3.3 函数

定义

1. (3.3.1 函数定义) 设X与Y为集合。令$P(x,y)$表示关于对象$x\in X$与对象$y\in Y$的一个性质，且$P(x,y)$满足对任意$x\in X$，恰好存在**一个**$y\in Y$使得$P(x,y)$为真（有时称其为**垂线测试**），则定义由P在**定义域**X与**值域**Y上确定的**函数**$f:X\to Y$为下述事物：对任意给定输入$x\in X$，f指定了一个输出$f(x)\in Y$与之对应，且$f(x)$是$P(x,f(x))$唯一为真的对象。因此，对任意$x\in X$与$y\in Y$：

$$y=f(x)\to P(x,y)\text{为真}$$

2. (3.3.4-3.3.9 特殊的函数) 从空集到任意一个集合X的函数称为空函数，表示为$f:\varnothing\to X$。

   另外地，令$P(x,y)$表示性质：$y=n$（n为常数）则对任意的输入x其输出y是恒定的，此时称该构造出这样的一个$f:X\to Y$为常数函数，n是一个确定的数。

3. (3.3.7 函数的相等) 两个具有相同定义域与值域的函数$f:X\to Y$与$g:X\to Y$被称为是相等的，当且仅当对任意的$x\in X$有$f(x)=g(x)$成立（若仅在部分$x\in X$有$f(x)=g(x)$，则认为f和g不相等）

4. (3.3.10 函数的复合) 令$f:X\to Y$与$g:Y\to Z$为两个函数，则定义两个函数g和f的复合：$g\circ f$：$X\to Z$为一个函数，并由下式进行显式定义：

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

   如果f的值域与g的定义域不一致，则不对作$g\circ f$出定义。

5. (3.3.14 单射) 如果函数f把不同的元素映射到不同的元素，即有：

$$x\neq x'\implies f(x)\neq f(x')$$

   则函数f是单射的，即如果函数f有：

$$f(x)=f(x')\implies x=x'$$

   也可称之为**一对一函数。**

6. (3.3.17 满射) 如果Y中每一个元素都能通过f对X中的某个元素起作用得到，也可以写做$f(X)=Y$（这个表述同下一节的像很像），那么称函数f是满射的或称其为**映上函数**。即：

$$\text{对每一个}y\in Y\text{，存在}x\in X\text{使得}f(x)=y$$

   (单射与满射之间的性质上存在很多对偶的关系，这点可以在习题里面看到)

7. (3.3.20 双射) 同时是单射与满射的函数$f:X\to Y$也可被称为双射函数或**可逆函数**，对于一个双射，可以将x的值记为$f^{-1}(y)$，于是f^{-1}是一个从Y到X的函数，称f^{-1}为f的逆。

   (一个常见的错误就是将双射的概念认为是：对任意的X中的元素x，恰好存在一个Y中的y使得$y=f(x)$。事实上，这样的关系仅仅只能将f确定为是一个**函数**，这个命题在事实上就是垂线测试的另一种表述)

命题

1. (3.3.12 复合函数的可结合性) 设$f:Z\to W$，$g:Y\to Z$，$h:X\to Y$是三个函数，则有：

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

课后习题

3.3.1 证明定义3.3.7中的集合相等的定义是自反的，可传递的与对称的，同时证明替换性质：如果$f:X\to Y$，$\tilde{f}:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$\tilde{g}:Y\to Z$都是函数，且满足$f=\tilde{f}$与$g=\tilde{g}$，则有$g\circ f=\tilde{g}\circ\tilde{f}$

> 自反性（证明对任意的函数$f:X\to Y$，$f=f$）：
>
> > 两者显然有相同的定义域与值域，对任意$x\in X$，由垂线测试得到的$y\in Y$唯一，即$f(x)=f(x)$，于是有$f=f$
>
> 对称性（证明对任意的函数$f:X\to Y$与$g:X\to Y$，若有$g=f$，则$f=g$）：
>
> > $g=f$，于是两者具有相同的值域与定义域，且对任意$x\in X$，$g(x)=f(x)\iff f(x)=g(x)$，于是得到$f=g$
>
> 可传递性（证明证明对任意的函数$f:X\to Y$，$g:X\to Y$与$h:X\to Y$，若有$f=g$且$g=h$成立，于是$f=h$）：
>
> > $f=g$且$g=h$，于是根据集合相等定义可以得到f与g，g与h有相同的定义域与值域$\iff f$与h有相同的定义域（X）与值域（Y）。另外有对任意$x\in X$，$f(x)=g(x)$且$g(x)=h(x)\iff f(x)=h(x)$。于是综上有$f=h$。
>
> 替代性质：
>
> > $f=\tilde{f}$与$g=\tilde{g}$，于是首先有定义域与值域是相同的$\iff\tilde{g}\circ\tilde{f}$与$g\circ f$有相同的定义域$X$与值域$Z$。另外又有对任意$x\in X$，$f(x)=\tilde{f}(x)$；对任意$y\in Y$，$g(y)=\tilde{g}(y)$，于是对任意$x\in X$，应当有$f(x)=\tilde{f}(x)\iff g(f(x))=\tilde{g}(\tilde{f}(x))$，于是综合得到$g\circ f=\tilde{g}\circ\tilde{f}$。

3.3.2 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为函数，证明：若f与g均为单射，则$g\circ f$也是单射，类似的，若f与g均为满射，则$g\circ f$也是满射

> 若f与g均为单射，于是对任意x，$x'\in X$，y，$y'\in Y$，有$x\neq x'\iff f(x)\neq f(x')$，$y\neq y'\iff g(y)\neq g(y')$，
>
> 进而有$x\neq x'\iff f(x)\neq f(x')\iff g(f(x))\neq g(f(x'))$，于是根据单射的定义，有$g\circ f$是单射
>
> 若f与g均为满射，于是对任意$z\in Z$，$y\in Y$，存在$y'\in Y$与$x'\in X$，$z=g(y')$，$y=f(x')$，于是对任意$z\in Z$，存在$y\in Y$使得$g(y)=z$，对y，存在$x\in X$使得$f(x)=y\iff$对任意$z\in Z$，存在$x\in X$使得$g\circ f(x)=z$，于是有$g\circ f$是满射。

3.3.3 何时空函数是单射？满射？双射？

> 对空函数$f:\varnothing\to A$，分别考察单射与满射的定义。
>
> 单射：
>
> 要求对任意x，$x'\in\varnothing$，若有$x\neq x'$，则$f(x)\neq f(x')$，由于空集中不包含任何元素，于是这个命题自然是成立的。换言之，在任意情况下，都有f是单射。
>
> 满射：
>
> 要求对任意$a\in A$，$\exists x\in\varnothing$，$f(x)=a$，但是空集中不存在任何元素，换言之，只有在A中不存在任何元素的时候，才能使得这个命题为真。换言之，A为$\varnothing$时成立单射。
>
> 双射：
>
> 双射要求f同时是满射与单射，于是综合上面两个结论，可以得到A为空集的时候，f是双射。

3.3.4 下面将给出复合函数的消去律：设$f:X\to Y$，$\tilde{f}:X\to Y$，$g:Y\to Z$，$\tilde{g}:Y\to Z$为函数，若有$g\circ f=g\circ\tilde{f}$且g为单射，则此时有$f=\tilde{f}$（假设g不是单射，这个结论还成立吗？），另外有$\tilde{g}\circ f=g\circ f$且$f$是满射，则$g=\tilde{g}$（假设$f$不是满射，这个结论还成立吗？）

> $g\circ f=g\circ\tilde{f}$，于是对任意$x\in X$，$g(f(x))=g(\tilde{f}(x))$。
>
> g是单射，于是对任意y，$y'\in Y$，$y\neq y'\iff g(y)\neq g(y')$，于是对任意$x\in X$，假设有$f(x)\neq\tilde{f}(x)$，此时必然有$g(f(x))\neq g(\tilde{f}(x))$，这同$g\circ f=g\circ\tilde{f}$的结论矛盾，于是只能导出结论：于是对任意$x\in X$，有$f(x)=\tilde{f}(x)$，即$f=\tilde{f}$。
>
> 当g非单射时，上述论证中“$f(x)\neq\tilde{f}(x)$，则$g(f(x))\neq g(\tilde{f}(x))$”的结论无法得出，于是这个结论无法证明。
>
> ---
>
> $\tilde{g}\circ f=g\circ f$，于是对任意$x\in X$，$\tilde{g}(f(x))=g(f(x))$。
>
> f是满射，于是对任意y，存在$x\in X$有$f(x)=y$，于是对任意$y\in Y$，假设有$g(y)\neq\tilde{g}(y)$，对y，根据f是满射可以得到一个$x\in X$使得$f(x)=y$，于是此时有$\tilde{g}(f(x))\neq g(f(x))$，这同$\tilde{g}\circ f=g\circ f$的结论矛盾，于是只能导出结论：于是对任意$y\in Y$，有$g(y)=\tilde{g}(y)$，即$g=\tilde{g}$。
>
> 当f非满射时，上述论证中的结论无法得出，于是这个结论无法证明。

3.3.5 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为函数，证明：若$g\circ f$是单射，则f是单射（g也一定是吗？）类似的，若$g\circ f$是满射，那么g是满射（f也一定是吗？）

> $g\circ f$是单射，于是对任意x，$x'\in X$，$x\neq x'\iff g\circ f(x)\neq g\circ f(x')$，于是对假设$f$不是单射，那么至少存在一对$x$，$x'$，有$x\neq x'$且$f(x)=f(x')$，但是又有$g\circ f(x)\neq g\circ f(x')$，这样便出现一个情景即对于某个$f(x)=y\in Y$，$g(y)$值不唯一，换言之即$g$不满足垂线测试，这同$g$时函数的前提是矛盾的，于是$f$只能是单射。
>
> 对于g，可以简单设想这样的一个场景：$X=\{1\}$，$Y=\{2,3\}$，$Z=\{3\}$，$f(1)=2$，$g(2)=g(3)=3$，显然此时有g不是单射，但是$g\circ f$确实满足单射的条件。通过这样一个反例可以大致看出为何g并不一定是单射。
>
> ---
>
> $g\circ f$是满射，于是对任意$z\in Z$，存在某个$x\in X$有$g\circ f(x)=z$，假设g不是满射，那么存在$z\in Z$，使得对任意$y\in Y$均有$g(y)\neq z$，又由于f为函数，于是对任意$x\in X$，$f(x)\in Y$，进而可以得到$\forall x\in X$，$g(f(x))\neq z$，这跟前面结论矛盾。于是g只能为满射。
>
> 对于f，考虑这样一个情况$X=\{1\}$，$Y=\{2,3\}$，$Z=\{3\}$，$f(1)=2$，$g(2)=3$，$g(3)=3$，这个情景下g是满射，$g\circ f$也是满射，但是f不是满射。通过这个反例可以大致看出f不是满射的原因。

3.3.6 令$f:X\to Y$是一个双射，$f^{-1}:X\to Y$是f的逆，证明下面所述的消去律：对任意$x\in X$有$f^{-1}(f(x))=x$，对任意$y\in Y$有$f(f^{-1}(y))=y$，并且推导f^{-1}是可逆的，并且它的逆就是f，即$(f^{-1})^{-1}=f$

> $f^{-1}(f(x))=x$:
>
> > 对任意$x\in X$，函数f指定一个输出$y=f(x)$，又由于f是双射，这样的指定是唯一的，即$\forall x_0\in X$，$x_0\neq x\iff f(x_0)\neq f(x)$，根据逆函数的定义，$f^{-1}(y)=x$，这就是我们所需要的结论。
>
> $f(f^{-1}(y))=y$:
>
> > 对任意$y\in Y$，由于f是满射，于是存在$x\in X$使得$f(x)=y$，根据逆反射f^{-1}的定义，有$f^{-1}(y)=x$，又$f(x)=y$，于是$f(f^{-1}(y))=x$。
>
> ---

> $(f^{-1})^{-1}=f$:
>
> 先证明f^{-1}是双射:
>
> > 由于f是双射，于是$\forall y\in Y$，存在$x\in X$有$y=f(x)$，且$\forall x$，$x'\in X$，$f(x)\neq f(x') \iff x\neq x'$，即$\forall y'$，$y\in Y$，$y\neq y' \iff f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y')$，即$f^{-1}$是单射。
> > 另外，f是一个函数，于是$\forall x\in X$，存在$y\in Y$使得$f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)$，即f^{-1}是满射。
>
> 于是f^{-1}是双射，再证明$(f^{-1})^{-1}=f$:
>
> > $\forall y\in Y$，存在$x\in X$使得$f^{-1}(y)=x$，依据可逆函数的定义，有$(f^{-1})^{-1}(x)=y$，又根据可逆函数的性质，有$f(x)=y$，于是$\forall x\in X$，有$f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$，即$(f^{-1})^{-1}=f$。

3.3.7 设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$为函数，证明：若f，g均为双射，则$g\circ f$也是双射，且有$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

> $g\circ f$也是双射:
>
> f与g为双射，于是对任意$z\in Z$，存在$y\in Y$使得$g(y)=z$，对任意$y'\in Y$，存在$x'\in X$使得$f(x')=y'$。
>
> $\Longrightarrow$对任意$z\in Z$，存在$x\in X$使得$g\circ f(x)=z$，即$g\circ f$是满射。
>
> 另外的，对任意x，$x'\in X$，$x\neq x' \iff f(x)(=y)\neq f(x')(=y')$，$f$是一个函数，于是$y$，$y'\in Y$且$y\neq y'$，又根据$g$是单射于是$y\neq y' \iff g(y)\neq g(y')$，于是整合得到$\forall x$，$x'$，$x\neq x' \iff g(f(x))\neq g(f(x'))$，于是$g\circ f$是单射。
>
> $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$:
>
> 根据逆函数的定义，应该有对任意$z\in Z$，若有$z=g(f(x))(x\in X)$，则$(g\circ f)^{-1}(z)=x$，对函数$f^{-1}\circ g^{-1}$，应当存在关系$f^{-1}(z)=y(y\in Y)$并且$g^{-1}(y)=x(x\in X)$使得有$f^{-1}\circ g^{-1}(z)=x$，该关系等效于$g(f(x))=z$，考虑到$g\circ f$也是双射，于是有$(g\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}\circ g^{-1}(z)$对任意$z\in Z$成立，加上两者具有相同的定义域与值域，于是可以得到$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

3.3.8 如果X是Y的一个子集，令$\iota_{X\to Y}:X\to Y$表示X到Y上的包含映射，该映射定义为：对任意$x\in X$有$x\mapsto x$，也即对任意$x\in X$有$\iota_{X\to Y}(x):=x$。特别地，称$\iota_{X\to X}$为X上的恒等映射。

(a)证明：若有$X\subseteq Y\subseteq Z$，则有$\iota_{Y\to Z}\circ\iota_{X\to Y}=\iota_{X\to Z}$

> 两者显然有相同的定义域与，对于任意的$x\in X$，$\iota_{X\to Y}(x)=x$，$\iota_{Y\to Z}(x)=x$，$\iota_{X\to Z}(x)=x$，于是对任意$x\in X$，$\iota_{X\to Z}(x)=\iota_{Y\to Z}\circ\iota_{X\to Y}(x)$，综合可得函数相等。值域

(b)证明：若$f:A\to B$是一个函数，那么有$f=f\circ\iota_{A\to A}=\iota_{B\to B}\circ f$

> 三者显然有共同的定义域与值域，对任意$a\in A$，有$f(a)=b$，$f(\iota_{A\to A}(a))=f(a)=b$，$\iota_{B\to B}(f(a))=\iota_{B\to B}(b)=b$，于是对任意$a\in A$，$f(a)=f\circ\iota_{A\to A}(a)=\iota_{B\to B}\circ f(a)$，综上有$f=f\circ\iota_{A\to A}=\iota_{B\to B}\circ f$。

(c)证明：若$f:A\to B$是一个双射函数，那么有$f^{-1}\circ f=\iota_{A\to A}$与$f\circ f^{-1}=\iota_{B\to B}$

> 定义域与值域显然相同，考虑映射关系的问题:
>
> $f^{-1}\circ f$与$\iota_{A\to A}$:
>
> > 根据习题3.3.6的结论，有$\forall a\in A$，$f^{-1}\circ f(a)=a$，根据恒等映射定义，$\iota_{A\to A}(a)=a$，于是对任意$a\in A$，显然$f^{-1}\circ f(a)=\iota_{A\to A}(a)$。

> $f \circ f^{-1}$与$\iota_{B\to B}$：
>
> > 根据习题3.3.6的结论，有$\forall b \in B$，$f \circ f^{-1}(b) = b$，根据恒等映射定义，$\iota_{B\to B}(b) = b$，于是对任意$b \in B$，显然$f \circ f^{-1}(b) = \iota_{B\to B}(b)$。
>
> 综上，有$f^{-1} \circ f = \iota_{A\to A}$与$f \circ f^{-1} = \iota_{B\to B}$成立。

(d)证明：如果X与Y是互不相交的集合，并且$f : X \to Z$，$g : Y \to Z$为函数，那么存在唯一的函数$h : X \cup Y \to Z$使得$h \circ \iota_{X\to X\cup Y} = f$与$h \circ \iota_{Y\to X\cup Y} = g$成立

> 存在性：
>
> 取函数h为这样一个函数，他有性质：
>
> $\forall x \in X$，$h(x) = f(x)$，$\forall y \in Y$，$h(y) = g(y)$
>
> 于是由上述定义显然可以得到$h \circ \iota_{X\to X\cup Y} = f$与$h \circ \iota_{Y\to X\cup Y} = g$（定义域，值域，映射关系相同）
>
> 唯一性：
>
> 假设存在两个函数h_1与h_2同时满足条件，那么对任意$a \in X \cup Y$，首先有$a \in X$或者$a \in Y$恰有一个为真，分类讨论：
>
> $a \in X$：
>
> 由于$h \circ \iota_{X\to X\cup Y} = f$，$h_1(a) = h_1(\iota_{X\to X\cup Y}(a)) = f(a) = h_2(\iota_{X\to X\cup Y}(a)) = h_2(a)$。
>
> $a \in Y$：
>
> 由于$h \circ \iota_{Y\to X\cup Y} = g$，$h_1(a) = h_1(\iota_{Y\to X\cup Y}(a)) = g(a) = h_2(\iota_{Y\to X\cup Y}(a)) = h_2(a)$。
>
> 于是得出结论，对任意$a \in X \cup Y$，有$h_1(a) = h_2(a)$，又根据两者有共同值域与定义域，于是$h_1 = h_2$，即h只可能唯一。