

5.4 对实数排序

定义

- (5.4.1 正远离与负远离) 设 $a_n|_{i=1}^{\infty}$ 是一个有理数序列, 称该序列是**正远离0**的, 当且仅当存在一个正有理数 $c > 0$, 使得 $a_n \geq c$ 对任意 $n \geq 1$ 均成立。(特别地, 整个序列是**正的**) 称该序列是**负远离0**的, 当且仅当存在一个负有理数 $-c < 0$, 使得 $a_n \leq -c$ 对任意的 $n \geq 1$ 均成立。(特别地, 整个序列是**负的**)
- (5.4.3 正负实数) 称实数 x 是**正的**, 当且仅当它可以被写为某个**正远离0**的柯西序列 $a_n|_{i=1}^{\infty}$ 的形式极限, 即 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。称 x 是**负的**, 当且仅当它可以被写为某个**负远离0**的柯西序列 $a_n|_{i=1}^{\infty}$ 的形式极限, 即 $x = \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。
- (5.4.5 绝对值) 设 x 是实数, 如果 x 是**正的**, 则定义 x 的绝对值 $|x|$ 等于 x ; 如果 x 是**负的**, 则定义 x 的绝对值 $|x|$ 等于 $-x$; 如果为零, 则定义 x 的绝对值 $|x|$ 等于 0。
- (5.4.6 实数的排序) 设 x 与 y 是实数, 若 $x - y$ 是一个正实数, 则称 x 大于 y 并记为 $x > y$; 若 $x - y$ 是一个负实数, 则称 x 小于 y 并记作 $x < y$ 。定义 $x \geq y$, 当且仅当 $x > y$ 或 $x = y$; 定义 $x \leq y$, 当且仅当 $x < y$ 或 $x = y$ 。

命题

- (5.4.4 正实数的基本性质) 对任意的实数 x , 下述三个命题中**恰好**有一个为真:

- x 是 0。
- x 是正的。
- x 是负的。

实数 x 是**负的**, 当且仅当 $-x$ 是**正的**。如果 x 和 y 都是**正的**, 那么 $x + y$ 与 xy 都是**正的**。

- (5.4.7 实数数域上序的基本性质) 性质 (引理 4.2.9) 一切关于有理数成立的结论对实数仍然是成立的。(内容见下)

- (序的三歧性) 命题 " $x = y$ ", " $x > y$ ", " $x < y$ " 中恰有一个为真。
- (序是反对称的) $x < y$ 当且仅当 $y > x$ 。
- (序是可传递的) 若 $x < y$ 且 $y < z$, 则 $x < z$ 。
- (加法保持序不变) 若 $x < y$, 则 $x + z < y + z$ 。
- (正的乘法保持序不变) 若 $x < y$ 且 z 是正的, 则 $xz < yz$ 。

- (5.4.8 实数的倒数?) 设 x 是一个正实数, 那么 x^{-1} 也是正的。同时, 如果 y 是另外一个正数并且 $x > y$, 那么 $x^{-1} < y^{-1}$ 。

- (5.4.9 非负实数集是闭的) 设 a_1, a_2, a_3, \dots 是非负有理数的一个柯西序列, 那么 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是非负实数。

(也可以说成非负实数集是闭的, 而正实数集是开的)

- (5.4.10 序不变?) 设 $a_n|_{i=1}^{\infty}$ 与 $b_n|_{i=1}^{\infty}$ 是有理数的柯西序列, 并且满足 $a_n \geq b_n$ 对所有 $n \geq 1$ 均成立, 那么有:

$$\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- (5.4.12 有理数对实数的界定) 设 x 是一个正实数, 那么存在一个正有理数 q 使得 $q \leq x$, 并且存在一个正整数 N 使得 $x \leq N$ 。
- (5.4.13 阿基米德性质) 设 x 和 ε 是任意的正实数, 则存在一个正整数 M 使得 $M\varepsilon > x$ 。

8. (5.4.14 实数的间隙?) 给定任意两个实数 $x < y$, 可以找到一个有理数 q 使得 $x < q < y$ 。
(即使到了这里, 实数系仍然没有展现出任何超越有理数系的优越性)

课后习题

本节相关跳转

[实分析 4.2 有理数](#)