5.2 等价的柯西序列

定义

1. (5.2.1 ε-接近的序列) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\varepsilon > 0$，称$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-接近的，当且仅当对任意$n \in N$均有a_n是ε-接近于b_n的，即$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$。
2. (5.2.3 最终ε-接近的序列) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\varepsilon > 0$，称$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-接近的，当且仅当存在一个$N \geq 0$，使序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-接近的。

   (注：再次申明，上述两个概念都不是标准定义，在本节之外不会再使用上述定义)
3. (5.2.6 等价序列) 称两个序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是**等价的**，当且仅当对任意有理数$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的。

   (注：如同定义5.1.8一样，ε被限制在了有理数范围，但是到最后我们会发现，上述命题中这个限制可以扩展到实数范围)

命题

1. (5.2.8) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列，其中$a_n = 1 + 10^{-n}$，$b_n = 1 - 10^{-n}$，那么序列$a_n|_{n=0}^{\infty}$与是等价的。

   (这个命题直接断定了$1.000\ldots = 0.999\ldots$)

课后习题