6.2 广义实数系

定义

1. (6.2.1 广义实数系)附加上两个额外元素$+\infty$与$-\infty$的实直线$\mathbb{R}$就是**广义实数系**$\mathbb{R}^*$，其中+\infty与-\infty互不相同，并且它们与每一个实数都不相同。一个**广义实数**x是**有限的**，当且仅当它是一个实数；一个广义实数是**无限的**，当且仅当它等于$+\infty$或$-\infty$。
2. (6.2.2 广义实数的负运算)通过额外定义：

$$-(+\infty) := -\infty$$
$$-(-\infty) := +\infty$$

由此将$\mathbb{R}$上的负运算$x \to (-x)$**推广**到广义实数系$\mathbb{R}^*$上。于是每个广义实数都有一个负数，且$-(-x) = x$总是成立。

3. (6.2.3 广义实数的排序)称$x \leq y$，当且仅当下列三个命题有一个为真：

> - x和y都是实数，并且满足$x \leq y$。
> - $y = +\infty$。
> - $x = -\infty$。

如果$x \leq y$且$x \neq y$，那么称$x < y$。有时可以将$x < y$与$x \leq y$写作$y > x$与$y \geq x$。

4. (6.2.6 广义实数的上确界与下确界)设E是$\mathbb{R}^*$的一个子集，则根据下述法则确定E的上确界或最小上界$\sup(E)$：

> - 如果E包含在$\mathbb{R}$中，则根据定义5.5.3确定$\sup(E)$。
> - 如果E包含$+\infty$，则令$\sup(E) := +\infty$。
> - 如果E包含$-\infty$且不包含$+\infty$，则令$\sup(E) := \sup(E \backslash \{-\infty\})$从而根据①来确定E的最小上界。

又定义E的下确界$\inf(E)$为：

$$\inf(E) := -\sup(-E)$$

(其中$-E$为集合$\{-x : x \in E\}$)

(顺便贴下定义5.5.10防查看麻烦)：

> 设E是实数集的一个子集，如果E是非空的并且存在一个上界，则定义$\sup(E)$为E的最小上界(由定理5.5.9可知，该定义是明确的)。额外引入两个符号$+\infty$与$-\infty$。如果E是非空的并且没有上界，则令$\sup(E) := +\infty$；如果E是空集，则定义$\sup(E) := -\infty$，称$\sup(E)$是E的**上确界**，也可以记作$\sup E$。

命题

1. (6.2.5 广义实数的性质？)设x，y，z为广义实数，则下述命题为真：

> - (自反性) $x \leq x$。
> - (三歧性) $x < y$，$x = y$，$x > y$三者恰有一个为真。
> - (传递性) 若有$x < y$与$y < z$成立，则$x < z$为真。
> - (负运算改变序) 若有$x \leq y$成立，则有$-y \leq x$成立。

2. (6.2.11 上确界与下确界性质）设E是$\mathbb{R}^*$的一个子集，则有下述命题为真：

> - 对任意$x \in E$，有$x \geq \inf(E)$与$x \leq \sup(E)$恒成立。
> - 对任意M为E的上界，有$M \geq \sup(E)$。
> - 对任意M为E的下界，有$M \leq \inf(E)$。

（M是E的上界，即对任意$x \in E$，有$M \geq x$，下界类似）

课后习题

6.2.1 证明命题6.2.5（提示：你可能会用到命题5.4.7）

>

6.2.2 证明定理6.2.11（提示：你可能要用到根据$+\infty$和$-\infty$是否属于E来分情况考虑。如果E中只包含实数，那么你当然可以利用定义5.5.10）

>

本节相关跳转

实分析 5.4 对实数排序

实分析 5.5 最小上界性质