# Resolução de Sistemas Não Lineares

# Sistemas Não Lineares

Recordemos que uma equação é linear quando cada termo da equação possui uma única variável e cada variável possui no máximo expoente igual a 1, ou seja, quando pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Qualquer equação que não possui esse formato é dita **não linear.**

Um sistema de $n$ equações e $n$ variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado de **sistema não linear** quando uma ou mais equações é não linear. Um sistema não linear pode ser representado por

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

# Exemplos

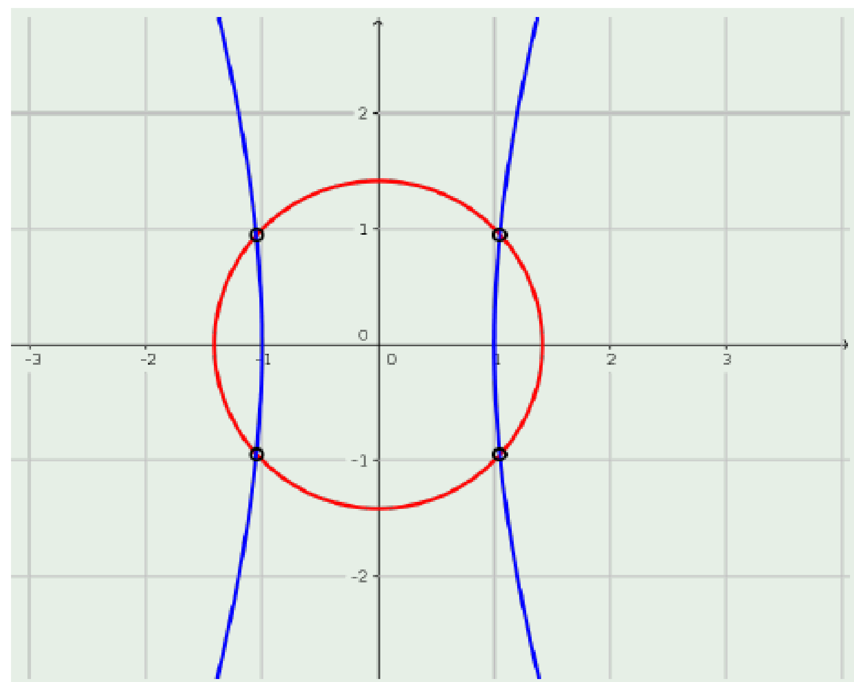
**(1)** O sistema não-linear

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ f_2(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite 4 soluções, que são os pontos onde as curvas $x^2+y^2 - 2 = 0$ e $x^2 - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ se intersectam.



## Exemplos

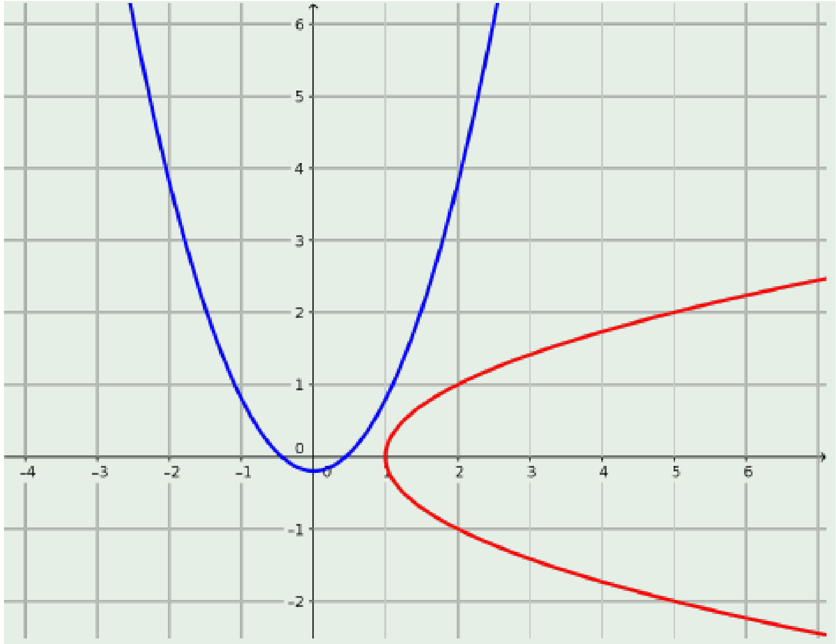
**(2)** O sistema não-linear

$$\begin{cases} x^2 - y = 0.2 \\ x - y^2 = 1 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 - y - 0.2 = 0 \\ f_2(x,y) = x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Observe que esse sistema não admite solução, uma vez que as curvas $x^2 - y - 0.2 = 0$ e $x - y^2 - 1 = 0$ não se intersectam.



# Notação

Denotaremos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, o sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

# Formulação do Problema e Hipóteses

## Resolução de Sistema Não-Linear

Dada uma função $\mathbf{F} : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, determine $\xi \in D$ tal que

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{0}.$$

Em geral, assumiremos a existência da solução $\xi \in D$. Assumiremos também que o domínio $D$ de $\mathbf{F}$ é um conjunto aberto e $\mathbf{F}$ possui derivadas contínuas nesse conjunto.

## Exemplo 3 (Sistema Linear)

Tem-se um sistema linear quando

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

# Vetor Gradiente

## Definição 4 (Vetor Gradiente)

O vetor das derivadas parciais de $f_i$, denotado por

$$\nabla f_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

é chamado **vetor gradiente** de $f_i$.

# Matriz Jacobiana

## Definição 5 (Matriz Jacobiana)

A matriz das derivadas parciais de **F**, denotada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

é chamada **matriz Jacobiana** de **F**.

## Aproximação Linear

A aproximação linear **L** de uma função não-linear **F** em um ponto **a** é dada pela equação

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

# Exemplo:

Determine a matriz Jacobiana da função $F$ do sistema:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# Método de Newton

O método de Newton é um dos principais métodos usados para a resolução de um sistema não-linear.

Vimos anteriormente que o método de Netwon determina, a cada iteração, a solução da aproximação linear da função.

Dessa forma, conhecida uma aproximação $\mathbf{x}^{(k)}$, o método de Newton define $\mathbf{x}^{(k+1)}$ como sendo a solução do sistema linear

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0},$$

ou seja, $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Tomando $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, conhecido por **passo de Newton**, temos que a nova aproximação é

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)},$$

em que $\mathbf{s}^{(k)}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Resumindo, dado uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Newton gera a sequência $\{x^{(k)}\}$ através dos seguintes passos:

- Resolve $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$.
- Define $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$.

# Critério de Parada

- *Análise de* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x) = 0$:

$$\left\| F(x^{(k)}) \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| f_i(x^{(k)}) \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro absoluto:*

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| < \varepsilon$$

- *Análise do Erro relativo:*

- $$\left\| \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k+1)}} \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \,.$$

- Número máximo de iterações

# Convergência

1. As funções $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$; i = 1, 2, ..., n e suas derivadas até 2ª ordem devem ser contínuas e limitadas numa vizinhança da raiz $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...., \bar{x}_n)^T$.
2. Det[ $J(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ ] $\neq 0$, para k = 0,1,...
3. A solução inicial $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ deve ser próxima da $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...., \bar{x}_n)^T$.

**OBS:** A sequência gerada pelo Método de Newton $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)^T$, a partir de uma solução inicial $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)^T$ suficientemente próxima da solução do sistema, converge para $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...., \bar{x}_n)^T$, e a convergência é quadrática.

## Exemplos:

**(1)** Resolver o sistema não linear usando o Método de Newton com $x^{(0)} = (0.5, 0.5)^t$ e $\varepsilon = 0.01$. Utilize como critério de parada $\|F(x)\| < \varepsilon$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

**(2)** Resolver o sistema não linear usando o Método de Newton com $x^{(0)} = (2, 1)^t$ e $\varepsilon = 0.01$. Utilize como critério de parada $\|F(x)\| < \varepsilon$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

# Algoritmo do Método de Newton

**Entrada**: Função não-linear $\mathbf{F}$ e sua matriz Jacobiana $\mathbf{J}$;
Aproximação da solução $\mathbf{x}$.

**Dados**: Número máximo de interações $k_{max}$; tolerâncias $\tau$ e $\epsilon$.

*Inicialize:* $k = 0$, $\mathbf{F_x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *e* $Er = \tau + 1$.

**enquanto** $k \leq k_{max}$, $\|\mathbf{F_x}\|_\infty > \epsilon$ *e* $Er > \tau$ **faça**

1. Atualize: $k = k + 1$.
2. Resolva: $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{s} = -\mathbf{F_x}$.
3. Atualize: $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
4. Calcule: $Er = \|\mathbf{s}\|_\infty$.
5. Avalie: $\mathbf{F_x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

**fim**

**Saída**: Aproximação para a solução é $\mathbf{x}$.

# Considerações

Observe que cada iteração do método de Newton requer:

1. Avaliação da matriz Jacobiana.
2. Resolução de um sistema linear.

Logo, o método de Newton é computacionalmente caro!

A vantagem é que, **sob certas condições** sobre a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, a função $\mathbf{F}$ e a matriz Jacobiana $\mathbf{J}$, a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ produzida pelo método de Newton **converge** para a solução de $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ com **taxa quadrática**.

# Método de Newton Modificado

A modificação sobre o Método de Newton consiste em tomar a cada iteração k a matriz $J(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, em vez de $J(x_k, y_k, \ldots, z_k)$. A partir de uma aproximação inicial $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, uma sequência de soluções é gerada a partir da solução do sistema linear:

$$J(x_0, y_0, \ldots, z_0)\begin{pmatrix} r_k \\ s_k \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k, \ldots, z_k) \\ -f_2(x_k, y_k, \ldots, z_k) \\ \vdots \\ -f_n(x_k, y_k, \ldots, z_k) \end{pmatrix}$$

Desta forma, a matriz Jacobiana é avaliada apenas uma vez e, para todo k, o sistema linear a ser resolvido a cada iteração terá a mesma matriz de coeficientes: $J(x_0, y_0, \ldots, z_0)$.

Se usarmos a fatoração LU para resolvê-lo, os fatores L e U serão calculados apenas uma vez e, a partir da 2ª iteração, será necessário resolver apenas dois sistemas triangulares para obter os valores de $r_k, s_k, \ldots, t_k$.

**Exemplo:** Resolver o sistema não linear usando o Método de Newton Modificado com $x^{(0)} = (1,3)^t$ e $\varepsilon = 0.02$. Utilize como critério de parada $\|F(x)\| < \varepsilon$.

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

# Exercícios

1 Resolva pelo Método de Newton, com $\varepsilon = 10^{-3}$, os sistemas a seguir.

a. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{cases} 3.x_1^2.x_2 - x_2^3 = 4 \\ x_1^2 + x_1.x_2^3 = 9 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

c. $\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2 = 0 \end{cases}$ com $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2- Resolva os sistemas (b) e (c) do exercício anterior, utilizando o Método de Newton Modificado, com $\varepsilon = 10^{-3}$.