7.5 根值判别法与比值判别法

命题

1. (7.5.1 根值判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个实数级数，并且假设$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$：

   > - 如果$\alpha < 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
   > - 如果$\alpha > 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
   > - 如果$\alpha = 1$，那么给不出任何结论。

2. (7.5.2 级数的相关结论) 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个**正数**序列，则有：

   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   推论： (7.5.3 比值判别法) 设$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是一个所有项不为0的实数级数，并且假设有$\alpha = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则：

   > - 如果$\limsup_{n\to\infty} \alpha < 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$是绝对收敛的（相应的也是条件收敛的）。
   > - 如果$\liminf_{n\to\infty} \alpha > 1$，那么级数$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$不是条件收敛的（相应的也不是绝对收敛的）。
   > - 其他情况，不给出任何结论。

3. (7.5.4另一个推论？) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$。

课后习题