8.1 可数性

公理

策梅洛-弗兰克尔-选择系统（终章）

> 1. （8.1 选择公理）设I是一个集合，并且对任意$\alpha \in I$，假设X_α是一个非空集合，那么集合$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$也是非空的。换言之，存在一个函数$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$对每个$\alpha \in I$指定了一个元素$x_\alpha \in X_\alpha$。

（虽然选择公理是8.4节的内容，但是这节的习题好多都要用到选择公理，故在此先贴出，在8.4节会再次重复一遍）

定义

1. （8.1.1 可数集）集合X是**可数无限的**（或简称**可数的**），当且仅当X与自然数集$\mathbb{N}$有相同的基数。集合X是**至多可数**的，当且仅当X是可数的或者是有限的。如果一个集合无限的并且不是可数的，则称这个集合是**不可数的**。（可数无限集也被称作可列集）

命题

1. （8.1.4 良序原理）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个非空子集，则恰好存在一个元素$n \in X$，使得对所有的$m \in X$均有$m \geq n$。换言之，对任意自然数集$\mathbb{N}$的非空子集均有一个最小元素。（由良序原理给出的元素n一般称作X的最小值，记为$\min(X)$，这个最小值显然与定义5.5.10中X的下确界是一致的）
2. （8.1.5）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个无限子集，那么存在唯一一个递增双射$f : \mathbb{N} \to X$（递增即对任意$n \in \mathbb{N}$，有$f(n+1) > f(n)$）。特别地，X与$\mathbb{N}$具有相同的基数，所以X是可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.6）自然数的所有子集都是至多可数的。
   > 2. （8.1.7）如果X是一个至多可数的集合，并且Y是X的一个子集，那么Y也是至多可数的。

3. （8.1.8）设Y是一个集合，并且$f : \mathbb{N} \to Y$是一个函数，那么$f(\mathbb{N})$是至多可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.9）设X是一个可数集，并且设$f : X \to Y$是一个函数。那么$f(X)$是至多可数的。

4. （8.1.10）设X是一个可数集，并且设Y也是一个可数集，那么$X \cup Y$也是一个可数集。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.11）整数集$\mathbb{Z}$也是一个可数集。

5. （8.1.12）集合$A := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n\}$是可数集。

   > 推论：

> 1. (8.1.13) 集合$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数集。
> 2. (8.1.14) 如果X和Y都是可数集，那么$X\times Y$也是可数集
> 3. (8.1.15) 有理数集$\mathbb{Q}$是可数集。

课后习题