5.6 实数的指数运算 I

定义

1. (5.6.1 实数的自然数次幂) 设x是一个实数，为了把x升到0次幂，我们定义$x^0 := 1$。现归纳假设对于某个自然数n已经定义了x^n，则定义$x^{n+1} := x^n \cdot x$。
2. (5.6.2 实数的整数次幂) 设x是一个非零实数，那么对任意的负整数$-n$，定义$x^{-n} := \frac{1}{x}^n$。
3. (5.6.4 n次根？) 设$x \geq 0$是一个非负实数，且$n \geq 1$是一个正整数，则定义$x^{\frac{1}{n}}$（也称作x的n次根）为：

   $$x^{\frac{1}{n}} := \sup\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \text{且} y^n \leq x\}$$

   另外一般将$x^{\frac{1}{2}}$写作$\sqrt{x}$。
   （注：本书不定义负数的n次方根，因为只有定义了复数才可以定义负数的n次方根，然而本书并不讲复数这方面内容）
4. (5.6.7 向有理数的拓展？) 设$x > 0$是一个正实数，q是一个有理数。由有理数定义令$q = \frac{a}{b}$，其中a是整数，b是正整数。此时定义：

   $$x^q := (x^{\frac{1}{b}})^a$$

命题

1. (5.6.3 实数幂的运算性质) 对命题（4.3.10，4.3.12）中有理数x，y替换成实数x，y后这两个命题中的所有性质依旧是成立的。

   （内容见下）

   > 1. (4.3.10 指数的运算性质I) 设x与y为非零实数，并设n和m为自然数，则有：
   >
   >   > - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
   >   > - 若$x \geq y \geq 0$，则有$x^n \geq y^n \geq 0$，若$x > y \geq 0$且$n > 0$时，则有$x^n > y^n \geq 0$。
   >   > - 若$n > 0$，则$x^n = 0$当且仅当$x = 0$。
   >   > - 有$|x^n| = |x|^n$。
   >
   > 2. (4.3.12 指数的运算性质II) 设x与y为非零实数，并设n和m为**整数**，则有：
   >
   >   > - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
   >   > - 若$x \geq y \geq 0$，则当n正数时有$x^n \geq y^n > 0$，当n负数时有$0 < x^n \leq y^n$。
   >   > - 若x，$y > 0$，$n \neq 0$并且$x^n = y^n$，那么$x = y$。
   >   > - 有$|x^n| = |x|^n$。

2. (5.6.5 n次根的存在性) 设$x \geq 0$是一个非负实数且$n \geq 1$是一个正整数，那么集合$\{y \in R : y \geq 0 \text{且} y^n \leq x\}$是非空的并且有上界的，特别地，$x^{\frac{1}{n}}$是一个实数。
3. (5.6.6 整数次根的运算性质？) 设x，$y \geq 0$是非负实数，且n，$m \geq 1$是正整数。

   > - 如果$y = x^{\frac{1}{n}}$，那么$y^n = x$。
   > - 如果$y^n = x$，则$y = x^{\frac{1}{n}}$。
   > - $x^{\frac{1}{n}}$是一个非负实数。

> - $x > y$，当且仅当$x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$。
> - 如果$x > 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个减函数；如果$x < 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个增函数；如果$x = 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$对所有的k均有$x^{\frac{1}{k}} = 1$。
> - $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}$。
> - $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{nm}}$。

4. （5.6.8 有理数次幂的形式不变性？）设a，a'均为整数，b，b'均为正整数，并且有$a/b = a'/b'$。设x是一个正实数，则有：

$$x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{a'}{b'}}$$

5. （5.6.9 有理数次幂的运算性质？）设x，$y > 0$是正实数，且q与r是有理数，则：

> - x^q是一个正实数。
> - $x^{q+r} = x^q \cdot x^r$且有$x^{qr} = (x^q)^r$。
> - $x^{-q} = \frac{1}{x^q}$。
> - 如有$q > 0$，则$x > y$当且仅当$x^q > y^q$。
> - 如有$x > 1$，则$x^q > x^r$当且仅当有$q > r$；如有$x < 1$，则$x^q > x^r$当且仅当有$q < r$。

（值得一提本节的元证明确实很有意思，可以多看看学习学习（可惜网上没百科））

课后习题

5.6.1 证明引理5.6.6（提示：回顾命题5.5.12的证明过程；同时你可能会发现反证法是一个相当有用的证明工具，特别是将它同命题5.4.7序的三歧性与命题5.4.12结合使用的时候；可以使用前面的结论来证明后面的结论；对于第5条结论，首先证明$x > 1$时$x^{\frac{1}{n}} > 1$，以及$x < 1$时$x^{\frac{1}{n}} < 1$）

> - 如果$y = x^{\frac{1}{n}}$，那么$y^n = x$。
>
> （证明要用到习题7.1.4的二项式定理，有限级数的概念并不需要用到第五章后的内容，所以至少在这里使用算是合乎规矩的）
>
> 使用反证法，我们假设此时有$y^n \neq x$，那么根据实数序的三歧性，必然有$y^n > x$或者$y^n < x$成立。
>
> 若$y^n < x$，对于一个很小的正数ε（至少它绝对小于1和y），考虑$(y+\varepsilon)^n$，有：
>
> $$(y+\varepsilon)^n = y^n + ny^{n-1}\varepsilon + \ldots + ny\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n$$
>
> 由于$\varepsilon < \min(1, y)$，于是我们可以得到对任意整数$m \neq 0$，总有$y^{n-m}\varepsilon^m \leq y^{n-1}\varepsilon(\iff \varepsilon^{m-1} \leq y^{m-1})$，于是放缩有：
>
> $$y^n + ny^{n-1}\varepsilon + \ldots + ny\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n \leq y^n + ny^{n-1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-1}\varepsilon + \ldots + ny^{n-1}\varepsilon + y^{n-1}\varepsilon$$
>
> 根据二项式定理，可以继续化简得到：
>
> $$y^n + ny^{n-1}\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-1}\varepsilon + \ldots + ny^{n-1}\varepsilon + y^{n-1}\varepsilon = y^n + (2^n - 1)y^{n-1}\varepsilon$$
>
> 于是取$\varepsilon = \dfrac{x - y^n}{2^n y^{n-1}}$时，我们有：
>
> $$y^n < (y+\varepsilon)^n \leq y^n + (2^n - 1)y^{n-1}\varepsilon < x$$

即$y+\varepsilon \in \{y' \in \mathbb{R} : y'^n \le x\}$，又$y+\varepsilon > y$，于是$y^n < x$时$y$必然不会是集合$\{y' \in \mathbb{R} : y'^n \le x\}$的最小上界，从而根据定义不可能有$y = x^{\frac{1}{n}}$。

若$y^n > x$，对于一个很小的正数ε（至少它绝对小于1和y），考虑$(y-\varepsilon)^n$：

$$(y-\varepsilon)^n = y^n - ny^{n-1}\varepsilon + \ldots + (-1)^n\varepsilon^n$$

结合上面的，再次利用$y^{n-m}\varepsilon^m \le y^{n-1}\varepsilon(\iff \varepsilon^{m-1} \le y^{m-1})$我们可以化简得到：

$$\begin{aligned}(y-\varepsilon)^n &= y^n - ny^{n-1}\varepsilon + \ldots + (-1)^n\varepsilon^n \\ &\ge y^n - ny^{n-1}\varepsilon - \ldots - \varepsilon^n \text{ (对所有正项取负)} \\ &\ge y^n - ny^{n-1}\varepsilon - \ldots - y^{n-1}\varepsilon \text{ (替换所有}y^{n-a}\varepsilon^a\text{为}y^{n-1}\varepsilon) \\ &= y^n - (2^n-1)y^{n-1}\varepsilon\end{aligned}$$

此时我们取$\varepsilon = \dfrac{y^n - x}{2^n y^{n-1}}$，那么就会得到有$y^n > (y-\varepsilon)^n \ge y^n - (2^n-1)y^{n-1}\varepsilon > x$，于是$y-\varepsilon$也是集合$\{y' \in \mathbb{R} : y'^n \le x\}$的一个上界（因为对任意集合中元素$z$，$z^n \le x \le (y-\varepsilon)^n \iff z \le y-\varepsilon$），于是$y \ne \sup\{y' \in \mathbb{R} : y'^n \le x\}$，即根据定义，此时不可能有$y = x^{\frac{1}{n}}$。

综上，根据反证结论当$y = x^{\frac{1}{n}}$时，只能有$y^n = x$成立。

- 如果$y^n = x$，则$y = x^{\frac{1}{n}}$。

使用反证法，不妨假设此时有$y \ne x^{\frac{1}{n}}$，那么应该有$y > x^{\frac{1}{n}}$或$y < x^{\frac{1}{n}}$成立。

若$y > x^{\frac{1}{n}}$，于是根据命题5.6.3与结论(a)，有$(x^{\frac{1}{n}})^n < y^n$，即$x < y^n$，这同前置条件$x = y^n$矛盾。

若$y < x^{\frac{1}{n}}$，于是根据命题5.6.3与结论(a)，有$(x^{\frac{1}{n}})^n > y^n$，即$x > y^n$，这也同前置条件$x = y^n$矛盾。

于是综上，当$y^n = x$时，必然只能有$y = x^{\frac{1}{n}}$成立。

- $x^{\frac{1}{n}}$是一个非负实数。

若$x \ge 1$，那么$1^n = 1 \le x$，此时我们有$1 \in \{y \in \mathbb{R} : y \ge 0\text{且}y^n \le x\}$，又根据$x^{\frac{1}{n}} = \sup\{y \in \mathbb{R} : y \ge 0\text{且}y^n \le x\}$，于是此时必然有$x^{\frac{1}{n}} \ge 1$成立。

若$0 \le x < 1$，那么根据正的乘法保持序不变，于是可以得到对任意$n \ge 1$，$x^n \ge x^{n+1}$，进而可以归纳得证有$x^n \le x$对任意$n \ge 1$成立，于是$x \in \{y \in \mathbb{R} : y \ge 0\text{且}y^n \le x\}$，于是根据最小上界的性质必然有$x^{\frac{1}{n}} \ge x \ge 0$。

综上，总有$x^{\frac{1}{n}} \ge 0$，即$x^{\frac{1}{n}}$是一个非负实数。

- $x > y$，当且仅当$x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$。

不妨令有$x^{\frac{1}{n}} = a$，$y^{\frac{1}{n}} = b$，于是根据结论1此时有题目命题转化为$a^n > b^n$当且仅当$a > b$，根据命题5.6.3，这样的结论是正确的，于是得证。

- 如果$x > 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个减函数；如果$x < 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个增函数；如果$x = 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$对所有的k均有$x^{\frac{1}{k}} = 1$。

对任意k，不妨令$a_k = x^{\frac{1}{k}}$。

如果有$x=1$，对任意k，我们总有$(a_k)^k=(1^{\frac{1}{k}})^k=1=1^k$，那么根据命题5.6.3，$(a_k)^k=1^k$当且仅当$a_k=x^{\frac{1}{k}}=1$，于是结论得证。

当$x>1$时，根据结论(d)有$x^{\frac{1}{n}}>1^{\frac{1}{n}}=1$；同理，$x<1$时根据结论(d)有$x^{\frac{1}{n}}<1^{\frac{1}{n}}=1$。如果有$x\neq 1$，那么我们对任意$k$，根据结论(d)，我们有$a_k$与$a_{k+1}$之间的序关系与$(a_k)^k$与$(a_{k+1})^k$之间的序关系相同，并且$(a_k)^k=x$，$(a_{k+1})^k=\dfrac{x}{a_{k+1}}$。于是根据上面的结论，我们有：

> - 当$x>1$时，$a_{k+1}>1 \iff x>\dfrac{x}{a_{k+1}}$，于是通过结论(d)有$x^{\frac{1}{k}}>x^{\frac{1}{k+1}}$对任意$k$成立，即$x^{\frac{1}{k}}$是关于$k$的一个减函数。
> - 当$x<1$时，$a_{k+1}<1 \iff x<\dfrac{x}{a_{k+1}}$，于是通过结论(d)有$x^{\frac{1}{k}}<x^{\frac{1}{k+1}}$对任意$k$成立，即$x^{\frac{1}{k}}$是关于$k$的一个增函数。

于是综上，结论得证。

- $(xy)^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}}$。

不妨令$a=(xy)^{\frac{1}{n}}$，$b=x^{\frac{1}{n}}$，$c=y^{\frac{1}{n}}$。于是根据结论(c)有a，b，c都是非负实数，结合命题5.6.3与结论(a)，我们有：

$$a^n=b^nc^n=(bc)^n$$

于是$a=bc \iff (xy)^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}}$，结论得证。

- $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{1}{nm}}$。

不妨令$a=x^{\frac{1}{nm}}$，$b=(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$。于是根据结论(c)有$a$，$b$都是非负实数，结合命题5.6.3与结论(a)，我们有：

$$a^{nm}=(b^m)^n=b^{nm}$$

于是$a=b \iff (x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{1}{nm}}$。

5.6.2 证明引理5.6.9 **（提示：主要利用了引理5.6.6与代数法则）**

- x^q是一个正实数。

将q表示为$q=a/b$，其中a，b是整数且$b\neq 0$，根据有理数次幂的定义，有$x^q=(x^{\frac{1}{b}})^a$。根据引理5.6.6(c)，于是$x^{\frac{1}{b}}$是一个正实数，从而根据命题5.4.4可以归纳得到$(x^{\frac{1}{b}})^a$也是正的。

- $x^{q+r}=x^q\cdot x^r$且有$x^{qr}=(x^q)^r$。

$x^{q+r}=x^q\cdot x^r$：

不妨令有$q=a/b$，$r=c/d$，其中a，c为整数，b，d为正整数。于是根据有理数次幂的定义，原命题等价于$(x^{\frac{1}{bd}})^{ad+cb}=(x^{\frac{1}{bd}})^{ad}(x^{\frac{1}{bd}})^{cb}$，令$e=x^{\frac{1}{bd}}$，于是原命题等价于$(e)^{ad+cb}=(e)^{ad}(e)^{cb}$，于是根据命题5.6.3可以得证有$x^{q+r}=x^q\cdot x^r$成立。

$x^{qr}=(x^q)^r$：

不妨令有$q=a/b$，$r=c/d$，其中a，c为整数，b，d为正整数。由有理数次幂的定义，原命题等价于$(x^{\frac{1}{bd}})^{ac}=(((x^{\frac{1}{b}})^a)^{\frac{1}{d}})^c$，若$c=0$，则可以直接计算得到$x^{qr}=(x^q)^r \iff 1=1$显然成立；若$c\neq 0$，则由命题5.6.6我们可以变形有：

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{1}{bd}})^{ac} &= (((x^{\frac{1}{b}})^a)^{\frac{1}{d}})^c \\
&\Updownarrow \quad \boxed{y^c = x \Rightarrow y = x^{\frac{1}{c}}} \\
(x^{\frac{1}{bd}})^{a} &= ((x^{\frac{1}{b}})^a)^{\frac{1}{d}} \\
&\Updownarrow \quad \boxed{y = x^{\frac{1}{d}} \Rightarrow y^d = x} \\
(x^{\frac{1}{bd}})^{ad} &= (x^{\frac{1}{b}})^a \\
&\Updownarrow \quad \text{定义}5.6.7\text{转成有理数幂次形式} \\
x^{\frac{ad}{bd}} &= x^{\frac{a}{b}}
\end{aligned}$$

根据命题5.6.8，我们有$x^{\frac{ad}{bd}} = x^{\frac{a}{b}}$成立，于是与该命题等价的$x^{qr} = (x^q)^r$也成立。

- $x^{-q} = \frac{1}{x^q}$。

根据结论(b)我们应该有原命题等价于$x^{-q} \cdot x^q = \dfrac{1}{x^q} \cdot x^q \iff x^{q-q} = 1 \iff x^0 = 1$，根据定义5.6.1我们知道$x^0 = 1$恒为真。于是由题目命题与$x^0 = 1$等价可以得到$x^{-q} = \dfrac{1}{x^q}$也为真。

- 如有$q > 0$，则$x > y$当且仅当$x^q > y^q$。

不妨令有$q = a/b$，其中a，b是整数且$b \neq 0$。于是此时根据定义5.6.7可以得到原命题等价于：如有$a > 0$，则我们有$x > y$当且仅当$(x^{\frac{1}{b}})^a > (y^{\frac{1}{b}})^a$。不妨令$c = x^{\frac{1}{b}}$，$d = y^{\frac{1}{b}}$，根据命题5.6.6有$x > y$当且仅当$c > d > 0$，于是原命题又等价于：如有$a > 0$，则$c > d$当且仅当$c^a > d^a$，根据命题5.6.6我们知道该结论得证。

- 如有$x > 1$，则$x^q > x^r$当且仅当有$q > r$；如有$x < 1$，则$x^q > x^r$当且仅当有$q < r$。

不妨令有$q = a/b$，$r = c/b$，其中a，c为整数，b为正整数（这样的假设是为了方便处理，事实上，即使任取整数使得$q = d/e$，$r = f/g$，你也可以令$a = dg$，$b = eg$，$c = fe$来变形得到我们的假设，因此这样的假设是严谨的）。于是原命题等价于：如有$x > 1$，则$(x^{\frac{1}{b}})^a > (x^{\frac{1}{b}})^c$当且仅当有$a > c$；如有$x < 1$，则$(x^{\frac{1}{b}})^a > (x^{\frac{1}{b}})^c$当且仅当有$a < c$。

此时我们令$d = x^{\frac{1}{b}}$，根据习题5.6.1中的证明我们有：$x > 1$当且仅当$d > 1$；$x < 1$当且仅当$d < 1$。于是原结论等价于：如有$d > 1$，则$(d)^a > (d)^c$当且仅当有$a > c$；如有$x < 1$，则$(d)^a > (d)^c$当且仅当有$a < c$。于是分类讨论，应该有：

> - $d > 1$，于是$d^{a-c} > 1$当且仅当$a - c > 0 \iff a > c$。
> - $d < 1$，于是$d^{a-c} > 1$当且仅当$a - c < 0 \iff a < c$。

于是结论得证。

5.6.3 证明：如果x是一个实数，那么$|x| = (x^2)^{\frac{1}{2}}$

对x分类讨论：

> - $x = 0$，那么$|x| = 0$，$(x^2)^{\frac{1}{2}} = (0)^{\frac{1}{2}} = 0$，于是成立结论。
> - $x > 0$，于是$|x| = x$，根据命题5.6.6并且x非负，于是$(x^2)^{\frac{1}{2}} = x$，于是成立结论。
> - $x < 0$，于是$|x| = -x$，并且我们有$(-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2$，由命题5.6.6与$-x$非负，于是$(x^2)^{\frac{1}{2}} = ((-x)^2)^{\frac{1}{2}} = -x$，于是成立结论。

综上，结论成立。

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]

[实分析 5.4 对实数排序]

[实分析 5.5 最小上界性质]