6.2 广义实数系

定义

1. (6.2.1 广义实数系) 附加上两个额外元素$+\infty$与$-\infty$的实直线$\mathbb{R}$就是**广义实数系**$\mathbb{R}^*$，其中$+\infty$与$-\infty$互不相同，并且它们与每一个实数都不相同。一个**广义实数**x是**有限的**，当且仅当它是一个实数；一个广义实数是**无限的**，当且仅当它等于$+\infty$或$-\infty$。
2. (6.2.2 广义实数的负运算) 通过额外定义：

$$-(+\infty):=-\infty$$
$$-(-\infty):=+\infty$$

   由此将$\mathbb{R}$上的负运算$x\to(-x)$**推广**到广义实数系$\mathbb{R}^*$上。于是每个广义实数都有一个负数，且$-(-x)=x$总是成立。
3. (6.2.3 广义实数的排序) 称$x\leq y$，当且仅当下列三个命题有一个为真：

   > - x和y都是实数，并且满足$x\leq y$。
   > - $y=+\infty$。
   > - $x=-\infty$。

   如果$x\leq y$且$x\neq y$，那么称$x<y$。有时可以将$x<y$与$x\leq y$写作$y>x$与$y\geq x$。
4. (6.2.6 广义实数的上确界与下确界) 设E是$\mathbb{R}^*$的一个子集，则根据下述法则确定E的上确界或最小上界$\sup(E)$：

   > - 如果E包含在$\mathbb{R}$中，则根据定义5.5.10确定$\sup(E)$。
   > - 如果E包含$+\infty$，则令$\sup(E):=+\infty$。
   > - 如果E包含$-\infty$且不包含$+\infty$，则令$\sup(E):=\sup(E\backslash\{-\infty\})$从而根据结论(a)来确定E的最小上界。

   又定义E的下确界$\inf(E)$为：

$$\inf(E):=-\sup(-E)$$

   (其中$-E$为集合$\{-x:x\in E\}$)

(顺便贴下定义5.5.10防查看麻烦)：

> 设E是实数集的一个子集，如果E是非空的并且存在一个上界，则定义$\sup(E)$为E的最小上界（由定理5.5.9可知，该定义是明确的）。额外引入两个符号$+\infty$与$-\infty$。如果E是非空的并且没有上界，则令$\sup(E):=+\infty$；如果E是空集，则定义$\sup(E):=-\infty$，称$\sup(E)$是E的**上确界**，也可以记作$\sup E$。

命题

1. (6.2.5 广义实数的性质？) 设x，y，z为广义实数，则下述命题为真：

   > - (自反性) $x\leq x$。
   > - (三歧性) $x<y$，$x=y$，$x>y$三者恰有一个为真。
   > - (传递性) 若有$x<y$与$y<z$成立，则$x<z$为真。
   > - (负运算改变序) 若有$x\leq y$成立，则有$-y\leq -x$成立。

2. （6.2.11 上确界与下确界性质）设E是$\mathbb{R}^*$的一个子集，则有下述命题为真：

> - 对任意$x \in E$，有$x \geq \inf(E)$与$x \leq \sup(E)$恒成立。
> - 对任意M为E的上界，有$M \geq \sup(E)$。
> - 对任意M为E的下界，有$M \leq \inf(E)$。

（M是E的上界，即对任意$x \in E$，有$M \geq x$，下界类似）

课后习题

6.2.1 证明命题6.2.5（提示：你可能会用到命题5.4.7）

> 即在x，y，z为广义实数的前提下证明：
>
> - $x \leq x$。
>
> 不妨对x讨论：
>
> > - 若x是有限的，那么根据命题5.4.7结论此时结论成立。
> > - 若$x = +\infty$，则此时根据定义6.2.3可得结论成立。
> > - 若$x = -\infty$，则此时根据定义6.2.3可得结论成立。
>
> 于是结论得证。
>
> ---
>
> - $x < y$，$x = y$，$x > y$三者恰有一个为真。
>
> 我们对x，y讨论，可以得到下表：
>
> | | x是有限的 | $x = -\infty$ | $x = +\infty$ |
> |---|---|---|---|
> | y是有限的 | 根据命题5.4.7(a)，此时有结论成立 | 根据定义6.2.3，此时有$x < y$成立 | 根据定义6.2.3，此时有$x > y$成立 |
> | $y = -\infty$ | 根据定义6.2.3，此时有$y < x$成立 | 根据定义6.2.1，此时有$y = x$成立 | 根据定义6.2.3，此时有$y < x$成立 |
> | $y = +\infty$ | 根据定义6.2.3，此时有$x < y$成立 | 根据定义6.2.3，此时有$x < y$成立 | 根据定义6.2.1，此时有$y = x$成立 |
>
> 综上，于是始终有$x < y$，$x = y$，$x > y$三者恰有一个为真，结论得证。
>
> ---
>
> - 若有$x < y$与$y < z$成立，则$x < z$为真。
>
> x，y，z都是有限的情况下必然有结论成立，我们考虑x，y，z中存在无限的的情况。
>
> 首先我们注意到以下两个事实：
>
> > - x，y不可能是$+\infty$，若有x，y是$+\infty$那么根据前提条件有$x < y$与$y < z$，根据定义6.2.3，$+\infty \leq a$当且仅当$a = +\infty$，但是此时必然有$a = +\infty$，于是不存在有$+\infty < a$对某个广义实数a成立。
> > - y，z不可能是$-\infty$，若有y，z是$-\infty$那么根据前提条件有$x < y$与$y < z$，根据定义6.2.3，$-\infty \geq a$当且仅当$a = -\infty$，但是此时必然有$a = -\infty$，于是不存在有$-\infty > a$对某个广义实数a成立。
>
> 综上，可以得到必然有：x为$-\infty$或有限；y必然有限；z必然有限或为$+\infty$。

于是分类讨论，得到下表：

	x有限	x为$-\infty$
z有限	由命题5.4.7(c)得证结论。	由定义6.2.3，必然有$x<z$成立。
z为$+\infty$	由定义6.2.3，必然有$x<z$成立。	由定义6.2.3，必然有$x<z$成立。

综上，于是结论得证。

- 若有$x\leq y$成立，则有$-y\leq -x$成立。

我们对x，y讨论，可以得到下表：

	x是有限的	$x=-\infty$	$x=+\infty$
y是有限的	根据命题5.4.7(d)，不等式两边同时加上$-(x+y)$，此时不等式变为$-y\leq -x$，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有$-y\leq -x\iff -y\leq +\infty$，由于$-y$有限，于是不等式成立，于是结论成立。	此时$x>y$，不在题目条件限制范围内。
$y=-\infty$	此时$x>y$，不在题目条件限制范围内。	此时$x=y$，不在题目条件限制范围内。	此时$x>y$，不在题目条件限制范围内。
$y=+\infty$	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有$-y\leq -x\iff -\infty\leq -x$，由于$-x$有限，于是不等式成立，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有$-y\leq -x\iff -\infty\leq +\infty$为真，于是结论成立。	根据定义6.2.2与定义6.2.3，此时有$-y\leq -x\iff -\infty\leq -\infty$为真，于是不等式成立，于是结论成立。

综上，于是结论：若有$x\leq y$成立，则有$-y\leq -x$成立得证。

6.2.2 证明定理6.2.11（提示：你可能要用到根据$+\infty$和$-\infty$是否属于E来分情况考虑。如果E中只包含实数，那么你当然可以利用定义5.5.10）

即证明对E是$\mathbb{R}^*$的子集，有：

- 对任意$x\in E$，有$x\geq\inf(E)$与$x\leq\sup(E)$恒成立。

对$x\leq\sup(E)$讨论：

> - 根据定义6.2.6，对E包含$+\infty$时的情况，此时$\sup(E)=+\infty$，而对任意广义实数x，都有$x\leq+\infty$成立，于是此时成立结论。
> - 根据定义6.2.6，对E是$\mathbb{R}$的子集的情况，此时我们根据定义5.5.3进行讨论：
>
> > - 若E无上界且非空，则此时$\sup(E)=+\infty$，而对任意广义实数x，都有$x\leq+\infty$成立，对任意$x\in E$，x都是广义实数，于是此时成立结论。
> > - 若E有上界且非空，则此时$\sup(E)$是E的最小上界，根据上界定义我们知道此时也有对任意$x\in E$，$x\leq\sup(E)$，于是此时成立结论。
> > - 若E为空，此时不存在$x\in E$，于是$\sup(E)$对任意广义实数都成立结论“对任意$x\in E$，$x\leq\sup(E)$”。

> - 根据定义6.2.6，对E包含$-\infty$而不含$+\infty$时的情况，此时E的上确界是$E\backslash\{-\infty\}$的上确界，并且我们知道对任意广义实数x都有$-\infty\leq x$成立，于是结合E是$\mathbb{R}$的子集的情况的讨论也可以得到成立结论。

综上，对任意$x\in E$，$x\leq\sup(E)$恒成立。

对$x\geq\inf(E)$，根据定义有$\inf(E)=-\sup(-E)$，其中$-E$为集合$\{-x:x\in E\}$。跟据前面的讨论，我们知道对任意$y\in -E$都有$y\leq\sup(-E)$成立，于是对任意$x\in E$，可以推论如下：

$$x\in E\iff -x\in -E\iff -x\leq\sup(-E)\iff x\geq-\sup(-E)$$

即$x\geq\inf(E)$，于是结论成立。

综上，对任意$x\in E$，$x\leq\sup(E)$与$x\geq\inf(E)$恒成立。

- 对任意M为E的上界，有$M\geq\sup(E)$。

我们对E的情况进行讨论。

> - 根据定义6.2.6，对E包含$+\infty$时的情况，此时若M是E的上界那么必然有$M\geq+\infty$成立，根据定义6.2.3，可以推知此时必然有$M=+\infty$，于是我们可以得到有$M(+\infty)\geq\sup E(+\infty)$是成立的。
> - 根据定义6.2.6，对E是$\mathbb{R}$的子集的情况，此时我们根据定义5.5.3进行讨论：
>
> > - 若E无实数上界且非空，则此时只有$+\infty$是E的上界（E是广义实数集$\mathbb{R}^*$的子集，而对任意广义实数x总有$x\leq+\infty$成立），此时$\sup E=+\infty\leq+\infty$，结论成立。
> > - 若E有实数上界且非空，则此时$\sup E$是E的最小上界，对任意E的实数上界M总有$M\geq\sup E$成立，此外，$+\infty$也是E的上界，并且$+\infty\geq\sup E$也成立，于是此时结论成立。
> > - 若E为空集，则此时有$\sup E=-\infty$。此时对任意广义M都应该有M是E的上界，并且根据定义6.2.3有$M\geq-\infty$始终成立，于是此时结论成立。
>
> - 根据定义6.2.6，对E包含$-\infty$且不包含$+\infty$的情况，我们先证明一个辅助结论：
>
> > 对任意广义实数集$\mathbb{R}^*$的子集E，M是E的上界，当且仅当M是$E\backslash\{-\infty\}$的上界。
> >
> > 证明：
> >
> > 若M是E的上界，那么对任意的$x\in E$都有$x\leq M$，特别的，由于$E\backslash\{-\infty\}$是E的子集，所以对任意$x\in E\backslash\{-\infty\}$，也有$x\leq M$，即$M$是$E\backslash\{-\infty\}$的上界；若$M$是$E\backslash\{-\infty\}$的上界，那么对任意$x\in E\backslash\{-\infty\}$都有$x\leq M$，此外我们也有$-\infty\leq M$始终成立，于是对任意$x\in(E\backslash\{-\infty\})\cup\{-\infty\}$都有$x\leq M$成立，即对任意$x\in E$都有$x\leq M$，于是$M$也是$E$的上界。
> >
> > 综上，结论得证。
>
> 此时有$\sup E=\sup(E\backslash\{-\infty\})$。对任意$M$是$E$的上界，根据辅助结论有$M$是$E\backslash\{-\infty\}$的上界。综合对$E$是$\mathbb{R}$的子集的情况的讨论，应该有$M\geq\sup(E\backslash\{-\infty\})=\sup E$对任意$M$是$E$的上界成立，于是此时结论成立。

综上，题目结论得证。

- 对任意M为E的下界，有$M\leq\inf(E)$。

> 先证明一个辅助结论：
>
> > 对任意广义实数集$\mathbb{R}^*$的子集E，M为E的下界，当且仅当$-M$为$-E$的上界，其中$-E$为集合$\{-x:x\in E\}$。
> >
> > 证明：
> >
> > 若M为E的下界，则有对任意$x\in E$都有$x\geq M$成立，于是对任意$-x\in -E$，有$x\in E\iff x\geq M$，即$-x\leq -M$。于是根据上界的定义，此时有$-M$是$-E$的上界。
> >
> > 若$-M$是$-E$的上界，则对任意的$-x\in E$都有$-x\leq -M\iff x\geq M$成立，于是对任意$x\in E$，有$-x\in -E$，即$x\geq M$成立，于是根据下界的定义，此时有M是E的下界。
> >
> > 综上，结论得证。
>
> 于是对于任意M是E的下界，根据辅助结论，于是$-M$是$-E$的上界，根据结论(b)，此时有$-M\geq\sup(-E)$成立，这等价于结论$M\leq -\sup(-E)$，根据下确界的定义，于是$M\leq\inf(E)$成立，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 5.4 对实数排序]()

[实分析 5.5 最小上界性质]()