

## 8.5 有序集

### 定义

1. (8.5.1 偏序集) 偏序集是一个附加了关系 $\leq_X$ 的集合 $X$  (于是对于任意两个对象 $x, y \in X$ , 命题 $x \leq_X y$ 要么是一个真命题, 要么是一个假命题), 此外我们假设这种关系遵守下面三个性质:

- (自反性) 对任意 $x \in X$ ,  $x \leq_X x$ 始终为真。
- (反对称性) 若任意 $x, y \in X$ 满足 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X x$ , 那么 $x = y$ 。
- (传递性) 若对任意 $x, y, z \in X$ 满足 $x \leq_X y$ 且 $y \leq_X z$ , 那么 $x \leq_X z$ 。

称 $\leq_X$ 为序关系, 绝大多数情况下, 我们可以通过上下文确定集合 $X$ 是什么, 于是这时我们可以简单的简写 $\leq_X$ 为 $\leq$ , 此外, 若有 $x \leq_X y$ 且 $x \neq y$ , 那么可以记为 $x <_X y$ 或者 $x < y$ 。

(注: 比如说自然数集 $\mathbb{N}$ 与通常的小于等于 $\leq$ 关系就构成了一个偏序集, 此外, 比如 $X$ 是一个集合的集合, 附上子集 $\subseteq$ 的关系也是一个偏序集。正常情况下我们不能直接说一个集合 $X$ 是偏序集, 而应该写成 $(X, \leq_X)$ 这样的形式来指明偏序关系, 不过我们通常能在上下文中确定偏序关系从而直接写 $X$ 来代指 $(X, \leq_X)$ 。需要注意的是, 一种偏序关系并不一定绑定某个集合, 同一个集合也可以与不同种偏序关系组成偏序集)

2. (8.5.3 全序集) 设 $X$ 是一个偏序集,  $\leq_X$ 是 $X$ 上的序关系,  $Y$ 是 $X$ 的一个子集。若对任意 $y, y' \in Y$ , 我们都有 $y \leq_X y'$ 或 $y' \leq_X y$  (或两者兼有), 那么 $X$ 的子集 $Y$ 是全序的。如果 $X$ 本身是全序的, 那么我们称 $X$ 是一个附加了序关系的全序集 (或链)。

(注: 全序集首先必然是一个偏序集, 同时对任意全序集的子集也必然是全序集, 我们常见的自然数集 $\mathbb{N}$ , 整数集 $\mathbb{Z}$ , 有理数集 $\mathbb{Q}$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 附上常见的小于等于 $\leq$ 关系后就是全序集。偏序集中也有不是全序集的存在, 比如上文所举例的取 $X$ 为 $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1\}\}$ , 偏序关系是子集关系 $\subseteq$ , 因为 $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 3\}$ 之间不能有一方为另一方子集, 所以 $(X, \subseteq)$ 并不是一个全序集, 但 $(X, \subseteq)$ 显然是偏序集)

3. (8.5.5 最大元素与最小元素) 设 $X$ 是一个偏序集, 其偏序关系为 $\leq_X$ ,  $Y$ 是 $X$ 的一个子集。如果 $y \in Y$ 且不存在 $y' \in Y$ 使得 $y <_X y'$ , 则称 $y$ 是 $Y$ 的最大元素; 如果 $y \in Y$ 且不存在 $y' \in Y$ 使得 $y' <_X y$ , 则称 $y$ 是 $Y$ 的最小元素。

(注: 尽管名字中带有最的字样, 但是偏序集并不一定只有唯一的最小或最大元素, 以 $X$ 取集合 $\{\{5\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ , 偏序关系取子集 $\subseteq$ 为例, 不难发现 $\{5\}$ 同时是 $X$ 的最大元素与最小元素, 同时 $\{1, 2, 3\}$ 也是集合的最大元素, 因此不要以常规印象来理解这个最大与最小)

4. (8.5.8 良序集) 设 $X$ 是一个偏序集,  $Y$ 是 $X$ 的一个全序子集。如果 $Y$ 的每一个非空子集都有最小元素, 那么称 $Y$ 是良序的。

(注: 良序集拥有更加严苛的条件, 自然数集 $\mathbb{N}$ 就是一个良序集, 但是整数集 $\mathbb{Z}$ , 有理数集 $\mathbb{Q}$ , 实数集 $\mathbb{R}$ 都不是良序集。良序集有许多特殊性质, 比如良序集的任意子集都是良序集, 有限的全序集也是良序集, 而且良序集自动遵守强归纳法原理)

5. (8.5.12 上界和严格上界) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的良序集, 并且设 $Y$ 是 $X$ 的一个子集。若 $x \in X$ , 称 $x$ 是 $Y$ 的上界, 当且仅当对所有 $y \in Y$ 都有 $y \leq x$ ; 此外, 若 $x$ 还满足 $x \notin Y$ , 那么称 $x$ 是 $Y$ 的严格上界。这等价于 $x$ 是 $Y$ 的严格上界当且仅当对所有 $y \in Y$ 都有 $y < x$ 。

### 命题

1. (8.5.10 强归纳法原理) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的良序集, 并且设 $P(n)$ 是关于 $n \in X$ 的性质 (即对任意的 $n \in X$ ,  $P(n)$ 要么为真命题, 要么为伪命题)。假设对每一个 $n \in X$ , 都有下面这

个蕴含关系：如果 $P(m)$ 为真对任意 $m < n$ 的 $m \in X$ 成立，那么 $P(n)$ 也为真。则此时对任意 $n \in X$ ， $P(n)$ 为真。

2. (8.5.14) 设 $X$ 是一个以 $\leq$ 为序关系的偏序集，并且设 $x_0$ 是 $X$ 的一个元素，那么存在一个 $X$ 的良序子集 $Y$ 使得 $x_0$ 是 $Y$ 的最小元素且 $Y$ 没有严格上界。
3. (8.5.15 佐恩引理) 设 $X$ 是一个具有如下性质的非空偏序集：即 $X$ 的每一个全序子集 $Y$ 都有一个上界。那么 $X$ 至少有一个最大元素。

## 课后习题

8.5.1 考虑具有空序关系 $\leq_\emptyset$ 的空集（这个关系是空的，因为空集中没有任何元素）。这个集合是偏序的吗？是全序的吗？是良序的吗？请给出解释

8.5.2 给出集合 $X$ 和满足如下条件的关系 $\leq$ 的例子：

(a) 关系 $\leq$ 是自反的和反对称的，但不是可传递的

(b) 关系 $\leq$ 是自反的和可传递的，但不是反对称的

(c) 关系 $\leq$ 是反对称的和可传递的，但不是自反的

8.5.3 给定两个正整数 $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ，如果存在一个正整数 $a$ ，使得 $m = na$ ，那么我们称 $n$ 整除 $m$ ，并记作 $n|m$ 。证明：附加上序关系 $|$ 的集合 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 是一个偏序集，但不是全序集。注意，这里的序关系不同于 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 上通常的序关系 $\leq$

8.5.4 证明：正实数集 $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ 没有最小元素。

8.5.5 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从一个集合 $X$ 到另一个集合 $Y$ 的函数，设 $Y$ 是具有某种序关系 $\leq_Y$ 的偏序集。在 $X$ 上定义一个关系 $\leq_X$ 使得 $x \leq_X x'$ ，当且仅当 $f(x) <_Y f(x')$ 或 $x = x'$ 。证明：关系 $\leq_X$ 使 $X$ 成为一个偏序集。如果关系 $\leq_Y$ 使得 $Y$ 是全序的，那么这是否意味着关系 $\leq_X$ 也使得 $X$ 也成为全序的？若答案是否定的，那么还需要对 $f$ 附加什么样的假设才能保证 $\leq_X$ 使得 $X$ 成为全序的？

8.5.6 设 $X$ 是一个偏序集，对 $X$ 中任意的元素，定义序理想 $(x) \subset X$ 为集合 $(x) := \{y \in X : y \leq x\}$ 。设 $(X) := \{(x) : x \in X\}$ 是由全体序理想构成的集合，并且设 $f: X \rightarrow (X)$ 为映射 $f(x) := (x)$ ，它把每个元素 $x$ 都映成了 $x$ 的序理想。证明： $f$ 是一个双射，并且对任意给定的 $x, y \in X$ ， $x \leq_X y$ 当且仅当 $f(x) \subseteq f(y)$ 。本题表明任何偏序集都能由一个集合簇来表示，其中该集合簇上的序关系由集合的包含关系给出

8.5.7 设  $X$  是一个偏序集, 并且设  $Y$  是  $X$  的一个全序子集。证明:  $Y$  最多有一个最大元素, 并且最多有一个最小元素

8.5.8 证明: 全序集的任意一个有限的非空子集都有一个最小元素和一个最大元素 (提示: 利用归纳法)。特别地, 每个有限的全序集都是良序的

8.5.9 设  $X$  是一个全序集, 并且  $X$  的每一个非空子集都既有最小元素又有最大元素。证明:  $X$  是有限集 (提示: 利用反证法, 假设  $X$  是无限集。从  $X$  的最小元素  $x_0$  开始, 在  $X$  中构造一个递增的序列  $x_0 < x_1 < \dots$ )

8.5.10 不利用选择公理证明命题 8.5.10。(提示: 考虑集合

$$Y := \{n \in X : \text{存在某个满足 } m \leq_X n \text{ 的 } m \in X \text{ 使得 } P(m) \text{ 为假}\}$$

并证明若  $Y$  不是空集就会导致矛盾)

8.5.11 设  $X$  是一个偏序集, 并且设  $Y$  和  $Y'$  都是  $X$  的良序子集, 证明:  $Y \cup Y'$  是良序的, 当且仅当它是全序的

8.5.12 设  $X$  和  $Y$  分别是具有序关系  $\leq_X$  和  $\leq_Y$  的偏序集, 在笛卡尔积  $X \times Y$  上定义一个关系  $\leq_{X \times Y}$  如下: 若  $x \leq_X x'$  或者若  $x = x'$  且  $y \leq_Y y'$ , 则定义  $(x, y) \leq_{X \times Y} (x', y')$  (这被称作  $X \times Y$  上的字典顺序, 它类似于单词的字母顺序。如果单词  $\omega$  的第一个字母比另一个单词  $\omega'$  的第一个字母更早出现在字母表中, 或者两个单词的第一个字母相同但  $\omega$  的第二个字母比  $\omega'$  的第二个字母更早出现的在字母表中 (以此类推), 那么  $\omega$  就比  $\omega'$  更早出现在字典中) 证明:  $\leq_{X \times Y}$  定义了  $X \times Y$  上的一个偏序关系。更进一步地证明: 如果  $X$  和  $Y$  都是全序的, 那么  $X \times Y$  也是全序的; 如果  $X$  和  $Y$  都是良序的, 那么  $X \times Y$  也是良序的

8.5.13 证明: 引理 8.5.14 的证明中的结论, 即  $Y' \setminus Y$  的每一个元素都是  $Y$  的上界, 反之亦然 (提示: 利用命题 8.5.10 证明)

$$\{y \in Y : y \leq a\} = \{y \in Y' : y \leq a\} = \{y \in Y \cap Y' : y \leq a\}$$

对所有的  $a \in Y \cap Y'$  均成立。推导出  $Y \cap Y'$  是好的, 从而  $s(Y \cap Y')$  存在。证明如果  $Y' \setminus Y$  是非空的, 那么  $s(Y \cap Y') = \min(Y' \setminus Y)$ 。  $Y$  和  $Y'$  交换之后也有类似的结论。因为  $Y' \setminus Y$  和  $Y \setminus Y'$  是不相交的, 所以我们可以断定两个集合中有一个为空集。基于这一点, 很容易得出结论)

8.5.14 利用引理 8.5.14 证明引理 8.5.15 (提示: 首先证明如果  $X$  没有最大元素, 那么  $X$  的任意一个有上界的子集也一定有严格上界)

8.5.15 设 $A$ 和 $B$ 是两个非空的集合, 其中 $A$ 的基数不小于或者等于 $B$ 的基数。利用超限归纳原理证明 $B$ 的基数不大于 $A$ 的基数。(提示: 对任意的子集 $X \subseteq B$ , 设 $P(X)$ 表示性质: 存在一个从 $X$ 到 $A$ 的单射) 本题 (结合习题8.3.3) 表明只要选择公理成立, 任意两个集合的基数就是可比较的

8.5.16 设 $X$ 是一个集合, 并且设 $P$ 是由 $X$ 的所有偏序关系构成的集合 (例如: 如果 $X := N \setminus \{0\}$ , 那么通常的偏序关系 $\leq$ 和习题8.5.3中的偏序关系都是 $P$ 的元素)

我们称一个偏序关系 $\leq \in P$ 比另一个偏序关系 $\leq' \in P$ 更粗糙。如果对任意的 $x, y \in X$ , 都有蕴涵关系 $(x \leq y) \Rightarrow (x \leq' y)$ 。比如, 习题8.5.3中的偏序关系比通常的序关系 $\leq$ 更粗糙。如果 $\leq$ 比 $\leq'$ 更粗糙, 那么我们记 $\leq \preceq \leq'$ 。证明:  $\preceq$ 使得 $P$ 成为一个偏序集, 因此由 $X$ 上的偏序关系所构成的集合其自身就是偏序的。 $P$ 恰好有一个最小元素, 这个最小元素是什么? 证明:  $P$ 的最大元素正是 $X$ 的全序关系。利用佐恩引理证明: 对于给定 $X$ 的任意一个偏序关系 $\leq$ , 总存在一个全序关系 $\leq'$ 使得 $\leq$ 比 $\leq'$ 更粗糙

8.5.17 利用佐恩引理给出习题8.4.2中结论的另一种证明 (提示: 设 $\Omega$ 是全体 $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ 构成的集合,

其中对任意的 $\alpha \in I$ 均有 $\#(Y \cap X_\alpha) \leq 1$ 。即那些与每个 $X_\alpha$ 都至多有一个公共元素的集合的全体就是 $\Omega$ 。利用佐恩引理找出 $\Omega$ 的一个最大元素), 推导出佐恩引理与选择公理在逻辑上确实是等价的 (即从其中任意一个开始都能推导出另一个)

8.1.18 利用佐恩引理证明豪斯多夫最大性原理: 如果 $X$ 是一个偏序集, 那么存在一个 $X$ 的全序子集 $Y$ , 它关于集合的包含关系是最大的 (即不存在 $X$ 的其他全序子集 $Y'$ 使得 $Y$ 包含在 $Y'$ 中)。反过来, 证明: 如果豪斯多夫最大性原理成立, 那么佐恩引理也成立。因此根据习题 8.5.17, 这两个命题在逻辑上与选择公理是等价的

8.5.19 设 $X$ 是一个集合, 并且设 $\Omega$ 是全体序对 $(Y, \leq)$ 构成的空间, 其中 $Y$ 是 $X$ 的子集且 $\leq$ 是 $Y$ 的一个良序关系。设 $(Y, \leq)$ 和 $(Y', \leq')$ 都是 $\Omega$ 的元素, 如果存在一个 $x \in Y'$ 使得 $Y := \{y \in Y' : y <' x\}$  (因此特别有 $Y \subsetneq Y'$ ), 并且对任意的 $y, y' \in Y$ 均有 $y \leq y'$ , 当且仅当 $y \leq' y'$ , 那么我们称 $(Y, \leq)$ 是 $(Y', \leq')$ 的一个前段。定义 $\Omega$ 上的一个关系 $\preceq$ , 当 $(Y, \leq) = (Y', \leq')$ 时或者当 $(Y, \leq)$ 是 $(Y', \leq')$ 的一个前段时, 令 $(Y, \leq) \preceq (Y', \leq')$ 。证明:  $\preceq$ 是 $\Omega$ 的一个偏序关系。 $\Omega$ 恰有一个最小元素; 这个最小元素是什么? 证明:  $\Omega$ 的最大元素正是 $X$ 的良序关系 $(X, \leq)$ 。利用佐恩引理推导出良序原理: 每个集合 $X$ 都至少有一个良序关系。反过来, 利用良序原理证明选择公理, 即公理8.1 (提示: 在 $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ 上假设一个良序关系, 然后考虑每个 $X_\alpha$ 的最小元素)。所以选择公理, 佐恩引理以及良序原理在逻辑上都是相互等价的

8.5.20 设 $X$ 是一个集合。 $\Omega \subset 2^X$ 是由 $X$ 的子集构成的集合, 并且设 $\Omega$ 中不包括空集 $\emptyset$ 。利用佐恩引理证明: 存在子集 $\Omega' \subseteq \Omega$ 使得 $\Omega'$ 中所有的元素互不相交 (即如果 $A$ 和 $B$ 是 $\Omega'$ 中不同的元素, 那么 $A \cap B = \emptyset$ ), 而且 $\Omega$ 中的每个元素都至少与 $\Omega'$ 中的一个元素相交 (即定义任意的 $C \in \Omega$ , 存在一个 $A \in \Omega'$ 使得 $C \cap A \neq \emptyset$ )。 (提示: 考虑由 $\Omega$ 的满足条件“全体元素都互不相交”的所有子集所构成的整体, 并找到这个整体的一个最大元素) 反过来, 如果上述结论成立, 证明: 它蕴含了习题 8.4.2 的结论, 从而这是另一个在逻辑上与选择公理等价的结论 (提示: 设 $\Omega$ 是由所有形如 $\{(0, \alpha), (1, x_\alpha)\}$ 的序对集构成的集合, 其中 $\alpha \in I$ 且 $x_\alpha \in X_\alpha$ )

## 本节相关跳转

[实分析 8.3 不可数集](#)

