5.2 等价的柯西序列

定义

1. (5.2.1 ϵ-接近的序列) 设$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\epsilon > 0$，称$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是ϵ-接近的，当且仅当对任意$n \in N$均有a_n是ϵ-接近于b_n的，即$d(a_n, b_n) \leq \epsilon$。
2. (5.2.3 最终ϵ-接近的序列) 设$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\epsilon > 0$，称$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是最终ϵ-接近的，当且仅当存在一个$N \geq 0$，使序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是ϵ-接近的。

   (注：再次申明，上述两个概念都不是标准定义，在本节之外不会再使用上述定义)
3. (5.2.6 等价序列) 称两个序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$是**等价的**，当且仅当对任意有理数$\epsilon > 0$，序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$与$b_n|_{n=0}^{\infty}$都是最终ϵ-接近的。

   (注：如同定义5.1.8一样，ϵ被限制在了有理数范围，但是到最后我们会发现，上述命题中这个限制可以扩展到实数范围)

命题

1. (5.2.8) 设$a_n|_{n=0}^{\infty}$与是两个序列，其中$a_n = 1 + 10^{-n}$，$b_n = 1 - 10^{-n}$，那么序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$与是等价的。

   (这个命题直接断定了$1.000... = 0.999...$)

课后习题