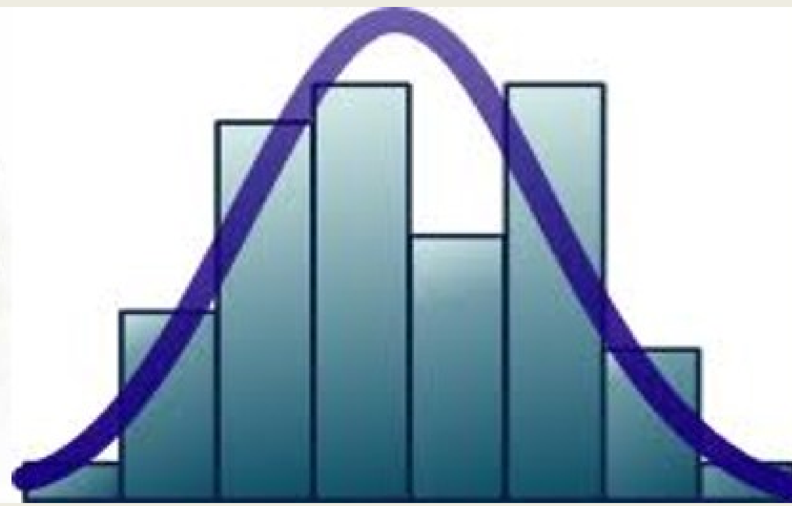
Probabilidade e Estatística





INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Professor Jeovani Schmitt

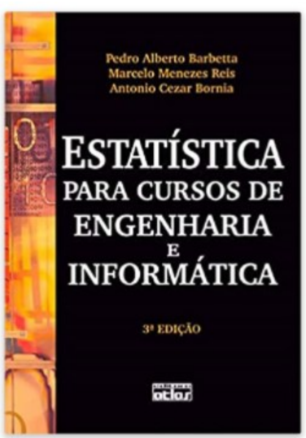
Probabilidade e Estatística

Aula 7

Probabilidade

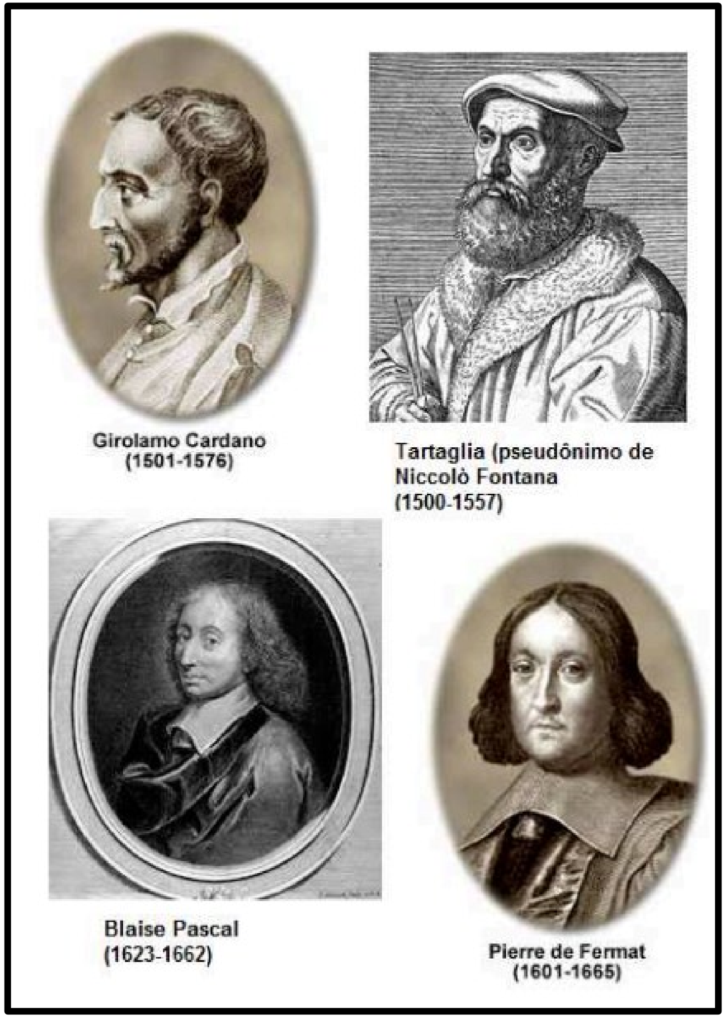
Probabilidade

- ✓ Conceitos básicos
- ✓ Probabilidade condicional (dependência) e independência
- ✓ Teorema da probabilidade total
- ✓ Teorema de Bayes



Capítulo 4, pp. 91 - 115

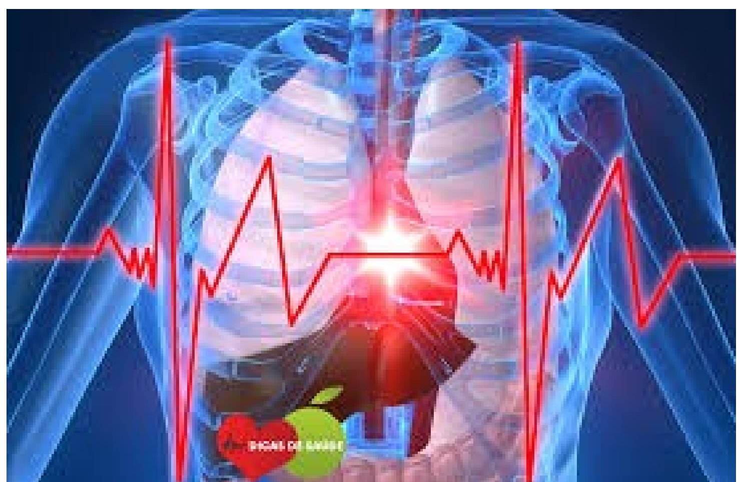
Breve histórico do desenvolvimento da teoria das probabilidades



- O estudo da probabilidade como ramo da Matemática data mais de 300 anos e teve sua gênese relacionada a questões que envolviam jogos de azar (cartas, dados, roleta ...)

Por que estudar o assunto?

"Como na nossa vida quase tudo é incerto, o conhecimento sobre a quantidade de incerteza associada a certos eventos (probabilidade) é fundamental para tomar decisões adequadas."
(Projeto Livro Aberto de Matemática, 2021)



- Quantificação da incerteza;

- Útil para tomada de decisões;

As pessoas procuram tomar decisões em função dos fatos que têm maior probabilidade de ocorrer!

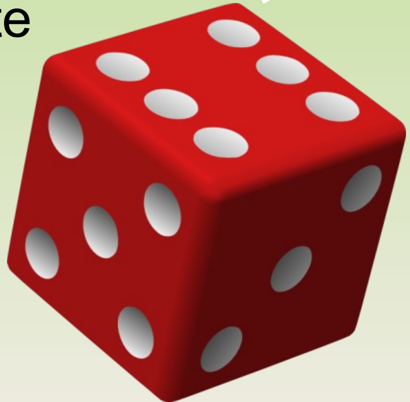
Experimento aleatório

É um experimento cujos resultado final é conhecido somente após sua realização.

Exemplos

1) Lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima.

2) Lançar um dado o observar o número resultante



Espaço amostral (S ou Ω)

É o conjunto de **todos os resultados possíveis** de um experimento aleatório.

Exemplo

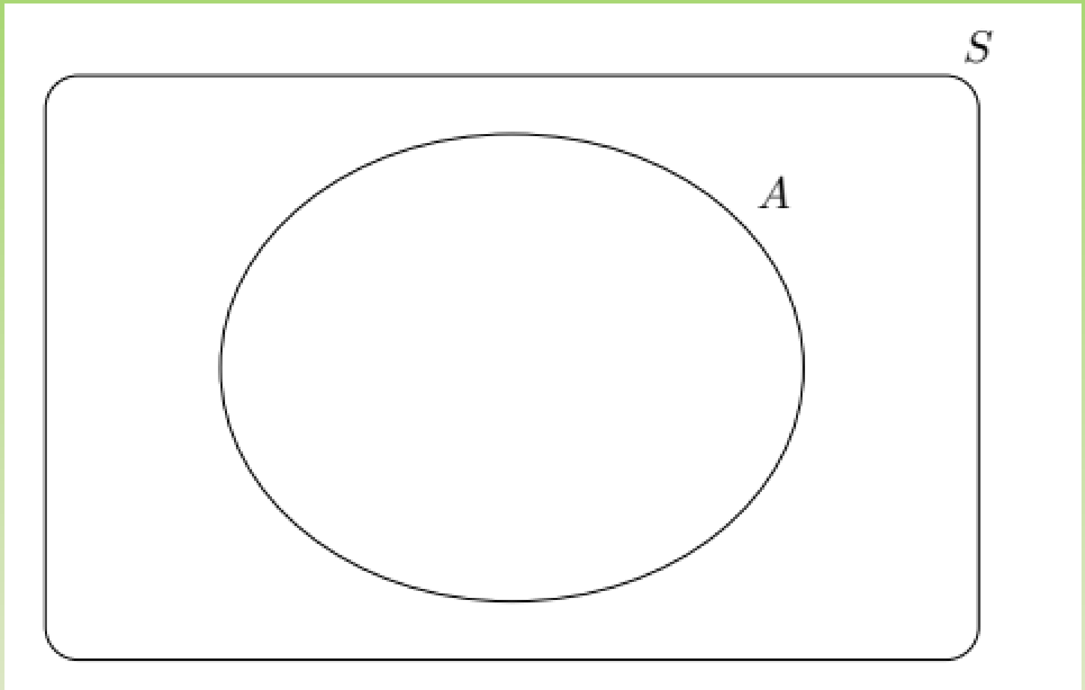
Lançamento de dois dados

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1)\,(1,2)\,(1,3)\,(1,4)\,(1,5)\,(1,6) \\ (2,1)\,(2,2)\,(2,3)\,(2,4)\,(2,5)\,(2,6) \\ (3,1)\,(3,2)\,(3,3)\,(3,4)\,(3,5)\,(3,6) \\ (4,1)\,(4,2)\,(4,3)\,(4,4)\,(4,5)\,(4,6) \\ (5,1)\,(5,2)\,(5,3)\,(5,4)\,(5,5)\,(5,6) \\ (6,1)\,(6,2)\,(6,3)\,(6,4)\,(6,5)\,(6,6) \end{matrix} \right.$$

Evento

São subconjuntos do espaço amostral S (ou Ω), geralmente representados por letras maiúsculas A, B, C, D, E, ...



$$A \subset S$$

Representação de conjuntos no diagrama de Venn

Exemplo

Experimento aleatório:

Lançar um dado o observar o número da face voltada para cima

Alguns eventos:

O resultado é um número ímpar:

A = { 1, 3, 5}

O resultado é um número primo:

B = {2, 3, 5}

Conceito de probabilidade

Definição clássica de Probabilidade

Se um experimento aleatório tem n resultados **igualmente prováveis**, e $n(A)$ desses resultados pertencem a certo evento A, então a probabilidade de ocorrência do evento A será:

$$\boxed{p(A) = \frac{n(A)}{n}}$$

Conceito de probabilidade

Definição clássica de Probabilidade

casos que nos interessam

$$p(A) = \frac{\textit{número de resultados favoráveis}}{\textit{número total de resultados possíveis}}$$

* Atenção quando o espaço amostral não for **equiprovável**

total de casos

Exercício 1

Lanço dois dados (comuns de 6 faces) e observo a soma. Qual a probabilidade de obter soma 7?

Exercício 2

Lanço uma moeda três vezes e anoto o **número de caras**.

a) Quantos são os resultados possíveis?

b) Qual é a probabilidade de saírem exatamente duas caras?

c) Exatamente 1 cara;

d) <u>Pelo menos</u> 1 cara;

e) Nenhuma cara;

f) Pelo menos duas caras;

g) Três caras;

Conceito de probabilidade

Probabilidade frequentista

Suponha que você tenha lançado uma moeda 20 vezes e que tenha observado a face “cara” 19 vezes e a face “coroa” uma vez. Se você lançar essa moeda mais uma vez, qual é a probabilidade de a face voltada para cima resultar em “cara”? Por quê?

Conceito de probabilidade

Definição experimental de probabilidade (frequentista)

Muitas vezes o cálculo de probabilidades se baseia em **observações do passado**. Seja um experimento aleatório com espaço amostral Ω e um evento A de interesse. Suponha que esse experimento seja repetido n vezes e o evento A ocorreu $n(A)$ vezes. A frequência relativa do evento A será dada por:

$$f(A) = \frac{n(A)}{n}$$

À medida que o experimento é repetido **mais e mais vezes**, sob as mesmas condições, a frequência relativa do evento A tenderá a ficar cada vez mais próxima da probabilidade de ocorrência do evento A. Mais especificamente:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Exemplo de simulação no R

A probabilidade de ocorrer cara quando lançamos uma moeda honesta é 0,5.

Isso significa que toda vez que lançarmos essa moeda 100 vezes, ocorrerão 50 caras?
Por quê?

Probabilidade é interpretada como uma **taxa média de ocorrência**. Nos lançamentos de uma moeda 100 vezes, eu espero em média, observar 50 caras. (esse número pode oscilar em cada experimento, 48, 55, 45, 47, 60, ...

SIMULAÇÃO NO R

Simulação no R

- pacote *TeachingDemos*
- função *dice*

Exemplo de código R para simular os experimentos

```
dice ( lançamentos , ndados , faces , plot.it=FALSE)
```

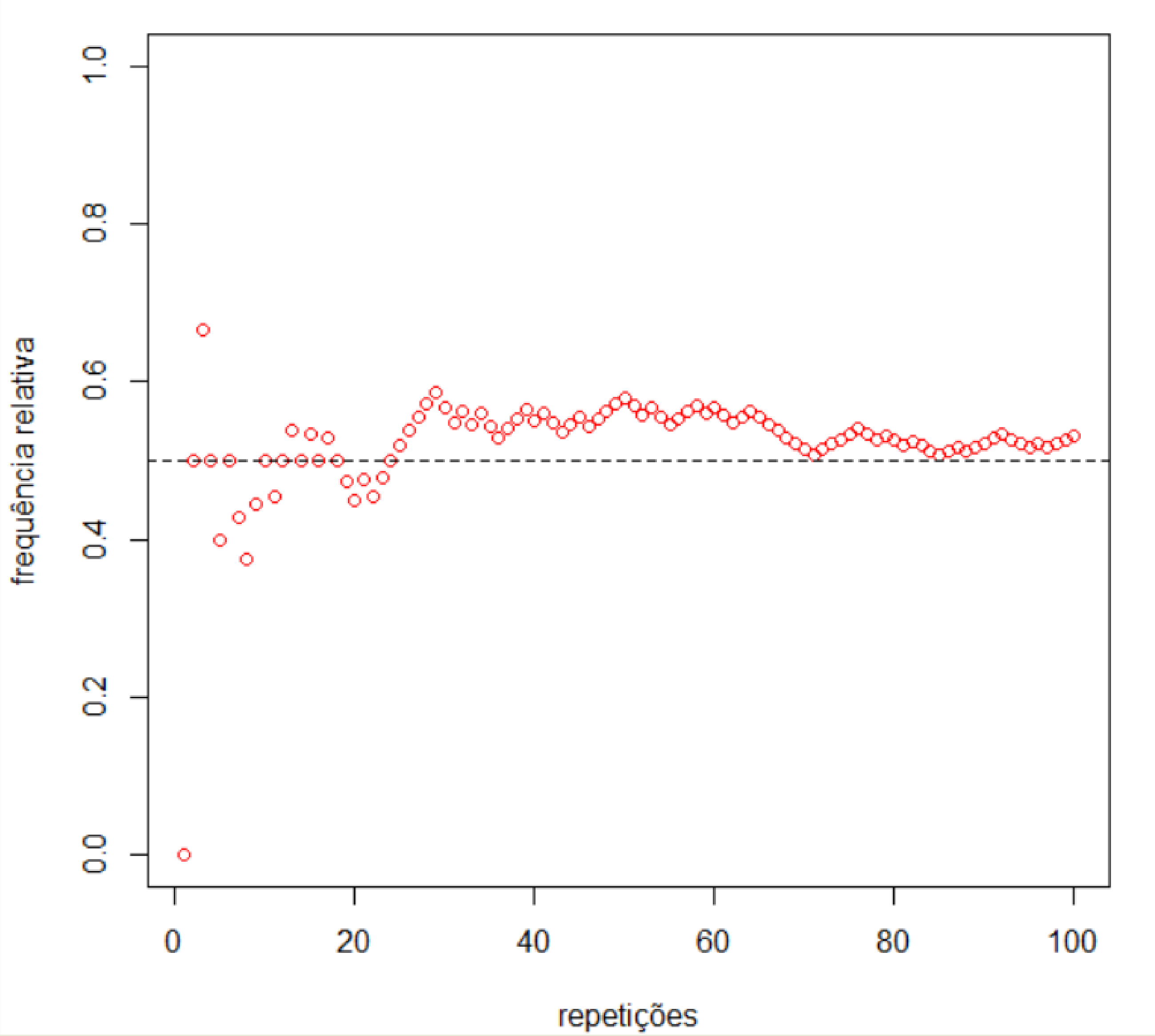
- lançamentos: número inteiro que vai indicar quantos serão os lançamentos;
- ndados: número inteiro que vai indicar quantos serão os dados;
- faces: parâmetro opcional cujo valor default é 6 e indica o número de faces do "dado". Se nada for indicado, será considerado o dado convencional de 6 faces. Logo, podemos usar a função *dice* para simular o lançamento de uma moeda honesta, fazendo faces = 2. Neste caso, a função irá produzir os números 1 e 2 com probabilidades iguais e bastará convencionarmos o número "1" para a face cara, por exemplo.
- plot.it: é uma variável lógica que assume TRUE ou FALSE e o valor default é FALSE. Se plot.it=TRUE, será produzida uma imagem do resultado obtido.

Simulação do lançamento de uma moeda honesta 100 vezes ilustrando a frequência relativa de ocorrências de caras “1”

```
set.seed(12512373) # fixa semente de geração de aleatórios

n=100 # fixa o número de repetições
p=1/2 # fixa a probabilidade de sucesso

freq_rel=matrix(0,n) # atribui o vetor nulo com n posições

x=sample(c(0,1),n,replace=T,prob=c(1-p,p)) # x recebe os n resultados do ensaio
                                              de Bernoulli com prob. de sucesso p

for (i in 1:n) freq_rel[i]=sum(x[1:i])/i # calcula o vetor de frequências relativas em
                                           função do número de repetições

plot(freq_rel,main="Frequência relativa de caras- Ilustração da
LGN",col="red",ylim=c(0,1),xlab="repetições",ylab="frequência relativa") #
constrói o gráfico das frequências atualizadas

abline(h=p,lty=2) # traça linha no valor de p
```

Resultado gráfico no próximo slide

Lançamento de uma moeda honesta 100 vezes



Lei dos Grandes Números

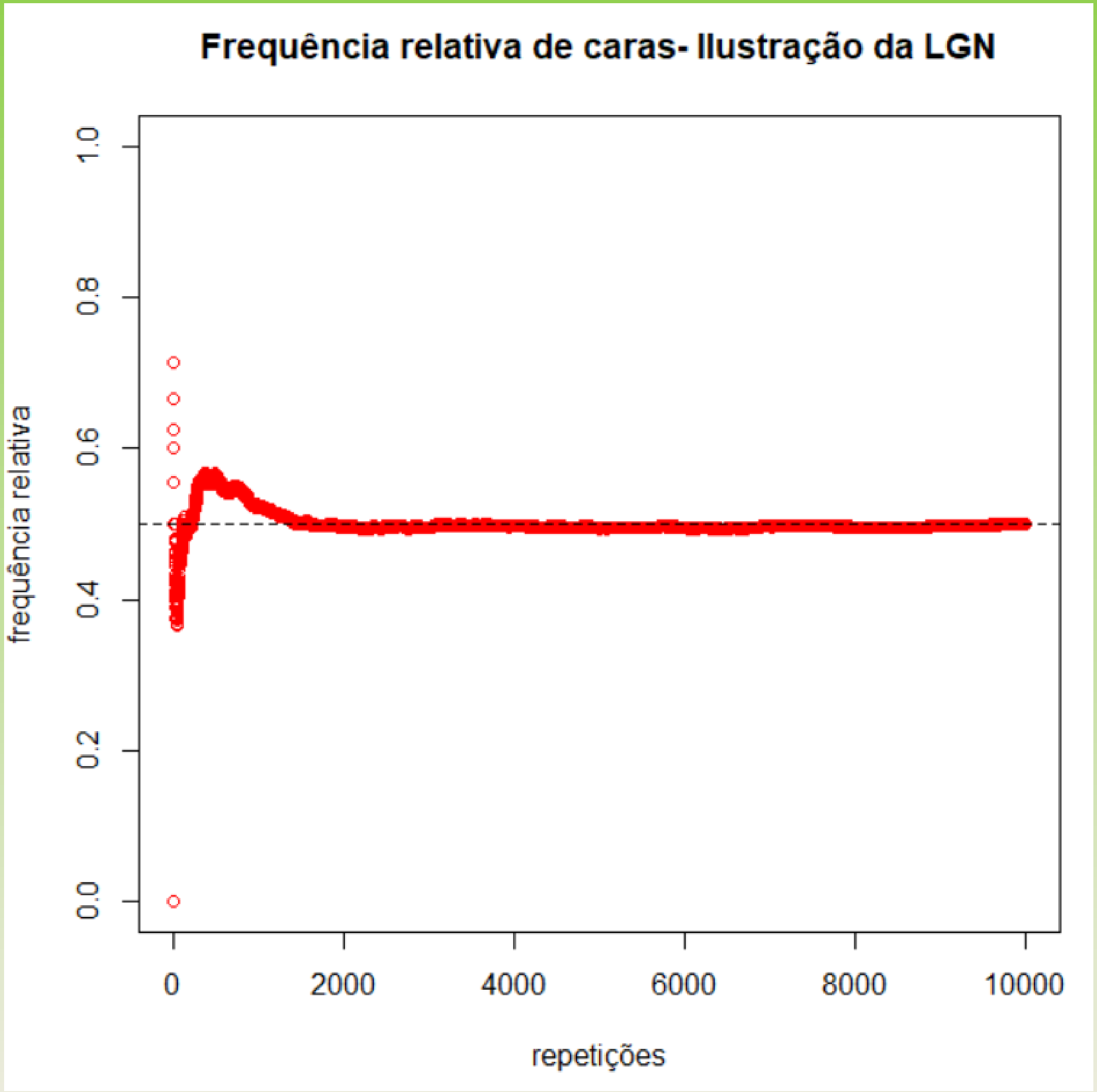
Lançamento de uma moeda honesta 10.000 vezes

Simulação do lançamento de uma moeda honesta 10.000 vezes ilustrando a frequência relativa de ocorrências de caras “1”

```
n=10000 # fixa o número de repetições
p=1/2 # fixa a probabilidade de sucesso

freq_rel=matrix(0,n) # atribui o vetor nulo com n posições

x=sample(c(0,1),n,replace=T,prob=c(1-p,p)) # x recebe os n resultados do ensaio
                                              de Bernoulli com prob. de sucesso p

for (i in 1:n) freq_rel[i]=sum(x[1:i])/i # calcula o vetor de frequências relativas em
                                    função do número de repetições

plot(freq_rel,main="Frequência relativa de caras- Ilustração da
LGN",col="red",ylim=c(0,1),xlab="repetições",ylab="frequência relativa") #
constrói o gráfico das frequências atualizadas

abline(h=p,lty=2) # traça linha no valor de p
```

Resultado gráfico no próximo slide

Lei dos Grandes Números



Axiomas de probabilidade

Regra I

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Regra II

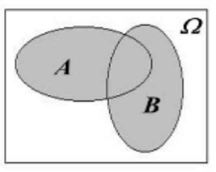
$$P(S) = 1$$

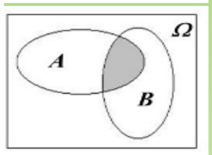
$$P(\varnothing) = 0$$

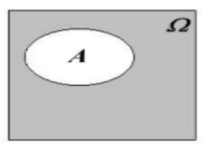
Tipos e operações com eventos

Considerando A e B eventos quaisquer de Ω, seguem as principais operações entre eventos:

Operação	Notação	Conjunto	Evento
a) união	$A \cup B$	reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (A, B ou ambos)
b) interseção	$A \cap B$	formado somente pelos elementos que estão em A e B	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (A e B)
c) complementar	$\bar{A}$	formado pelos elementos que não estão em A	ocorre quando não ocorrer o evento A (*não A*)







$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Regras de Cálculo de Probabilidades

Regra 1A:
Probabilidade da União de Eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Regra 2:
Probabilidade de Dois Eventos Independentes

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Regra 2:
Probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercício 3

Numa sala tem-se: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso. Os seguintes eventos são definidos:

A: a pessoa tem mais de 21 anos;
B: a pessoa tem menos de 21 anos;
C: a pessoa é um rapaz;
D: a pessoa é uma moça.
Pede-se:

a) A probabilidade de ter menos de 21 anos e ser uma moça?
b) A probabilidade de ter mais de 21 anos e ser um rapaz?
c) A probabilidade de ser uma moça?
d) A probabilidade de ter mais de 21 anos ou ser uma moça?

Exercício 4

A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é 2/5; a de sua mulher é de 2/3. Determinar a probabilidade de que a 30 anos:

a) Ambos estejam vivos?
b) Somente o homem esteja vivo?
c) Nenhum esteja vivo?
d) Pelo menos um esteja vivo?

Exercício 5

Um casal planeja ter filhos até terem uma menina ou no máximo quatro filhos. Qual a probabilidade deste casal ter uma menina?

Exercício 6

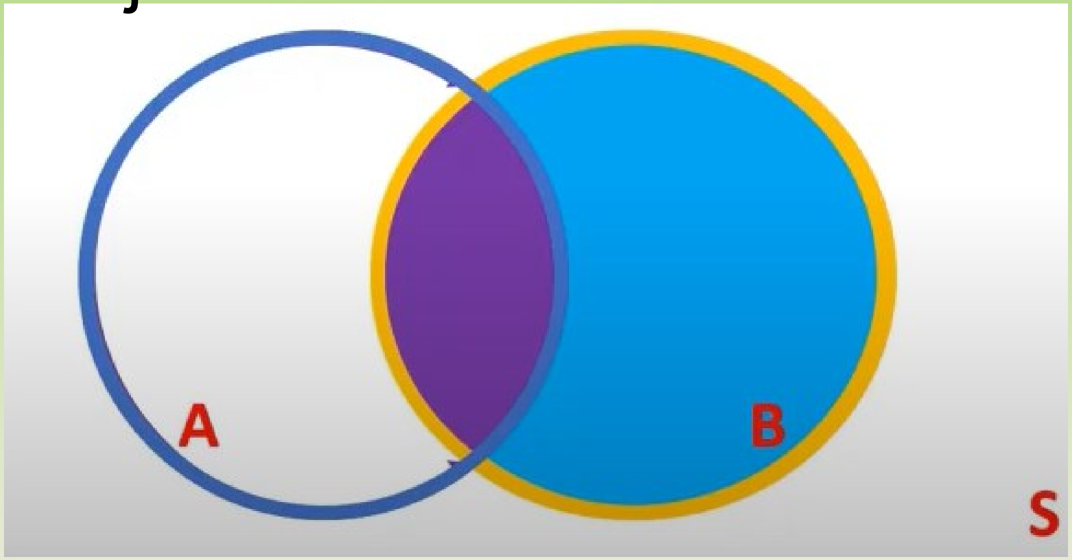
Em um cesto de roupas há dez camisetas, das quais três estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição do cesto. Qual é a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas?

Probabilidade Condicional

Sejam **A** e **B** eventos quaisquer, sendo $P(B) > 0$. Definimos a probabilidade condicional de **A** dado **B** por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Em linguagem de conjuntos...



Ao invés de utilizar a fórmula, também podemos usar o raciocínio de reduzir nosso espaço amostral.

Exemplo

Seja o lançamento de dois dados (não viciados) e a observação das faces voltadas para cima.

Calcule:

a) A probabilidade de as faces iguais, sabendo que a soma é menor ou igual a 5;

b) A probabilidade de a soma das faces menor ou igual a 5, sabendo que as faces são iguais

Exemplo

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) A probabilidade de as faces iguais, sabendo que a soma é menor ou igual a 5;

b) A probabilidade de a soma das faces menor ou igual a 5, sabendo que as faces são iguais

Exercício 7

Considere 250 alunos que cursam o primeiro semestre de uma universidade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M), 110 cursam Economia (ECO) e 140 cursam Administração (ADM), sabendo que 50 alunos são homens e cursam Economia.

Um aluno é sorteado ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que esteja cursando administração, dado que é mulher?

b) Qual a probabilidade de que seja homem e esteja cursando economia?

c) Qual a probabilidade de que seja mulher, sabendo que está cursando administração?

d) Qual a probabilidade de que esteja cursando ADM ou é uma mulher?

- **Teorema da Probabilidade Total**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

- **Teorema de Bayes**

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}, k = 1, 2, \dots, n$$

Teorema da Probabilidade Total

Exemplo - Suponha que três fábricas forneçam lâmpadas para o mercado. As lâmpadas da fábrica X trabalham por mais de 5.000 horas em 99% dos casos, enquanto as lâmpadas de Y trabalham por mais de 5.000 horas em 95% e a fábrica Z em 90% dos casos por mais de 5.000 horas. Sabe-se que a fábrica X fornece 60% e Y fornece 30% das lâmpadas. *Qual é a probabilidade de que a lâmpada comprada irá funcionar por mais de 5.000 horas?*

$P(X) = 0{,}6$ $\qquad$ $P(+5K|X) = 0{,}99$

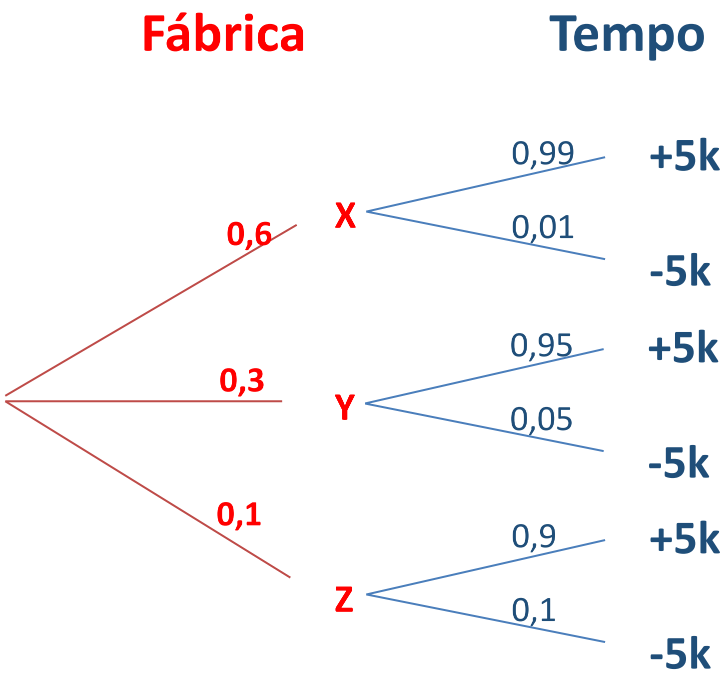
$P(Y) = 0{,}3$ $\qquad$ $P(+5K|Y) = 0{,}95$

$P(Z) = 0{,}1$ $\qquad$ $P(+5K|Z) = 0{,}90$

Probabilidade do fornecimento das lâmpadas.

Probabilidade de funcionar mais de 5.000 horas, dado o fornecedor.

Qual é a probabilidade de que a lâmpada comprada irá funcionar por mais de 5.000 horas?



$\boxed{P(X \cap +5K) = 0{,}594}$

$P(X \cap -5K) = 0{,}006$

$\boxed{P(Y \cap +5K) = 0{,}285}$

$P(Y \cap -5K) = 0{,}015$

$\boxed{P(Z \cap +5K) = 0{,}09}$

$P(Z \cap -5K) = 0{,}01$

$P(+5K)$

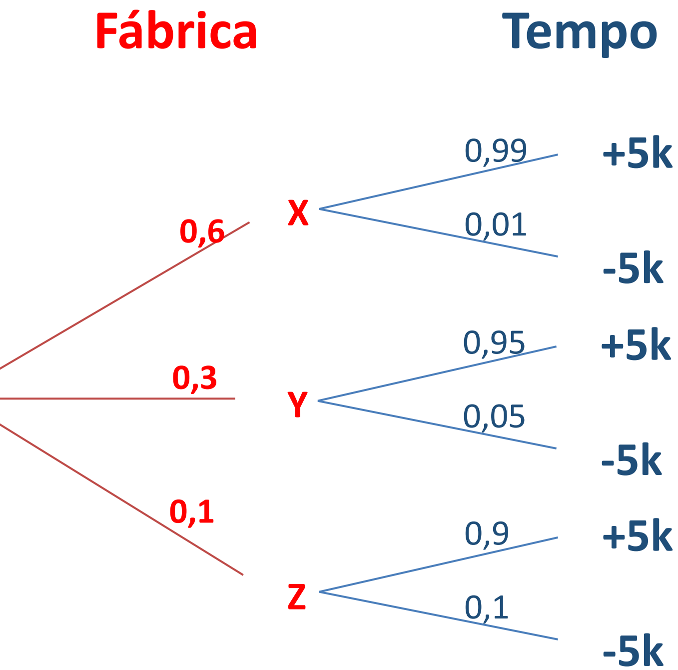
$0{,}594 + 0{,}285 + 0{,}09 = 0{,}969$

ou

$96{,}9\%$

Teorema de Bayes

Perguntas do tipo: Qual é a probabilidade de uma lâmpada ser da fábrica X sendo que ela funcionou por mais de 5.000 horas?



$\boxed{P(X \cap +5K) = 0{,}594}$

$P(X \cap -5K) = 0{,}006$

$\boxed{P(Y \cap +5K) = 0{,}285}$

$P(Y \cap -5K) = 0{,}015$

$\boxed{P(Z \cap +5K) = 0{,}09}$

$P(Z \cap -5K) = 0{,}01$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X|+5k) = \frac{P(X \cap +5k)}{P(+5k)}$$

$=$

$$= \frac{0{,}594}{0{,}969} = 0{,}6130$$

Exercício 8

Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (**A**, **B**, **C**, **D**, e **E**). Registros anteriores indicam que dos pedidos de determinado tipo de processamento, realizados através de uma consulta, cerca de 10% vêm do cliente **A**, 15% do **B**, 15% do **C**, 40% do **D** e 20% do **E**. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro.
Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente **A**, 2% do cliente **B**, 0,5% do cliente **C**, 2% do cliente **D** e 8% do cliente **E**.

a) Qual é a probabilidade de o sistema apresentar erro?
b) Qual é a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente **E**, sabendo-se que apresentou erro?

Desafio

Ao lançar um dado 5 vezes, qual a probabilidade de obter a face 6 duas vezes?

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$