3.6 集合的基数

定义

1. （无序号 集合的基数）对于任意一个一个元素个数有限的集合X，称其中元素的数目n为集合X的**基数**，并记为$\#(X) = n$。
2. （3.6.1 基数的相等）称两个集合X与Y有相同的基数，当且仅当存在一个$X \to Y$的双射$f : X \to Y$。
3. （3.6.5 基数定义）设n是一个自然数，称集合X的**基数**为n，当且仅当X与集合$\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$拥有相同的基数。另一种说法是称$X$中有$n$个元素，当且仅当$X$的基数为$n$。
4. （有限集）一个集合是**有限**的，当且仅当它的基数是某个自然数n，否则称这个集合为**无限集**。

命题

（设X，Y，Z为集合）

1. （3.6.4 自反性？）X与X有相同的基数。
2. （3.6.4 对称性？）如果X与Y有相同的基数，则Y与X有相同的基数
3. （3.6.4 可传递性？）如果X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，则认为X与Z也有相同的基数。
4. （3.6.8 基数的唯一性）设集合X的基数为n，则X不可能还有其它的基数。换言之，对任意$m \neq n$，m不可能为X的基数。
5. （3.6.9）假设$n \geq 1$，且X的基数为n，那么X是非空的，而且若有x是X中任意一个元素，则有$X \backslash \{x\}$的基数为$n - 1$。
6. （3.6.14 基数运算）集合的基数满足下述命题（设X，Y是有限集）：

   > - 设x是一个对象且x不是X中的元素，则$X \cup \{x\}$是有限的，且$\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$。
   > - $X \cup Y$是有限的，且$\#(X \cup Y) \leq \#(X) + \#(Y)$，特别地，当$X \cap Y = \varnothing$时，有$\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$。
   > - 假定$f : X \to Y$是一个函数，那么$f(X)$是一个有限集且满足$\#(f(x)) \leq \#(X)$，特别地，当f是一个单射时，则有$\#(f(X)) = \#(X)$。
   > - 假定Y是X的子集，则Y是有限的，且$\#(Y) \leq \#(X)$，若Y是X的真子集，则有$\#(Y) < \#(X)$。
   > - 笛卡尔积$X \times Y$是有限的，且$\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$。
   > - 集合Y^X是有限的，且$\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$。

7. （习题3.6.10 抽屉原理）设A_1，......，A_n都是有限集，且有$\#(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i) > n$，则存在$i \in \{1, \cdots, n\}$使得$\#(A_i) \geq 2$。

课后习题

3.6.1 证明命题3.6.4

> 分别证明：
>
> 自反性：
>
> X到X间有恒等映射$\iota_{X\to X}$为双射，于是成立结论。
>
> 对称性：
>
> X与Y有相同的基数，则存在$f:X\to Y$为双射，相应的$f^{-1}:Y\to X$也是一个双射，于是Y与X有共同的基数。
>
> 可传递性：
>
> X与Y有相同的基数，且Y与Z有也有相同的基数，于是存在两个函数$f:X\to Y$与$f:Y\to Z$为双射，根据习题3.3.7结论，则有$g\circ f:X\to Z$也是一个双射，于是X与Z有相同的基数。

3.6.2 证明：一个集合的基数为0，当且仅当它是空集

> 假定该集合为X，基数为0，于是存在双射$f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}\to X$。又有$\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$，于是即空函数$f:\varnothing\to X$为双射，根据习题3.3.3的讨论，可以得到空函数$f:\varnothing\to X$为双射，当且仅当$X=\varnothing$，于是结论得证。

3.6.3