8.2 在无限集上求和

定义

1. (8.2.1 可数集上的级数) 设X是一个可数集，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数。称级数$\sum\limits_{x\in X}f(x)$是绝对收敛的，当且仅当存在某个双射$g:\mathbb{N}\to X$使得级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(g(n))$是**绝对收敛**的。此时我们定义：

$$\sum_{x\in X}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(g(n))$$

(根据命题7.4.3与命题3.6.4，可以证明这样的定义同g的选取无关，从而它是定义明确的)

2. (8.2.4 绝对收敛级数？) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的)，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，那么级数$\sum\limits_{x\in X}f(x)$是绝对收敛的，当且仅当：

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

命题

1. (8.2.2 无限和的富比尼定理) 设$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$是一个使得$\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)$**绝对收敛**的的一个函数，那么我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}}f(n,m))&=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)\\&=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}f(n,m)\\&=\sum_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{n\in\mathbb{N}}f(n,m))\end{aligned}$$

(换言之，只要级数是**绝对收敛**的，我们就可以任意交换无限和的求和顺序)

2. (8.2.3 绝对收敛级数的特征？) 设X是一个至多可数的集合，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个函数，那么级数$\sum\limits_{x\in X}f(x)$是绝对收敛的，当且仅当：

$$\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|:A\subseteq X\text{且}A\text{是有限集}\right\}<\infty$$

3. (8.2.5 绝对收敛级数衍生？) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的)，并且设$f:X\to\mathbb{R}$是一个使级数$\sum\limits_{x\in X}f(x)$是绝对收敛的函数，那么集合$\{x\in X:f(x)\neq 0\}$是至多可数的。

(由此，对于不可数集上的任意一个绝对收敛的级数$\sum\limits_{x\in X}f(x)$，我们可以定义它的值为$\sum\limits_{x\in X}f(x):=\sum\limits_{x\in X:f(x)\neq 0}f(x)$，于是我们成功将不可数集上的级数用可数集上的级数替换)

4. (8.2.6 绝对收敛级数的定律) 设X是一个集合 (可以是**不可数**的) ，并且设$f: X \to \mathbb{R}$，$g: X \to \mathbb{R}$是使级数$\sum_{x\in X} f(x)$与$\sum_{x\in X} g(x)$都绝对收敛的函数，则下述命题为真：

> 1. 级数$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))$是绝对收敛的，并且：
> $$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x)$$
> 2. 若c是一个实数，那么$\sum_{x\in X} c\cdot f(x)$是绝对收敛的，并且：
> $$\sum_{x\in X} c\cdot f(x) = c\sum_{x\in X} f(x)$$
> 3. 若存在两个不相交的集合X_1，X_2使得$X_1\cup X_2 = X$，那么$\sum_{x\in X_1} f(x)$和$\sum_{x\in X_2} f(x)$都是绝对收敛的，并且：
> $$\sum_{x\in X_1\cup X_2} f(x) = \sum_{x\in X_1} f(x) + \sum_{x\in X_2} f(x)$$
> 反过来，如果$h: X\to\mathbb{R}$使得$\sum_{x\in X_1} h(x)$和$\sum_{x\in X_2} h(x)$都是绝对收敛的，那么$\sum_{x\in X_1\cup X_2} h(x)$也是绝对收敛的，并且：
> $$\sum_{x\in X_1\cup X_2} h(x) = \sum_{x\in X_1} h(x) + \sum_{x\in X_2} h(x)$$
> 4. 如果Y是另一个集合，并且$\phi: Y\to X$是一个双射，那么$\sum_{y\in Y} f(\phi(y))$也是绝对收敛的，并且：
> $$\sum_{y\in Y} f(\phi(y)) = \sum_{x\in X} f(x)$$
>
> (当X是不可数集时，该结论的证明要用到选择公理)

5. (8.2.7 条件收敛的子级数？) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数，定义集合$A_+ = \{n\in\mathbb{N}: a_n \geq 0\}$，$A_- = \{n\in\mathbb{N}: a_n < 0\}$，于是有$A_+\cup A_- = \mathbb{N}$与$A_+\cap A_- = \mathbb{N}$。那么级数$\sum_{n\in A_+} a_n$与$\sum_{n\in A_-} a_n$都不是条件收敛的 (从而也不是绝对收敛的)

6. (8.2.8 格奥尔格·黎曼级数定理？) 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但是不绝对收敛的级数，L是任意一个实数。于是存在一个双射$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$使得$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$条件收敛于$L$。

课后习题

8.2.1 证明引理8.2.3（提示：习题3.6.3或许有用）

8.2.2 证明引理8.2.5（提示：首先证明如果M是

$$M := \sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)| : A \subseteq X, A\text{是有限集}\right\}$$

那么对于任意的正整数n，集合$\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$都是有限集并且基数至多为$Mn$。然后利用习题8.1.9（其中会用到选择公理，参见8.4节））

8.2.3 证明命题8.2.6（提示：你当然可以使用第7章中的所有结论）

8.2.4 证明引理8.2.7（提示：利用反证法和极限定律）

8.2.5 解释定理8.2.8的证明中标注（为什么?）的地方

8.2.6 设$\sum_{m=0}^{\infty} a_n$是一个条件收敛但不绝对收敛的级数，证明：存在一个双射$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$使得$\sum_{m=0}^{\infty} a_{f(m)}$发散到$+\infty$，或者更准确地说，

$$\liminf_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = \limsup_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N} a_{f(m)} = +\infty$$

（当然，把$+\infty$替换成$-\infty$所得到的类似结论依然成立）

本节相关跳转

实分析 3.6 集合的基数

实分析 6.1 收敛与极限定律

实分析 7.4 级数的重排列

实分析 8.1 可数性

实分析 8.4 选择公理