8.4 选择公理

公理

策梅洛-弗兰克尔-选择系统（终章）

> 1. （8.1 选择公理）设I是一个集合，并且对任意$\alpha \in I$，假设X_α是一个非空集合，那么集合$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$也是非空的。换言之，存在一个函数$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$对每个$\alpha \in I$指定了一个元素$x_\alpha \in X_\alpha$。
>
> （注：直观来看，这个公理允许我们在给出一组集合X_α（可以是无限个）中，从每个集合中提取出一个元素x_α，最终组成一个（无限）多元组$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$，不过这样的选择并没有指定选择的方法，仅仅只是指出这样元素存在。因此，选择公理可以完成一些非构造性的证明，仅仅阐述对象的存在性，而不指明它的构造方法。认识到非构造的存在性命题与构造的存在性命题之间的区别能帮助我们更好的认识选择公理。使用的时候，选择公理有许多等价的表述，这可以在本节习题中找到一些。我们往往也不需要用到选择公理的全部内容，通常可以选择使用**可数选择公理**，即限制I至多可数。）

（注：这个公理因为在前期基础内容的构建上的需求不大，但是在深层次的理论研究之中，这条公理是极其方便甚至是不可或缺的，选择公理本身也可以推出许多并不直观的结论，比如巴拿赫-塔斯基悖论（这个在18章会讨论它的简化形式）。哥德尔给出的一个定理证明了使用选择公理证明的结论永远不会同不使用选择公理证明的结论相矛盾（除非集合论的其它公理之间不一致），也即选择公理是不可判定的。关于选择公理，在数学的其它领域中，特别是集合论，许多问题都不是可判定的，是否接受选择公理也是一个饱受各方争议的话题，不过本书内容不对这方面做讨论。我们仅需要知道选择公理，并将其视为我们分析理论中一个方便，安全，节省劳动的工具即可）

定义

1. （8.4.1 无限笛卡尔积）设I是一个集合（可以是无限集），且对任意$\alpha \in I$，设X_α是一个集合。那么我们定义笛卡尔积$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$是集合：

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \left(\bigcup_{\beta \in A} X_\beta \right)^I : x_\alpha \in X_\alpha \text{对任意}\alpha \in I\text{成立} \right\}$$

（注：$\left(\bigcup_{\beta \in A} X_\beta \right)^I$是由幂集公理获得，全体以$I$为定义域，$\bigcup_{\beta \in A} X_\beta$为值域的函数$f$所构成的集合，这里的$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$实质上是一个函数，对每一个$\alpha \in I$指定了一个$x_\alpha \in X_\alpha$作为输出，由于是第3章的内容了，略微久远，在这里写明防止忘记。）

命题

1. （8.4.5 选择公理实践？）设E是实直线的一个子集，并且$\sup E \leq \infty$（即E是有上界的），那么存在一个所有项a_n都存在于E中的序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$使得$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup E$。

   （可以看下课本怎么使用选择公理的）

2. （8.4.7 选择公理的另一种表述？）设X和Y是集合，并且设关于$x \in X$与$y \in Y$的性质$P(x, y)$满足：对任意$x \in X$至少存在一个$y \in Y$使得$P(x, y)$为真。那么存在一个函数$f: X \to Y$使得$P(x, f(x))$对所有$x \in X$都为真。

课后习题

本节相关跳转

[实分析 3.4 象和逆象]