5.3 实数的构造

定义

1. (5.3.1 实数) 实数被定义为形如$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$的对象，其中$a_n|_{n=1}^{\infty}$是有理数的一个柯西序列。称两个实数$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$与$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是相等的，当且仅当序列$a_n|_{n=1}^{\infty}$与$b_n|_{n=1}^{\infty}$是**等价的柯西序列**。记由全体实数构成的集合为$\mathbb{R}$。
2. (5.3.2 形式极限) 称$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$为序列为$a_n|_{n=1}^{\infty}$**形式极限**。

   (小节临时辅助定义，如同之前的形式减法与形式除法一样)
3. (5.3.4 实数的加法) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，则定义它们的和$x+y$为$x+y:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$。
4. (5.3.9 实数的乘法) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$是实数，则定义它们的乘积$xy$为$xy:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}(a_n\times b_n)$。
5. (5.3.12 远离0的有理数序列) 称有理数序列$a_n|_{n=1}^{\infty}$是远离0的，当且仅当存在一个有理数$c>0$使得$|a_n|\geq c$对一切$n\geq 1$均成立。
6. (5.3.16 实数的倒数) 设x是一个不为零的实数，设$a_n|_{n=1}^{\infty}$是一个远离0的柯西序列并且使得$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$ (由引理5.3.14可证明这样的序列存在) ，则定义x^{-1}为$x^{-1}:=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}{a_n}^{-1}$。

   (由引理5.3.17可证明x^{-1}是一个实数)
7. (无编号 消去律) 如果x，y，z是实数，它们满足$xz=yz$且z不为零，则可以得到$x=y$。

命题

1. (5.3.3 形式极限是定义明确的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是与$z=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}c_n$都是实数，则由定义可知，$x=x$。而且如果有$x=y$，则$y=x$。最后，若有$x=y$且$y=z$，则$x=z$。

   (自反，对称，可传递性)
2. (5.3.6 柯西序列的和是柯西序列) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$都是实数，那么$x+y$同样也是一个实数。

   (即$(a_n+b_n)|_{n=1}^{\infty}$是有理数的一个柯西序列)
3. (5.3.7 等价的柯西序列之和是等价的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$x'=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n'$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，设$x=x'$，则有$x+y=x'+y$。

   (按理说这个才是定义明确的吧)
4. (5.3.10 乘法的定义是明确的) 设$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，$x'=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n'$和$y=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$是实数，则$xy$也是实数，另外，如有$x=x'$，则有$xy=x'y$。
5. (5.3.11 实数的代数定律) 第四章中的所有代数定律 (命题4.2.4) 不止对于整数与有理数成立，对于实数也是成立的。内容见下：

   > - $x+y=y+x$。
   > - $(x+y)+z=x+(y+z)$。
   > - $x+0=0+x$。
   > - $x+(-x)=(-x)+x=0$。
   > - $xy=yx$。
   > - $x\cdot 1=1\cdot x=x$。

> - $x(y+z)=xy+xz$。
> - $(y+z)x=yx+zx$。
> - $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x(x\neq 0)$。

6. （5.3.14 远离0的序列性质1）设x是一个不为零的实数，那么存在某个远离0的柯西序列$a_n|_{n=1}^{\infty}$使得$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$。
7. （5.3.15 远离0的序列性质2）设$a_n|_{n=1}^{\infty}$是一个远离0的柯西序列，那么序列$a_n^{-1}|_{n=1}^{\infty}$也是一个的柯西序列。
8. （5.3.17 倒数运算是定义明确的）现假设$a_n|_{n=1}^{\infty}$与$b_n|_{n=1}^{\infty}$是两个远离0的柯西序列，且有$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$，则$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n^{-1}=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n^{-1}$。

课后习题