

6.7 实数的指数运算 II

定义

1. (6.7.2 实数次幂的指数运算) 设 $x > 0$ 是一个实数, 且 α 是一个实数, 则我们定义 x^α 为 $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(q_n)}$, 其中 $(q_n)_{n=1}^\infty$ 是任意一个收敛于 α 的有理数序列。

命题

1. (6.7.1 指数运算的连续性) 设 $x > 0$ 且 α 是一个实数。令 $(q_n)_{n=1}^\infty$ 是任意一个收敛于 α 的有理数序列, 那么 $(x^{(q_n)})_{n=1}^\infty$ 也是一个收敛的序列。更进一步的, 如果 $(p_n)_{n=1}^\infty$ 是另外任意一个收敛于 α 的有理数序列, 那么 $(x^{(p_n)})_{n=1}^\infty$ 与 $(x^{(q_n)})_{n=1}^\infty$ 有相同的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p_n}$$

2. (6.7.3 定理升级?) [引理5.6.9](#)中对有理数 q 与 r 成立的结论对全部实数 q 与 r 也成立。

(贴一下引理5:)

(5.6.9 有理数次幂的运算性质?) 设 $x, y > 0$ 是正实数, 且 q 与 r 是有理数, 则:

- x^q 是一个正实数。
- $x^{q+r} = x^q \cdot x^r$ 且有 $x^{qr} = (x^q)^r$ 。
- $x^{-q} = \frac{1}{x^q}$ 。
- 如有 $q > 0$, 则 $x > y$ 当且仅当 $x^q > y^q$ 。
- 如有 $x > 1$, 则 $x^q > x^r$ 当且仅当有 $q > r$; 如有 $x < 1$, 则 $x^q > x^r$ 当且仅当有 $q < r$ 。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 5.6 实数的指数运算 I](#)