7.4 级数的重排列

命题

1. (7.4.1 非负级数的重排列？) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个**收敛的非负实数**级数，并且$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是**一个双射**，那么$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$也是收敛的，并且与原级数有相同的和，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$$

2. (7.4.3 级数的重排列) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个**绝对收敛**的实数级数，并且$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个**双射**，那么$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$也是收敛的，并且与原级数有相同的和，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$$

课后习题

7.4.1 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个绝对收敛的实数级数，设$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个增函数（即对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $f(n+1)>f(n)$）。证明：$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ 也是绝对收敛的级数（提示：试着把$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$的每一个部分和与$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$（略有不同）的部分和进行比较）