

# Problemas geométricos que arrancan de la teoría clásica de funciones

Celia de Frutos Palacios

24 de marzo de 2018



# Capítulo 1

## Teorema de Fatou y Teorema de Carathéodory

### 1.1. Integral de Poisson y Teorema de Fatou

#### 1.1.1. La Integral de Poisson

**Definición 1.1.1.** Se llama núcleo de Poisson a la función  $P$  definida por

$$P : (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$$

Si  $z = re^{i\theta}$ , con  $r \in [0, 1)$  y  $\theta \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right] = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}$$

Propiedades de la integral de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1, \forall r \in [0, 1) \quad (1.1)$$

$$P_r(t) > 0, \forall r \in [0, 1), t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

$$P_r(t) = P_r(-t), \forall r \in [0, 1), t \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

$$P_r(t) < P_r(\delta), 0 < \delta < |t| \leq \pi \quad (1.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\delta) = 0, \forall \delta \in (0, \pi] \quad (1.5)$$

**Definición 1.1.2.** Se llama integral de Poisson de una función  $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$  a la función  $F$  definida en  $\mathbb{D}$  dada por

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt.$$

Algunas veces nos convendrá referirnos a ella como  $F = P[f]$ .

### 1.1.2. Teorema de Fatou

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Fatou). *Para toda función  $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{D})$ , existe una función  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  definida en casi todo punto tal que*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \quad (1.6)$$

*Se tiene la igualdad  $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$ . Para todo  $z \in U$ , la fórmula integral de Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.7)$$

*se satisface, donde  $\gamma$  es el círculo unidad positivamente orientado:  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .*

*Las funciones  $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$  que se obtienen mediante este procedimiento son precisamente aquellas que cumplen la siguiente relación*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \dots \quad (1.8)$$

*Demostración.* La existencia de  $f^*$  se sigue del Corolario del Teorema 11.19 (??).

Por ??, tenemos que  $\|f^*\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .

Si  $z \in U$  y  $|z| < r < 1$ , tomemos  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} dt$$

Sea  $\{r_n\}$  una sucesión tal que  $r_n \rightarrow 1$ . Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{it}} dt \quad (1.9)$$

Por lo que ya hemos probado ?? . Por el teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) \xi^n d\xi = 0, n = 0, 1, \dots$$

Pasando al límite tenemos que  $f^*$  cumple ??. Además, podemos convertir ?? en una integral de Poisson, si  $z = re^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt \end{aligned}$$

De esto concluimos que  $\|f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty$ , así que ambas normas coinciden.  $\square$

## 1.2. Teorema de Carathéodory

**Definición 1.2.1.** Aplicación conforme Sean  $U$  y  $V \subset \mathbb{C}^n$ . Una aplicación  $f : U \rightarrow V$  se llama conforme en un punto  $u \in U$  si preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por  $u$ .

**Proposición 1.2.0.1.** Sea  $U \subset \mathbb{C}$ . Una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme en  $U$  si (y solo si)  $f \in \mathcal{H}(U)$  y  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ .

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en  $U$  y  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ . Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  una curva simple y sea  $z = z(t) = x(t) + iy(t) = \gamma(t)$  la ecuación paramétrica de  $\gamma$ . Consideremos  $w = (f \circ \gamma)(t)$  holomorfa en  $U$ .

Ahora por la regla de la cadena  $w'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Como el argumento es aditivo para la multiplicación de funciones, tenemos

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(\gamma(t_0)) + \arg \gamma'(t_0)$$

$f(z)$  rota el vector tangente a  $\gamma(t_0) = z_0$  por el mismo ángulo ( $\arg f'(\gamma(t_0))$ ), independientemente del camino  $\gamma$ .

Si nos fijamos en el módulo, obtenemos un resultado similar,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Así,  $f(z)$  cambia el módulo de la distancia entre los puntos por el mismo factor, independientemente de la dirección en la que nos aproximemos a  $z_0$ .

Podemos escribir

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

Entonces

$$\arg(w - w_0) = \arg\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) + \arg(z - z_0)$$

Como  $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$ , tomando límites tenemos

$$\phi = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(w - w_0) = \arg f'(z_0) + \theta$$

La aplicación  $f$  ha rotado el vector tangente a  $z_0$  un ángulo dado por  $\arg f'(z_0)$ . Sean dos curvas que pasan por  $z_0$  con ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con respecto al eje  $x$ . Entonces el ángulo entre sus imágenes en  $w_0$  es

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 + \arg f'(z_0) - \theta_1 - \arg f'(z_0) = \theta_2 - \theta_1$$

Por lo tanto,  $f$  preserva la orientación y los ángulos entre curvas que pasan por  $z$ ,  $\forall z \in U$ .

□

**Teorema 1.2.1** (Teorema de Carathéodory). *Sea  $\varphi$  una aplicación conforme del disco unidad  $\mathbb{D}$  en un dominio de Jordan  $\Omega$ . Entonces  $\varphi$  tiene una extensión continua al disco cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ , y la extensión es inyectiva de  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Vamos a suponer que  $\Omega$  está acotado. Fijemos  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ . Primero vamos a probar que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\zeta$ . Sea  $0 < \delta < 1$ ,

$$D(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}$$

y tomemos  $\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \partial D(\zeta, \delta)$ . Entonces  $\varphi(\gamma_\delta)$  es una curva de Jordan de longitud

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| ds$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$L^2(\delta) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 ds$$

entonces para  $\rho < 1$

$$\int_0^\rho \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \int \int_{\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho)} |\varphi'(z)|^2 dx dy = \pi \text{Area}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, \rho))) < \infty$$

Entonces, existe una sucesión  $\{\delta_n\} \downarrow 0$  tal que  $L(\delta_n) \rightarrow 0$ . Cuando  $L(\delta_n) < \infty$ , la curva  $\varphi(\gamma_{\delta_n})$  tiene extremos  $\alpha_n, \beta_n \in \overline{\Omega}$  y ambos puntos deben estar en  $\Gamma = \partial\Omega$ . De hecho, si  $\alpha_n \in \Omega$ , entonces algún punto cerca de  $\alpha_n$  tiene dos preimágenes distintas en  $\mathbb{D}$  y esto es imposible pues  $\varphi$  es inyectiva. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \rightarrow 0 \tag{1.10}$$

Sea  $\sigma_n$  el subarco cerrado de  $\Gamma$  que tiene extremos  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  y con un diámetro menor. Entonces ?? implica que  $\text{diam}(\sigma_n) \rightarrow 0$  porque  $\Gamma$  es homeomorfa al círculo. Por el teorema de la curva de Jordan,  $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$  divide al plano en dos regiones, y una de ellas, llamémosla  $U_n$  es acotada. Entonces  $U_n \subset \Omega$  ya que  $\mathbb{C}^* \setminus \overline{\Omega}$  es conexo por arcos. Como

$$\text{diam}(\partial U_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \rightarrow 0, \text{ concluimos que } \text{diam}(U_n) \rightarrow 0. \tag{1.11}$$

Tomamos  $D_n = \mathbb{D} \cup \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}$ . Sabemos que para  $n$  suficientemente grande,  $\varphi(D_n) = U_n$ . Si no, por conexión tendríamos que  $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = U_n$  y

$$\text{diam}(U_n) \geq \text{diam}(\varphi(B(0, 1/2))) > 0$$

que contradice con ??. Entonces  $\text{diam}(\varphi(D_n)) \rightarrow 0$  y  $\bigcap \overline{\varphi(D_n)}$  es un solo punto pues  $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$ . Esto significa que  $\varphi$  tiene una extensión continua en  $\mathbb{D} \cap \{\zeta\}$ . La extensión a todos estos puntos define una aplicación continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

Denotemos ahora por  $\varphi$  a la extensión  $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ . Como  $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$ ,  $\varphi$  lleva  $\overline{\mathbb{D}}$  en  $\overline{\Omega}$ . Para probar que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$ ,  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . El argumento utilizado para mostrar que  $\alpha_n \in \Gamma$ , también prueba que  $\varphi(\partial\mathbb{D}) = \Gamma$ , así que podemos suponer que  $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$ ,  $j = 1, 2$ . La curva de Jordan

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

acota al dominio  $W \subset \Omega$ , luego  $\varphi^{-1}(W)$  es una de las dos componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\})$$

Pero como  $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \Gamma$ ,

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial W \cap \partial\Omega = \{\varphi(\zeta_1)\}$$

y  $\varphi$  es constante en un arco de  $\partial\mathbb{D}$ , se tiene que  $\varphi$  es constante y esta contradicción prueba que  $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$ .  $\square$

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $C$  un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable con interior  $D$ . Sea  $f \in \mathcal{H}(C \cup D)$  una aplicación inyectiva en  $C$ . Entonces  $f$  es holomorfa e inyectiva en  $D$ .*

*Demostración.* La aplicación  $w = f(z)$  lleva  $C$  en un camino simple, cerrado y continuamente diferenciable  $C'$ . Sea  $w_0$  un punto arbitrario que no esté en  $C'$ . Entonces,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - w_0}.$$

Ahora la última integral es cero si  $w_0$  está fuera de  $C'$  y es  $\pm 1$  si  $w_0$  está dentro de  $C'$ . Sin embargo,  $n$  no puede ser negativo pues la primera integral nos da el número de ceros de  $f(z) - w_0$  dentro de  $C$ . Entonces,  $n = 1$  si  $w_0$  está dentro de  $C'$ .

Esto prueba que  $f(z) = w_0$  tiene una sola solución si  $w_0$  está dentro de  $C'$ , que  $f(z)$  es holomorfa e inyectiva en  $D$  y lleva  $D$  en  $D'$  (el interior de  $C'$ ) y que la dirección positiva de  $C'$  se corresponde con la dirección positiva de  $C$ .  $\square$





# Apéndice A

## Notación

$\mathcal{H}(U)$ : holomorfa en  $U$

$\mathcal{H}^\infty(U)$ : holomorfa y acotada en  $U$

$\mathbb{D}$ : disco unidad

$\overline{\mathbb{D}}$ : disco unidad cerrado

$\partial\mathbb{D}$ : borde del disco unidad

$L^\infty(U)$ :

