

## Trabalho sobre

## MODULAÇÕES DIGITAIS NÃO-BINÁRIAS I

### 1 OBJECTIVOS

Em trabalho anterior foram abordados diversos aspectos das modulações binárias convencionais, nomeadamente formas de detecção, visualização de espectros e estimativa de probabilidades de erro. Neste trabalho é a vez das modulações digitais não-binárias, aquelas cuja *constelação no espaço de sinais* é constituída por mais de dois pontos. Em concreto serão abordadas as modulações MPSK e QAM.

### 2 PRELIMINARES TEÓRICOS

Nas modulações digitais não-binárias um conjunto de  $k$  bits (e não apenas um) faz variar a frequência, a fase e/ou a amplitude de uma portadora. Esse conjunto de bits chama-se *símbolo* e daí se falar em *probabilidade de símbolo errado* ( $P_e$ ). Como a fonte de informação é uma sequência de bits, no que estaremos interessados é, no entanto, na contagem do número de bits errados, isto é, na *probabilidade de bit errado* ( $P_b$ ). Este cálculo é relativamente simples uma vez conhecido  $P_e$ .

As modulações digitais a abordar neste trabalho são QPSK, OQPSK, 8PSK e 16QAM. Na Figura 1 estão representadas as constelações de 8PSK e 16QAM com mapeamento de Gray.

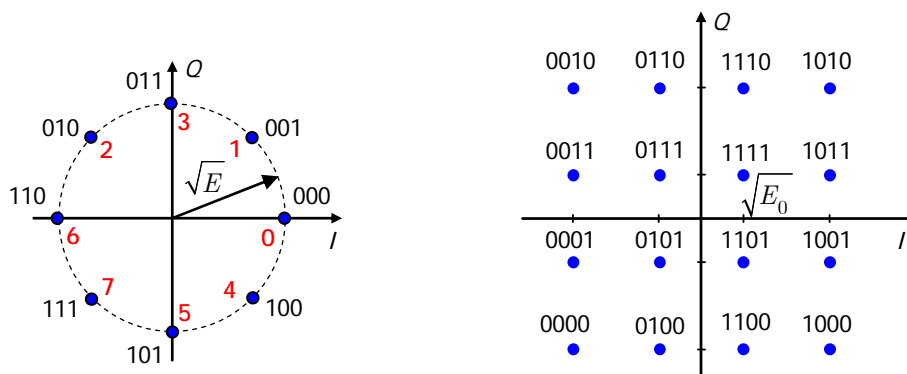


Figura 1: Constelações das modulações 8PSK e 16QAM.

A duração  $T$  de cada símbolo é igual a  $k = \log_2 M$  vezes a duração  $T_b$  de cada bit. Logo, a *baudrate* (ou débito de símbolos)  $R = 1/T$  é diferente da *bit rate* (ou débito binário)  $R_b = 1/T_b$  se  $M \neq 2$ .

Em cada intervalo de tempo de um símbolo as formas de onda destas modulações são expressas, respectivamente, por:

- MPSK:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(2\pi f_c t - \frac{2\pi i}{M}\right) =$$

$$= \mathbf{s}_i \bullet \Psi = \begin{bmatrix} \sqrt{E} \cos \frac{2\pi i}{M} & \sqrt{E} \sin \frac{2\pi i}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 0, 1, \dots, M-1 \end{matrix}$$

- QAM:

$$s_i(t) = a_i \sqrt{\frac{2E_0}{T}} \cos 2\pi f_c t + b_i \sqrt{\frac{2E_0}{T}} \sin 2\pi f_c t =$$

$$= \mathbf{s}_i \bullet \Psi = \begin{bmatrix} a_i \sqrt{E_0} & b_i \sqrt{E_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 0, 1, \dots, \sqrt{M}-1 \\ a_i, b_i \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)\} \end{matrix}$$

$E$  e  $E_0$  representam, respectivamente, a energia de cada símbolo MPSK e metade da energia do símbolo QAM de energia mínima. O vector  $\mathbf{s}_i$  representa o vector no espaço de sinal e  $\Psi$  o vector das funções-base. Em qualquer destas modulações é usada detecção coerente para recuperar a informação transmitida. Recorde-se que, para esse efeito, o uso de filtros adaptados é equivalente ao uso de correlacionadores no instante de amostragem.

De um modo geral pode dizer-se que, em igualdade de circunstâncias, a modulação QAM tem um melhor desempenho que a modulação MPSK. A quantificação do comportamento pode ser feita através do cálculo das probabilidades de símbolo errado as quais, em presença de ruído aditivo gaussiano branco (ruído AWGN) de densidade espectral de potência unilateral  $N_0$ , são dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões (onde  $E$  é a energia média):

- MPSK:  $P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$
- QAM:  $P_e \approx 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \frac{E}{N_0}\right)$

A probabilidade de bit errado está relacionada com  $P_e$  através de

$$P_b \approx \frac{P_e}{k}$$

admitindo que, como é de boa prática, o mapeamento dos bits em símbolos se faz com *codificação de Gray* e que a relação  $E/N_0 \gg 1$ .

### 3 EXPERIÊNCIAS

Durante as experiências vão usar-se os seguintes parâmetros de simulação:

- Taxa de símbolos:  $R = 1/T = 1000$  símbolos/s
- Amplitude da portadora:  $A_c = 1$  V
- Frequência da portadora:  $f_c = 10$  kHz
- Frequência de amostragem da simulação:  $f_s = 1/T_s = 10f_c = 100$  kHz
- Factor de *roll-off* dos filtros de cosseno elevado:  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,8$ .
- Número de pontos da constelação:  $M = 4$  para QPSK e OQPSK,  $M = 8$  para 8PSK e  $M = 16$  para QAM

#### 3.1 MODULAÇÃO MPSK

Abra o modelo Simulink de um emissor de MPSK descrito pela Figura 2. O modelo está pré-definido para 8PSK.

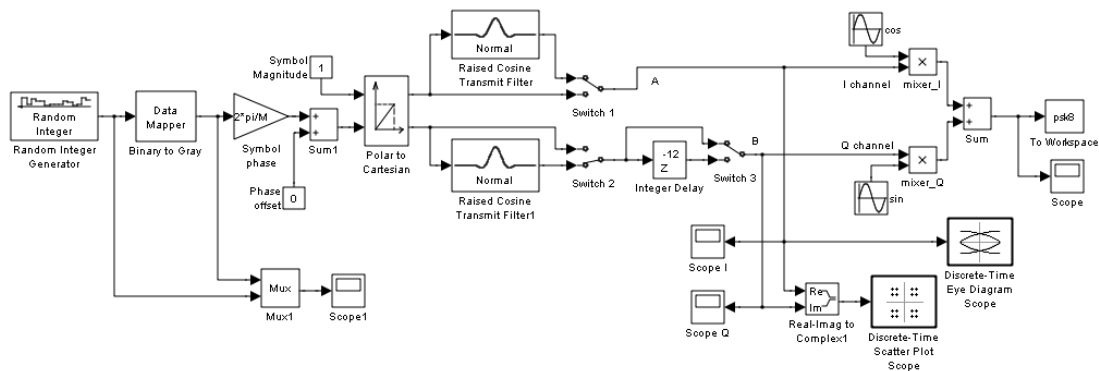


Figura 2: Modelo Simulink de um emissor de MPSK.

1. Após ter inicializado o modelo verifique se os valores das variáveis definidas no *workspace* –  $T$ ,  $R$ ,  $f_c$ ,  $f_s$ ,  $T_s$  e  $M$  – contêm os valores correctos.
2. A cada símbolo 8PSK será associado um ponto da constelação, o qual corresponderá a uma determinada fase e a um determinado vector no espaço de sinal. Essa atribuição de símbolos deve ser feita recorrendo ao *código de Gray* para que, em face de um determinado número de símbolos errados, o número de bits errados seja o menor possível (bloco *Data Mapper (Binary to Gray)*). Este mapeamento, apresentado na tabela seguinte, pode ser observado na constelação de 8PSK da Figura 1.

$i$	Código binário	Código Gray ( $S_{Gray}$ )	Fase de $s_i(t) : \phi_i$ (rad)
0	000	0 (000)	0
1	001	1 (001)	$\pi/4$
2	010	3 (011)	$\pi/2$
3	011	2 (010)	$3\pi/4$
4	100	6 (110)	$\pi$
5	101	7 (111)	$5\pi/4$
6	110	5 (101)	$3\pi/2$
7	111	4 (100)	$7\pi/4$

Visualize com o auxílio de um bloco *scope* os 10 primeiros símbolos e o correspondente resultado do mapeamento de Gray ( $S_{Gray}$ ).

3. A cada símbolo vai ser atribuída uma fase da portadora segundo a relação

$$\phi_i = 2\pi \frac{S_{Gray}}{M}.$$

No espaço de sinal estas fases correspondem a pontos da constelação. As suas coordenadas cartesianas são  $s_i = [\cos \phi_i \quad \sin \phi_i]^T$ .

Repare que o comprimento (ou norma euclideana) de cada vector de sinal é unitário. Note também que se poderia ter optado por representar os pontos por números complexos, fazendo  $s_i = \cos \phi_i + j \sin \phi_i$ .

A conversão de coordenadas polares para rectangulares faz-se no bloco *Polar to Cartesian*.

4. Corra simulações sem filtros e com filtros de cosseno elevado – neste caso tome  $\alpha = 0,5$ . À medida que as simulações vão correndo observe nos “osciloscópios” os sinais *em fase (I)* e *em quadratura (Q)*, bem como o diagrama de olho e os pontos no espaço de sinal, estes nos blocos *Discrete-Time Eye Diagram Scope* e *Discrete-Time Scatter Plot Scope*, respectivamente. Como interpreta o diagrama de olho e os pontos no espaço de sinal? Porque é que em certos instantes de tempo espaçados de 1 ms os traços do diagrama de olho se cruzam em cinco valores?
5. Regule os dois filtros para “raiz de cosseno elevado” (*square root*) – mantenha  $\alpha = 0,5$  – e corra uma simulação. Interprete o diagrama de olho e a representação no espaço de sinal. Porque é que são diferentes dos obtidos com filtros de cosseno elevado “normais”?
6. O sinal modulado em 8PSK é obtido aplicando os símbolos a um modulador de quadratura. Visualize o comportamento temporal do sinal *psk8* sem os filtros de cosseno elevado e com eles (considere  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,8$  em filtros “normais”) e verifique as eventuais mudanças de fase em instantes

múltiplos do tempo de símbolo. Visualize também as densidades espectrais de potência do sinal psk8 com e sem filtros, por exemplo no intervalo [5kHz, 15kHz].

7. Ligue as saídas dos comutadores (pontos A e B do modelo) às entradas de um bloco *XY Graph* (que encontra em *Simulink/Sinks*). Neste regule convenientemente os limites do gráfico (por exemplo,  $\pm 1,5$  em cada eixo) e escolha *Sample Time* =  $2T_s$ . Depois simule 0,2 segundos com filtros de cosseno elevado e  $\alpha = 0,5$ . Interprete o que observa no bloco *XY Graph*.

*Nota:* em alternativa ao bloco *XY Graph* poderá usar o bloco *Discrete-Time Signal Trajectory Scope* (está em *Comm Sinks* e a simulação é mais rápida) antecedido do bloco *Real-Imag to Complex*. Naquele considere *Samples per Symbol* =  $f_s/R$ , sugerindo-se *Symbols displayed* = 200 e *New symbols per display* = 5 (ou então experimente outros valores que ache melhores); no “tab” *Rendering Properties* do mesmo bloco sugere-se que não seleccione *Color Fading*.

8. Faça alterações no modelo de modo a obter uma constelação 8PSK com o mesmo raio da anterior mas centrada no ponto de coordenadas  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ . Escolhendo *Initial Seed* = 53 como semente do gerador aleatório de inteiros, corra uma simulação de 1 s com sinalização rectangular e observe as representações gráficas. Estão como esperava?

Determine a energia média da nova constelação e estime o símbolo 0, 1, ..., 7 enviado (de acordo com o mapeamento da Figura 1) se o decisor tiver recebido o ponto  $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,4 \end{bmatrix}^T$  e as regiões de decisão tiverem acompanhado a constelação na sua translação.

9. Volte a centrar a constelação na origem.

Neste ponto deseja-se usar modulação QPSK e, de novo, filtros de cosseno elevado com  $\alpha = 0,5$ . Para obter QPSK deve ter o cuidado de alterar o valor de  $M$  e regular o bloco *Phase Offset* para que os pontos da constelação ocorram nos ângulos  $\pm \pi/4$  rad e  $\pm 5\pi/4$  rad. Observe de novo o *display* do bloco *XY Graph* (ou do *Discrete-Time Signal Trajectory Scope*) e interprete-o.

10. Repita o ponto anterior com filtros de raiz de cosseno elevado e  $\alpha = 0,5$ .
11. Pretende-se agora obter um sinal de OQPSK com constelação igual à anterior. Nesse sentido deverá, como sabe, introduzir um atraso adequado na componente em quadratura do sinal e actuar no comutador respectivo. Visualize o *display* do bloco *XY Graph* (ou do *Discrete-Time Signal Trajectory Scope*) com e sem filtros e confirme a ausência de variações de fase de  $180^\circ$ .
12. Volte a 8PSK e configure *Data Mapper* de modo que os sucessivos pontos da constelação de  $0^\circ$  a  $315^\circ$  correspondam aos símbolos 000 – 100 – 001 – 101 – 010 – 110 – 011 – 111.

## 3.2 MODULAÇÃO 16QAM

Na Figura 3 está representado o modelo Simulink do modulador de 16QAM.

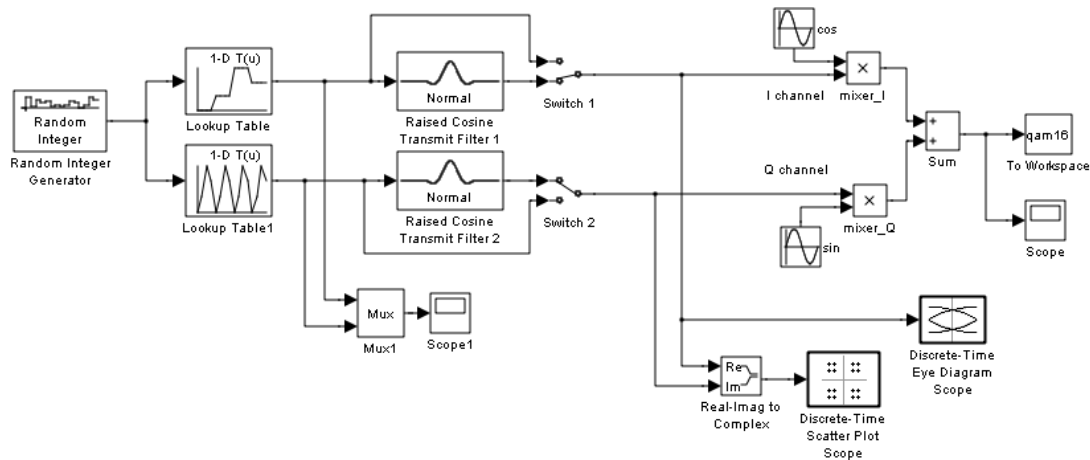
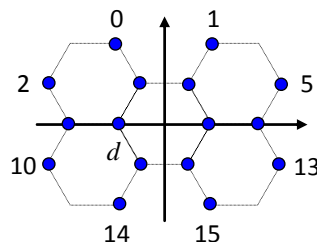


Figura 3: Modelo Simulink de um emissor de QAM.

13. Calcule o débito binário  $R_b$ .
14. A cada símbolo 16QAM, numerado de 0 a 15, será associado um ponto da constelação. Tal como em PSK, essa atribuição de símbolos deve ser feita recorrendo a um mapeamento de Gray, como o apresentado na constelação de 16QAM da Figura 1. Confirme que os blocos *Lookup Table* de facto respeitam o mapeamento dessa figura.
15. O sinal modulado em 16QAM é obtido aplicando os símbolos a um modulador de quadratura. Visualize o comportamento temporal do sinal `qam16` e a respectiva densidade espectral de potência. Repita este ponto também com o filtro de cosseno elevado “normal”.
16. Compare a largura de banda obtida com 16QAM com a que tinha obtido com 8PSK em idênticas circunstâncias de filtragem. Comente o resultado.
17. Altere os parâmetros dos dois blocos *Lookup Table* de forma que o modulador 16QAM se transforme num modulador 16PSK.
18. Altere os parâmetros dos blocos *Lookup Table* de forma a produzir a constelação da figura, onde  $d = 1$ . Depois efectue uma simulação de 4 segundos com filtros de cosseno elevado “normal” ( $\alpha = 0,5$ ) e semente inicial do gerador de inteiros igual a 53. Interprete o diagrama de olho em fase.



Determine a energia média da constelação e a potência média e a largura de banda do sinal QAM.