2.1 皮亚诺公理

定义

1. (2.1.1 非正式的) 自然数是集合

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

   的元素，其中集合$\mathbb{N}$是从0开始，无休止前进计数所构成的集合，其中称$\mathbb{N}$为**自然数集。**

2. (2.1.3 数？) 定义1为数$0++$，2为数$(0++)++$，3为数$((0++)++)++$，等等。(换言之就是定义$1 := 0++$，$2 := 1++$，$3 := 2++$......，(在本书中日后都会使用$x := y$表示命题"令x的值为y"。))

公理

皮亚诺公理

> 1. (2.1) 0是一个自然数。
> 2. (2.2) 如果n是一个自然数，那么$n++$也是一个自然数。
> 3. (2.3) 0不跟随在任何自然数之后，等价于对任意自然数n，$n++ \neq 0$。
>
> (该公理用于防止自然数系出现首尾相接的循环现象)
>
> 4. (2.4) 对于不同的自然数而言，紧跟其后的数字也一定不同，即对任意自然数n与m，若有$n \neq m$，则有$n++ \neq m++$。
>
> (对任意的自然数，不存在由该自然数开始后面出现循环的可能)
>
> 5. (2.5 数学归纳法原理) 令$P(n)$表示自然数n的某一性质，若$P(0)$为真且$P(n)$为真时$P(n++)$为真，则对任意自然数n，$P(n)$为真。
>
> (数学归纳法原理严格上来说应该被称为公理模式而非公理，根据数学归纳法你可以构造出无穷多个公理)
>
> > 归纳法公理证明模板
> >
> > 命题：对任意的自然数n，性质$P(n)$为恒为真
> >
> > 证明：使用数学归纳法证明
> >
> > 首先证明$n = 0$时的情况：
> >
> > (插入证明$P(0)$为真的证明)
> >
> > 现归纳性假设n为某一个自然数，并且有$P(n)$为真，此时证明$P(n++)$为真：
> >
> > (插入在$P(n)$为真的前提下，证明$P(n++)$为真的证明)
> >
> > 于是归纳得证，因此对任意自然数n，$P(n)$恒为真

(自然数系$\mathbb{N}$中所有元素n均有皮亚诺公理的成立)

命题

1. (2.1.4) 3是一个自然数。

2. (2.1.6) 4不等于0。
3. (2.1.8) 6不等于2。
4. (2.1.16 递归定义) 假设对任意自然数n，存在某由自然数系到自然数系的函数$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，令$c$为某个固定的自然数，则对任意自然数$n$，都可确定唯一自然数$a_n$，使$a_0 = c$以及$a_{n++} = f_n(a_n)$恒成立。

   (递归定义是非常强大的，它不仅可以帮助构建需要的数列，还可以用于接下来加法，乘法的定义)