

## 5.3 实数的构造

### 定义

1. (5.3.1 实数) 实数被定义为形如 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的对象, 其中 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有理数的一个柯西序列。称两个实数 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 是相等的, 当且仅当序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列。记由全体实数构成的集合为 $\mathbb{R}$ 。
2. (5.3.2 形式极限) 称 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 为序列为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 形式极限。  
(小节临时辅助定义, 如同之前的形式减法与形式除法一样)
3. (5.3.4 实数的加法) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 是实数, 则定义它们的和 $x + y$ 为 $x + y := \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ 。
4. (5.3.9 实数的乘法) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是实数, 则定义它们的乘积 $xy$ 为 $xy := \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n)$ 。
5. (5.3.12 远离0的有理数序列) 称有理数序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是远离0的, 当且仅当存在一个有理数 $c > 0$ 使得 $|a_n| \geq c$ 对一切 $n \geq 1$ 均成立。
6. (5.3.16 实数的倒数) 设 $x$ 是一个不为零的实数, 设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个远离0的柯西序列并且使得 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$  (由引理5.3.14可证明这样的序列存在), 则定义 $x^{-1}$ 为 $x^{-1} := \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}$ 。  
(由引理5.3.17可证明 $x^{-1}$ 是一个实数)
7. (无编号 消去律) 如果 $x, y, z$ 是实数, 它们满足 $xz = yz$ 且 $z$ 不为零, 则可以得到 $x = y$ 。

### 命题

1. (5.3.3 形式极限是定义明确的) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n, y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 是与 $z = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} c_n$ 都是实数, 则由定义可知,  $x = x$ 。而且如果有 $x = y$ , 则 $y = x$ 。最后, 若有 $x = y$ 且 $y = z$ , 则 $x = z$ 。  
(自反, 对称, 可传递性)
2. (5.3.6 柯西序列的和是柯西序列) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 都是实数, 那么 $x + y$ 同样也是一个实数。  
(即 $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是有理数的一个柯西序列)
3. (5.3.7 等价的柯西序列之和是等价的) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n, x' = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a'_n$ 和 $y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 是实数, 设 $x = x'$ , 则有 $x + y = x' + y$ 。  
(按理说这个才是定义明确的吧)
4. (5.3.10 乘法的定义是明确的) 设 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n, x' = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a'_n$ 和 $y = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 是实数, 则 $xy$ 也是实数, 另外, 如有 $x = x'$ , 则有 $xy = x'y$ 。
5. (5.3.11 实数的代数定律) 第四章中的所有代数定律 (命题4.2.4) 不止对于整数与有理数成立, 对于实数也是成立的。内容见下:

- $x + y = y + x$ 。
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ 。
- $x + 0 = 0 + x$ 。
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$ 。

- $xy = yx$ .
- $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ .
- $x(y + z) = xy + xz$ .
- $(y + z)x = yx + zx$ .
- $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x (x \neq 0)$ .

6. (5.3.14 远离0的序列性质1) 设 $x$ 是一个不为零的实数, 那么存在某个远离0的柯西序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
7. (5.3.15 远离0的序列性质2) 设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个远离0的柯西序列, 那么序列 $(a_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ 也是一个的柯西序列.
8. (5.3.17 倒数运算是定义明确的) 现假设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是两个远离0的柯西序列, 且有 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 则 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n^{-1}$ .

## 课后习题

### 5.3.1 证明命题5.3.3 (提示: 你也许会发现命题4.3.7对本题是有用的)

自反性:

$x = x$ , 等价于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列。显然对任意的柯西序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , 对任意 $\varepsilon > 0$ 都有 $d(a_n, a_n) \leq \varepsilon$ 对全体 $n > 1$ 成立, 于是结论得证。

对称性:

如果有 $x = y$ , 则 $y = x$ , 这等价于若有 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价, 则 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价。若有 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价, 则对任意 $\varepsilon > 0$ , 都存在自然数 $N \geq 1$ 使得 $n \geq N$ 时有 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon \iff d(b_n, a_n) \leq \varepsilon$ 恒成立, 于是 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价, 结论得证。

传递性:

若有 $x = y$ 且 $y = z$ , 则 $x = z$ , 这等价于若有 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价, 则 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价。对任意 $\varepsilon > 0$ , 取 $\varepsilon' = \varepsilon/2$ , 于是由 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价, 可以得到分别存在正自然数 $N_1, N_2$ 使得 $n \geq N_1$ 时有 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon'$ 与 $n \geq N_2$ 时有 $d(b_n, c_n) \leq \varepsilon'$ 。此时取 $N = \max(N_1, N_2)$ , 于是根据命题4.3.7, 有对任意 $\varepsilon > 0$ , 存在正自然数 $N$ 使得 $a_n$ 是 $2\varepsilon' = \varepsilon$ -接近于 $c_n$ 的对任意 $n \geq N$ 成立, 于是 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价。

### 5.3.2 证明命题5.3.10 (提示: 命题4.3.7对本题同样有用)

$xy$ 也是实数:

即证明 $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是一个柯西序列, 由于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 都是柯西序列, 于是对任意有理数 $\varepsilon > 0$ , 取 $\varepsilon'$ 使得 $\varepsilon'^2 + (A + B)\varepsilon' \leq \varepsilon$ , 其中 $A, B$ 分别是 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个界。于是对有理数 $\varepsilon'$ , 我们总有存在自然数 $N_1, N_2$ 使得对任意 $i, j \geq N_1$ ,  $a_i$ 与 $a_j$ 都是 $\varepsilon'$ -接近的; 对任意 $i, j \geq N_2$ ,  $b_i$ 与 $b_j$ 是 $\varepsilon'$ -接近的。此时取 $N = \max(N_1, N_2)$ , 根据命题4.3.7的结论, 于是对任意 $i, j \geq N$ 可以得到 $a_i b_i$ 与 $a_j b_j$ 是 $\varepsilon'^2 + (|a_i| + |b_i|)\varepsilon'$ -接近的。又有 $\varepsilon'^2 + (|a_i| + |b_i|)\varepsilon' \leq \varepsilon'^2 + (A + B)\varepsilon' \leq \varepsilon$ , 于是 $a_i b_i$ 与 $a_j b_j$ 是 $\varepsilon$ -接近的。综上,  $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是一个柯西序列。

若 $x = x'$ , 则 $xy = x'y$ :

即证明 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的柯西序列时,  $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a'_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是等价的柯西序列。于是对任意 $\varepsilon > 0$ , 取 $\varepsilon' = \varepsilon/B$ , 其中 $B$ 是 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个界。由于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的, 于是对 $\varepsilon'$ , 总存在自然数 $N \geq 1$ 使得 $n \geq N$ 时总有 $a_n$ 与 $a'_n$ 是 $\varepsilon'$ -接近的, 于是根据命题4.3.7结论,  $a_nb_n$ 与 $a'_nb_n$ 是 $|b_n|\varepsilon'$ -接近的, 又 $B$ 是 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 的一个界, 于是对任意 $n \geq N$ ,  $B \geq |b_n|$ , 进而有 $a_nb_n$ 与 $a'_nb_n$ 也是 $B\varepsilon'$ -接近的。于是可以得到 $a_nb_n$ 与 $a'_nb_n$ 是 $\varepsilon$ -接近的, 进而可以得到 $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(a'_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是等价的柯西序列, 于是原结论得证。

**5.3.3 设 $a, b$ 是有理数, 证明:  $a = b$ , 当且仅当 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b$  (即柯西序列 $a, a, \dots$ 与 $b, b, \dots$ 是等价的, 当且仅当 $a = b$ ), 这样我们能够明确的把有理数嵌入到实数中**

充分性:

$a = b$ 时, 于是对任意 $\varepsilon > 0$ , 对任意 $n \geq 1$ , 都有 $d(a, b) \leq \varepsilon$  (可能有点怪, 不过事实上就是序列 $(a)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b)_{n=1}^{\infty}$ 的第 $n$ 项), 于是可以得到序列 $(a)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b)_{n=1}^{\infty}$ 等价。

必要性:

对序列 $(a)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b)_{n=1}^{\infty}$ , 我们知道对其中任意 $n \geq 0$ ,  $d(a, b) = |a - b|$ , 又有 $(a)_{n=1}^{\infty}$ 与 $(b)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的, 于是对任意 $\varepsilon > 0$ , 都应当存在自然数 $N \geq 1$ , 使得 $n \geq N$ 时 $d(a, b) \leq \varepsilon$ , 这等价于对任意 $\varepsilon > 0$ ,  $d(a, b) \leq \varepsilon$ 。又根据 $d(a, b) \geq 0$ , 于是 $d(a, b) = 0$ , 即 $a = b$ 。

综上, 结论得证。

**5.3.4 设 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个有界的有理数序列, 设 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的另一个有理数序列, 证明:  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有界的**

$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 等价于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , 于是存在自然数 $N \geq 1$ 使得对任意 $n \geq N$ 有 $d(a_n, b_n) \leq 1$ 。又 $a_n$ 有界, 于是存在正有理数 $A$ 使得 $|a_n| \leq A$ 恒成立, 于是 $|b_n| \leq |a_n| + d(a_n, b_n) \leq A + 1$ 对任意 $n > N$ 都成立。根据命题5.1.14, 有限序列必然有界, 即 $(b_n)_{n=1}^{N-1}$ 必然存在一个界 $B$ 使得对任意 $1 \leq n \leq N - 1$ 都有 $|b_n| \leq B$ 。于是取 $S = \max(A + 1, B)$ , 此时有 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|b_n| \leq S$ , 即 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 也是有界的。

**5.3.5 证明:  $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$**

即证 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ 与 $(0)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的。对任意有理数 $\varepsilon > 0$ , 根据命题4.4.1的结论, 此时取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , 于是此时对任意 $n \geq N$ , 都有 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \left| \frac{1}{N} - 0 \right| \leq \varepsilon$ 。于是有 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ 与 $(0)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的。

## 本节相关跳转

[实分析 4.2 有理数](#)

[实分析 4.3 绝对值与指数运算](#)