Probabilidade e Estatística

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Professor Jeovani Schmitt

Probabilidade e Estatística

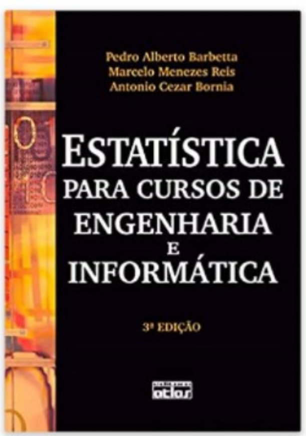
Variáveis aleatórias discretas (parte 1)

Variável aleatória

Distribuição de probabilidades

Principais distribuições discretas:

- Distribuição de Bernoulli
- Distribuição Binomial
- Distribuição Hipergeométrica
  Distribuição de Poisson



Capítulo 5, pp. 116 - 139

Variável aleatória – definição

Uma variável aleatória pode ser entendida como variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.

Formalmente, uma variável aleatória é uma função que associa elementos do espaço amostral ao conjunto de números reais

Exemplos de Variável aleatória

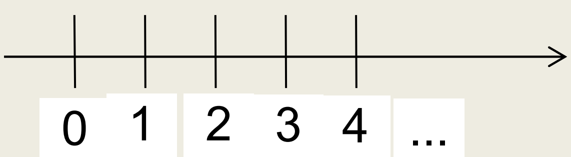
- Vida útil (em horas) de um televisor.
- Número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
- Número de acidentes registrados durante um mês na BR.101.
- Na *internet*, o tempo (em segundos) para que uma determinada mensagem chegar ao seu destino.
- Se uma mensagem chega ($X = 1$), ou não ($X = 0$), ao seu destino

Classificação da Variável aleatória

variável aleatória

discreta

os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito ou enumerável



número de defeitos em ...

contínua

os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais

tempo de resposta de ...

Função de probabilidade

Se $\boldsymbol{X}$ for discreta, com possíveis valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, então a *distribuição de probabilidades* de $\boldsymbol{X}$ pode ser apresentada pela chamada **função de probabilidade**, que associa a cada valor possível x_i a sua probabilidade de ocorrência $p(x_i)$, ou seja:

$$p(x_i) = P(X = x_i)\ (i = 1,2, \ldots)$$

Média ou Valor esperado (μ) e variância (σ^2)

x	p(x)
x_1	p_1
x_2	p_2
...	...
x_n	p_n
Total	**1**

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

Principais distribuições discretas

Distribuição de Bernoulli

São experimentos em que observamos a presença ou não de alguma característica.

Esses experimentos são conhecidos como *ensaios de Bernoulli*.

Distribuição de Bernoulli - Exemplos

a) lançar uma moeda e observar se ocorre cara ou não;

b) lançar um dado e observar se ocorre seis ou não;

c) numa linha de produção, observar se um item, tomado ao acaso, é ou não defeituoso;

d) verificar se um servidor de intranet está ou não ativo.

Denominamos ***sucesso*** e ***fracasso*** os dois possíveis eventos em cada caso.

O termo sucesso não significa algo bom, mas simplesmente um resultado ou evento no qual temos interesse; e fracasso, o outro resultado

Distribuição de Bernoulli

O ensaio de Bernoulli é caracterizado por uma variável aleatória **X**, definida por X = 1, se *sucesso*; X = 0, se fracasso.

A função de probabilidade de X (Distribuição de Bernoulli) é dada por

x	**p(x)**
0	**1 - p**
1	**p**
total	**1**

$\Rightarrow$ $p = P\{sucesso\}$

Média ou valor esperado $E(X) = p$

Variância $V(X) = p.(1 - p)$

Distribuição Binomial

Na maior parte das vezes, são realizados n ensaios de Bernoulli.

O interesse está no número $\mathbf{X}$ de ocorrências de **sucesso**, como nos exemplos a seguir:

a) lançar uma moeda cinco vezes e observar o número de caras;
b) verificar, num dado instante, o número de processadores ativos, num sistema com multiprocessadores;
c) verificar o número de *bits* que não estão afetados por ruídos, em um pacote com n *bits*.
d) numa linha de produção, observar dez itens tomados ao acaso, e verificar quantos estão defeituosos.

Distribuição Binomial

Nos exemplos anteriores, se for possível supor:

- Ensaios independentes;
- P(sucesso) = p, constante para todo ensaio ($0 < p < 1$)

Temos, então, exemplos de experimentos binomiais.

Distribuição Binomial

- ✓ consiste de **n** ensaios;
- ✓ cada ensaio tem somente dois resultados: "**sucesso**" / "**fracasso**";
- ✓ os ensaios são independentes, com

  P(sucesso) = $\boldsymbol{p}$ (0 < p < 1 constante ao longo dos ensaios);
- ✓ **X** = número de **sucesso** nos **n** ensaios

- ✓ A média da variável com distribuição binomial é dada por:

  $\mu = \boldsymbol{n.\ p}$

- ✓ A variância da variável com distribuição de binomial é dada por: $\sigma^2 = \boldsymbol{n.p.\ (1\text{-}p)}$

Distribuição Binomial – Exemplo 1

Considere que numa grande rede de computadores, em **60%** dos dias ocorre alguma falha.

a) Construir a distribuição de probabilidades para a variável aleatória **X = número de dias com falhas na rede**, considerando o período de observação de **três** dias.

(Suponha independência.)

b) Qual a probabilidade de haver falhas na rede em 2 dos 3 dias?

c) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos um dia;

d) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos dois dias (ou seja, em dois ou mais dias).

Distribuição Binomial – Exemplo 1

a) Seja **X**: número de dias com falhas na rede

Possibilidades	x	Probabilidade
BBB	0	0,4 x 0,4 x 0,4 = 0,064
BBF	1	0,4 x 0,4 x 0,6 = 0,096
BFB	1	0,4 x 0,6 x 0,4 = 0,096
FBB	1	0,6 x 0,4 x 0,4 = 0,096
BFF	2	0,4 x 0,6 x 0,6 = 0,144
FBF	2	0,6 x 0,4 x 0,6 = 0,144
FFB	2	0,6 x 0,6 x 0,4 = 0,144
FFF	3	0,6 x 0,6 x 0,6 = 0,216

F: Dia com falha   p = 0,60
B: Dia sem falha   p = 0,40

Distribuição Binomial – Exemplo 1

a) Seja **X**: número de dias com falhas na rede

Distribuição de probabilidade de X:

x	p(x)
0	0,064
1	0,288
2	0,432
3	0,216
Total	1,000

Distribuição Binomial – Exemplo 1

b) Qual a probabilidade de haver falha na rede em 2 dias?

Expressão geral da Distribuição Binomial

Seja **X** uma variável aleatória, a probabilidade de ocorrer exatamente ***x*** sucessos em ***n*** ensaios é dada pela expressão:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} . (1 - p)^{n-x}$$

Onde $\binom{n}{x}$ é a combinação de ***n***, ***x*** a ***x***, calculada por: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

A variável X tem distribuição binomial, com parâmetros ***n*** e ***p***

Aplicação da Expressão geral da Distribuição Binomial no exemplo 1

Calcular a letra b) do exemplo 1 por meio da fórmula:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} . p^x . (1 - p)^{n-x}$$

Dados: $$\begin{cases} n = 3 \\ p = 0{,}60 \\ 1 - p = 0{,}40 \\ x = 2 \end{cases}$$

n = número de dias observados
p = probabilidade falha em cada dia
$1 - p$ = probabilidade de não haver falha
x = número de falhas

Distribuição Binomial – Exemplo 1

c) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos um dia;

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = ?$$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} . p^x . (1 - p)^{n-x}}$$

Dados: $\begin{cases} n = 3 \\ p = 0{,}60 \\ 1 - p = 0{,}40 \\ x = 0 \end{cases}$

Distribuição Binomial – Exemplo 1

d) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos dois dias (ou seja, em dois ou mais dias).

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = ?$$

Exemplo 1 no R

a) a distribuição de probabilidades para a variável aleatória **X = número de dias com falhas na rede**, considerando o período de observação de **três** dias. (Suponha independência.)

Exemplo 1 no R

b) a probabilidade de haver falhas na rede em 2 dos 3 dias;

$$P(X = 2) = ?$$

Exemplo 1 no R

c) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos um dia.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = ?$$

Exemplo 1 no R

d) a probabilidade de ocorrer falha em pelo menos dois dias (ou seja, em dois ou mais dias);

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = ?$$

EXERCÍCIOS

Dados históricos mostram que 5% dos itens provindos de um fornecedor apresentam algum tipo de defeito. Considerando um lote de 20 itens, calcule a probabilidade de:

a) haver algum item com defeito;

b) haver exatamente dois itens defeituosos;

c) haver mais de dois itens defeituosos;

d) qual é o número esperado de itens delituosos no lote?

e) e de itens bons?

EXERCÍCIOS

01. Em um grande lote, sabe-se que 10 % das peças são defeituosas. Qual é a probabilidade de, ao se retirarem 6 peças ao acaso:

a) uma ser defeituosa?

b) no máximo uma ser defeituosa?

c) pelo menos duas serem defeituosas?

EXERCÍCIOS

02. Jogamos uma moeda não-viciada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?

EXERCÍCIOS

03. Um laboratório divulga que a eficácia de determinada droga antidepressiva é de 80%. Tal droga foi administrada a 10 pacientes. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de que exatamente 6 pacientes fiquem curados?
b) Qual a probabilidade de que fiquem curados no máximo 2 pacientes?
c) Qual a probabilidade de que fiquem curados pelo menos 3 pacientes?
d) Qual a probabilidade de que fiquem curados entre 5 e 8 pacientes?
e) Qual a média de pacientes que deverão ficar curados, a variância e o desvio padrão?

EXERCÍCIOS

04. O departamento de qualidade de uma empresa seleciona, aleatoriamente, alguns itens que chegam à empresa e submete-os a testes. Para avaliar um lote de transformadores de pequeno porte, o departamento de qualidade selecionou, aleatoriamente, 10 transformadores. Ele vai recomendar a aceitação do lote se não existir item defeituoso na amostra. Supondo que o processo produtivo desses transformadores gera um percentual de 3% de defeituosos, qual é a probabilidade de que o lote venha a ser aceito?