8.5 有序集

定义

1. (8.5.1 偏序集) **偏序集**是一个附加了关系$\leq_X$的集合X（于是对于任意两个对象$x,y\in X$，命题$x\leq_X y$要么是一个真命题，要么是一个假命题），此外我们假设这种关系遵守下面三个性质：
   - (自反性) 对任意$x\in X$，$x\leq_X x$始终为真。
   - (反对称性) 若任意$x,y\in X$满足$x\leq_X y$且$y\leq_X x$，那么$x=y$。
   - (传递性) 若对任意$x,y,z\in X$满足$x\leq_X y$且$y\leq_X z$，那么$x\leq_X z$。

   称$\leq_X$为**序关系**，绝大多数情况下，我们可以通过上下文确定集合X是什么，于是这时我们可以简单的简写$\leq_X$为$\leq$，此外，若有$x\leq_X y$且$x\neq y$，那么可以记为$x<_X y$或者$x<y$。

   （注：比如说自然数集$\mathbb{N}$与通常的小于等于$\leq$关系就构成了一个偏序集，此外，比如X是一个集合的集合，附加上子集$\subseteq$的关系也是一个偏序集。正常情况下我们不能直接说一个集合X是偏序集，而应该写成$(X,\leq_X)$这样的形式来指明偏序关系，不过我们通常能在上下文中确定偏序关系从而直接写X来代指$(X,\leq_X)$。需要注意的是，一种偏序关系并不一定绑定某个集合，同一个集合也可以与不同种偏序关系组成偏序集）

2. (8.5.3 全序集) 设X是一个偏序集，$\leq_X$是X上的序关系，Y是X的一个子集。若对任意$y,y'\in Y$，我们都有$y\leq_X y'$或$y'\leq y$（或两者兼有），那么X的子集Y是**全序的**。如果X本身是全序的，那么我们称X是一个附加了序关系的**全序集**（或**链**）。

   （注：全序集首先必然是一个偏序集，同时对任意全序集的子集也必然是全序集，我们常见的自然数集$\mathbb{N}$，整数集$\mathbb{Z}$，有理数集$\mathbb{Q}$与实数集$\mathbb{R}$附加上常见的小于等于$\leq$关系后就是全序集。偏序集中也有不是全序集的存在，比如上文所举例的取X为$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1\}\}$，偏序关系是子集关系$\subseteq$，因为$\{1,2\}$与$\{2,3\}$之间不能有一方为另一方子集，所以$(X,\subseteq)$并不是一个全序集，但$(X,\subseteq)$显然是偏序集）

3. (8.5.5 最大元素与最小元素) 设X是一个偏序集，其偏序关系为$\leq_X$，Y是X的一个子集。如果$y\in Y$且不存在$y'\in Y$使得$y<_X y'$，则称y是Y的**最大元素**；如果$y\in Y$且不存在$y'\in Y$使得$y'<_X y$，则称y是Y的**最小元素**。

   （注：尽管名字中带有最的字样，但是偏序集并不一定只有唯一的最小/大元素，以X取集合$\{\{5\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$，偏序关系取子集$\subseteq$为例，不难发现$\{5\}$同时是$X$的最大元素与最小元素，同时$\{1,2,3\}$也是集合的最大元素，因此不要以常规印象来理解这个最大与最小）

4. (8.5.8 良序集) 设X是一个偏序集，Y是X的一个**全序**子集。如果Y的每一个非空子集都有最小元素，那么称Y是**良序的**。

   （注：良序集拥有更加严苛的条件，自然数集$\mathbb{N}$就是一个良序集，但是整数集$\mathbb{Z}$，有理数集$\mathbb{Q}$，实数集$\mathbb{R}$都不是良序集。良序集有许多特殊性质，比如良序集的任意子集都是良序集，有限的全序集也是良序集，而且良序集自动遵守强归纳法原理）

5. (8.5.12 上界和严格上界) 设X是一个以$\leq$为序关系的良序集，并且设Y是X的一个子集。若$x\in X$，称x是Y的**上界**，当且仅当对所有$y\in Y$都有$y\leq x$；此外，若x还满足$x\notin Y$，那么称x是Y的**严格上界**。这等价于x是Y的**严格上界**当且仅当对所有$y\in Y$都有$y<x$。

命题

1. (8.5.10 强归纳法原理) 设X是一个以$\leq$为序关系的良序集，并且设$P(n)$是关于$n\in X$的性质（即对任意的$n\in X$，$P(n)$要么为真命题，要么为伪命题）。假设对每一个$n\in X$，都有下面这

个蕴含关系：如果$P(m)$为真对任意$m < n$的$m \in X$成立，那么$P(n)$也为真。则此时对任意$n \in X$，$P(n)$为真。
2. （8.5.14）设X是一个以$\leq$为序关系的偏序集，并且设x_0是X的一个元素，那么存在一个X的良序子集Y使得x_0是Y的最小元素且Y没有严格上界。
3. （8.5.15 佐恩引理）设X是一个具有如下性质的非空偏序集：即X的每一个全序子集Y都有一个上界。那么X至少有一个最大元素。

课后习题