6.5 一些基本的极限

引理

1. （无编号）常数序列c，c，$\dots$的极限$\lim\limits_{n\to\infty} c=c$。
2. （6.5.1）对任意整数$k\geq 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{k}}}=0$均成立。
3. （6.5.2）设x是一个实数，当$|x|<1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$存在，并且等于$0$。

   当$x=1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$存在，并且等于$1$。

   当$x=-1$或$|x|>1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty} x^n$是发散的。
4. （6.5.3）对于任意$x>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}=1$均成立。

课后习题

6.5.1 证明：对任意有理数$q>0$，均有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^q}=0$。（提示：利用推论6.5.1、极限定律以及定理6.1.19）推导出极限$\lim\limits_{n\to\infty} n^q$不存在（提示：采用反证法并利用定理6.1.19(e)）

>

6.5.2 证明引理6.5.2（提示：利用命题6.3.10，习题6.3.4以及夹逼定理）

>

6.5.3 证明引理6.5.3（提示：你可能要分为$x\geq 1$和$x<1$两种情形来考虑。你或许愿意先利用引理6.5.2这样一个预备结论：对任意的$\varepsilon>0$和任意的实数$M>0$，存在一个n使得$M^{\frac{1}{n}}\leq 1+\varepsilon$）

>

本节相关跳转

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 6.3 序列的上确界与下确界

实分析 6.4 上极限、下极限和极限点