2.2 加法

定义

1. (2.2.1 加法定义) 令m为一个自然数，定义$0 + m :=m$，归纳假设：已定义n加上m，则$(n++) + m := (n + m) + +$。
2. (2.2.7 正数) 称一个自然数是**正**的，当且仅当它不等于0。
3. (2.2.11 自然数的序) 令n，m表示任意两个自然数，称n大于等于m，记作$n \geq m$或$m \leq n$，当且仅当存在自然数a，使得$n = m + a$。特别的，称n严格大于m，记作$n>m$或$m < n$，当且仅当$n \geq m$且$n \neq m$。

命题

1. (无编号 封闭性) 设a，b均为自然数，则$a + b$也是自然数。

   > 证明：
   >
   > 取b为某一自然数，对a使用归纳推理：
   >
   > 对$a = 0$时，有：
   >
   > > $a + b = b$，根据条件，b是自然数，得证。
   >
   > 现归纳性假设对某一自然数n，$a = n$时成立结论，对$a = n + +$时有：
   >
   > > $a + b = (n + +) + b = (n + b) + +$
   > >
   > > 根据归纳假设$n + b$是自然数，又根据公理2.2，于是有$(n + b) + +$也是一个自然数，得证。
   >
   > 于是得证结论。

2. (2.2.2) 对任意自然数，$n + 0 = n$恒成立。
3. (2.2.3) 对任意自然数n与m，$n + (m + +) = (n + m) + +$。
4. (2.2.4 交换律) 对任意自然数n与m，$n + m = m + n$。
5. (2.2.5 结合律) 对任意自然数a，b，c，$(a + b) + c = a + (b + c)$。
6. (2.2.6 消去律) 对任意自然数a，b，c，且有$a + b = a + c$成立，则$b=c$。

   (消去律的存在体现了一种“虚拟减法”的思想，这对后面减法的定义至关重要)
7. (2.2.8) 如果a是正的并且b是一个自然数，那么$a + b$是正的。
8. (2.2.9) 如果a，b都是自然数且$a + b = 0$，那么$a = 0$且$b = 0$。
9. (2.2.10) 令a表示一个正自然数，则恰好存在一个自然数b使得有$b + + = a$
10. (2.2.12 自然数序的性质) 令a，b，c为任意自然数

    > - (序的自反性) $a \geq a$。
    > - (序的可传递性) 如果$a \geq b$且$b \geq c$，则$a \geq c$。
    > - (序的反对称性) 如果$a \geq b$且$b \geq a$，则$a=b$。
    > - (加法保持序不变) $a \geq b$，当且仅当$a + c \geq b + c$。
    > - $b>a$，当且仅当$a + + \leq b$。
    > - $b>a$，当且仅当存在正自然数d使得$b = a + d$。

11. (2.2.13 三歧性）下列三种表述同时只能且一定存在一个为真：

> - $a>b$
> - $a=b$
> - $a<b$

12. (2.2.14 强归纳法原理）令m_0为一个自然数，$P(m)$表示与任意自然数m有关的性质。假定对任意$m\geq m_0$的自然数，均有下述内容成立。

    > 若$P(m')$对任意$m_0\leq m'<m$的自然数m'为真，则$P(m)$为真

    特别地，这表明$P(m_0)$也为真（选取$m=m_0$）。由此有，对任意$m\geq m_0$的自然数m，$P(m)$也为真。

    （使用时，一般选择$m_0=0$或$m_0=1$）

课后习题

2.2.1 证明加法的结合律（提示：固定两个变量，对第三个变量做归纳）

> 假定a，b为某两个自然数，对c做归纳：
>
> 当$c=0$时，证明$(a+b)+0=a+(b+0)$：
>
> > 由命题2.2.2可知$(a+b)+0=a+b$，$a+(b+0)=a+b$，于是$c=0$时结论得证
>
> 现归纳性假设结合律对某个自然数n有在$c=n$的情况下成立，对$c=n++$的情况进行讨论：
>
> > 根据命题2.2.3：
> > 左端有$(a+b)+n++=((a+b)+n)++$。
> > 右端有$a+(b+(n++))=a+(b+n)++=(a+(b+n))++$。
> > 根据归纳假设，又有$(a+b)+n=a+(b+n)$，根据公理2.4，又有$p=q\iff p++=q++$。于是有$(a+b)+n++=a+(b+(n++))$，归纳假设得证。
>
> 于是结合律成立。

2.2.2 令a表示一个正自然数，证明恰好存在一个自然数b使得有$b++=a$

> 对正数a分成进行归纳：
>
> 对$a=1$的情况：
>
> > 显然有$b=0$时，$b++=a$。
>
> 现归纳地假设对某个自然数n在$a=n$时成立结论，对$a=n++$时：
>
> > 于是此时令有$b=n$，自然满足$b++=n++=a$
>
> 于是得证结论。

2.2.3 证明命题2.2.12 自然数序的性质（将会用到很多前面的结论）

> 1. 自反性：取自然数0，显然有$a=a+0$满足定义，于是$a\geq a$。
> 2. 可传递性：$a\geq b$，于是存在自然数d使得$a=b+d$
>
> $$b\geq c\text{，于是存在自然数}e\text{使得}b=c+e$$
>
> 于是可以得到$a=c+(d+e)$，根据封闭性可以得到$(d+e)$也是一个自然数，根据定义可得$a\geq c$。

> 3. 反对称性：$a \geq b$，于是存在自然数d使得$a = b + d$
>
> $b \geq a$，于是存在自然数e使得$b = a + e$
>
> 于是有$a = a + d + e$，依据消去律即$0 = d + e$。
>
> 根据命题2.2.9，于是$d = e = 0$，进而$b = a + 0 \implies b = a$得证。
>
> 4. 加法保持序不变：
> $a \geq b \implies a = b + d(d \in N) \implies (a + c) = (b + c) + d \implies a + c \geq b + c$。
> 5. $a < b \implies b = a + c(c \in N)$且$a \neq b \implies c \neq 0$。
>
> 即c为正数，于是根据命题2.2.10，存在自然数d，$c = d + +$。
>
> 于是有$(a + +) + d = (a + d) + + = a + c = b$，进而$a + + \leq b$得证。
>
> 6. 根据5的内容可以得到该结论。

2.2.4 证明下述三个结论：①对所有自然数b，均有$b \geq 0$；②如果$a > b$，则有$a + + > b$；③如果$a = b$，则有$a + + > b$

> ①
>
> > 对所有自然数b，都有$b = 0 + b$，于是根据定义$b \geq 0$。
>
> ②
>
> > $a > b$，于是存在正数c，$a = b + c$，进而$a + + = b + (c + +)$，
> > $c + + \neq 0 \land c + + \in N$于是可知为正数，于是得证。
>
> ③
>
> > $a = b$，于是$a + + = b + (0 + +)$，$0 + + \neq 0$于是$0 + +$为正数，可知有$a + + > b$。

2.2.5 证明强归纳法原理（提示：定义性质$Q(n)$：$P(m)$对任意满足$m_0 \leq m \leq n$的m均为真）

> 定义性质$Q(n)$：$P(m)$对任意满足$m_0 \leq m \leq n$的m均为真。
>
> 于是强归纳法可以被描述为：若有$Q(m_0)$为真且对任意$m \geq m_0$，若$Q(m)$为真，则
> $Q(m + +)$为真。
>
> 取$n = m - m_0$，对n进行归纳：
>
> 当$n = 0$时：
>
> > $Q(m_0 + n)$显然为真
>
> 现归纳性假设当n等于某自然数c时成立结论，对$n = c + +$：
>
> > 根据条件直接可以得到$Q(m_0 + (n + +))$为真
>
> 于是得证

2.2.6 令n为一个自然数，令$P(m)$为关于自然数的一个性质并且满足：只要$P(m + +)$为真，则$P(m)$为真。假定$P(n)$为真，证明：$P(m)$对任意满足$m \leq n$的自然数m均为真。（这也被称为逆向归纳法原理）（提示：对n使用归纳法）

> 对n做归纳法：
>
> 对$n = 0$时：
>
> > 此时条件为$P(0)$为真，证明对全部$m \leq 0$为真，m仅可以为0，于是结论显然成立。
>
> 现归纳性假设对$n \leq c$的情况下结论成立，对$n = c + +$时：
>
> > 由条件可以推知，$P(c + +)$为真时$P(c)$为真

> > 根据归纳假设，对$P(c)$为真，可推知对任意$m \leq c$的自然数m均有$P(m)$为真。
> >
> > 考虑到$P(c++)$为真，于是对任意$m \leq c++$的自然数m均有$P(m)$为真。
> >
> > 归纳假设得证
>
> 于是得证结论