4.3 绝对值与指数运算

定义

绝对值

1. (4.3.1 绝对值) 如果x是一个有理数，则其**绝对值**$|x|$有如下定义：

   > - 若x是正的，则$|x| := x$。
   > - 若x是负的，则$|x| := -x$。
   > - 若x是0，则$|x| := 0$。

2. (4.3.2 距离) 设x与y为有理数，则称量$|x - y|$为x与y之间的距离，有时候记作$d(x, y)$，于是有$d(x, y) := |x - y|$。如$d(3, 5) = 2$。
3. (4.3.4 ϵ-接近性) 设$\epsilon > 0$是一个有理数，并且设x，y为有理数，并且称x，y有x是ϵ-接近于y的，当且仅当$d(x, y) \leq \epsilon$。

指数运算

1. (4.3.9 自然数次幂的指数运算) 设x是一个有理数，为把x升到0次幂，定义$x^0 := 1$，特别地，定义$0^0 = 1$，现归纳性地假设对某自然数n已有x^n的定义，于是定义$x^{(n+1)} := x^n \times x$。
   (比较此处定义与[2.3.11处指数定义](#)的不同)
2. (4.3.11 负整数次幂的指数运算) 设x是一个不为0的有理数，则对任意负整数$-n$，定义$x^{-n} := 1/(x^n)$。

命题

绝对值

1. (4.3.3 绝对值与距离的基本性质) 设x，y，z为有理数：

   > - (绝对值的非退化性) $|x| \geq 0$，另外$|x| = 0$当且仅当x为0。
   > - (绝对值的三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$。
   > - (不知道是啥) $-y \leq x \leq y$，当且仅当$y \geq |x|$，特别地$-x \leq |x| \leq x$。
   > - (绝对值的可乘性) $|xy| = |x| \times |y|$，特别地$|-x| = |x|$。
   > - (距离的非退化性) $d(x, y) \geq 0$，$d(x, y) = 0$当且仅当$x = y$。
   > - (距离的对称性) $d(x, y) = d(y, x)$。
   > - (距离的三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

2. (4.3.7 ε-接近性的基本性质?) 设x，y，z，w为有理数：

   > - 如果$x = y$，则对任意$\epsilon > 0$，x都是ϵ-接近于y的，两者互为充要条件。
   > - 设$\epsilon > 0$，若x是ϵ-接近于y的，则y也是ϵ-接近于x的。
   > - 设$\epsilon > 0$，若x是ϵ-接近于y的，y是σ-接近于z的，则x是$(\epsilon + \sigma)$-接近于z的。
   > - 设σ，$\epsilon > 0$，若x与y是ϵ-接近的，z与w是σ-接近的，则有$(x + z)$与$(y + w)$是$(\epsilon + \sigma)$接近的，$(x - z)$与$(y - w)$也相同。
   > - 设σ，$\epsilon > 0$，若x，y是ϵ-接近的，则对任意$\epsilon' > \epsilon$，x与y是ϵ'-接近的。
   > - 设$\epsilon > 0$，若y与z都是ϵ-接近于x的，且w在y与z之间，则w也是ϵ-接近于x的。
   > - 设$\epsilon > 0$，若x，y是ϵ接近的，且z不为0，则xz与yz也是$\epsilon|z|$-接近的。

> - 设σ，$\epsilon > 0$，如果x，y是ϵ-接近的且z与w是σ-接近的，则xz与yw是$(\epsilon|z| + \sigma|x| + \sigma\epsilon)$-接近的。

指数运算

1. (4.3.10 指数的运算性质I）设x与y为非零有理数，并设n和m为自然数，则有：

> - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
> - 若$x \geq y \geq 0$，则有$x^n \geq y^n \geq 0$，若$x > y \geq 0$且$n > 0$时，则有$x^n > y^n \geq 0$。
> - 若$n > 0$，则$x^n = 0$当且仅当$x = 0$。
> - 有$|x^n| = |x|^n$。

2. (4.3.12 指数的运算性质II）设x与y为非零有理数，并设n和m为**整数**，则有：

> - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
> - 若$x \geq y \geq 0$，则当n正数时有$x^n \geq y^n > 0$，当n负数时有$0 < x^n \leq y^n$。
> - 若x，$y > 0$，$n \neq 0$并且$x^n = y^n$，那么$x = y$。
> - 有$|x^n| = |x|^n$。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 2.3 乘法]