4.2 有理数

定义

1. (4.2.1 有理数) 定义**有理数**为形如$a//b$的表达式，其中a，b为整数且b不为0，$a//0$不为有理数。称两个有理数$a//b$与$c//d$相等，当且仅当有$ad=cb$，称全体有理数构成的集合为$\mathbb{Q}$。
2. (4.2.2 有理数基本运算) 若$a//b$与$c//d$为有理数，则其加和由下述表达式定义：

$$(a//b)+(c//d):=(ad+bc)//(bd)$$

   其乘积由下述表达式定义：

$$(a//b)\times(c//d):=(ac)//(bd)$$

   其负运算由下述表达式定义：

$$-(a//b):=(-a)//b$$

3. (无编号 倒数) 如果$x=a//b$是一个非零的有理数（从而a，$b\neq 0$），则定义x的倒数x^{-1}为有理数$x^{-1}:=b//a$。
4. (4.2.6 正负有理数) 称有理数x是**正**的，当且仅当存在两个正自然数a，b使得有$x=a//b$。x是**负**的，当且仅当存在正有理数y使得$x=-y$。
5. (4.2.8 有理数的排序) 设x，y为有理数，称$x>y$，当且仅当$x-y$是一个正有理数，称$x<y$当且仅当$x-y$是一个负有理数，记$x\geq y$当且仅当$x>y$或$x=y$，$x\leq y$的定义类似。

命题

1. (4.2.3 有理数的运算是定义明确的) 有理数上的和，乘积与负运算都是定义明确的，即换言之用$a//b$相等的有理数$a'//b'$替换输入不会改变结果，也即有理数的运算对相同的输入总有相同的输出。
2. (无编号 有理数与整数？) 有理数$a//1$与整数a性质相同，包括有：

   > - $a//1+b//1=(a+b)//1$。
   > - $a//1\times b//1=ab//1$。
   > - $-(a//1)=(-a)//1$。
   > - $a//1=b//1$当且仅当$a=b$时成立。

   由此，可以认为a与$a//1$恒等，即：

$$a\equiv a//1$$

   这个式子使整数与有理数算术一致，也使将整数系嵌套入有理数系成为可能。（如同上一节中将自然数系嵌套入整数系一样）。
3. (4.2.4 有理数的代数定律) 设x，y，z为有理数，则下述运算定律成立：

   > - $x+y=y+x$。
   > - $(x+y)+z=x+(y+z)$。
   > - $x+0=0+x$。
   > - $x+(-x)=(-x)+x=0$。
   > - $xy=yx$。
   > - $x\cdot 1=1\cdot x=x$。

> - $x(y+z)=xy+xz$。
> - $(y+z)x=yx+zx$。
> - $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x(x\neq 0)$。

同时，上述十式断定有理数集$\mathbb{Q}$构成了一个**域**（因为多了第十条），并取代了上一节中的整数代数定律。

4. (4.2.7 有理数的三歧性) 设x为一个有理数，则下述三个命题中恰有一个为真：

> - x等于0。
> - x是一个正有理数。
> - x是一个负有理数。

5. (4.2.9 有理数域上序的基本性质) 设x，y，z为有理数，则下述性质成立：

> - (序的三歧性) 命题"$x=y$"，"$x>y$"，"$x<y$"中恰有一个为真。
> - (序是反对称的) $x<y$当且仅当$y>x$。
> - (序是可传递的) 若$x<y$且$y<z$，则$x<z$。
> - (加法保持序不变) 若$x<y$，则$x+z<y+z$。
> - (正的乘法保持序不变) 若$x<y$且z是正的，则$xz<yz$。

上述五条同引理4.2.4共同断定有理数集$\mathbb{Q}$构成了一个有序域。

课后习题