5.5 最小上界性质

定义

1. (5.5.1上界) 设E是R的一个子集，并假设M是一个实数。称M是E的一个**上界**，当且仅当对于E中任意一个元素x，均有$x \leq M$。
2. (5.5.5 最小上界) 设E是$\mathbb{R}$的一个子集，且M是一个实数。称M是E的**最小上界**，当且仅当下述两个命题同时成立：

   > - M是E的一个上界。
   > - E的任意其它上界M'一定大于或等于M。

3. (5.5.10 上确界) 设E是实数集的一个子集，如果E是非空的并且存在一个上界，则定义$\sup(E)$为E的最小上界（由定理2可知，该定义是明确的）。额外引入两个符号$+\infty$与$-\infty$。如果E是非空的并且没有上界，则令$\sup(E) := +\infty$；如果E是空集，则定义$\sup(E) := -\infty$，称$\sup(E)$是E的**上确界**，也可以记作$\sup E$。
4. (无编号 下界与下确界) 同样的，可以类似定义5.5.1，5.5.5，5.5.10地定义集合的**下界**，**最大下界**与**下确界**及其相关命题与定理，下确界记作$\inf(E)$或$\inf E$。

   (这个看个人发挥了，就是改改内容而已)

命题

1. (5.5.8 最小上界的唯一性) 设E是$\mathbb{R}$的一个子集，则E最多有一个最小上界。
2. (5.5.9 最小上界的存在性) 设E是$\mathbb{R}$的一个非空子集，如果E有一个上界，那么它必定恰好有一个最小上界。
3. (5.5.12 优越性？) 存在一个正实数x，有$x^2 = 2$。

课后习题