4.4 有理数中的间隙

命题

1. (4.4.1 有理数确定的整数散布) 设x是一个有理数，则唯一存在一个整数n使得下式成立：

$$n \leq x < n+1$$

特别地，存在自然数N使$N > x$。同时，有时称n为x的**整数部分**，并记作$n = [x]$。

2. (4.4.3 由有理数确定的有理数散布) 如果x与y是两个有理数，并且满足$x < y$，则存在第三个有理数z使得$x < z < y$。（即任意两个有理数间总是存在一个有理数）

> 注：尽管有理数存在这样的稠密性，但是有理数依然是不完备的，在有理数之间依旧存在无数的“空隙”或者说空洞，例如下面两个例子。

3. (4.4.4 $\sqrt{2}$不是有理数) 不存在有理数x，使得$x^2 = 2$。
4. (4.4.5) 对任意**有理数**$\epsilon > 0$，存在一个非负有理数x使得$x^2 < 2 < (x+\epsilon)^2$。

（注：3、4在某种意义上指明稠密有理数中空隙的存在，也为实数的存在留下空间，隐隐指出了实数定义的方向。（尽管这样是有缺漏且不完备的））

课后习题