6.1 收敛与极限定律

定义

1. (6.1.1 两个实数间的距离) 给定两个实数x和y，定义它们的距离为$d(x,y)$，有：

$$d(x,y) := |x-y|$$

2. (6.1.2 ε-接近的实数) 设$\varepsilon > 0$是一个实数，称x与y是ε**-接近的**，当且仅当$d(x,y) \leq \varepsilon$。

   (这个ε-接近性的定义与定义4.3.4的"ε-接近性"是一致的)

3. (6.1.3 实数的柯西序列) 设$\varepsilon > 0$是一个实数，则称从某个整数指标N开始的实数序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε**-稳定的**，当且仅当对任意j，$k \geq N$都有a_j与a_k是ε-接近的。

   又有从某个整数指标m开始的实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$被称为是**最终**ε**-稳定**的，当且仅当存在一个整数$N \geq m$使得$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-稳定的。

   一个实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$被称为**柯西序列**，当且仅当对每一个$\varepsilon > 0$，该序列都是最终ε-稳定的。

   (这些定义与有理数上的相关定义 (5.1.3，5.1.6，5.1.8) 是一致的，在这两个意义下的有理数序列是一致的，耳熟能详了已经)

4. (6.1.5 序列的收敛) 设$\varepsilon > 0$是一个实数，且L也是一个实数。称实数序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε**-接近**于L的，当且仅当对任意的$n \geq N$，a_n与L都是ε-接近的，即有$d(a_n, L) \leq \varepsilon$。

   称序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是**最终**ε**-接近**于L的，当且仅当存在一个$N \geq m$使$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-接近于L的。

   称序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是**收敛**于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon > 0$，该序列都是最终ε-接近于L的。

   (展开的表述：称序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是收敛于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$|a_n - L| \leq \varepsilon$对所有的$n \geq N$成立)

5. (6.1.8 序列的极限) 如有序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于实数L，那么序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的且它的极限为L，用下式表示：

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

6. (6.1.16 有界序列) 实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$以实数M为界，当且仅当存在有$|a_n| \leq M$对全部$n \geq m$成立。称实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是有界的，当且仅当存在某个实数$M > 0$使得该序列以M为界。

   (该定义同样可以证明与定义5.1.12是一致的)

命题

1. (6.1.4 柯西序列的定义是一致的？) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的有理数序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.8下的柯西序列，当且仅当它是定义6.1.3下的柯西序列。
2. (6.1.7 极限的唯一性) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的实数序列，且有$L \neq L'$是两个不同的实数，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$不可能同时收敛于L和L'。
3. (6.1.11 收敛实例？) 有$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。
4. (6.1.12 收敛序列也是柯西序列) 假设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个收敛的实数序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$也是一个柯西序列。
5. (6.1.15 形式极限是真正的极限) 假定有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是某个有理数的柯西序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$，即有：

$$\text{LIM}_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

（如同之前在定义有理数，整数一样，于此形式极限被真正的极限替代，形式减法被真正的减法替代，形式除法被真正的除法替代）

6. （6.1.17 引理5.1.15推论）每一个收敛的实数序列都是有界的。
7. （6.1.19 极限定律）设有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的实数序列，并且设实数x，y有$x := \lim_{n\to\infty} a_n$与$y := \lim_{n\to\infty} b_n$。

> - 序列$(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x + y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x + y$$
>
> - 序列$(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$xy$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = xy$$
>
> - 对任意实数c，序列$(c\cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$c\cdot x$，即：
>
> $$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
>
> - 序列$(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x - y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = x - y$$
>
> - 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$收敛于$y^{-1}$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{-1} = (\lim_{n\to\infty} b_n)^{-1}$$
>
> - 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x/y:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = x/y$$
>
> - 序列$(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\max(x, y)$，即：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$
>
> - 序列$(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\min(x, y)$，即：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

课后习题

6.1.1 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并且满足$a_{n+1} > a_n$对任意的自然数n均成立。证明：只要n和m都是自然数且满足$m > n$，那么$a_m > a_n$（我们把这种序列记作增序列）

6.1.2 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，且L是一个实数。证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于L，当且仅当对于任意给定的实数$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$|a_n - L| \leq \varepsilon$对所有的$n \geq N$均成立

6.1.3 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，c是一个实数，且$m' \geq m$是一个整数，证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，当且仅当$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$收敛于c

6.1.4 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，c是一个实数，且$k \geq 0$是一个非负整数，证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，当且仅当$(a_n)_{n=m+k}^{\infty}$收敛于 c

6.1.5 证明命题6.1.12 **（提示：利用三角不等式或者命题4.3.7）**

6.1.6 利用下述框架来证明命题6.1.15：设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个有理数的柯西序列，并且记$L := \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$，我们必须证明$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$L$。设$\varepsilon > 0$，利用反证法，假设序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$不是最终$\varepsilon$-接近于$L$的。利用这一点以及$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是柯西序列的事实，证明存在一个$N \geq m$使得$a_n > L + \frac{\varepsilon}{2}$对所有的$n \geq N$均成立，或者$a_n < L - \frac{\varepsilon}{2}$对所有的$n \geq N$均成立，然后利用习题5.4.8

6.1.7 证明定义6.1.16与定义5.1.12是一致的 **（即证明一个与命题6.1.4类似的结论，其中命题6.1.4中的柯西序列被替换成有界序列）**

6.1.8 证明定理6.1.19 **（提示：你可以利用定理中的某些部分来证明其他的部分，例如：(b)可以被用来证明(c)，(a)和(c)可以用来证明(d)，并且(b)和(c)可以用来证明(f)。其证明类似于引理 5.3.6，命题5.3.10以及引理5.3.15的证明。对于 (c)，你可能首先需要证明一个辅助的结果：如果一个序列的所有元素都不为零，并且该序列收敛于一个非零极限，那么这个序列是远离0的）**

6.1.9 解释为什么当分母的极限为0时，定理6.1.19(f)不成立。 **（为了修复这个问题，需要用到洛必达法则，参见10.5节）**

6.1.10 证明：当把定义5.2.6中的ε由正有理数替换成正实数时，等价的柯西序列这一概念不发生任何改变，更准确地说，如果$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是实数序列，证明：对于任意的有理数$\varepsilon > 0$，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的，当且仅当对于任意的实数$\varepsilon > 0$它们都是最终ε-接近的 **（提示：修改命题6.1.4的证明）**

本节相关跳转

实分析 4.3 绝对值与指数运算

实分析 5.1 柯西序列

实分析 5.3 实数的构造

实分析 5.4 对实数排序

实分析 10.5 洛必达法则