Sistemas de Equações Lineares

Introdução

Uma variedade de problemas de engenharia podem ser resolvidos através de sistemas lineares:

- Determinação do potencial em redes elétricas;
- Cálculo da tensão de estruturas metálicas;
- Cálculo do escoamento num sistema hidráulico;
- Previsão da concentração de reagentes em reações químicas.

Conceitos Importantes

- Uma equação é **linear** quando cada termo contém no máximo uma variável e cada variável aparece com expoente igual a 1.
  - $3x + 4y - 10z = -3$ é uma equação linear
  - $xy - 3z = 2$ e $x^3 + y - z = 0$ **não** são equações lineares
- Vamos considerar n equações lineares com n variáveis (incógnitas) e vamos nos referir a elas como um **Sistema de n Equações Lineares** ou um **Sistema Linear de Ordem n.**
- Uma **solução** para esse sistema de equações consiste de valores para as n variáveis, tais que quando esses valores são substituídos nas equações, todas elas são satisfeitas simultaneamente.

Conceitos Importantes

Por exemplo, o sistema de três equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

possui solução $x = 1, y = 1$ e $z = -1$.

Observe que o sistema acima pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Conceitos Importantes

De modo geral, um sistema de n equações lineares é escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e é representado na forma matricial por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

ou simplesmente $Ax = b$, onde A é matriz dos coeficientes, x é o vetor solução e b é o vetor dos termos independentes.

Conceitos Importantes

A matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

é chamada de **matriz aumentada do sistema**.

Classificação de um Sistema Linear

A classificação de um sistema linear é feita com base no número de soluções que ele admite, da seguinte maneira:

- **Sistema impossível (SI):** quando não admitir solução.
- **Sistema possível e determinado (SPD):** quando admitir uma única solução.
- **Sistema possível e indeterminado (SPI):** quando admitir infinitas soluções.

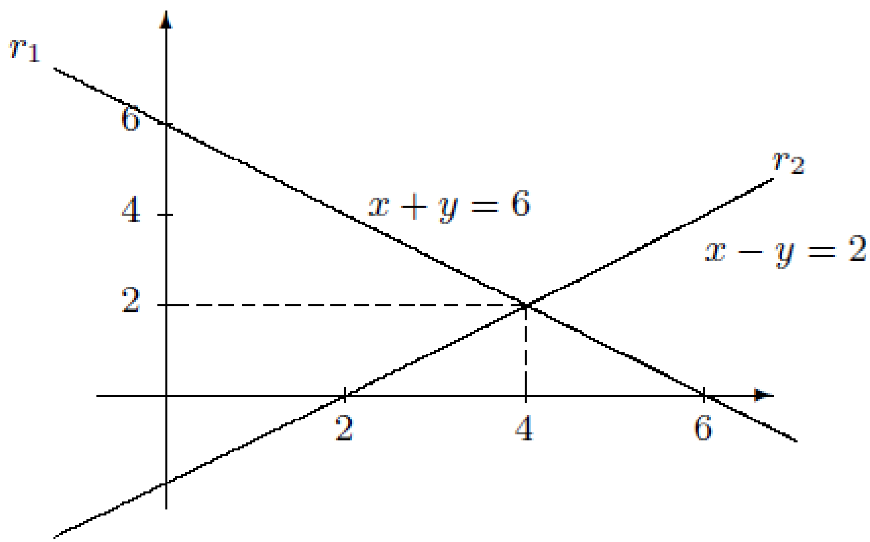
Sistema Impossível (**não** possui solução) (SI)

Sistema Possível (possui solução) →
- **Determinado:** única solução (SPD)
- **Indeterminado:** infinitas soluções (SPI)

Exemplo: Classificar os sistemas a seguir.

$$(I)\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

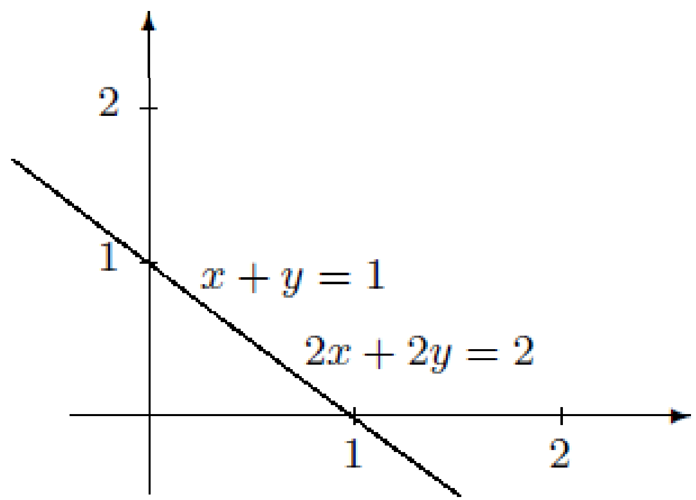
Esse sistema possui uma única solução $(4, 2)$, como pode ser observado na figura a seguir. Logo, ele é SPD.



Exemplo: Classificar os sistemas a seguir.

$$(II)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2\,x & + & 2\,y & = & 2 \end{array}\right.$$

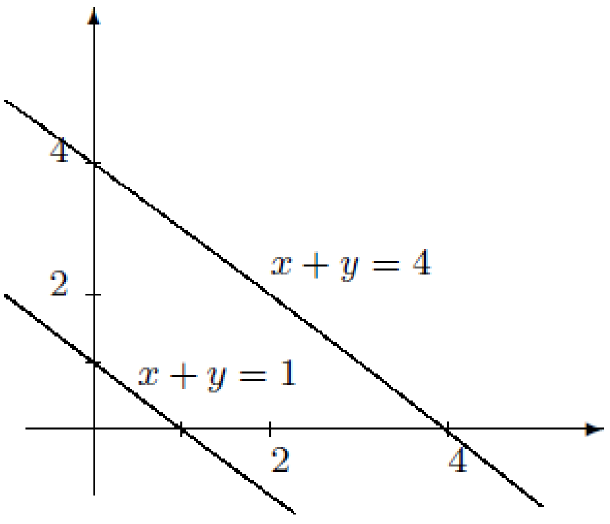
Esse sistema possui infinitas soluções da forma $(x, 1-x), x \in \mathbb{R}$, como pode ser observado na figura a seguir. Logo, ele é SPI.



Exemplo: Classificar os sistemas a seguir.

$$(III)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Esse sistema não possui solução, uma vez que suas equações não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Isso pode ser observado na figura a seguir. Logo, ele é um SI.



Métodos Numéricos para Sistemas Lineares

- Nosso objetivo aqui é estudar métodos numéricos para resolver **sistemas lineares de ordem *n* que tenham solução única**. Esses sistemas são aqueles cuja matriz dos coeficientes A é tal que $\det(A) \neq 0$.

- Os métodos numéricos para a solução de sistemas de equações lineares são classificados em:

  - **Métodos Diretos:** fornecem a solução exata de um sistema linear, a menos dos erros de máquina, através da realização de um número finito de operações.

  - **Métodos Iterativos:** fornecem uma sequência de aproximações para a solução do sistema a partir de uma solução inicial.

Métodos Diretos

Sistemas Equivalentes e Operações Elementares

- Dois sistemas lineares são **equivalentes** se eles possuem a mesma solução.

- Para obter um sistema equivalente a outro, utilizamos as seguintes **operações elementares:**

  - Permutação de duas linhas do sistema;

  - Multiplicação de um linha por uma constante não nula;

  - Soma de uma linha do sistema com outra linha do sistema que foi multiplicada por uma constante não nula.

Sistemas e Matrizes Triangulares

i. Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior** quando tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 & & & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 & & & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 & & & = & b_3 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & & & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n & & & = & b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Podemos obter sua solução facilmente através das fórmulas:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j}{a_{ii}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Sistemas e Matrizes Triangulares

ii. Um sistema linear de ordem n é **triangular superior** quando tiver a forma:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}\,x_3 \dots + a_{3n}\,x_n = b_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Podemos obter sua solução facilmente através das fórmulas:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}\,, \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j}{a_{ii}}\,, \quad i = n-1, \dots, 1\,. \end{cases}$$

Sistemas e Matrizes Triangulares

iii. Uma **matriz triangular inferior** é uma matriz quadrada $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

iv. Uma **matriz triangular superior** é uma matriz quadrada $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Método de Eliminação de Gauss

O **Método de Eliminação de Gauss (escalonamento)** consiste em transformar um sistema linear $Ax = b$ em um sistema triangular superior equivalente.

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde $\det(A) \neq 0$, isto é, o sistema admite uma única solução.

Método de Eliminação de Gauss

ETAPA 1

Na etapa inicial, representamos o sistema linear na forma de matriz aumentada $(A^0 \,|\, b^0)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & \cdots & a_{3n}^{(0)} & b_3^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right)$$

Método de Eliminação de Gauss

ETAPA 1

Eliminar a incógnita x_1 das equações $k = 2, 3, \dots, n$.
Sendo $a_{11}^{(0)} \neq 0$, subtraímos da linha k a primeira linha multiplicada por:

$$\boxed{m_{k1} = \frac{a_{k1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}}$$

- Os elementos m_{k1} são chamados de **multiplicadores** e o elemento $a_{11}^{(0)}$ é chamado de **pivô** da Etapa 1.

- Indicando a linha k da matriz por L_k, esta etapa se resume em:

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1^{(1)} \leftarrow L_1^{(0)} \\ L_k^{(1)} \leftarrow L_k^{(0)} - m_{k1} L_1^{(0)}, k = 2,3,\dots,n \end{array}}$$

Método de Eliminação de Gauss

ETAPA 1

Ao final da Etapa 1, tem-se:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)$$

que representa um sistema linear equivalente ao sistema original, onde a incógnita x_1 foi eliminada das equações $k = 2, 3, \dots, n$.

Método de Eliminação de Gauss

ETAPA 2

Eliminar a incógnita x_2 das equações $k = 3, 4, \ldots, n$.
Supondo que $a_{22}^{(1)} \neq 0$, vamos tomar este elemento como pivô desta etapa e desta forma os multiplicadores são dados por

$$\boxed{m_{k2} = \frac{a_{k2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}$$

- A eliminação segue com as seguintes operações sobre as linhas:

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ L_k^{(2)} \leftarrow L_k^{(1)} - m_{k2} L_2^{(1)}, k = 3,4,\ldots,n \end{array}}$$

Método de Eliminação de Gauss

ETAPA 2

Ao final da Etapa 2, obtemos:

$$\left(\begin{array}{cccccc:c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

Método de Eliminação de Gauss

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa $(n-1)$ e a matriz, ao final desta etapa, será:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Essa matriz representa um sistema triangular superior equivalente ao sistema original.

Logo a solução deste sistema, obtido pela substituição regressiva, é solução do sistema original.

Método de Eliminação de Gauss

Exemplo: Resolva o sistema linear a seguir pelo Método da Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Solução do Exemplo:

Etapa 1: Eliminar x_1 das equações 2 e 3.

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$m_{21} = 1/3$

$m_{31} = 4/3$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right)$$

Método de Eliminação de Gauss

Solução do Exemplo:

Etapa 2: Eliminar x_2 da equação 3.

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right)$$

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

$$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2$$

$$\Rightarrow A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Método de Eliminação de Gauss

Solução do Exemplo:

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \quad\quad - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é o vetor $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

- Se o pivô for nulo ou próximo de zero, os erros de arredondamento podem se tornar significativos.

- Para se contornar estes problemas adotam-se **estratégias de pivoteamento**.

- A **Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial** consiste em fazer uma permutação de linhas de forma a escolher o maior pivô (em módulo) a cada etapa do método.

Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Exemplo:

$n = 4$ e $k = 2$

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Início da etapa 2:

i) escolher pivô

$$\max_{j=2,3,4} |a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3 \Rightarrow \text{pivô} = -3$$

ii) trocar linhas 2 e 3.

Assim,

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

e os multiplicadores desta etapa serão:

$$m_{32} = \frac{1}{-3} = -1/3$$

$$m_{42} = \frac{2}{-3} = -2/3$$

Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Observação: A escolha do maior elemento em módulo entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que evita a ampliação dos erros de arredondamento.

Método de Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Exemplo: Resolva o sistema linear a seguir pelo Método da Eliminação de Gauss utilizando a estratégia de pivoteamento parcial.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Decomposição LU (Fatoração LU)

O teorema a seguir mostra que, sob certas condições, podemos decompor uma matriz quadrada como produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior.

Teorema (Decomposição LU): Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k a submatriz de A constituída das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Se $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1,2,\ldots,n-1$, então existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1$ e uma matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tal que $A = LU$. Além disso, vale que $\det(A) = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}$.

Esquema para a Decomposição LU

Queremos obter matrizes L e U tais que $LU = A$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & \bigcirc & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para obter os elementos das matrizes L e U, podemos usar as fórmulas

$$\begin{cases} \mathbf{u_{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\ \boldsymbol{\ell_{ij}} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

calculando de modo alternado os elementos das linhas de U e os elementos das colunas de L, da seguinte forma:

- 1ª linha de U
- 1ª coluna de L
- 2ª linha de U
- 2ª coluna de L

E assim, por diante.

Método da Decomposição LU para resolução de Sistemas Lineares

Vejamos agora como podemos aplicar a decomposição LU para obtermos a solução de sistemas lineares.

Dados o sistema linear $Ax = b$ e a fatoração LU de A, temos:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Assim, transformamos o sistema dado no sistema equivalente $LUx = b$ cuja solução é facilmente obtida. De fato: fazendo $Ux = y$, a equação acima se reduz a $Ly = b$, que é um sistema triangular inferior. Resolvendo esse sistema, obtemos o vetor y. Substituindo o valor de y no sistema $Ux = y$, obtemos um sistema triangular superior cuja solução é o vetor x que procuramos.

Desse modo, a aplicação da decomposição LU na resolução de sistemas lineares requer a solução de dois sistemas triangulares.

Método da Decomposição LU para resolução de Sistemas Lineares

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Verifique que A satisfaz as condições do Teorema da Decomposição LU.

(b) Decompor A em LU.

(c) Através da decomposição LU, calcular o determinante de A.

(d) Resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (0, -7, -5)^t$, usando a decomposição LU.

Obtenção de L e U através da Eliminação de Gauss

Podemos utilizar o processo de Eliminação de Gauss para calcular as matrizes L e U da decomposição LU. Pode-se mostrar que:

- A matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e seus elementos l_{ij} para $i > j$ são os multiplicadores m_{ij} obtidos no processo da Eliminação de Gauss;

- A matriz U é a matriz triangular superior obtida no final da fase de triangularização do processo de Eliminação de Gauss.

Obtenção de L e U através da Eliminação de Gauss

Exemplo: Obtenha os fatores L e U para a matriz do sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Solução: Temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Etapa 1:

Pivô = $a_{11}^{(0)} = 3$

Multiplicadores: $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{1}{3}$ e $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{4}{3}$.

Então,

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1 \end{array} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que os elementos $a_{21}^{(1)}$ e $a_{31}^{(1)}$ são nulos, podemos guardar os multiplicadores nestas posições, então:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{array}\right).$$

Etapa 2:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

Multiplicadores: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

Teremos:

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2 \end{array} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Os fatores L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercícios:

(1) Considere o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Obtenha a solução desse sistema pelo:

(a) Método de Eliminação de Gauss;

(b) Método de Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

(2) Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = -12 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 = 20 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 10\,x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Resolva-o usando o Método de Decomposição LU.

(b) Calcule o determinante de A (matriz do sistema), usando a decomposição obtida acima.

Métodos Iterativos

Processo Iterativo

Considere o sistema linear $Ax = b$, onde:

- A: matriz dos coeficientes, $n \times n$
- x: vetor das variáveis, $n \times 1$
- b: vetor dos termos constantes, $n \times 1$

É possível reescrever esse sistema na forma

$$x = Cx + g,$$

sendo C uma matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$.

Para obter uma aproximação da solução do sistema, utilizamos o seguinte esquema iterativo:
Partimos de $x^{(0)}$ (vetor aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:

$$\begin{gathered} x^{(1)} = Cx^{(0)} + g \\ x^{(2)} = Cx^{(1)} + g \\ \vdots \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \end{gathered}$$

Critério de Parada

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Vamos medir a distância entre $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ e $x^{(k-1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$ por

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|.$$

Desse modo, dada uma precisão ε, usaremos os seguintes critérios de parada:

- $d^{(k)} < \varepsilon$ (erro absoluto)
- $d_r^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}}{\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} \right|}$ (erro relativo)

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Supondo $a_{ii} \neq 0$, isolamos a variável x_i na i-ésima equação do sistema, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) & \rightarrow \text{isolamos } x_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) & \rightarrow \text{isolamos } x_2 \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) & \rightarrow \text{isolamos } x_n \end{cases}$$

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, o método de Gauss-Jacobi consiste em obter uma sequência $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ através da relação recursiva:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Desse modo, para obter o valor das variáveis em uma dada iteração, o método de Gauss-Jacobi utiliza os valores obtidos na iteração anterior.

Método Iterativo de Gauss-Jacobi

Exemplo: Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jacobi, com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0.05$. Utilize o erro absoluto como critério de parada.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Critério de Convergência para o Método de Gauss-Jacobi

Teorema (Critério das Linhas): Seja o sistema linear $Ax = b$ e para todo $k = 1, \dots, n$ seja

$$\alpha_k = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}.$$

$\rightarrow$ Somatório dos valores absolutos dos elementos da linha k, exceto a_{kk}

Se

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \{\alpha_k\} < 1,$$

então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$.

Critério de Convergência para o Método de Gauss-Jacobi

Exemplo: A matriz A do exemplo anterior é

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, temos que:

- $\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = 0.3$
- $\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4$
- $\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5$

Então, $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.5 < 1$. Logo, pelo Critério das Linhas, temos garantia da convergência do Método de Gauss-Jacobi.

Observações:

(1) O Critério das Linhas nos dá uma condição suficiente, mas não necessária, para a convergência do método de Gauss-Jacobi. Por exemplo, para o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

o Critério das Linhas não é satisfeito, no entanto, o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência convergente para a solução exata desse sistema.

(2) Sempre que o Critério das Linhas não for satisfeito, podemos fazer uma permutação de linhas para **tentar obter** uma disposição de modo que a matriz dos coeficientes satisfaça o teorema. (Note que isso nem sempre é possível, como podemos ver no sistema 2×2 acima.)

Exemplo: Suponha que a matriz dos coeficientes de um dado sistema linear seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observe que A não satisfaz o Critério das Linhas.
Trocando as linhas 1 e 2 de lugar, obtemos a matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

que satisfaz o Critério das Linhas. Desse modo, utilizaríamos o Método de Gauss-Jacobi considerando essa última matriz, já que para ela temos garantia da convergência do método.

Método Iterativo de Gauss-Seidel

No Método de Gauss-Jacobi, vimos que o processo de iteração é da forma

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

De modo que na iteração de ordem $(k+1)$ são usadas as componentes $x_j^{(k)}$ da iteração anterior.

Método Iterativo de Gauss-Seidel

No Método de Gauss-Seidel para calcular a componente x_j da iteração $(k+1)$, utiliza-se as componentes já atualizadas $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_j^{(k+1)}$ e as componentes ainda não atualizadas da iteração anterior $x_{j+1}^{(k)}, x_{j+2}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. Desse modo, o processo iterativo do Método de Gauss-Seidel é dado por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Método Iterativo de Gauss-Seidel

Exemplo: Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel, com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0.05$. Utilize o erro absoluto como critério de parada.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Critérios de Convergência para o Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas** (igual ao usado no Método de Gauss-Jacobi)
- **Critério de Sassenfeld**

Teorema (Critério de Sassenfeld): Considere o sistema linear $Ax = b$ e sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

e, para todo $j = 2, \ldots, n$,

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}.$$

Se

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\} < 1,$$

então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para a solução do sistema, independentemente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$. Além disso, quanto menor o valor de β, mais rápida é a convergência.

Observação: Se A é uma matriz de ordem 3, então

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|}, \qquad \beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}|}{|a_{22}|} \; e \; \beta_3 = \frac{|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2}{|a_{33}|}$$

Exemplo: Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, dos exemplos anteriores, temos que:

- $\beta_1 = \frac{2+1}{10} = 0.3$
- $\beta_2 = \frac{1 \cdot 0.3 + 1}{5} = 0.26$
- $\beta_3 = \frac{2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.26}{10} = 0.138$

Então, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 0.3 < 1$. Logo, pelo Critério de Sassenfeld, temos garantia da convergência do Método de Gauss-Seidel.

Exercícios:

(1) Verifique que a matriz dos coeficientes do sistema a seguir satisfaz o Critério das Linhas e em, seguida, faça as 3 primeiras iterações do Método de Gauss-Jacobi para obter uma aproximação da sua solução.

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16 \\ 7x_1 + 30x_2 + 8x_3 = 38 \\ 9x_1 + 8x_2 + 30x_3 = 38 \end{cases}$$

(2) Verifique que a matriz dos coeficientes a seguir satisfaz o Critério de Sassenfeld e em, seguida, faça as 3 primeiras iterações do Método de Gauss-Seidel para obter uma aproximação da sua solução.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$