5.1 柯西序列

定义

1. (5.1.1 序列) 设m是一个整数。有理数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个从集合$\{n \in Z : n \geq m\}$到$\mathbb{Q}$的函数，它对每一个大于或等于m的整数n都指定了一个有理数a_n。 (即$n \to a_n$)
2. (5.1.3 ε-稳定性) 设$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-稳定的，当且仅当元素中每一对a_j与a_k对任意的自然数j与k都是ε-接近的 (见上一章4.3节定义4.3.4) 。或者说序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-稳定的，当且仅当$d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$对任意的自然数$j$，$k$均成立。

   (注：在文献中，这个定义并不是标准定义。在本节之外，我们也不会用到这个定义，下文最终ε-稳定性的定义也是如此)
3. (5.1.6 最终ε-稳定性) 设$\varepsilon > 0$，称序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-稳定的，当且仅当存在某个自然数$N \geq 0$使得a_N，a_{N+1}，……是ε-稳定的。
4. (5.1.8 柯西序列) 有理数序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$被称为是**柯西序列**，当且仅当对任意**有理数**$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-稳定的。

   (注：事实上对上加粗部分最终可证明ε为实数时结论依旧成立，不过在这里，我们还没有给出实数的定义)
5. (5.1.12 有界序列) 设$M \geq 0$是有理数，称序列a_1，a_2，……，a_n以M为界，当且仅当$|a_i| \leq M$，对任意$1 \leq i \leq n$成立。类似地可以定义无限序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的有界性。

命题

1. (5.1.11 例子？) 定义$a_n := \frac{1}{n}$的序列a_1，a_2，a_3，…… (即序列1，$1/2$，$1/3$，…….) 是柯西序列。
2. (5.1.14 有限序列是有界的) 任意一个**有限序列**都是有界的。
3. (5.1.15 柯西序列是有界的) 任意一个**柯西序列**都是有界的。

课后习题

5.1.1 证明引理5.1.15 (提示：利用$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是最终ε-稳定的。所以它能够被划分成一个有限序列和一个1-稳定的序列。然后，对有限部分使用引理5.1.14。注意，这里使用的数字1没有任何特别的地方，其他任何正数都足以用在这里)

> 对任意一个柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，根据定义对任意有理数$\varepsilon > 0$，都应该有$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是最终ε-稳定的。不妨取$\varepsilon = 1$，于是存在某一个正整数N，使得对任意$n \geq N$都有$|a_n - a_N| \leq 1$，于是可以将$(a_n)_{n=1}^{\infty}$分成两个部分，即有限序列的$(a_n)_{n=1}^{N-1}$部分与无限序列的$(a_n)_{n=N}^{\infty}$部分。对前者，根据命题5.1.14我们可以得到它的一个界A，对后者，由于对任意$n \geq N$都有$|a_n - a_N| \leq 1$，由此可以推导出$a_N - 1 \leq a_n \leq a_N + 1$，于是有$|a_n| \leq \max(|a_N - 1|, |a_N + 1|) = C$，即$C$是后者的界。于是取$M = \max(C, A)$，此时应当有对任意$n \geq 1$，$|a_n| \leq M$ (对任意$1 \leq n \leq N - 1$，$|a_n| \leq A \leq M$；对任意$N \leq n$，$|a_n| \leq C \leq M$) ，于是可以得到M是$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的界，即任意一个柯西序列都是有界的。

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]