7.3 非负数的和

命题

1. (7.3.1 上界推断？）设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个**非负实数**的形式级数，则这个级数是收敛的，当且仅当存在一个实数M使得：

$$\sum_{n=m}^{N} a_n \leq M$$

对所有整数$N \geq m$成立。

推论：（7.3.2 比较判别法）设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$是两个非负实数的形式级数，且对任意$n \geq m$均有$|a_n| \leq b_n$，则若有$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$收敛，那么$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的，并且有：

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$

（比较判别法中常使用几何级数$\sum_{q=0}^{\infty} x^q$）

2. （7.3.3 几何级数）设x是实数，若$|x| \geq 1$，则级数$\sum_{q=0}^{\infty} x^q$发散，反之若$|x| < 1$，则级数$\sum_{q=0}^{\infty} x^q$绝对收敛，且有：

$$\sum_{q=0}^{\infty} x^q = \frac{1}{1-x}$$

3. （7.3.4 柯西准则）设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个**递减的非负实数**序列，则级数是$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的，当且仅当级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots\ldots$$

是收敛的。

4. （7.3.6 柯西准则相关？）设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个**递减的非负实数**序列，则对任意的自然数K，有$S_{2^{K+1}-1} \leq T_K \leq 2S_{2^K}$，其中，$T_K = \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k}$，$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$。

（于是$S_{2^{K+1}-1} = \sum_{n=0}^{2^{K+1}-1} a_n$，$2S_{2^K} = 2\sum_{n=0}^{2^K} a_n$。该引理用于柯西准则的证明）

5. （7.3.7 调和级数与柯西准则？）设$q > 0$为有理数，那么当$q > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$收敛；当$q \leq 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$发散。

课后习题

7.3.1 利用命题7.3.1证明推论7.3.2

> 根据题设有对任意$n \geq m$，$b_n \geq |a_n|$恒成立。我们取部分和$S_N = \sum_{n=m}^{\infty} b_n$，$S'_N = \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$。
>
> 根据命题7.3.1，有存在某个实数M使得对任意$N \geq m$，$S_N \leq M$恒成立。
>
> 根据命题7.1.4(f)的内容，我们又由对任意整数$N \geq m$都有$b_i \geq |a_i|$对任意$m \leq i \leq N$成立可以得到$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$都成立。于是结合前文有存在某个实数M使得对任意$N \geq m$都有$S'_N \leq S_N \leq M$恒成立，于是根据命题7.3.1可以得到$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$绝对收敛。
>
> 现在已知三个级数均收敛，于是有$(S_N)_{N=m}^{\infty}$，$(S'_N)_{N=m}^{\infty}$收敛，于是它们的极限也就是它们的上极限（说下极限也可以），于是运用比较原理，由$S_N \geq S'_N$对任意$N \geq m$都成立我们可以得到：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 又根据7.2.9绝对收敛审敛法的结论可以将上面结论升级为：
>
> $$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 于是命题得证。

7.3.2 证明引理 7.3.3 **（提示：对第一部分使用零判别法，对于第二部分，首先利用归纳法建立一个几何级数公式**

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{(1 - x^{N+1})}{1 - x}$$

然后使用引理6.5.2)

7.3.3 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个绝对收敛的实数级数，并且满足$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 0$证明：对任意自然数$n$都有$a_n = 0$

> 为了下面的结论证明，我们要证明一个辅助结论：
>
> 假设对于每个自然数n我们都指定一个实数a_n，那么$S_N \leq S_M$ $(N, M \in \mathbb{N})$对任意$M \geq N$都成立，其中$S_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$。
>
> 对任意的自然数N，我们对M归纳证明：
>
> 当$M = N$时：
>
> 此时显然有$S_N \leq S_N = S_M$，成立结论。
>
> 现假设在$M = K$时成立结论，对$M = K + 1$时：
>
> $$S_{K+1} = \sum_{n=0}^{K+1} |a_n| = \sum_{n=0}^{K} |a_n| + |a_{K+1}| = S_K + |a_{K+1}|$$

> 根据归纳假设，我们有$S_K \geq S_N$，又有$|a_{K+1}| \geq 0$，于是$S_K + |a_{K+1}| \geq S_N$，即$S_{K+1} \geq S_N$。
>
> 综上，结论得证。
>
> ---
>
> 使用反证法证明：
>
> 不妨假设存在$n_0 \geq 0$使得$a_{n_0} = k \neq 0$并且对任意$n < n_0$，$a_n = 0$（即a_{n_0}是第一个非0项）
>
> 定义$S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|$，于是可以计算得到部分和$S_{n_0} = |a_{n_0}|$。
>
> 根据辅助结论，我们始终有$S_N \geq S_{n_0} = |a_{n_0}|$对任意$N \geq n_0$恒成立。
>
> 此时根据题设有$\lim\limits_{N \to \infty} S_N = 0$，那么对于$\varepsilon = \dfrac{|a_{n_0}|}{2}$，应当存在一个自然数$n_1$使得$n \geq n_1$时总有$d(S_n, 0) \leq \dfrac{|a_{n_0}|}{2}$恒成立，但是对任意$n \geq \max(n_0, n_1)$我们又应该有$d(S_n, 0) \geq |a_{n_0}|$，这导出了矛盾。
>
> 于是假设错误，题目结论得证。

本节相关跳转

[实分析 6.5 上极限、下极限和极限点]()