3.6 集合的基数

定义

1. （无序号 集合的基数）对于任意一个一个元素个数有限的集合X，称其中元素的数目n为集合X的**基数**，并记为$\#(X)=n$。
2. （3.6.1 基数的相等）称两个集合X与Y有相同的基数，当且仅当存在一个$X\to Y$的双射$f:X\to Y$。
3. （3.6.5 基数定义）设n是一个自然数，称集合X的**基数**为n，当且仅当X与集合$\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$拥有相同的基数。另一种说法是称$X$中有$n$个元素，当且仅当$X$的基数为$n$。
4. （有限集）一个集合是**有限**的，当且仅当它的基数是某个自然数n，否则称这个集合为**无限集**。

命题

（设X，Y，Z为集合）

1. （3.6.4 自反性？）X与X有相同的基数。
2. （3.6.4 对称性？）如果X与Y有相同的基数，则Y与X有相同的基数
3. （3.6.4 可传递性？）如果X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，则认为X与Z也有相同的基数。
4. （3.6.8 基数的唯一性）设集合X的基数为n，则X不可能还有其它的基数。换言之，对任意$m\neq n$，m不可能为X的基数。
5. （3.6.9）假设$n\ge 1$，且X的基数为n，那么X是非空的，而且若有x是X中任意一个元素，则有$X\backslash\{x\}$的基数为$n-1$。
6. （3.6.14 基数运算）集合的基数满足下述命题（设X，Y是有限集）：

   > - 设x是一个对象且x不是X中的元素，则$X\cup\{x\}$是有限的，且$\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$。
   > - $X\cup Y$是有限的，且$\#(X\cup Y)\le\#(X)+\#(Y)$，特别地，当$X\cap Y=\varnothing$时，有$\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$。
   > - 假定$f:X\to Y$是一个函数，那么$f(X)$是一个有限集且满足$\#(f(x))\le\#(X)$，特别地，当f是一个单射时，则有$\#(f(X))=\#(X)$。
   > - 假定Y是X的子集，则Y是有限的，且$\#(Y)\le\#(X)$，若Y是X的真子集，则有$\#(Y)<\#(X)$。
   > - 笛卡尔积$X\times Y$是有限的，且$\#(X\times Y)=\#(X)\times\#(Y)$。
   > - 集合Y^X是有限的，且$\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$。

7. （习题3.6.10 抽屉原理）设A_1，……，A_n都是有限集，且有$\#(\bigcup_{1\le i\le n}A_i)>n$，则存在$i\in\{1,\cdots,n\}$使得$\#(A_i)\ge 2$。

课后习题

3.6.1 证明命题3.6.4

> 分别证明：
>
> 自反性：
>
> X到X间有恒等映射$\iota_{X\to X}$为双射，于是成立结论。
>
> 对称性：
>
> X与Y有相同的基数，则存在$f:X\to Y$为双射，相应的$f^{-1}:Y\to X$也是一个双射，于是Y与X有共同的基数。
>
> 可传递性：
>
> X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，于是存在两个函数$f:X\to Y$与$f:Y\to Z$为双射，根据习题3.3.7结论，则有$g\circ f:X\to Z$也是一个双射，于是X与Z有相同的基数。

3.6.2 证明：一个集合的基数为0，当且仅当它是空集

> 假定该集合为X，基数为0，于是存在双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}\to X$。又有$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$，于是即空函数$f:\varnothing\to X$为双射，根据习题3.3.3的讨论，可以得到空函数$f:\varnothing\to X$为双射，当且仅当$X=\varnothing$，于是结论得证。

3.6.3 设n是一个自然数，且$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to\mathbb{N}$是一个函数，证明：存在一个自然数$M$使得对任意$1\leq i\leq n$，$f(i)\leq M$始终成立（提示：对$n$进行归纳，你可能还需要用到一个引理5.1.14）。由此我们有对任意自然数集$\mathbb{N}$的有限子集都是有界的。

> 对自然数n做归纳：
>
> 当$n=0$时：
>
> f是空函数，结论显然是成立的。
>
> 现假设对$n=m$时成立结论，对$n=m+1$时：
>
> 将函数f变为如下形式：
>
> $$\begin{cases}f(x)=g(x) & 1\leq x\leq m\\ f(m+1)=C\end{cases}$$
>
> 其中C为某个自然数，$g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}\to\mathbb{N}$是一个函数，于是由归纳假设，有存在自然数$M$使得对任意$1\leq i\leq m$，$f(i)=g(i)\leq M$，于是对任意$1\leq i\leq m+1$，若有$M\leq C$，此时存在$f(i)\leq M\leq C$；反之，若有$M>C$，则$f(i)\leq M$依旧恒成立。此时我们取$M'=\max(M,C)$，于是对任意$1\leq i\leq m+1$，$f(i)\leq M'$恒成立，于是假设得证。
>
> 综上，结论得证。

3.6.4 证明命题3.6.14

> 1. 设x是一个对象且x不是X中的元素，则$X\cup\{x\}$是有限的，且$\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$。
>
> 假设存在双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq\#(X)\}\to X$，于是我们定义下面一个函数$g$，它的映射关系有：
>
> $$g(i)=\begin{cases}f(i) & 1\leq i\leq\#(X)\\ x & i=\#(X)+1\end{cases}$$
>
> 且g定义域为$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq\#(X)+1\}$，值域为$X\cup\{x\}$。于是根据基数定义，可以得到$\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$。
>
> ---

2. $X \cup Y$是有限的，且$\#(X \cup Y) \le \#(X) + \#(Y)$，特别地，当$X \cap Y = \varnothing$时，有$\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$。

不妨令$\#(X) = n$，$\#(Y) = m$，于是存在两个双射$f : X \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\}$与$g : Y \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le m\}$。于是我们取下面一个函数$h : X \cup Y \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n + m\}$:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & i \in X \\ g(i) + n & i \in Y \end{cases}$$

于是当$Y \cap X = \varnothing$，于是对任意i_1，$i_2 \in X \cup Y$且$i_1 \ne i_2$，可以分情况讨论得到$h(i_1) \ne h(i_2)$始终成立，于是得知h是单射，h同时又显然是满射，于是h是双射，进而得到$\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$成立。

若存在$Y \cap X \ne \varnothing$，于是此时存在$a > n$与$1 \le b \le n$使得$h(y) = a = b\ (y \in X \cup Y)$，所以此时$h$的映射关系使它不能成为一个函数，考虑修改$h$的定义，$h : X \cup Y \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le k\}$，其映射关系有:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & i \in X \\ g'(i) + n & i \in Y \cap X \end{cases}$$

其中$g' : Y \cap X \to \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le m'\}$为双射，此时可以得到$h$是双射，且$k \le m + n$，进而$\#(X \cup Y) \le \#(X) + \#(Y)$成立。

---

3. 假定$f : X \to Y$是一个函数，那么$f(X)$是一个有限集且满足$\#(f(x)) \le \#(X)$，特别地，当f是一个单射时，则有$\#(f(X)) = \#(X)$。

令$\#(X) = n$，于是存在某个双射$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n\} \to X$，取函数$f' \circ g$，由3.3习题可以得到$f \circ g$，

---

4. 假定Y是X的子集，则Y是有限的，且$\#(Y) \le \#(X)$，若Y是X的真子集，则有$\#(Y) < \#(X)$。

---

5. 笛卡尔积$X \times Y$是有限的，且$\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。

---

6. 集合Y^X是有限的，且$\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$。

本章相关跳转

[实分析 5.1 柯西序列]