Probabilidade e Estatística

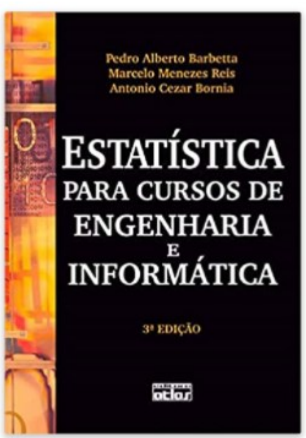
INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus Blumenau

Professor Jeovani Schmitt

Probabilidade e Estatística

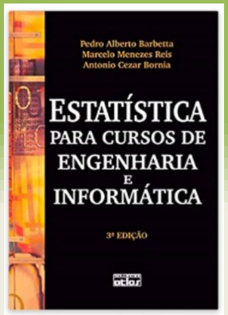
Variáveis aleatórias contínuas

- Distribuição Uniforme
- Distribuição Exponencial
- Distribuição Normal



Capítulo 6, pp. 140 - 168

Variáveis aleatórias contínuas



Muitas variáveis aleatórias têm natureza contínua, por exemplo:

- ✓ Tempo de resposta de um sistema computacional;
- ✓ Tempo de vida de um componente eletrônico;
- ✓ Resistência de um material etc.

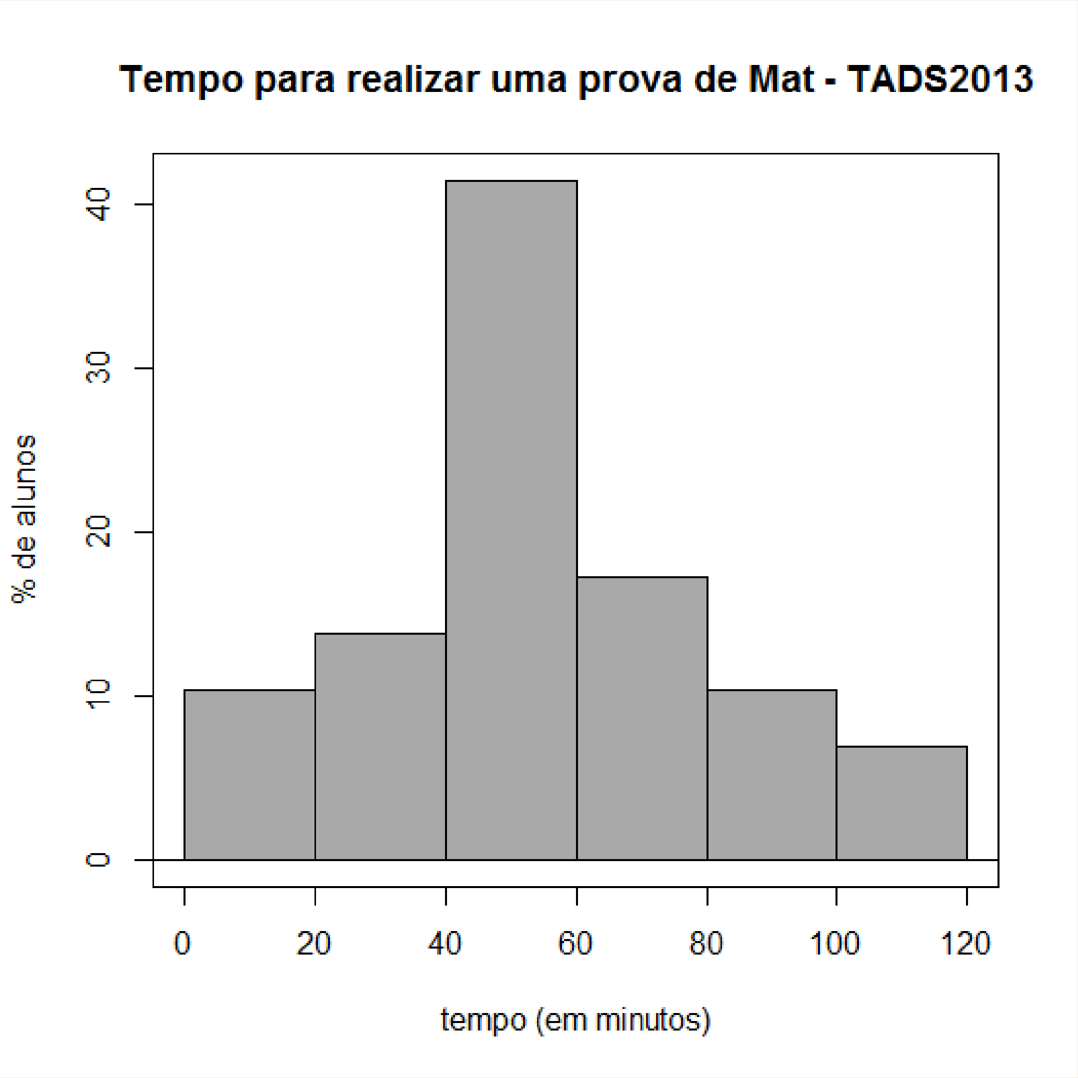
MODELOS PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Distribuição Normal ou de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Distribuição Normal

Exemplo: Tempo de prova no TADS



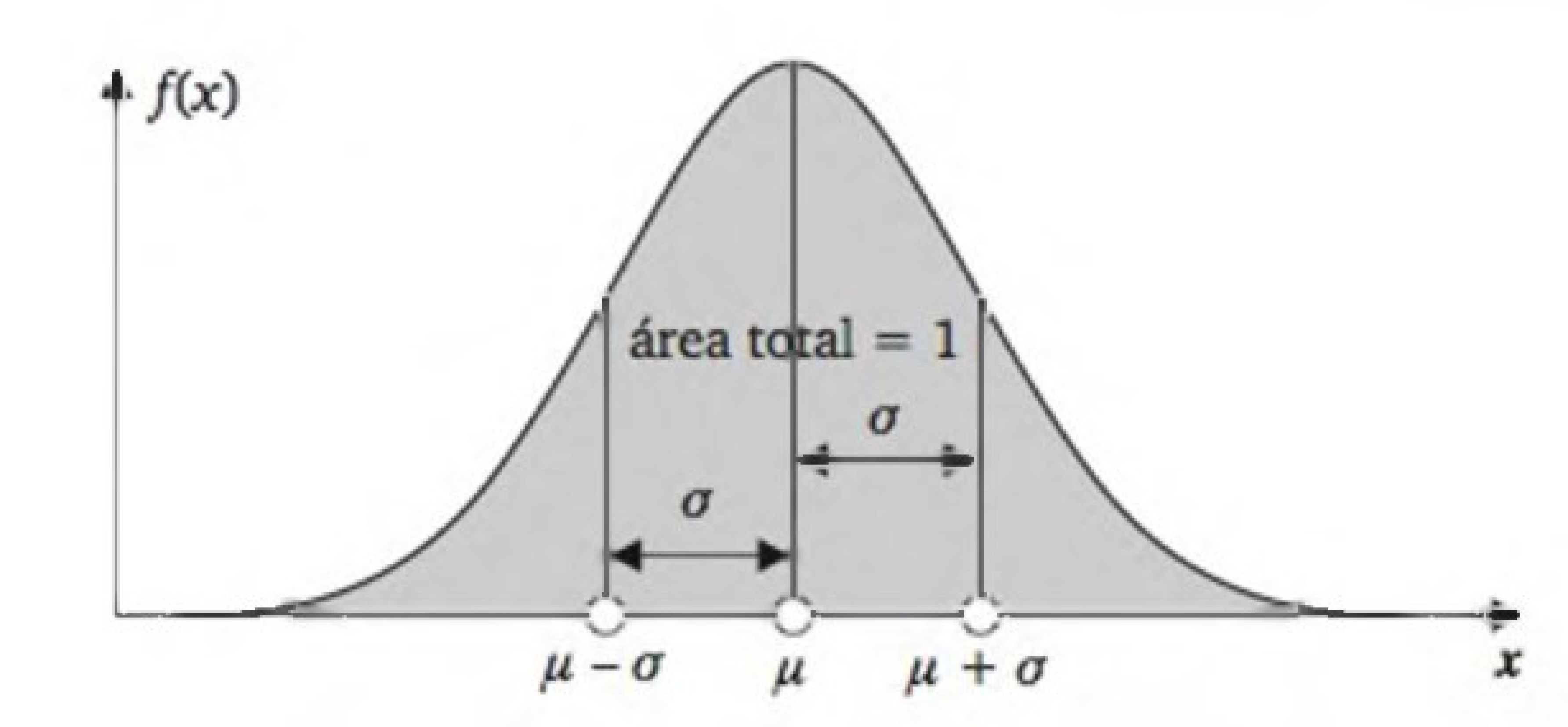
Função densidade de probabilidade da normal

Dados os parâmetros $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\sigma} > 0$, a função densidade de probabilidade da normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < +\infty$$

$\boldsymbol{\mu}$: média
$\boldsymbol{\sigma}$: desvio padrão

Representação gráfica da f.d.p. normal

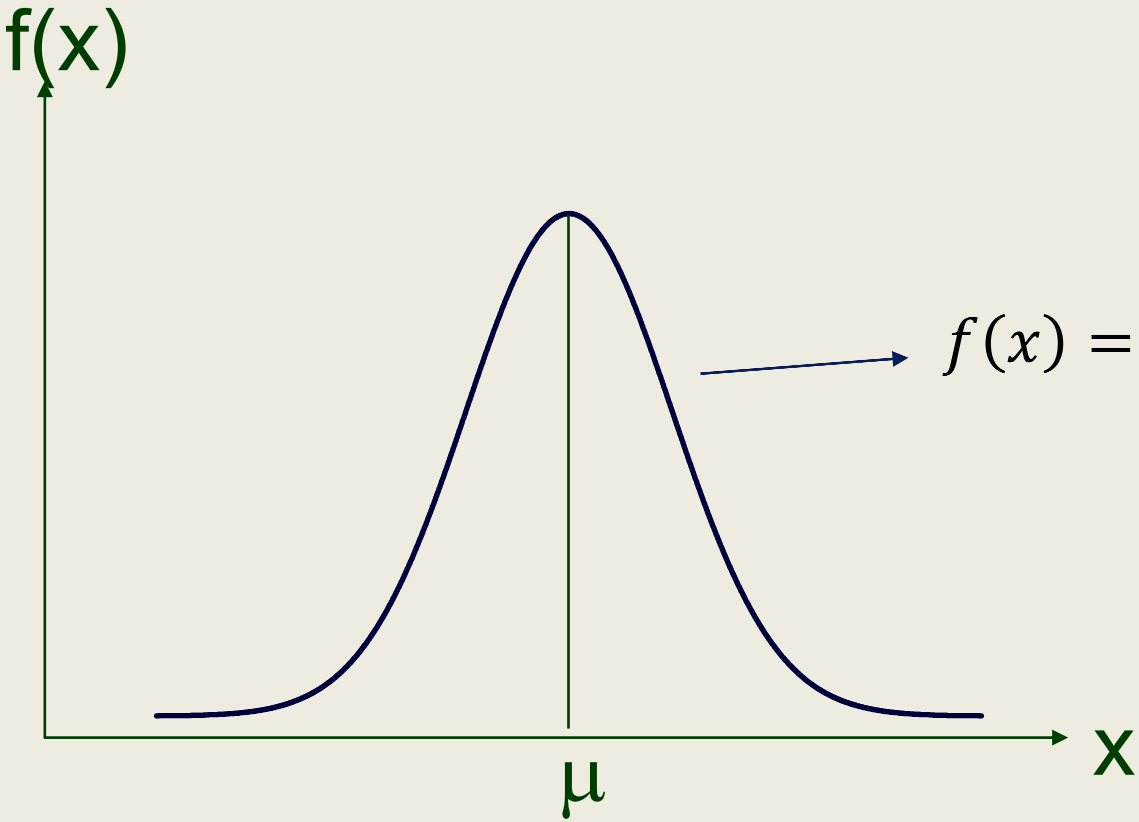


Representação gráfica da função densidade de probabilidade normal e a indicação de seus dois parâmetros: μ e σ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

f.d.p. = função densidade de probabilidade

Distribuição Normal

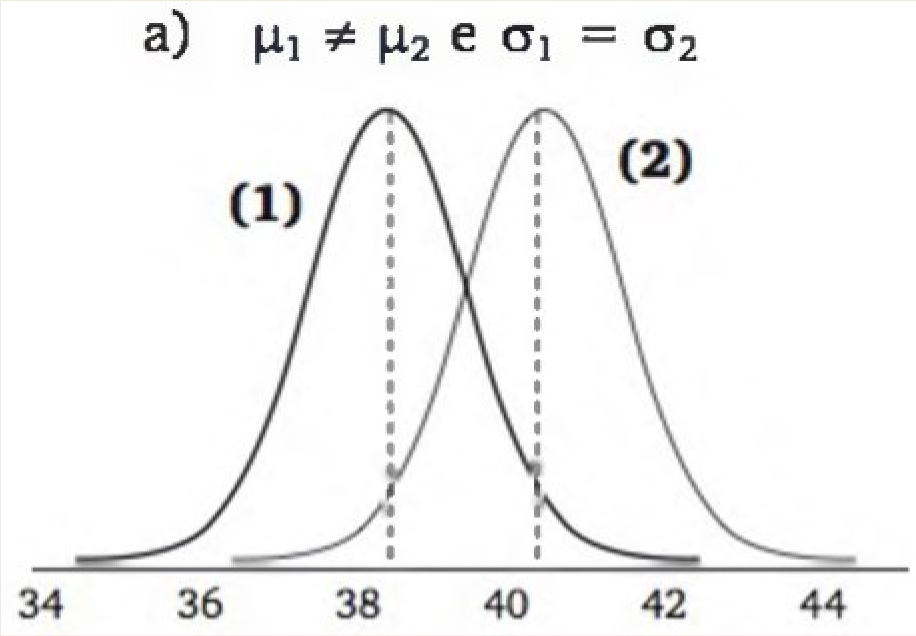


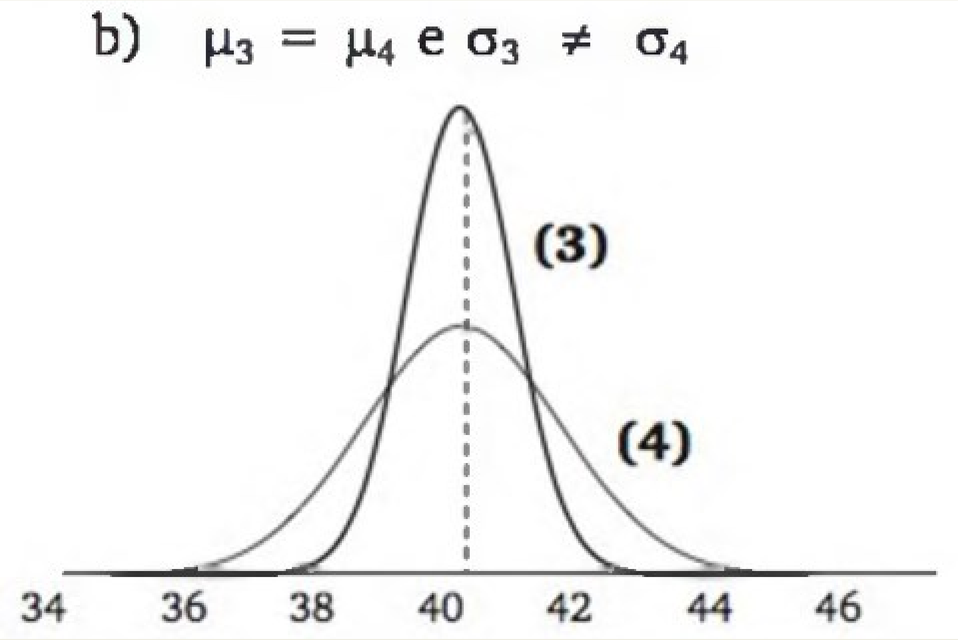
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ: média
σ: desvio padrão

Máquina de Galton
(YouTube)

Distribuição Normal – média e desvio padrão



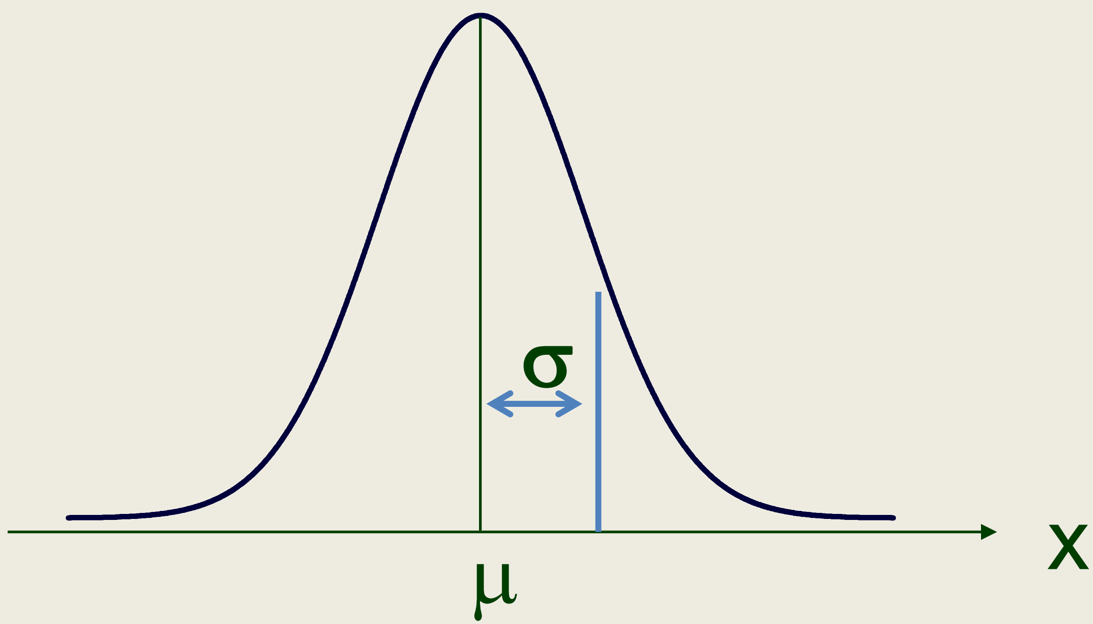


mesmo σ e diferentes μ

mesma $\boldsymbol{\mu}$ e diferentes $\boldsymbol{\sigma}$

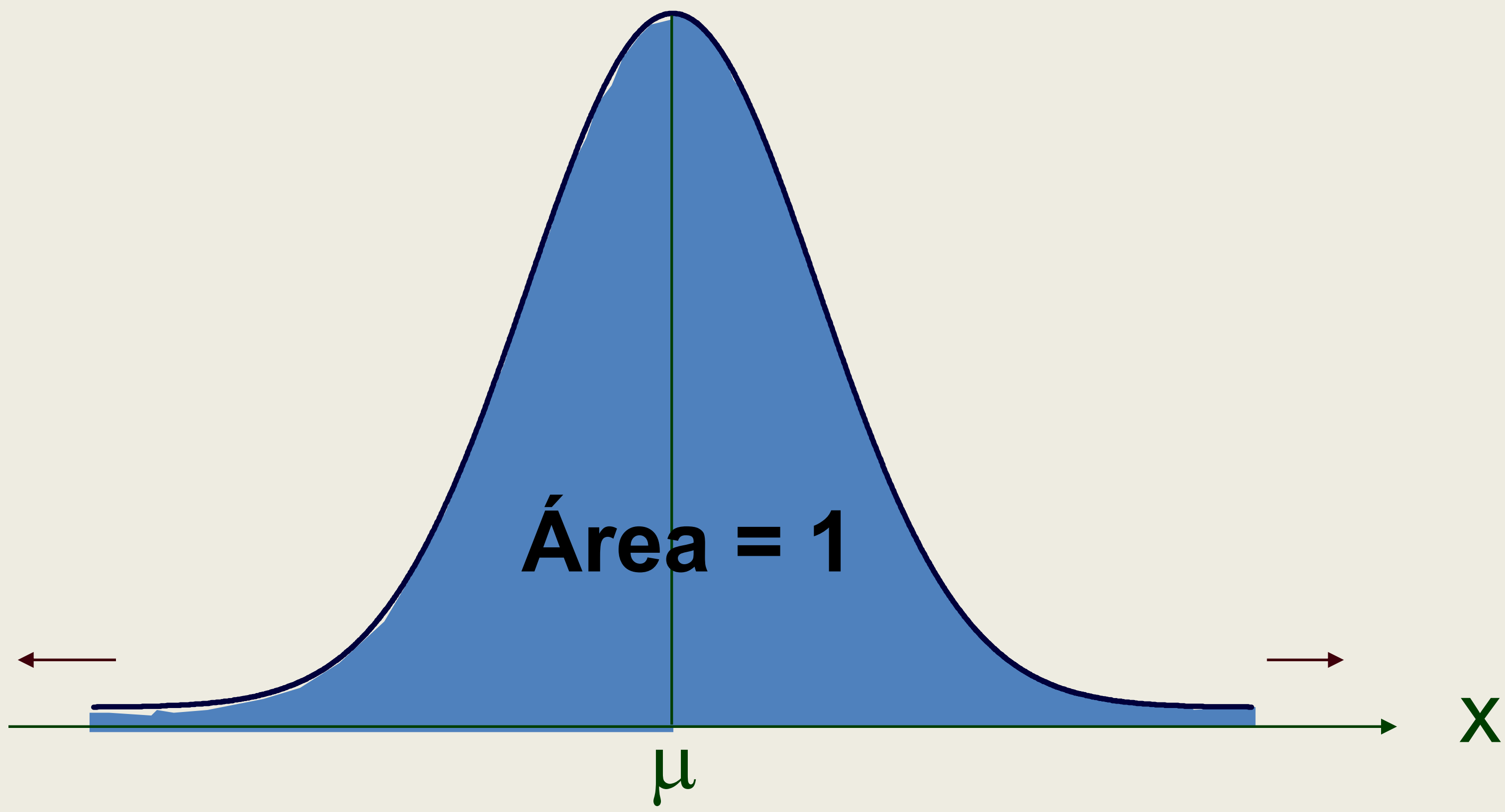
Características

Identificada pela média (μ) e pelo desvio padrão (σ)



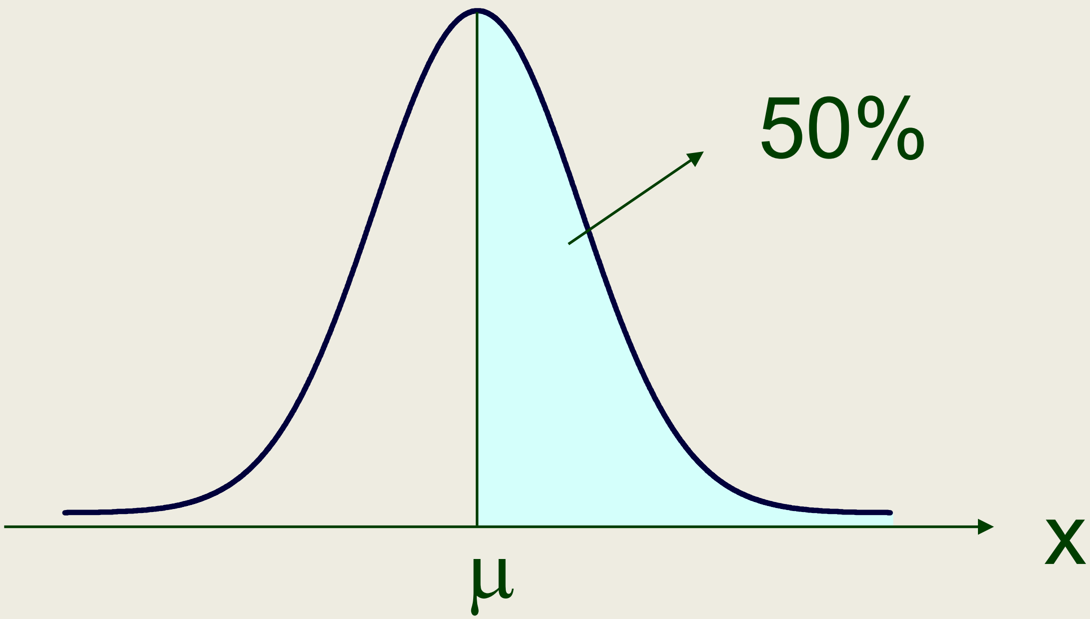
Características

- Área abaixo da curva é igual a 1 (100% de probabilidade)
- A variável aleatória pode assumir valores de - ∞ a + ∞

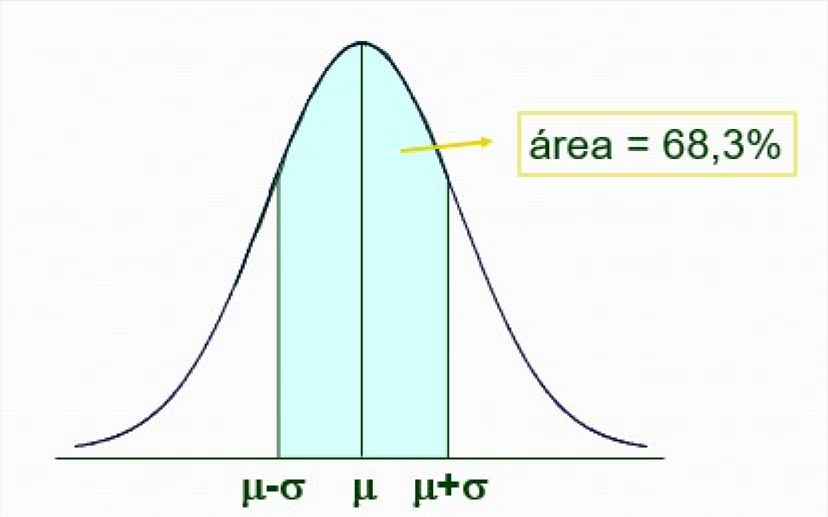


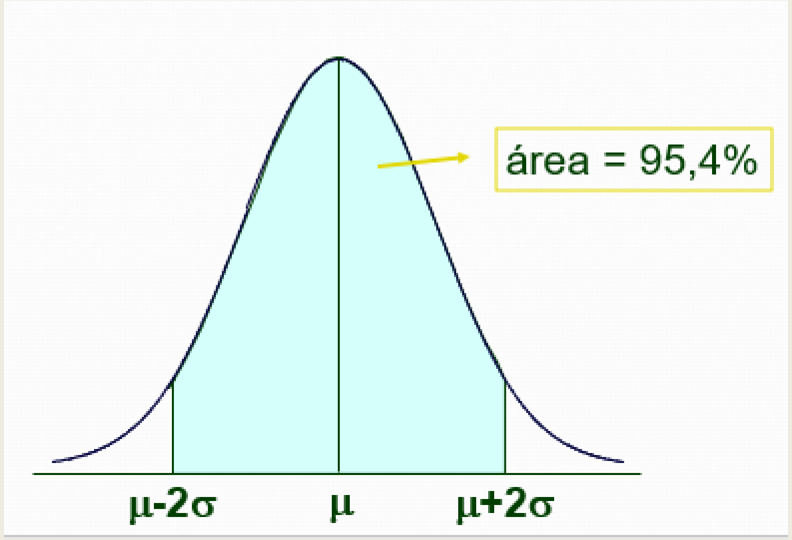
Características

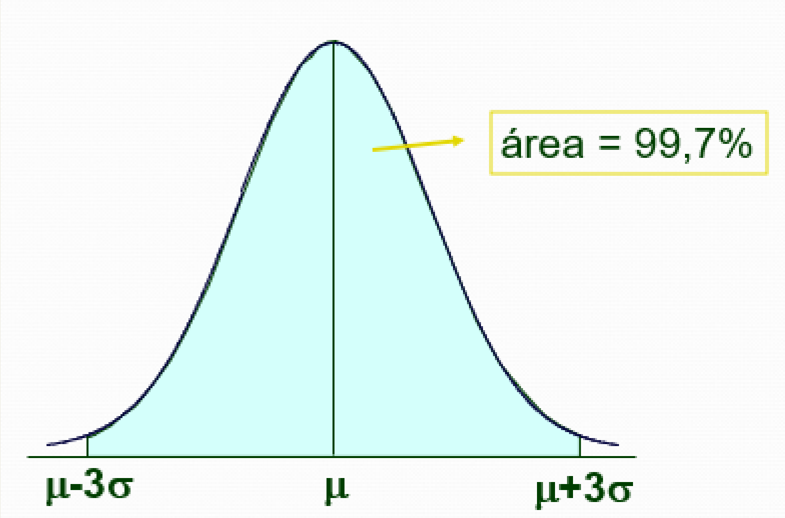
Simetria em relação à média.



Afastamentos da média, em unidades de desvio padrão





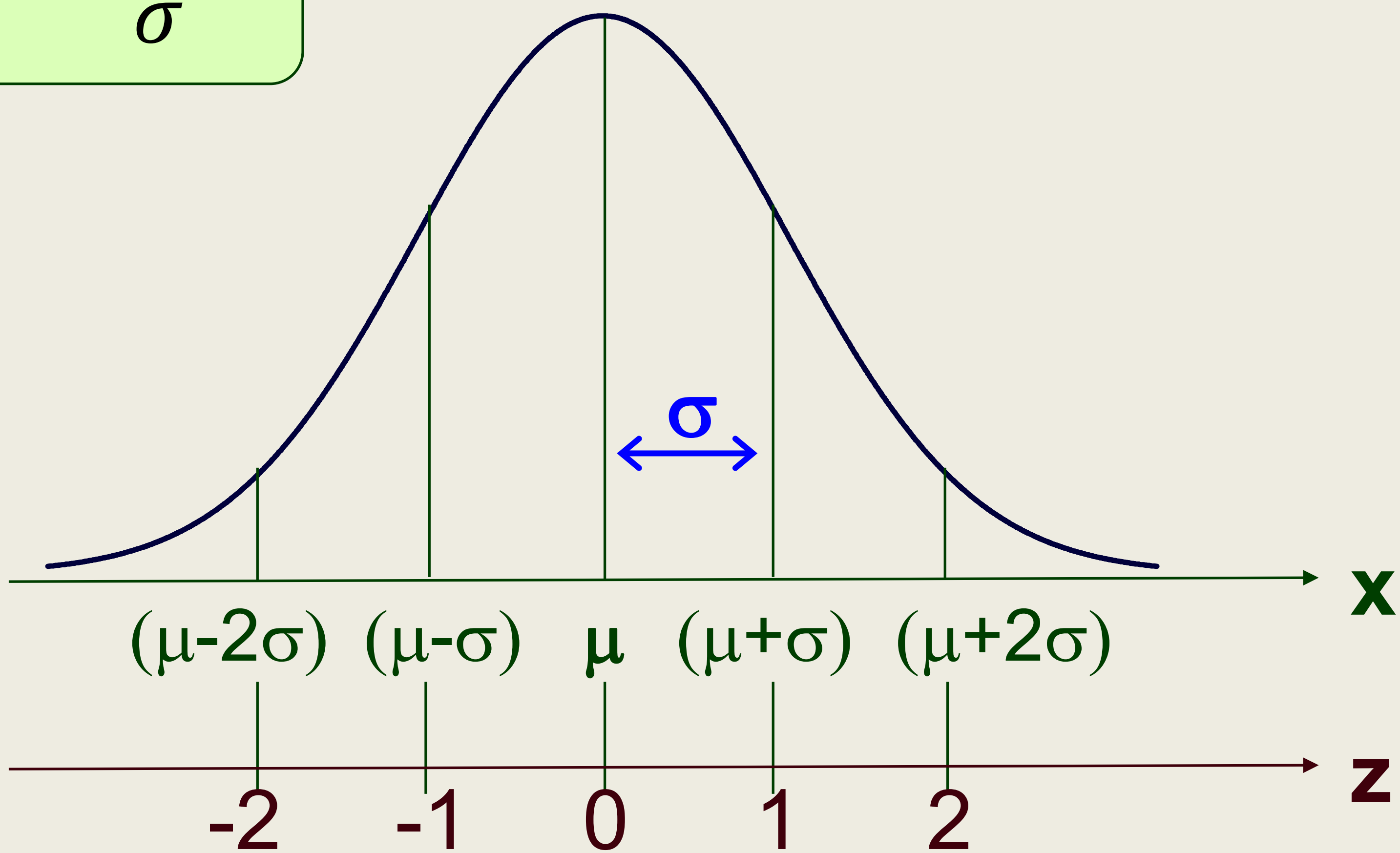


Mas cada experimento possui uma média diferente, como contornar este problema?

Normal Padronizada

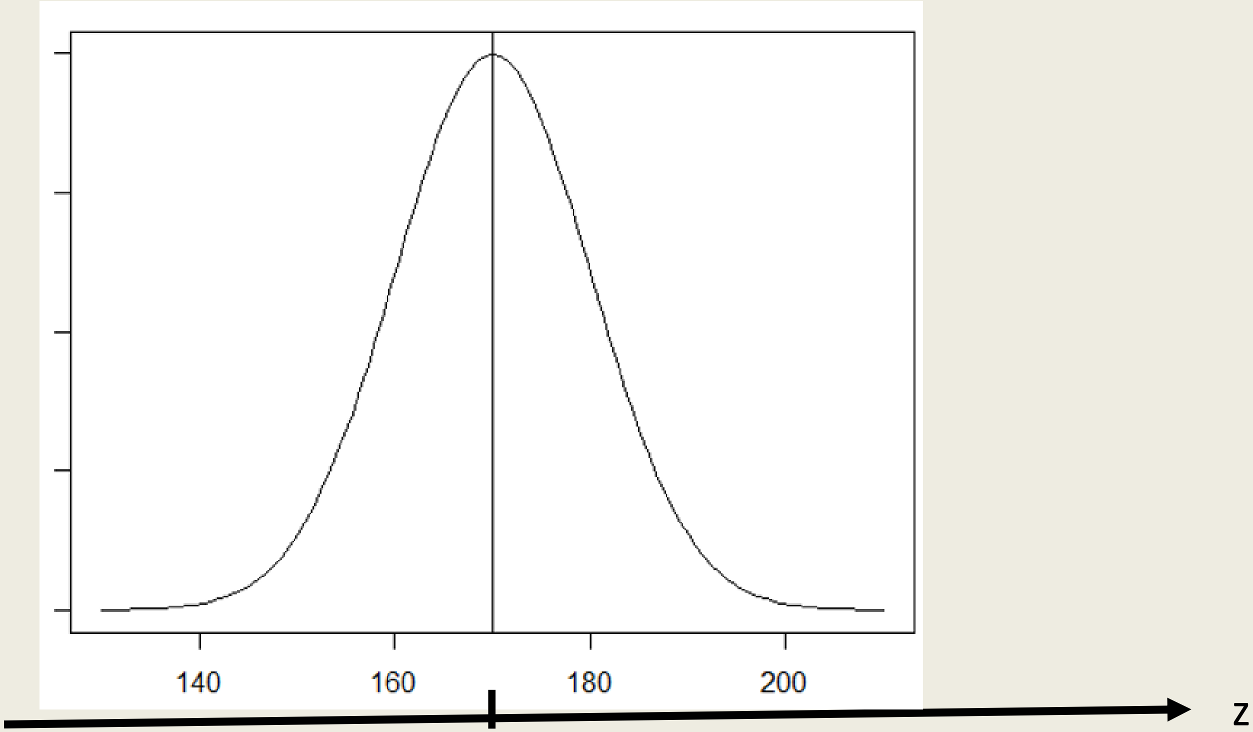
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

z - variável normal padronizada
x - variável normal
μ - média
σ - desvio padrão



Escore padronizado – Exemplo 1

Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admita que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm. Qual é o escore padronizado de um estudante com 190 cm?

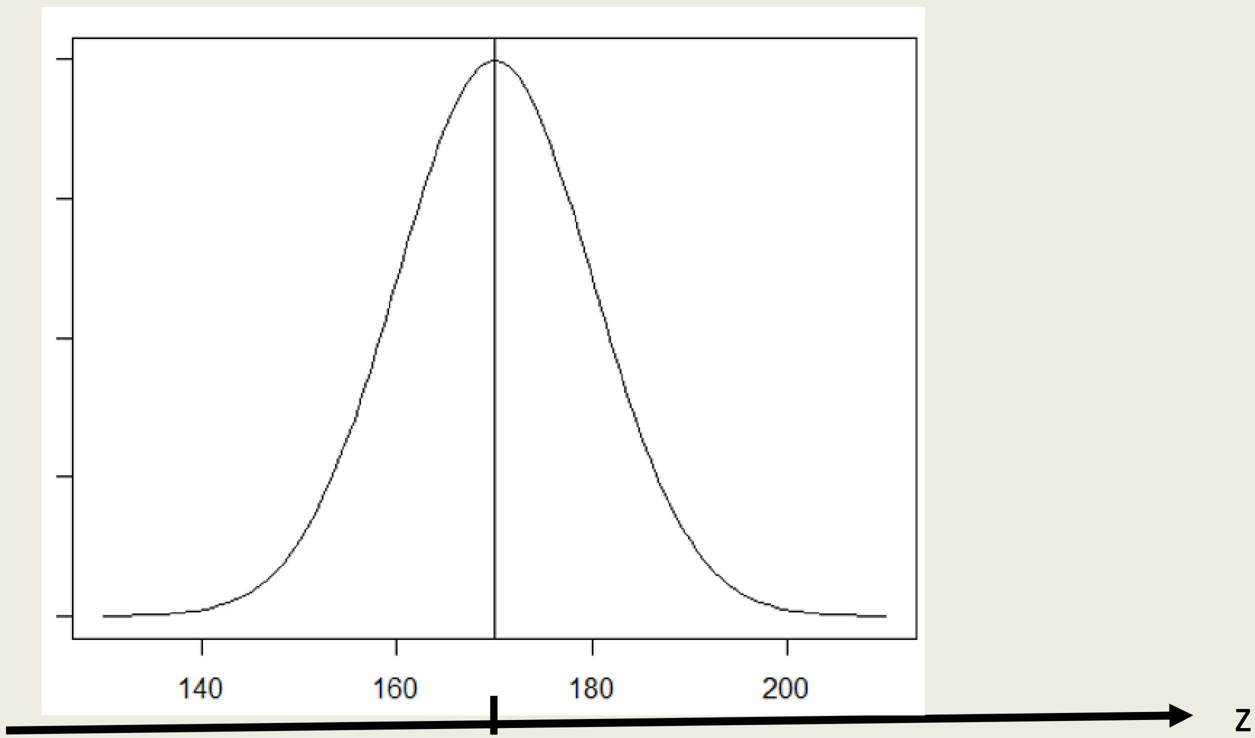


Escore padronizado – Exemplo 1

Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admita que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm. Qual é o escore padronizado de um estudante com 190 cm?

```
x = 190
mu = 170
dp = 10
z = (x - mu)/dp
z

plot(function(x) dnorm(x, 170, 10), 130,210)
abline(v=170)
```

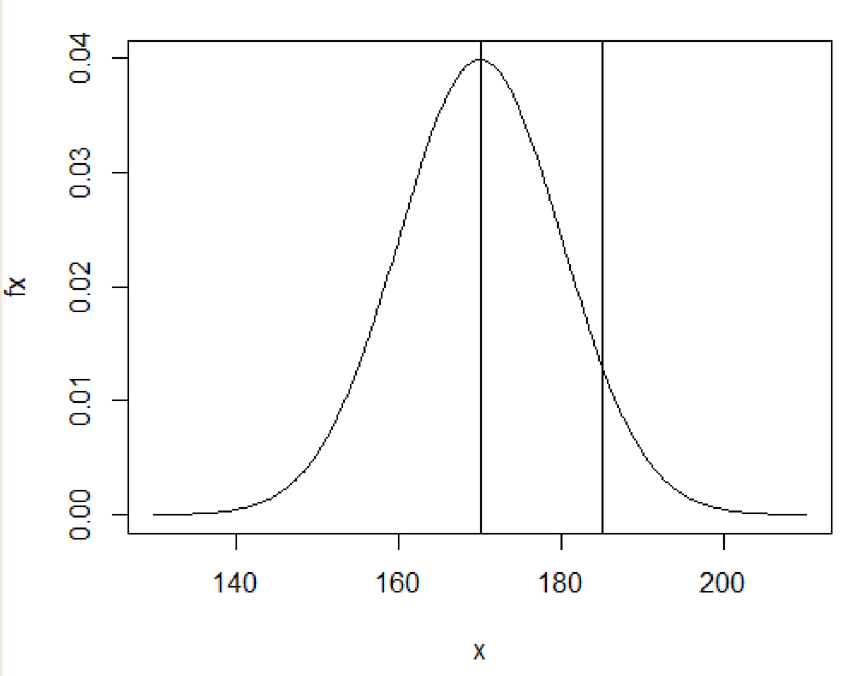


Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

a) altura superior a 185 cm?



Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

a) altura superior a 185 cm?

```
pnorm(185, 170, 10, lower = F)
```

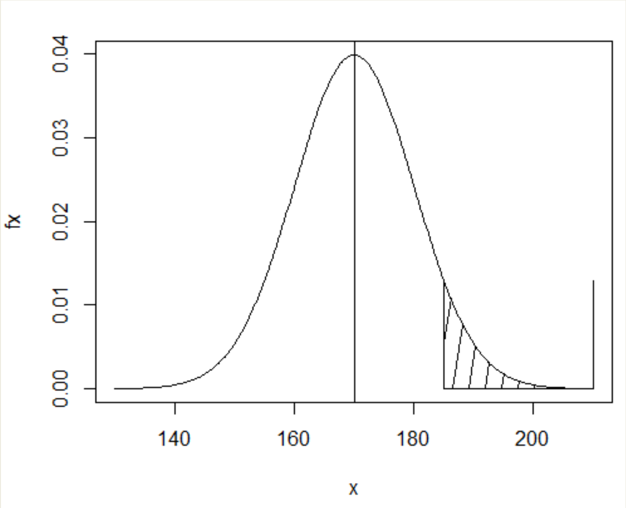
Cálculo por integrais

```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
li = 185

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, li, +Inf)
```

```
# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 185])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(li, li, x[x > li], mu+4*dp, mu+4*dp)
ay <- c(0, fn(li), fx[x > li], fn(li), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```

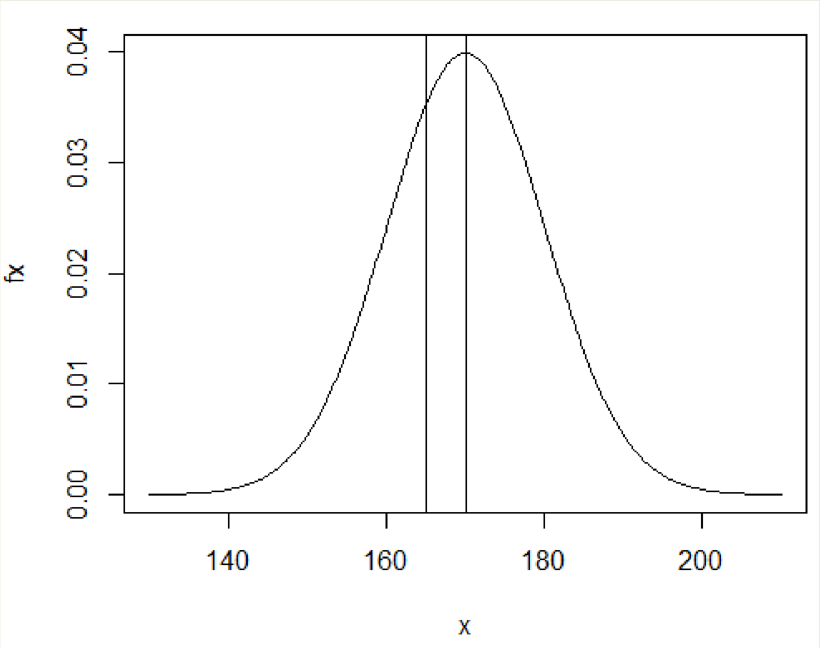


Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

b) altura inferior a 165 cm?



Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

b) altura inferior a 165 cm?

```
pnorm(165,170,10, lower=T)
```

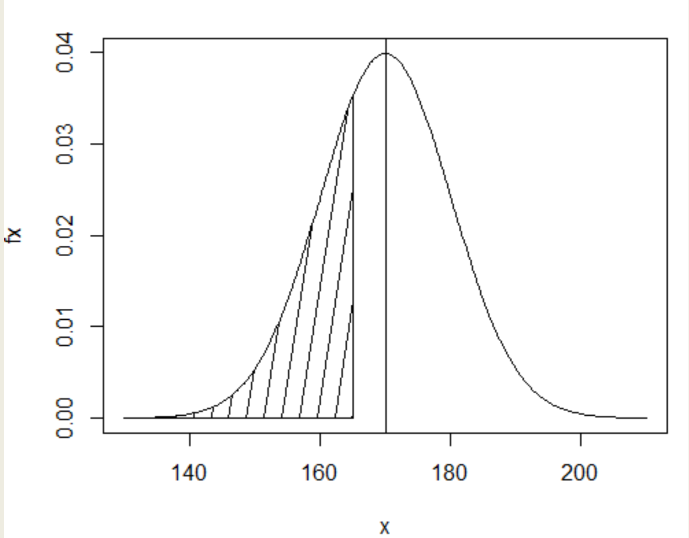
Cálculo por integrais

```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
ls = 165

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, -Inf, ls)
```

```
# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 185])

  x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
  fx <- fn(x)
  plot(x, fx, type = "l")
  ax <- c(mu-4*dp, mu-4*dp, x[x < ls], ls, ls)
  ay <- c(0, fn(mu-4*dp), fx[x < ls], fn(ls), 0)
  polygon(ax, ay, dens = 10)
  abline(v=mu)
```

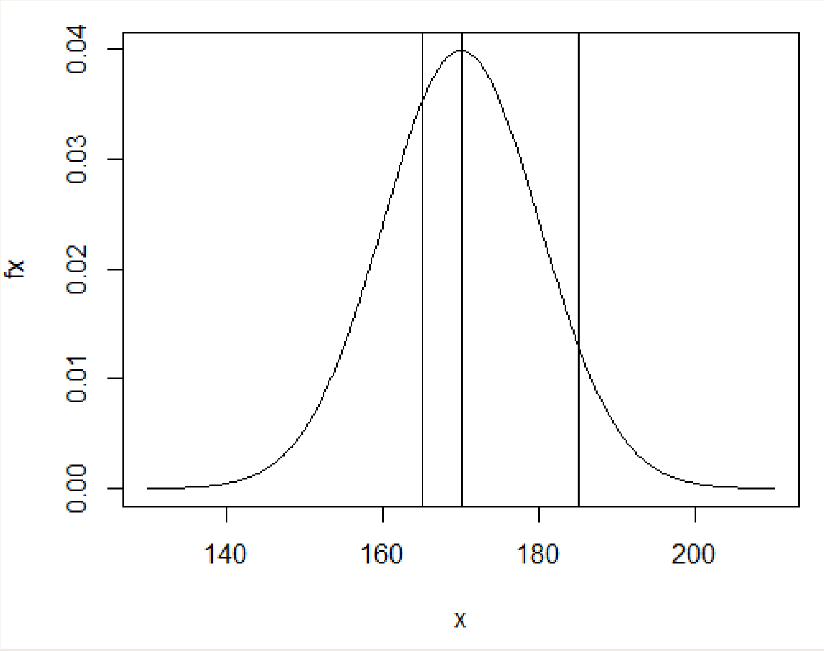


Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

c) altura entre 165 e 185 cm?



Exemplo 2

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

c) altura entre 165 e 185 cm?

```
pnorm(185, 170, 10)  - pnorm(165, 170, 10)
```

Cálculo por integrais

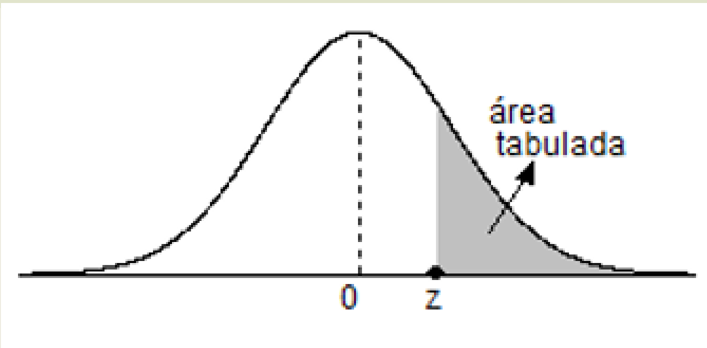
```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
li = 165
ls = 185

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, li, ls)
```

```
# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 185])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(li, li, x[x > li & x < ls], ls, ls)
ay <- c(0, fn(li), fx[x > li & x < ls], fn(ls), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```

Tabela – Distribuição normal padrão



z	segunda decimal de z									
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0 ,3050	0 ,3015	0 ,2981	0 ,2946	0 ,2912	0 ,2877	0 ,2842	0 ,2810	0 ,2776
0,6	0,2743	0 ,2709	0 ,2676	0 ,2643	0 ,2611	0 ,2578	0 ,2546	0 ,2514	0 ,2483	0 ,2451
0,7	0,2420	0 ,2389	0 ,2358	0 ,2327	0 ,2296	0 ,2266	0 ,2236	0 ,2206	0 ,2177	0 ,2148
0,8	0,2119	0 ,2090	0 ,2061	0 ,2033	0 ,2005	0 ,1977	0 ,1949	0 ,1922	0 ,1894	0 ,1867
0,9	0,1841	0 ,1814	0 ,1788	0 ,1762	0 ,1736	0 ,1711	0 ,1685	0 ,1660	0 ,1635	0 ,1611
1,0	0,1587	0 ,1562	0 ,1539	0 ,1515	0 ,1492	0 ,1469	0 ,1446	0 ,1423	0 ,1401	0 ,1379
1,1	0,1357	0 ,1335	0 ,1314	0 ,1292	0 ,1271	0 ,1251	0 ,1230	0 ,1210	0 ,1190	0 ,1170
1,2	0 ,1151	0 ,1131	0 ,1112	0 ,1093	0 ,1075	0 ,1056	0 ,1038	0 ,1020	0 ,1003	0 ,0985
1,3	0 ,0968	0 ,0951	0 ,0934	0 ,0918	0 ,0901	0 ,0885	0 ,0869	0 ,0853	0 ,0838	0 ,0823
1,4	0 ,0808	0 ,0793	0 ,0778	0 ,0764	0 ,0749	0 ,0735	0 ,0722	0 ,0708	0 ,0694	0 ,0681
1,5	0 ,0668	0 ,0655	0 ,0643	0 ,0630	0 ,0618	0 ,0606	0 ,0594	0 ,0582	0 ,0571	0 ,0559
1,6	0 ,0548	0 ,0537	0 ,0526	0 ,0516	0 ,0505	0 ,0495	0 ,0485	0 ,0475	0 ,0465	0 ,0455
1,7	0 ,0446	0 ,0436	0 ,0427	0 ,0418	0 ,0409	0 ,0401	0 ,0392	0 ,0384	0 ,0375	0 ,0367
1,8	0 ,0359	0 ,0352	0 ,0344	0 ,0336	0 ,0329	0 ,0322	0 ,0314	0 ,0307	0 ,0301	0 ,0294
1,9	0 ,0287	0 ,0281	0 ,0274	0 ,0268	0 ,0262	0 ,0256	0 ,0250	0 ,0244	0 ,0239	0 ,0233
2,0	0 ,0228	0 ,0222	0 ,0217	0 ,0212	0 ,0207	0 ,0202	0 ,0197	0 ,0192	0 ,0188	0 ,0183
2,1	0 ,0179	0 ,0174	0 ,0170	0 ,0166	0 ,0162	0 ,0158	0 ,0154	0 ,0150	0 ,0146	0 ,0143
2,2	0 ,0139	0 ,0136	0 ,0132	0 ,0129	0 ,0125	0 ,0122	0 ,0119	0 ,0116	0 ,0113	0 ,0110
2,3	0 ,0107	0 ,0104	0 ,0102	0 ,0099	0 ,0096	0 ,0094	0 ,0091	0 ,0089	0 ,0087	0 ,0084
2,4	0 ,0082	0 ,0080	0 ,0078	0 ,0075	0 ,0073	0 ,0071	0 ,0069	0 ,0068	0 ,0066	0 ,0064
2,5	0 ,0062	0 ,0060	0 ,0059	0 ,0057	0 ,0055	0 ,0054	0 ,0052	0 ,0051	0 ,0049	0 ,0048
2,6	0 ,0047	0 ,0045	0 ,0044	0 ,0043	0 ,0041	0 ,0040	0 ,0039	0 ,0038	0 ,0037	0 ,0036
2,7	0 ,0035	0 ,0034	0 ,0033	0 ,0032	0 ,0031	0 ,0030	0 ,0029	0 ,0028	0 ,0027	0 ,0026
2,8	0 ,0026	0 ,0025	0 ,0024	0 ,0023	0 ,0023	0 ,0022	0 ,0021	0 ,0021	0 ,0020	0 ,0019
2,9	0 ,0019	0 ,0018	0 ,0017	0 ,0017	0 ,0016	0 ,0016	0 ,0015	0 ,0015	0 ,0014	0 ,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000 233									
4,0	0,000 031 7									
4,5	0,000 003 40									
5,0	0,000 000 287									

Exemplo 2

R Console

Selecionar, aleatoriamente, um estudante de uma certa universidade. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm.

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

a) altura superior a 185 cm?
b) altura inferior a 165 cm?
c) altura entre 165 e 185 cm?

a) pnorm(185, 170, 10, lower = F)

b) pnorm(165, 170, 10, lower = T)   T é default

c) pnorm(185, 170, 10) - pnorm(165, 170, 10)

Cálculo por Integrais no R

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

a) altura superior a 185 cm?

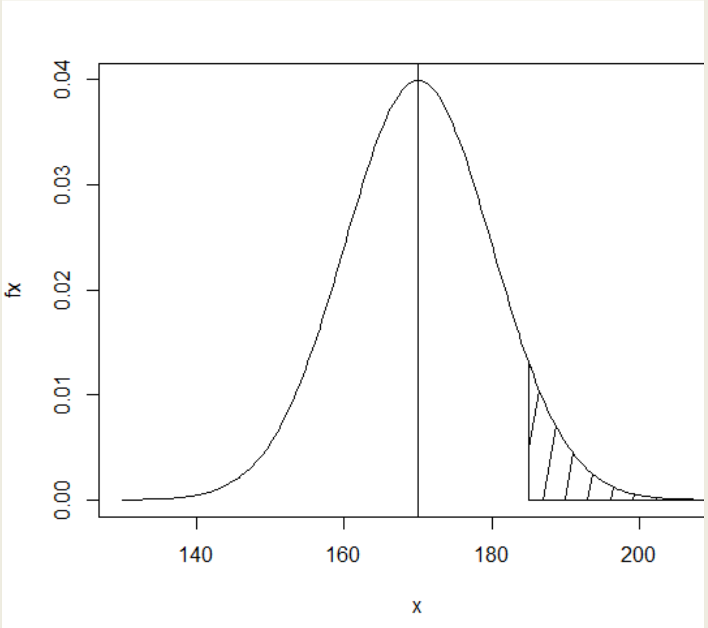
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
li = 185

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, li, +Inf)

# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 185])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(li, li, x[x > li], mu+4*dp, mu+4*dp)
ay <- c(0, fn(li), fx[x > li], fn(li), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```



Cálculo por Integrais no R

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

b) altura inferior a 165 cm?

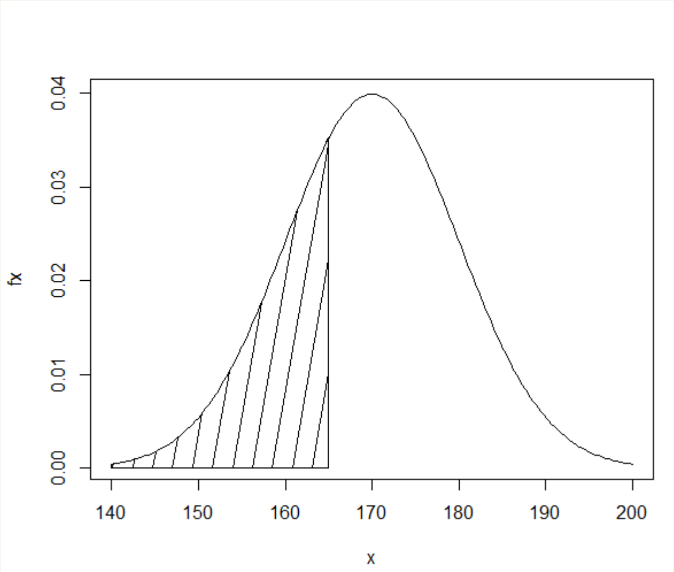
```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
ls = 165

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, -Inf, ls)

# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X < 165])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(mu-4*dp, mu-4*dp, x[x < ls], ls, ls)
ay <- c(0, fn(mu-4*dp), fx[x < ls], fn(ls), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Cálculo por Integrais no R

Qual é a probabilidade do estudante sorteado ter:

c) altura entre 165 e 185 cm?

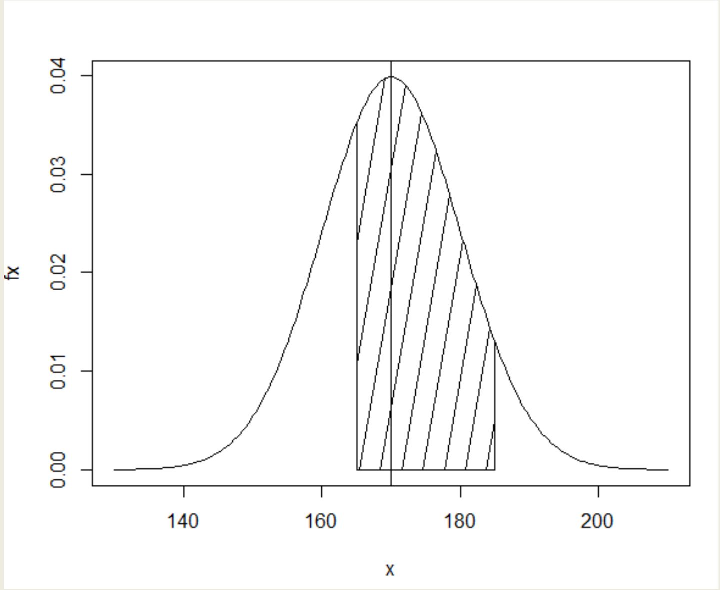
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

```
mu = 170
dp = 10
var = dp^2
li = 165
ls = 185

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, li, ls)

# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 165 e < 185])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(li, li, x[x > li & x < ls], ls, ls)
ay <- c(0, fn(li), fx[x > li & x < ls], fn(ls), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```

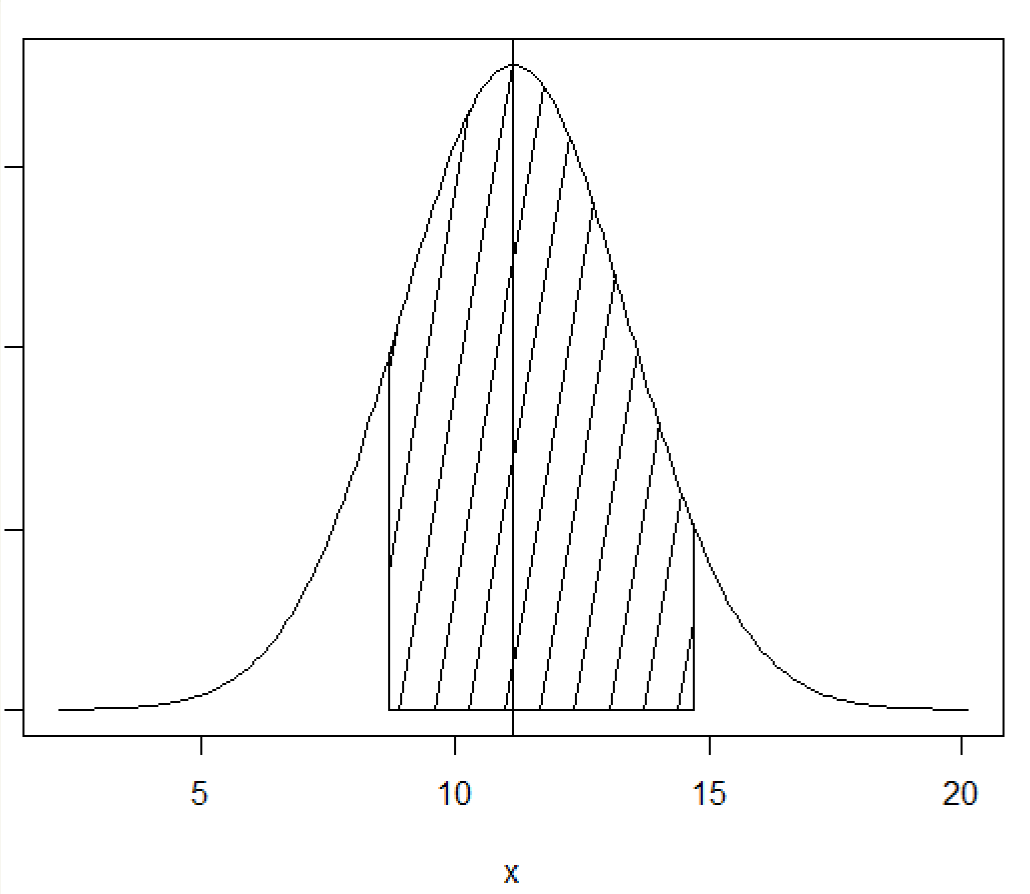


Exemplo 3

Suponha que a espessura média de arruelas produzidas em uma fábrica tenha distribuição normal com média $11{,}15\,mm$ e desvio padrão $2{,}238\,mm$. Qual a porcentagem de arruelas que tem espessura entre $8{,}70\,mm$ e $14{,}70\,mm$?

Exemplo 3

$\mu = 11{,}15\ mm$
$\sigma = 2{,}238\ mm$



$entre\ 8{,}70\ mm$ e $14{,}70\ mm$?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Exemplo 3

R Console

```
pnorm(14.70, 11.15, 2.238)  - pnorm(8.70, 11.15, 2.238)
```

```
# Cálculo por integrais

mu = 11.15
dp = 2.238
var = dp^2
li = 8.70
ls = 14.70

fn <- function(x) {
  fx <- (1/sqrt(2 * pi * var)) * exp((-1/(2*var)) * (x - mu)^2)
  return(fx)
}
integrate(fn, li, ls)

# Gerar um gráfico marcando uma área (a probabilidade P[X > 11.15 e < 14.70])

x <- seq(mu-4*dp, mu+4*dp, l = 250)
fx <- fn(x)
plot(x, fx, type = "l")
ax <- c(li, li, x[x > li & x < ls], ls, ls)
ay <- c(0, fn(li), fx[x > li & x < ls], fn(ls), 0)
polygon(ax, ay, dens = 10)
abline(v=mu)
```

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Como a probabilidade contribui para o processo de planejamento da demanda?

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

O planejamento da demanda é importante para as empresas que possuem modelo de negócios baseado na gestão de estoques, sendo que os produtos são comercializados com os clientes gerando lucro para o negócio.

Empresas de varejo incluem: supermercados, lojas de roupas e eletrodomésticos, livrarias, etc...

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Neste tipo de empreendimento a previsão da demanda tem como objetivo, principalmente,
responder perguntas do tipo:

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Quanto vamos vender no próximo período?

Quanto de cada produto vamos manter em estoque?

Que produtos devemos distribuir e para onde?

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Gestão da demanda

Para responder a estas perguntas o planejamento da demanda utiliza técnicas estatísticas que consistem na aplicação de diversos métodos matemáticos, baseados principalmente em dados históricos e no conhecimento da empresa para prever a demanda futura por estes produtos.

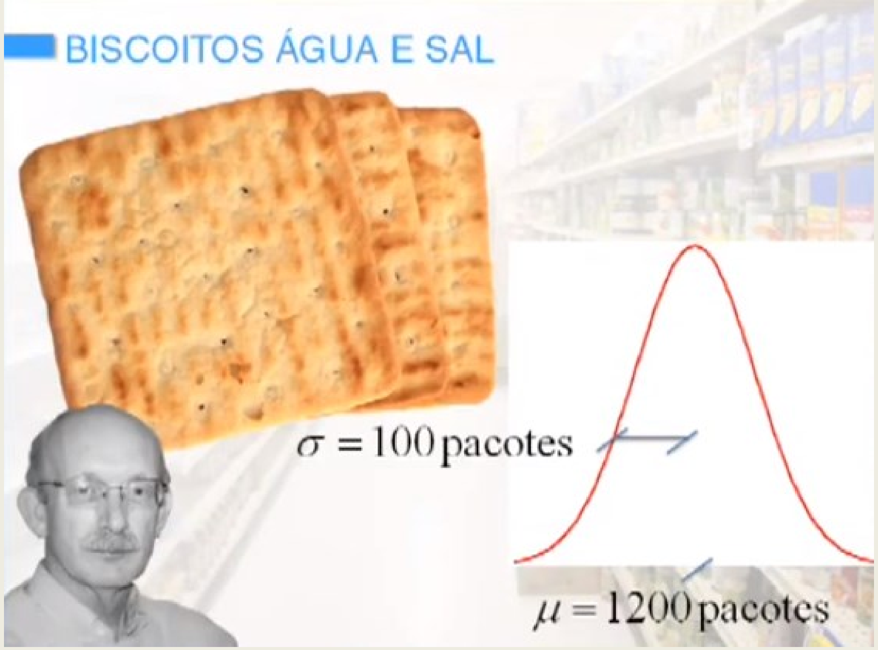
Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Gestão da demanda

Parte importante das atividade gerenciais de um gestor de supermercados é dimensionar este estoque a fim de minimizar os custos de armazenagem e ao mesmo tempo garantir que nenhum negócio seja perdido por falta de produto.

Exemplo 4 Estoque de um supermercado

O gerente após alguns estudos e observando séries históricas de vendas verificou que a demanda diária de pacotes de biscoito água e sal é uma v.a. normalmente distribuída com média igual a 1200 pacotes e desvio padrão = 100 pacotes.

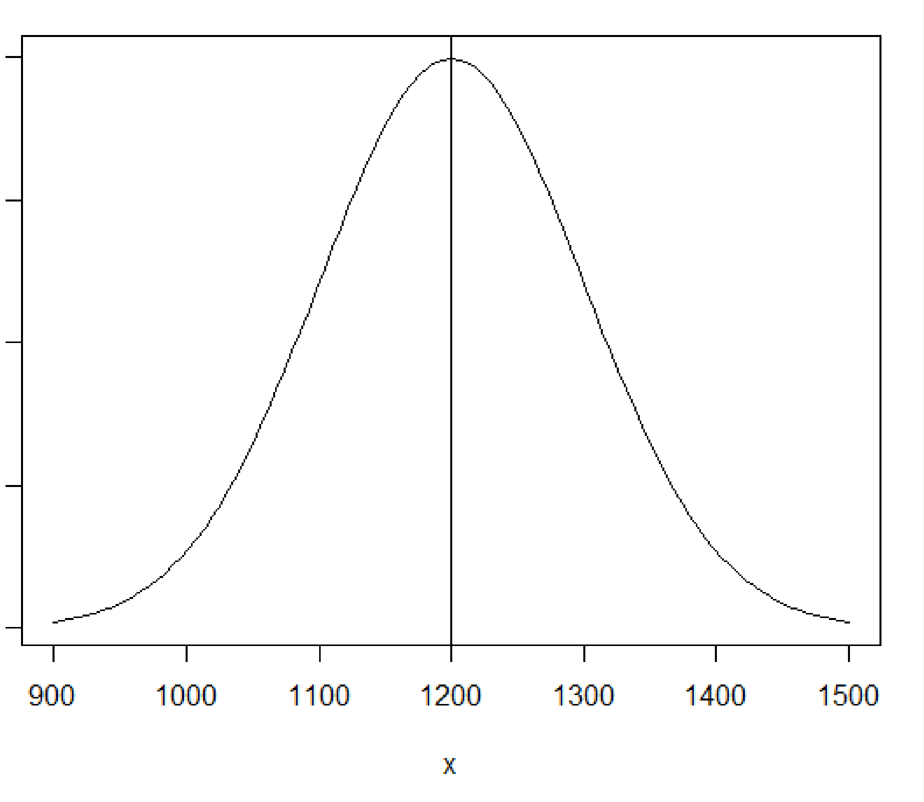


Exemplo 4 Estoque de um supermercado

Estratégia: Determinar o estoque necessário (por dia) para que, em apenas 2% dos casos, a demanda diária de biscoitos água é sal não seja atendida.

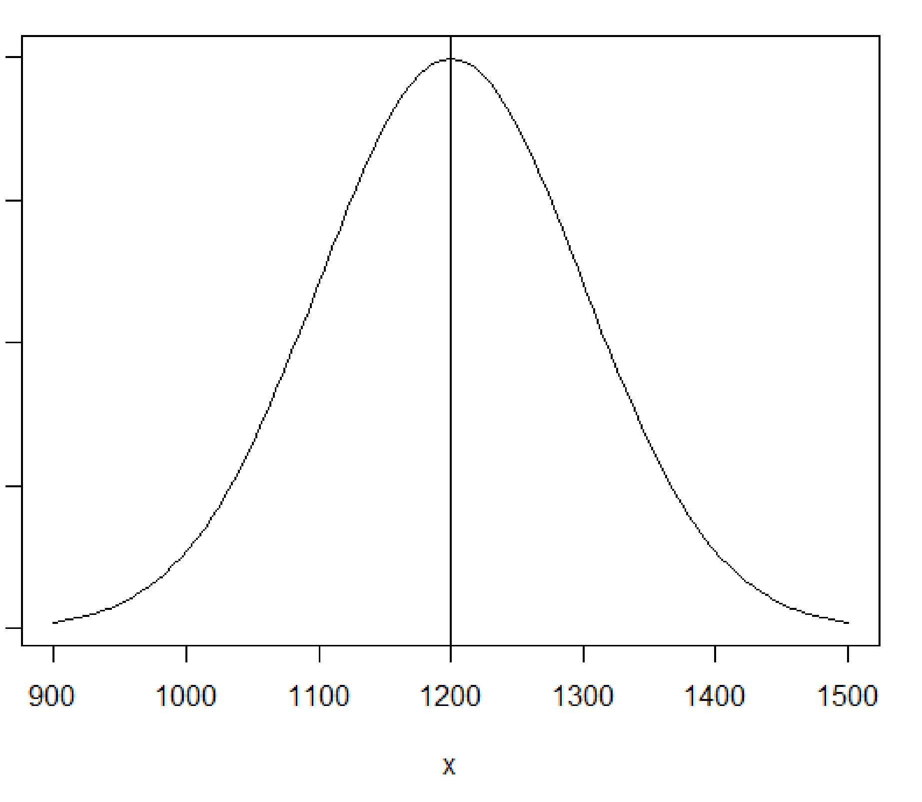
Exemplo 4 Estoque de um supermercado

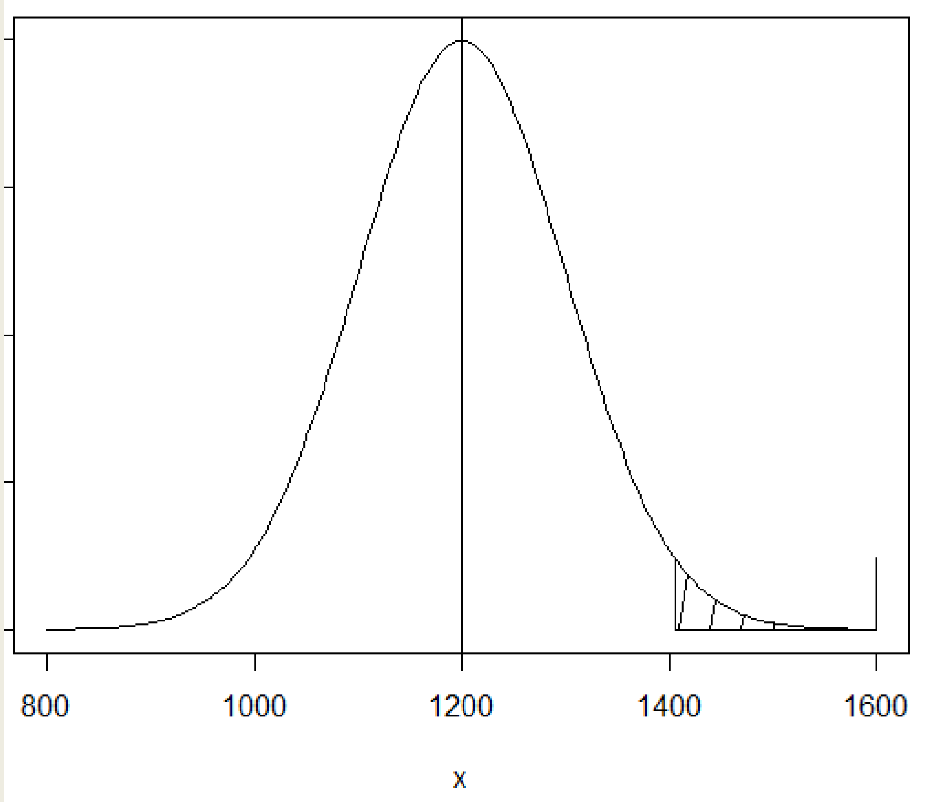
média igual a 1200 pacotes;
desvio padrão = 100 pacotes
Determinar o estoque necessário (por dia) para que, em apenas 2% dos casos, a demanda diária de biscoitos água é sal não seja atendida.



Exemplo 4 Estoque de um supermercado

média igual a 1200 pacotes;
desvio padrão = 100 pacotes
Determinar o estoque necessário (por dia) para que, em apenas 2% dos casos, a demanda diária de biscoitos água é sal não seja atendida.





EXERCÍCIOS

01. Seja Z uma variável aleatória com distribuição normal padrão, calcule:

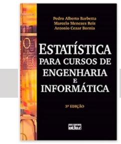
a) $P(Z > 1{,}65)$

b) $P(Z < 1{,}65)$

c) $P(-1 < Z < 1)$

d) o valor de z, tal que $P(-z < Z < z) = 0{,}95$

EXERCÍCIOS



p. 159

02. Suponha que o tempo de resposta na execução de um algoritmo é uma variável aleatória com distribuição normal de média 23 segundos e desvio padrão de 4 segundos. Calcule:

a) a probabilidade de o tempo de resposta ser menor que 25 segundos;

b) a probabilidade de o tempo de resposta ficar entre 20 e 30 segundos.

03. Uma fábrica de carros sabe que os motores de sua fabricação têm duração normal com média 150.000 km e desvio padrão de 5.000 km. Qual a probabilidade de que um carro, escolhido ao acaso, dos fabricados por essa fábrica, tenha um motor que dure:

(a) Menos de 140.000 km?

(b) Entre 140.000 km e 160.000 km?

(c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 5%?