

## 5.1 柯西序列

### 定义

1. **(5.1.1 序列)** 设 $m$ 是一个整数。有理数序列 $a_n|_{n=m}^{\infty}$ 是一个从集合 $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq m\}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的函数，它对每一个大于或等于 $m$ 的整数 $n$ 都指定了一个有理数 $a_n$ 。（即 $n \rightarrow a_n$ ）
2. **(5.1.3  $\varepsilon$ -稳定性)** 设 $\varepsilon > 0$ ，序列 $a_n|_{n=0}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -稳定的，当且仅当元素中每一对 $a_j$ 与 $a_k$ 对任意的自然数 $j$ 与 $k$ 都是 $\varepsilon$ -接近的（见上一章4.3节定义4.3.4）。或者说序列 $a_n|_{n=0}^{\infty}$ 是 $\varepsilon$ -稳定的，当且仅当 $d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$ 对任意的自然数 $j, k$ 均成立。

（注：在文献中，这个定义并不是标准定义。在本节之外，我们也不会用到这个定义，下文最终 $\varepsilon$ -稳定性的定义也是如此）

3. **(5.1.6 最终 $\varepsilon$ -稳定性)** 设 $\varepsilon > 0$ ，称序列 $a_n|_{n=0}^{\infty}$ 是最终 $\varepsilon$ -稳定的，当且仅当存在某个自然数 $N \geq 0$ 使得 $a_N, a_{N+1}, \dots$ 是 $\varepsilon$ -稳定的。
4. **(5.1.8 柯西序列)** 有理数序列 $a_n|_{n=0}^{\infty}$ 被称为是**柯西序列**，当且仅当对任意**有理数** $\varepsilon > 0$ ，序列 $a_n|_{n=0}^{\infty}$ 是最终 $\varepsilon$ -稳定的。

（注：事实上对上加粗部分最终可证明 $\varepsilon$ 为实数时结论依旧成立，不过在这里，我们还没有给出实数的定义）

5. **(5.1.12 有界序列)** 设 $M \geq 0$ 是有理数，称序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 以 $M$ 为界，当且仅当 $|a_i| \leq M$ 对任意 $1 \leq i \leq n$ 成立，类似地可以定义无限序列 $a_n|_{n=1}^{\infty}$ 的有界性。

### 命题

1. **(5.1.11 例子?)** 定义 $a_n := \frac{1}{n}$ 的序列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ （即序列 $1, 1/2, 1/3, \dots$ ）是柯西序列。
2. **(5.1.14 有限序列是有界的)** 任意一个**有限序列**都是有界的。
3. **(5.1.15 柯西序列是有界的)** 任意一个**柯西序列**都是有界的。

### 课后习题

### 本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算](#)