

2.2 加法

定义

1. (2.2.1 加法定义) 令 m 为一个自然数, 定义 $0 + m := m$, 归纳假设: 已定义 n 加上 m , 则 $(n++) + m := (n + m)++$ 。
2. (2.2.7 正数) 称一个自然数是**正的**, 当且仅当它不等于0。
3. (2.2.11 自然数的序) 令 n, m 表示任意两个自然数, 称 n 大于等于 m , 记作 $n \geq m$ 或 $m \leq n$, 当且仅当存在自然数 a , 使得 $n = m + a$ 。特别的, 称 n 严格大于 m , 记作 $n > m$ 或 $m < n$, 当且仅当 $n \geq m$ 且 $n \neq m$ 。

命题

1. (无编号 封闭性) 设 a, b 均为自然数, 则 $a + b$ 也是自然数。

证明:

取 b 为某一自然数, 对 a 使用归纳推理:

对 $a = 0$ 时, 有:

$a + b = b$, 根据条件, b 是自然数, 得证。

现归纳性假设对某一自然数 n , $a = n$ 时成立结论, 对 $a = n++$ 时有:

$a + b = (n++) + b = (n + b)++$

根据归纳假设 $n + b$ 是自然数, 又根据公理2.2, 于是有 $(n + b)++$ 也是一个自然数, 得证。

于是得证结论。

2. (2.2.2) 对任意自然数, $n + 0 = n$ 恒成立。
3. (2.2.3) 对任意自然数 n 与 m , $n + (m++) = (n + m)++$ 。
4. (2.2.4 交换律) 对任意自然数 n 与 m , $n + m = m + n$ 。
5. (2.2.5 结合律) 对任意自然数 a, b, c , $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。
6. (2.2.6 消去律) 对任意自然数 a, b, c , 且有 $a + b = a + c$ 成立, 则 $b = c$ 。
(消去律的存在体现了一种“虚拟减法”的思想, 这对后面减法的定义至关重要)
7. (2.2.8) 如果 a 是正的并且 b 是一个自然数, 那么 $a + b$ 是正的。
8. (2.2.9) 如果 a, b 都是自然数且 $a + b = 0$, 那么 $a = 0$ 且 $b = 0$ 。
9. (2.2.10) 令 a 表示一个正自然数, 则恰好存在一个自然数 b 使得有 $b++ = a$
10. (2.2.12 自然数序的性质) 令 a, b, c 为任意自然数
 - (序的自反性) $a \geq a$ 。
 - (序的可传递性) 如果 $a \geq b$ 且 $b \geq c$, 则 $a \geq c$ 。
 - (序的反对称性) 如果 $a \geq b$ 且 $b \geq a$, 则 $a = b$ 。
 - (加法保持序不变) $a \geq b$, 当且仅当 $a + c \geq b + c$ 。
 - $b > a$, 当且仅当 $a++ \leq b$ 。

- $b > a$, 当且仅当存在正自然数 d 使得 $b = a + d$ 。

11. (2.2.13 三歧性) 下列三种表述同时只能且一定存在一个为真:

- $a > b$
- $a = b$
- $a < b$

12. (2.2.14 强归纳法原理) 令 m_0 为一个自然数, $P(m)$ 表示与任意自然数 m 有关的性质。假定对任意 $m \geq m_0$ 的自然数, 均有下述内容成立。

若 $P(m')$ 对任意 $m_0 \leq m' < m$ 的自然数 m' 为真, 则 $P(m)$ 为真

特别地, 这表明 $P(m_0)$ 也为真 (选取 $m = m_0$)。由此有, 对任意 $m \geq m_0$ 的自然数 m , $P(m)$ 也为真。

(使用时, 一般选择 $m_0 = 0$ 或 $m_0 = 1$)

课后习题

2.2.1 证明加法的结合律 (提示: 固定两个变量, 对第三个变量做归纳)

假定 a, b 为某两个自然数, 对 c 做归纳:

当 $c = 0$ 时, 证明 $(a + b) + 0 = a + (b + 0)$:

由命题2.2.2可知 $(a + b) + 0 = a + b$, $a + (b + 0) = a + b$, 于是 $c = 0$ 时结论得证

现归纳性假设结合律对某个自然数 n 有在 $c = n$ 的情况下成立, 对 $c = n + +$ 的情况进行讨论:

根据命题2.2.3:

左端有 $(a + b) + n + + = ((a + b) + n) + +$ 。

右端有 $a + (b + (n + +)) = a + (b + n) + + = (a + (b + n)) + +$ 。

根据归纳假设, 又有 $(a + b) + n = a + (b + n)$, 根据公理2.4, 又有

$p = q \iff p + + = q + +$ 。于是有 $(a + b) + n + + = a + (b + (n + +))$, 归纳假设得证。

于是结合律成立。

2.2.2 令 a 表示一个正自然数, 证明恰好存在一个自然数 b 使得有 $b + + = a$

对正数 a 分成进行归纳:

对 $a = 1$ 的情况:

显然有 $b = 0$ 时, $b + + = a$ 。

现归纳地假设对某个自然数 n 在 $a = n$ 时成立结论, 对 $a = n + +$ 时:

于是此时令有 $b = n$, 自然满足 $b + + = n + + = a$

于是得证结论。

2.2.3 证明命题2.2.12 自然数序的性质 (提示: 将会用到很多前面的结论)

1. 自反性: 取自然数 0 , 显然有 $a = a + 0$ 满足定义, 于是 $a \geq a$ 。

2. 可传递性: $a \geq b$, 于是存在自然数 d 使得 $a = b + d$

$b \geq c$, 于是存在自然数 e 使得 $b = c + e$

于是可以得到 $a = c + (d + e)$, 根据封闭性可以得到 $(d + e)$ 也是一个自然数, 根据定义可得 $a \geq c$ 。

3. 反对称性: $a \geq b$, 于是存在自然数 d 使得 $a = b + d$

$b \geq a$, 于是存在自然数 e 使得 $b = a + e$

于是有 $a = a + d + e$, 依据消去律即 $0 = d + e$ 。

根据命题2.2.9, 于是 $d = e = 0$, 进而 $b = a + 0 \implies b = a$ 得证。

4. 加法保持序不变:

$a \geq b \implies a = b + d (d \in N) \implies (a + c) = (b + c) + d \implies a + c \geq b + c$ 。

5. $a < b \implies b = a + c (c \in N)$ 且 $a \neq b \implies c \neq 0$ 。

即 c 为正数, 于是根据命题2.2.10, 存在自然数 d , $c = d + +$ 。

于是有 $(a + +) + d = (a + d) + + = a + c = b$, 进而 $a + + \leq b$ 得证。

6. 根据5的内容可以得到该结论。

2.2.4 证明下述三个结论: ①对所有自然数 b , 均有 $b \geq 0$; ②如果 $a > b$, 则有 $a + + > b$; ③如果 $a = b$, 则有 $a + + > b$

①

对所有自然数 b , 都有 $b = 0 + b$, 于是根据定义 $b \geq 0$ 。

②

$a > b$, 于是存在正数 c , $a = b + c$, 进而 $a + + = b + (c + +)$, $c + + \neq 0 \wedge c + + \in N$ 于是可知为正数, 于是得证。

③

$a = b$, 于是 $a + + = b + (0 + +)$, $0 + + \neq 0$ 于是 $0 + +$ 为正数, 可知有 $a + + > b$ 。

2.2.5 证明强归纳法原理 (提示: 定义性质 $Q(n)$: $P(m)$ 对任意满足 $m_0 \leq m \leq n$ 的 m 均为真)

定义性质 $Q(n)$: $P(m)$ 对任意满足 $m_0 \leq m \leq n$ 的 m 均为真。

于是强归纳法可以被描述为: 若有 $Q(m_0)$ 为真且对任意 $m \geq m_0$, 若 $Q(m)$ 为真, 则 $Q(m + +)$ 为真。

取 $n = m - m_0$, 对 n 进行归纳:

当 $n = 0$ 时:

$Q(m_0 + n)$ 显然为真

现归纳性假设当 n 等于某自然数 c 时成立结论, 对 $n = c + +$:

根据条件直接可以得到 $Q(m_0 + (n + +))$ 为真

于是得证

2.2.6 令 n 为一个自然数, 令 $P(m)$ 为关于自然数的一个性质并且满足: 只要 $P(m++)$ 为真, 则 $P(m)$ 为真。假定 $P(n)$ 为真, 证明: $P(m)$ 对任意满足 $m \leq n$ 的自然数 m 均为真。 (这也被称为**逆向归纳法原理**) (提示: 对 n 使用归纳法)

对 n 做归纳法:

对 $n = 0$ 时:

此时条件为 $P(0)$ 为真, 证明对全部 $m \leq 0$ 为真, m 仅可以为0, 于是结论显然成立。

现归纳性假设对 $n \leq c$ 的情况下结论成立, 对 $n = c++$ 时:

由条件可以推知, $P(c++)$ 为真时 $P(c)$ 为真

根据归纳假设, 对 $P(c)$ 为真, 可推知对任意 $m \leq c$ 的自然数 m 均有 $P(m)$ 为真。

考虑到 $P(c++)$ 为真, 于是对任意 $m \leq c++$ 的自然数 m 均有 $P(m)$ 为真。

归纳假设得证

于是得证结论