8.1 可数性

公理

策梅洛-弗兰克尔-选择系统（终章）

> 1. （8.1 选择公理）设I是一个集合，并且对任意$\alpha \in I$，假设X_α是一个非空集合，那么集合$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$也是非空的。换言之，存在一个函数$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$对每个$\alpha \in I$指定了一个元素$x_\alpha \in X_\alpha$。

（虽然选择公理是8.4节的内容，但是这节的习题好多都要用到选择公理，故在此先贴出，在8.4节会再次重复一遍）

定义

1. （8.1.1 可数集）集合X是**可数无限**的（或简称**可数的**），当且仅当X与自然数集$\mathbb{N}$有相同的基数。集合X是**至多可数**的，当且仅当X是可数的或者是有限的。如果一个集合无限的并且不是可数的，则称这个集合是**不可数的**。（可数无限集也被称作可列集）

命题

1. （8.1.4 良序原理）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个非空子集，则恰好存在一个元素$n \in X$，使得对所有的$m \in X$均有$m \geq n$。换言之，对任意自然数集$\mathbb{N}$的非空子集均有一个最小元素。（由良序原理给出的元素n一般称作X的最小值，记为$\min(X)$，这个最小值显然与定义5.5.10中X的下确界是一致的）
2. （8.1.5）设X是自然数集$\mathbb{N}$的一个无限子集，那么存在唯一一个递增双射$f : \mathbb{N} \to X$（递增即对任意$n \in \mathbb{N}$，有$f(n+1) > f(n)$）。特别地，X与$\mathbb{N}$具有相同的基数，所以X是可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.6）自然数的所有子集都是至多可数的。
   > 2. （8.1.7）如果X是一个至多可数的集合，并且Y是X的一个子集，那么Y也是至多可数的。

3. （8.1.8）设Y是一个集合，并且$f : \mathbb{N} \to Y$是一个函数，那么$f(\mathbb{N})$是至多可数的。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.9）设X是一个可数集，并且设$f : X \to Y$是一个函数。那么$f(X)$是至多可数的。

4. （8.1.10）设X是一个可数集，并且设Y也是一个可数集，那么$X \cup Y$也是一个可数集。

   > 推论：
   >
   > 1. （8.1.11）整数集$\mathbb{Z}$也是一个可数集。

5. （8.1.12）集合$A := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n\}$是可数集。

   > 推论：

> 1. (8.1.13) 集合$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$是可数集。
> 2. (8.1.14) 如果X和Y都是可数集，那么$X\times Y$也是可数集
> 3. (8.1.15) 有理数集$\mathbb{Q}$是可数集。

课后习题

8.1.1 设X是一个集合，证明：X是无限集，当且仅当存在X的一个真子集$Y\subsetneq X$与X具有相同的基数（本题要用到选择公理和公理8.1）

>

8.1.2 证明命题8.1.4（提示：可以利用归纳法、无穷递降原理、习题 4.4.2、最小上界（或最大下界）原理或定理5.5.9）如果把良序原理中的自然数替换成整数，那么该原理还成立吗？如果把自然数替换成正有理数，结果又如何？请给出解释

>

8.1.3 把命题8.1.5中标记（？）的细节补充完整

>

8.1.4 证明命题8.1.8（提示：这里基本的问题是没有假设f是一对一的。定义A为集合

$$A := \{n\in\mathbb{N} : f(m)\neq f(n)\text{对所有的}0\leq m<n\text{均成立}\}$$

通俗地说，A是由满足如下条件的自然数n构成的集合：n所对应的$f(n)$不出现在序列$f(0)$，$f(1)$，…，$f(n-1)$中。证明如果把f限制在A上，那么f就成为从A到$f(A)$的双射，然后利用命题8.1.5）

>

8.1.5 利用命题8.1.8证明推论8.1.9

>

8.1.6 设A是集合，证明：A是至多可数的，当且仅当存在从A到$\mathbb{N}$的单射$f:A\to\mathbb{N}$

>

8.1.7 证明命题8.1.10（提示：根据假设，我们有双射$f:\mathbb{N}\to X$和双射$g:\mathbb{N}\to Y$。现在定义$h:\mathbb{N}\to X\cup Y$如下：对任意的自然数n，令$h(2n):=f(n)$且$h(2n+1):=g(n)$，证明$h(\mathbb{N})=X\cup Y$。然后利用推论8.1.9并证明$X\cup Y$不可能是有限集）

>

8.1.8 利用推论8.1.13证明推论8.1.14

>

8.1.9 设I是一个至多可数的集合，并且对每个$\alpha\in I$，令A_α为一个至多可数的集合。证明：集合$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$也是至多可数的。特别的，可数个可数集的并集是可数集（本题要用到选择公理，参见8.4节）

>

8.1.10 找到一个从自然数集到有理数集的双射$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$（注意：真正找到一个具体的$f$需要非常高超的技巧，并且使得$f$同时是单射和满射是很困难的）

>

本节相关跳转

实分析 2.1 皮亚诺公理

实分析 4.4 有理数中的间隙

实分析 5.5 最小上界性质

实分析 8.4 选择公理