7.2 无限级数

定义

1. (7.2.1 形式无限级数) 一个 **(形式) 无限级数**是形如

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

的表达式，其中m是整数并且对任意$n \geq m$，a_n是一个实数，有时也可以写成

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots$$

(这只是个形式的定义)

2. (7.2.2 级数的收敛) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个形式无穷级数，对任意的整数$N \geq m$，定义$N$部分和为 $S_N := \sum\limits_{n=m}^{N} a_n$，于是显然$S_N$是一个实数。

   如果当$N \to \infty$时，序列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$**收敛**于某个实数L，则称无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是**收敛**的，并且称它收敛于$L$，也记有$L = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$，称$L$是无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$的和。

   对应的，如果部分和序列是$(S_N)_{N=m}^{\infty}$**发散**的，则称无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是**发散**的，并且不对这个级数指定任何实数值。

   (注：极限的唯一性保证了无限级数和的唯一性，因此可以放心讨论收敛级数的和)

3. (7.2.8 绝对收敛) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数，则称其是**绝对收敛**的，当且仅当级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} |a_n|$是收敛的。

命题

1. (7.2.5 部分和的收敛性) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。有$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$收敛，当且仅当对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得：

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \varepsilon$$

   对全部$p, q \geq N$均成立。

2. (7.2.6 零判别法) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛的形式无限级数，那么一定有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。换言之，若有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$或发散，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是发散的。

3. (7.2.9 绝对收敛判别法）设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。若这个级数是绝对收敛的，那么它也是条件收敛的（注意这里定义中条件收敛并不与绝对收敛互斥，但是别的教材有时会定义两者互斥来方便分类），并且此时有三角不等式：

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

4. (7.2.12 交错级数判别法）设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个非负并且递减的实数序列。于是对任意$n \geq m$均有$a_n \geq 0$与$a_n \geq a_{n+1}$。则形式级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是收敛的，当且仅当$n \to \infty$时序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于0。

5. (7.2.14 级数定律）有下述命题为真：

> 1. （无限级数的加和？）如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$是一个收敛于y的实数级数，则$\sum_{n=m}^{\infty}(a_n + b_n)$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$x+y$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 2. （无限级数的数乘？）如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，c是一个实数，则$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$c \cdot x$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n = c\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$
>
> 3. （无限级数的拆分？）设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，k是一个自然数。若级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$中有一个是收敛的，那么另一个也是收敛的，并且有恒等式：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$$
>
> 4. （约束变量不影响无限和）设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，且设k是一个整数，则$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$也收敛于$x$。

6. (7.2.15 嵌套级数）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个收敛于0的实数序列，即$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1}$收敛于$a_0$。

课后习题

7.2.1 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是收敛的还是发散的？证明你的结论。你现在能否解决例1.2.2中的难题？

> @Homological-algebra的解法：
>
> 设若该级数收敛，设其极限为L，前 N 项部分和为 S_N ，根据命题6.6.5的结论有：
>
> $$\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = L$$
>
> 对于 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得
>
> $|S_{2N}-L| = |S_{2N}-S_{2N+1}| < \varepsilon$
>
> 但是$S_{2N}=0$，$S_{2N+1}=1$。（这可以通过数学归纳法得到）
>
> 从而导出矛盾，该级数不收敛。
>
> 至于例 1.2.2 中的前面一个问题，显然级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的 （可以用比值审敛法验证这个结果），因此它符合命题7.2.14，可以加和。同理级数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n$ 不收敛，无法使用加和，想必证明一个发散到无穷的无穷级数不能加和并不困难，一个很直观的观点是∞这个元素并不像常规实数那样遵守运算律。不存在极限的发散级数同理。
>
> ---
>
> 个人的解法：
>
> 使用反证法：
>
> 不妨假设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是条件收敛的，那么根据定义，部分和$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n$的序列应该是收敛的，于是根据命题6.1.12，序列$(S_N)_{N=1}^{\infty}$是柯西序列，于是对任意$\varepsilon>0$，总存在自然数N使得$d(S_{2N},S_{2N+1})\le\varepsilon$成立，但是根据定义，我们又有
>
> $$d(S_{2N},S_{2N+1}) = |(-1)^{2N+1}| = 1$$
>
> 而1显然不可能满足对所有正实数ε都有$1\le\varepsilon$。于是假设结论错误，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是发散的。
>
> 现在回到例1.2.2，我们不难得到，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，于是它可以像命题7.2.14那样的进行运算，相应的，级数$\sum_{n=0}^{\infty}2^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$是发散的，因此在前面讨论它们的所谓和与重排计算都是没有意义的，因为根据定义，没有任何一个实数与它们对应，讨论这样的加减法是荒谬而没有逻辑的。

7.2.2 证明命题7.2.5（提示：利用命题6.1.12和定理6.4.18）

7.2.3 利用命题7.2.5证明推论7.2.6

> 若级数$\sum_{n=m}^{\infty}a_n$收敛，由命题 7.2.5，可以得到：
>
> 对任意实数$\varepsilon>0$，都存在一个整数$N\ge m$使得$\left|\sum_{n=p}^{p}a_n\right| = |a_p-0| < \varepsilon$对于所有$p\ge N$成立

> 根据序列收敛的定义，于是可以得到此时即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，于是结论得证。

7.2.4 证明命题7.2.9（提示：利用命题7.2.5和命题7.1.4(e)）

> 既然$\sum_{n=m}^{\infty}|a_n|$收敛，则按照命题 7.2.5
>
> 对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得：
>
> $$\left|\sum_{n=p}^{q}|a_n|\right| \leq \varepsilon$$
>
> 对全部$p, q \geq N$均成立。
>
> 由命题7.1.4(e)，又有
>
> $$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n\right| \leq \left|\sum_{n=p}^{q}|a_n|\right| \leq \varepsilon$$
>
> 于是综合得到对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n\right| \leq \varepsilon$对任意$p, q \geq N$恒成立，根据命题7.2.5，可以判断有$\sum_{n=m}^{\infty}a_n$是条件收敛的。
>
> ---
>
> 证明三角不等式$\left|\sum_{n=m}^{\infty}a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty}|a_n|$：
>
> 首先有条件：级数$\sum_{n=m}^{\infty}a_n$绝对收敛。
>
> 构造部分和序列 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$，其中 $S_N = \sum_{n=m}^{N}|a_n|$，$S'_N = \left|\sum_{n=m}^{N}a_n\right|$。根据命题7.1.4(e)，我们有$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$恒成立。同时，由于级数$\sum_{n=m}^{\infty}a_n$绝对收敛，于是序列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$也是收敛的。
>
> 可以计算得到 $\sum_{n=m}^{\infty}|a_n|$、$\left|\sum_{n=m}^{\infty}a_n\right|$分别为 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$ 的极限，又因为收敛的序列只有唯一的极限点，因此 $(S_N)_{N=m}^{\infty}$、$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$ 的各自的上下极限即为它们各自的极限；因此根据比较原理，柯西列$(S_N)_{N=m}^{\infty}$的极限大于柯西列$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$。
>
> 因此$\sum_{n=m}^{\infty}|a_n| \geq \left|\sum_{n=m}^{\infty}a_n\right|$ 成立。

7.2.5 证明命题7.2.14（提示：利用定理6.1.19）

7.2.6 证明引理7.2.15（提示：首先算出部分和$\sum_{n=0}^{N}(a_n-a_{n+1})$应该是什么，并利用归纳法证明你的判断）如果我们假设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$不收敛于0而收敛于另外的某个实数L，那么该如何修改这个命题？

> 首先证明$S_N=\sum_{n=0}^{N}(a_n-a_{n+1})=a_0-a_{N+1}$:
>
> 对N做归纳:
>
> 当$N=0$时:
>
> 原式有$\sum_{n=0}^{0}(a_n-a_{n+1})=a_0-a_1=a_0-a_{N+1}$，于是得证。
>
> 设当$N=K$时等式成立，则当$N=K+1$时:
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{K+1}(a_n-a_{n+1})&=\sum_{n=0}^{K}(a_n-a_{n+1})+a_{K+1}-a_{K+2}\\&=a_m-a_{K+1}+a_{K+1}-a_{K+2}\\&=a_m-a_{(K+1)+1}\end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> 根据定义7.2.2和$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$可知有:
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n+1})&=\lim_{N\to\infty}S_N\\&=\lim_{N\to\infty}a_0-\lim_{N\to\infty}a_{N+1}\\&=a_0\ (\lim_{n\to\infty}a_n=0)\end{aligned}$$
>
> 同理 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 不收敛于 0 而收敛于另外的某个实数 L时
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_0-L$$

本节相关跳转

[实分析 1.2 为什么要做分析]

[实分析 6.1 收敛与极限定律]

[实分析 6.4 上极限、下极限和极限点]

[实分析 7.1 有限级数]