

5.2 等价的柯西序列

定义

1. (5.2.1 ε -接近的序列) 设 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是两个序列且 $\varepsilon > 0$, 称 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是 ε -接近的, 当且仅当对任意 $n \in N$ 均有 a_n 是 ε -接近于 b_n 的, 即 $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$ 。
2. (5.2.3 最终 ε -接近的序列) 设 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是两个序列且 $\varepsilon > 0$, 称 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是最终 ε -接近的, 当且仅当存在一个 $N \geq 0$, 使序列 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是 ε -接近的。

(注: 再次申明, 上述两个概念都不是标准定义, 在本节之外不会再使用上述定义)

3. (5.2.6 等价序列) 称两个序列 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是等价的, 当且仅当对任意有理数 $\varepsilon > 0$, 序列 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 都是最终 ε -接近的。

(注: 如同定义5.1.8一样, ε 被限制在了有理数范围, 但是到最后我们会发现, 上述命题中这个限制可以扩展到实数范围)

命题

1. (5.2.8) 设 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是两个序列, 其中 $a_n = 1 + 10^{-n}$, $b_n = 1 - 10^{-n}$, 那么序列 $a_n|_{n=0}^\infty$ 与 $b_n|_{n=0}^\infty$ 是等价的。

(这个命题直接断定了 $1.000\dots = 0.999\dots$)

课后习题