5.1 柯西序列

定义

1. (5.1.1 序列) 设m是一个整数。有理数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个从集合$\{n \in Z : n \geq m\}$到$\mathbb{Q}$的函数，它对每一个大于或等于m的整数n都指定了一个有理数a_n。 (即$n \rightarrow a_n$)
2. (5.1.3 ε-稳定性) 设$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-稳定的，当且仅当元素中每一对a_j与a_k对任意的自然数j与k都是ε-接近的 (见上一章4.3节定义4.3.4) 。或者说序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-稳定的，当且仅当$d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$对任意的自然数$j$，$k$均成立。

   (注：在文献中，这个定义并不是标准定义。在本节之外，我们也不会用到这个定义，下文最终ε-稳定性的定义也是如此)
3. (5.1.6 最终ε-稳定性) 设$\varepsilon > 0$，称序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-稳定的，当且仅当存在某个自然数$N \geq 0$使得a_N，a_{N+1}，……是ε-稳定的。
4. (5.1.8 柯西序列) 有理数序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$被称为是**柯西序列**，当且仅当对任意**有理数**$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-稳定的。

   (注：事实上对上加粗部分最终可证明ε为实数时结论依旧成立，不过在这里，我们还没有给出实数的定义)
5. (5.1.12 有界序列) 设$M \geq 0$是有理数，称序列a_1，a_2，……，a_n以M为界，当且仅当
   $|a_i| \leq M$
   对任意$1 \leq i \leq n$成立，类似地可以定义无限序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的有界性。

命题

1. (5.1.11 例子？) 定义$a_n := \frac{1}{n}$的序列a_1，a_2，a_3，…… (即序列1，$1/2$，$1/3$，…….) 是柯西序列。
2. (5.1.14 有限序列是有界的) 任意一个**有限序列**都是有界的。
3. (5.1.15 柯西序列是有界的) 任意一个**柯西序列**都是有界的。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]