6.4 上极限、下极限和极限点

定义

1. (6.4.1 极限点) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，x是一个实数，并且$\varepsilon > 0$是一个实数。称x是ε**-附着于**$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当存在一个$n \geq m$使得a_n是ε-接近于x的。

   称x是**持续**ε**-附着于**$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的，当且仅当对每一个整数$N \geq m$，x都是ε-附着于$(a_n)_{n=N}^{\infty}$的。

   称x是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的**极限点**或**附着点**，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$，x都是持续ε-附着于$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的。

   (展开的表述：称x是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的极限点，当且仅当对任意$\varepsilon > 0$与$N \geq m$，都存在一个$n \geq N$使得$|a_n - x| \leq \varepsilon$)

   > 注：极限是极限点的一个**特殊情形**

2. (6.4.6 上极限与下极限) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个序列，定义一新序列$(A_N^+)_{N=m}^{\infty}$，其中有：

$$A_N^+ := \sup(a_n)_{n=N}^{\infty}$$

   于是定义序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的**上极限**，记作$\limsup_{n\to\infty} a_n$，有：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf(A_N^+)_{N=m}^{\infty}$$

   类似的，可以定义：

$$A_N^- := \inf(a_n)_{n=N}^{\infty}$$

   并定义序列的**下极限**，记为$\liminf_{n\to\infty} a_n$：

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup(A_N^-)_{n=m}^{\infty}$$

   (注：上极限与下极限是极限点的一种)

命题

1. (6.4.5 极限是极限点) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个收敛于c的序列，那么c是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个极限点。进一步的，它是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$唯一一个极限点。
2. (6.4.12 上下极限的一些基本性质) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，L^+是该序列上极限，L^-是该序列下极限 (于是有L^+，L^-均为广义实数)

   > 1. 对任意的$x > L^+$，存在一个$N \geq m$使得$a_n < x$对所有的$n \geq N$成立。对任意的$y < L^-$，存在一个$N \geq m$使得$a_n > y$对所有的$n \geq N$成立。 (通俗点说，就是总是可以找到一个N，从N往后所有自然数均满足条件)
   > 2. 对任意的$x < L^+$和任意的$N \geq m$，存在一个$n \geq N$使得$a_n > x$。对任意的$y < L^-$与任意的$N \geq m$，存在一个$n \geq N$使得$a_n < y$。 (通俗点说，就是x总是会被无限次超越，y总是会无限次超越a_n)
   > 3. $\inf(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq L^- \leq L^+ \leq \sup(a_n)_{n=m}^{\infty}$
   > 4. 如果c是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个极限点，那么有$L^- \leq c \leq L^+$。
   > 5. 如果L^+或L^-是有限的，则它们同时也会是$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的极限点。
   > 6. 设c是一个实数，$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，当且仅当$L^+ = L^- = c$。

3. (6.4.13 比较原理) 假设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$和$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是两个实数序列，且有$a_n \leq b_n$对全部$n \geq m$成立则有不等式：

$$\sup(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq \sup(b_n)_{n=m}^{\infty}$$
$$\inf(a_n)_{n=m}^{\infty} \leq \inf(b_n)_{n=m}^{\infty}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup\ a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup\ b_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf\ a_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf\ b_n$$

4. (6.4.14 夹逼定理) 假设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$，$(b_n)_{n=m}^{\infty}$与$(c_n)_{n=m}^{\infty}$均为实数序列，且对所有$n \geq m$均有：

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

如果又有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(c_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于同一个极限L，那么$(b_n)_{n=m}^{\infty}$也收敛于L。

5. (6.4.17 序列的0判别法) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，那么极限a_n存在且等于0，当且仅当$\lim_{n\to\infty} |a_n|$存在且等于0。

6. (6.4.18 实数的完备性) 实数序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是柯西序列，当且仅当它是收敛的。

(注：用度量空间语言来说，上定理断定了实数集是一个完备的度量空间，即实数集不像有理数集那样包含“洞”)

课后习题