8.3 不可数集

命题

1. (8.3.1 康托尔定理) 设X是任意一个集合（可以是有限集，也可以是无限集），那么集合X与集合2^X不可能拥有同样的基数。

   (注：2^X是X的幂集，也即X所有子集的集合，具体可以参考引理3.4.9)

2. (8.3.3 康托尔定理推论其一？) $2^{\mathbb{N}}$是不可数集。

3. (8.3.4 康托尔定理推论其二？) $\mathbb{R}$是不可数集。

(注：关于推论8.3.4有一些不在学习要求但是很有意思的事情，由推论8.3.4我们可以得到实数集$\mathbb{R}$的基数是严格大于自然数集$\mathbb{N}$的，由此可以延伸出一个有趣的问题，即：是否存在一类无限集，它们的基数介于自然数集与实数集之间，连续统假设断言不存在这样的集合。这个假设独立于集合论的其它公理，也即既不能被那些公理证明，也不能被那些公理否定。有兴趣可以自行了解。)

课后习题

8.3.1 设X是一个基数为n的有限集，证明：2^X是一个基数为2^n的有限集。（提示：对n使用归纳法）

8.3.2 设A，B，C是满足$A \subseteq B \subseteq C$的集合，并且假设存在一个单射$f: C \to A$。如下递归地定义集合$D_0$，$D_1$，$\ldots$；令$D_0 := B \backslash A$，且对所有的自然数$n$令$D_{n+1} := f(D_n)$。证明：集合$D_0$，$D_1$，$\ldots$是互不相交的集合（即只要$n \neq m$，就有$D_n \cap D_m = \varnothing$）。同时证明：如果$g: A \to B$被定义为如下函数：当$x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := f^{-1}(x)$；当$x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$时，令$g(x) := x$，那么$g$的确是把$A$映射到$B$的一个双射。特别的，$A$和$B$有相同的基数。

8.3.3 回顾习题3.6.7，称集合A的基数小于或等于集合B的基数，当且仅当存在一个从A到B的单射$f: A \to B$。利用习题8.3.2证明：如果集合A的基数小于或等于集合B的基数，并且集合B的基数也小于或等于集合A的基数，那么A和B有相同的基数（这被称作施罗德—伯恩斯坦定理，该定理以恩斯特·施罗德（1841—1902）和费利克斯·伯恩斯坦（1878—1956）的名字来命名）。

8.3.4 如果集合A的基数小于或等于集合B的基数（根据习题 3.6.7），但A的基数与B的基数不相同，那么我们称集合A的基数严格小于集合B的基数。证明：对任意的集合X，X的基数都严格小于2^X的基数。同时证明：如果集合A的基数严格小于集合B的基数，且集合B的基数严格小于集合C的基数，那么集合A的基数严格小于集合C的基数。

8.3.5 证明：不存在可数无限的幂集（集合X的幂集就是形如2^X的集合）

本节相关跳转

[实分析 3.4 象和逆象]

[实分析 3.6 集合的基数]