

2.3 乘法

定义

- (2.3.1 自然数的乘法) 令 m 表示任意一个自然数, 定义 $0 \times m := 0$ 表示把0乘到 m 上。归纳假设: 已定义如何将 n 乘到 m 上, 则定义 $(n++) \times m = (n \times m) + m$ 。
- (2.3.11 指数定义) 设 m 是一个自然数, 定义 $m^0 := 1$, 特别地, 定义 $0^0 := 1$, 归纳假设: 已定义 m 升到 n 次幂, 则定义 $m^{n++} := m^n \times m$ 。

命题

- (2.3.2 交换律) 令 m 与 n 为任意两个自然数, 有 $n \times m = m \times n$ 恒成立。
- (2.3.3 正自然数没有0因子) $m \times n = 0$, 当且仅当 m, n 中至少有一个为0, 特别地, 若 m, n 均为正数, 则 $m \times n$ 为正数。
- (2.3.4 分配律) 对任意自然数 a, b, c , 总有 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ 。
- (2.3.5 结合律) 对任意自然数 a, b, c , 恒有 $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ 成立。
- (2.3.6 正数乘法保持序不变) 如果满足 $a < b$, 且 c 为正数, 则有 $ac < bc$ 。
- (2.3.7 消去律) 设自然数 a, b, c 满足 $ac = bc$ 且 c 不为0, 则有 $a = b$ 。
(消去律的存在体现了一种“虚拟除法”的思想, 这对后面除法的定义至关重要)
- (2.3.9 欧几里得算法) 设 n 是一个自然数, q 表示一个正自然数, 则存在自然数 m 与 r 使得下述条件成立: $n = mq + r$ 且 $0 \leq r < q$ 。

课后习题

2.3.1 证明交换律 (提示: 参照加法交换律与其引理的证明)

分成3步:

- 证明对所有自然数 m , 有 $m \times 0 = 0$:

对 m 进行归纳:

$m = 0$ 时:

根据定义2.3.1有 $0 \times 0 = 0$, 于是对 $m = 0$ 的情况下得证

归纳性假设对 $m = n$ 的情况下成立, 对 $m = n++$ 时:

根据定义2.3.1, $(n++) \times 0 = n \times 0 + 0$ 。

依据归纳假设, 有 $n \times 0 = 0$ 。

于是 $(n++) \times 0 = 0 + 0 = 0$, 归纳假设得证

于是结论得证

- 证明对全体自然数 n 与 m , $n \times (m++) = (n \times m) + n$

假定 m 为某固定自然数, 对 n 进行归纳

$n = 0$ 时:

等式左端有 $0 \times (m++)$ 依据定义结果为0,

等式右端有 $0 \times m + 0 = 0 + 0 = 0$,

于是等式左右两端都等于0, 结论成立

归纳性假设对 $n = c$ 时成立结论, 对 $n = c++$ 时:

依据定义2.3.1, 可以得到:

等式左端有 $(c++) \times (m++) = c \times (m++) + (m++)$,

等式右端有

$(c++) \times m + (c++) = c \times m + m + (c++) = c \times m + ((m+c)++)$

,

根据归纳假设, 有 $c \times (m++) = c \times m + c$,

于是左端可化为

$c \times m + c + (m++) = c \times m + m + (c++) = c \times m + ((m+c)++)$

,

即等式两端均等于 $c \times m + ((m+c)++)$, 于是归纳假设得证

于是结论得证

3. 证明对任意两个自然数 m, n , 有 $n \times m = m \times n$ 恒成立

固定 m 为某自然数, 对 n 做归纳

对 $n = 0$ 时:

证明 $0 \times m = m \times 0$:

根据定义2.3.1与前1结论, $0 \times m = 0, m \times 0 = 0$, 于是得证。

归纳性假设对 $n = c$ 时成立结论, 对 $n = c++$ 时:

于是, 有:

左端 $(n++) \times m = n \times m + m$ (定义2.3.1)

右端 $m \times (n++) = m \times n + m$ (前2结论)

根据归纳假设, 有 $n \times m = m \times n$, 于是等式左右两端相等

于是归纳假设得证

于是结论得证

2.3.2 证明正自然数没有零因子的两个结论 (提示: 先证明第二个)

证明结论2:

根据正数乘法不改变序, 已知有 $m > 0, n$ 为正数, 于是 $m \times n > 0 \times n = 0$,

由此可知 $m \times n \neq 0 \wedge (m \times n) \in N$, 于是可以得证 $m \times n$ 也为正数。结论2得证

证明结论1:

反证法, 假设 m, n 均为正数, 于是由结论2必然有 $m \times n \neq 0$, 这同前置条件 $m \times n = 0$ 矛盾, 充分性得证

若 m, n 中至少存在一个为0, 可知有 $m \times 0, 0 \times n, 0 \times 0$ 三种情况, 可以验证得三种情况 $m \times n$ 均等于0, 于是必要性得证

证毕

2.3.3 证明结合律 (提示: 参考命题2.2.5的证明)

假定 c, b 均为某确定自然数, 对 a 做归纳

$a = 0$ 时:

有左端: $(0 \times b) \times c = 0 \times c = 0$, 右端: $0 \times (b \times c) = 0$, 均等于0, 于是得证结论

现在归纳性假设 $a = n$ 时成立结论, 讨论 $a = n++$ 时的情况:

左端: $((n++) \times b) \times c = (n \times b + b) \times c = (n \times b) \times c + b \times c$,

右端: $(n++) \times (b \times c) = n \times (b \times c) + b \times c$,

根据归纳假设有 $n \times (b \times c) = (n \times b) \times c$,

由此可得左端等于右端, 归纳假设得证

于是结论得证

2.3.4 证明等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 对任意自然数 a, b 成立

固定 a 为某自然数, 对 b 进行归纳:

$b = 0$ 时:

可知有左端 $(a+0)^2 = a^2$, 右端 $a^2 + 2a \times 0 + 0^2 = a^2$ 。可知等式成立。

归纳性假设对 $b = n$ 成立等式, 考虑 $b = n++$ 时的情况:

依据定义, 有:

式子左端:

$$(a + (n++))^2 = ((a+n)++)^2 = (a+n)^2 + (a+n) + ((a+n)++),$$

$$\text{式子右端: } a^2 + 2a(n++) + (n++)^2 = a^2 + 2an + 2a + n^2 + n + (n++)$$

$$\text{依据归纳假设, 有 } (a+n)^2 = a^2 + 2an + n^2$$

$$\text{于是使用消去律, 化简得到 } a+n+a+(n++) = a+n+((a+n)++),$$

于是成立, 归纳假设得证

于是得证

2.3.5 证明欧几里得算法 (提示: 固定 q 并对 n 做归纳)

固定 q 为某自然数, 对 n 做归纳:

对 $n = 0$ 时:

取 $r = 0, m = 0$ 即可成立 $0 = 0 \times q + 0$ 。于是得证。

现归纳性假设 $n = c$ 时成立结论 $n = m_0q + r_0$, 对 $n = c++$ 时, 有:

已知有 $c++ = m_0q + (r_0++)$, 现就 r 的情况做分类讨论:

$$1. r_0++ \neq q$$

此时选取 $m = m_0, r = r_0++$ 即有等式 $n = mq + r$ 成立。

$$2. r_0++ = q$$

$$\text{于是 } c++ = m_0q + q, \text{ 根据定义2.3.1可以得到 } c++ = (m_0++)q + 0$$

于是此时选取 $m = m_0++, r = 0$ 即可成立等式 $n = mq + r$ 。

于是归纳假设得证

于是欧几里得算法得证