6.7 实数的指数运算 II

定义

1. (6.7.2 实数次幂的指数运算) 设$x>0$是一个实数，且α是一个实数，则我们定义x^α为$x^\alpha=\lim_{n\to\infty}x^{(q_n)}$，其中$(q_n)_{n=1}^\infty$是任意一个收敛于$\alpha$的有理数序列。

命题

1. (6.7.1 指数运算的连续性) 设$x>0$且α是一个实数。令$(q_n)_{n=1}^\infty$是任意一个收敛于α的有理数序列，那么$(x^{(q_n)})_{n=1}^\infty$也是一个收敛的序列。更进一步的，如果$(p_n)_{n=1}^\infty$是另外任意一个收敛于α的有理数序列，那么$(x^{(p_n)})_{n=1}^\infty$与$(x^{(q_n)})_{n=1}^\infty$有相同的极限：

$$\lim_{n\to\infty}x^{q_n}=\lim_{n\to\infty}x^{p_n}$$

2. (6.7.3 定理升级？) 引理5.6.9中对有理数q与r成立的结论对全部实数q与r也成立。

   (贴一下引理5.6.9：)

   > (5.6.9 有理数次幂的运算性质？) 设x，$y>0$是正实数，且q与r是有理数，则：
   >
   > > - x^q是一个正实数。
   > > - $x^{q+r}=x^q\cdot x^r$且有$x^{qr}=(x^q)^r$。
   > > - $x^{-q}=\dfrac{1}{x^q}$。
   > > - 如有$q>0$，则$x>y$当且仅当$x^q>y^q$。
   > > - 如有$x>1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q>r$；如有$x<1$，则$x^q>x^r$当且仅当有$q<r$。

课后习题

6.7.1 证明命题6.7.3中剩余的部分

>

本节相关跳转

实分析 5.6 实数的指数运算 I