

6.1 收敛与极限定律

定义

1. (6.1.1 两个实数间的距离) 给定两个实数 x 和 y , 定义它们的距离为 $d(x,y)$, 有:

$$d(x, y) := |x - y|$$

2. (6.1.2 ε -接近的实数) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 称 x 与 y 是 ε -接近的, 当且仅当 $d(x, y) \leq \varepsilon$.

(这个 ε -接近性的定义与定义4.3.4的“ ε -接近性”是一致的)

3. (6.1.3 实数的柯西序列) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 则称从某个整数指标 N 开始的实数序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ε -稳定的, 当且仅当对任意 $j, k \geq N$ 都有 a_j 与 a_k 是 ε -接近的。

又有从某个整数指标 m 开始的实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 被称为是最终 ε -稳定的, 当且仅当存在一个整数 $N \geq m$ 使得 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ε -稳定的。

一个实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 被称为柯西序列, 当且仅当对每一个 $\varepsilon > 0$, 该序列都是最终 ε -稳定的。

(这些定义与有理数上的相关定义 (5.1.3, 5.1.6, 5.1.8) 是一致的, 在这两个意义下的有理数序列是一致的, 耳熟能详了已经)

4. (6.1.5 序列的收敛) 设 $\varepsilon > 0$ 是一个实数, 且 L 也是一个实数。称实数序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ε -接近于 L 的, 当且仅当对任意的 $n \geq N$, a_n 与 L 都是 ε -接近的, 即有 $d(a_n, L) \leq \varepsilon$ 。

称序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是最终 ε -接近于 L 的, 当且仅当存在一个 $N \geq m$ 使 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是 ε -接近于 L 的。

称序列 $(a_n)_{n=N}^{\infty}$ 是收敛于 L 的, 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 该序列都是最终 ε -接近于 L 的。

(展开的表述: 称序列 $a_n|_{n=N}^{\infty}$ 是收敛于 L 的, 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N \geq m$ 使得 $|a_n - L| \leq \varepsilon$ 对所有的 $n \geq N$ 成立)

5. (6.1.8 序列的极限) 如有序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于实数 L , 那么序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的且它的极限为 L , 用下式表示:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

6. (6.1.16 有界序列) 实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 以实数 M 为界, 当且仅当存在有 $|a_n| \leq M$ 对全部 $n \geq m$ 成立。称实数序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是有界的, 当且仅当存在某个实数 $M > 0$ 使得该序列以 M 为界。

(该定义同样可以证明与定义5.1.12是一致的)

命题

1. (6.1.4 柯西序列的定义是一致的?) 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是从某个整数指标开始的有理数序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是定义5.1.8下的柯西序列, 当且仅当它是定义6.1.3下的柯西序列。
2. (6.1.7 极限的唯一性) 设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是从某个整数指标开始的实数序列, 且有 $L \neq L'$ 是两个不同的实数, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 不可能同时收敛于 L 和 L' 。
3. (6.1.11 收敛实例?) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。
4. (6.1.12 收敛序列也是柯西序列) 假设 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是一个收敛的实数序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 也是一个柯西序列。
5. (6.1.15 形式极限是真正的极限) 假定有 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是某个有理数的柯西序列, 那么 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 即有:

$$\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(如同之前在定义有理数, 整数一样, 于此形式极限被真正的极限替代, 如同形式减法被真正的减法替代, 如同形式除法被真正的除法替代)

6. (6.1.17 引理5.1.15推论) 每一个收敛的实数序列都是有界的。

7. (6.1.19 极限定律) 设有 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 与 $(b_n)_{n=m}^{\infty}$ 是收敛的实数序列, 并且设实数 x, y 有 $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与 $y := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

◦ 序列 $(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x + y$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = x + y$$

◦ 序列 $(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 xy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = xy$$

◦ 对任意实数 c , 序列 $(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $c \cdot x$, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

◦ 序列 $(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $x - y$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = x - y$$

◦ 设 $y \neq 0$, 且对全部 $n \geq m$ 都有 $b_n \neq 0$, 则序列 $(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 y^{-1} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{-1} = (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)^{-1}$$

◦ 设 $y \neq 0$, 且对全部 $n \geq m$ 都有 $b_n \neq 0$, 则序列 $(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 x/y :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = x/y$$

◦ 序列 $(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\max(x, y)$, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$

◦ 序列 $(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$ 收敛于 $\min(x, y)$, 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

课后习题

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算](#)

[实分析 5.1 柯西序列](#)