

5.5 最小上界性质

定义

1. (5.5.1 上界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 并假设 M 是一个实数。称 M 是 E 的一个**上界**, 当且仅当对于 E 中任意一个元素 x , 均有 $x \leq M$ 。
2. (5.5.5 最小上界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 且 M 是一个实数。称 M 是 E 的**最小上界**, 当且仅当下述两个命题同时成立:
 - M 是 E 的一个上界。
 - E 的任意其它上界 M' 一定大于或等于 M 。
3. (5.5.10 上确界) 设 E 是实数集的一个子集, 如果 E 是非空的并且存在一个上界, 则定义 $\sup(E)$ 为 E 的最小上界 (由定理2可知, 该定义是明确的)。额外引入两个符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 。如果 E 是非空的并且没有上界, 则令 $\sup(E) := +\infty$; 如果 E 是空集, 则定义 $\sup(E) := -\infty$, 称 $\sup(E)$ 是 E 的**上确界**, 也可以记作 $\sup E$ 。
4. (无编号 下界与下确界) 同样的, 可以类似定义5.5.1, 5.5.5, 5.5.10地定义集合的**下界**, **最大下界**与**下确界**及其相关命题与定理, 下确界记作 $\inf(E)$ 或 $\inf E$ 。
(这个看个人发挥了, 就是改改内容而已)

命题

1. (5.5.8 最小上界的唯一性) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 则 E 最多有一个最小上界。
2. (5.5.9 最小上界的存在性) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个非空子集, 如果 E 有一个上界, 那么它必定恰好有一个最小上界。
3. (5.5.12 优越性?) 存在一个正实数 x , 有 $x^2 = 2$ 。

课后习题
