

3.5 笛卡尔积

定义

1. (3.5.1 有序对) 若 x, y 为任意两个对象, 则把有序对 (x, y) 定义为一个把 x 作为第一个分量, y 作为第二个分量的新对象。两个有序对 (x, y) 与 (x', y') 被认为是相等的, 当且仅当其两个分量都相等, 即:

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ 且 } y = y'$$

2. (3.5.4 笛卡尔积) 如果 X 与 Y 是集合, 则定义笛卡尔积 $X \times Y$ 为第一个分量在 X 中且第二个分量在 Y 中的全体有序对的集合, 因此有:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

其等价表述为:

$$a \in (X \times Y) \iff \text{存在 } x \in X \text{ 和 } y \in Y \text{ 使得有 } a = (x, y)$$

(注: 严格地说, $X \times Y$ 与 $Y \times X$ 是不同的两个集合, 尽管它们有很多相似之处, 比如它们总是有共同的元素个数)

3. (3.5.7 有序 n 元组与 n 重笛卡尔积) 设 n 为某一自然数, 有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ (有时也记作 (x_1, x_2, \dots, x_n)) 是由对象 x_1, x_2, \dots, x_n 按一定次序构成的一个组, 称 x_i 为有序 n 元组的第 i 个分量, 称两个有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 与 $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 是相等的, 当且仅当对所有的 $1 \leq i \leq n$, 均有 $x_i = y_i$ 。若 $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ 是集合的有序 n 元组, 则定义它们的 n 重笛卡尔积 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ (也可记为 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$) 为:

$$\prod_{1 \leq i \leq n} X_i := \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} : \text{对任意的 } 1 \leq i \leq n, \text{ 有 } x_i \in X_i\}$$

(注1: 另外的, 有序 n 元组的对象组 x_1, x_2, \dots, x_n 被称为 n 个元素的有序序列, 简称有限序列, 在第五章时还会介绍无限序列的概念)

(注2: 如果 x 是一个元素, 那么 (x) 是一元组且认为它等同于 x 本身 (虽然严格来说, (x) 与 x 并不相同)。由此, $\prod_{1 \leq i \leq 1} X_i$ 就是 X_1 , 且存在空笛卡尔积 $\prod_{1 \leq i \leq 0} X_i$ 给出的单元素集 $\{()\}$ (不是空集), 其唯一元素 $()$ 称为 0 元组。)

命题

1. (3.5.12 有限选取) 设 $n \geq 1$ 是一个自然数, 且对任意自然数 $1 \leq i \leq n$, 令 X_i 均为非空集合, 则存在一个有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 使得对所有 $1 \leq i \leq n$ 均有 $x_i \in X_i$ 。换言之, 若每个 X_i 都是非空的, 则 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ 也是非空的。

(直观上看, 这个引理可以推广到无限选取的情形, 事实上, 这需要另一个公理来保证, 即第8章8.4节的**选择公理**)

课后习题

3.5.1 假设对任意的对象 x, y , 给出对有序对 (x, y) 的一个定义: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (于是多次使用单元素集与双元素集公理)。在此定义下有 $(1, 2)$ 就是集合 $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $(2, 1)$ 就是集合 $\{\{2\}, \{1, 2\}\}$, $(1, 1)$ 就是集合 $\{\{1\}\}$, 证明: 这个定义确实符合有序对定义中相等的定义, 并且只要 X, Y 是一个集合, 笛卡尔积 $X \times Y$ 就是一个集合, 于是这个定义可以有效的作为有序对的定义, 另一个挑战是证明替代定义 $(x, y) := \{x, \{x, y\}\}$ 同样具有上述性质, 从而该定义也可以有效的作为有序对的定义。 (对于这个挑战, 需要用到正则公理与习题3.2.2的内容)

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}:$$

1. 证明符合相等定义。

对于任意有序对 (a, a) :

根据定义有 $(a, a) := \{\{a\}\}$, 于是若有

$$(a', a') = (a, a) \iff \{\{a'\}\} = \{\{a\}\} \iff a' = a, \text{ 符合有序对相等的定义。}$$

对任意有序对 $(a, b) (a \neq b)$:

根据定义有 $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$, 于是

$(a', b') = (a, b) \iff \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ 。由单元素集与双元素集公理, 不可能存在单元素集等于双元素集的情况, 于是仅可能有 $\{a'\} = \{a\}$ 与 $\{a', b'\} = \{a, b\}$ 同时成立才能得出有序对相等的结论。前者当且仅当 $a' = a$ 时成立, 对于后者, 成立有两种情况 " $a' = a$ 且 $b' = b$ " 与 " $a' = b$ 且 $b' = a$ " 两种可能。前者同 $a' = a$ 这一前置条件不矛盾, 后者会得到 $b = a' = a$ 于是同前置假设 $a \neq b$ 矛盾。进而只可能有 $a' = a$ 且 $b' = b$ 同时成立时成立有序对相等。

2. 证明笛卡尔积。

考虑选取任意的 $x_0 \in X$, 然后对于任意的 $y \in Y$, 以 Y 为指标集, 根据 y 指定这样一个集合 $\{\{x_0\}, \{x_0, y\}\}$ (严格来说应该是 $\{(x_0, y)\}$, 要考虑 $x_0 = y$ 的可能性), 于是我们得到了一个集族。使用并集公理, 于是可以得到一个集合 A_{x_0} :

$$A_{x_0} = \bigcup_{y \in Y} \{\{x_0\}, \{x_0, y\}\}$$

这样, 对于任意 $x \in X$, 都可以依据上述方式指定一个集合 A_x , 由此以 X 为指标集, 全体 A_x 为集族, 使用并集公理, 于是可以得到集合 B :

$$B = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

对任意的 $x \in X$ 与 $y \in Y$, 都会有 $(x, y) \in B$ 成立。于是 B 就是 X 与 Y 的笛卡尔积 $X \times Y$ 。

$$(x, y) := \{x, \{x, y\}\}:$$

1. 证明符合相等定义。

对于任意有序对 (a, a) :

根据定义有 $(a, a) := \{a, \{a\}\}$, 于是若有

$(a', a') = (a, a) \iff \{a', \{a'\}\} = \{a, \{a\}\}$, 存在两种情况 " $a' = a$ " 与 " $a = \{a'\}$ 且 $a' = \{a\}$ "。前者显然不存在问题, 对于后者, 考虑正则公理, 根据习题3.2.2的结论, 这种情况是恒不成立的。于是 $(a', a') = (a, a) \iff a' = a$, 符合有序对相等的定义。

对任意有序对 $(a, b) (a \neq b)$:

根据定义有 $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$, 于是
 $(a', b') = (a, b) \iff \{a', \{a', b'\}\} = \{a, \{a, b\}\}$. 于是存在两种可能“ $a' = a$ 且
 $\{a', b'\} = \{a, b\}$ ”与“ $a' = \{a, b\}$ 且 $a = \{a', b'\}$ ”. 前者不存在问题, 可以参考上面的
 证明直接得出该命题等价于 $a = a'$ 且 $b = b'$ (注意 $a \neq b$), 对于后者, 同样根据习题
 3.2.2的结论, 这种情况是不可以成立的 ($a \in a'$ 与 $a' \in a$ 同时成立). 于是得到
 $(a', b') = (a, b) \iff a = a'$ 且 $b = b'$.

2. 证明笛卡尔积存在

和上面一样, 复制黏贴一下:

考虑选取任意的 $x_0 \in X$, 然后对于任意的 $y \in Y$, 以 Y 为指标集, 根据 y 指定这样一个
 集合 $\{(x_0, y)\}$, 于是我们得到了一个集族。使用并集公理, 于是可以得到一个集合 A_{x_0}
 :

$$A_{x_0} = \bigcup_{y \in Y} \{(x_0, y)\}$$

这样, 对于任意 $x \in X$, 都可以依据上述方式指定一个集合 A_x , 由此以 X 为指标集, 全
 体 A_x 为集族, 使用并集公理, 于是可以得到集合 B :

$$B = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} \{(x, y)\}$$

对任意的 $x \in X$ 与 $y \in Y$, 都会有 $(x, y) \in B$ 成立。于是 B 就是 X 与 Y 的笛卡尔积
 $X \times Y$ 。

**3.5.2 假设我们定义有序 n 元组为一个满射函数 $x: \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \rightarrow X$, 其值域为某个任意的
 集合 X (于是不同的有序 n 元组)。于是我们使用 x_i 表示 $x(i)$, 并且把 x 记作 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 。利用这个定义
 证明: $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, 当且仅当对任意 $1 \leq i \leq n$ 均有 $x_i = y_i$ 。同时证明, 如果
 $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ 是集合的有序 n 元组, 那么按照定义 3.5.7 定义的笛卡尔积的确是一个集合 (提示: 利用习题
 3.4.7 与分类公理)**

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, 当且仅当对任意 $1 \leq i \leq n$ 均有 $x_i = y_i$:

根据该定义, 即证明函数 $x = y$, 当且仅当对任意 $1 \leq i \leq n$ 均有 $x(i) = y(i)$ 。

充分性:

根据函数相等的充分必要条件, 首先两者显然有相同的定义域 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$, 另外对于任
 意 $x_0 \in X$, 由于 x 是满射, 于是存在某个 $i \in \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 使得 $x(i) = x_0$, 进而根据
 题目条件有 $y(i) = x_0$, 即 $x_0 \in Y$, 反之可以证明对任意 $y_0 \in Y$, $y_0 \in X$ 。于是根据集合相等
 定义, $X = Y$, 即 x 与 y 值域一致。映射关系可以直接由题目条件给出。于是综上有 $x = y$, 即
 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 。

必要性:

根据函数间相等的充要条件, 可以直接得到对任意 $1 \leq i \leq n$ 均有 $x(i) = y(i)$ 。

于是得证。

笛卡尔积存在:

使用并集公理, 我们可以得到集合 $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ 其内部包含了所有 X_i 的元素。使用习题 3.4.7 中的
 结论, 于是得到集合 $X^{\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}}$ 。对该集合使用分类公理, 得到下述集合:

$$Y = \{f : f \text{ 定义域为 } \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \text{ 且 } \forall 1 \leq i \leq n\}$$

该集合 Y 即为所求的 n 重笛卡尔积。

3.5.3 证明：有序对和有序 n 元组的相等定义遵守自反性、对称性和传递性公理

自反性：对任意有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$:

显然对任意 $1 \leq i \leq n$, $x_i = x_i$ 。于是得证。

对称性：对任意有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 与 $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$, 若有 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, 则有 $(y_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, 于是对任意 $1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i \iff y_i = x_i$, 进而得到 $(y_i)_{1 \leq i \leq n} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 。

传递性：对任意有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 与 $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$, 若有 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 且 $(y_i)_{1 \leq i \leq n} = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$, 则有 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ 且 $(y_i)_{1 \leq i \leq n} = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$, 于是对任意 $1 \leq i \leq n$, $x_i = y_i$ 且 $y_i = z_i \iff x_i = z_i$, 进而得到 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$ 。

3.5.4 设 A, B, C 都是集合, 证明等式: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ (当然我们也可以证明类似的等式, 即把上述笛卡儿积的左右因子互换后所得到的等式。)

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$:

对任意元素 $x \in A \times (B \cup C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与 $b \in B \cup C \iff b \in B$ 或 $b \in C$ 成立。若 $b \in B$, 则根据定义有 $x \in A \times B$, 若 $b \in C$, 则根据定义有 $x \in A \times C$, 于是综合有 $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$ 成立。

对任意元素 $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与" $b \in B$ 或 $b \in C$ "
 $\iff b \in B \cup C$, 于是根据定义有 $x \in A \times (B \cup C)$ 。

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$:

对任意元素 $x \in A \times (B \cap C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与 $b \in B \cap C \iff b \in B$ 且 $b \in C$ 成立。 $b \in B$, 则根据定义有 $x \in A \times B$, $b \in C$, 则根据定义有 $x \in A \times C$, 于是综合有 $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ 成立。

对任意元素 $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与" $b \in B$ 且 $b \in C$ "
 $\iff b \in B \cap C$, 于是根据定义有 $x \in A \times (B \cap C)$ 。

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$:

对任意元素 $x \in A \times (B \setminus C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与 $b \in B \setminus C \iff b \in B$ 且 $b \notin C$ 成立。 $b \in B$, 则根据定义有 $x \in A \times B$, $b \notin C$, 则根据定义有 $x \notin A \times C$, 于是综合有 $x \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ 成立。

对任意元素 $x \in (A \times B) \setminus (A \times C)$, 应当有 $x = (a, b)$, 且同时有 $a \in A$ 与" $b \in B$ 且 $b \notin C$ "
 $\iff b \in B \setminus C$, 于是根据定义有 $x \in A \times (B \setminus C)$ 。

3.5.5 设 A, B, C, D 是集合, 证明: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。等式 $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ 是否成立? 等式 $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$ 是否成立?

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$:

对任意 $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$, 应当有 $x \in A \times B$ 且 $x \in C \times D$ 。若令有 $x = (a, b)$, 则应当有 $a \in A$ 且 $a \in C$ 且 $b \in B$ 且 $b \in D$, 也即 $a \in A \cap C$ 且 $b \in B \cap D$, 即 $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。

对任意 $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$, 令 $x = (a, b)$, 于是有 $a \in A \cap C$ 且 $b \in B \cap D$ 成立, 于是 $a \in A$ 且 $a \in C$ 且 $b \in B$ 且 $b \in D$ 。进而 $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$ 。

对于后两者, 我们可以尝试构造反例来证明他们是不成立的:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D):$$

尝试构想一个元素 x , 它满足条件 $x = (a, b) \in (A \setminus C) \times (D \setminus B)$, 于是有 $a \in A \cup C$ 且 $b \in B \cup D$, 进而 $x \in (A \cup C) \times (B \cup D)$; 但是显然它并不属于 $A \times B$ 与 $C \times D$ 中的任何一个。于是两者并不总是相等的。

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D):$$

尝试构想一个元素 x , 它满足条件 $x = (a, b) \in (A \setminus C) \times (B \cap D)$, 对 x , 自然有 $x \in A \times B$ 且 $x \notin C \times D$, 于是 $x \in (A \times B) \setminus (C \times D)$, 另一方面由于 $b \notin B \setminus D$, 于是 $x \notin (A \setminus C) \times (B \setminus D)$, 于是可以得到两者并不总是相等。

3.5.6 设 A, B, C, D 都是非空集合, 证明: “ $A \times B \subseteq C \times D$, 当且仅当 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ ”与“ $A \times B = C \times D$, 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$ ”。如果去掉 A, B, C, D 都是非空集合这个假设前提, 会发生什么?

$$A \times B \subseteq C \times D, \text{ 当且仅当 } A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D:$$

必要性:

对任意 $a \in A$ 与 $b \in B$, 令 $x = (a, b)$, 则有 $x \in A \times B$ 成立, 若 $A \times B \subseteq C \times D$, 则 $(a, b) \in C \times D$, 即 $a \in C$ 且 $b \in D$ 。于是即对任意 $a \in A$, 有 $a \in C$, 对任意 $b \in B$, $b \in D$ 。进而有 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 。

充分性:

对任意的 $x \in A \times B$, 令 $x = (a, b)$, 于是有 $a \in A$ 且 $b \in B$, 由于 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 成立, 于是 $a \in C$ 且 $b \in D$, 进而有 $x \in C \times D$, 即 $A \times B \subseteq C \times D$ 。

$$A \times B = C \times D, \text{ 当且仅当 } A = C \text{ 且 } B = D:$$

$A \times B = C \times D$, 当且仅当 $A \times B \subseteq C \times D$ 且 $C \times D \subseteq A \times B$, 由上小问结论, 于是当且仅当 “ $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ ” 且 “ $C \subseteq A$ 且 $D \subseteq B$ ”, 于是即当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$ 。

假设不为非空集合, 不妨考虑一些特殊情况为反例来说明这个命题是不成立的:

假定此时有 $A = D = \emptyset$, B, C 非空且 $B \neq C$, 于是此时有 $A \times B \subseteq C \times D$ (两者都是空集), 但是此时 $B \subseteq D$ 显然是不成立的 (非空集合不能成为空集子集), 这个情况同样可以否定相等那个结论, 于是在有空集条件下两者都不成立。

3.5.7 设 X 和 Y 是集合, 令 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} := X \times Y \rightarrow X$ 和 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} := X \times Y \rightarrow Y$ 分别表示映射 $\pi_{X \times Y \rightarrow X}(x, y) := x$ 和 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y}(x, y) := y$ 。这两个函数被称为 $X \times Y$ 上的坐标函数。证明: 对于任意的函数 $f: Z \rightarrow X$ 和 $g: Z \rightarrow Y$, 存在唯一的函数 $h: Z \rightarrow X \times Y$ 使得 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h = f$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h = g$ 。(把该结论与习题3.3.8的最后一部分以及习题3.1.7进行比较。) 这个函数 h 被称为 f 和 g 的直和, 记作 $h = f \oplus g$ 。

首先证明它存在:

考虑函数 $h: Z \rightarrow X \times Y$ 存在这样的映射关系:

$$h(z) = (f(z), g(z))$$

于是对任意 $z \in Z$, 可以得到 $\pi_{X \times Y \rightarrow X}(h(z)) = \pi_{X \times Y \rightarrow X}((f(z), g(z))) = f(z)$ 以及 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y}(h(z)) = \pi_{X \times Y \rightarrow Y}((f(z), g(z))) = g(z)$, 再根据两者间相同的值域与定义域可以判断得到 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h = f$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h = g$ 同时成立, 于是 h 是满足题目要求的直和。

再证明它的唯一性:

假设存在两个函数 h_1, h_2 满足题设条件。对任意 $z \in Z$, 由于 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h_i = f$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h_i = g$ 对 $i = 1, 2$ 为真, 于是应当有 $\pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h_1(z) = \pi_{X \times Y \rightarrow X} \circ h_2(z) = f(z)$ 且 $\pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h_1(z) = \pi_{X \times Y \rightarrow Y} \circ h_2(z) = g(z)$, 于是有 $h_1(z) = (f(z), g(z)) = h_2(z)$, 又根据两个函数拥有共同的值域与定义域, 于是可以得到 $h_1 = h_2$, 即 h 的存在是唯一的。

3.5.8 设 X_1, \dots, X_n 是集合, 证明: 笛卡儿积 $\prod_{i=1}^n X_i$ 是空集, 当且仅当至少有一个 X_i 为空集。

使用反证法:

假设笛卡儿积 $\prod_{i=1}^n X_i$ 是空集, 且对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $X_i \neq \emptyset$ 。由于对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $X_i \neq \emptyset$, 于是对任意的 X_i , 至少可以指定一个元素 x_i 使得 $x_i \in X_i$, 于是选取这些所有的被指定的元素 x_i 组成一个有序 n 元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, 其中对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $x_i \in X_i$ 。根据笛卡尔积的定义, 此时有 $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n X_i$, 这与 $\prod_{i=1}^n X_i$ 是空集的前提假设相矛盾, 于是不成立假设, 命题得证。

3.5.9 假设 I 和 J 是两个集合, 对所有的 $\alpha \in I$ 令 A_α 是一个集合, 且对所有的 $\beta \in J$ 令 B_β 是一个集合。证明:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta$$

对任意 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right)$, 应当有 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$, 进而存在 $\alpha_0 \in I$ 与 $\beta_0 \in J$ 有 $x \in A_{\alpha_0}$ 且 $x \in B_{\beta_0}$, 该结论等效存在 $(\alpha_0, \beta_0) \in I \times J$ 有 $x \in A_{\alpha_0} \cap B_{\beta_0}$, 即 $x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta$ 。

对任意 $x \in \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta$, 有存在 $(\alpha_0, \beta_0) \in I \times J$ 有, 于 $x \in A_{\alpha_0}$ 且 $x \in B_{\beta_0}$, 既有存在 $\alpha_0 \in I$ 与 $\beta_0 \in J$ 有 $x \in A_{\alpha_0}$ 且 $x \in B_{\beta_0}$, 于是 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$, 进而 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right)$ 。

综上, 根据集合相等的定义, 有 $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta$ 。

3.5.10 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, 定义 f 的图 Γ_f 为 $X \times Y$ 的一个子集 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ 。证明: 两个函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ 相等, 当且仅当它们有相同的图。反过来, 如果 $X \times Y$ 的任意一个子集 G 具有下述性质: 对每一个 $x \in X$, 集合 $\{y \in Y : (x, y) \in G\}$ 中恰好有一个元素 (或者换言之, G 满足垂线测试)。证明: 恰好存在一个函数 $f: X \rightarrow Y$, 它的图与 G 相等。

两个函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ 相等, 当且仅当它们有相同的图:

证明必要性:

两个函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ 相等, 于是对任意 $x \in X$, 都有 $f(x) = \tilde{f}(x)$, 于是对任意 f 图中的元素 $(x, f(x)) = (x, \tilde{f}(x))$, 即 $(x, f(x)) \in \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$, 即属于 \tilde{f} 的图。反过来同样可以得到对任意 \tilde{f} 的图中的元素 $(x, \tilde{f}(x))$, $(x, \tilde{f}(x)) \in \{(x, f(x)), x \in X\}$, 即属于 f 的图。于是根据集合相等的概念, 可以得到: $\{(x, f(x)), x \in X\} = \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$ 。

证明充分性:

已知有 $\{(x, f(x)), x \in X\} = \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$ 成立, 于是对任意的 $x \in X$, 可以找到元素 $(x, f(x))$, 并且根据集合相等的定义, $(x, f(x)) \in \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$, 于是有 $f(x) = \tilde{f}(x)$ 对任意 $x \in X$ 成立, 又根据 f 与 \tilde{f} 有相同的值域与定义域, 于是可以得到 $f = \tilde{f}$ 。

若对每一个 $x \in X$, 集合 $A = \{y \in Y : (x, y) \in G\}$ 中恰好有一个元素, 则恰好存在一个函数 $f: X \rightarrow Y$, 它的图与 G 相等:

先证明这样的函数是存在的:

根据命题中的条件, 假设这样一个函数 $f: X \rightarrow Y$, 它存在这样的映射关系:

$$f(x) \text{ 使得 } f(x) \in \{y \in Y : (x, y) \in G\} \text{ 且 } (x, f(x)) \in G$$

由于集合 $\{y \in Y : (x, y) \in G\}$ 恰好有一个元素与 x 对应, 于是这样的映射关系是满足垂线测试的, 这也保证 f 确实是一个函数。

于是对于这个函数 f , 它的图 $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ 根据定义应当有任意图中元素都属于 G 。对于任意 G 中元素 (x, y) , 由题设, 对每个 $x \in X$, 恰有一个 $(x, y) \in G$, 又根据 $(x, f(x)) \in G$, 于是只能有 $f(x) = y$, 即 (x, y) 属于 f 的图, 于是根据集合相等的定义, G 就是 f 的图。

再证明这样的函数是唯一的:

假设有两个函数 f_1 与 f_2 满足该条件, 于是两者具有共同的图, 根据前结论, 两者图相同即有 $f_1 = f_2$, 于是两个函数其实是一个函数, 由此唯一性得证。

证毕。

3.5.11 证明: [公理3.10幂集公理](#)实际上能够由[引理3.4.9](#)和其他的集合论公理推导出来, 从而引理3.4.9可以看作是幂集公理的替代形式。(提示:对任意两个集合 X 和 Y , 利用引理3.4.9和分类公理构造出由 $X \times Y$ 的一切子集组成的集合, 它满足垂线测试。然后再利用习题3.5.10和替代公理。)

对任意两个集合 X, Y , 对笛卡尔积 $X \times Y$ 使用引理3.4.9, 可以得到集合 Z_0 :

$$Z_0 = \{Z : Z \text{ 是 } X \times Y \text{ 的一个子集}\}$$

对 Z_0 使用分类公理, 于是得到集合 Z_1 :

$$Z_1 = \{Z \in Z_0 : \text{对任意 } x \in X, \text{ 恰有一个 } (x, y) \in Z\}$$

于是以 Z_1 为图的集合, 使用替代公理, 得到集合 $Y \wedge X$:

$$Y \wedge X = \{f : f \text{ 是以某个 } G \in Z_1 \text{ 为图的函数}\}$$

于是得到集合 $Y \wedge X$ 即为幂集公理所给出的 Y^X , 它包含了所有以 X 为定义域, Y 为值域的函数 f 。

3.5.12 本题将建立严格形式的命题2.1.16, 设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个函数, c 是一个自然数。证明: 存在一个函数 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 使 $a(0) = c$ 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $a(n++) = f(n, a(n))$, 而且这个函数是唯一的。(提示: 首先通过修改引理3.5.12的证明过程去归纳地证明: 对于任意自然数 $N \in \mathbb{N}$, 存在唯一的函数 $a_N: \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\} \rightarrow \mathbb{N}$ 使得 $a_N(0) = c$ 且 $a_N(n++) = f(n, a_N(n))$ 对所有满足 $n < N$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。) 另一个挑战是, 不利用除了皮亚诺公理之外任何有关自然数的性质, 直接证明上述结论 (特别地, 不利用自然数的次序关系, 也不借助于命题2.1.16)。(提示: 首先只利用皮亚诺公理和集合论的基本知识归纳地证明: 对每一个自然数 $N \in \mathbb{N}$, 存在唯一一对 \mathbb{N} 的子集 A_N, B_N 满足下列性质: (a) $A_N \cap B_N = \emptyset$; (b) $A_N \cup B_N = \mathbb{N}$; (c) $0 \in A_N$; (d) $N++ \in B_N$; (e) 只要 $n \in B_N$, 就有 $n++ \in B_N$; (f) 只要 $n \in A_N$ 且 $n \neq N$, 就有 $n++ \in A_N$ 。一旦我们得到这些集合, 就用 A_N 来代替前面论述中的 $\{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$ 。)

考虑使用归纳法, 对自然数 n 做归纳, 证明命题“对于任意自然数 $N \in \mathbb{N}$, 存在唯一的函数 $a_N: \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\} \rightarrow \mathbb{N}$ 使得 $a_N(0) = c$ 且 $a_N(n++) = f(n, a_N(n))$ 对所有满足 $n < N$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。”成立。

$n = 0$ 时:

显然只有唯一的函数 $a: \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, 其映射关系为 $a(0) = c$ 才能使得该命题成立。

现归纳性假设该命题在 $n = N$ 时成立, 对 $n = N++$ 时:

先证明其存在:

由于 $n = N$ 时命题成立, 于是 $n = N$ 时存在这么一个函数 a_N 有对任意 $n \leq N$ 的 $a(n)$ 都满足命题中的性质, 此时根据给定的 f , 取一个自然数 $f(n, a_N(n))$, 然后定义一个新函数 $a_{N+1}: \{n \in \mathbb{N} : n \leq N+1\} \rightarrow \mathbb{N}$, 它的映射关系为:

$$\begin{cases} a_{N+1}(n) = a_N(n) & (0 \leq n \leq N) \\ a_{N+1}(n) = f(n, a_N(n)) & (n = N+1) \end{cases}$$

可以验证对新函数 $a_{N+1}: \{n \in \mathbb{N} : n \leq N+1\} \rightarrow \mathbb{N}$, 它满足命题中的一切条件。

再证明其唯一性:

假设有两个函数 a_{N+1}^1 与 a_{N+1}^2 满足命题, 于是首先有 $a_{N+1}^1(0) = a_{N+1}^2(0) = c$, 由于命题在 $n = N$ 时成立, 于是对任意的 $n \leq N$, 都会有 $a_{N+1}^1(n) = a_{N+1}^2(n)$ (由同样的过程产生), 特别地, 有 $a_{N+1}^1(N) = a_{N+1}^2(N)$, 于是根据命题有 $f(N, a_{N+1}^1(N)) = f(N, a_{N+1}^2(N))$, 即 $a_{N+1}^1(N++) = a_{N+1}^2(N++)$ 。于是综上对任意 $n \leq N+1$ 都有 $a_{N+1}^1(n) = a_{N+1}^2(n)$ 。再考虑两者有相同的值域与定义域, 于是两者为同一个函数, 即 a_{N+1} 唯一。

综上, 该命题归纳得证。于是结论可推广至自然数集 \mathbb{N} 的情况, 即“存在一个函数 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 使 $a(0) = c$ 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $a(n++) = f(n, a(n))$, 而且这个函数是唯一的。”为真。

挑战:

由于挑战的限制, 我们无法直接由某个给出的自然数 N 得到集合 $\{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$, 于是考虑这样一个方法, 仅借助集合论的基础知识与皮亚诺公理, 对任意给定自然数 N 构造出集合 $\{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$ 的等效替代集合 A_N , 使用 A_N 替代上述证明过程即可:

于是证明提示中的命题, 考虑对给定的自然数 N , 使用归纳法 (公理2.5) 进行归纳:

(为了满足性质 (a), (b), 于是下文默认选取 A_N 时, 取 $B_N = \mathbb{N} \setminus A_N$, 这在下文证明中不再重复)

$N = 0$ 时:

取 $A_N = \{0\}$, 此时可以验证对后四条性质均成立。 $0 \in A_N$, $0++ = 1 \in B_N$, 由公理2.2与公理2.3可推知 (e) 成立, A_N 中不存在不等于 N 的元素于是 (f) 成立。同时根据 (e) 可以推断出该 A_N 是唯一的。

假设 $N = n$ 时成立结论, 证明 $N = n + +$ 时一样唯一存在这样的集合:

先证明其存在:

考虑取 A_{n++} 为 $A_n \cup \{n++\}$, 此时有(c)成立 ($n++ \in A_{n++}$), 同时由于 $n++ \notin A_n$, 于是 $(n++)++ \notin A_N$, 且 $(n++)++ \notin \{n++\}$, 于是 $(n++)++ \in B_{n++}$, (d)成立。(e)依旧可由(d)与公理2.2, 公理2.3推出。对任意 $m \in A_{n++}$ 且 $m \neq n++$, 若 $m = n$, 则 $n++ \in A_{n++}$, 成立; 若 $m \neq n$, 则由于 $m \in A_n$ 与假设条件可推出必然有 $m++ \in A_{n++}$, 即(f)成立。

再证明其唯一性:

假设存在两个集合 A_{n++}^1 与 A_{n++}^2 都满足这个条件, 于是首先0是两个集合共有的元素, $(n++)++$ 都不属于这两个集合。根据题述条件, 由于 A_n 是唯一的, 于是可以推知得到对任意 $m \in A_n$ 都有 $m \in A_{n++}^1$ 与 $m \in A_{n++}^2$, 于是 $n++$ 也是他们所共有的元素, 对 $n++$ 后的元素由归纳可证明均不属于他们, 于是得到两个集合本质是一个集合。

3.5.13 本题的目的是证明在集合论中, 本质上只存在唯一的自然数系 (参见注2.1.12中的讨论)。假设我们有一个由“另类的自然数”组成的集合 \mathbb{N}' 、一个“另类的零” $0'$ 以及一个“另类的增量运算”, 并且该运算对任意一个另类的自然数 $n' \in \mathbb{N}'$ 作用后, 会返回另一个另类的自然数 $n'++' \in \mathbb{N}'$, 这使得当自然数、零以及增长运算被它们的另类物替代时, 皮亚诺公理 (公理2.1~公理2.5) 仍然成立。证明: 存在一个从自然数集到另类的自然数集的双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$ 使得 $f(0) = 0'$, 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n' \in \mathbb{N}'$, 有 $f(n) = n'$, 当且仅当 $f(n++) = n'++'$ 。(提示:利用习题3.5.12。)

如题目所述, 对这种另类的自然数系, 我们用已有自然数系中的符号加上一个符号'来表示它们。

于是我们假定一个函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$, 其映射关系定义如下:

$$f(n) = \begin{cases} 0' & n = 0 \\ f(n-1)++' & n > 0 \end{cases}$$

对这个函数, 我们来证明它是一个双射:

f 是单射:

对这个命题, 我们选择使用数学归纳法原理, 对 N 进行归纳证明: 对任意 $x_1, x_2 \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 由此将结论推广至 f 整个定义域 (也即 \mathbb{N})

$N = 0$ 时:

该结论显然成立 (因为不存在一对元素)

现归纳性假设 $N = m$ 时有结论成立, 对 $N = m++$ 时:

根据定义有 $f(m++) = f(m)++' \neq f(m)$, 对任意 $n \leq m$, 根据归纳假设有结论成立, 于是对任意 $x_1, x_2 \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 对 $f(m++)$, 使用逆向归纳法, 若有 $f(m++) = f(m-1) = f(m-2)++'$, 则 $f(m)++' = f(m-2)++' \iff f(m) = f(m-2)$ 同归纳假设矛盾, 于是逆向归纳逐步可以得到 $f(m++) \neq f(n)$ 对任意 $n \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq m\}$ 成立。综合得到结论对任意 $x_1, x_2 \in \{n \in \mathbb{N} : n \leq m++\}$ 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 于是归纳假设得证。

综上, 得证有 f 是单射。

f 是满射:

对这个命题, 我们选择使用数学归纳法原理, 对 N' 进行归纳证明: 对任意 $n' \in \{n \in \mathbb{N}' : n' \leq N'\}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(n) = n'$, 由此将结论推广至 f 整个值域 (也即 \mathbb{N}')

$N' = 0$ 时:

该结论显然成立 ($f(0) = 0'$)

现归纳性假设 $N' = m'$ 时有结论成立, 对 $N' = m' + +'$ 时:

根据假设, 于是得知存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(n) = m'$, 因此对 $m' + +'$, 应当有 $f(n) + +' = m' + +'$, 即 $f(n++) = m' + +'$ (看定义), 显然 $n++ \in \mathbb{N}$ 。综上, 得到结论, 对任意 $n' \in \{n \in \mathbb{N}' : n' \leq m' + +'\}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(n) = n'$ 于是归纳假设得证。

综上, 得证有 f 是满射。

本节相关跳转

[实分析 2.1 皮亚诺公理](#)

[实分析 3.1 基础知识](#)

[实分析 3.3 函数](#)

[实分析 3.4 象和逆象](#)