5.4 对实数排序

定义

1. (5.4.1 正远离与负远离) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个有理数序列，称该序列是**正远离0的**，当且仅当存在一个正有理数$c > 0$，使得$a_n \geq c$对任意$n \geq 1$均成立。（特别地，整个序列是**正**的）称该序列是**负远离0的**，当且仅当存在一个负有理数$-c < 0$，使得$a_n \leq -c$对任意的$n \geq 1$均成立。（特别地，整个序列是**负**的）
2. (5.4.3 正负实数) 称实数x是**正**的，当且仅当它可以被写为某个**正远离**0的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，即$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$。称$x$是**负**的，当且仅当它可以被写为某个**负远离**0的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，即$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$。
3. (5.4.5 绝对值) 设x是实数，如果x是**正**的，则定义x的绝对值$|x|$等于x；如果x是**负**的，则定义x绝对值$|x|$等于$-x$；如果为零，则定义x的绝对值$|x|$等于0。
4. (5.4.6 实数的排序) 设x与y是实数，若$x - y$是一个正实数，则称x大于y并记为$x > y$；若$x - y$是一个负实数，则称x小于y并记作$x < y$。定义$x \geq y$，当且仅当$x > y$或$x = y$；定义$x \leq y$，当且仅当$x < y$或$x = y$。

命题

1. (5.4.4 正实数的基本性质) 对任意的实数x，下述三个命题中**恰好**有一个为真：

   > - x是0。
   > - x是正的。
   > - x是负的。

   实数x是**负**的，当且仅当$-x$是**正**的。如果x和y都是**正**的，那么$x + y$与xy都是**正**的。
2. (5.4.7 实数数域上序的基本性质) 性质 ([引理 4.2.9]) 一切关于有理数成立的结论对实数仍然是成立的。（内容见下）

   > - (序的三歧性) 命题"$x = y$"，"$x > y$"，"$x < y$"中恰有一个为真。
   > - (序是反对称的) $x < y$当且仅当$y > x$。
   > - (序是可传递的) 若$x < y$且$y < z$，则$x < z$。
   > - (加法保持序不变) 若$x < y$，则$x + z < y + z$。
   > - (正的乘法保持序不变) 若$x < y$且z是正的，则$xz < yz$。

3. (5.4.8 实数的倒数？) 设x是一个正实数，那么x^{-1}也是正的。同时，如果y是另外一个正数并且$x>y$，那么$x^{-1} < y^{-1}$。
4. (5.4.9 非负实数集是闭的) 设a_1，a_2，a_3……是非负有理数的一个柯西序列，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$是非负实数。

   (也可以说成非负实数集是闭的，而正实数集是开的)
5. (5.4.10 序不变？) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是有理数的柯西序列，并且满足$a_n \geq b_n$对所有$n \geq 1$均成立，那么有：

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n \geq \mathrm{LIM}_{n\to\infty} b_n$$

6. (5.4.12 有理数对实数的界定) 设x是一个正实数，那么存在一个正有理数q使得$q \leq x$，并且存在一个正整数N使得$x \leq N$。

7. (5.4.13 阿基米德性质)设x和ε是任意的正实数，则存在一个正整数M使得$M\varepsilon > x$。
8. (5.4.14 实数的间隙？)给定任意两个实数$x < y$，可以找到一个有理数q使得$x < q < y$。

   (即使到了这里，实数系仍然没有展现出任何超越有理数系的优越性)

课后习题

5.4.1 证明命题5.4.4 (提示：如果x不为零，并且x是某个序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限。那么这个序列不可能对于每一个$\varepsilon > 0$都是最终ε-接近于零序列$(0)_{n=1}^{\infty}$的。利用这一点去证明序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$最终要么是正远离0的，要么是负远离0的)

> 实数三歧性:
>
> 对于为0的实数x，我们假设它是某个序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限。使用反证法，不妨假设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是远离0的（正负暂时不重要），于是此时应当有存在某正有理数c使得$|a_n| \geq c$对任意$n \geq 1$成立。我们又有$x = 0$，于是根据实数相等的定义应该有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(0)_{n=1}^{\infty}$等价，即对任意$\varepsilon > 0$，存在正整数$N \geq 1$使得对任意$n \geq N$有$|a_n - 0| \leq \varepsilon$成立。我们取$\varepsilon = c/2$，于是综上有存在$N$使得$n \geq N$时有$|a_n| \geq c$且$|a_n| \leq c/2$对某个正有理数$c$成立，这是不可能的，因此必然有$x = 0$时$x$既不为正也不为负。
>
> 对于不为0的实数x，我们假设它是某个序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，假设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$对于每一个$\varepsilon > 0$都是最终ε-接近于零序列$(0)_{n=1}^{\infty}$的，那么根据实数相等的结论必然有$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} 0 = 0$，于是这和前提矛盾。
>
> 既然对于不为0的实数x，$(a_n)_{n=1}^{\infty}$不可能对每一个$\varepsilon > 0$都是最终ε-接近于零序列$(0)_{n=1}^{\infty}$的，于是至少存在一个$\varepsilon_0 > 0$使得对任意$n \geq 0$，$|a_n - 0| > \varepsilon_0$始终成立。又$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，于是对$\varepsilon_0/2$，存在一个自然数$N \geq 1$使得对任意$n \geq N$都有$d(a_N, a_n) \leq \varepsilon_0/2$。于是此时若$a_N > 0$，则对任意$n \geq N$有$a_n \geq \varepsilon_0/2$；若此时$a_N < 0$，则对任意$n \geq N$有$a_n \leq \varepsilon_0/2$；于是根据定义有若$a_N > 0$，$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是正远离0的，此时$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$是正的；若$a_N < 0$，$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是负远离0的，此时$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$是负的，显然$a_N$不可能同时是负的与正的（有理数的三歧性），于是$x \neq 0$时$x$必然是正的负的中的一个。
>
> 综上，实数的三歧性得证。
>
> ---
>
> 实数x是负的，当且仅当$-x$是正的:
>
> 实数x是负的，于是它可以被写为某个负远离0的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，即存在某负有理数c，对$\forall n \geq 1$有$a_n \leq c$，于是对$\forall n \geq 1$有$-a_n \geq -c$，即$(-a_n)_{n=1}^{\infty}$是正远离0的，又有$-x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty}(-a_n)$，于是$-x$是正数。
>
> ---
>
> 如果x和y都是正的，那么$x + y$与xy都是正的:
>
> x和y都是正的，于是它们可以被写为某个正远离0的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限。于是存在正有理数c，d使得$\forall n \geq 1$，$a_n \geq c$与$b_n \geq d$，进而我们可以得到$a_n b_n \geq cd$与$a_n + b_n \geq c + d$，即$(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$与$(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$也是正远离0的序列。于是根据定义，$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x + y$与$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n b_n) = xy$都是正的。

5.4.2 证明命题5.4.7中其余的结论 (即除去最后一条的其它全部结论)

> - 命题“$x = y$”，“$x > y$”，“$x < y$”中恰有一个为真
>
> 对任意两个实数x，y，我们总有$c = x - y$也是一个实数，根据实数的三歧性，对实数c下面三个命题恰好有一个为真:

> - c是0 $\overset{\text{定义5.4.6}}{\Longleftrightarrow}$ $x = y$。
> - c是正的$\overset{\text{定义5.4.6}}{\Longleftrightarrow}$ $x > y$。
> - c是负的$\overset{\text{定义5.4.6}}{\Longleftrightarrow}$ $x < y$。

于是“$x = y$”，“$x > y$”，“$x < y$”中恰有一个为真，结论得证。

- $x < y$当且仅当$y > x$

$x < y$，于是根据定义5.4.6当且仅当有$x - y$是负实数，由命题5.4.4，当且仅当此时$-(x - y) = y - x$是正的，于是根据定义5.4.6当且仅当$y > x$，于是结论得证。

- 若$x < y$且$y < z$，则$x < z$

$x < y$且$y < z$，于是$c = y - x$与$d = z - y$都是正的，进而由命题5.4.4可以得到$c + d = (y - x) + (z - y) = z - x$也是正的，于是根据定义5.4.6有$x < z$，结论得证。

- 若$x < y$，则$x + z < y + z$

$x < y$，于是根据定义5.4.6当且仅当有$x - y$是负实数，也即$(x + z) - (y + z)$是负实数，于是$x + z < y + z$成立，结论得证。

5.4.3 证明：对于每一个实数x恰好存在一个整数N使得$N \le x < N + 1$ （这个整数N被称为x的整数部分，并记作$N = \lfloor x \rfloor$）

首先我们对实数中任何整数x都自然成立这个结论（因为整数x取它本身作为N就可以满足题目结论）。现在我们对任何不是整数的实数x做讨论。不妨假设$x = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$（$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列），我们证明：

$$N = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor$$

注意这里的$\lfloor a_n \rfloor$是由命题4.4.1所指定的整数部分，而并非本题所述整数部分。

分成四个部分证明：

> - 若x不是整数，那么$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$必然存在整数$N$，$M$使得当$n \ge N$时总有$\lfloor a_n \rfloor = M$恒成立。
> - $(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列，并且存在某个整数$M$使得$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor = M$。
> - $\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor \le \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n \le (\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor) + 1$。
> - 证明N是唯一的。

证明：若x不是整数，那么$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$必然存在整数$N$，$M$使得当$n \ge N$时总有$\lfloor a_n \rfloor = M$恒成立：

由于$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，于是取一个$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$，存在一个整数$N_0$使得对任意$i, j \ge N_0$总有$d(a_i, a_j) \le \dfrac{1}{2}$成立，特别的，对任意$i \ge N_0$，都有$d(a_{N_0}, a_i) \le \dfrac{1}{2}$。接下来定义整数$L$的选取规则，然后我们会使用反证法来完成这个部分的证明：

$$L = \begin{cases} \lfloor a_{N_0} \rfloor & \text{if} \quad \frac{1}{2} \le a_{N_0} - \lfloor a_{N_0} \rfloor < 1 \\ \lfloor a_{N_0} \rfloor - 1 & \text{if} \quad 0 \le a_{N_0} - \lfloor a_{N_0} \rfloor < \frac{1}{2} \end{cases}$$

> 我们假设序列$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$对任意$N \geq 1$，总是存在至少一个$i \geq N$使得$\lfloor a_i \rfloor \neq L$，于是对任意$N \geq N_0$也应该满足这个结论，由于对任意$i \geq N_0$，都有$d(a_{N_0}, a_i) \leq \frac{1}{2}$。分类讨论可以得到：
>
> > - $\frac{1}{2} \leq a_{N_0} - \lfloor a_{N_0} \rfloor \leq 1$时，有对任意$i \geq N_0$都有$\lfloor a_{N_0} \rfloor \leq a_{N_0} - \frac{1}{2} \leq a_i \leq a_{N_0} + \frac{1}{2} < \lfloor a_{N_0} \rfloor + 2$，于是$\lfloor a_i \rfloor$只能等于$L$或者$L+1$。
> > - $0 \leq a_{N_0} - \lfloor a_{N_0} \rfloor < \frac{1}{2}$时，有对任意$i \geq N_0$都有$\lfloor a_{N_0} \rfloor - 1 \leq a_{N_0} - \frac{1}{2} \leq a_i \leq a_{N_0} + \frac{1}{2} < \lfloor a_{N_0} \rfloor + 1$，于是$\lfloor a_i \rfloor$只能等于$L$或者$L+1$。
>
> 于是对任意$i \geq N_0$，$\lfloor a_i \rfloor$只能等于L或者$L+1$。如果对任意$N \geq N_0$总有至少一个$i_0, j_0 \geq N$使得$\lfloor a_{i_0} \rfloor \neq L (= L+1)$与$\lfloor a_{j_0} \rfloor \neq L+1 (= L)$（如果对全部$n \geq N$都有$\lfloor a_n \rfloor = L+1$那么结论里的$M$就可以直接选择$L+1$了），那么即对任意$N \geq N_0$总有至少一个$i_0, j_0 \geq N$使得$a_{i_0} \geq L+1$与$a_{j_0} < L+1$成立。
>
> 结合$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，可以得到结论：对任意$\varepsilon > 0$，于是总是存在一个整数A使得：
>
> > 1. 至少存在一个$i_0, j_0 \geq A$使得$a_{i_0} \geq L+1$与与$a_{j_0} < L+1$。
> > 2. 对任意$i, j \geq A$总有$d(a_i, a_j) \leq \varepsilon$恒成立。特别的，对任意$n \geq A$，有$d(a_n, a_{i_0}) \leq \varepsilon$与$d(a_n, a_{j_0}) \leq \varepsilon$。
>
> 于是对任意的$n \geq A$，由命题4.3.7(f)有$d(a_n, L+1) \leq \varepsilon$恒成立。于是可以得到序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与序列$(L+1)_{n=1}^{\infty}$是等价的，即$x = L+1$，这和$x$不是整数的前提矛盾，于是命题得证。
>
> ---
>
> 证明：$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$是一个柯西序列，并且存在某个整数$M$使得$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor = M$：
>
> 根据前结论，可以得到对任意$\varepsilon > 0$，总有整数N，M使得对任意$i, j \geq N$有$d(\lfloor a_i \rfloor, \lfloor a_j \rfloor) = d(M, M) = 0 \leq \varepsilon$恒成立，于是$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列。
>
> 同时，根据前结论，可以得到对任意$\varepsilon > 0$，总有整数N，M使得对任意$n \geq N$有$d(M, \lfloor a_n \rfloor) = d(M, M) = 0 \leq \varepsilon$，于是可以得到序列$(\lfloor a_n \rfloor)_{n=1}^{\infty}$与序列$(M)_{n=1}^{\infty}$是等价的，即$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} M = M$，结论得证。
>
> ---
>
> 证明：$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor \leq \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n \leq (\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor) + 1$：
>
> 根据命题5.4.10与命题4.4.1，由对任意有理数a_n均有$\lfloor a_n \rfloor \leq a_n < \lfloor a_n \rfloor + 1$我们可以得到关系：
>
> $$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor \leq \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{LIM}_{n\to\infty} (\lfloor a_n \rfloor + 1)$$
>
> 又有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} (\lfloor a_n \rfloor + 1) = \mathrm{LIM}_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor + 1$，于是题式得证。
>
> ---
>
> 证明：N是唯一的：
>
> 假设存在另一个不是我们构造方法的$N' \neq N$使得$N' \leq x < N' + 1$也成立，那么我们同时有$N' \leq x$与$N \leq x$成立，由于$N \neq N'$，于是$|N - N'|$必然是非0的自然数，换言之，即一个大于等于1的自然数。若有$N' < N$，那么根据整数序的定义有$N' + 1 \leq N$，于是此时$x < N' + 1 \leq N \leq x$，显然不可能，$N' > N$时也有类似的结论。于是N是唯一的。
>
> ---

> 综上，我们证明了对于每一个实数x恰好存在一个整数N使得$N \leq x < N+1$。

5.4.4 证明：对任意的正实数$x > 0$，存在一个正整数N使得$x > \frac{1}{N} > 0$

> 根据命题5.4.13，对正实数1与x，存在一个正整数N使得$Nx > 1 \iff x > \frac{1}{N}$；由于$\frac{1}{N}$是正的，于是根据有理数序的关系自然有$\frac{1}{N} > 0$，于是$x > \frac{1}{N} > 0$得证。

5.4.5 证明命题5.4.14 **(提示：利用习题5.4.4, 你可能还会用到反证法)**

> 对任意实数$x < y$，我们取$c = y - x$（于是c是正的），根据命题5.4.13，对正实数c与1存在一个正整数N使得$Nc > 1$成立，于是即存在某个正整数N使得$Nx + 1 < Ny$成立，我们取整数$M = \lfloor Nx \rfloor + 1$，根据整数部分的性质有：
>
> $$\lfloor Nx \rfloor \leq Nx < \lfloor Nx \rfloor + 1$$
>
> 进而可以推断有$Nx < \lfloor Nx \rfloor + 1 (\leq Nx + 1) < Ny$（由$\lfloor Nx \rfloor \leq Nx$与$Nx + 1 < Ny$推知），即有：
>
> $$Nx < M < Ny \iff x < \frac{M}{N} < y$$
>
> 由于M，N都是整数，于是$\frac{M}{N}$是一个有理数。于是命题 5.4.14得证

5.4.6 设x，y是实数，并且$\varepsilon > 0$是一个正实数。证明：$|x-y| < \varepsilon$当且仅当$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$，以及$|x-y| \leq \varepsilon$当且仅当$y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$

> $|x-y| < \varepsilon$当且仅当$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$：
>
> 充分性：
>
> 若有$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$，则有$-\varepsilon < x - y < \varepsilon$，对$c = x - y$做分类讨论：
>
> > - $c > 0$，于是此时$0 < c < \varepsilon$并且c是正的，进而根据绝对值定义有$|c| = c$，于是$|x-y| < \varepsilon$成立。
> > - $c = 0$，于是根据绝对值定义有$|c| = 0$，此时由$0 < \varepsilon$有$|x-y| < \varepsilon$成立。
> > - $c < 0$，于是此时$-\varepsilon < c < 0$并且c是负的，进而根据绝对值定义有$|c| = -c$，于是也可以得到$|x-y| < \varepsilon$成立。
>
> 于是$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$时有$|x-y| < \varepsilon$成立，充分性得证。
>
> 必要性：
>
> 若有$|x-y| < \varepsilon$，则对$c = x - y$做分类讨论：
>
> > - $c > 0$，于是此时c是正的，进而根据绝对值定义有$|c| = c$，于是$0 < c < \varepsilon \iff y < x < y + \varepsilon$成立。
> > - $c = 0$，于是根据绝对值定义有$|c| = 0 < \varepsilon$，此时有$x - y = 0 \iff x = y$。
> > - $c < 0$，于是此时c是负的，进而根据绝对值定义有$|c| = -c$，于是也可以得到$0 < -c < \varepsilon \iff y - \varepsilon < x < y$成立。
>
> 综上，$|x-y| < \varepsilon$时应该有$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$成立，必要性得证。
>
> ---
>
> $|x-y| \leq \varepsilon$当且仅当$y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$：
>
> 思路和上面基本一致，稍微修改下细节就可以，下面放出个人修改的解答过程。
>
> 充分性：

> 若有$y-\varepsilon \le x \le y+\varepsilon$，则有$-\varepsilon \le x-y \le \varepsilon$，对$c=x-y$做分类讨论：
>
> > - $c>0$，于是此时$0<c\le\varepsilon$并且c是正的，进而根据绝对值定义有$|c|=c$，于是$|x-y|\le\varepsilon$成立。
> > - $c=0$，于是根据绝对值定义有$|c|=0$，此时由$0<\varepsilon$有$|x-y|<\varepsilon$成立。
> > - $c<0$，于是此时$-\varepsilon\le c<0$并且c是负的，进而根据绝对值定义有$|c|=-c$，于是也可以得到$|x-y|\le\varepsilon$成立。
>
> 于是$y-\varepsilon\le x\le y+\varepsilon$时有$|x-y|\le\varepsilon$成立，充分性得证。
>
> 必要性：
>
> 若有$|x-y|\le\varepsilon$，则对$c=x-y$做分类讨论：
>
> > - $c>0$，于是此时c是正的，进而根据绝对值定义有$|c|=c$，于是$0<c\le\varepsilon \iff y<x\le y+\varepsilon$成立。
> > - $c=0$，于是根据绝对值定义有$|c|=0\le\varepsilon$，此时有$x-y=0 \iff x=y$。
> > - $c<0$，于是此时c是负的，进而根据绝对值定义有$|c|=-c$，于是也可以得到$0<-c<\varepsilon \iff y-\varepsilon\le x<y$成立。
>
> 综上，$|x-y|\le\varepsilon$时应该有$y-\varepsilon\le x\le y+\varepsilon$成立，必要性得证。

5.4.7 设x，y是实数，证明：$x\le y+\varepsilon$对任意实数$\varepsilon>0$都成立，当且仅当$x\le y$。证明：$|x-y|\le\varepsilon$对任意实数$\varepsilon>0$都成立，当且仅当$x=y$

> $x\le y+\varepsilon$对任意实数$\varepsilon>0$都成立，当且仅当$x\le y$：
>
> 充分性：
>
> $x\le y$，当且仅当$0\le y-x$，于是对于任意实数$\varepsilon>0$，$0\le(y+\varepsilon)-x$也成立，即对任意实数$\varepsilon>0$都有$x\le y+\varepsilon$。于是充分性得证。
>
> 必要性：
>
> $x\le y+\varepsilon$对任意实数$\varepsilon>0$都成立，我们使用反证法证明必要性。
>
> 不妨假设此时$x>y$，于是$x-y=c$是一个正数，取$\varepsilon=\frac{c}{2}$，根据前置条件，我们应该有
>
> $$x\le y+\frac{c}{2}<y+c=x \iff x<x$$
>
> 于是导出矛盾，假设不成立，根据命题5.4.7(a)与定义5.4.6可以得到此时必然有$x\le y$，于是必要性得证。
>
> ---
>
> 根据前结论，我们有题设条件等价于$|x-y|\le 0$。根据绝对值的定义，我们知道绝对值$|x-y|$只能为正或者0，于是$|x-y|\ge 0$，结合题设于是有$|x-y|=0$，当且仅当$x-y=0 \iff x=y$，于是结论得证。

5.4.8 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是有理数的一个柯西序列，x是一个实数，证明：如果$a_n\le x$对任意$n\ge 1$成立，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n\le x$。类似地，证明：如果$a_n\ge x$对任意$n\ge 1$成立，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n\ge x$（提示：利用反证法，使用命题5.4.14找到一个介于$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$与$x$之间的有理数，然后使用命题5.4.9或者推论5.4.10）

> 如果$a_n\le x$对任意$n\ge 1$成立，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n\le x$：
>
> 使用反证法。
>
> 我们假设有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n>x$，那么根据命题5.4.14，存在一个有理数$q$使得$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n>q>x$，那么我们可以由这个结论引申出一个推论：

> 由于$q > x \geq a_n$对任意$n \geq 1$成立，所以根据命题5.4.10，$(a_n)_{n=1}^{\infty}$对应的实数应该小于等于$(q)_{n=1}^{\infty}$对应实数，即
>
> $$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \leq \mathrm{LIM}_{n\to\infty}q = q$$
>
> 但是根据我们的前提，又有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n > q$，于是导出矛盾，反证假设不成立。根据命题5.4.7(a)与定义5.4.6可以得到此时必然有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \leq x$成立。
>
> ---
>
> 如果$a_n \geq x$对任意$n \geq 1$成立，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \geq x$：
>
> 稍微修改一下上面的证明即可，下面给出个人的修改版本：
>
> 使用反证法。
>
> 我们假设有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n < x$，那么根据命题5.4.14，存在一个有理数$q$使得$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n < q < x$，那么我们可以由这个结论引申出一个推论：
>
> 由于$q < x \leq a_n$对任意$n \geq 1$成立，所以根据命题5.4.10，$(a_n)_{n=1}^{\infty}$对应的实数应该大于等于$(q)_{n=1}^{\infty}$对应实数，即
>
> $$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \geq \mathrm{LIM}_{n\to\infty}q = q$$
>
> 但是根据我们的前提，又有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n < q$，于是导出矛盾，反证假设不成立。根据命题5.4.7(a)与定义5.4.6可以得到此时必然有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \geq x$成立。

本节相关跳转

[实分析 4.2 有理数]