7.3 非负数的和

命题

1. (7.3.1 上界推断？) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个非负实数的形式级数，则这个级数是收敛的，当且仅当存在一个实数M使得：

   $$\sum_{n=m}^{N} a_n \leq M$$

   对所有整数$N \geq m$成立。

   推论： (7.3.2 比较判别法) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$是两个非负实数的形式级数，且对任意$n \geq m$均有$|a_n| \leq b_n$，则若有$\sum\limits_{n=m}^{\infty} b_n$收敛，那么$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的，并且有：

   $$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$

   (比较判别法中常使用几何级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty} x^q$)

2. (7.3.3 几何级数) 设x是实数，若$|x| \geq 1$，则级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty} x^q$发散，反之若$|x| < 1$，则级数$\sum\limits_{q=0}^{\infty} x^q$绝对收敛，且有：

   $$\sum_{q=0}^{\infty} x^q = \frac{1}{1-x}$$

3. (7.3.4 柯西准则) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个**递减的非负实数**序列，则级数是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的，当且仅当级数：

   $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots\ldots$$

   是收敛的。

4. (7.3.6 柯西准则相关？) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个递减的非负实数序列，则对任意的自然数K，有$S_{2^{K+1}-1} \leq T_K \leq 2S_{2^K}$，其中，$T_K = \sum\limits_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k}$，$S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$。

   (于是$S_{2^{K+1}-1} = \sum\limits_{n=0}^{2^{K+1}-1} a_n$，$2S_{2^K} = 2\sum\limits_{n=0}^{2^K} a_n$。该引理用于柯西准则的证明)

   推论： (7.3.7 调和级数？) 设$q > 0$为有理数，那么当$q > 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$收敛；当$q \leq 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$发散。

课后习题