6.1 收敛与极限定律

定义

1. (6.1.1 两个实数间的距离）给定两个实数x和y，定义它们的距离为d(x,y)，有：

$$d(x,y) := |x-y|$$

2. (6.1.2 ε-接近的实数）设$\varepsilon > 0$是一个实数，称x与y是ε**-接近的**，当且仅当$d(x,y) \leq \varepsilon$。

   (这个ε-接近性的定义与定义4.3.4的"ε-接近性"是一致的）

3. (6.1.3 实数的柯西序列）设$\varepsilon > 0$是一个实数，则称从某个整数指标N开始的实数序列$a_n|_{n=N}^{\infty}$是ε**-稳定的**，当且仅当对任意j，$k \geq N$都有a_j与a_k是ε-接近的。

   又有从某个整数指标m开始的实数序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$被称为是**最终**ε**-稳定**的，当且仅当存在一个整数$N \geq m$使得$a_n|_{n=N}^{\infty}$是ε-稳定的。

   一个实数序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$被称为**柯西序列**，当且仅当对每一个$\varepsilon > 0$，该序列都是最终ε-稳定的。

   (这些定义与有理数上的相关定义（5.1.3，5.1.6，5.1.8）是一致的，在这两个意义下的有理数序列是一致的，耳熟能详了已经）

4. (6.1.5 序列的收敛）设$\varepsilon > 0$是一个实数，且L也是一个实数。称实数序列$a_n|_{n=N}^{\infty}$是ε**-接近**于L的，当且仅当对任意的$n \geq N$，a_n与L都是ε-接近的，即有$d(a_n, L) \leq \varepsilon$。

   称序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$是**最终**ε**-接近**于L的，当且仅当存在一个$N \geq m$使$a_n|_{n=N}^{\infty}$是ε-接近于L的。

   称序列$a_n|_{n=N}^{\infty}$是**收敛**于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon > 0$，该序列都是最终ε-接近于L的。

   (展开的表述：称序列$a_n|_{n=N}^{\infty}$是收敛于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$|a_n - L| \leq \varepsilon$对所有的$n \geq N$成立）

5. (6.1.8 序列的极限）如有序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$收敛于实数L，那么序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$是收敛的且它的极限为L，用下式表示：

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

6. (6.1.16 有界序列）实数序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$以实数M为界，当且仅当存在有$|a_n| \leq M$对全部$n \geq m$成立。称实数序列$a_n|_{n=m}^{\infty}$是有界的，当且仅当存在某个实数$M > 0$使得该序列以M为界。

   (该定义同样可以证明与定义5.1.12是一致的）

命题

1. (6.1.4 柯西序列的定义是一致的？）设$a_n|_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的有理数序列，那么$a_n|_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.8下的序列，当且仅当它是定义6.1.3下的柯西序列。
2. (6.1.7 极限的唯一性）设$a_n|_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的实数序列，且有$L \neq L'$是两个不同的实数，那么$a_n|_{n=m}^{\infty}$不可能同时收敛于L和L'。
3. (6.1.11 收敛实例？）有$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。
4. (6.1.12 收敛序列也是柯西序列）假设$a_n|_{n=m}^{\infty}$是一个收敛的实数序列，那么$a_n|_{n=m}^{\infty}$也是一个柯西序列。
5. (6.1.15 形式极限是真正的极限）假定有$a_n|_{n=m}^{\infty}$是某个有理数的柯西序列，那么$a_n|_{n=m}^{\infty}$收敛于$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$，即有：

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

（如同之前在定义有理数，整数一样，于此形式极限被真正的极限替代，如同形式减法被真正的减法替代，如同形式除法被真正的除法替代）

6. （6.1.17 引理5.1.15推论）每一个收敛的实数序列都是有界的。
7. （6.1.19 极限定律）设有$a_n|_{n=m}^{\infty}$与$b_n|_{n=m}^{\infty}$是收敛的实数序列，并且设实数x，y有$x := \lim_{n\to\infty} a_n$与$y := \lim_{n\to\infty} b_n$。

> - 序列$(a_n + b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$x + y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x + y$$
>
> - 序列$(a_n + b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$xy$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = xy$$
>
> - 对任意实数c，序列$(c \cdot a_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$c \cdot x$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
>
> - 序列$(a_n - b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$x - y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = x - y$$
>
> - 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(b_n^{-1})|_{n=m}^{\infty}$收敛于$y^{-1}$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{-1} = (\lim_{n\to\infty} b_n)^{-1}$$
>
> - 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(a_n/b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$x/y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = x/y$$
>
> - 序列$\max(a_n, b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$\max(x, y)$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$
>
> - 序列$\min(a_n, b_n)|_{n=m}^{\infty}$收敛于$\min(x, y)$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

课后习题

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]

[实分析 5.1 柯西序列]