

# 什么是分析

## 前注：

第1章的两节属于前言性质的章节，并没有介绍什么定理或者定义，如果只是想要学习实分析的内容可以直接从第2章开始看。但是在这两节中我们会了解为什么要学习实分析，实分析在研究什么。我个人认为，对于理论搞清楚研究的目标与方向是一件很重要的事情，因此这一部分的内容还是有一定必要性的，故简单整理抄录原书内容放在此处，以防遗忘。

## 分析学

本书将介绍高等**实分析**，具体内容包括实数，实数序列，实数级数以及实值函数的分析。实分析与复分析，调和分析，泛函分析等学科关联密切的同时也有所差异，具体表现在：

### 1. 复分析

关于复数与复函数的分析

### 2. 调和分析

关于调和函数（振动）的分析，并研究如何通过傅里叶变换构造其它函数

### 3. 泛函分析

对函数的分析，并研究如何通过函数构造诸如向量空间等事物

### 4. 实分析

微积分学的理论基础

**分析学**是对这些对象进行严格研究的，并着力于对对象作出准确的定性与定量分析。

## 研究什么？

本书中，我们会对许多曾经在初等微积分学习中学习到的概念进行研究，包括但不限于：数字，序列，极限，级数，函数，定积分，导数等。虽然我们已经使用这些概念做过大量的计算，但是在本书中，我们更加注重于对概念的基本理论的研究，可能会遇到很多你从未想过的问题，比如：

1. 什么是实数？是否存在最大的实数？"0"之后的"下一个"实数又是多少（即最小的正实数是？）？我们能否对一个实数做无穷次分割？为什么有的实数（比如2）有平方根而有的实数（比如-2）没有？既然有无穷多的实数与无穷多的有理数，为什么说实数比有理数多？
2. 如何确定实数序列的极限值？什么样的序列是存在极限，什么样的序列不存在极限？如果一个序列并不趋向无穷，那么这是否意味着它最终必然收敛？把无穷多个实数相加是否有可能得到一个有限实数？无穷多个有理数相加后的结果一定是一个有理数吗？如果无穷多个数相加，那么改变计算的顺序还可以得到一样的结果吗？
3. 什么是函数？有界的，可微的，可积的，连续的这些概念分别都是什么意思？能否将无穷多个函数相加？对函数序列取极限会怎样，能否对无穷函数级数求微分？什么是求积分？如果一个函数 $f$ 满足 $f(0) = 3$ 且 $f(1) = 5$ ，那么 $x$ 遍历 $[0, 1]$ 中所有值是否也就意味着 $f(x)$ 遍历了 $[3, 5]$ 之间所有值？

学习过微积分课程应该能对其中的许多问题给出自己的解答。在微积分课程中，这类问题通常不是关注的重点，我们会更加关系怎么去完成计算，比如  $\int_0^1 x \sin(x^2) \, dx$  怎么计算的。在这本书中，我们将回归理论知识并了解它们是如何展开的。