4.1整数

定义

1. (4.1.1 整数) **整数**是形如$a—b$的表达式，其中a与b都是自然数。另假设另一个整数$c—d$，两个整数被看做是相等的，当且仅当$a+d=b+c$。令$\mathbb{Z}$表示由全体整数构成的集合。
2. (4.1.2 整数的运算) 两个整数$(a—b)$与$(c—d)$的和由下述表达式定义：

   $$(a—b)+(c—d):=(a+c)—(b+d)$$

   两个整数$(a—b)$与$(c—d)$的积由下述表达式定义：

   $$(a—b)\times(c—d):=(ac+bd)—(ad+bc)$$

   > 注：整数$n—0$与自然数n具有相同的性质，不但可以证明$(n—0)+(m—0)=(n+m)—(0+0)$与$(n—0)\times(m—0):=(nm+0\cdot 0)—(0\cdot n+0\cdot m)$，且有$n—0=m—0$当且仅当$n=m$（用数学语言表示那就是整数$n—0$与自然数$n$存在一个**同构**）。于是可以通过令$n\equiv n—0$来把自然数和整数**等同**起来，并且这样的等同并不会影响到前面所定义的加法，乘法，相等等定义，因为它们之间是一致的。

3. (4.1.4 整数的负运算) 如果$(a—b)$是一个整数那我们定义它的负数$-(a—b)$为整数$(b—a)$，特别地，如果$n=(n—0)$是一个正自然数，那么定义它的负数$-n=0—n$。
4. (4.1.7 减法) 定义两个整数的减法运算为下述表达式：

   $$x-y=x+(-y)$$

   由于减法运算由加法与负运算定义，很自然地可以证明减法遵守替换公理。
5. (4.1.10 整数的排序) 设n与m为整数。称n大于或等于m，记作$n\geq m$或$m\leq n$，当且仅当存在某个自然数a使得$n=m+a$。称n严格大于m，并记作$n>m$或$m<n$，当且仅当$n\geq m$且$n\neq m$。

引理

1. (4.1.3加法与乘法的定义是明确的) 设a，b，c，d，a'，b'为自然数，假定有$(a—b)=(a'—b')$，那么有下述结论成立：

   $$(a—b)+(c—d)=(a'—b')+(c—d)$$
   $$(a—b)\times(c—d)=(a'—b')\times(c—d)$$

   因此加法与乘法是定义明确的运算，相等的输入总能给出相等的输出。
2. (4.1.5 整数的三歧性) 设x是一个整数，那么下述三个命题中恰好有一个为真：

   > - x是0。
   > - x是正的自然数n。
   > - x是正的自然数n的负数$-n$。

3. (4.1.6 整数的代数定律) 整数的九则代数定律（设x，y，z为整数）：

   > - $x+y=y+x$。
   > - $(x+y)+z=x+(y+z)$。

> - $x+0=0+x$。
> - $x+(-x)=(-x)+x=0$。
> - $xy=yx$。
> - $x\cdot 1=1\cdot x=x$。
> - $x(y+z)=xy+xz$。
> - $(y+z)x=yx+zx$。
>
> （下一章会被有理数的代数定律取代，同时上述九条还断定全体整数构成一个交换环）

4. （4.1.8 整数没有零因子）设a和b均为整数，若有$ab=0$，则：

> - $a=0$。
> - $b=0$。

至少有一个成立。

5. （4.1.9 整数的消去律）如果a，b，c为整数，且有$ac=bc$且$c\neq 0$，则有：

$$a=b$$

6. （4.1.11 序的性质）整数序的相关内容，设a，b，c为整数：

> - $a>b$当且仅当$a—b$是一个正的自然数。
> - 如有$a>b$，则$a+c>b+c$。
> - 如有$a>b$且c为正自然数，则$ac>bc$。
> - 如有$a>b$且$b>c$，则$a>c$。
> - 如有$a>b$，则有$-a<-b$。
> - 命题$a>b$，$a<b$，$a=b$恰有一个为真。

课后习题