

## 2.1 皮亚诺公理

### 定义

1. (2.1.1 非正式的) 自然数是集合

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

的元素，其中集合 $\mathbb{N}$ 是从0开始，无休止前进计数所构成的集合，其中称 $\mathbb{N}$ 为**自然数集**。

2. (2.1.3 数?) 定义1为数 $0++$ ，2为数 $(0++)++$ ，3为数 $((0++)++)++$ ，等等。  
(换言之就是定义 $1 := 0++$ ， $2 := 1++$ ， $3 := 2++\dots$ ，(在本书中日后都会使用 $x:=y$ 表示命题“令 $x$ 的值为 $y$ ”。))

### 公理

#### 皮亚诺公理

1. (2.1) 0是一个自然数。
2. (2.2) 如果 $n$ 是一个自然数，那么 $n++$ 也是一个自然数。
3. (2.3) 0不跟随在任何自然数之后，等价于对任意自然数 $n$ ， $n++ \neq 0$ 。

(该公理用于防止自然数系出现首尾相接的循环现象)

4. (2.4) 对于不同的自然数而言，紧跟其后的数字也一定不同，即对任意自然数 $n$ 与 $m$ ，若有 $n \neq m$ ，则有 $n++ \neq m++$ 。

(对任意的自然数，不存在由该自然数开始后面出现循环的可能)

5. (2.5 数学归纳法原理) 令 $P(n)$ 表示自然数 $n$ 的某一性质，若 $P(0)$ 为真且 $P(n)$ 为真时 $P(n++)$ 为真，则对任意自然数 $n$ ， $P(n)$ 为真。

(数学归纳法原理严格上来说应该被称为公理模式而非公理，根据数学归纳法你可以构造出无穷多个公理)

归纳法公理证明模板

命题：对任意的自然数 $n$ ，性质 $P(n)$ 为恒为真

证明：使用数学归纳法证明

首先证明 $n = 0$ 时的情况：

(插入证明 $P(0)$ 为真的证明)

现归纳性假设 $n$ 为某一个自然数，并且有 $P(n)$ 为真，此时证明 $P(n++)$ 为真：

(插入在 $P(n)$ 为真的前提下，证明 $P(n++)$ 为真的证明)

于是归纳得证，因此对任意自然数 $n$ ， $P(n)$ 恒为真

(自然数系 $\mathbb{N}$ 中所有元素 $n$ 均有皮亚诺公理的成立)

### 命题

1. (2.1.4) 3是一个自然数。

2. (2.1.6) 4不等于0。
3. (2.1.8) 6不等于2。
4. (2.1.16 递归定义) 假设对任意自然数 $n$ , 存在某由自然数系到自然数系的函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 令 $c$ 为某个固定的自然数, 则对任意自然数 $n$ , 都可确定唯一自然数 $a_n$ , 使 $a_0 = c$ 以及 $a_{n++} = f_n(a_n)$ 恒成立。

(递归定义是非常强大的, 它不仅可以帮助构建需要的数列, 还可以用于接下来加法, 乘法的定义)