5.2 等价的柯西序列

定义

1. (5.2.1 ε-接近的序列）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\varepsilon > 0$，称$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是ε-接近的，当且仅当对任意$n \in \mathbb{N}$均有a_n是ε-接近于b_n的，即$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$。
2. (5.2.3 最终ε-接近的序列）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列且$\varepsilon > 0$，称$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-接近的，当且仅当存在一个$N \geq 0$，使序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$与$(b_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-接近的。

   (注：再次申明，上述两个概念都不是标准定义，在本节之外不会再使用上述定义）
3. (5.2.6 等价序列）称两个序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是**等价的**，当且仅当对任意有理数$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的。

   (注：如同定义5.1.8一样，ε被限制在了有理数范围，但是到最后我们会发现，上述命题中这个限制可以扩展到实数范围）

命题

1. (5.2.8）设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是两个序列，其中$a_n = 1 + 10^{-n}$，$b_n = 1 - 10^{-n}$，那么序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与是等价的。

   (这个命题直接断定了$1.000... = 0.999...$)

课后习题

5.2.1 证明：若$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是等价的有理数序列，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列，当且仅当$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列

> $(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是等价的，于是对任意有理数$\varepsilon_1 > 0$，序列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε_1-接近的，即总存在整数N_1使得对任意的$n \geq N_1$有$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon_1$成立。$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列，于是对任意有理数$\varepsilon_2 > 0$，总是存在整数$N_2$使得对任意$i, j \geq N_2$，$d(a_i, a_j) \leq \varepsilon_2$。
>
> 对任意有理数$\varepsilon > 0$，不妨令有$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3}$，于是根据上面的结论能分别得到两个整数$N_1$与$N_2$，取$N = \max(N_1, N_2)$，此时对任意$i, j \geq N$，有$d(a_i, b_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$，$d(a_j, b_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$，$d(a_i, b_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$，于是根据距离的性质我们有：
>
> $$d(b_i, b_j) = |(b_i - a_i) + (a_i - a_j) + (a_j - b_j)| \leq d(a_i, b_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, b_j) \leq 3(\frac{\varepsilon}{3}) = \varepsilon$$
>
> 对任意$i, j \geq N$成立，于是根据定义可得$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列。

5.2.2 设$\varepsilon > 0$，证明：若$(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-接近的，那么$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是有界的，当且仅当$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是有界的

> $(a_n)_{n=0}^{\infty}$与$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是最终ε-接近的，即存在整数N使得对任意的$n \geq N$有$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$成立。$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是有界的，于是对任意$n \geq N$，存在某个正数$M$使得$|a_n| \leq M$。于是根据绝对值的三角不等式，$|b_n - a_n + a_n| \leq |a_n| + |b_n - a_n| (n \geq N)$。又$|a_n| \leq M$，$d(a_n, b_n) \leq \varepsilon$，于是对任意$n \geq N$，$|b_n| \leq M + \varepsilon$。对有限序列$(b_n)_{n=0}^{N-1}$，根据命题5.1.14，可以得到$(b_n)_{n=0}^{N-1}$存在一个界$M'$，于是取$G = \max(M', M + \varepsilon)$，可以得到对任意$n \in \mathbb{N}$，$|b_n| \leq G$，于是$(b_n)_{n=0}^{\infty}$是有界的。