3.2 罗素悖论

公理

策梅洛-弗兰克尔集合论公理（其二）

> 1. （3.8 万有分类公理）假设对任意的对象x，存在关于x的性质$P(x)$（即对每一个对象x，$P(x)$要么为真要么为伪），则存在一个集合$\{x : P(x)\text{为真}\}$，使对任意对象y有下述命题成立：
>
> $$y \in \{x : P(x)\text{为真}\} \iff P(y)\text{为真}$$
>
>   同时该公理等价于下表述：
>
> $$\text{存在一个万有集合}\Omega\text{，它由所有的对象组成。}$$
>
> 2. （3.9 正则性）如果A是一个非空集合，则A中至少存在一个元素x满足下述命题：
>
> $$x\text{不是一个集合，或者}x\text{与}A\text{不相交。}$$
>
>   （该公理也被称为基础公理，该公理断定了一个A中必然存在一个元素x位于对象层级中的非常低的层级，以至于它不能包含A中的任何元素）
>
>   > 推论：
>   >
>   > 1. （无编号，见习题3.2.2）如果A是一个集合，则$A \notin A$，更进一步地如果A，B是两个集合，则下述表述至少有一个为真：
>   >
>   >   ①$A \notin B$ ②$B \notin A$ ③$A \notin B$且$B \notin A$。

（关于公理1，该公理的存在引起了一个悖论，即罗素悖论，它首先假定了一个这样的性质：

$$P(x) : x\text{是一个集合, 且}x \notin x$$

然后对于这个性质，利用万有分类公理，于是可以构建这样一个集合ψ：

$$\psi := \{x : x\text{是一个集合, 且}x\text{不包含自身}\}$$

对于这个集合ψ，无法判断它是否属于它的自身。所以非常可惜该公理不可纳入集合论，否则将大大简化集合论的公理基础。）

课后习题

3.2.1 假定万有分类公理为真，证明从万有分类公理出发可以推理出空集公理，单元素集与双元素集公理，并集公理，分类公理与替代公理（因此可以看到，若是万有分类公理成立，集合论的基础将被大大简化）

> 对于不同的公理，使用不同的性质$R(x)$可以构造出需要的集合（在下文中将用C表示由万有分类公理与指定性质$R(x)$构造的集合）
>
> 空集公理：
>
> $R(x)$：x不是元素，因为对任意元素x都应该有x是元素，于是$\forall x$，$x \notin C$，即C就是空集公理所描述的空集。
>
> 单元素集与双元素集公理：

> $R(x)$：$x=a$，此时对所有元素，仅有a这一元素使$R(x)$为真，于是构造出仅包含a一个元素的集合。
>
> $R(x)$：$x=a$或$x=b$，此时对所有元素，仅有a，b这两个元素使$R(x)$为真，于是构造出包含a，b两个元素的集合。
>
> 并集公理：
>
> $R(x)$：$x\in A$或$x\in B$，于是对于C中的元素y，都满足$y\in A$或$y\in B$，即构造出了$A\cup B$。
>
> 分类公理：
>
> $R(x)$：$x\in A$且$P(x)$为真，于是对任意$y\in C \iff y\in A$且$P(y)$为真。即由分类公理构造的集合
>
> 替代公理：
>
> $R(x)$：$\exists y\in A$，$P(x,y)$为真

3.2.2 利用正则公理与单元素集公理证明：对任意一个非空集合A，$A\notin A$，进一步地，如果A，B是集合，那么有$A\notin B$，$B\notin A$至少有一个成立。

> $A\notin A$:
>
> 假设存在$A\in A$，于是对于集合$\{A\}$应当有正则公理成立，但是根据前面推论，有$\{A\}\cap A=A\neq\varnothing$，这违反了正则公理，进而不存在非空集合$A$使得$A\in A$。
>
> 于是得证对任意集合$A\notin A$。
>
> ---
>
> $A\notin B$，$B\notin A$至少有一个成立：
>
> 即证明：$A\in B$与$B\in A$不可能同时成立。
>
> 假设此时有$A\in B$与$B\in A$成立，对集合$\{A,B\}$应该有正则公理成立，于是$\{A,B\}$中两个元素A，B，$B\in A\cap\{A,B\} \iff A\cap\{A,B\}\neq\varnothing$，
> $A\in B\cap\{A,B\} \iff B\cap\{A,B\}\neq\varnothing$
>
> 于是对于集合$\{A,B\}$，不满足正则公理。
>
> 于是不能存在情况使得$A\in B$与$B\in A$同时成立。

3.2.3 在假定其他集合论公理成立的情况下，验证万有分类公理与下面这样一个命题等价：存在一个由一切对象构成的集合Ω（通常也称之为万有集合，即对任意一个x，$x\in\Omega$）

> 假设万有分类公理成立，那么令性质$Q(x)$：x是对象。
>
> 那么对任意x，都会有$x\in\{x:Q(x)\}$，即$\{x:Q(x)\}=\Omega$。
>
> 假设存在这么一个万有集合Ω，对给定的性质$Q(x)$与Ω使用分类公理，于是得到这样一个集合C，对任意元素y有$y\in\Omega$且$P(y)$为真 $\iff$ y是元素且P(y)$$为真。由此导出万有分类公理。