Solução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias: Método de Euler

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

29 de outubro de 2013

Baseado nos livros: Análise Numérica, de R. L. Burden e J. D. Faires; e Cálculo Numérico, de S. Arenales e A. Darezzo.

Sabemos que, em condições normais, uma população de uma certa localidade cresce a uma taxa proporcional ao número de indivíduos.

Sabe-se que após dois anos a população é o dobro da população inicial e após três anos é de vinte mil indivíduos.

A questão é: qual o número de indivíduos da população dessa localidade?

Um exemplo do uso de equações diferenciais ordinárias

Este problema pode ser resolvido da seguinte maneira.

Considere:

- $N = N(t)$ o número de indivíduos no instante t;
- $N_0 = N(t_0)$ o número de indivíduos no instante t_0.

Como a taxa de variação da população é proporcional ao número de indivíduos, temos que

$$\frac{dN}{dt} = KN,$$

com K uma constante de proporcionalidade.

Um exemplo do uso de equações diferenciais ordinárias

Note que

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

é uma equação diferencial ordinária, pois relaciona a variável N e sua derivada com relação ao tempo.

A solução analítica desta equação é dada por

$$N(t) = ce^{Kt},$$

já que sua derivada é

$$\frac{dN}{dt}(t) = Kce^{Kt} = KN(t).$$

Para encontrar a função $N(t)$, que fornece o número de indivíduos da população em relação ao tempo, precisamos calcular os valores de c e K.

Como

$$N(t) = ce^{Kt}$$

e, para $t = 0$, $N(0) = N_0$, temos que $c = N_0$.

Então,

$$N(t) = N_0 e^{Kt}.$$

Sabemos que a população dobra em 2 anos, ou seja, para $t = 2$, temos

$$N(2) = 2N_0 \Rightarrow$$

$$N(2) = N_0 e^{2K} = 2N_0 \Rightarrow$$

$$K \approx 0.3466.$$

Portanto, temos que

$$N(t) = N_0 e^{0.3466t}.$$

Sabemos que, para $t = 3$, a população é igual a 20.000 indivíduos. Assim,

$$N(3) = N_0 e^{0.3466(3)} = 20.000.$$

Portanto, $N_0 \approx 7070.5076$.

Um exemplo do uso de equações diferenciais ordinárias

Assim, a função $N(t)$ é dada por

$$N(t) = 7070.5076e^{0.3466t}.$$

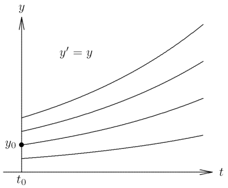
Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da seguinte forma:

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t)...y^{(n)}(t)) = 0,$$

em que estão envolvidas as funções incógnitas $y = y(t)$ e suas derivadas até ordem n, com t a variável independente.

Sabemos que a solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = ky$ é dada por $y = y(t) = ce^{kt}$, com c uma constante arbitrária.

Logo, esta equação diferencial tem infinitas soluções, como ilustra a figura a seguir.



Fonte: slide prof. Carlos Balsa (DM - ESTGB - Portugal)

Se temos que passar por um dado ponto, a solução é única.

Um Problema de Valor Inicial (PVI) de primeira ordem consiste de uma equação diferencial

$$y' = f(t, y), \quad t_0 = a \leq t \leq b$$

e uma condição inicial

$$y(a) = \alpha,$$

onde α é um valor dado, chamado de valor inicial.

Equações diferenciais são utilizadas para modelar problemas que envolvam a modificação de uma variável em relação à outra.

Grande parte destes problemas requer a solução de um Problema de Valor Inicial, isto é, a solução de uma equação diferencial que satisfaça determinada condição inicial.

Como estes problemas costumam envolver equações muito complicadas para serem resolvidas exatamente, há duas abordagens possíveis.

A primeira abordagem é aproximar a equação diferencial por outra mais simples, resolver esta última exatamente e, depois, usar a solução obtida para aproximar a equação original.

A outra abordagem, que veremos aqui, é resolver a equação original de maneira aproximada.

Os métodos que veremos para fazer estas aproximações de Problemas de Valor Inicial fornecerão, como resposta, não uma função, mas os valores de uma função em alguns pontos. Se for necessário calcular o valor da aproximação em outros pontos, é necessário interpolar os pontos obtidos.

Antes de apresentar os métodos para aproximação da solução de Problemas de Valor Inicial, precisamos de algumas definições e teoremas sobre equações diferenciais ordinárias.

Definição 1. Uma função $f(t, y)$ satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y em um conjunto $\mathcal{D} \subset \boldsymbol{R}^2$ se existir uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

sempre que $(t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D}$. A constante L é chamada de constante de Lipschitz para f.

Definição 2. Um conjunto $\mathcal{D} \subset \boldsymbol{R}^2$ é dito convexo se, sempre que (t_1, y_1) e (t_2, y_2) pertecerem a $\mathcal{D}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o ponto $\lambda(t_1, y_1) + (1 - \lambda)(t_2, y_2)$ também pertencer a $\mathcal{D}$.

Teorema 1. Suponha que $f(t, y)$ seja definida em um conjunto convexo $\mathcal{D} \subset \boldsymbol{R}^2$. Se existir uma constante $L > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L,$$

para todo $(t, y) \in \mathcal{D}$, então f satisfaz uma condição de Lipschitz em $\mathcal{D}$ na variável y com constante de Lipschitz L.

O Teorema 1, apesar de apresentar um condição suficiente para dizer se uma função L satisfaz uma condição de Lipschitz, é mais fácil de ser usado para verificar se uma condição deste tipo é satisfeita do que a Definição 1.

Veremos agora uma versão do teorema sobre existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Teorema 2. Suponha que $\mathcal{D} = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ e que $f(t, y)$ seja contínua em $\mathcal{D}$. Se f satisfizer a uma condição de Lipschitz em $\mathcal{D}$ na variável y, então o Problema de Valor Inicial

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

tem uma única solução $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

O Teorema 2 apresenta condições para que um Problema de Valor Inicial tenha solução única.

Vejamos agora como este tipo de problema se comporta quando há perturbações na condição inicial ou na própria equação diferencial.

Definição 3. O Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

é considerado um problema bem-posto se:

- existir uma única solução $y(t)$ para o problema; e

- existirem constantes $\epsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tais que, para qualquer ϵ, com $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, sempre que $\delta(t)$ for contínua com $|\delta(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [a, b]$, e quando $|\delta_0| < \epsilon$, o Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(\alpha) = \alpha + \delta_0,$$

tem uma única solução $z(t)$ que satisfaz

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon$$

para todo $t \in [a, b]$.

O problema apresentado no slide anterior é um problema perturbado.

Como sempre tratamos de problemas com perturbação (já que a representação computacional apresenta erros numéricos e a modelagem do problema também pode ter erros introduzidos por medições), estamos interessados em resolver apenas problemas bem-postos.

Teorema 3. Suponha que $\mathcal{D} = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$. Se f for contínua e satisfizer a uma condição de Lipschitz em $\mathcal{D}$ na variável y, então o Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \;\; a \leq t \leq b, \;\; y(a) = \alpha,$$

é bem-posto.

Série de Taylor:

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, a série de Taylor gerada por f em $x = a$ é

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots}$$

Exemplo:

Desenvolver $f(x) = ln(x)$, em torno de $x = 1$.

$$f(x) = \ln x \rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = x^{-1} \rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} \rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -6x^{-4} \rightarrow f^{IV}(1) = -6$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n} \rightarrow f^{n}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Assim,

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

Portanto,

$$\boxed{\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} + \ldots}$$

Método de Euler

O objetivo é encontrar uma aproximação para a solução de um Problema de Valor Inicial bem-posto

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha. \tag{1}$$

Como resposta, não teremos a solução $y(t)$, mas o valor aproximado de $y(t)$ em alguns pontos no intervalo $[a, b]$. Estes pontos são chamados de pontos de malha.

Método de Euler

Primeiramente, definimos pontos de malha igualmente espaçados no intervalo $[a, b]$.

Para isso, para um determinado N, definimos o tamanho de passo h como

$$h = \frac{b - a}{N}.$$

Depois, os pontos de malha são definidos como

$$t_i = a + ih,$$

para $i = 0, 1, ..., N$.

Para deduzir o Método de Euler, usaremos o Teorema de Taylor.

Suponha que $y(t)$, a solução do PVI (1), tenha segunda derivada contínua em $[a, b]$. Neste caso,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i),$$

para algum $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$.

Como $h = t_{i+1} - t_i$, temos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

e, como $y(t)$ satisfaz a equação diferencial (1), temos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

Método de Euler

O Método de Euler consiste em construir $\omega_i \approx y(t_i)$, para cada $i = 0, 2, ..., N$, usando a equação vista acima, excluindo o termo de segunda ordem.

Ou seja, o Método de Euler consiste em definir

$$\omega_0 = y(t_0) = y(a) = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i),$$

para $i = 0, 2, ..., N - 1$.

Método de Euler

Teorema 4. Suponha que f seja contínua e satisfaça uma condição de Lipschitz com constante L em $\mathcal{D} = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ e que exista uma constante M com $|y''(t)| \leq M$, para todo $t \in [a, b]$.

Denote por $y(t)$ a solução do Problema de Valor Inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

e sejam $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_N$ as aproximações geradas pelo Método de Euler para algum número inteiro positivo N. Então, para cada $i = 0, 1, 2, ..., N$,

$$|y(t_i) - \omega_i| \leq \frac{hM}{2L} \left(e^{L(t_i - a)} - 1 \right).$$

Exemplo: Use o Método de Euler para aproximar a solução do PVI

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1 \\ \quad y(0) = 0.5 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$$

em $t = 2$, considerando $h = 0.5$.

Exemplo

Considere o seguinte Problema de Valor Inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \;\; 0 \leq t \leq 2, \;\; y(0) = 0.5.$$

Utilize o Método de Euler, com $N = 10$, para aproximar a solução deste problema.

Exemplo

Como $a = 0$, $b = 2$ e $N = 10$, temos que $h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{10} = 0.2$ e $t_i = a + hi = 0 + 0.2i = 0.2i$.

Assim,

$$\omega_0 = \alpha = 0.5,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i) = \omega_i + 0.2(\omega_i - (0.2i)^2 + 1) =$$

$$1.2\omega_i - 0.2(0.04i^2) + 0.2 = 1.2\omega_i - 0.008i^2 + 0.2,$$

para $i = 0, 2, ..., 9$.

Exemplo

A solução exata para o PVI é $y(t) = (t+1)^2 + 0.5e^t$. O Método de Euler fornece as seguintes aproximações ω_i:

t_i	ω_i	$y_i = y(t_i)$	$\|\omega_i - y_i\|$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Observações:

- O erro do Método de Euler aumenta, no pior caso, de forma linear em h. Assim, pontos menos espaçados tendem a apresentar erro menor.
- Por não ser suficientemente preciso, este método não é, em geral, utilizado na prática.

Exercícios:

1) Use o método de Euler para obter uma aproximação para as soluções de cada um dos seguintes problemas de valor inicial.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad$ com $h = 0{,}5$

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1, \quad$ com $h = 0{,}5$

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad$ com $h = 0{,}25$

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad$ com $h = 0{,}25$

2) As soluções reais dos problemas de valor inicial do Exercício 1 são dadas a seguir. Determine o erro real para cada passo.

a. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$

b. $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

c. $y(t) = t \ln t + 2t$

d. $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$