5.1 柯西序列

定义

1. （5.5.1 序列）设m是一个整数。有理数序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$是一个从集合$\{n \in Z : n \geq m\}$到$\mathbb{Q}$的函数，它对每一个大于或等于m的整数n都指定了一个有理数a_n。（即$n \to a_n$）
2. （5.1.3 ϵ-稳定性）设$\epsilon > 0$，序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$是ϵ-稳定的，当且仅当元素中每一对a_j与a_k对任意的自然数j与k都是ϵ-接近的（见上一章4.3节定义4.3.4）。或者说序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$是ϵ-稳定的，当且仅当$d(a_j, a_k) \leq \epsilon$对任意的自然数$j$，$k$均成立。

   （注：在文献中，这个定义并不是标准定义。在本节之外，我们也不会用到这个定义，下文最终ϵ-稳定性的定义也是如此）
3. （5.1.6 最终ϵ-稳定性）设$\epsilon > 0$，称序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$是最终ϵ-稳定的，当且仅当存在某个自然数$N \geq 0$使得a_N，a_{N+1}，......是ϵ-稳定的。
4. （5.1.8 柯西序列）有理数序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$被称为是**柯西序列**，当且仅当对任意**有理数**$\epsilon > 0$，序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$是最终ϵ-稳定的。

   （注：事实上对上加粗部分最终可证明ϵ为实数时结论依旧成立，不过在这里，我们还没有给出实数的定义）
5. （5.1.12 有界序列）设$M \geq 0$是有理数，称序列a_1，a_2，......，a_n以M为界，当且仅当
   $|a_i| \leq M$
   对任意$1 \leq i \leq n$成立，类似地可以定义无限序列$a_n|_{n=1}^{\infty}$的有界性。

命题

1. （5.1.11 例子？）定义$a_n := \frac{1}{n}$的序列a_1，a_2，a_3，......（即序列1，$1/2$，$1/3$，.......）是柯西序列。
2. （5.1.14 有限序列是有界的）任意一个**有限序列**都是有界的。
3. （5.1.15 柯西序列是有界的）任意一个**柯西序列**都是有界的。

课后习题

本节相关跳转

实分析 4.3 绝对值与指数运算