

4.4 有理数中的间隙

命题

1. (4.4.1 有理数确定的整数散布) 设 x 是一个有理数, 则唯一存在一个整数 n 使得下式成立:

$$n \leq x < n + 1$$

特别地, 存在自然数 N 使 $N > x$ 。同时, 有时称 n 为 x 的**整数部分**, 并记作 $n = \lfloor x \rfloor$ 。

2. (4.4.3 由有理数确定的有理数散布) 如果 x 与 y 是两个有理数, 并且满足 $x < y$, 则存在第三个有理数 z 使得 $x < z < y$ 。(即任意两个有理数间总是存在一个有理数)

注: 尽管有理数存在这样的稠密性, 但是有理数依然是不完备的, 在有理数之间依旧存在无数的“空隙”或者说空洞, 例如下面两个例子。

3. (4.4.4 $\sqrt{2}$ 不是有理数) 不存在有理数 x , 使得 $x^2 = 2$ 。
4. (4.4.5) 对任意**有理数** $\varepsilon > 0$, 存在一个非负有理数 x 使得 $x^2 < 2 < (x + \varepsilon)^2$ 。

(注: 3、4在某种意义上指明稠密有理数中空隙的存在, 也为实数的存在留下空间, 隐隐指出了实数定义的方向。(尽管这样是有缺漏且不完备的))

课后习题

4.4.1 证明命题4.4.1 (提示: 利用命题2.3.9)

对任意正有理数或零 $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$), 于是根据命题2.3.9欧几里得算法, 可以得到唯一的一组 (m, r) 使得 $a = mb + r$ ($0 \leq r < b$), 于是可以得到 $x = \frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}$ ($0 \leq \frac{r}{b} < 1$), 此时整数 m 满足结论 $m \leq x < m + 1$ 。

对任意负有理数 x , 将它表示为 $x = -y$, 于是根据正有理数的结论存在某自然数 m 使得 $m \leq y < m + 1$, 于是有 $-m \geq x > -(m + 1)$ 。 $-m$ 与 $-(m + 1)$ 都是整数, 于是我们选择这样一个确定整数 n 的原则:

$$n = \begin{cases} -m & \text{if } y = m \\ -(m + 1) & \text{if } y \neq m \end{cases}$$

这样对任何负有理数 x , 都必然有 n 使得 $n \leq x < n + 1$, 由于 m 选取的唯一性, 因此 n 也是唯一确定的。

这样综上可以得到对任意有理数 x , 唯一存在一个整数 n 使得 $n \leq x < n + 1$ 成立。

4.4.2 定义: 数列 a_0, a_1, a_2, \dots (可以是自然数列、整数列、有理数列或实数列) 被称为是**无穷递减**的, 当且仅当对任意的自然数 n 都有如 $a_n > a_{n+1}$ (即 $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$)

(a) 证明无穷递降原理：不存在无穷递降的自然数列。（提示：为了推出矛盾，假设能够找到一个自然数列是无穷递降的。因为所有的 a_n 都是自然数，所以 $a_n \geq 0$ 对一切 n 都成立。那么利用归纳法来证明对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > k$ 成立从而得到矛盾。）

假设存在一个自然数列 a_0, a_1, a_2, \dots 是无穷递降的，我们来证明对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > k$ 成立。

对 k 使用归纳法：

当 $k = 0$ 时：

假设存在某个 n 使得 $a_n = 0$ ，那么根据无穷递降的定义，应该有 $a_{n+1} < a_n = 0$ ，同时 a_{n+1} 又是自然数，于是应当满足 $a_{n+1} \geq 0$ 的基本条件，于是发生矛盾，故应当有对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > 0$ 成立。

现归纳假设有当 $k = j$ 时成立结论，对 $k = j + 1$ 时：

假设存在某个 n 使得 $a_n = j + 1$ ，那么根据无穷递降的定义，应该有 $a_{n+1} < a_n = j + 1$ ，于是根据归纳假设，应当满足 $a_{n+1} > j$ 的基本条件，可以看到不存在任何自然数 x 同时满足 $x > j$ 与 $x < j + 1$ 的条件，与反证假设它存在矛盾，故应当有对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > j + 1$ 成立。

综上所述我们得到对无穷递降的自然数列，其内所有项必然大于任何自然数，这显然是不存在的。

(b) 如果序列 a_0, a_1, a_2, \dots 的取值替换成整数而不再是自然数，那么无穷递降原理是否成立？如果上述取值替换成正有理数，情况又会如何？请给出解释。

整数列成立，最简单的例子 $a_n = -n$ 就是满足无穷递降原理的序列，换成正有理数列也是成立的，一个例子是 $a_n = \frac{1}{n}$ 。

4.4.3 把命题4.4.4证明过程中标注了（为什么？）的细节补充完整

1. 自然数 x 不可能既是奇数又是偶数

若 x 是偶数，则存在自然数 a 使得 $x = 2a$ ，同时 x 是奇数，那么存在自然数 b 使得 $x = 2b + 1$ ，于是可以得到 $2b + 1 = 2a \iff \frac{1}{2} = a - b$ ，由于 a, b 都是自然数，所以 $a - b$ 至少是个整数，这同 $a - b = \frac{1}{2}$ 矛盾，于是不存在既是偶数又是奇数的自然数。

2. 如果 p 是奇数，那么 p^2 也是奇数

p 是奇数，那么存在自然数 a 使得 $x = 2a + 1$ ，于是 $p^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ ，由于 a 是自然数，所以 $y = 2a^2 + 2a$ 也是自然数，进而 $p^2 = 2y + 1$ 也是奇数。

3. 因为 $p^2 = 2q^2$ ，所以 $p > q$

暂且抛开矛盾的问题，先假设这里 p, q 都是非0自然数，于是 $p^2 = 2q^2 = q^2 + q^2$ ，于是根据自然数序的定义， $p^2 > q^2 (q^2 \neq 0)$ ，假如有 $p \leq q$ ，那么根据自然数乘法序不变可得到 $p^2 \leq pq \leq q^2 \iff p^2 \leq q^2$ 。这同 $p^2 > q^2$ 的前提矛盾，于是必然有 $p > q$ 。

本章相关跳转

[实分析 2.3 乘法](#)

