5.4 对实数排序

定义

1. (5.4.1 正远离与负远离) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$是一个有理数序列，称该序列是**正远离0的**，当且仅当存在一个正有理数$c>0$，使得$a_n \geq c$对任意$n \geq 1$均成立。（特别地，整个序列是**正**的）称该序列是**负远离0的**，当且仅当存在一个负有理数$-c<0$，使得$an \leq c$对任意的$n \geq 1$均成立。（特别地，整个序列是**负**的）
2. (5.4.3 正负实数) 称实数x是**正**的，当且仅当它可以被写为某个**正远离0**的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，即$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$。称x是**负**的，当且仅当它可以被写为某个**负远离0**的柯西序列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$的形式极限，即$x=\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$。
3. (5.4.5 绝对值) 设x是实数，如果x是**正**的，则定义x的绝对值$|x|$等于x；如果x是**负**的，则定义x绝对值$|x|$等于$-x$；如果为零，则定义x的绝对值$|x|$等于0。
4. (5.4.6 实数的排序) 设x与y是实数，若$x-y$是一个正实数，则称x大于y并记为$x>y$；若$x-y$是一个负实数，则称x小于y并记作$x<y$。定义$x \geq y$，当且仅当$x>y$或$x=y$；定义$x \leq y$，当且仅当$x<y$或$x=y$。

命题

1. (5.4.4 正实数的基本性质) 对任意的实数x，下述三个命题中**恰好**有一个为真：

   > - x是0。
   > - x是正的。
   > - x是负的。

   实数x是**负**的，当且仅当$-x$是**正**的。如果x和y都是**正**的，那么$x+y$与xy都是**正**的。
2. (5.4.7 实数数域上序的基本性质) 性质 ([引理 4.2.9]) 一切关于有理数成立的结论对实数仍然是成立的。（内容见下）

   > - (序的三歧性) 命题"$x=y$"，"$x>y$"，"$x<y$"中恰有一个为真。
   > - (序是反对称的) $x<y$当且仅当$y>x$。
   > - (序是可传递的) 若$x<y$且$y<z$，则$x<z$。
   > - (加法保持序不变) 若$x<y$，则$x+z<y+z$。
   > - (正的乘法保持序不变) 若$x<y$且z是正的，则$xz<yz$。

3. (5.4.8 实数的倒数？) 设x是一个正实数，那么x^{-1}也是正的。同时，如果y是另外一个正数并且$x>y$，那么$x^{-1}<y^{-1}$。
4. (5.4.9 非负实数集是闭的) 设a_1，a_2，a_3......是非负有理数的一个柯西序列，那么$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$是非负实数。

   (也可以说成非负实数集是闭的，而正实数集是开的)
5. (5.4.10 序不变？) 设$(a_n)_{n=1}^{\infty}$与$(b_n)_{n=1}^{\infty}$是有理数的柯西序列，并且满足$a_n \geq b_n$对所有$n \geq 1$均成立，那么有：

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n \geq \mathrm{LIM}_{n\to\infty}b_n$$

6. (5.4.12 有理数对实数的界定) 设x是一个正实数，那么存在一个正有理数q使得$q \leq x$，并且存在一个正整数N使得$x \leq N$。
7. (5.4.13 阿基米德性质) 设x和ε是任意的正实数，则存在一个正整数M使得$M\varepsilon > x$。

8. (5.4.14 实数的间隙？) 给定任意两个实数$x < y$，可以找到一个有理数q使得$x < q < y$。
   (即使到了这里，实数系仍然没有展现出任何超越有理数系的优越性)

课后习题

本节相关跳转

实分析 4.2 有理数