4.2 有理数

定义

1. (4.2.1 有理数) 定义**有理数**为形如$a//b$的表达式，其中a，b为整数且b不为0，$a//0$不为有理数。称两个有理数$a//b$与$c//d$相等，当且仅当有$ad=cb$，称全体有理数构成的集合为$\mathbb{Q}$。
2. (4.2.2 有理数基本运算) 若$a//b$与$c//d$为有理数，则其加和由下述表达式定义：

   $$(a//b)+(c//d):=(ad+bc)//(bd)$$

   其乘积由下述表达式定义：

   $$(a//b)\times(c//d):=(ac)//(bd)$$

   其负运算由下述表达式定义：

   $$-(a//b):=(-a)//b$$

3. (无编号 倒数) 如果$x=a//b$是一个非零的有理数（从而a，$b\neq 0$），则定义x的倒数x^{-1}为有理数$x^{-1}:=b//a$。
4. (4.2.6 正负有理数) 称有理数x是**正**的，当且仅当存在两个正自然数a，b使得有$x=a//b$。x是**负**的，当且仅当存在正有理数y使得$x=-y$。
5. (4.2.8 有理数的排序) 设x，y为有理数，称$x>y$，当且仅当$x-y$是一个正有理数，称$x<y$当且仅当$x-y$是一个负有理数，记$x\geq y$当且仅当$x>y$或$x=y$，$x\leq y$的定义类似。

命题

1. (4.2.3 有理数的运算是定义明确的) 有理数上的和，乘积与负运算都是定义明确的，即换言之用$a//b$相等的有理数$a'//b'$替换输入不会改变结果，也即有理数的运算对相同的输入总有相同的输出。
2. (无编号 有理数与整数？) 有理数$a//1$与整数a性质相同，包括：

   > - $a//1+b//1=(a+b)//1$。
   > - $a//1\times b//1=ab//1$。
   > - $-(a//1)=(-a)//1$。
   > - $a//1=b//1$当且仅当$a=b$时成立。

   由此，可以认为a与$a//1$恒等，即：

   $$a\equiv a//1$$

   这个式子使整数与有理数算术一致，也使将整数系嵌套入有理数系成为可能。(如同上一节中将自然数系嵌套入整数系一样)。
3. (4.2.4 有理数的代数定律) 设x，y，z为有理数，则下述运算定律成立：

   > - $x+y=y+x$。
   > - $(x+y)+z=x+(y+z)$。
   > - $x+0=0+x$。
   > - $x+(-x)=(-x)+x=0$。
   > - $xy=yx$。
   > - $(xy)z=x(yz)$。
   > - $x\cdot 1=1\cdot x=x$。
   > - $x(y+z)=xy+xz$。
   > - $(y+z)x=yx+zx$。
   > - $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x(x\neq 0)$。

   同时，上述十式断定有理数集$\mathbb{Q}$构成了一个**域**（因为多了第十条），并取代了上一节中的整数代数定律。
4. (4.2.7 有理数的三歧性) 设x为一个有理数，则下述三个命题中恰有一个为真：

   > - x等于0。
   > - x是一个正有理数。
   > - x是一个负有理数。

5. (4.2.9 有理数域上序的基本性质) 设x，y，z为有理数，则下述性质成立：

- (序的三歧性) 命题“$x = y$”，“$x > y$”，“$x < y$”中恰有一个为真。
- (序是反对称的) $x < y$当且仅当$y > x$。
- (序是可传递的) 若$x < y$且$y < z$，则$x < z$。
- (加法保持序不变) 若$x < y$，则$x + z < y + z$。
- (正的乘法保持序不变) 若$x < y$且z是正的，则$xz < yz$。

上述五条同引理4.2.4共同断定有理数集$\mathbb{Q}$构成了一个有序域。

课后习题

4.2.1 证明有理数上“相等”的定义是自反的、 对称的和可传递的 (提示： 对于传递性， 利用推论4.1.9)

> 自反性（对任意有理数$a//b$有$a//b = a//b$）：
>
> 我们总有$ab = ab$，根据定义于是$a//b = a//b$始终成立。
>
> ---
>
> 对称性（对任意有理数$a//b$与$c//d$，若有$a//b = c//d$，则$c//d = a//b$）：
>
> 根据题设有$a//b = c//d$，于是$ad = cb$，即$cb = ad$，等价于$c//d = a//b$。
>
> ---
>
> 可传递性（对任意有理数$a//b$，$c//d$与$e//f$，若有$a//b = c//d$且$c//d = e//f$，则$a//b = e//f$）：
>
> 根据题设有$a//b = c//d$且$c//d = e//f$，于是$cb = ad$且$ed = cf$，左右同乘一个a有$ade (= cbe) = acf$，根据整数乘法的消去律有$eb = af$，即$a//b = e//f$。

4.2.2 证明引理4.2.3中剩余的部分 (即乘法与负运算)

> 乘法：
>
> 根据定义应当有对任意有理数$c//d$：
>
> $$(a//b) \times (c//d) := (ac)//(bd)$$
>
> 于是$(a'//b') \times (c//d) := (a'c)//(b'd)$，由于$a//b = a'//b'$，于是$ab' = a'b$，进而$(ac)(b'd) = (a'c)(bd)$，根据有理数相等定义，这等价于$(ac)//(bd) = (a'c)//(b'd)$，即相等的输入有相等的输出，于是有理数的乘法是定义明确的。
>
> ---
>
> 负运算：
>
> 根据定义有：$-(a//b) = (-a)//b$，$-(a'//b') = (-a')//b'$，于是根据$a//b = a'//b'$有$ab' = a'b$\iff (-a)b'=(-a')b ，即-(a//b)=-(a'//b')$$成立，于是有理数的负运算也是定义明确的。

4.2.3 证明命题4.2.4中剩余的部分 (提示： 就像证明命题4.1.6那样.你可以通过利用某些等式去证明其他等式的方法来减少工作量)

> 我们假设有$x = x_1//x_2$，$y = y_1//y_2$，$z = z_1//z_2$ $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z})$，于是给出证明：
>
> - $x + y = y + x$。
>
> 有（整数加法交换律）：
>
> $$\begin{aligned} x + y &= x_1//x_2 + y_1//y_2 \\ &= (x_1y_2 + x_2y_1)//(x_2y_2) \\ &= (y_1x_2 + y_2x_1)//(x_2y_2) \\ &= y + x \end{aligned}$$
>
> ---
>
> - $(x + y) + z = x + (y + z)$。
>
> 有（整数加法结合律）：
>
> $$\begin{aligned} (x + y) + z &= (x_1y_2 + x_2y_1)//(x_2y_2) + z_1//z_2 \\ &= ((x_1y_2 + x_2y_1)z_2 + (x_2y_2)z_1)//((x_2y_2)z_2) \\ &= (x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1)//(x_2y_2z_2) \\ &= (x_1(y_2z_2) + x_2(y_1z_2 + y_2z_1))//(x_2(y_2z_2)) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$
>
> ---
>
> - $x + 0 = 0 + x$。

由$x+y=y+x$加上$0=0//1$也是有理数可得证。此外有：

$$x+0=x_1//x_2+0//1=x_1//x_2=x$$

- $x+(-x)=(-x)+x=0$。

由$x+y=y+x$加上$-x$也是有理数可得证。此外根据定义，有

$$x+(-x)=x_1//x_2+(-x_1)//x_2=(x_1x_2-x_1x_2)//(x_2x_2)=0$$

- $xy=yx$。

有（整数乘法交换律）：

$$\begin{aligned}xy&=x_1//x_2\cdot y_1//y_2\\&=(x_1y_1)//(x_2y_2)\\&=(y_1x_1)//(y_2x_2)\\&=yx\end{aligned}$$

- $(xy)z=x(yz)$。

有（整数乘法结合律）：

$$\begin{aligned}(xy)z&=(x_1y_1)//(x_2y_2)\cdot z_1//z_2\\&=(x_1y_1z_1)//(x_2y_2z_2)\\&=((x_1)(y_1z_1))//((x_2)(y_2z_2))\\&=x_1//x_2\cdot(y_1z_1//y_2z_2)\\&=x(yz)\end{aligned}$$

- $x\cdot 1=1\cdot x=x$。

根据$xy=yx$与$1=1//1$可得证，此外有：

$$x\cdot 1=(x_1\cdot 1)//(x_2\cdot 1)=x_1//x_2=x$$

- $x(y+z)=xy+xz$。

有：

$$\begin{aligned}x(y+z)&=x_1//x_2\cdot(y_1z_2+y_2z_1)//(y_2z_2)\\&=(x_1y_1z_2+x_1y_2z_1)//(x_2y_2z_2)\\&=((x_1y_1)(x_2z_2)+(x_1z_1)(x_2y_2))//((x_2y_2)(x_2z_2))\\&=(x_1y_1//x_2y_2)\cdot(x_1z_1//x_2z_2)\\&=xy+xz\end{aligned}$$

- $(y+z)x=yx+zx$。

根据$x+y=y+x$与$xy=yx$有$xy+xz=yx+zx$与$x(y+z)=(y+z)x$，又$x(y+z)=xy+xz$，于是得证$(y+z)x=yx+zx$。

- $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x(x\neq 0)$。

由$xy=yx$可得证结论，且有：

$$x\cdot x^{-1}=x_1//x_2\cdot x_2//x_1=(x_1x_2)//(x_2x_1)=1//1=1$$

4.2.4 证明引理4.2.7（注意，像在命题2.2.13中那样，必须证明两件不同的事情：首先证明(a)(b)(c)中至少有一个为真，其次证明 (a)(b)(c)中最多有一个为真）

首先证明三个中至少有一个为真：

我们可以知道，对任意有理数$x=a//b$，同时有$x=(-a)//(-b)$，因为$a(-b)=(-a)b=-ab$；此外对任意整数b，由于$0\cdot b=0\cdot 1$，于是$0//b=0//1=0$。

对任意的有理数$x=a//b$，其中a，$b\in\mathbb{Z}$且$b\neq 0$，于是根据整数的三歧性，分类讨论：

	b是正数	b是负数
a是正数	于是此时有a，b均为正自然数，$a//b$根据定义为正。	于是此时不难有$x=-y(y=a//(-b))$，于是根据定义有x为负的。
a是0	此时有$0//b=0//1=0(0=0)$，于是x是0。	此时有$0//b=0//1=0(0=0)$，于是x是0。
a是负数	此时有$x=-y(y=(-a)//b)$，其中$-a$与b都是正自然数，于是y是正有理数，x是负的。	此时有$x=(-a)//(-b)$，其中$-a$，$-b$都是正自然数，于是根据定义x为正。

综上，对所有情况，x等于0，x是一个正有理数，x是一个负有理数中至少有一个为真。

接下来证明三个中最多只能有一个为真：

假设$x=0=0//1$，此时不存在任何正自然数对a，b可以使得$x=a//b$（因为不可能有正自然数$a=0$），同样的，也不可能有任何正有理数$y=a//b$使得$-y=x$（如果有那么就有$y=-0=0$）于是当$x=0$时不可能出现其它两种情况；x为正有理数时，存在两个正自然数a，b使得$x=a//b$，若x同时还是负的，那么存在另一个正有理数$y=c//d$（于是c，d也是正自然数）使得$x=-y\iff a//b=(-c)//d$于是$ad=-cb$，这是个伪命题，于是x是正的与x是负的是互斥的，进而综合得到三个命题互斥，即三者只能同时有一个为真。

综上，结论得证。

4.2.5 证明命题4.2.9

- 命题“$x=y$”，“$x>y$”，“$x<y$”中恰有一个为真。

对任意的有理数对x，y，我们令$c=x-y$，于是c也是一个有理数。根据有理数的三歧性，有：

> - c等于$0\iff x=y$。
> - c是一个正有理数$\iff x>y$。
> - c是一个负有理数$\iff x<y$。

三者恰好有一个为真，于是原结论得证。

- $x<y$当且仅当$y>x$。

$x<y$，当且仅当$x-y$是一个负有理数，这等价于$-(x-y)=y-x$是一个正有理数，于是根据定义$y>x$成立。

- 若$x<y$且$y<z$，则$x<z$。

$x<y$且$y<z$，于是有$a=x-y$与$b=y-z$都是负有理数，进而$a+b=(x-y)+(y-z)=x-z$也是一个负有理数，于是根据定义$x<z$成立。

- 若$x<y$，则$x+z<y+z$。

$x<y$，当且仅当$x-y$是一个负有理数，于是$(x+z)-(y+z)=x-y$也是一个负有理数，从而有$x+z<y+z$。

- 若$x<y$且z是正的，则$xz<yz$。

$x<y$，当且仅当$y-x$是一个正有理数，又z为正，于是令$a//b=y-x$，$c//d=z\ (a,b,c,d\in\mathbb{N}^*)$，于是$yz-xz=a//b\cdot c//d=(ac)//(bd)$，可知$ac$与$bd$均为正自然数，于是$yz-xz$为正有理数，即$xz<yz$。

4.2.6 证明：如果x，y，z是有理数，并且满足$x<y$和z是负的，那么$xz>yz$

$x<y$，当且仅当$y-x$是一个正有理数，又z为负，于是令$a//b=y-x$，$(-c)//d=z\ (a,b,c,d\in\mathbb{N}^*)$，于是$yz-xz=a//b\cdot(-c)//d=(-ac)//(bd)$，可知$ac$与$bd$均为正自然数，又有：

$$-(ac//bd)=(-ac)//(bd)$$

$ac//bd$为正，于是$(-ac)//(bd)$为负，于是$yz-xz$为负有理数，即$xz>yz$。

本节相关跳转

实分析 2.2 加法

实分析 4.1 整数