7.1 有限级数

定义

1. (7.1.1 有限级数) 设m，n是整数，并且$(a_i)_{i=m}^{n}$是一个有限实数列。其中，对每一个m，n间的整数$i(m \le i \le n)$都指定了一个实数a_i，那么根据下述递推公式来定义**有限和（有限级数）**$\sum_{i=m}^{n} a_i$：

   > 1. $\sum_{i=m}^{n} a_i := 0 \quad (n < m)$。
   > 2. $\sum_{i=m}^{n+1} a_i := (\sum_{i=m}^{n} a_i) + a_{n+1} \quad (n \ge m-1)$。

2. (7.1.6 有限集上的求和运算) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in \mathbb{N}$），并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个从X到实数集$\mathbb{R}$的函数（即f对X中每一个元素x都指定了一个实数$f(x)$）。于是首先任意选取一个$\{i \in \mathbb{N}: 1 \le i \le n\}$到$X$的双射$g$（根据假定的$X$中有$n$个元素可以得知这样的双射是存在的）。则定义**有限和**$\sum_{x \in X} f(x)$为：

   $$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(g(i))$$

   （注：变量i（也称为**求和指标**）是一个**约束变量**（也作**虚拟变量**），表达式实际上并不依赖于任何被称为i的量。特别地，可以用任何其它符号代替求和指标i并得到同样的结果）

命题

1. (7.1.4 一些有限级数相关？) 下述命题成立：

   > 1. 设$m \le n \le p$都是整数，并且对任意的整数$i(m \le i \le p)$都指定了一个实数a_i，则有：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i$$
   >
   > 2. (指标不影响有限和？) 设$m \le n$都是整数，k是另一个整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$
   >
   > 3. (有限级数的加和？) 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了实数a_i和b_i，则：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$
   >
   > 4. (有限和的数乘？) 设$m \le n$都是整数，c是另一个实数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right)$$
   >
   > 5. (有限级数的三角不等式) 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了一个实数a_i，则：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} |a_i| \ge \left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right|$$
   >
   > 6. (有限级数的比较判别法) 设$m \le n$都是整数，并且对任意的整数$m \le i \le n$都指定了实数a_i和b_i。若对全部$m \le i \le n$有$a_i \le b_i$，则：
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} a_i \le \sum_{i=m}^{n} b_i$$

2. (7.1.8 有限求和是定义明确的) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in N$），并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且假设有$g: \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\} \to X$与$h: \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\} \to X$都是双射，则：

$$\sum_{i=1}^{n} f(g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(h(i))$$

(注：在无限集上的求和的时候，情况要更加复杂些，可以看8.2节)

3. (7.1.11 有限集上求和运算的基本性质) 下述命题是正确的：

> 1. (空函数) 如果X是空集，且$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数 (即f是空函数)，则有：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$
>
> 2. (单元素集) 如果X是由单独的一个元素构成的集合（即$X = \{x_0\}$），则有：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_0)$$
>
> 3. (替换法I) 若X是一个有限集，$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且$g: Y \to X$是一个双射，则：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(g(y))$$
>
> 4. (替换法II) 设$n \leq m$都是整数，且X为集合$X = \{i \in Z: n \leq i \leq m\}$，若是对每一个整数$i \in X$都指定了一个实数$a_i$，则：
>
> $$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{x \in X} a_i$$
>
> 5. (有限集求和加和？) 设X与Y是两个不相交的有限集（$X \cap Y = \varnothing$），且$f: X \cup Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X \cup Y} f(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right) + \left(\sum_{y \in Y} f(y)\right)$$
>
> 6. (线性性质I) 设X是一个有限集，并且设$f: X \to \mathbb{R}$和$g: X \to \mathbb{R}$都是函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$
>
> 7. (线性性质II) 设X是一个有限集，设$f: X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且设c是一个实数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \cdot \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)$$
>
> 8. (单调性) 设X是一个有限集，并且设$f: X \to \mathbb{R}$和$g: X \to \mathbb{R}$是使得$f(x) \leq g(x)$对全部$x \in X$成立的两个函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{x \in X} g(x)$$
>
> 9. (三角不等式) 设X是一个有限集，并且设$f: X \to \mathbb{R}$是函数，则：
>
> $$\sum_{x \in X} |f(x)| \geq \left|\sum_{x \in X} f(x)\right|$$

4. (7.1.13 笛卡尔积？) 设X与Y是有限集，且设$f: X \times Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in Y} f(x, y)\right) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y)$$

5. (7.1.14 有限级数的富比尼定理) 设X与Y是有限集，且设$f: X \times Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y} f(x,y)\right)\\
=&\sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)\\
=&\sum_{(y,x)\in Y\times X} f(x,y)\\
=&\sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X} f(x,y)\right)
\end{aligned}
$$

课后习题

7.1.1 证明引理 7.1.4（提示：利用归纳法，而且最基本的情形并不一定在0处）

>

7.1.2 证明命题7.1.11（提示：这个证明并不像看上去那么冗长，关键在于恰当的双射把这些集合上的和转换为有限级数，然后利用引理 7.1.4）

>

7.1.3 构造有限乘积 $\prod_{i=1}^{n} a_i$ 和 $\prod_{x\in X} f(x)$ 的定义。在上述关于有限级数的结论中，哪些对于有限乘积也有类似的结论？（注意，使用对数是有风险的，因为某些a_i或$f(x)$可能是0或者是负数。另外，我们还没有定义对数）

>

7.1.4 利用递归定义来定义关于自然数n的阶乘函数$n!$：$0!:=1$且$(n+1)!:=n!\times(n+1)$。如果x和y是实数，证明：二项式公式

$$
(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^jy^{n-j}
$$

对所有自然数 n 均成立（提示：对n使用归纳法）

> 我们对n进行归纳：
>
> 当$n=0$时：
>
> 左式有$(x+y)^0=1$，右式有$\sum_{j=0}^{0}\frac{0!}{j!(0-j)!}x^jy^{0-j}=\frac{0!}{0!0!}x^0y^0=1$，于是左式等于右式，结论成立。
>
> 现归纳性假设当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时：
>
> $$
> \begin{aligned}
> &(x+y)^{k+1}\\
> =&(x+y)^k(x+y)
> \end{aligned}
> $$
>
> 根据归纳假设，于是有$(x+y)^k=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{n-j}$，于是：
>
> $$
> \begin{aligned}
> &=(x+y)^k(x+y)\\
> &=(x+y)\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{k-j}\right)\\
> &=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j}+\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^jy^{k-j+1}\\
> &=x^{k+1}+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j}+\sum_{i=0}^{0}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i}\\
> &=x^{k+1}+y^{k+1}+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{j+1}y^{k-j}+\sum_{i=1}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}x^iy^{k+1-i}
> \end{aligned}
> $$
>
> 由于求和指标不影响有限级数，于是我们取$j\to i-1$，于是可以得到：

$$
\begin{aligned}
&= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{(i-1)!(k+1-i)!} x^i y^{k+1-j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k+1-i} \\
&= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{k!}{(i-1)!(k+1-i)!} + \frac{k!}{i!(k-i)!} \right) x^i y^{k+1-i} \right] \\
&= x^{k+1} + y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{k+1-i} \right) \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} x^i y^{k+1-i} \right] \\
&= \frac{(k+1)!}{0!(k+1)!} x^{k+1} + \frac{(k+1)!}{(k+1)!0!} y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{k+1}{i(k+1-i)} \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} x^i y^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i} + \sum_{i=0}^{0} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!((k+1)-i)!} x^i y^{(k+1)-i}
\end{aligned}
$$

即$n=k+1$时，结论依然成立。

综上，原式证明完毕。

7.1.5 设X是一个有限集，m是一个整数，并且对任意的$x \in X$，设$(a_n(x))_{n=m}^{\infty}$是一个收敛的实数序列。证明：序列$\left(\sum_{x \in X} a_n(x)\right)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，并且

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{x \in X} a_n(x) = \sum_{x \in X} \lim_{n \to \infty} a_n(x)$$

（提示：对X的基数使用归纳法，并利用定理6.1.19(a)）于是我们总是可以交换有限和与收敛极限的次序。但对于无限和，情况将更加复制。参见习题19.2.11

本节相关跳转

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 8.2 在无限集上求和

实分析 19.2 非负可测函数的积分