6.6子序列

定义

1. (6.6.1 子序列) 设有实数序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，称有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列，当且仅当存在一个严格递增（即对$\forall n \in \mathbb{N}$，均有$f(n+1) > f(n)$）的函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得有：

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{f(n)}$$

（注：定义这里不对f做过多的假设，尽管它必然是一个单射）

命题

1. (6.6.4 自反与传递？) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是实数序列，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。

   另外若有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，那么$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。
2. (6.6.5 与极限相关联的子序列) 假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - 序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L。
   > - $(a_n)_{n=0}^{\infty}$的每一个子序列都收敛于L。

3. (6.6.6 与极限点相关的子序列) 假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点。
   > - 存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列收敛于L。

4. (6.6.8 波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个有界序列（即存在一个实数$M > 0$使得$|a_n| \le M$对全体$n \in \mathbb{N}$成立），那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$至少有一个收敛的子序列。

   (注：波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理说明了如果一个序列是有界的，那么它**最终将收敛于某些地方**，**无法散布到广阔的空间中**，也**无法阻止自己捕获极限点**)

课后习题