7.5 根值判别法与比值判别法

命题

1. (7.5.1 根值判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，并且假设$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$：

> - 如果$\alpha < 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
> - 如果$\alpha > 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
> - 如果$\alpha = 1$，那么给不出任何结论。

2. (7.5.2 级数的相关结论) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个**正数**序列，则有：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

推论： (7.5.3 比值判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个所有项不为0的实数级数，并且假设有$\alpha = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则：

> - 如果$\limsup_{n\to\infty} \alpha < 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
> - 如果$\liminf_{n\to\infty} \alpha > 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
> - 其他情况，不给出任何结论。

3. (7.5.4 另一个推论？) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$。

课后习题

7.5.1 证明引理7.5.2中的第一个不等式

>

7.5.2 设x是一个满足$|x| < 1$的实数，并设q是实数。证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^q x^n$是绝对收敛的，并且$\lim_{n\to\infty} n^q x^n = 0$

>

7.5.3 给出一个发散级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$的例子，其中每一项a_n都是正数并且使得$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$。另外给出一个收敛级数$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ 的例子，其中每一项都是正数并且使得$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n^{1/n} = 1$。（提示：利用推论7.3.7）这表明即使级数的所有项都是正的且所有的极限也都收敛，比值判别法和根值判别法也可能无法判定级数是否收敛

> 发散级数的例子：
>
> 考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$，根据命题6.1.11，命题7.5.4与命题6.1.19我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$$
>
> 但是根据推论7.3.7，我们知道级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。
>
> ---
>
> 收敛级数的例子：
>
> 考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，首先根据命题6.1.19，我们有：
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$
>
> 此外，根据命题7.5.2，我们有：
>
> $$\lim\inf_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}(=1) \leq \lim\inf_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{1/n} \leq \lim\sup_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{1/n} \leq \lim\sup_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}(=1)$$
>
> 于是根据命题6.4.12，我们由$\lim\inf_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{1/n} = \lim\sup_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{1/n} = 1$可以得到$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}} = 1$。
>
> 同时根据推论7.3.7，我们也可以直接得出$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的。

本节相关跳转

[实分析 7.3 非负数的和]