4.3 绝对值与指数运算

定义

绝对值

1. (4.3.1 绝对值) 如果x是一个有理数，则其**绝对值**$|x|$有如下定义：

   > - 若x是正的，则$|x| := x$。
   > - 若x是负的，则$|x| := -x$。
   > - 若x是0，则$|x| := 0$。

2. (4.3.2 距离) 设x与y为有理数，则称量$|x-y|$为x与y之间的距离，有时候记作$d(x,y)$，于是有$d(x,y) := |x-y|$。如$d(3,5) = 2$。
3. (4.3.4 ε-接近性) 设$\varepsilon>0$是一个有理数，并且设x，y为有理数，并且称x，y有x是ε-接近于y的，当且仅当$d(x,y) \leq \varepsilon$。

指数运算

1. (4.3.9 自然数次幂的指数运算) 设x是一个有理数，为把x升到0次幂，定义$x^0 := 1$，特别地，定义$0^0 = 1$，现归纳性地假设对某自然数n已有x^n的定义，于是定义$x^{(n+1)} := x^n \times x$。(比较此处定义与2.3.11处指数定义的不同)
2. (4.3.11 负整数次幂的指数运算) 设x是一个不为0的有理数，则对任意负整数$-n$，定义$x^{-n} := 1/(x^n)$。

命题

绝对值

1. (4.3.3 绝对值与距离的基本性质) 设x，y，z为有理数：

   > - (绝对值的非退化性) $|x| \geq 0$，另外$|x| = 0$当且仅当x为0。
   > - (绝对值的三角不等式) $|x+y| \leq |x| + |y|$。
   > - (不知道是啥) $-y \leq x \leq y$，当且仅当$y \geq |x|$，特别地$-x \leq |x| \leq x$。
   > - (绝对值的可乘性) $|xy| = |x| \times |y|$，特别地$|-x| = |x|$。
   > - (距离的非退化性) $d(x,y) \geq 0$，$d(x,y) = 0$当且仅当$x = y$。
   > - (距离的对称性) $d(x,y) = d(y,x)$。
   > - (距离的三角不等式) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$。

2. (4.3.7 ε-接近性的基本性质?) 设x，y，z，w为有理数：

   > - 如果$x = y$，则对任意$\varepsilon > 0$，x都是ε-接近于y的，两者互为充要条件。
   > - 设$\varepsilon > 0$，若x是ε-接近于y的，则y也是ε-接近于x的。
   > - 设$\varepsilon > 0$，若x是ε-接近于y的，y是σ-接近于z的，则x是$(\varepsilon+\sigma)$-接近于z的。
   > - 设σ，$\varepsilon > 0$，若x与y是ε-接近的，z与w是σ-接近的，则有$(x+z)$与$(y+w)$是$(\varepsilon+\sigma)$接近的，$(x-z)$与$(y-w)$也相同。
   > - 设σ，$\varepsilon > 0$，若x，y是ε-接近的，则对任意$\varepsilon' > \varepsilon$，$x$与$y$是$\varepsilon'$-接近的。

> - 设$\varepsilon > 0$，若y与z都是ε-接近于x的，且w在y与z之间，则w也是ε-接近于x的。
> - 设$\varepsilon > 0$，若x，y是ε接近的，且z不为0，则xz与yz也是$\varepsilon|z|$-接近的。
> - 设σ，$\varepsilon > 0$，如果x，y是ε-接近的且z与w是σ-接近的，则xz与yw是$(\varepsilon|z| + \sigma|x| + \sigma\varepsilon)$-接近的。

指数运算

1. (4.3.10 指数的运算性质I）设x与y为非零有理数，并设n和m为**自然数**，则有：

> - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
> - 若$x \geq y \geq 0$，则有$x^n \geq y^n \geq 0$，若$x > y \geq 0$且$n > 0$时，则有$x^n > y^n \geq 0$。
> - 若$n > 0$，则$x^n = 0$当且仅当$x = 0$。
> - 有$|x^n| = |x|^n$。

2. (4.3.12 指数的运算性质II）设x与y为非零有理数，并设n和m为**整数**，则有：

> - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
> - 若$x \geq y \geq 0$，则当n正数时有$x^n \geq y^n > 0$，当n负数时有$0 < x^n \leq y^n$。
> - 若x，$y > 0$，$n \neq 0$并且$x^n = y^n$，那么$x = y$。
> - 有$|x^n| = |x|^n$。

课后习题

4.3.1 证明命题4.3.3（提示：尽管所有的陈述都可以通过分成若干种情形的方法来证明，比如可以分成：x是正的、 负的或者零这些情形。但是命题中许多陈述可以不必这样冗烦地分情况来证明。 例如，我们可以利用命题中前面的陈述来证明后面的陈述。）

> - $|x| \geq 0$，另外$|x| = 0$当且仅当x为0。
>
> 根据整数的三歧性，分情况讨论x：
>
> 1. x为正数，于是$|x| = x$为正数，$|x| > 0$。
> 2. x为负数，于是$|x| = -x$为正数，$|x| > 0$。
> 3. $x = 0$，于是$|x| = 0$，此时$|x| = 0$。
>
> 综上，总是有$|x| \geq 0$成立，并且当且仅当$|x| = 0$时$x = 0$。
>
> ---
>
> - $|x + y| \leq |x| + |y|$。
>
> 使用到下面结论：对任意正数有理数y，$-y \leq x \leq y$，当且仅当$y \geq |x|$，特别地$-|x| \leq x \leq |x|$。
>
> 我们总有$-|x| \leq x \leq |x|$与$-|y| \leq y \leq |y|$，于是
>
> $$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$
>
> 于是取绝对值，可以得到$|x + y| \leq ||x| + |y||$，又有$|x|$与$|y|$都是正有理数，于是$|x| + |y|$也是正有理数，即$||x| + |y|| = |x| + |y|$，即$|x + y| \leq |x| + |y|$始终成立。
>
> ---
>
> - 对任意正数有理数y，$-y \leq x \leq y$，当且仅当$y \geq |x|$，特别地$-|x| \leq x \leq |x|$。
>
> 证明其充分必要性：

充分性：

若有$y \geq |x|$，则可以对x分类讨论：

1. x为正数，于是此时有$y \geq x \geq 0 \geq -y \iff y \geq x \geq -y$。
2. x为0，由于y是正有理数于是此时有$y \geq 0 \geq -y \iff y \geq x \geq -y$。
3. x为负数，于是此时有$y \geq -x \geq 0 \geq -y \iff -y \leq x \leq y$。

于是充分性得证。

必要性：

若有$-y \leq x \leq y$，于是对x分类讨论：

1. x为正数，于是此时有$|x| = x \iff y \geq |x|$。
2. x为0，于是此时有$|x| = 0 = x \iff y \geq |x|$。
3. x为负数，于是此时有$|x| = -x$，$y \geq x \geq -y \iff -y \leq -x \leq y \Longrightarrow |x| \leq y$。

于是必要性得证。特别地，我们可以看到若令y为$|x|$，则显然有$x \leq |x| (x \in \mathbb{Q})$，于是上面结论替换自然可以得到$-|x| \leq x \leq |x|$。

- $|xy| = |x| \times |y|$，特别地$|-x| = |x|$。

先证明$|-x| = |x|$：

对任意$x > 0$，总有$-x < 0$，于是根据绝对值定义$|-x| = -(-x) = x = |x|$；

对任意$x < 0$，总有$-x > 0$，于是根据绝对值定义$|-x| = -x = |x|$；

对任意$x = 0$，总有$-x = 0$，于是根据绝对值定义$|-x| = 0 = |x|$；

综上，总有$|-x| = |x|$成立。

再证明$|xy| = |x| \times |y|$：

先考虑x，y都是正有理数或0的情况：

根据绝对值定义，此时有：

$|xy| = xy$，$|x| = x$，$|y| = y$，于是$|xy| = xy = x \cdot y = |x| \times |y|$，

对于x，y中存在负数时，不妨将等式中xy，x，y根据前结论$|-x| = |x|$转为正有理数，再根据正有理数的证明得知他们成立。

- $d(x,y) \geq 0$，$d(x,y) = 0$当且仅当x=y。

不妨令有$x - y = c$，于是自然根据前第一条结论有$d(x,y) \geq 0$恒成立，等于号当且仅当$c = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$时成立。

- $d(x,y) = d(y,x)$。

不妨令有$x - y = c$，于是根据上第四条结论有$|c| = |-c|$，即$d(x,y) = d(y,x)$。

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$。

不妨令有$x - y = c$，$y - z = d$，于是根据前第二条结论可直接得出。

4.3.2 证明命题4.3.7中剩下的陈述（即除去教材已有证明的最后一条）

> - 如果$x=y$，则对任意$\varepsilon>0$，x都是ε-接近于y的，两者互为充要条件。
>
> 必要性：
>
> 根据命题4.3.3中结论有$x=y$时$d(x,y)=0$，于是根据定义有对任意$\varepsilon>0$，$d(x,y)$都有$d(x,y)\leq 0$始终成立。
>
> 充分性：
>
> 已知对任意$\varepsilon>0$，x都是ε-接近于y的，于是对任意$\varepsilon>0$，都有$d(x,y)\leq\varepsilon$。由绝对值的性质可以知道$d(x,y)\geq 0$，若$d(x,y)=a>0$，那么我们取$\varepsilon=\frac{a}{2}$，此时会得到存在$\varepsilon>0$，$d(x,y)>\varepsilon$，这同前提条件矛盾了，于是只能有$d(x,y)=0$。
>
> ---
>
> - 设$\varepsilon>0$，若x是ε-接近于y的，则y也是ε-接近于x的。
>
> 根据命题4.3.3的结论，有$d(x,y)=d(y,x)$，于是当$d(x,y)\leq\varepsilon$时必然有$d(y,x)\leq\varepsilon$，即若x是ε-接近于y的，则y也是ε-接近于x的。
>
> ---
>
> - 设$\varepsilon>0$，若x是ε-接近于y的，y是σ-接近于z的，则x是$(\varepsilon+\sigma)$-接近于z的。
>
> x是ε-接近于y的，y是σ-接近于z的，于是有$d(x,y)\leq\varepsilon$与$d(y,z)\leq\sigma$，根据命题4.3.3有$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\leq\varepsilon+\sigma$。于是$x$是$(\varepsilon+\sigma)$-接近于$z$的。
>
> ---
>
> - 设σ，$\varepsilon>0$，若x与y是ε-接近的，z与w是σ-接近的，则有$(x+z)$与$(y+w)$是$(\varepsilon+\sigma)$接近的，$(x-z)$与$(y-w)$也相同。
>
> x与y是ε-接近的，z与w是σ-接近的，于是有$d(x,y)\leq\varepsilon$与$d(z,w)\leq\sigma$，根据定义，于是可以得到有
>
> $$d(x+z,y+w)=|x+z-y-w|=|(x-y)+(z-w)|$$
>
> 再根据命题4.3.3结论，于是有$d(x+z,y+w)\leq d(x,y)+d(z,w)\leq\varepsilon+\sigma$，即$(x+z)$与$(y+w)$是$(\varepsilon+\sigma)$接近的。
>
> ---
>
> - 设$\varepsilon>0$，若x，y是ε-接近的，则对任意$\varepsilon'>\varepsilon$，x与y是ε'-接近的。
>
> 根据定义，若x，y是ε-接近的，于是$d(x,y)\leq\varepsilon\leq\varepsilon'$，于是$x$，$y$是$\varepsilon'$-接近的。
>
> ---
>
> - 设$\varepsilon>0$，若y与z都是ε-接近于x的，且w在y与z之间，则w也是ε-接近于x的。
>
> y与z都是ε-接近于x，于是有$d(x,y)\leq\varepsilon$与$d(x,z)\leq\varepsilon$，w在y与z之间，于是不妨写为$w=ny+(1-n)z\ (n\in[0,1])$，于是$d(x,w)=|x-w|=|n(x-y)+(1-n)(x-z)|\leq n|x-y|+(1-n)|x-z|\leq\varepsilon$，即$w$也是$\varepsilon$-接近于$x$的。
>
> ---
>
> - 设$\varepsilon>0$，若x，y是ε接近的，且z不为0，则xz与yz也是$\varepsilon|z|$-接近的。
>
> 根据定义，若x，y是ε-接近的，于是$d(x,y)\leq\varepsilon$，$d(xz,yz)=|xz-yz|=|z||x-y|\leq|z|\varepsilon$，于是$xz$，$yz$是$\varepsilon|z|$-接近的。

4.3.3 证明命题4.3.10（提示：利用归纳法）

> - $x^n\times x^m=x^{(n+m)}$，$(x^n)^m=x^{(nm)}$，$(xy)^n=x^ny^n$。
>
> 对任意的自然数m固定，我们对n进行归纳：
>
> 当$n=0$时：
>
> 显然有：
>
> 1. $x^m\times 1=x^m$。
> 2. $(x^m)^0=1=x^{m\times 0}$。
> 3. $(xy)^0=1=x^0y^0$。
>
> 现假设当$n=j$时成立上面的结论，当$n=j+1$时：
>
> 1. $x^{j+1}\times x^m=x\times x^j\times x^m=(x^{j+m})\times x=x^{(j+1)+m}$。
> 2. $(x^m)^{j+1}=(x^m)^j\cdot x^m=x^{mj}\cdot x^m=x^{mj+m}=x^{m(j+1)}$。
> 3. $(xy)^{j+1}=(xy)^j\cdot(xy)=(x^j\cdot x)(y^j\cdot y)=x^{j+1}y^{j+1}$。
>
> 于是综上，结论得证。
>
> ---
>
> - 若$x\geq y\geq 0$，则有$x^n\geq y^n\geq 0$，若$x>y\geq 0$且$n>0$时，则有$x^n>y^n\geq 0$。
>
> 对n作归纳：
>
> $n=0$时：
>
> $x^0\geq y^0\geq 0$为真。
>
> $n=1$时：
>
> $x^1>y^1\geq 0$为真。
>
> 现假设在$n=j$时成立上述结论，在$n=j+1$时：
>
> $x^{j+1}=x^j\cdot x$，$y^{j+1}=y^j\cdot y$，由于$x\geq y\geq 0$，并且根据假设$x^j\geq y^j\geq 0$，于是$x^j\cdot x\geq y^j\cdot y\geq 0$，即$x^{j+1}\geq y^{j+1}\geq 0$；若$x>y\geq 0$，则可得到$x^{j+1}>y^{j+1}\geq 0$。
>
> 综上，结论得证。
>
> ---
>
> - 若$n>0$，则$x^n=0$当且仅当$x=0$。
>
> 对n做归纳：
>
> 当$n=1$时：
>
> 此时$x^1=x$，于是$x^1=0$当且仅当$x=0$，结论得证。
>
> 现假设$n=j$时结论成立，对$n=j+1$时：
>
> $x^{j+1}=x^j\cdot x$，于是若有$x^{j+1}=0$，则必然有$x^j=0$与$x=0$至少有一个成立，根据假设$x^j=0$当且仅当$x=0$，于是$x^{j+1}=0$当且仅当$x=0$。
>
> ---
>
> - 有$|x^n|=|x|^n$。
>
> 对n做归纳：
>
> 当$n=0$时：

此时$|x^0| = 1 = |x|^0$，结论得证。

现假设$n = j$时结论成立，对$n = j + 1$时：

$|x|^{j+1} = |x|^j \cdot |x|$，根据归纳假设$|x|^j = |x^j|$，于是$|x|^{j+1} = |x^j| \cdot |x| = |x^j \cdot x| = |x^{j+1}|$，结论得证。

于是综上结论得证。

4.3.4 证明命题4.3.12（提示：本题不适合使用归纳法，而是利用命题4.3.10）

先证明一个引理，方便接下来的论证：

对任意自然数n与非零有理数x，$\frac{1}{x}^n = \frac{1}{x^n}$。

证明：

对n做归纳：

$n = 0$时：

自然有$1 = 1/1$成立。

现假设当$n = j$时成立结论，对$n = j + 1$时：

左式：

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(j+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^j \cdot \frac{1}{x}$$

右式：

$$\frac{1}{x^{(j+1)}} = \frac{1}{x^j \cdot x} = \frac{1}{x^j} \cdot \frac{1}{x}$$

根据归纳假设可以得到左右两式相等，于是结论得证。

综上，结论得证。

- $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。

对$x^n \times x^m = x^{(n+m)}$：

当n，m都是自然数时，这和之前的结论没有区别；当n，m都是负数时，不妨将原结论改写为$\frac{1}{x^{-n}} \times \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} \iff x^{-n} \times x^{-m} = x^{-(n+m)}$，这和前面的结论也没有区别；当$n$，$m$中有一个负数一个正数时，由于乘法交换律，不妨考虑设n为正数，m为负数，那么原公式左端可以写为$x^n \times \frac{1}{x^{-m}}$，根据已有结论，若$n \geq -m$又可以写为$x^{n+m} \times x^{-m} \times \frac{1}{x^{-m}} = x^{n+m}$，若$n < -m$又可以写为$x^n \times \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x^{-m-n}} = x^{n+m}$，最终结论都和原本结论一致。

对$(x^n)^m = x^{(nm)}$：

当n，m都是自然数时，这和之前的结论没有区别；当n，m中有一个负数一个正数时，考虑设n为正数，m为负数，即证明$(x^n)^m = (\frac{1}{x^n})^{-m} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm}$，于是结论依旧成立，当$n$，$m$都是负数时，可以令$y = \frac{1}{x}$，于是即证明$(y^{-n})^m = y^{-(nm)}$，这样就归结到了$n$为正数的情况。

> 对$(xy)^n = x^n y^n$:
>
> 当n是自然数时结论同命题4.3.10中结论一致。当n是负数时，取$x' = \frac{1}{x}$，$y' = \frac{1}{y}$，于是即证明$(x'y')^{(-n)} = x'^{(-n)} y'^{(-n)}$，于是就回归到了正数的情况。
>
> ---
>
> - 若$x \geq y \geq 0$，则当n正数时有$x^n \geq y^n > 0$，当n负数时有$0 < x^n \leq y^n$。
>
> n是正数的结论命题4.3.10已经有证明，当n是负数时则令$x' = \frac{1}{x}$，$y' = \frac{1}{y}$，于是由$x \geq y \geq 0$可得$y' \geq x' \geq 0$，进而根据n为正数的结论可以得到$y'^{(-n)} \geq x'^{(-n)} > 0$，即$y^n \geq x^n > 0$。
>
> ---
>
> - 若x，$y > 0$，$n \neq 0$并且$x^n = y^n$，那么$x = y$。
>
> n是正数的结论命题4.3.10已经有证明，当n是负数时则令$x' = \frac{1}{x}$，$y' = \frac{1}{y}$。于是原结论等价于：$x'^{(-n)} = y'^{(-n)}$当且仅当$x' = y'$，此时$-n$是正数，x'，y'都是正有理数，于是可以根据n为正数的结论可以得证。
>
> ---
>
> - 有$|x^n| = |x|^n$。
>
> n是正数的结论命题4.3.10已经有证明，当n是负数时则令$x' = \frac{1}{x}$，于是原命题等价于$|x'^{(-n)}| = |x'|^{(-n)}$，回到了正数时的结论。

4.3.5 证明：$2^N \geq N$对一切正整数N均成立（提示：使用归纳法）

> 对N进行归纳:
>
> $N = 1$时:
>
> 此时有$N = 1$，$2^N = 2$，于是结论成立。
>
> 现假设该结论对某正自然数$N = j$时成立，对$N = j + 1$时:
>
> $2^{j+1} = 2^j \cdot 2 = 2^j + 2^j$，又根据$2^j \geq j \geq 1$的归纳假设，于是有$2^j + 2^j \geq j + 1$，即$2^{j+1} \geq j + 1$。
>
> 综上，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 2.3 乘法]