6.3 序列的上确界与下确界

定义

1. (6.3.1 序列的sup与inf）设$a_n|_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，则定义$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$为集合E:

$$E = \{a_n : n \geq m\}$$

的**上确界**，并定义$\inf(a_n)_{n=m}^{\infty}$为同一个集合E的**下确界。**

命题

1. (6.3.6 最小上界性质）设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，且设x是广义实数有:

$$x := \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$$

那么$a_n \leq x$对所有$n \geq m$均成立，且只要$M \in \mathbb{R}^*$是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个上界（即对所有$n \geq m$均有$a_n \leq M$），则有$M \geq x$。最后，对每一个满足$y \leq x$的广义实数y，至少有存在一个$n \geq m$使得$y < a_n < x$。

2. (6.3.8 单调有界序列收敛）设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，它存在一个上界$M \in \mathbb{R}$，并且它还是单调递增的（即对全部$n \geq m$，均有$a_n + 1 > a_n$）。那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，并且实际上有:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq M$$

3. (6.3.10 一个特例？）设$0 < x < 1$，那么有:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

上式在$x > 1$时不成立。（课本例1.2.3的谜团之一）

课后习题