6.6子序列

定义

1. (6.6.1 子序列）设有实数序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，称有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列，当且仅当存在一个严格递增（即对$\forall n \in \mathbb{N}$，均有$f(n+1) > f(n)$）的函数$f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得有：

   $$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{f(n)}$$

   （注：定义这里不对f做过多的假设，尽管它必然是一个单射）

命题

1. (6.6.4 自反与传递？）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是实数序列，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。

   另外若有$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列，那么$(c_n)_{n=0}^{\infty}$是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的子序列。
2. (6.6.5 与极限相关联的子序列）假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - 序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于L。
   > - $(a_n)_{n=0}^{\infty}$的每一个子序列都收敛于L。
3. (6.6.6 与极限点相关的子序列）假设有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并设L是一个实数，则下述两个命题在逻辑上是等价的：

   > - L是$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的极限点。
   > - 存在$(a_n)_{n=0}^{\infty}$的一个子序列收敛于L。
4. (6.6.8 波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个有界序列（即存在一个实数$M > 0$使得$|a_n| \le M$对全体$n \in \mathbb{N}$成立），那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$至少有一个收敛的子序列。

   (注：波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理说明了如果一个序列是有界的，那么它**最终将收敛于某些地方，无法散布到广阔的空间中**，也**无法阻止自己捕获极限点**)

课后习题

6.6.1 证明引理6.6.4

6.6.2 你能否找到两个不同的序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$使得其中的一个序列是另一个序列的子序列

6.6.3 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个无界序列，证明：$(a_n)_{n=0}^{\infty}$有一个子序列$(b_n)_{n=0}^{\infty}$使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}$存在且等于$0$

（提示：对任意自然数j，递归地引入量$n_j := \min\{n\in\mathbb{N} : |a_n|\geq j; n > n_{j-1}\}$（当$j=0$时，忽略条件$n > n_{j-1}$），首先解释为什么集合$\{n\in\mathbb{N} : |a_n|\geq j; n > n_{j-1}\}$是非空的，然后令$b_j := a_{n_j}$）

6.6.4 证明命题6.6.5（注意，两个蕴涵关系中有一个的证明非常简短）

6.6.5 证明命题6.6.6（提示：为了证明(a)蕴涵着(b)，对任意自然数j定义数$n_j := \min\{n > n_{j-1} : |a_n - L|\leq \frac{1}{j}\}$，其中令$n_0 := 0$；解释为什么集合$\{n > n_{j-1} : |a_n - L|\leq \frac{1}{j}\}$是非空的，然后考虑序列$\left(a_{n_j}\right)_{j=0}^{\infty}$）