4.4 有理数中的间隙

命题

1. （4.4.1 有理数确定的整数散布）设x是一个有理数，则唯一存在一个整数n使得下式成立：

   $$n \leq x < n+1$$

   特别地，存在自然数N使$N > x$。同时，有时称n为x的**整数部分**，并记作$n = [x]$。（原书似乎是[与]去掉上面一横，但是我查遍了我所能找到的$\LaTeX$支持字符也没找到那个符号，这里先用[替代，不清楚是否是印刷问题）

2. （4.4.3 由有理数确定的有理数散布）如果x与y是两个有理数，并且满足$x < y$，则存在第三个有理数z使得$x < z < y$。（即任意两个有理数间总是存在一个有理数）

   > 注：尽管有理数存在这样的稠密性，但是有理数依然是不完备的，在有理数之间依旧存在无数的"空隙"或者说空洞，例如下面两个例子。

3. （4.4.4 $\sqrt{2}$不是有理数）不存在有理数x，使得$x^2 = 2$。
4. （4.4.5）对任意**有理数**$\varepsilon > 0$，存在一个非负有理数x使得$x^2 < 2 < (x+\varepsilon)^2$。

   （注：3、4在某种意义上指明稠密有理数中空隙的存在，也为实数的存在留下空间，隐隐指出了实数定义的方向。（尽管这样是有缺漏且不完备的））

课后习题

4.4.1 证明命题4.4.1（提示：利用命题2.3.9）

> 对任意正有理数或零$x = \frac{a}{b}(a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)$，于是根据命题2.3.9欧几里得算法，可以得到唯一的一组(m, r)使得$a = mb + r(0 \leq r < b)$，于是可以得到$x = \frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}(0 \leq \frac{r}{b} < 1)$，此时整数$m$满足结论$m \leq x < m+1$。
>
> 对任意负有理数x，将它表示为$x = -y$，于是根据正有理数的结论存在某自然数m使得$m \leq y < m+1$，于是有$-m \geq x > -(m+1)$。$-m$与$-(m+1)$都是整数，于是我们选择这样一个确定整数n的原则：
>
> $$n = \begin{cases} -m & \text{if } y = m \\ -(m+1) & \text{if } y \neq m \end{cases}$$
>
> 这样对任何负有理数x，都必然有n使得$n \leq x < n+1$，由于m选取的唯一性，因此n也是唯一确定的。
>
> 这样综上可以得到对任意有理数x，唯一存在一个整数n使得$n \leq x < n+1$成立。

4.4.2 定义：数列a_0，a_1，a_2，$\ldots$（可以是自然数列、整数列、有理数列或实数列）被称为是无穷递降的，当且仅当对任意的自然数n都有如$a_n > a_{n+1}$（即$a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$）

(a) 证明无穷递降原理：不存在无穷递降的自然数列。（提示：为了推出矛盾，假设能够找到一个自然数列是无穷递降的。因为所有的a_n都是自然数，所以$a_n \geq 0$对一切n都成立。那么利用归纳法来证明对任意的$k \in \mathbb{N}$和任意的$n \in \mathbb{N}$都有$a_n > k$成立从而得到矛盾。）

> 假设存在一个自然数列a_0，a_1，a_2，$\ldots$是无穷递降的，我们来证明对任意的$k \in \mathbb{N}$和任意的$n \in \mathbb{N}$都有$a_n > k$成立。
>
> 对k使用归纳法：
>
> 当$k = 0$时：
>
> 假设存在某个n使得$a_n = 0$，那么根据无穷递降的定义，应该有$a_{n+1} < a_n = 0$，同时a_{n+1}又是自然数，于是应当满足$a_{n+1} \geq 0$的基本条件，于是发生矛盾，故应当有对任意$n \in \mathbb{N}$都有$a_n > 0$成立。
>
> 现归纳假设有当$k = j$时成立结论，对$k = j + 1$时：
>
> 假设存在某个n使得$a_n = j + 1$，那么根据无穷递降的定义，应该有$a_{n+1} < a_n = j + 1$，，于是根据归纳假设，应当满足$a_{n+1} > j$的基本条件，可以看到不存在任何自然数x同时满足$x > j$与$x < j + 1$的条件，与反证假设它存在矛盾，故应当有对任意$n \in \mathbb{N}$都有$a_n > j + 1$成立。
>
> 综上我们得到对无穷递降的自然数列，其内所有项必然大于任何自然数，这显然是不存在的。

(b) 如果序列a_0，a_1，a_2，$\ldots$的取值替换成整数而不再是自然数，那么无穷递降原理是否成立？如果上述取值替换成正有理数，情况又会如何？请给出解释。

> 整数列成立，最简单的例子$a_n = -n$就是满足无穷递降原理的序列，换成正有理数列也是成立的，一个例子是$a_n = \dfrac{1}{n}$。

4.4.3 把命题4.4.4证明过程中标注了（为什么？）的细节补充完整

> 1. 自然数x不可能既是奇数又是偶数
>
>   若x是偶数，则存在自然数a使得$x = 2a$，同时x是奇数，那么存在自然数b使得$x = 2b + 1$，于是可以得到$2b + 1 = 2a \iff \dfrac{1}{2} = a - b$，由于$a$，$b$都是自然数，所以$a - b$至少是个整数，这同$a - b = \dfrac{1}{2}$矛盾，于是不存在既是偶数又是奇数的自然数。
>
> 2. 如果p是奇数，那么p^2也是奇数
>
> p是奇数，那么存在自然数a使得$x = 2a + 1$，于是$p^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$，由于$a$是自然数，所以$y = 2a^2 + 2a$也是自然数，进而$p^2 = 2y + 1$也是奇数。
>
> 3. 因为$p^2 = 2q^2$，所以$p > q$
>
>   暂且抛开矛盾的问题，先假设这里p，q都是非0自然数，于是$p^2 = 2q^2 = q^2 + q^2$，于是根据自然数序的定义，$p^2 > q^2 (q^2 \neq 0)$，假如有$p \leq q$，那么根据自然数乘法序不变可得到$p^2 \leq pq \leq q^2 \iff p^2 \leq q^2$。这同$p^2 > q^2$的前提矛盾，于是必然有$p > q$。

本章相关跳转

[实分析 2.3 乘法]