4.1 整数

定义

1. (4.1.1 整数) **整数**是形如$a—b$的表达式，其中a与b都是自然数。另假设另一个整数$c—d$，两个整数被看做是相等的，当且仅当$a+d$=$b+c$。令$\mathbb{Z}$表示由全体整数构成的集合。
2. (4.1.2 整数的运算) 两个整数$(a—b)$与$(c—d)$的和由下述表达式定义：

$$(a—b)+(c—d):=(a+c)—(b+d)$$

   两个整数$(a—b)$与$(c—d)$的积由下述表达式定义：

$$(a—b)\times(c—d):=(ac+bd)—(ad+bc)$$

> 注：整数$n—0$与自然数n具有相同的性质，不但可以证明$(n—0)+(m—0)=(n+m)—(0+0)$与$(n—0)\times(m—0):=(nm+0\cdot 0)—(0\cdot n+0\cdot m)$，且有$n—0=m—0$当且仅当$n=m$（用数学语言表示那就是整数$n—0$与自然数$n$存在一个**同构**）。于是可以通过令$n\equiv n—0$来把自然数和整数**等同**起来，并且这样的等同并不会影响到前面所定义的加法，乘法，相等等定义，因为它们之间是一致的。

3. (4.1.4 整数的负运算) 如果$(a—b)$是一个整数那我们定义它的负数$-(a—b)$为整数$(b—a)$，特别地，如果$n=(n—0)$是一个正自然数，那么定义它的负数$-n=0—n$。
4. (4.1.7 减法) 定义两个整数的减法运算为下述表达式：

$$x-y=x+(-y)$$

   由于减法运算由加法与负运算定义，很自然地可以证明减法遵守替换公理。
5. (4.1.10 整数的排序) 设n与m为整数。称n大于或等于m，记作$n\geq m$或$m\leq n$，当且仅当存在某个自然数a使得$n=m+a$。称n严格大于m，并记作$n>m$或$m<n$，当且仅当$n\geq m$且$n\neq m$。

引理

1. (4.1.3加法与乘法的定义是明确的) 设a，b，c，d，a'，b'为自然数，假定有$(a—b)=(a'—b')$，那么有下述结论成立：

$$(a—b)+(c—d)=(a'—b')+(c—d)$$
$$(a—b)\times(c—d)=(a'—b')\times(c—d)$$

   因此加法与乘法是定义明确的运算，相等的输入总能给出相等的输出。
2. (4.1.5 整数的三歧性) 设x是一个整数，那么下述三个命题中恰好有一个为真：

> - x是0。
> - x是正的自然数n。
> - x是正的自然数n的负数$-n$。

3. (4.1.6 整数的代数定律) 整数的九则代数定律（设x，y，z为整数）：

> - $x+y=y+x$。
> - $(x+y)+z=x+(y+z)$。
> - $x+0=0+x$。

> - $x+(-x)=(-x)+x=0$。
> - $xy=yx$。
> - $(xy)z=x(yz)$。
> - $x\cdot 1=1\cdot x=x$。
> - $x(y+z)=xy+xz$。
> - $(y+z)x=yx+zx$。
>
> （下一章会被有理数的代数定律取代，同时上述九条还断定全体整数构成一个交换环）

4. （4.1.8 整数没有零因子）设a和b均为整数，若有$ab=0$，则：

   > - $a=0$。
   > - $b=0$。

   至少有一个成立。
5. （4.1.9 整数的消去律）如果a，b，c为整数，且有$ac=bc$且$c\neq 0$，则有：

   $$a=b$$

6. （4.1.11 序的性质）整数序的相关内容，设a，b，c为整数：

   > - $a>b$当且仅当$a—b$是一个正的自然数。
   > - 如有$a>b$，则$a+c>b+c$。
   > - 如有$a>b$且c为正自然数，则$ac>bc$。
   > - 如有$a>b$且$b>c$，则$a>c$。
   > - 如有$a>b$，则有$-a<-b$。
   > - 命题$a>b$，$a<b$，$a=b$恰有一个为真。

课后习题

4.1.1 证明：整数上相等的定义既是自反的又是对称的

> 自反性（对任意整数$a—b$总有$a—b=a—b$）：
>
> 根据定义有$a—b=a—b$当且仅当$a+b=a+b$，后者是一个自然数等于它自身的成立是显而易见的。
>
> ---
>
> 对称性（对任意整数$a—b$与$c—d$，若有$a—b=c—d$，则有$c—d=a—b$）：
>
> 根据定义有$a—b=c—d$当且仅当$a+d=b+c \iff c+b=d+a$，即$c—d=a—b$，于是结论得证。

4.1.2 证明：整数上负运算的定义是定义明确的，即如果$(a—b)=(a'—b')$,那么$-(a—b)=-(a'—b')$。（因此相等的整数有相等的负数）

> 根据负运算的定义，即证明$(b—a)=(b'—a')$。
>
> 根据题设，有$(a—b)=(a'—b')$，即$a+b'=a'+b \iff b+a'=b'+a$。根据定义，这等价于$(b—a)=(b'—a')$，于是结论得证。

4.1.3 证明：$(-1)\times a=-a$ 对任意整数a均成立

> 设$a=a_1—a_2$。
>
> 根据定义，有$(-1)\times a=(0—1)\times(a_1—a_2)=(0\cdot a_1+1\cdot a_2)—(0\cdot a_2+1\cdot a_1)$，化简得到$a_2—a_1$，根据负运算的定义，于是$a_2—a_1=-(a_1—a_2)=-a$，于是结论得证。

4.1.4 证明： 命题 4.1.6 中余下的等式，即除去$(xy)z = x(yz)$余下的等式（提示：可以利用某些等式去证明其他的等式， 由此来减少我们的工作量。例如， 一旦知道了$xy = yx$，你就能够立即得到$x1 = 1x$，并且一旦证明了$x(y+z) = xy + xz$，那么你自然能得到$(y+z)x = yx + zx$）

> 可以筛查得到需要证明的等式包括：
>
> > 1. $x + y = y + x$。
> > 2. $(x+y)+z = x+(y+z)$。
> > 3. $x + (-x) = 0$。
> > 4. $xy = yx$。
> > 5. $x \cdot 1 = x$。
> > 6. $x(y+z) = xy + xz$。
>
> 可以指出，$x + 0 = 0 + x$，$x + (-x) = (-x) + x$可以由1推出；$x \cdot 1 = 1 \cdot x$可以由4推出；$(y+z)x = yx + zx$可以由4，6推出。
>
> 假设$x = x_1 — x_2$，$y = y_1 — y_2$，$z = z_1 — z_2$。
>
> ---
>
> $x + y = y + x$：
>
> $$\begin{aligned} x + y &= (x_1 — x_2) + (y_1 — y_2) \\ &= (x_1 + y_1) — (x_2 + y_2) \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} y + x &= (y_1 — y_2) + (x_1 — x_2) \\ &= (y_1 + x_1) — (y_2 + x_2) \end{aligned}$$
>
> 又有
> $(x_1 + y_1) — (x_2 + y_2) = (y_1 + x_1) — (y_2 + x_2) \iff x_1 + y_1 + y_2 + x_2 = y_1 + x_1 + x_2 + y_2$
> 始终成立，于是结论得证。
>
> ---
>
> $(x+y)+z = x+(y+z)$：
>
> $$\begin{aligned} x + (y+z) &= (x_1 — x_2) + ((y_1 — y_2) + (z_1 — z_2)) \\ &= (x_1 — x_2) + ((y_1 + z_1) — (y_2 + z_2)) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1) — (x_2 + y_2 + z_2) \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} (x+y)+z &= ((x_1 — x_2) + (y_1 — y_2)) + (z_1 — z_2) \\ &= ((x_1 + y_1) — (x_2 + y_2)) + (z_1 — z_2) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1) — (x_2 + y_2 + z_2) \end{aligned}$$
>
> 于是可以得证两者相等。
>
> ---
>
> $x + (-x) = 0$：
>
> $(x_1 — x_2) + (x_2 — x_1) = (x_1 + x_2) — (x_2 + x_1)$，由$(x_1 + x_2) + 0 = 0 + (x_2 + x_1)$，于是根据整数相等的定义有$(x_1 + x_2) — (x_2 + x_1) = 0 — 0$。
>
> ---
>
> $xy = yx$：
>
> $$\begin{aligned} xy &= (x_1 — x_2)(y_1 — y_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2) — (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} yx &= (y_1 — y_2)(x_1 — x_2) \\ &= (y_1 x_1 + y_2 x_2) — (y_1 x_2 + y_2 x_1) \end{aligned}$$
>
> 由乘法交换律与整数相等的定义，可以得到$xy = yx$得证。
>
> ---

> $x \cdot 1 = x$:
>
> $$\begin{aligned} x \cdot 1 &= (x_1 — x_2)(1 — 0) \\ &= (x_1 1 + x_2 0) — (x_1 0 + x_2 1) \\ &= x_1 — x_2 \\ &= x \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> $x(y+z) = xy + xz$:
>
> $$\begin{aligned} x(y+z) &= (x_1 — x_2)((y_1 — y_2) + (z_1 — z_2)) \\ &= (x_1 — x_2)((y_1 + z_1) — (y_2 + z_2)) \\ &= (x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2)) — (x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_1 + z_1)) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2) — (x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) \end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned} xy + xz &= (x_1 — x_2)(y_1 — y_2) + (x_1 — x_2)(z_1 — z_2)) \\ &= ((x_1 y_1 + x_2 y_2) — (x_1 y_2 + x_2 y_1)) + ((x_1 z_1 + x_2 z_2) — (x_1 z_2 + x_2 z_1)) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2) — (x_1 y_2 + x_1 z_2 + x_2 y_1 + x_2 z_1) \end{aligned}$$
>
> 于是结论得证。

4.1.5 证明命题4.1.8（提示： 虽然这个命题与引理2.3.3不完全一样， 但是在证明命题4.1.8的过程中， 使用引理2.3.3确实是合理的）

> 使用反证法：
>
> 假设存在两个整数$a \neq 0$，$b \neq 0$使得$ab = 0$，分情况讨论：
>
> 1. a与b都是正数
>
>   > 这是引理2.3.3中已有的结论。
>
> 2. a是负数而b是正数
>
>   > 不妨令$a = -c = -1 \times c$，于是c为正数，$ab = 0$，当且仅当$-1 \times (cb) = 0 \iff cd = 0$，根据假设可以推知$c \neq 0$，$b \neq 0$，于是根据引理2.3.3得到不成立。
>
> 3. a是正数而b是负数
>
>   > 和2情况一致，b令为$-d$即可得出一样的结论。
>
> 4. a与b都是负数
>
>   > 不妨令$a = -c = -1 \times c$，$b = -d = -1 \times d$，c与d均为正数。$ab = 0$，当且仅当$cd = 0$，而c与d均为正数，于是根据引理2.3.3得到不成立。
>
> 综上，可以得到命题4.1.8得证

4.1.6 证明推论4.1.9（提示：有两种方法来证明本题。一种方法是利用命题4.1.8推导出$(a-b)$一定为零。另一种方法是把推论2.3.7与引理4.1.5结合起来使用。）

> $ac = bc$，于是$ac + (-bc) = bc + (-bc) = 0$，即$(a-b)c = 0$，于是根据命题4.1.8有$(a-b)$或$c$中至少有一个为$0$，根据题设$c \neq 0$，于是只可能$a - b = 0$，即$a = b$，于是命题4.1.9得证。

4.1.7 证明引理4.1.11（提示：利用该引理的第一部分去证明其余部分。）

> 逐一证明：
>
> 1. $a > b$当且仅当$a—b$是一个正的自然数。
>
>   充分性：
>
> $a—b$是一个正的自然数c，于是有$a—b = c—0 \iff a = b + c$，于是可以得到$a \geq b$，又因为$c \neq 0$于是$a \neq b$，综合得到$a > b$。
>
>   必要性：
>
> $a > b$，于是存在某个正自然数c使得$a = b + c$，于是$a + 0 = c + b$，等价于$a—b = c—0 = c$。
>
> ---
>
> 2. 如有$a > b$且c为整数，则$a + c > b + c$。
>
> $a > b$，于是存在正自然数d使得$a = b + d$，于是$(a + c) = (b + c) + d$，即$a + c > b + c$。
>
> ---
>
> 3. 如有$a > b$且c为正自然数，则$ac > bc$。
>
> $a > b$，于是存在正自然数d使得$a = b + d$，于是$ac = (b + d)c = bc + dc$。d，c均为正自然数，于是dc也是正自然数，即$ac > bc$。
>
> ---
>
> 4. 如有$a > b$且$b > c$，则$a > c$。
>
> $a > b$且$b > c$，于是存在正自然数d，e有$a = b + d$，$b = c + e$，于是$a = c + (d + e)$。d，e是正自然数，于是$(d + e)$是一个正自然数，即$a > c$。
>
> ---
>
> 5. 如有$a > b$，则有$-a < -b$。
>
> $a > b$，于是存在某个正自然数c使得$a = b + c$，于是$-a = -(b + c) \iff -a + c = -b$，即有$-a < -b$。
>
> ---
>
> 6. 命题$a > b$，$a < b$，$a = b$恰有一个为真。
>
>   对任意一对整数a，b，总能存在某个整数c使得$a = b + c$。由于整数的三歧性，于是：
>
>   - $c = 0$，于是$a = b$。
>   - c为正数，于是有$a > b$。
>   - c为负数，于是$a + (-c) = b$，即$a < b$。

4.1.8 证明：归纳法原理（[公理 2.5](#)）不能直接用于整数。更准确地，给出下面这个例子。$P(n)$是关于整数n的性质.它使得$P(0)$为真. 并且对任意的整数n来说，$P(n)$为真蕴涵着$P(n++)$为真.但是$P(n)$并不对所有的整数n都为真。 所以在处理整数时，归纳法不能像处理自然数那样成为一个有用的工具。（在处理我们稍后定义的有理数和实数时， 这种状况将变得更糟糕。）

> 假定一个性质$P(n)$：
>
> $$P(n) : n \geq 0$$
>
> 该性质$n = 0$时成立，并且$n = m$成立时，$n = m++$也可以推出，但是该性质显然对-1不成立。

本节相关跳转

实分析 2.1 皮亚诺公理

实分析 2.3 乘法