG

Objetivos

- Estudiar el comportamiento de funciones en el disco unidad.
- Analizar cuándo una función puede extenderse a la frontera.
- Mostrar la interacción entre los valores en la frontera y el interior del disco.
- Desarrollar aplicaciones informáticas que permitan visualizar y analizar ejemplos concretos.

Antecedentes

- Cauchy: uso de integración en el estudio de funciones holomorfas.
- Riemann: punto de vista geométrico y funciones conformes.
- Weierstrass: series de potencias y productos infinitos.

En el desarrollo del trabajo nos adentramos en cuestiones que desarrollan aspectos de nuestro problema desde los tres puntos de vista: analítico, geométrico y algebraico.

Problema de Dirichlet

Dada una función $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ continua queremos encontrar una función armónica en el disco que coincide en el borde del disco con f.

Integral de Poisson

- Integral de Poisson de una función $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$:

$$F = P[f] : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})dt.$$

- La integral de Poisson proporciona una solución afirmativa al problema de Dirichlet.

$$u : z = re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & \text{si } 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Teorema de Fatou y teorema de Carathéodory

Teorema de Fatou

Para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, existe una función $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ definida por

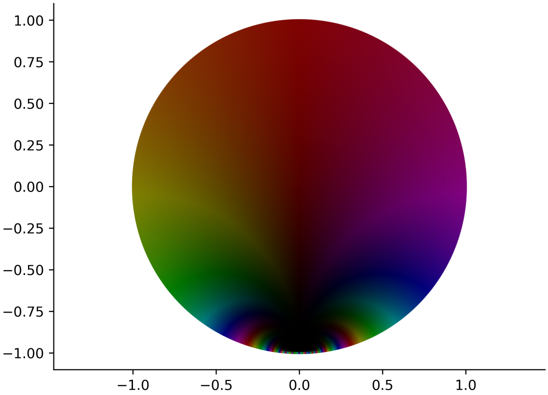
$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1} f(re^{it})$$

en casi todo punto.

Teorema de Carathéodory

Sea φ una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en un dominio de Jordan Ω. Entonces φ tiene una extensión continua al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y la extensión es inyectiva de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$.

Representación de $e^{\frac{z-i}{z+i}}$ y límites radiales

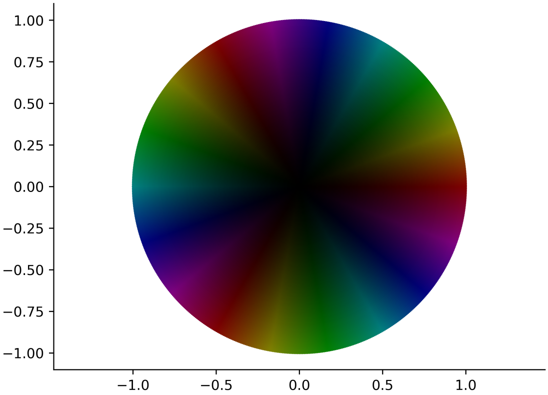


Aplicación informática

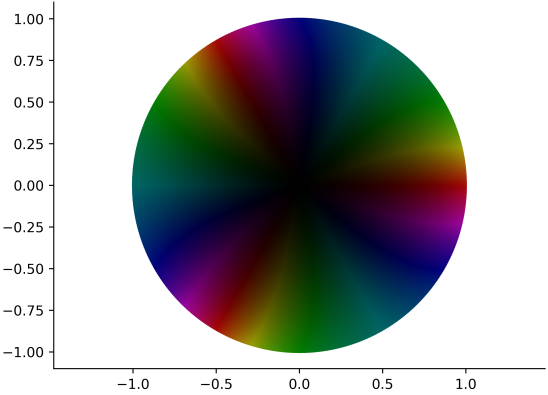
- Técnica de coloreado del dominio (*domain coloring*).
- Representación de funciones complejas.
- Resolución del problema de Dirichlet para el disco.

Técnica de coloreado del dominio

Representación de z^3

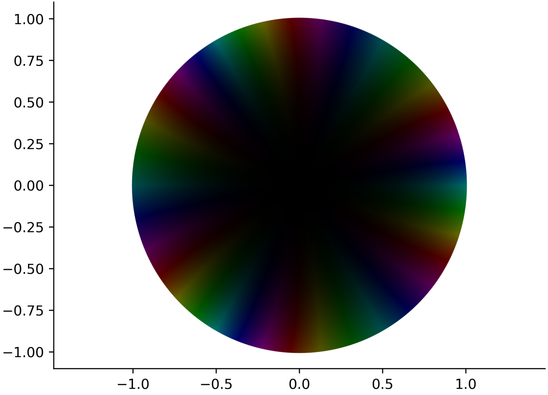


Representación de $e^{z^3} - 1$



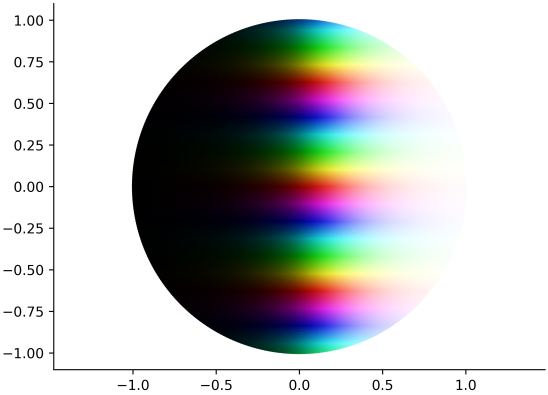
$$e^{z^3} - 1 = z^3 + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \cdots$$

Diferencia entre z^3 y $e^{z^3} - 1$

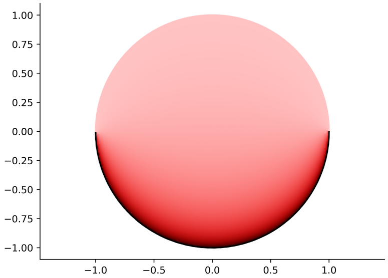


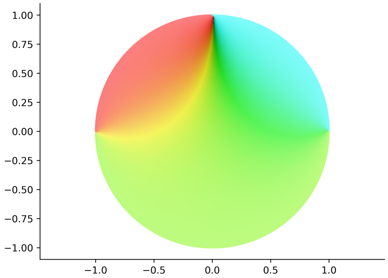
$$e^{z^3} - 1 - z^3 = \frac{z^6}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{12}}{4!} + \cdots$$

Extensión al disco de la función $e^{10\cos(t)+10i\,\mathrm{sen}(t)}$



Extensión al disco de funciones con alguna discontinuidad en el borde





Código: color

```python
    @staticmethod
    def __brightness(x):
        if x <= 1:
            return math.sqrt(x) / 2
        else:
            return 1 - 8 / ((x + 3) ** 2)

    @staticmethod
    def __complex_color(z):
        if z == 0:
            return colorsys.hsv_to_rgb(0, 1, 0)
        else:
            b = Plotter.__brightness(abs(z))
            h = Plotter.__decimal_part(cmath.phase(z) / (2 * cmath.pi))
            s = Plotter.__truncate((1 - b ** 4) ** 0.25)
            v = Plotter.__truncate(b)
            return colorsys.hsv_to_rgb(h, s, v)
```

Código: integral de Poisson

```
class BoundaryFunction(AbstractFunction):
    def __init__(self, f, steps=300):
        AbstractFunction.__init__(self, f)
        self.__steps = steps

    def eval(self, r, theta):
        if r < 1:
            return self.__integral(-cmath.pi, cmath.pi, self.
                __steps, r, theta) / (2 * cmath.pi)
        else:
            return self.f(theta)
```

Código: integral de Poisson

```
    def __integral(self, limit_inf, limit_sup, n, r, theta):
        h = (limit_sup - limit_inf) / n
        sum = 0
        for i in range(0, n + 1):
            aux = self.__poisson_integral(r, theta, limit_inf + i * h)
            if (i == 0) or (i == n):
                sum = sum + aux
            else:
                sum = sum + 2 * aux
        return sum * h / 2

    @staticmethod
    def __poisson_kernel(r, theta, t):
        return (1 - r ** 2) / (1 - 2 * r * cmath.cos(theta - t) + r ** 2)

    def __poisson_integral(self, r, theta, t):
        return self.f(t) * self.__poisson_kernel(r, theta, t)
```

Conceptos sobre álgebras de Banach

- Un espacio vectorial complejo X, dotado de una norma $\|\cdot\|$ se denomina espacio de Banach si es completo.
- Decimos que un álgebra B, dotada de una norma $\|\cdot\|$ es un álgebra de Banach si como espacio normado $(B, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y, además, para el producto satisface:

$$\forall x, y \in B : \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

- $(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}), \|\cdot\|_\infty)$ es un álgebra de Banach conmutativa.

Espectro de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ y transformada de Gelfand

- El espacio dual de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, denotado por $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})^*$, es el espacio de las aplicaciones $\phi : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ lineales y continuas, cuya norma natural viene dada por:

$$\|\phi\| = \sup_{\|z\|\leq 1} |\phi(z)| \,.$$

- El espectro de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, denotado por $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}))$, es el espacio de los homomorfismos $\phi : \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ no nulos.
- Transformada de Gelfand: $f \mapsto \widehat{f}$, con

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathfrak{M} &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(f), \end{aligned}$$

Fibras

- Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, la fibra de $\mathfrak{M}$ sobre α se define como

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{\phi \in \mathfrak{M} : \phi(\mathrm{id}) = \alpha\}.$$

Sea f una función en $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ y sea α un punto del círculo unidad. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos en el disco unidad $\mathbb{D}$ que converge a α, y supongamos que el límite $\zeta = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existe. Entonces existe un homomorfismo complejo ϕ en la fibra $\mathfrak{M}_\alpha$ tal que $\phi(f) = \zeta$.

Sea $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ y sea $\alpha \in \partial\mathbb{D}$. La función $\widehat{f}$ es constante en la fibra $\mathfrak{M}_\alpha$ si y solo si f se puede extender con continuidad a $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$.

El conjunto de valores adherentes

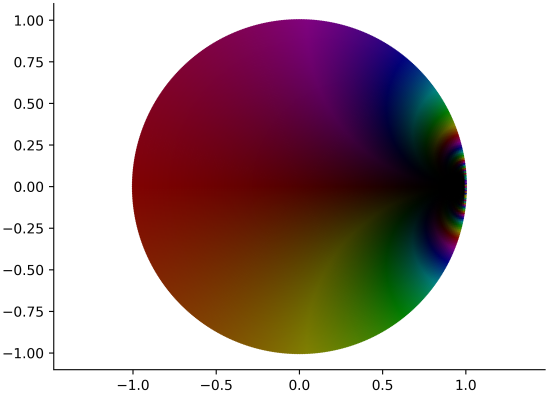
- Dados $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ y $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, definimos el conjunto de valores adherentes de f en α como

$$Cl(f,\alpha) = \{\zeta : \exists \{z_n\} \subset \mathbb{D}, \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \zeta\}.$$

- El conjunto de valores adherentes de f en α contiene un único punto si y solo si f es continua en $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$.

$$Cl(f,\alpha) = \widehat{f}(\mathfrak{M}_\alpha).$$

Representación de $e^{\frac{z+1}{z-1}}$



Lema de Schwarz-Pick

- Definimos la familia de automorfismos $\{\alpha_p : p \in \mathbb{D}\}$ dada por

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z}, z \in \mathbb{D}.$$

- Definimos el disco no euclídeo de centro p y radio r como

$$\Delta(p, r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \frac{p - z}{1 - \bar{p}z} \right| < r \right\} = \{ z \in \mathbb{D} : |\alpha_p(z)| < r \}.$$

Lema de Schwarz-Pick

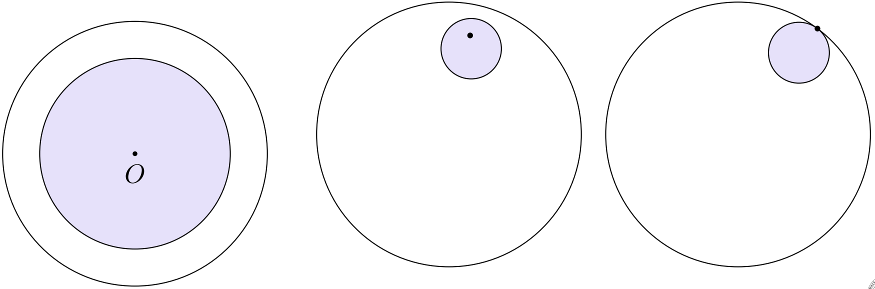
Toda función holomorfa f del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo lleva $\Delta(p, r)$ en $\Delta(f(p), r)$.

Horodiscos

- Llamaremos horodisco en el punto w y radio λ al conjunto

$$H(w,\lambda) = \{z \in \mathbb{D} : |1 - \overline{w}z|^2 < \lambda(1 - |z|^2)\}.$$

- Discos no euclídeos $\Delta(0,r)$, $\Delta(p_n, r_n)$ y horodisco $H(w,\lambda)$.



Límite y derivada angular

- Si f es una función definida en $\mathbb{D}$ y $w \in \partial\mathbb{D}$, se define el límite angular de f en w como

$$\angle \lim_{z \to w} f(z) = L.$$

- Decimos que una función f holomorfa del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo tiene derivada angular en $w \in \partial\mathbb{D}$ si para algún $\eta \in \partial\mathbb{D}$, el límite

$$\angle \lim_{z \to w} \frac{\eta - f(z)}{w - z}$$

existe. Se dice que dicho límite es la derivada angular de f en w y lo denotamos por $\angle f'(w)$.

Teorema de Julia

Si f es una función holomorfa del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo no constante, y existen $w, \mu \in \partial\mathbb{D}$ y una sucesión $\{p_n\} \in \mathbb{D}$ que verifican

(a) $$\lim_{n\to\infty} p_n = w;$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = \mu;$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|f(p_n)|}{1-|p_n|} = \delta < \infty.$$

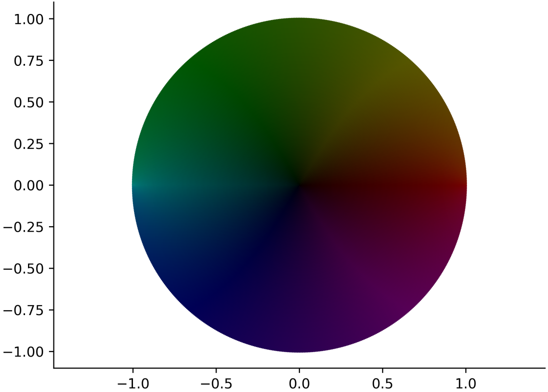
Entonces se cumple que

(I) $\delta > 0$;

(II) $f(H(w,\lambda)) \subseteq H(\mu, \lambda\delta)$, para todo $\lambda > 0$;

(III) $\angle \lim_{z\to w} f(z) = \mu$.

Representación de la función $g = \sigma^{-1} \circ \phi_a \circ \sigma$, con $a = \frac{1}{2}$.



Bibliografía

- *Real and Complex Analysis* de Walter Rudin.
- *Harmonic measure* de John B. Garnett y Donald E. Marshall.
- *The Fundamental Theorem of Algebra: A Visual Approach* de Daniel J. Velleman.
- *Banach Spaces of Analytic Functions* de Kenneth Hoffman.
- *Composition Operators and Classical Function Theory* de Joel H. Shapiro.