

5.5 最小上界性质

定义

1. (5.5.1 上界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 并假设 M 是一个实数。称 M 是 E 的一个**上界**, 当且仅当对于 E 中任意一个元素 x , 均有 $x \leq M$ 。
2. (5.5.5 最小上界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 且 M 是一个实数。称 M 是 E 的**最小上界**, 当且仅当下述两个命题同时成立:

- M 是 E 的一个上界。
- E 的任意其它上界 M' 一定大于或等于 M 。

3. (5.5.10 上确界) 设 E 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, 如果 E 是非空的并且存在一个上界, 则定义 $\sup(E)$ 为 E 的最小上界 (由定理2可知, 该定义是明确的)。额外引入两个符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 。如果 E 是非空的并且没有上界, 则令 $\sup(E) := +\infty$; 如果 E 是空集, 则定义 $\sup(E) := -\infty$, 称 $\sup(E)$ 是 E 的**上确界**, 也可以记作 $\sup E$ 。 (关于 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的性质, 之后会在6.2节详细展开)

4. (无编号 下界与下确界) 同样的, 可以类似定义5.5.1, 5.5.5, 5.5.10地定义实数集子集 E 的**下界**, **最大下界**与**下确界**及其相关命题与定理, 下确界记作 $\inf(E)$ 或 $\inf E$ 。

(这个看个人发挥了, 就是改改内容而已, 放一个个人的版本)

1. (下界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 并假设 M 是一个实数。称 M 是 E 的一个**下界**, 当且仅当对于 E 中任意一个元素 x , 均有 $x \geq M$ 。
2. (最大下界) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 且 M 是一个实数。称 M 是 E 的**最大下界**, 当且仅当下述两个命题同时成立:

- M 是 E 的一个下界。
- E 的任意其它下界 M' 一定小于或等于 M 。

3. (下确界) 设 E 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, 如果 E 是非空的并且存在一个下界, 则定义 $\inf(E)$ 为 E 的最大下界。额外引入两个符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 。如果 E 是非空的并且没有下界, 则令 $\inf(E) := -\infty$; 如果 E 是空集, 则定义 $\inf(E) := +\infty$, 称 $\inf(E)$ 是 E 的**下确界**, 也可以记作 $\inf E$ 。

命题

1. (5.5.8 最小上界的唯一性) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个子集, 则 E 最多有一个最小上界。
2. (5.5.9 最小上界的存在性) 设 E 是 \mathbb{R} 的一个非空子集, 如果 E 有一个上界, 那么它必定恰好有一个最小上界。
3. (5.5.12 优越性?) 存在一个正实数 x , 有 $x^2 = 2$ 。

课后习题

5.5.1 设 E 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, 并且假设 E 的最小上界是 M , 即 $M = \sup(E)$ 。设 $-E$ 表示集合:

$$-E := \{-x : x \in E\}$$

证明: $-M$ 是 $-E$ 的最大下界, 即 $-M = \inf(-E)$ (本题疑似存在错误, 即最大下界并不是 \inf , 最小上界也不是 \sup , 这节还没学到到广义实数系, 所以我们没法对上面的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 做负运算, 这里暂且当做我们知晓对 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的负运算法则, 下面将给出两种情况的解答)

证明: 若 E 的最小上界是 M , 则 $-M$ 是 $-E$ 的最大下界。

根据最小上界性质, 对于 M , 我们有下面两个命题成立:

- 对任意 $x \in E$, 有 $x \leq M$ 。
- 如有实数 M' 是 E 的一个上界, 那么有 $M' \geq M$ 。

于是, 对任意 $-x \in -E$, 有 $x \leq M \iff -x \geq -M$, 于是 $-M$ 是 $-E$ 的一个下界。

另一方面, 若 M' 是 E 的一个上界, 那么根据前面的推证有 $-M'$ 是 $-E$ 的一个下界, 并且根据最小上界的性质可推知结论有 $M' \geq M \iff -M' \leq -M$, 即对任意 $-E$ 的下界 $-M'$, 总有 $-M' \leq -M$ 。

于是根据最大下界的定义, 此时有 $-M$ 是 $-E$ 的最大下界。

证明: 若 $M = \sup(E)$, 则 $-M = \inf(-E)$ 。

我们讨论 E 的可能。

- 若 E 是非空的并且存在上界, 此时 $-E$ 可得也是非空的并且存在下界。此时有若 $M = \sup(E)$, 则 M 是 E 的最大上界, 于是根据前结论, $-M$ 是 $-E$ 的最大下界, 进而根据下确界的定义有 $-M = \inf(-E)$ 成立。
- 若 E 是非空的并且不存在上界, 那么此时 $M = +\infty$, $-M = -\infty$ 。 E 非空, 于是 $-E$ 也是非空的; 若 E 不存在上界, 那么此时对任意实数 x 都应该存在元素 $y \in E$ 使得 $y > x$ 成立, 这等价于对任意实数 $-x$ 存在某个元素 $-y \in -E$ 使得 $-y < -x$ 成立, 于是 $-E$ 不存在下界。综合可得 $-E$ 非空且不存在下界, 于是根据下确界定义有 $\inf(-E) = -\infty = -M$, 结论成立。
- 若 E 是空集, 那么 $M = \sup(E) = -\infty$, 于是 $-M = +\infty$ 。 E 为空集, 于是 $-E$ 也是空集, 此时根据下确界的定义此时有 $\inf(-E) = +\infty = -M$, 于是结论成立。

综上, 此时总有 $M = \sup(E)$, 则 $-M = \inf(-E)$ 始终成立。

5.5.2 设 E 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $n \geq 1$ 是一个整数, 并且设 $L < K$ 是两个整数。假设 K/n 是 E 的一个上界, 但是 L/n 不是 E 的上界。不使用引理 5.5.9, 证明: 存在一个整数 $L < m \leq K$ 使得 m/n 是 E 的一个上界, 而 $(m-1)/n$ 不是 E 的上界 (提示: 使用反证法来证明, 并使用归纳法, 对这种情形下作图的方法也可能有所帮助)

由于 $L < K$, 于是根据整数序的性质, 于是可写 K 为 $K = L + c$, 其中 c 是不为 0 的自然数, 于是我们假设已知整数 L , 对 c 做归纳法证明题目结论。

当 $c = 1$ 时:

此时我们有 K 满足 ① $L < K \leq K$ 。 ② K/n 是 E 的一个上界。 ③ L/n 不是 E 的上界。于是此时成立题目结论。

现归纳性假设当 $c = a$ 时成立结论, 对 $c = a + 1$ 的情景:

已知 $(L + a)/n$ 可能为 E 的一个上界或不为 E 的上界, 对 $(L + a)/n$ 做讨论:

- $(L + a)/n$ 为 E 的一个上界。

令 $K' = L + a$, 于是 K'/n 是 E 的一个上界, 但是 L/n 不是 E 的上界。此时根据归纳假设, 必然存在一个整数 $L < m \leq K$ 使得 m/n 是 L 的一个上界, 而 $(m-1)/n$ 不是 L 的上界, 于是 m 存在。

- $(L+a)/n$ 不为 E 的上界。

令 $K' = L + a$, 于是此时 K' 满足① $L < K' \leq K$ 。② K'/n 是 E 的一个上界。③ K'/n 不是 E 的上界, 于是 K' 就是我们要寻找的 m , 即 m 存在。

综上, 当 $c = a + 1$ 时, 满足条件的 m 也是存在的。

于是归纳法证明完成, 题目结论成立。

5.5.3 设 E 是实数集 \mathbb{R} 的一个子集, $n \geq 1$ 是一个整数, 并且设 m, m' 是具有下述性质的整数: m/n 与 m'/n 都是 E 的上界, $(m-1)/n$ 与 $(m'-1)/n$ 都不是 E 的上界, 证明: $m = m'$, 于是习题 5.5.2 所构造的整数 m 是唯一的 (提示: 同样的, 作图会对本题的证明有所帮助)

使用反证法, 不妨假设 $m > m'$ (对于 $m < m'$ 的情况只需要令 $m = m'$ 与 $m' = m$ 即可), 根据整数序的性质, 于是 $m > m'$, 当且仅当存在正自然数使得 $m = m' + c$, 根据命题 2.2.12 自然数序的性质, c 为正当且仅当 $c \geq 1$, 于是我们应该有 $m \geq m' + 1$, 即 $m-1 \geq m'$ 。又根据题设条件, m'/n 是 E 的一个上界, 于是对任意 $x \in E$ 都有 $m'/n \geq x$ 成立, $(m-1)/n$ 不是 E 的上界, 于是必然存在 $x_0 \in E$ 使得 $x_0 > (m-1)/n$, 于是综上可以得到 x_0 满足:

$$x_0 > (m-1)/n \geq m'/n \geq x_0 \iff x_0 > x_0$$

于是导出了悖论, 归纳假设不成立, 于是只能有 $m = m'$ 。

(所以画图有什么帮助? 想不明白)

5.5.4 设 $q_1, q_2, q_3, \dots ((q_n)_{n=1}^\infty)$ 是一个有理数序列, 并且该序列满足: 只要 $M \geq 1$ 是一个整数并且整数 $n', n \geq M$, 那么有结论 $|q_n - q_{n'}| \leq \frac{1}{M}$ 成立。证明: q_1, q_2, q_3, \dots 是柯西序列。另外, 若令 $S := \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, 证明: $|q_M - S| \leq \frac{1}{M}$ 对任意 $M \geq 1$ 成立。 (提示: 利用习题 5.4.8)

证明: q_1, q_2, q_3, \dots 是柯西序列。

对任意 $\varepsilon > 0$, 取整数 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 根据整数部分性质我们有: $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ 。于是对任意 $i, j \geq N$, 根据题目条件, 总有:

$$|q_n - q_{n'}| \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

于是根据柯西序列定义, $(q_n)_{n=1}^\infty$ 是柯西序列。

证明: $|q_M - S| \leq \frac{1}{M}$ 对任意 $M \geq 1$ 成立。

先证明一个辅助结论: 对任意 $a \geq 0$, 我们都有柯西序列 $(q_n)_{n=k}^\infty$ 与序列 $(q_{n+a})_{n=k}^\infty$ 等价。

对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $(q_n)_{n=j}^\infty$ 是柯西序列, 于是存在一个整数 $N \geq k$ 使得对任意 $i, j \geq N$ 都有 $|q_i - q_j| \leq \varepsilon$, 特别的, 指定 $j = i + a$ 就有对任意 $i \geq N$ 都有 $|q_i - q_{i+a}| \leq \varepsilon$ 。于是根据等价柯西序列的定义, 可以得到序列 $(q_n)_{n=k}^\infty$ 与序列 $(q_{n+a})_{n=k}^\infty$ 等价。

于是对于任意 $M \geq 1$, 根据题目条件有: 对任意 $n \geq M$, 我们都有 $|q_M - q_n| \leq \frac{1}{M}$ 始终成立, 又根据习题 5.4.6, 这结论等价于:

$$q_M - \frac{1}{M} \leq q_n \leq q_M + \frac{1}{M}$$

于是根据习题5.4.8结论, 序列 $(q_{n+M-1})_{n=1}^{\infty}$ 所对应实数 S' 满足

$q_M - \frac{1}{M} \leq S' \leq q_M + \frac{1}{M} \iff |q_M - S'| \leq \frac{1}{M}$ 恒成立, 又根据辅助结论,
 $(q_{n+M-1})_{n=1}^{\infty}$ 与 $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ 是等价的, 于是 $S' = S$, 即题式 $|q_M - S| \leq \frac{1}{M}$ 得证。

5.5.5 构造一个类似于[命题5.4.14](#)的命题, 其中[命题5.4.14](#)中的“有理数”被替换成“无理数”

构造出的命题:

给定任意两个实数 $x < y$, 可以找到一个无理数 r 使得 $x < r < y$ 。

证明:

根据命题5.4.14, 我们知道在 x, y 中存在有理数 p 使得 $x < p < y$, 对 p 与 y 使用命题5.4.14我们可以得到有理数 q 使得 $p < q < y$, 现在我们命一个实数 r 为 $r = p + (q - p)/x$, 其中 x 就是命题5.5.12中所述的实数。由于 $x \geq 1$ 可以得到有 $p < p + (q - p)/x < q$, 进一步可以延伸结论有 $x < r < y$ 。此外, r 必然是无理数, 因为如果 r 是有理数那么应该有 $x = (q - p)/(r - p)$ 也是有理数, 这同命题4.4.4相悖。于是得证结论: 给定任意两个实数 $x < y$, 可以找到一个无理数 r 使得 $x < r < y$ 。

本节相关跳转

[实分析 5.4 对实数排序](#)

[实分析 6.2 广义实数系](#)