7.1 有限级数

定义

1. (7.1.1 有限级数) 设m，n是整数，并且$(a_i)_{i=m}^{n}$是一个有限实数列。其中，对每一个m，n间的整数$i(m \leq i \leq n)$都指定了一个实数a_i，那么根据下述递推公式来定义**有限和（有限级数）**$\sum_{i=m}^{n} a_i$:

   > 1. $\sum_{i=m}^{n} a_i := 0 \quad (n < m)$。
   > 2. $\sum_{i=m}^{n+1} a_i := (\sum_{i=m}^{n} a_i) + a_{n+1} \quad (n \geq m-1)$。

2. (7.1.6 有限集上的求和运算) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in \mathbb{N}$），并且设$f: X \to \mathbb{R}$是一个从X到实数集$\mathbb{R}$的函数（即f对X中每一个元素x都指定了一个实数$f(x)$）。于是首先任意选取一个$\{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$到$X$的双射$g$（根据假定的$X$中有$n$个元素可以得知这样的双射是存在的）。则定义**有限和**$\sum_{x \in X} f(x)$为:

   $$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(g(i))$$

   （注：变量i（也称为**求和指标**）是一个**约束变量**（也作**虚拟变量**），表达式实际上并不依赖于任何被称为i的量。特别地，可以用任何其它符号代替求和指标i并得到同样的结果）

命题

1. (7.1.4 一些有限级数相关？) 下述命题成立:

   > 1. 设$m \leq n \leq p$都是整数，并且对任意的整数$i(m \leq i \leq p)$都指定了一个实数a_i，则有:
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i$$
   >
   > 2. （指标不影响有限和？）设$m \leq n$都是整数，k是另一个整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则:
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$
   >
   > 3. （有限级数的加和？）设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了实数a_i和b_i，则:
   >
   > $$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$
   >
   > 4. （有限和的数乘？）设$m \leq n$都是整数，c是另一个实数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则:

$$\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)$$

5. (有限级数的三角不等式) 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了一个实数a_i，则：

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| \geq \left|\sum_{i=m}^{n} a_i\right|$$

6. (有限级数的比较判别法) 设$m \leq n$都是整数，并且对任意的整数$m \leq i \leq n$都指定了实数a_i和b_i。若对全部$m \leq i \leq n$有$a_i \leq b_i$，则：

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \leq \sum_{i=m}^{n} b_i$$

2. (7.1.8 有限求和是定义明确的) 设X是含有n个元素的有限集（其中$n \in N$），并且设$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且假设有$g : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$与$h : \{i \in \mathbb{N}\text{：} 1 \leq i \leq n\} \to X$都是双射，则：

$$\sum_{i=1}^{n} f(g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(h(i))$$

(注：在无限集上的求和的时候，情况要更加复杂些，可以看8.2节)

3. (7.1.11 有限集上求和运算的基本性质) 下述命题是正确的：

1. (空函数) 如果X是空集，且$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数 (即f是空函数)，则有：

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$

2. (单元素集) 如果X是由单独的一个元素构成的集合（即$X = \{x_0\}$），则有：

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_0)$$

3. (替换法I) 若X是一个有限集，$f : X \to \mathbb{R}$是一个函数，并且$g : Y \to X$是一个双射，则：

$$\sum_{f}(x)(x \in X) = \sum_{f}(g(y))(y \in Y)$$

4. (替换法II) 设$n \leq m$都是整数，且X为集合$X = \{i \in Z\text{：} n \leq i \leq m\}$，若是对每一个整数$i \in X$都指定了一个实数$a_i$，则：

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{x \in X} a_i$$

5. (有限集求和加和？) 设X与Y是两个不相交的有限集（$X \cap Y = \varnothing$），且$f : X \cup Y \to \mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\sum_{x \in X \cup Y} f(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right) + \left(\sum_{y \in Y} f(y)\right)$$

6. (线性性质I) 设X是一个有限集，并且设$f : X \to \mathbb{R}$和$g : X \to \mathbb{R}$都是函数，则：

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

> 7. （线性性质II）设X是一个有限集，设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，并且设c是一个实数，则：
>
> $$\sum_{x\in X}c\cdot f(x)=c\cdot\left(\sum_{x\in X}f(x)\right)$$
>
> 8. （单调性）设X是一个有限集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$和$g:X\to\mathbb{R}$是使得$f(x)\leq g(x)$对全部$x\in X$成立的两个函数，则：
>
> $$\sum_{x\in X}f(x)\leq\sum_{x\in X}g(x)$$
>
> 9. （三角不等式）设X是一个有限集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是函数，则：
>
> $$\sum_{x\in X}|f(x)|\geq\left|\sum_{x\in X}f(x)\right|$$

4. （7.1.13 笛卡尔积？）设X与Y是有限集，且设$f:X\times Y\to\mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\sum_{x\in X}(\sum_{y\in Y}f(x,y))=\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)$$

5. （7.1.14 有限级数的富比尼定理）设X与Y是有限集，且设$f:X\times Y\to\mathbb{R}$是一个函数，则：

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in Y}f(x,y)\right)\\=&\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)\\=&\sum_{(y,x)\in Y\times X}f(x,y)\\=&\sum_{y\in Y}\left(\sum_{x\in X}f(x,y)\right)\end{aligned}$$

课后习题

本节相关跳转

[实分析 8.2 在无限集上求和]