7.2 无限级数

定义

1. (7.2.1 形式无限级数) 一个（形式）**无限级数**是形如

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

的表达式，其中m是整数并且对任意$n \geq m$，a_n是一个实数，有时也可以写成

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots$$

(这只是个形式的定义)

2. (7.2.2 级数的收敛) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个形式无穷级数，对任意的整数$N \geq m$，定义$N$部分和为$S_N := \sum\limits_{n=m}^{N} a_n$，于是显然$S_N$是一个实数。

   如果当$N \to \infty$时，序列$(S_N)_{n=m}^{\infty}$**收敛**于某个实数L，则称无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是**收敛**的，并且称它收敛于$L$，也记有$L = \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$，称$L$是无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$的和。

   对应的，如果部分和序列是$(S_N)_{n=m}^{\infty}$**发散**的，则称无限级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是**发散**的，并且不对这个级数指定任何实数值。
   (注：极限的唯一性保证了无限级数和的唯一性，因此可以放心讨论收敛级数的和)

3. (7.2.8 绝对收敛) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数，则称其是**绝对收敛**的，当且仅当级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} |a_n|$是收敛的。

命题

1. (7.2.5 部分和的收敛性) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。有$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$收敛，当且仅当对任意实数$\varepsilon > 0$都存在一个整数$N \geq m$使得：

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \leq \varepsilon$$

   对全部$p, q \geq \mathrm{N}$均成立。

2. (7.2.6 零判别法) 设$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛的形式无限级数，那么一定有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$换言之，若有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$或发散，那么级数$\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$是发散的。

3. (7.2.9 绝对收敛判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数的形式无限级数。若这个级数是绝对收敛的，那么它也是条件收敛的 (注意这里定义中条件收敛并不与绝对收敛互斥，但是别的教材有时会定义两者互斥来方便分类) ，并且此时有三角不等式：

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$$

4. (7.2.12 交错级数判别法) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个非负并且递减的实数序列。于是对任意$n \geq m$均有$a_n \geq 0$与$a_n \geq a_{n+1}$。则形式级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是收敛的，当且仅当$n \to \infty$时序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于0。
5. (7.2.14 级数定律) 有下述命题为真：

> 1. (无限级数的加和？) 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，$\sum_{n=m}^{\infty} b_n$是一个收敛于y的实数级数，则$\sum_{n=m}^{\infty}(a_n + b_n)$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$x+y$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} b_n$$
>
> 2. (无限级数的数乘？) 如果$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，c是一个实数，则$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n$也是一个收敛的级数，并且它收敛于$c \cdot x$。特别的，有：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} c \cdot a_n = c\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$
>
> 3. (无限级数的拆分？) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，k是一个自然数。若级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$中有一个是收敛的，那么另一个也是收敛的，并且有恒等式：
>
> $$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{m+k-1} a_n + \sum_{n=m+k}^{\infty} a_n$$
>
> 4. (约束变量不影响无限和) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个收敛于x的实数级数，且设k是一个整数，则$\sum_{n=m+k}^{\infty} a_{n-k}$也收敛于$x$。

6. (7.2.15 嵌套级数) 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个收敛于0的实数序列，即$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1}$收敛于$a_0$。

课后习题