

5.2 等价的柯西序列

定义

1. (5.2.1 ε -接近的序列) 设 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是两个序列且 $\varepsilon > 0$, 称 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是 ε -接近的, 当且仅当对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均有 a_n 是 ε -接近于 b_n 的, 即 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$.
2. (5.2.3 最终 ε -接近的序列) 设 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是两个序列且 $\varepsilon > 0$, 称 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是最终 ε -接近的, 当且仅当存在一个 $N \geq 0$, 使序列 $(a_n)_{n=N}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=N}^\infty$ 是 ε -接近的。
(注: 再次申明, 上述两个概念都不是标准定义, 在本节之外不会再使用上述定义)
3. (5.2.6 等价序列) 称两个序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是等价的, 当且仅当对任意有理数 $\varepsilon > 0$, 序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 都是最终 ε -接近的。
(注: 如同定义5.1.8一样, ε 被限制在了有理数范围, 但是到最后我们会发现, 上述命题中这个限制可以扩展到实数范围)

命题

1. (5.2.8) 设 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是两个序列, 其中 $a_n = 1 + 10^{-n}$, $b_n = 1 - 10^{-n}$, 那么序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与是等价的。
(这个命题直接断定了 $1.000\dots = 0.999\dots$)

课后习题

5.2.1 证明: 若 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是等价的有理数序列, 那么 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是柯西序列, 当且仅当 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是柯西序列

$(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是等价的, 于是对任意有理数 $\varepsilon_1 > 0$, 序列 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 都是最终 ε_1 -接近的, 即总存在整数 N_1 使得对任意的 $n \geq N_1$ 有 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon_1$ 成立。 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是柯西序列, 于是对任意有理数 $\varepsilon_2 > 0$, 总是存在整数 N_2 使得对任意 $i, j \geq N_2$, $d(a_i, a_j) \leq \varepsilon_2$ 。

对任意有理数 $\varepsilon > 0$, 不妨令有 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3}$, 于是根据上面的结论能分别得到两个整数 N_1 与 N_2 , 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 此时对任意 $i, j \geq N$, 有 $d(a_i, b_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $d(a_j, b_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $d(a_i, b_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, 于是根据距离的性质我们有:

$$d(b_i, b_j) = |(b_i - a_i) + (a_i - a_j) + (a_j - b_j)| \leq d(a_i, b_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, b_j) \leq 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

对任意 $i, j \geq N$ 成立, 于是根据定义可得 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是柯西序列。

5.2.2 设 $\varepsilon > 0$, 证明: 若 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是最终 ε -接近的, 那么 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是有界的, 当且仅当 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是有界的

$(a_n)_{n=0}^\infty$ 与 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是最终 ε -接近的, 即存在整数 N 使得对任意的 $n \geq N$ 有 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$ 成立。 $(a_n)_{n=0}^\infty$ 是有界的, 于是对任意 $n \geq N$, 存在某个正数 M 使得 $|a_n| \leq M$ 。于是根据绝对值的三角不等式, $|b_n - a_n + a_n| \leq |a_n| + |b_n - a_n|$ ($n \geq N$)。又 $|a_n| \leq M$, $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$, 于是对任意 $n \geq N$, $|b_n| \leq M + \varepsilon$ 。对有限序列 $(b_n)_{n=0}^{N-1}$, 根据命题5.1.14, 可以得到 $(b_n)_{n=0}^{N-1}$ 存在一个界 M' , 于是取 $G = \max(M', M + \varepsilon)$, 可以得到对任意 $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq G$, 于是 $(b_n)_{n=0}^\infty$ 是有界的。

