5.6 实数的指数运算 I

定义

1. (5.6.1 实数的自然数次幂) 设x是一个实数，为了把x升到0次幂，我们定义$x^0 := 1$。现归纳假设对于某个自然数n已经定义了x^n，则定义$x^{n+1} := x^n \cdot x$。
2. (5.6.2 实数的整数次幂) 设x是一个非零实数，那么对任意的负整数$-n$，定义$x^{-n} := \frac{1}{x}^n$。
3. (5.6.4 n次根？) 设$x \geq 0$是一个非负实数，且$n \geq 1$是一个正整数，则定义$x^{\frac{1}{n}}$ (也称作x的n次根) 为：

   $$x^{\frac{1}{n}} := \sup\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \text{且} y^n \leq x\}$$

   另外一般将$x^{\frac{1}{2}}$写作$\sqrt{x}$。
   (注：本书不定义负数的n次方根，因为只有定义了复数才可以定义负数的n次方根，然而本书并不讲复数这方面内容)
4. (5.6.7 向有理数的拓展？) 设$x > 0$是一个正实数，q是一个有理数。由有理数定义令$q = \frac{a}{b}$，其中a是整数，b是正整数。此时定义：

   $$x^q := (x^{\frac{1}{b}})^a$$

命题

1. (5.6.3 实数幂的运算性质) 对命题 (4.3.10，4.3.12) 中有理数x，y替换成实数x，y后这两个命题中的所有性质依旧是成立的。

   (内容见下)

   > 1. (4.3.10 指数的运算性质I) 设x与y为非零实数，并设n和m为自然数，则有：
   >
   >   > - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
   >   > - 若$x \geq y \geq 0$，则有$x^n \geq y^n \geq 0$，若$x > y \geq 0$且$n > 0$时，则有$x^n > y^n \geq 0$。
   >   > - 若$n > 0$，则$x^n = 0$当且仅当$x = 0$。
   >   > - 有$|x^n| = |x|^n$。
   >
   > 2. (4.3.12 指数的运算性质II) 设x与y为非零实数，并设n和m为**整数**，则有：
   >
   >   > - $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$，$(x^n)^m = x^{(nm)}$，$(xy)^n = x^n y^n$。
   >   > - 若$x \geq y \geq 0$，则当n正数时有$x^n \geq y^n > 0$，当n负数时有$0 < x^n \leq y^n$。
   >   > - 若x，$y > 0$，$n \neq 0$并且$x^n = y^n$，那么$x = y$。
   >   > - 有$|x^n| = |x|^n$。

2. (5.6.5 n次根的存在性) 设$x \geq 0$是一个非负实数且$n \geq 1$是一个正整数，那么集合$\{y \in R : y \geq 0 \text{且} y^n \leq x\}$是非空的并且有上界的，特别地，$x^{\frac{1}{n}}$是一个实数。
3. (5.6.6 整数次根的运算性质？) 设x，$y \geq 0$是非负实数，且n，$m \geq 1$是正整数。

   > - 如果$y = x^{\frac{1}{n}}$，那么$y^n = x$。反过来，如果$y^n = x$，则$y = x^{\frac{1}{n}}$。
   > - $x^{\frac{1}{n}}$是一个非负实数。
   > - $x > y$，当且仅当$x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$。
   > - 如果$x > 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个减函数；如果$x < 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$是关于k的一个增函数；如果$x = 1$，那么$x^{\frac{1}{k}}$对所有的k均有$x^{\frac{1}{k}} = 1$。

> - $xy^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}}$。
> - $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{1}{nm}}$。

4. （5.6.8 有理数次幂的形式不变性？）设a，a'均为整数，b，b'均为正整数，并且有$a/b=a'/b'$。设x是一个正实数，则有：

$$x^{\frac{a}{b}}=x^{\frac{a'}{b'}}$$

5. （5.6.9 有理数次幂的运算性质？）设x，$y>0$是正实数，且q与r是有理数，则：

> - x^q是一个正实数。
> - $x^{q+r}=x^q\cdot x^r$且有$x^{qr}=(x^q)^r$。
> - $x^{-q}=\frac{1}{x^q}$。
> - 如有$q>0$，则$x>y$当且仅当$x^q>y^q$。
> - 如有$x>1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q>r$；如有$x<1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q<r$。

（值得一提本节的元证明确实很有意思，可以多看看学习学习（可惜网上没百科））

课后习题

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]