

8.2 在无限集上求和

定义

1. (8.2.1 可数集上的级数) 设 X 是一个可数集, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数。称级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 是绝对收敛的, 当且仅当存在某个双射 $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ 使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(g(n))$ 是**绝对收敛**的。此时我们定义:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(g(n))$$

(根据命题7.4.3与命题3.6.4, 可以证明这样的定义同 g 的选取无关, 从而它是定义明确的)

2. (8.2.4 绝对收敛级数?) 设 X 是一个集合 (可以是**不可数的**), 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 那么级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 是绝对收敛的, 当且仅当:

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

命题

1. (8.2.2 无限和的富比尼定理) 设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个使得 $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m)$ **绝对收敛** 的一个函数, 那么我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} f(n,m) \right) &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m) \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} f(n,m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n,m) \right) \end{aligned}$$

(换言之, 只要级数是**绝对收敛**的, 我们就可以任意交换无限和的求和顺序)

2. (8.2.3 绝对收敛级数的特征?) 设 X 是一个至多可数的集合, 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 那么级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 是绝对收敛的, 当且仅当:

$$\sup \left\{ \sum_{x \in A} |f(x)| : A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集} \right\} < \infty$$

3. (8.2.5 绝对收敛级数衍生?) 设 X 是一个集合 (可以是**不可数的**), 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个使级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 是绝对收敛的函数, 那么集合 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 是至多可数的。

(由此, 对于不可数集上的任意一个绝对收敛的级数 $\sum_{x \in X} f(x)$, 我们可以定义它的值为

$$\sum_{x \in X} f(x) := \sum_{x \in X: f(x) \neq 0} f(x), \text{ 于是我们成功将不可数集上的级数用可数集上的级数替换})$$

4. (8.2.6 绝对收敛级数的定律) 设 X 是一个集合 (可以是不可数的), 并且设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是使级数 $\sum_{x \in X} f(x)$ 与 $\sum_{x \in X} g(x)$ 都绝对收敛的函数, 则下述命题为真:

1. 级数 $\sum_{x \in X} (f(x) + g(x))$ 是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x)$$

2. 若 c 是一个实数, 那么 $\sum_{x \in X} c \cdot f(x)$ 是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X} c \cdot f(x) = c \sum_{x \in X} f(x)$$

3. 若存在两个不相交的集合 X_1, X_2 使得 $X_1 \cup X_2 = X$, 那么 $\sum_{x \in X_1} f(x)$ 和 $\sum_{x \in X_2} f(x)$ 都是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} f(x) = \sum_{x \in X_1} f(x) + \sum_{x \in X_2} f(x)$$

反过来, 如果 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\sum_{x \in X_1} h(x)$ 和 $\sum_{x \in X_2} h(x)$ 都是绝对收敛的, 那么 $\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x)$ 也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{x \in X_1 \cup X_2} h(x) = \sum_{x \in X_1} h(x) + \sum_{x \in X_2} h(x)$$

4. 如果 Y 是另一个集合, 并且 $\phi: Y \rightarrow X$ 是一个双射, 那么 $\sum_{y \in Y} f(\phi(y))$ 也是绝对收敛的, 并且:

$$\sum_{y \in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x \in X} f(x)$$

(当 X 是不可数集时, 该结论的证明要用到选择公理)

5. (8.2.7 条件收敛的子级数?) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数, 定义集合

$A_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$, $A_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$, 于是有 $A_+ \cup A_- = \mathbb{N}$ 与 $A_+ \cap A_- = \emptyset$ 。那么级数 $\sum_{n \in A_+} a_n$ 与 $\sum_{n \in A_-} a_n$ 都不是条件收敛的 (从而也不是绝对收敛的)

6. (8.2.8 格奥尔格·黎曼级数定理?) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数, L 是任意一个实数。于是存在一个双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ 条件收敛于 L 。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 3.6 集合的基数](#)

