Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Celia de Frutos Palacios

30 de abril de 2018

Capítulo 1

Ejemplos

En esta sección vamos a estudiar el comportamiento de algunas series de potencias en el borde de su disco de convergencia.

Ejemplo 1.0.1. Mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1$$

diverge en todo punto tal que $|z| = 1$.

Demostración. Es fácil ver que $1 - z^{n+1} = (1-z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$ así que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{1.1}$$

Si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ y la serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Si $|z| > 1$ entonces $\lim_{n\to} z^n = \infty$ y la serie diverge. Pero, ¿qué pasa cuando $|z| = 1$? La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge en todos los puntos del radio de convergencia pues $|z^n|$ no tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

Sin embargo, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ puede ser extendida a la función globalmente analítica $\frac{1}{1-z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gracias a una cantidad finita de prolongaciones analíticas.

Tomemos a un punto cualquiera de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y conectémoslo al origen 0 mediante la curva de Jordan $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Fijemos un punto z_1 en γ que cumpla $|z| < 1$. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ puede ser extendida analíticamente en z_1 de la siguiente forma:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - z_1 - (z - z_1)} = \frac{1}{1 - z_1} \frac{1}{1 - \frac{z - z_1}{1 - z_1}} = \frac{1}{1 - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_1}{1 - z_1} \right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z_1)^{n+1}} (z - z_1)^n, |z - z_1| < |1 - z_1|.$$

De nuevo, tomemos z_2 en γ tal que $|z_2 - z_1| < |1 - z_1|$ y $|z_2| \geq 1$. Podemos extender la serie de potencias a z_2.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_2)^{n+1}}(z-z_2)^n, |z-z_2| < |1-z_2|\,.$$

Después de un número finito de iteraciones, dado que la curva es un conjunto compacto, alcanzaremos el punto a y tendremos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}}(z-a)^n, |z-a| < |1-a|\,.$$

Así, decimos que hemos obtenido la prolongación analítica de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ que pasa por la curva γ. □

Ejemplo 1.0.2. Mostrar que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \; |z| < 1$$

diverge en $z = 1$ y converge en el resto de punto tales que $|z| = 1$;

Demostración. Para demostrar que la serie diverge en $z = 1$ y converge en el resto de punto tales que $|z| = 1$ vamos a aplicar el criterio de Dirichlet:

Sean $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ y $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ sucesiones tales que:

1. $\{a_n\}$ es monótona con límite 0
2. Las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ están acotadas

entonces $\sum_{n=1}^{N} a_n b_n$ converge.

En nuestro caso vamos a tomar $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = z^n$. La primera condición se cumple, veamos la que resta:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|\frac{z - z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}, \text{ si } z \neq 1, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Esto muestra que la condición se satisface para todo $z \neq 1$ en el disco unidad. Por lo tanto, la serie converge para todo z tal que $|z| \leq 1, z \neq 1$ y diverge para $|z| > 1$.

Vamos a ver que la suma de la serie es $\log \frac{1}{1-z}$. En efecto, derivando tenemos que

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \Rightarrow zg'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Si integramos ahora la expresión de la derecha tenemos que la suma es $\log \frac{1}{1-z}$.

□

Ejemplo 1.0.3. Mostrar que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},\ |z| < 1$$

converge absoluta y uniformemente en $|z| = 1$.

Demostración. Es fácil ver que converge absoluta y uniformemente en $|z| = 1$ dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| < \infty.$$

Vamos a ver que la suma de la serie es $z + \log(1-z)(1-z)$. En efecto, si derivamos nos queda

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} \Rightarrow zf'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = g(z) = \log \frac{1}{1-z}.$$

Integrando la expresión de la derecha tenemos el resultado.

□

Ejemplo 1.0.4. Mostrar que la serie lagunar,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n},\ |z| < 1$$

tiene una singularidad en cada punto tal que $|z| = 1$.

Demostración. Sea $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots$. Podemos escribir lo siguiente:

$$h(z^2) = h(z) - z,\ h(z^4) = h(z^2) - z^2,$$

y aplicando inducción tenemos que

$$h(z^{2^k}) = h(z^{2^{k-1}}) - z^{2^{k-1}}$$

Así,

$$h(z) = z + h(z^2) = z + z^2 + h(z^4) = \cdots = z + z^2 + \cdots + z^{2^{k-1}} + z^{2^k}.$$

Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $r \in (0,1)$ y llamamos r a $e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}$, tenemos que

$$h(r^{2^n}) = \sum_{k=0}^{\infty} (r^{2^n})^{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^n \cdot 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2^{(n+k)}} = \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k}.$$

Como

$$\sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \geq \sum_{k=n}^{N} r^{2^k} > (N+1) r^{2^k} \to N+1,$$

entonces $\lim_{r \to 1} \left| h(re^{2\pi i \frac{m}{2^n}}) \right| = \infty\ \forall m, n.$

Puesto que $\{e^{2\pi i \frac{m}{2^n}} : m, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\partial\mathbb{D}$, todos los puntos del borde del disco unidad son singulares. □

Ejemplo 1.0.5. Mostrar que la función

$$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ z \in \mathbb{D}$$

es analítica, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y $f(t) \ \to 0$ cuando $t \to 1^-$.

Demostración. La función f es holomorfa ya que es la composición de funciones holomorfas. Obsérvese que el único punto singular es $z = 1$.

La función $g(z) = \frac{z+1}{z-1}$ lleva el disco en el semiplano $H = \{w : \operatorname{Re}(w) < 0\}$. Así pues, la exponencial lleva H en $\mathbb{D}$:

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| < 1.$$

La aplicación g es una transformada de Möbius, y las transformadas de Möbius tienen la propiedad de que llevan círculos a líneas o círculos. Como la función lleva -1 a 0, i a $-i$ y $-i$ a i, la imagen del círculo $|z| = 1$, ha de ser una línea.

Si tomamos la sucesión $\{t_n\}$ de término general t,

$$\frac{t+1}{t-1} \xrightarrow[t\to 1^-]{} -\infty \Rightarrow \exp\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0.$$

Si tomamos la sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = g(w_n)$, siendo $\{w_n\}$ la sucesión de término general $-1 + 2n\pi i$. Entonces,

$$z_n = \frac{2n\pi i}{-2 + 2n\pi i} = \frac{n\pi i}{n\pi i - 1} = \frac{(n\pi i + 1)n\pi i}{-n^2\pi^2 - 1} = \frac{-n^2\pi^2 + in\pi}{-n^2\pi^2 - 1}.$$

Como $g = g^{-1}$ tenemos

$$e^{g(z_n)} = e^{w_n} \to e^{-1} \neq 0.$$

$\square$

Capítulo 2

Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

2.1. Integral de Poisson y Teorema de Fatou

2.1.1. La Integral de Poisson

Definición 2.1.1. Se llama núcleo de Poisson a la función P definida por

$$P : (r,t) \in [0,1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \tag{2.1}$$

Podemos considerar el núcleo de Poisson como una función de dos variables r y t o como una familia de funciones de t que dependen de r.

Dados $z = re^{i\theta}$, con $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \tag{2.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int}+e^{-int}) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2\operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(re^{it})^n\right] = \operatorname{Re}\left[1 + 2\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right]. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{(1+re^{it})(1-\overline{re^{it}})}{|1-re^{it}|^2}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Propiedades del núcleo de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1, \forall r \in [0,1). \tag{2.3}$$

$$P_r(t) > 0, \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

$$P_r(t) = P_r(-t), \forall r \in [0,1), t \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

$$P_r(t) < P_r(\delta), 0 < \delta < \ |t| \leq \pi \tag{2.6}$$

$$\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0, \forall \delta \in (0,\pi] \tag{2.7}$$

Definición 2.1.2. Se llama integral de Poisson de una función $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ a la función F dada por

$$F : z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \mapsto F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it})dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como $F = P[f]$.

Además si f lleva $\partial\mathbb{D}$ en los reales, **??** nos muestra que

$$P[f] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt\right].$$

2.1.2. Teorema de Fatou

Para demostrar el Teorema de Fatou nos vamos a basar en unos resultados clásicos del libro [chap. 11]rudin.

Teorema 2.1.1. *Si $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ y $F = P[f]$, entonces*

$$\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$$

Teorema 2.1.2. *Sean $f \in C(\partial\mathbb{D}), F = P[f]$ y*

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(re^{i\theta}) & si\ r = 1 \\ F(re^{i\theta}) & si\ 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

Entonces u es una función continua en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ que es armónica en $\mathbb{D}$.

Teorema 2.1.3 (Teorema de Fatou)**.** *Para toda función $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$, existe una función $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ definida por*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it}) \tag{2.8}$$

en casi todo punto.

Se tiene la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$. Para todo $z \in U$, la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi \tag{2.9}$$

se satisface, donde γ es el círculo unidad positivamente orientado: $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Las funciones $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})e^{-int}dt = 0, n = -1, -2, \ldots \tag{2.10}$$

Demostración. La existencia de f^* se sigue de los teoremas **??** y **??**.

Por **??**, tenemos que $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Si $z \in U$ y $|z| < r < 1$, tomemos $\gamma_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z}e^{it}dt$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión tal que $r_n \to 1$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{-it}}dt \tag{2.11}$$

Por lo que ya hemos probado **??**. Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \ldots$$

Tomando de nuevo una sucesión $\{r_n\}$ que tienda a 1, el teorema de la convergencia dominada garantiza que f^* cumple **??**. Además, podemos convertir **??** en una integral de Poisson, si $z = re^{i\theta}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f^*(e^{it})dt$$

De esto concluimos que $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$, así que ambas normas coinciden. □

2.2. Teorema de Carathéodory

Definición 2.2.1. Aplicación conforme Sean U y $V \subset \mathbb{C}^n$. Una aplicación $f : U \to V$ se llama conforme en un punto $u \in U$ si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por u.

Proposición 2.2.0.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$. Una aplicación $f : U \to \mathbb{C}$ es conforme en U si $f \in \mathcal{H}(U)$ y $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in U$.*

Demostración. Supongamos que $f(z)$ es una función holomorfa en U tal que $f'(z) \neq 0$ para $z \in U$ y consideremos $f : z \to w = f(z)$. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva suave. Consideremos $\lambda = (f \circ \gamma)(t)$. Por la regla de la cadena, λ es continuamente diferenciable y como $f'(\gamma(t)) \neq 0$, tenemos

$$\lambda'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t). \tag{2.12}$$

Por lo tanto, λ es una curva suave en el plano w.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ curvas suaves tales que $c = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$. Definimos el ángulo θ entre γ_1 y γ_2 en c como el argumento de $\frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}$. Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos que

$$\arg \lambda_1'(a) = \arg f'(c) + \arg \gamma_1'(a)$$
$$\arg \lambda_2'(a) = \arg f'(c) + \arg \gamma_2'(a)$$

y entonces

$$\arg \frac{\lambda_2'(a)}{\lambda_1'(a)} = \arg \lambda_2'(a) - \arg \lambda_1'(a) = \arg \gamma_2'(a) - \arg \gamma_1'(a) = \arg \frac{\gamma_2'(a)}{\gamma_1'(a)}.$$

Así, el ángulo entre las curvas λ_1 y λ_2 en $d = \lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ es igual al ángulo θ entre las curvas γ_1 y γ_2 en c.

□

Vamos a probar un resultado recíproco a éste que incluye algunas restricciones adicionales sobre f.

Proposición 2.2.0.2. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una aplicación conforme en U que admite derivadas parciales continuas con respecto a x e y. Entonces $f \in \mathcal{H}(U)$ y $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in U$.*

Demostración. Fijemos z un punto arbitrario de U, y elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) \subset U$. Consideremos la familia de curvas suaves $\gamma_\theta(t) = z + te^{i\theta}, 0 \leq t \leq \varepsilon, \theta \in \mathbb{R}$. Nótese que el ángulo entre γ_0 y γ_θ en z es θ.

Tomemos la familia de curvas $\lambda_\theta = (f \circ \gamma_\theta$. Como f es conforme, el ángulo entre λ_0 y λ_θ en $f(z)$ es θ. Como f es conforme, el ángulo entre λ_0 y λ_θ, es decir, el argumento de $\frac{\lambda_\theta'(0)}{\lambda_0'(0)}$ es igual a θ. Si escribimos el argumento de $\lambda_0'(0)$ como α, el argumento de $\lambda_\theta'(0)$ será $\alpha + \theta$ y, por tanto,

$$e^{-i(\theta+\alpha)}\lambda_\theta'(0) = |\lambda_\theta'(0)| > 0. \tag{2.13}$$

??, nos dice que

$$\begin{aligned}\lambda_\theta'(0) &= u_x\cos\theta + u_y\sin\theta + i(v_x\cos\theta + v_y\sin\theta) = \\ &= (u_x+iv_x)\cos\theta + (u_y+iv_y)\sin\theta = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta,\end{aligned}$$

por la identidad de Euler,

$$2\lambda_\theta'(0) = (f_x - if_y)e^{i\theta} + (f_x+if_y)e^{-i\theta}.$$

Entonces por **??**,

$$(f_x - if_y)e^{-i\alpha} + (f_x+if_y)e^{-2i\theta - i\alpha} = 2\left|\lambda_\theta'(0)\right|.$$

Derivando en ambos lados con respecto a θ, obtenemos

$$-2i(f_x+if_y)e^{-2i\theta-i\alpha} = \frac{2d}{d\theta}\left|\lambda_\theta'(0)\right|.$$

Resulta que esa cantidad cumple que al multiplicarla por $-2ie^{-2i\alpha-i\theta}$ tiene siempre parte imaginaria nula. Como el ángulo θ es arbitrario (pero α es fijo), tiene que ser nulo f_x+if_y, ya que el producto por $e^{-2i\alpha-i\theta}$ resulta ser entonces un giro de ángulo arbitrario. Solo puede tener parte imaginaria nula siempre si es nulo, claro.

Como θ es una variable real y la parte de la derecha de la igualdad solo toma valores reales, concluimos que

$$f_x + if_y = 0$$

por lo que

$$u_x + v_y + i(v_x + u_y) = 0.$$

Como vemos, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en U. Luego $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en $z = x + iy \in U$. Falta ver que $f(z) \neq 0, z \in U$. □

Teorema 2.2.1 (Teorema de Carathéodory)**.** *Sea φ una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en un dominio de Jordan Ω. Entonces φ tiene una extensión continua al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, y la extensión es inyectiva de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Vamos a suponer que Ω está acotado. Fijemos $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Primero vamos a probar que φ tiene una extensión continua en ζ. Sea $0 < \delta < 1$,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$. Entonces $\varphi(\gamma_\delta)$ es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|\, ds$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 \, ds$$

entonces para $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int\int_{\mathbb{D}\cap D(\zeta,\rho)} |\varphi'(z)|^2 \, dxdy = \pi \text{Área}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta,\rho))) < \infty$$

Entonces, existe una sucesión $\{\delta_n\} \downarrow 0$ tal que $L(\delta_n) \to 0$. Cuando $L(\delta_n) < \infty$, la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ tiene extremos $\alpha_n, \beta_n \in \overline{\Omega}$ y ambos puntos deben estar en $\Gamma = \partial\Omega$. De hecho, si $\alpha_n \in \Omega$, entonces algún punto cerca de α_n tiene dos preimágenes distintas en $\mathbb{D}$ y esto es imposible pues φ es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \to 0 \tag{2.14}$$

Sea σ_n el subarco cerrado de Γ que tiene extremos α_n y β_n y con un diámetro menor. Entonces **??** implica que $\text{diam}(\sigma_n) \to 0$ porque Γ es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan, $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla U_n es acotada. Entonces $U_n \subset \Omega$ ya que $\mathbb{C}^* \setminus \overline{\Omega}$ es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \to 0, \text{ concluimos que } \text{diam}(U_n) \to 0. \tag{2.15}$$

Tomamos $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$. Sabemos que para n suficientemente grande, $\varphi(D_n) = U_n$. Si no, por conexión tendríamos que $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$ y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contradice con **??**. Entonces $\text{diam}(\varphi(D_n)) \to 0$ y $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$ es un solo punto pues $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$. Esto significa que φ tiene una extensión continua en $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$. La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Denotemos ahora por φ a la extensión $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$. Como $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$, φ lleva $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$. Para probar que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2), \zeta_1 \neq \zeta_2$. El argumento utilizado para mostrar que $\alpha_n \in \Gamma$, también prueba que $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$, así que podemos suponer que $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}, j = 1, 2$. La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio $W \subset \Omega$, luego $\varphi^{-1}(W)$ es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\})$$

Pero como $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y φ es constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$. Se tiene que φ es constante, por el principio de reflexión de Schwarz, y esta contradicción prueba que $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$. $\square$

El resultado que presentamos a continuación es un recíproco parcial del teorema de Carathéodory. Muestra que la inyectividad en el borde del dominio se traslada al interior, en condiciones adecuadas.

Teorema 2.2.2. *Sea* Γ *una curva simple, cerrada y suave con interior* Ω*. Sea* $f \in \mathcal{H}(\Gamma \cup \Omega)$ *una aplicación inyectiva en* Γ*. Entonces* f *es holomorfa e inyectiva en* Ω*.*

Demostración. La aplicación $w = f(z)$ lleva Γ en un camino simple, cerrado y suave Γ'. Sea w_0 un punto arbitrario que no esté en Γ'. Entonces, si llamamos Γ_+ al camino positivamente orientado,

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si w_0 está fuera de Γ' y es ± 1 si w_0 está dentro de Γ'. Sin embargo, n no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de $f(z) - w_0$ dentro de Γ. Entonces, $n = 1$ si w_0 está dentro de Γ'.

Esto prueba que $f(z) = w_0$ tiene una sola solución si w_0 está dentro de Γ', que $f(z)$ es holomorfa e inyectiva en Ω y lleva Ω en Ω' (el interior de Γ') y que la dirección positiva de Γ' se corresponde con la dirección positiva de Γ. $\square$

Capítulo 3

Productos infinitos

Definición 3.0.1. Sea $\{u_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ una sucesión de números complejos. Su producto infinito se define como el límite de los productos parciales $u_1 u_2 \cdots u_N$ cuando N tiende a infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n.$$

Además, decimos que el producto converge cuando el límite existe y no es cero. En otro caso, se dice que el producto diverge.

Proposición 3.0.0.1. *Sea* $\{u_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ *una sucesión de números complejos no nulos. Si* $\lim u_n = 1$ *y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n$$

converge absolutamente, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |\log u_n|$ *converge, entonces el producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

converge absolutamente.

Demostración. Si n es suficientemente grande, entonces u_n puede escribirse como $u_n = 1-\alpha_n$, donde $|\alpha_n| < 1$, y entonces podemos definir $\log u_n$ como $\log(1-\alpha_n)$. Por hipótesis, se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1-\alpha_n)$$

converge. Así que las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} \log u_n$$

tienen límite. Como la función exponencial es continua, podemos exponenciar las sumas parciales y vemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n$$

existe. □

Lema 3.0.1. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $\alpha_n \neq 1$ para todo n. Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

converge. Entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n)$$

converge absolutamente.

Demostración. Para una cantidad finita n, tenemos que $|\alpha_n| < \frac{1}{2}$, así que $\log(1-\alpha_n)$ está definido por la serie usual, y para alguna constante C, tenemos

$$|\log(1-\alpha_n)| \leq C\,|\alpha_n|\,.$$

Por tanto, el producto converge absolutamente por definición y utilizando la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ converge. □

3.1. Productos de Blaschke

Proposición 3.1.0.1. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión en el disco unidad tal que $\alpha_n \neq 0\,\forall n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)$ converge. Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

converge uniformemente para $|z| \leq r < 1$ y define una función holomorfa en el disco unidad que tiene los mismos ceros que α_n. Además $|f(z)| \leq 1$.

Demostración. Sea

$$b_n(z) = \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Por el lema **??**, sabemos que $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge uniformemente si $\sum_{n=1}^{\infty} |1-b_n|$ converge.

$$\begin{aligned}|1-b_n(z)| &= \left|1+\frac{z-\alpha_n}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n+(z-\alpha_n)|\alpha_n|}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\right| = \\ &= \left|\frac{(1-|\alpha_n|)(\alpha_n+|\alpha_n|z)}{(1-\overline{\alpha_n}z)\alpha_n}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|\alpha_n|).\end{aligned}$$

Entonces si $|z| \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|1-b_n(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)$$

lo que prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|1-b_n(z)|$ converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado de radio r. Por lo que $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$ converge uniformemente para $|z| \leq r < 1$. Además f define una función holomorfa en el disco unidad ya que b_n son funciones holomorfas y su producto infinito converge uniformemente en los compactos.

Sea $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$ el producto infinito y $B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} b_k$ el producto parcial,

$$\left|\frac{B(0)}{B_n(0)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{B(e^{i\theta})}{B_n(e^{i\theta})}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|B(e^{i\theta})\right| d\theta.$$

Tomando $n \to \infty$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|B(e^{i\theta})\right| d\theta = 1,$$

y, por consiguiente, $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$ en casi todo punto. Es decir, $|f(z)| = 1$ en $\partial\mathbb{D}$. □

Apéndice A

Notación

$\mathcal{H}(U)$: espacio de las funciones holomorfas en U.
$\mathcal{H}^\infty(U)$: espacio de las funciones holomorfas y acotadas en U.
$\mathbb{D}$: disco unidad.
$\overline{\mathbb{D}}$: disco unidad cerrado.
$\partial\mathbb{D}$: borde del disco unidad.
$L^\infty(U)$: espacio de funciones medibles en U, esencialmente acotadas.