

## 3.4 象和逆象

### 公理

#### 策梅洛·弗兰克尔集合论公理其二

1. (3.10 幂集公理) 设 $X$ 与 $Y$ 都是集合, 且存在一个集合记为 $Y^X$ , 该集合由所有从 $X$ 到 $Y$ 的函数构成, 即:

$$f \in Y^X \rightarrow f \text{ 定义域是 } X, \text{ 值域为 } Y$$

2. (3.11 并集公理) 设 $A$ 为一个集合, 且 $A$ 中所有元素也都是集合, 则存在一个集合 $\cup A$ , 它的元素恰好是 $A$ 元素的元素, 于是对任意的对象 $x$ 有:

$$x \in \cup A \rightarrow \text{存在 } S \in A, \text{ 使得 } x \in S$$

注: 公理3.1~3.11 (除去3.8的万有分类公理) 统称为策梅洛·弗兰克尔集合论公理。

补充2: 由并集公理引申出了一个重要结论:

如果存在某个集合 $I$ , 对每一个元素 $\alpha \in I$ 均有一个集合 $A_\alpha$ , 则可定义:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{A_\alpha : \alpha \in I\}$$

来构造并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 并且由替代公理与并集公理, 它是一个集合。

(例:  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $A_1 = \{2, 3\}$ ,  $A_2 = \{3, 4\}$ ,  $A_3 = \{4, 5\}$ , 则有  
 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{2, 3, 4, 5\}$ )

更进一步地, 对任意的对象 $y$ :

$$y \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \rightarrow \text{存在 } \alpha \in I, \text{ 使得 } y \in A_\alpha$$

此时称 $I$ 为指标集, 元素 $\alpha \in I$ 称为标签, 所有集合 $A_\alpha$ 称为一个集族, 由标签 $\alpha \in I$ 来索引。且有 $I$ 为 $\emptyset$ 时,  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 为 $\emptyset$ 。

在指标集 $I$ 非 $\emptyset$ 的情况下, 可以类似地构造集族的交集:

1. 从 $I$ 中取出一个元素 $\beta$ 。
2. 令 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x \in A_\beta : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{ 有 } x \in A_\alpha\}$ 。
3. 由分类公理得知它是一个集合。
4. 存在下述命题成立。

$$y \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \rightarrow \text{对任意 } \alpha \in I, \text{ 有 } y \in A_\alpha$$

### 定义

1. (3.4.1 集合的象) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的函数, 且 $S$ 为 $X$ 的一个子集, 则定义 $f(S)$ 为下述集合:

$$f(S) := \{f(x) : x \in S\}$$

该集合为 $Y$ 的一个子集，并称其为 $S$ 在映射 $f$ 下的象（也称前象）。

2. (3.4.4 逆象) 若 $U$ 为 $Y$ 的一个子集，则定义 $f^{-1}(U)$ 为下述集合：

$$f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\}$$

换句话说， $f^{-1}(U)$ 包含了所有 $X$ 中被映射到 $U$ 的元素：

$$x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in U$$

称 $f^{-1}(U)$ 为 $U$ 的逆象。

（关于逆象，有一个并不明显的事实要注意，即 $f(f^{-1}(U)) = U$ 并不总是成立的，这一点在直观上或许看着非常难以接受。比如一个例子 $f: N \rightarrow N$ ,  $f(x) = 2x$ ，取 $U = \{1, 2, 3\}$ ，根据定义得到 $f^{-1}(U) = \{1\}$ ，进而 $f(f^{-1}(U)) = \{2\} \neq U$ 。可以看到，想要成立相等的前置条件，在于 $U$ 中元素是否全部被映射到）

## 引理

1. (3.4.9 幂集) 设 $X$ 是一个集合，那么 $\{Y : Y \text{ 是 } X \text{ 的一个子集}\}$ 是一个集合。

（注：集合 $\{Y : Y \text{ 是 } X \text{ 的一个子集}\}$ 被称为 $X$ 的幂集并记作 $2^X$ ，例如，假如 $a, b$ 是两个不同的元素，那么有：

$$2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

当 $\{a,b\}$ 有2个元素时， $2^{\{a,b\}}$ 有 $2^2 = 4$ 个元素，这启示我们为什么把 $X$ 幂集记为 $2^X$ ，在第八章还将回到这个问题的讨论）

## 课后习题

3.4.1 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个双射函数，并且 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 是它的逆， $V$ 是 $Y$ 的任意一个子集，证明： $V$ 在 $f^{-1}$ 下的前象与 $V$ 在 $f$ 下的逆象是同一个集合，于是对这两个集合同时使用 $f^{-1}(V)$ 这样的表述并不存在任何不兼容问题

考虑在 $f^{-1}$ 下 $V$ 的前象（这里使用 $f_{\text{前}}^{-1}(V)$ 来描述前象），于是对任意 $x \in f_{\text{前}}^{-1}(V)$ ，应当有存在某个 $y \in V$ 使得 $f^{-1}(y) = x$ ，由 $f$ 是双射，此时可以推知 $y = f(x)$ 。考虑逆象定义，由于有 $y = f(x) \in V$ ，于是此时可以得到 $x \in f_{\text{前}}^{-1}(V)$ 。

另一方面，对任意 $V$ 的逆象中元素 $x$ （这里使用 $f_{\text{逆}}^{-1}(V)$ 来描述逆象），于是对任意 $x \in f_{\text{逆}}^{-1}(V)$ ，应当有 $f(x) = y \in V$ ，由于 $f$ 是双射，于是即 $x = f^{-1}(y)$ 且 $y \in V$ ，根据前象定义，于是有 $x \in f_{\text{前}}^{-1}(V)$ 。

综上，可以得到两者是同一个集合。

3.4.2 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数， $S$ 是 $X$ 的一个子集， $U$ 是 $Y$ 的一个子集，一般情况下， $S$ 与 $f^{-1}(f(S))$ 是什么关系？ $U$ 与 $f(f^{-1}(U))$ 呢？

$S$ 与 $f^{-1}(f(S))$ ：

考虑 $f^{-1}(f(S))$ 的定义过程，对任意 $x \in S$ ， $f(x) = y \in f(S)$ ，再根据逆象的定义，于是可以根据 $y$ 得到 $x \in f^{-1}(f(S))$ （ $f(x) \in f(S)$ ），但是对于上述过程，不难假想这样一个情景： $x_1, x_2 \in X$ 但 $x_1 \in S, x_2 \notin S, x_1 \neq x_2$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，此时会得到 $x_2 \in f^{-1}(f(S))$ 但是 $x_2 \notin S$ ，于是可以得到通常情况下 $S \subseteq f^{-1}(f(S))$ 。

$U$ 与 $f(f^{-1}(U))$ ：

依旧考虑 $f(f^{-1}(U))$ 的定义过程, 对任意 $y \in f(f^{-1}(U))$ , 至少存在一个 $x \in f^{-1}(U)$ 使得 $f(x) = y$ , 而对于 $x \in f^{-1}(U)$ , 依据定义必然有 $f(x) = y \in U$ , 于是推断可以得到对任意 $y \in f(f^{-1}(U))$ ,  $y \in U$ , 然而, 对于任意的 $y \in U$ , 并不一定存在 $x \in X$ 使得 $y$ 被映射, 如在定义3.4.4处的举例。于是可以推断通常情况下有 $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$ 。

**3.4.3 设 $A, B$ 是集合 $X$ 的两个子集, 且 $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, 证明:  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ,  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ ,  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 。对于前两个结论, 考虑能否把 $\subseteq$ 关系加强为 $=$ 关系。**

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ :

对任意 $y \in f(A \cup B)$ , 应当有存在 $x \in A \cup B$ 使得 $f(x) = y$ , 对于 $x$ , 要么它属于 $A$ , 则有 $f(x) = y \in f(A)$ , 要么它属于 $B$ , 则有 $f(x) = y \in f(B)$ , 于是推知 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$ , 于是 $y \in f(A) \cup f(B)$

另一边, 对任意 $y \in f(A) \cup f(B)$ , 则有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$ , 若 $y \in f(A)$ , 则根据定义有存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y \iff$  存在 $x \in A \cup B$ 使得 $f(x) = y \iff y \in f(A \cup B)$ ; 若 $y \in f(B)$ , 则根据定义有存在 $x \in B$ 使得 $f(x) = y \iff$  存在 $x \in A \cup B$ 使得 $f(x) = y \iff y \in f(A \cup B)$ , 于是可以得到对任意 $y \in f(A) \cup f(B)$ ,  $y \in f(A \cup B)$ 。

综上, 根据集合相等的定义, 于是有 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 。

$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ :

对任意 $y \in f(A \cap B)$ , 应有存在 $x \in A \cap B$ 使得 $f(x) = y$ , 进而有同时成立“存在 $x \in A$ 且 $f(x) = y$ ”与“存在 $x \in B$ 且 $f(x) = y$ ”, 即 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B) \iff y \in f(A) \cap f(B)$ , 即得证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。

条件增强:

对任意 $y \in f(A) \cap f(B)$ , 同时有 $y \in f(A)$ 与 $y \in f(B)$ 成立。于是即同时成立“存在 $x_1 \in A$ 且 $f(x_1) = y$ ”与“存在 $x_2 \in B$ 且 $f(x_2) = y$ ”, 考虑某个特殊情况, 假设 $A \cap B = \emptyset$ , 同时有 $x_1 \in A$ 使得 $f(x_1) = y$ ,  $x_2 \in B$ 使得 $f(x_2) = y$ , 于是此时有 $y \in f(A) \cap f(B)$ 且 $y \notin f(A \cap B) (= \emptyset)$ 。由此反例, 可以得到这个增强条件是不被允许的。

$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ :

对任意 $y \in f(A) \setminus f(B)$ , 同时有 $y \in f(A)$ 与 $y \notin f(B)$ 成立。于是同时成立“存在 $x_1 \in A$ 且 $f(x_1) = y$ ”与“对任意 $x_2 \in B$ 且 $f(x_2) \neq y$ ”, 进而有存在 $x_1 \in A$ 且 $x_1 \notin B$ 使得 $f(x_1) = y \iff x_1 \in A \setminus B$ 使得 $f(x_1) = y \iff y \in f(A \setminus B)$ 。于是由此得证 $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ 。

条件增强:

假设下面一个情景,  $x_1, x_2 \in A$ , 但是存在 $x_1 \in B$ 与 $x_2 \notin B$ , 函数 $f$ 满足 $f(x_1) = f(x_2) = y$ , 此时不难发现, 对 $f(A \setminus B)$ , 应当有 $y \in f(A \setminus B)$  ( $\exists x_2 \in A \setminus B$ 使得 $f(x_2) = y$ ), 对 $f(A) \setminus f(B)$ , 应当有 $y \notin f(A) \setminus f(B)$  ( $y \in f(B)$ ), 于是通过该例子可以得到, 这个增强条件并不被许可

**3.4.4 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个从集合 $X$ 到集合 $Y$ 函数, 证明:  $f(f^{-1}(S)) = S$ 对任意 $S \subseteq Y$ 都成立的充分必要条件是 $f$ 是满射,  $f^{-1}(f(S)) = S$ 对任意 $S \subseteq X$ 都成立的充分必要条件是 $f$ 是单射。**

根据习题3.4.2中的结论有 $f(f^{-1}(S)) \subseteq S$  ( $S \subseteq Y$ )与 $S \subseteq f^{-1}(f(S))$  ( $S \subseteq X$ )始终成立, 于是仅需要论证下面两个命题:

$S \subseteq f(f^{-1}(S))$  ( $S \subseteq Y$ )与 $f$ 是满射互为充要:

当 $f$ 为满射时:

对任意 $y \in S$ , 由于 $f$ 是满射, 于是存在至少一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$ 且 $x \in f^{-1}(S)$ , 于是由 $f(f^{-1}(S))$ 的定义,  $x \in f^{-1}(S) \iff f(x) = y \in f(f^{-1}(S))$ , 于是得证, 当 $f$ 为满射时, 有 $S \subseteq f(f^{-1}(S))$ 。

当对任意 $S \subseteq Y$ 都有 $S \subseteq f(f^{-1}(S))$ 时:

取 $S = Y$ , 于是对任意 $y \in Y$ , 都有 $y \in f(f^{-1}(Y)) \iff \exists x \in f^{-1}(Y)$ 使得 $f(x) = y$ , 又有 $f^{-1}(Y) \subseteq X$ , 于是即对任意 $y \in Y$ , 存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$ 。

$f^{-1}(f(S)) \subseteq S (S \subseteq X)$ 与 $f$ 是单射互为充要:

当 $f$ 是单射时:

对任意 $x \in f^{-1}(f(S))$ , 存在 $y \in f(S)$ 使得 $f(x) = y$ , 对 $y \in f(S)$ , 由前象定义必然存在 $x' \in S$ 使得 $f(x') = y$ , 由于 $f$ 是单射, 于是对其它 $x'' \in X$ 均有 $f(x'') \neq y$ , 所以 $x''$ 唯一, 只可能有 $x'' = x$ , 于是综上有对任意 $x \in f^{-1}(f(S))$ , 均有 $x \in S$ , 即 $f^{-1}(f(S)) \subseteq S (S \subseteq X)$ 。

当 $f^{-1}(f(S)) \subseteq S$ 对任意 $S \subseteq X$ 成立时:

若此时 $f$ 不为单射, 于是存在至少一对 $x_1, x_2 \in X$ 有 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$ , 此时取 $S = \{x_1\}$ , 会导出结论 $f^{-1}(f(S)) \subsetneq S$ , 于是 $f$ 只可能是单射。

于是证毕。

**3.4.6 证明引理3.4.9 (提示: 从集合 $\{0, 1\}^X$ 开始, 利用替代公理把每一个 $f$ 替换为 $f^{-1}(\{1\})$ , 同时本题与习题3.5.11有联动)**

由幂集公理, 对任意集合 $X$ 可知 $A = \{0, 1\}^X$ 是一个集合, 于是对任意 $f \in A$ 与任意对象 $y$ 定义性质 $P(f, y)$ :

$$P(x, y) := y = f^{-1}(\{1\})$$

使用替换公理构造下面这样一个集合:

$$B = \{y : y = f^{-1}(\{1\})\}$$

证明该集合就是引理3.4.9所述的幂集:

对任意 $X$ 的子集 $Y$ , 考虑一个 $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ , 定义 $\forall x \in Y, f(x) = 1, \forall x \in X \setminus Y, f(x) = 0$ 。对此函数 $f$ 显然有 $f^{-1}(\{1\}) = Y$ , 又根据幂集定义,  $f \in A$ , 于是对任意 $X$ 的子集 $Y, Y \in B$ 。

对任意的 $y \in B$ , 可知 $x \in y \iff x \in X$ 且 $f(x) = 1$ , 于是可以得到 $y \subseteq X$ , 即 $y$ 是 $X$ 的一个子集, 进而 $y$ 属于幂集。

综上, 根据集合相等的定义, 可以得到幂集 $\{Y : Y \text{ 是 } X \text{ 的一个子集}\} = \{y : y = f^{-1}(\{1\})\}$ 。

**3.4.7 设 $X$ 与 $Y$ 是集合。对任意一个函数 $f : X' \rightarrow Y'$ , 若它满足定义域 $X'$ 是 $X$ 的子集, 且值域 $Y'$ 是 $Y$ 的子集, 则称 $f$ 是从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的偏函数。证明: 从 $X$ 到 $Y$ 的全体偏函数构成一个集合 (提示: 利用习题3.4.6, 幂集公理, 并集公理与替换公理)**

由引理3.4.9结论,  $X$ 与 $Y$ 分别对应存在一个集合 $\iota_X$ 与 $\iota_Y$ 包含了它们所有的子集。对任意 $X' \in \iota_X$ , 定义这样一个指定关系有:

$$Y' \implies Y'^{X'}$$

于是此时可以对于给定的集合 $\iota_Y$ , 对任意 $Y' \in \iota_Y$ , 指定一个集合 $Y'^{X'}$ , 于是根据并集公理的引申结论, 我们可以构造这样一个集合:

$$\bigcup_{Y' \in \iota_Y} Y'^{X'}$$

对该集合中, 包含了所有以 $X'$ 为定义域, 任意 $Y' \in \iota_Y$ 为值域的函数 (也即 $X$ 到 $Y$ 的偏函数)

于是根据上文所述，我们确定了一个这样的指定关系：

$$X' \Rightarrow \bigcup_{Y' \in \iota_Y} Y'^{X'}$$

再次对集合 $\iota_X$ 使用并集公理的引申结论，可以得到下述集合

$$\bigcup_{X' \in \iota_X} \bigcup_{Y' \in \iota_Y} Y'^{X'}$$

对该集合中，包含了所有以 $X' \in \iota_X$ 为定义域，任意 $Y' \in \iota_Y$ 为值域的函数（也即 $X$ 到 $Y$ 的偏函数）

从 $X$ 到 $Y$ 的全体偏函数构成的一个集合即为上文所构造的集合 $\bigcup_{X' \in \iota_X} \bigcup_{Y' \in \iota_Y} Y'^{X'}$

（为什么没用到替代公理，此题存疑）

### 3.4.8 证明公理3.4（并集）可以由公理3.1（集合是元素），公理3.3（单元素集与双元素集）与公理3.11（并集公理）推出

假设给定集合 $A$ 与集合 $B$ ，根据公理3.1，于是 $A$ 与 $B$ 都是元素，进而根据公理3.3，存在一个双元素集合 $C = \{A, B\}$ ，再对 $C$ 使用公理3.11，于是存在一个集合 $\cup C$ ，对任意元素 $x$ 有：

$$x \in \cup C \iff \text{存在 } S \in C \text{ 使得 } x \in S \iff x \in A \text{ 或 } x \in B$$

即 $A$ 与 $B$ 的并集，于是推知了公理3.4。

### 3.4.9 证明若有 $\beta$ 与 $\beta'$ 是集合 $I$ 中的两个元素，且对任意 $\alpha \in I$ ，我们指定一个集合 $A_\alpha$ ，那么证明： $\{x \in A_\beta : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\} = \{x \in A_{\beta'} : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\}$ ，于是并集公理引申出的 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义并不依赖于 $\beta$ 的选取

根据分类公理，对任意 $x \in \{x \in A_\beta : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\}$ ，有 $x \in \beta$ 且对任意 $\alpha \in I$ ，有 $x \in A_\alpha$ ，由于 $\beta \in I$ ，于是该命题等价于对任意 $\alpha \in I$ ，有 $x \in A_\alpha$ ，考虑取 $\beta' \in I$ 也应当有该命题成立即 $x \in A_{\beta'}$ 。于是得到 $x \in \{x \in A_{\beta'} : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\}$ ，反之同理。于是根据集合相等的定义有：

$$\{x \in A_\beta : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\} = \{x \in A_{\beta'} : \text{对任意 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\}$$

成立。

### 3.4.10 设 $I$ 与 $J$ 是两个集合，并且对于任意 $\alpha \in I \cup J$ ， $A_\alpha$ 是一个集合。证明：

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha; \text{ 如果 } I \text{ 与 } J \text{ 都是非空集合，证明：}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \text{ 与 } \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha:$$

对任意 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$ ，应当有 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 或 $x \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ ，于是有存在 $\alpha \in I$ 使得 $x \in A_\alpha$ 或者存在 $\alpha \in J$ 使得 $x \in A_\alpha \iff \text{存在 } \alpha \in I \text{ 或 } \alpha \in J \text{ 使得 } x \in A_\alpha \iff \text{存在 } \alpha \in I \cup J \text{ 使得 } x \in A_\alpha$ ，进而可以得到 $x \in \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$ 。

反过来，对任意 $x \in \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha \iff \text{存在 } \alpha \in I \cup J \text{ 使得 } x \in A_\alpha \iff \text{存在 } \alpha \in I \text{ 或 } \alpha \in J \text{ 使得 } x \in A_\alpha \iff \text{存在 } \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha \text{ 或者存在 } \alpha \in J \text{ 使得 } x \in A_\alpha \iff \text{有 } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ 或 } x \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ ，于是可以得到 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$ 。

综上, 根据集合相等的定义, 有 $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$ 成立。

$(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha)$ 与 $\bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$ :

对任意 $x \in (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha)$ , 应当有 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ , 于是有对任意 $\alpha \in I$ 有 $x \in A_\alpha$ 且对任意 $\alpha \in J$ 使得 $x \in A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ 与任意 $\alpha \in J$ 使得 $x \in A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I \cup J$ 有 $x \in A_\alpha$ , 进而可以得到 $x \in \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$ 。

反过来, 对任意 $x \in \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I \cup J$ 有 $x \in A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ 与任意 $\alpha \in J$ 都有 $x \in A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ 有 $x \in A_\alpha$ 且对任意 $\alpha \in J$ 有 $x \in A_\alpha \iff$ 有 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 且 $x \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ , 于是可以得到 $x \in (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha)$ 。

综上, 根据集合相等的定义, 有 $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I \cup J} A_\alpha$ 成立。

**3.4.11 设 $X$ 是一个集合,  $I$ 是一个非空集合, 并且对任意 $\alpha \in I$ ,  $A_\alpha$ 是 $I$ 的子集。证明:**

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) \\ X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha) \end{aligned}$$

将这个结论同[命题3.1.28](#)中的德摩根定律相对比 (尽管由于 $I$ 可能是无限集合, 使我们无法直接从德摩根定律中推出上式)。

$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 与 $\bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ :

对任意 $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 于是有 $x \in X$ 且 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in X$ 且对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \notin A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \in X$ 且 $x \notin A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \in X \setminus A_\alpha \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ 。

反过来, 对任意 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ , 有对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \in X \setminus A_\alpha \iff$ 对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \in X$ 且 $x \notin A_\alpha \iff x \in X$ 且对任意 $\alpha \in I$ ,  $x \notin A_\alpha \iff x \in X$ 且 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 即 $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

于是综上, 根据集合相等的定义, 可以得到 $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ 。

$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 与 $\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ :

对任意 $x \in X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 于是有 $x \in X$ 且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in X$ 且存在 $\alpha \in I$ ,  $x \notin A_\alpha \iff$ 存在 $\alpha \in I$ ,  $x \in X$ 且 $x \notin A_\alpha \iff$ 存在 $\alpha \in I$ ,  $x \in X \setminus A_\alpha \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ 。

反过来, 对任意 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ , 有存在 $\alpha \in I$ ,  $x \in X \setminus A_\alpha \iff$  对某个 $\alpha \in I$ ,  $x \in X$ 且 $x \notin A_\alpha \iff x \in X$ 且对某个 $\alpha \in I$ ,  $x \notin A_\alpha \iff x \in X$ 且 $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ , 即 $x \in X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

于是综上, 根据集合相等的定义, 可以得到 $X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$ 。

---

## 本节相关跳转

[实分析 3.1 基础知识](#)