2.2 加法

定义

1. (2.2.1 加法定义) 令m为一个自然数，定义$0+m:=m$，归纳假设：已定义n加上m，则$(n++)+m:=(n+m)++$。
2. (2.2.7 正数) 称一个自然数是**正**的，当且仅当它不等于0。
3. (2.2.11 自然数的序) 令n，m表示任意两个自然数，称n大于等于m，记作$n \geq m$或$m \leq n$，当且仅当存在自然数a，使得$n=m+a$。特别的，称n严格大于m，记作$n > m$或$m<n$，当且仅当$n \geq m$且$n \neq m$。

命题

1. (无编号 封闭性) 设a，b均为自然数，则$a+b$也是自然数。

   > 证明：
   >
   > 取b为某一自然数，对$a使用归纳推理：
   >
   > 对$a=0$时，有：
   >
   > > $a+b=b$，根据条件，b是自然数，得证。
   >
   > 现归纳性假设对某一自然数n，$a=n$时成立结论，对$a=n++$时有：
   >
   > > $a+b=(n++)+b=(n+b)++$
   > >
   > > 根据归纳假设$n+b$是自然数，又根据公理2.2，于是有$(n+b)++$也是一个自然数，得证。
   >
   > 于是得证结论。

2. (2.2.2) 对任意自然数，$n+0=n$恒成立。
3. (2.2.3) 对任意自然数n与m，$n+(m++)=(n+m)++$。
4. (2.2.4 交换律) 对任意自然数n与m，$n+m=m+n$。
5. (2.2.5 结合律) 对任意自然数a，b，c，$(a+b)+c=a+(b+c)$。
6. (2.2.6 消去律) 对任意自然数a，b，c，且有$a+b=a+c$成立，则$b=c$。

   (消去律的存在体现了一种“虚拟减法”的思想，这对后面减法的定义至关重要)

7. (2.2.8) 如果a是正的并且b是一个自然数，那么$a+b$是正的。
8. (2.2.9) 如果a，b都是自然数且$a+b=0$，那么$a=0$且$b=0$。
9. (2.2.10) 令a表示一个正自然数，则恰好存在一个自然数b使得有$b++=a$
10. (2.2.12 自然数序的性质) 令a，b，c为任意自然数

    > - (序的自反性) $a \geq a$。
    > - (序的可传递性) 如果$a \geq b$且$b \geq c$，则$a \geq c$。
    > - (序的反对称性) 如果$a \geq b$且$b \geq a$，则$a=b$。
    > - (加法保持序不变) $a \geq b$，当且仅当$a+c \geq b+c$。
    > - $b > a$，当且仅当$a++ \leq b$。
    > - $b > a$，当且仅当存在正自然数d使得$b=a+d$。

11. (2.2.13 三歧性) 下列三种表述同时只能且一定存在一个为真：

> - $a > b$
> - $a = b$
> - $a < b$

12. (2.2.14 强归纳法原理) 令m_0为一个自然数，$P(m)$表示与任意自然数m有关的性质。假定对任意$m \geq m_0$的自然数，均有下述内容成立。

> 若$P(m')$对任意$m_0 \leq m' < m$的自然数m'为真，则$P(m)$为真

特别地，这表明$P(m_0)$也为真（选取$m = m_0$）。由此有，对任意$m \geq m_0$的自然数m，$P(m)$也为真。

（使用时，一般选择$m_0 = 0$或$m_0 = 1$）

课后习题

2.2.1 证明加法的结合律（提示：固定两个变量，对第三个变量做归纳）

> 假定a，b为某两个自然数，对c做归纳：
>
> 当$c = 0$时，证明$(a+b)+0 = a+(b+0)$：
>
> > 由命题2.2.2可知$(a+b)+0 = a+b$，$a+(b+0) = a+b$，于是$c = 0$时结论得证
>
> 现归纳性假设结合律对某个自然数n有在$c = n$的情况下成立，对$c = n++$的情况进行讨论：
>
> > 根据命题2.2.3：
> > 左端有$(a+b)+n++ = ((a+b)+n)++$。
> > 右端有$a+(b+(n++)) = a+(b+n)++ = (a+(b+n))++$。
> > 根据归纳假设，又有$(a+b)+n = a+(b+n)$，根据公理2.4，又有$p = q \iff p++ = q++$。于是有$(a+b)+n++ = a+(b+(n++))$，归纳假设得证。
>
> 于是结合律成立。

2.2.2 令a表示一个正自然数，证明恰好存在一个自然数b使得有$b++ = a$

> 对正数a分成进行归纳：
>
> 对$a = 1$的情况：
>
> > 显然有$b = 0$时，$b++ = a$。
>
> 现归纳地假设对某个自然数n在$a = n$时成立结论，对$a = n++$时：
>
> > 于是此时令有$b = n$，自然满足$b++ = n++ = a$
>
> 于是得证结论。

2.2.3 证明命题2.2.12 自然数序的性质（将会用到很多前面的结论）

> 1. 自反性：取自然数0，显然有$a = a + 0$满足定义，于是$a \geq a$。
> 2. 可传递性：$a \geq b$，于是存在自然数d使得$a = b + d$
>
> $b \geq c$，于是存在自然数e使得$b = c + e$
>
> 于是可以得到$a = c + (d + e)$，根据封闭性可以得到$(d + e)$也是一个自然数，根据定义可得$a \geq c$。

> 3. 反对称性：$a \geq b$，于是存在自然数d使得$a = b + d$
>
> $b \geq a$，于是存在自然数e使得$b = a + e$
>
> 于是有$a = a + d + e$，依据消去律即$0 = d + e$。
>
> 根据命题2.2.9，于是$d = e = 0$，进而$b = a + 0 \implies b = a$得证。
>
> 4. 加法保持序不变：
> $a \geq b \implies a = b + d(d \in N) \implies (a + c) = (b + c) + d \implies a + c \geq b + c$。
> 5. $a < b \implies b = a + c(c \in N)$且$a \neq b \implies c \neq 0$。
>
> 即c为正数，于是根据命题2.2.10，存在自然数d，$c = d++$。
>
> 于是有$(a++) + d = (a + d)++ = a + c = b$，进而$a++ \leq b$得证。
>
> 6. 根据5的内容可以得到该结论。

2.2.4 证明下述三个结论：①对所有自然数b，均有$b \geq 0$；②如果$a > b$，则有$a++ > b$；③如果$a = b$，则有$a++ > b$

> ①
>
> > 对所有自然数b，都有$b = 0 + b$，于是根据定义$b \geq 0$。
>
> ②
>
> > $a > b$，于是存在正数c，$a = b + c$，进而$a++ = b + (c++)$，
> > $c++ \neq 0 \land c++ \in N$于是可知为正数，于是得证。
>
> ③
>
> > $a = b$，于是$a++ = b + (0++)$，$0++ \neq 0$于是$0++$为正数，可知有$a++ > b$。

2.2.5 证明强归纳法原理（提示：定义性质$Q(n)$：$P(m)$对任意满足$m_0 \leq m \leq n$的m均为真）

> 定义性质$Q(n)$：$P(m)$对任意满足$m_0 \leq m \leq n$的m均为真。
>
> 于是强归纳法可以被描述为：若有$Q(m_0)$为真且对任意$m \geq m_0$，若$Q(m)$为真，则$Q(m++)$为真。
>
> 取$n = m - m_0$，对n进行归纳：
>
> 当$n = 0$时：
>
> > $Q(m_0 + n)$显然为真
>
> 现归纳性假设当n等于某自然数c时成立结论，对$n = c++$：
>
> > 根据条件直接可以得到$Q(m_0 + (n++))$为真
>
> 于是得证

2.2.6 令n为一个自然数，令$P(m)$为关于自然数的一个性质并且满足：只要$P(m++)$为真，则$P(m)$为真。假定$P(n)$为真，证明：$P(m)$对任意满足$m \leq n$的自然数m均为真。（这也被称为逆向归纳法原理）（提示：对n使用归纳法）

> 对n做归纳法：
>
> 对$n = 0$时：
>
> > 此时条件为$P(0)$为真，证明对全部$m \leq 0$为真，m仅可以为0，于是结论显然成立。
>
> 现归纳性假设对$n \leq c$的情况下结论成立，对$n = c++$时：
>
> > 由条件可以推知，$P(c++)$为真时$P(c)$为真

> > 根据归纳假设，对$P(c)$为真，可推知对任意$m \le c$的自然数m均有$P(m)$为真。
> >
> > 考虑到$P(c++)$为真，于是对任意$m \le c++$的自然数m均有$P(m)$为真。
> >
> > 归纳假设得证
>
> 于是得证结论