3.1 基础知识

公理

策梅洛-弗兰克尔集合论公理（其七）

> 1. **(3.1 集合是对象)** 如果A是一个集合集合，则A是一个对象。
> 2. **(3.2 空集)** 存在一个集合$\varnothing$被称为空集，它不包含任意元素，即任意对象x，$x \notin \varnothing$。
> 3. **(3.3 单元素集与双元素集)** 如果a是一个对象，则存在一个集合a只含单一元素a，同理若a，b均为对象，则存在集合$\{a, b\}$只含有元素a与b。称前者为单元素集，后者为双元素集。
> 4. **(3.4 并集)** 给定任意两个集合A与B，存在一个集合$A \cup B$，称为A与B的并集，它包含了A与B它有下述性质：
>   对任意对象x，$x \in A \cup B$则有$x \in A$或$x \in B$，换言之：
> $$x \in A \cup B \iff x \in A\text{或}x \in B$$
> 5. **(3.5 分类公理)** 设A为一个集合，对任意的$x \in A$，令$P(x)$表示关于x的一个性质，对任意给定的x，$P(x)$的真伪均可确定，则可以证明存在一个集合$\{x \in A : P(x)\}$满足下述性质：
> $$\text{对任意对象}y, y \in \{x \in A : P(x)\}, \text{则有}y \in A\text{且}P(y)\text{为真。}$$
> 6. **(3.6 替代公理)** A是一个集合，对任意$x \in A$与任意对象y，设存在一个关于x，y的性质$P(x, y)$，使得对任意$x \in A$，最多可以找到一个对象y使得$P(x, y)$为真，则存在一个集合$\{y : P(x, y)\text{对某}x \in A\text{为真}\}$，使对任意的对象$z$有下述性质：
> $$z \in \{y : P(x, y)\text{对某}x \in A\text{为真}\}, \text{则有对某}x \in A, \text{有}P(x, z)\text{为真。}$$
> 7. **(3.7 无穷大公理与自然数集)** 存在一个集合$\mathbb{N}$（自然数集），对象0在$\mathbb{N}$中，且由每一个自然数$n \in \mathbb{N}$所指定满足皮亚诺公理的对象$n++$也在$\mathbb{N}$中。（结合第二章内容观看）

定义

1. **(3.1.1 非正式的)** 集合A被定义为任意一堆没有次序的对象（例如$\{3, 8, 5, 2\}$是一个集合）,如果x是这堆对象中的一个，则称x是A中元素，记有$x \in A$；否则，记有$x \notin A$（例如，1是$\{1, 2, 3\}$中的元素，有$1 \in \{1, 2, 3\}$，而$7 \notin \{1, 2, 3\}$）。
2. **(3.1.4 集合的相等)** 称两个集合A与B是相等的，即$A = B$，当且仅当A中的每一个元素都是B中的元素，B中的每一个元素都是A中的元素。（换句话说互为子集，证明时严格按这样写）
3. **(3.1.15 子集)** 设A和B都是集合，称A是B的子集，记为$A \subseteq B$，当且仅当A中每一元素都是B中元素，等价于下述命题为真：
   $$\text{对任意的对象}x\text{，}x \in A \to x \in B$$
   特别地，若有$A \subseteq B$且$A \neq B$则称A是B的真子集，记为$A \subsetneq B$。
4. **(3.1.23 交集)** 两个集合的交集$A \cap B$，被定义为这样一个集合：$\{x \in A : x \in B\}$，即$A \cap B$是由同时属于A与B的元素构成，于是对任意的对象x有：
   $$x \in A \cap B \iff x \in A\text{且}x \in B$$

5. (3.1.27 差集) 给定两个集合A与B，定义$A-B$或A/B是由A中所有不属于B的元素构成的集合，即有：

$$A\backslash B := \{x\in A : x\notin B\}$$

命题

1. (3.1.6 单个选择) 设A是一个非空集合，则存在一个对象x，使得$x\in A$。
2. (3.1.13 并集的运算) 若a，b均为对象，则$\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}$，如果A，B，C均为集合，则求并运算是可交换的，即$A\cup B=B\cup A$，同时并集运算也是可结合的，即有$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，特别地，应该有$A\cup A=A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$。
3. (3.1.18 集合的包含关系与集合是偏序的) 设A，B，C为集合，如果$A\subseteq B$且$A\subseteq C$，则$A\subseteq C$，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$A=B$，若$A\subsetneq B$且$A\subsetneq C$，则$A\subsetneq C$。
4. (3.1.28 布尔代数) 假定A，B，C为集合，X有A，B，C均为其子集。

> - (最小元) $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$。
> - (最大元) $A\cup X=X$，$A\cap X=A$。
> - (恒等) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$。
> - (交换律) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。
> - (结合律) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$与$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$恒成立。
> - (分配律) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。
> - (分拆法) $A\cup(X\backslash A)=X$，$A\cap(X\backslash A)=\varnothing$。
> - (德•摩根定律) $X\backslash(A\cup B)=(X\backslash A)\cap(X\backslash B)$，$X\backslash(A\cap B)=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$。

课后习题

3.1.1 证明集合相等的定义是自反的，对称的，可传递的

> 自反性（证明对任意集合A，$A=A$成立）：
>
> > 对A中任意元素x，x是A中的元素，于是任意A中元素均是A中元素，于是得证有$A=A$
>
> 对称性（证明对集合A，B，若有$A=B$为真，则有$B=A$成立）：
>
> > 对任意元素x，由$A=B$可知$x\in A\implies x\in B$且$x\in B\implies x\in A$。于是根据集合相等的定义，可以得到$B=A$。得证。
>
> 可传递性（证明对集合A，B，C，若有$A=B$，$B=C$，则有$A=C$）：
>
> > 对任意元素$x\in A$，根据题设可以推知：$x\in A\implies x\in B\implies x\in C$。
> > 相应的，对任意元素$y\in C$，由题设可以推知：$y\in C\implies y\in B\implies y\in A$。
> > 于是综上有：对任意A中元素x，可以推知$x\in C$，对任意C中元素y，可以推知$y\in A$。
> > 于是根据集合相等的定义可以推知两者相等，得证。
>
> 综上，结论得证。

3.1.2 仅使用集合相等的定义，公理3.1，3.2与3.3证明四个集合$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$两两之间互不相等。

> 先证明$\varnothing$同另外三者不等:
>
> > 对于另外三者中的元素，假设$\varnothing$与它们相等，根据公理3.3，可以得到另外三个集合中分别有元素$\varnothing, \{\varnothing\}, \varnothing$，根据假设与集合相等的定义，此时应有：$\varnothing \in \varnothing$和$\{\varnothing\} \in \varnothing$。根据空集公理，这个结论违背了任意元素均不属于空集的定义，于是可以得到$\varnothing$同其他三个集合均不相等。
>
> 再证明$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$与$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$之间不相等:
>
> > 根据双元素集的公理$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$中有两个元素$\{\varnothing\}$与$\varnothing$，假设$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$与$\{\{\varnothing\}\}$和$\{\varnothing\}$之间是相等的。那么根据集合相等的定义，可以简单推知$\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$与$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$，再根据单元素集公理，于是即存在：$\varnothing = \{\varnothing\}$，根据上文证明，$\varnothing \neq \{\varnothing\}$，于是假设不 成立，$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$与$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$之间不相等。
>
> 最后证明$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$之间不相等:
>
> > 根据集合相等的定义，若两者相等，要求$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$，$\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$，再由单元素集公理，根据单元素集公理，$\{\{\varnothing\}\}$唯一元素：$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}$唯一元素：$\varnothing$。于是若结论成立，只能有：$\varnothing = \{\varnothing\}$，这已经被证明是不成立的了，于是假设错误，结论得证。
>
> 于是证明完毕。

3.1.3 证明并集的运算中的全部性质

> 课本上已有结合律的证明
>
> 证明：若a，b均为对象，则$\{a, b\}=\{a\} \cup \{b\}$。
>
> > 由公理3.3可知$\{a\}$，$\{b\}$是单元素集，$\{a, b\}$是双元素集，于是有:
> >
> > $\{a\}$中单元素a，$\{b\}$中单元素b，$\{a, b\}$中双元素a，b。
> >
> > 根据并集定义$\{a\} \cup \{b\}$中的任意元素x应具有性质：$x \in \{a\}$或$x \in \{b\}$，结合$\{a\}$，$\{b\}$是单元素集的事实，于是该性质等价于$x = a$或$x = b$，于是可以得到$x \in \{a, b\}$。
> >
> > 对于任取的元素$x \in \{a, b\}$，可以分类讨论$x = a$与$x = b$的情况，于是有$x \in \{a\}$与$x \in \{b\}$，根据并集定义，这两种情况下都有$x \in \{a, b\}$。
> >
> > 根据上文的讨论，得到关系：$\forall x \in \{a\} \cup \{b\}, x \in \{a, b\}$，$\forall y \in \{a, b\}, x \in \{a\} \cup \{b\}$。于是根据集合相等的定义，有$\{a, b\}=\{a\} \cup \{b\}$
>
> 证明：$A \cup B = B \cup A$
>
> > 对$\forall x \in A \cup B$，$x \in A$或$x \in B$，这等同于$x \in B$或$x \in A$，表明$x \in B \cup A$。反过来，同理可推知$\forall y \in B \cup A$，$y \in A \cup B$。于是根据集合相等的定义，可以推知$A \cup B = B \cup A$。

3.1.4 证明集合包含的关系（3.1.18）

> 第一个命题的证明在课本，对后两个命题证明
>
> 证明：$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则$A = B$
>
> > 根据子集的定义，$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则有$\forall x, y$，$x \in A \to x \in B$，$x \in B \to x \in A$。根据集合相等的定义，这就可以直接推知$A = B$。
>
> 证明：若$A \subsetneq B$且$A \subsetneq C$，则$A \subsetneq C$

> $A \subsetneq B$，于是存在有：①对任意元素$x \in A$，$x \in B$。②存在元素$y \in B$，$y \notin A$。又有$B \subsetneq C$，于是：①对任意元素$x \in A$，$x \in B \Longrightarrow x \in C$。②存在元素$y \in C$，$y \in B$，$y \notin A$。于是得到$A \subseteq C$，且$A \neq C (y \notin C)$，进而$A \subsetneq C$。

3.1.5 设A，B是集合，证明命题$A \subseteq B$，$A \cup B = B$，$A \cap B = A$是等价的命题

> 对任意对象$x \in A \cup B$，有$x \in A$或者$x \in B$成立，又由子集定义$A \subseteq B$，$x \in A \rightarrow x \in B$。
>
> 于是即有$x \in A \cup B$，$x \in B$，可得$A \cup B = B$。
>
> 反之，若有$A \cup B = B$，则有$\forall x \in A$或$x \in B$，$x \in B \Longrightarrow$\forall x\in A，x\in B$$。
>
> 根据子集的定义，即有$A \subseteq B$，于是得证$A \subseteq B \iff A \cup B = B$。
>
> ---
>
> 对任意对象$x \in A \cap B$，有$x \in A$且$x \in B$成立，又根据子集定义$A \subseteq B$，$x \in A \rightarrow x \in B$。
>
> 于是即有$x \in A \cap B$，$x \in A$则$x \in B$，于是$x \in A$且$x \in B \iff$ x\in A$$。
>
> 对全部$x \in A$，又根据子集定义有$x \in B$，于是$x \in A \cap B$。
>
> 于是$A \cap B = A$。
>
> 反过来，若有$A \cap B = A$，则$\forall x \in A$，$x \in A$且$x \in B \iff x \in B$
>
> 根据子集的定义，即有$A \subseteq B$，于是得证$A \subseteq B \iff A \cap B = A$
>
> ---
>
> 综上，三者是等价命题。

3.1.6 证明布尔代数中的全部结论（提示：可以应用其中的一些论述去证明其他的论述，有些论述曾在3.1.13出现过）

> 1. $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$
>
>   > 前者在并集的运算中已有，对于后者，$\forall x$，$x \in A \cap \varnothing \iff x \in A$且$x \in \varnothing$，又根据空集定义，有$\forall x$，$x \notin \varnothing$，于是可以得到：$\forall x$，$x \notin A \cap \varnothing$。即$A \cap \varnothing = \varnothing$。
>
> 2. $A \cup X = X$，$A \cap X = A$
>
>   > $\forall x \in A \cup X$，$x \in A$或$x \in X$，又根据A是X的子集，于是该命题等价于$x \in X$。再有$\forall x \in X$，$x \in A \cup X$可得到$X = A \cup X$。
>   >
>   > $\forall x \in A \cap X$，$x \in A$且$x \in X$，又根据A是X的子集，于是$\forall x \in A$，$x \in X$，于是
>
> 3. $A \cup A = A$，$A \cap A = A$
>
>   > $\forall x \in A \cup A$，有$x \in A$或$x \in A$，于是有$x \in A$；对$x \in A$，满足条件于是$x \in A \cup A$。于是综上，根据集合相等的定义可知$A \cup A = A$
>   >
>   > $\forall x \in A \cap A$，有$x \in A$且$x \in A$，于是有$x \in A$；对$x \in A$，满足条件于是$x \in A \cap A$。于是综上，根据集合相等的定义可知$A \cap A = A$
>
> 4. $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
>
>   > 前者在并集的运算中已有证明，对于后者，可以考察到对任意元素x，“$x \in A$且$x \in B$”与“$x \in B$且$x \in A$”是两个完全等价的叙述。于是从定义出发，有$A \cap B = B \cap A$。
>
> 5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$与$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$恒成立。

> $\forall x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup B$或$x \in C \iff x \in A$或$x \in B$或$x \in C$。
>
> 又有$\forall x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A$或$x \in B \cup C \iff x \in A$或$x \in B$或$x \in C$
> 。
>
> 于是可以依据集合相等的定义，推知两者相等。
>
> ---
>
> $\forall x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in A \cap B$且$x \in C \iff x \in A$且$x \in B$且$x \in C$。
>
> 又有$\forall x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A$且$x \in B \cap C \iff x \in A$且$x \in B$且$x \in C$
> 。
>
> 于是可以依据集合相等的定义，推知两者相等。

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

> $\forall x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A$且$x \in B \cup C \iff x \in A$且$x \in B$或$x \in A$且$x \in C$。
>
> $\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff x \in A \cap B$且$x \in A \cap C \iff x \in A$且$x \in B$或$x \in A$且$x \in C$。
>
> 于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意x属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
>
> ---
>
> $\forall x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A$或$x \in B \cap C \iff x \in A$或$x \in B$且$x \in A$或$x \in C$。
>
> $\forall x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \iff x \in A \cup B$且$x \in A \cup C \iff x \in A$或$x \in B$且$x \in A$或$x \in C$。
>
> 于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意x属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7. $A \cup (X \backslash A) = X$，$A \cap (X \backslash A) = \varnothing$

> 对于任意元素$x \in A \cup (X \backslash A)$，根据定义应该有$x \in A$或$x \in X \backslash A$，即有$x \in A (x \in X)$或$x \in X$且$x \notin A \Longrightarrow x \in X$成立。
>
> 对任意$x \in X$，分类讨论：若$x \in A$，则满足条件可得$x \in A \cup (X \backslash A)$，若$x \notin A$，又有$x \in X$于是$x \in X \backslash A$，进而$x \in A \cup (X \backslash A)$。于是综上有$\forall x \in X$，$x \in A \cup (X \backslash A)$。
>
> 根据集合相等的定义，此时有$A \cup (X \backslash A) = X$成立。
>
> ---
>
> 对任意元素$x \in A \cap (X \backslash A)$应当有$x \in A$且$x \in X \backslash A$，即有$x \in A$且“$x \in X$且$x \notin A$”。于是出现矛盾“$x \in A$且$x \notin A$”，可以推知$\forall x$，$x \notin A \cap (X \backslash A)$，即$A \cap (X \backslash A) = \varnothing$。

8. $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$，$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$。

> $\forall x \in X \backslash (A \cup B)$，有$x \in X$且$x \notin A \cup B \iff x \in X$且“$x \notin A$且$x \notin B$” $\iff$ “$x \in X$且$x \notin A$”且“$x \in X$且$x \notin B$”。
>
> $\forall x \in (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$，有$x \in (X \backslash A)$且$x \in (X \backslash B) \iff$ “$x \in X$且$x \notin A$”且“$x \in X$且$x \notin B$”。
>
> 于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意x属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$。
>
> ---

> > $\forall x \in X\backslash(A\cap B)$，有$x \in X$且$x \notin A\cap B \iff x \in X$且"$x \notin A$或$x \notin B$" $\iff$ "$x \in X$且$x \notin A$"或"$x \in X$且$x \notin B$"。
> >
> > $\forall x \in (X\backslash A)\cap(X\backslash B)$，有$x \in (X\backslash A)$或$x \in (X\backslash B) \iff$ "$x \in X$且$x \notin A$"或"$x \in X$且$x \notin B$"。
> >
> > 于是可以看到，两者集合间元素是等价的，对于任意x属于其中一者，必然可以推知它也属于另外一个。于是根据集合相等定义，有$X\backslash(A\cap B)=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$。

3.1.7 设A，B，C都是集合，证明$A\cap B\subseteq A$且$A\cap B\subseteq B$，更进一步地，证明$C\subseteq A\cap B$，当且仅当$C\subseteq A$且$C\subseteq B$。类似的，证明$A\subseteq A\cup B$与$B\subseteq A\cup B$，进一步地$A\subseteq C$且$B\subseteq C$，当且仅当$A\cup B\subseteq C$

> $\forall x \in A\cap B$，$x\in A$且$x\in B$，根据子集的定义，可以得到$A\cap B$是A与B的子集。
>
> 对后一个结论，假设已有$C\subseteq A\cap B$，则对$\forall x\in C\to x\in A\cap B$，于是$x\in A$且$x\in B$，就得到两个结论：
>
> > $\forall x\in C\to x\in A$；$\forall x\in C\to x\in B$
>
> 于是分别可以得到$C\subseteq A$与$C\subseteq B$成立。
>
> 假设有$C\subseteq A$与$C\subseteq B$成立，则有结论：
>
> > $\forall x\in C\to x\in A$；$\forall x\in C\to x\in B$
>
> 同时成立，于是有$\forall x\in C$，$x\in A\cap B$。即$C\subseteq A\cap B$。
>
> 于是得证两者之间等价。
>
> ---
>
> 考虑这样一个变换，$D=A\cup B$，$E=A$或B，于是这个命题可以等效为$E\subseteq D\cap E$，根据前一个命题的结论直接得到它的成立。
>
> 对于后一个结论，假设有$A\subseteq C$且$B\subseteq C$，于是得到结论：
>
> > $\forall x\in A\to x\in C$；$\forall x\in B\to x\in C$
>
> 于是对任意$x\in A$或B，$x\in C$，即$A\cup B\subseteq C$。
>
> 假设有$A\cup B\subseteq C$，则对任意$x\in A$或B，$x\in C$。
>
> 由此可以衍生得到：
>
> > $\forall x\in A\to x\in C$；$\forall x\in B\to x\in C$
>
> 于是推出$A\subseteq C$且$B\subseteq C$
>
> 于是得证两者等价。

3.1.8 设A，B是集合，证明吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$与$A\cap(A\cup B)=A$

> $\forall x\in A\cup(A\cap B)$，$x\in A$或者$x\in A\cap B \iff x\in A$或者同时有$x\in A$且$x\in B$。
>
> 于是对任意$x\in A\cup(A\cap B)$，$x\in A$（否则即可根据上述内容推知$x\notin A\cup(A\cap B)$）。
>
> $\forall x\in A$，由于满足两个条件中的前者，于是可以推知$x\in A\cup(A\cap B)$。
>
> 于是根据集合相等的定义，可以得到$A\cup(A\cap B)=A$。
>
> ---
>
> $\forall x\in A\cap(A\cup B)$，$x\in A$且$x\in A\cup B \iff x\in A$且任意有$x\in A$或$x\in B$成立。
>
> 于是对任意$x\in A\cup(A\cap B)$，$x\in A$（否则即可根据上述内容推知$x\notin A\cap(A\cup B)$）。

> $\forall x \in A$，由于同时满足两个条件中（第二个条件满足前者），于是可以推知$x \in A \cap (A \cup B)$。
>
> 于是根据集合相等的定义，可以得到$A \cap (A \cup B) = A$。

3.1.9 令A，B，X为集合，并且满足$A \cup B = X$与$A \cap B = \varnothing$，证明$A = X \backslash B$与$B = X \backslash B$

> 根据题设条件有：
>
> ①$\forall x \in X$，$x \in A$或$x \in B$至少有一个成立。
>
> ②$\forall y$为对象，$y \in A$与$y \in B$不能同时成立。
>
> 于是对任意$x \in X \backslash A$，$x \in X$且$x \notin A$，又根据①，于是只能有$x \in B$
>
> 对任意$x \in B$，$x \in X$（习题3.1.7），又根据②，此时有$x \notin A$，于是综合可得$x \in X \backslash A$
>
> 随即根据集合相等的定义，可以得到$B = X \backslash A$。
>
> $A = X \backslash B$的证明同上完全一致，将A，B位置替换即可。

3.1.10 设A，B是集合，证明$A \backslash B$，$A \cap B$，$B \backslash A$是互不相交的，且有三者并集为$A \cup B$

> 证明两两之间不相交的关系：
>
> 1. $A \backslash B$与$B \backslash A$
>
> > 若两者之间存在交集，则应当存在元素x有"$x \in A$且$x \notin B$"与"$x \in B$且$x \notin A$"同时成立，其中存在矛盾"$x \in A$且$x \notin A$"与"$x \in B$且$x \notin B$"，所以两者之间不相交。
>
> 2. $A \backslash B$与$A \cap B$
>
> > 若两者之间存在交集，则应当存在元素x有"$x \in A$且$x \notin B$"与"$x \in B$且$x \in A$"同时成立，其中存在矛盾"$x \in B$且$x \notin B$"，所以两者之间不相交。
>
> 3. $B \backslash A$与$A \cap B$
>
> > 若两者之间存在交集，则应当存在元素x有"$x \in B$且$x \notin A$"与"$x \in B$且$x \in A$"同时成立，其中存在矛盾"$x \in A$且$x \notin A$"，所以两者之间不相交。
>
> 证明$(B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$：
>
> > 对任意$x \in (B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$，分类讨论：
> >
> > 1. $x \in B \backslash A$。
> >
> > > 有$x \in B$且$x \notin A$，进而满足$x \in B \iff x \in A \cup B$。
> >
> > 2. $x \in A \cap B$。
> >
> > > 有$x \in B$且$x \in A$，进而满足$x \in B \iff x \in A \cup B$。
> >
> > 3. $x \in A \backslash B$。
> >
> > > 有$x \in A$且$x \notin B$，进而满足$x \in A \iff x \in A \cup B$。
>
> 于是对任意$x \in (B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$，$x \in A \cup B$。
> 对任意$x \in A \cup B$，有$x \in A$与$x \in B$至少有一个为真，于是可以得到三种情况：
>
> > 1. $x \in A$且$x \notin B \to x \in A \backslash B$。
> > 2. $x \in A$且$x \in B \to x \in A \cap B$。
> > 3. $x \in B$且$x \notin A \to x \in B \backslash A$。
> >
> > 于是对任意$x \in A \cup B$，$x \in (B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$。
> > 于是根据集合相等定义，$(B \backslash A) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$。

3.1.11 证明替代公理能推导出分类公理。

> 替代公理与分类公理：
>
> > (3.5 分类公理) 设A为一个集合，对任意的$x \in A$，令$P(x)$表示关于x的一个性质，对任意给定的x，$P(x)$的真伪均可确定，则可以证明存在一个集合$\{x \in A : P(x)\}$满足下述性质：
> >
> > $$\text{对任意对象}y, y \in \{x \in A : P(x)\}, \text{则有}y \in A\text{且}P(y)\text{为真。}$$
> >
> > (3.6 替代公理) A是一个集合，对任意$x \in A$与任意对象y，设存在一个关于x，y的性质$Q(x,y)$，使得对任意$x \in A$，最多可以找到一个对象y使得$Q(x,y)$为真，则存在一个集合$\{y : P(x,y)\text{对某}x \in A\text{为真}\}$，使对任意的对象$z$有下述性质：
> >
> > $$z \in \{y : Q(x,y)\text{对某}x \in A\text{为真}\}, \text{则有对某}x \in A, \text{有}Q(x,z)\text{为真。}$$
>
> 对于给定的性质$P(x)$，假设$Q(x,y)$表示这样的一个性质：
>
> $$Q(x,y) := \quad y = x\text{且}P(x)\text{为真}$$
>
> 于是利用替代公理构造出这么一个集合$C = \{y : \text{对某}x \in A, y = x\text{且}P(x)\text{为真}\}$，对其中任意元素$z$，有：
>
> $$z \in C, \text{则有对某}x \in A, z = x\text{且}P(x)\text{为真} \iff z \in A\text{且}P(z)\text{为真}$$
>
> 可以看到，构造出来的集合即是根据分类公理构造的集合$\{x \in A : P(x)\}$。