6.3 序列的上确界与下确界

定义

1. (6.3.1 序列的$\sup$与$\inf$) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，则定义$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$为集合E:

$$E = \{a_n : n \geq m\}$$

   的**上确界**，并定义$\inf(a_n)_{n=m}^{\infty}$为同一个集合E的**下确界**。

命题

1. (6.3.6 最小上界性质) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，且设x是广义实数有:

$$x := \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$$

   那么$a_n \leq x$对所有$n \geq m$均成立，且只要$M \in \mathbb{R}^*$是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个上界 (即对所有$n \geq m$均有$a_n \leq M$) ，则有$M \geq x$。最后，对每一个满足$y \leq x$的广义实数y，至少有存在一个$n \geq m$使得$y < a_n < x$。
2. (6.3.8 单调有界序列收敛) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，它存在一个上界$M \in \mathbb{R}$，并且它还是单调递增的 (即对全部$n \geq m$，均有$a_{n+1} > a_n$) 。那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的，并且实际上有:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq M$$

3. (6.3.10 一个特例？) 设$0 < x < 1$，那么有:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

   上式在$x > 1$时不成立。 (课本例1.2.3的谜团之一)

课后习题

6.3.1 证明例 6.3.4 中的结论

>

6.3.2 证明命题 6.3.6 。 (提示：利用定理6.2.11)

>

6.3.3 证明命题 6.3.8 (提示：利用命题6.3.6以及$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是递增序列的假设取证明$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$)

>

6.3.4 解释为什么当$x>1$时命题6.3.10不成立。实际上就是相当于证明当$x>1$时，序列$(x^n)_{n=1}^{\infty}$是发散的。（提示：利用反证法，恒等式$\left(\frac{1}{x}\right)^n x^n=1$和定理6.1.19中的极限定律）并将本结论与例1.2.3中的论述进行比较，现在你能理解为什么例1.2.3推理过程中存在缺陷吗？

本节相关跳转

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 6.2 广义实数系