3.5 笛卡尔积

定义

1. (3.5.1 有序对) 若x，y为任意两个对象，则把有序对(x,y)定义为一个把x作为第一个分量，y作为第二个分量的新对象。两个有序对(x,y)与(x',y')被认为是相等的，当且仅当其两个分量都相等，即：

$$(x,y)=(x',y') \iff x=x' \text{且} y=y'$$

2. (3.5.4 笛卡尔积) 如果X与Y是集合，则定义笛卡尔积$X\times Y$为第一个分量在X中且第二个分量在Y中的全体有序对的集合，因此有：

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

其等价表述为：

$$a\in(X\times Y) \iff \text{存在} x\in X \text{和} y\in Y \text{使得有} a=(x,y)$$

(注：严格地说，$X\times Y$与$Y\times X$是不同的两个集合，尽管它们有很多相似之处，比如它们总是有共同的元素个数)

3. (3.5.7 有序n元组与n重笛卡尔积) 设n为某一自然数，**有序n元组**$(x_i)_{1\le i\le n}$ (有时也记作$(x_1,x_2,\dots,x_n)$) 是由对象x_1，x_2，......，x_n按一定次序构成的一个组，称x_i为有序n元组的第i个分量，称两个有序n元组$(x_i)_{1\le i\le n}$与$(y_i)_{1\le i\le n}$是相等的，当且仅当对所有的$1\le i\le n$，均有$x_i=y_i$。若$(X_i)_{1\le i\le n}$是**集合**的有序n元组，则定义它们的n重笛卡尔积$\prod_{1\le i\le n} X_i$ (也可记为$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$) 为：

$$\prod_{1\le i\le n} X_i:=\{(x_i)_{1\le i\le n}:\text{对任意的}1\le i\le n,\text{有}x_i\in X_i\}$$

(注1：另外的，有序n元组的对象组x_1，x_2，......，x_n被称为n个元素的**有序序列**，简称**有限序列**，在第五章时还会介绍**无限序列**的概念)

(注2：如果x是一个元素，那么(x)是一元组且认为它等同于x本身（虽然严格来说，(x)与x并不相同）。由此，$\prod_{1\le i\le 1} X_i$就是X_1，且存在**空笛卡尔积**$\prod_{1\le i\le 0} X_i$给出的单元素集$\{()\}$（不是空集），其唯一元素$()$称为0元组。)

命题

1. (3.5.12有限选取) 设$n\ge 1$是一个自然数，且对任意自然数$1\le i\le n$，令X_i均为非空集合，则存在一个有序n元组$(x_i)_{1\le i\le n}$使得对所有$1\le i\le n$均有$x_i\in X_i$。换而言之，若每个X_i都是非空的，则$\prod_{1\le i\le n} X_i$也是非空的。

(直观上看，这个引理可以推广到无限选取的情形，事实上，这需要另一个公理来保证，即第8章8.4节的**选择公理**)

课后习题

3.5.1 假设对任意的对象x，y，给出对有序对(x,y)的一个定义：$(x,y):=\{\{x\},\{x,y\}\}$（于是多次使用单元素集与双元素集公理）。在此定义下有$(1,2)$就是集合$\{\{1\},\{1,2\}\}$，$(2,1)$就是集合$\{\{2\},\{1,2\}\}$，$(1,1)$就是集合$\{\{1\}\}$，证明：这个定义确实符合有序对定义中相等的定义，并且只要X，Y是一个集合，笛卡尔积$X\times Y$就是一个集合，于是这个定义可以有效的作为有序对的定义，另一个挑战是证明替代定义$(x,y):=\{x,\{x,y\}\}$同样具有上述性质，从而该定义也可以有效的作为有序对的定义。（对于这个挑战，需要用到正则公理与习题3.2.2的内容）

> $(x,y):=\{\{x\},\{x,y\}\}$:
>
> 1. 证明符合相等定义。
>
> > 对于任意有序对(a,a):
> >
> > 根据定义有$(a,a):=\{\{a\}\}$，于是若有$(a',a')=(a,a)\iff\{\{a'\}\}=\{\{a\}\}\iff a'=a$，符合有序对相等的定义。
> >
> > 对任意有序对$(a,b)(a\neq b)$:
> >
> > 根据定义有$(a,b):=\{\{a\},\{a,b\}\}$，于是$(a',b')=(a,b)\iff\{\{a'\},\{a',b'\}\}=\{\{a\},\{a,b\}\}$。由单元素集与双元素集公理，不可能存在单元素集等于双元素集的情况，于是仅可能有$\{a'\}=\{a\}$与$\{a',b'\}=\{a,b\}$同时成立才能得出有序对相等的结论。前者当且仅当$a'=a$时成立，对于后者，成立有两种情况"$a'=a$且$b'=b$"与"$a'=b$且$b'=a$"两种可能。前者同$a'=a$这一前置条件不矛盾，后者会得到$b=a'=a$于是同前置假设$a\neq b$矛盾。进而只可能有$a'=a$且$b'=b$同时成立时成立有序对相等。
>
> 2. 证明笛卡尔积。
>
> > 考虑选取任意的$x_0\in X$，然后对于任意的$y\in Y$，以Y为指标集，根据y指定这样一个集合$\{\{\{x_0\},\{x_0,y\}\}\}$（严格来说应该是$\{(x_0,y)\}$，要考虑$x_0=y$的可能性），于是我们得到了一个集族。使用并集公理，于是可以得到一个集合A_{x_0}:
> >
> > $$A_{x_0}=\bigcup_{y\in Y}\{\{\{x_0\},\{x_0,y\}\}\}$$
> >
> > 这样，对于任意$x\in X$，都可以依据上述方式指定一个集合A_x，由此以X为指标集，全体A_x为集族，使用并集公理，于是可以得到集合B:
> >
> > $$B=\bigcup_{x\in X}\bigcup_{y\in Y}\{\{\{x\},\{x,y\}\}\}$$
> >
> > 对任意的$x\in X$与$y\in Y$，都会有$(x,y)\in B$成立。于是B就是X与Y的笛卡尔积$X\times Y$。
>
> ---
>
> $(x,y):=\{x,\{x,y\}\}$:
>
> 1. 证明符合相等定义。
>
> > 对于任意有序对(a,a):
> >
> > 根据定义有$(a,a):=\{a,\{a\}\}$，于是若有$(a',a')=(a,a)\iff\{a',\{a'\}\}=\{a,\{a\}\}$，存在两种情况"$a'=a$"与"$a=\{a'\}$且$a'=\{a\}$"。前者显然不存在问题，对于后者，考虑正则公理，根据习题3.2.2的结论，这种情况是恒不成立的。于是$(a',a')=(a,a)\iff a'=a$，符合有序对相等的定义。
> >
> > 对任意有序对$(a,b)(a\neq b)$:

> 根据定义有$(a,b) := \{a,\{a,b\}\}$，于是
> $(a',b') = (a,b) \iff \{a',\{a',b'\}\} = \{a,\{a,b\}\}$。于是存在两种可能"$a' = a$且$\{a',b'\} = \{a,b\}$"与"$a' = \{a,b\}$且$a = \{a',b'\}$"。前者不存在问题，可以参考上面的证明直接得出该命题等价于$a = a'$且$b = b'$（注意$a \neq b$），对于后者，同样根据习题3.2.2的结论，这种情况是不可以成立的（$a \in a'$与$a' \in a$同时成立）。于是得到$(a',b') = (a,b) \iff a = a'$且$b = b'$。

2. 证明笛卡尔积存在

> 和上面一样，复制黏贴一下：
>
> 考虑选取任意的$x_0 \in X$，然后对于任意的$y \in Y$，以Y为指标集，根据y指定这样一个集合$\{(x_0,y)\}$，于是我们得到了一个集族。使用并集公理，于是可以得到一个集合A_{x_0}：
>
> $$A_{x_0} = \bigcup_{y \in Y} \{(x_0,y)\}$$
>
> 这样，对于任意$x \in X$，都可以依据上述方式指定一个集合A_x，由此以X为指标集，全体A_x为集族，使用并集公理，于是可以得到集合B：
>
> $$B = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{y \in Y} \{(x,y)\}$$
>
> 对任意的$x \in X$与$y \in Y$，都会有$(x,y) \in B$成立。于是B就是X与Y的笛卡尔积$X \times Y$。

3.5.2 假设我们定义有序n元组为一个满射函数$x : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\} \to X$，其值域为某个任意的集合$X$（于是不同的有序$n$元组）。于是我们使用$x_i$表示$x(i)$，并且把$x$记作$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$。利用这个定义证明：$(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$，当且仅当对任意$1 \leq i \leq n$均有$x_i = y_i$。同时证明，如果$(X_i)_{1 \leq i \leq n}$是集合的有序$n$元组，那么按照定义3.5.7定义的笛卡尔积的确是一个集合（提示：利用习题3.4.7与分类公理）

> $(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$，当且仅当对任意$1 \leq i \leq n$均有$x_i = y_i$：
>
> 根据该定义，即证明函数$x = y$，当且仅当对任意$1 \leq i \leq n$均有$x(i) = y(i)$。
>
> 充分性：
> 根据函数相等的充分必要条件，首先两者显然有相同的定义域$\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$，另外对于任意$x_0 \in X$，由于$x$是满射，于是存在某个$i \in \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$使得$x(i) = x_0$，进而根据题目条件有$y(i) = x_0$，即$x_0 \in Y$，反之可以证明对任意$y_0 \in Y$，$y_0 \in X$。于是根据集合相等定义，$X = Y$，即$x$与$y$值域一致。映射关系可以直接由题目条件给出。于是综上有$x = y$，即$(x_i)_{1 \leq i \leq n} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$。
>
> 必要性：
> 根据函数间相等的充要条件，可以直接得到对任意$1 \leq i \leq n$均有$x(i) = y(i)$。
>
> 于是得证。
>
> ---
>
> 笛卡尔积存在：
>
> 使用并集公理，我们可以得到集合$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$其内部包含了所有$X_i$的元素。使用习题3.4.7中的结论，于是得到集合$X^{\{i \in \mathbb{N}:1 \leq i \leq n\}}$。对该集合使用分类公理，得到下述集合：
>
> $$Y = \{f : f\text{定义域为}\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}\text{且}\forall 1 \leq i \leq n\}$$
>
> 该集合Y即为所求的n重笛卡尔积。

3.5.3 证明：有序对和有序n元组的相等定义遵守自反性、对称性和传递性公理

> 自反性：对任意有序n元组$(x_i)_{1\le i\le n}$，$(x_i)_{1\le i\le n}=(x_i)_{1\le i\le n}$：
>
> > 显然对任意$1\le i\le n$，$x_i=x_i$。于是得证。
>
> 对称性：对任意有序n元组$(x_i)_{1\le i\le n}$与$(y_i)_{1\le i\le n}$，若有$(x_i)_{1\le i\le n}=(y_i)_{1\le i\le n}$，则有$(y_i)_{1\le i\le n}=(x_i)_{1\le i\le n}$：
>
> > $(x_i)_{1\le i\le n}=(y_i)_{1\le i\le n}$，于是对任意$1\le i\le n$，$x_i=y_i\iff y_i=x_i$，进而得到$(y_i)_{1\le i\le n}=(x_i)_{1\le i\le n}$。
>
> 传递性：对任意有序n元组$(x_i)_{1\le i\le n}$，$(y_i)_{1\le i\le n}$与$(z_i)_{1\le i\le n}$，若有$(x_i)_{1\le i\le n}=(y_i)_{1\le i\le n}$且$(y_i)_{1\le i\le n}=(z_i)_{1\le i\le n}$，则有$(x_i)_{1\le i\le n}=(z_i)_{1\le i\le n}$：
>
> > $(x_i)_{1\le i\le n}=(y_i)_{1\le i\le n}$且$(y_i)_{1\le i\le n}=(z_i)_{1\le i\le n}$，于是对任意$1\le i\le n$，$x_i=y_i$且$y_i=z_i\iff x_i=z_i$，进而得到$(x_i)_{1\le i\le n}=(z_i)_{1\le i\le n}$。

3.5.4 设A，B，C都是集合，证明等式：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$，$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$，$A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C)$（当然我们也可以证明类似的等式，即把上述笛卡儿积的左右因子互换后所得到的等式。）

> $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$：
>
> 对任意元素$x\in A\times(B\cup C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与$b\in B\cup C\iff b\in B$或$b\in C$成立。若$b\in B$，则根据定义有$x\in A\times B$，若$b\in C$，则根据定义有$x\in A\times C$，于是综合有$x\in(A\times B)\cup(A\times C)$成立。
>
> 对任意元素$x\in(A\times B)\cup(A\times C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与"$b\in B$或$b\in C$" $\iff b\in B\cup C$，于是根据定义有$x\in A\times(B\cup C)$。
>
> ---
>
> $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$：
>
> 对任意元素$x\in A\times(B\cap C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与$b\in B\cap C\iff b\in B$且$b\in C$成立。$b\in B$，则根据定义有$x\in A\times B$，$b\in C$，则根据定义有$x\in A\times C$，于是综合有$x\in(A\times B)\cap(A\times C)$成立。
>
> 对任意元素$x\in(A\times B)\cap(A\times C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与"$b\in B$且$b\in C$" $\iff b\in B\cap C$，于是根据定义有$x\in A\times(B\cap C)$。
>
> ---
>
> $A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C)$：
>
> 对任意元素$x\in A\times(B\backslash C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与$b\in B\backslash C\iff b\in B$且$b\notin C$成立。$b\in B$，则根据定义有$x\in A\times B$，$b\notin C$，则根据定义有$x\notin A\times C$，于是综合有$x\in(A\times B)\backslash(A\times C)$成立。
>
> 对任意元素$x\in(A\times B)\backslash(A\times C)$，应当有$x=(a,b)$，且同时有$a\in A$与"$b\in B$且$b\notin C$" $\iff b\in B\backslash C$，于是根据定义有$x\in A\backslash(B\cup C)$。

3.5.5 设A，B，C，D是集合，证明：$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$。等式$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$是否成立？等式$(A\times B)\backslash(C\times D)=(A\backslash C)\times(B\backslash D)$是否成立？

> $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$：
>
> 对任意$x\in(A\times B)\cap(C\times D)$，应当有$x\in A\times B$且$x\in C\times D$。若令有$x=(a,b)$，则应当有$a\in A$且$a\in C$且$b\in B$且$b\in D$，也即$a\in A\cap C$且$b\in B\cap D$，即$x\in(A\cap C)\times(B\cap D)$。

> 对任意$x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$，令$x = (a, b)$，于是有$a \in A \cap C$且$b \in B \cap D$成立，于是$a \in A$且$a \in C$且$b \in B$且$b \in D$。进而$x \in (A \times B) \cap (C \times D)$。
>
> ---
>
> 对于后两者，我们可以尝试构造反例来证明他们是不成立的：
>
> $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$：
>
> > 尝试构想一个元素x，它满足条件$x = (a, b) \in (A \backslash C) \times (D \backslash B)$，于是有$a \in A \cup C$且$b \in B \cup D$，进而$x \in (A \cup C) \times (B \cup D)$；但是显然它并不属于$A \times B$与$C \times D$中的任何一个。于是两者并不总是相等的。
>
> $(A \times B) \backslash (C \times D) = (A \backslash C) \times (B \backslash D)$：
>
> > 尝试构想一个元素x，它满足条件$x = (a, b) \in (A \backslash C) \times (B \cap D)$，对$x$，自然有$x \in A \times B$且$x \notin C \times D$，于是$x \in (A \times B) \backslash (C \times D)$，另一方面由于$b \notin B \backslash D$，于是$x \notin (A \backslash C) \times (B \backslash D)$，于是可以得到两者并不总是相等。

3.5.6 设A，B，C，D都是非空集合，证明："$A \times B \subseteq C \times D$，当且仅当$A \subseteq C$且$B \subseteq D$"与"$A \times B = C \times D$，当且仅当$A = C$且$B = D$"。如果去掉$A$，$B$，$C$，$D$都是非空集合这个假设前提，会发生什么？

> $A \times B \subseteq C \times D$，当且仅当$A \subseteq C$且$B \subseteq D$：
>
> 必要性：
>
> > 对任意$a \in A$与$b \in B$，令$x = (a, b)$，则有$x \in A \times B$成立，若$A \times B \subseteq C \times D$，则$(a, b) \in C \times D$，即$a \in C$且$b \in D$。于是即对任意$a \in A$，有$a \in C$，对任意$b \in B$，$b \in D$。进而有$A \subseteq C$且$B \subseteq D$。
>
> 充分性：
>
> > 对任意的$x \in A \times B$，令$x = (a, b)$，于是有$a \in A$且$b \in B$，由于$A \subseteq C$且$B \subseteq D$成立，于是$a \in C$且$b \in D$，进而有$x \in C \times D$，即$A \times B \subseteq C \times D$。
>
> ---
>
> $A \times B = C \times D$，当且仅当$A = C$且$B = D$：
>
> $A \times B = C \times D$，当且仅当$A \times B \subseteq C \times D$且$C \times D \subseteq A \times B$，由上小问结论，于是当且仅当"$A \subseteq C$且$B \subseteq D$"且"$C \subseteq A$且$D \subseteq B$"，于是即当且仅当$A = C$且$B = D$。
>
> ---
>
> 假设不为非空集合，不妨考虑一些特殊情况为反例来说明这个命题是不成立的：
>
> 假定此时有$A = D = \varnothing$，B，C非空且$B \neq C$，于是此时有$A \times B \subseteq C \times D$（两者都是空集），但是此时$B \subseteq D$显然是不成立的（非空集合不能成为空集子集），这个情况同样可以否定相等那个结论，于是在有空集条件下两者都不成立。

3.5.7 设X和Y是集合，令$\pi_{X \times Y \to X} := X \times Y \to X$和$\pi_{X \times Y \to Y} := X \times Y \to Y$分别表示映射$\pi_{X \times Y \to X}(x, y) := x$和$\pi_{X \times Y \to Y}(x, y) := y$。这两个函数被称为$X \times Y$上的坐标函数。证明：对于任意的函数$f : Z \to X$和$g : Z \to Y$，存在唯一的函数$h : Z \to X \times Y$使得$\pi_{X \times Y \to X} \circ h = f$且$\pi_{X \times Y \to Y} \circ h = g$。（把该结论与习题3.3.8的最后一部分以及习题3.1.7进行比较。）这个函数h被称为f和g的直和，记作$h = f \oplus g$。

> 首先证明它存在：
>
> 考虑函数$h : Z \to X \times Y$存在这样的映射关系：
>
> $$h(z) = (f(z), g(z))$$

> 于是对任意$z \in Z$，可以得到$\pi_{X\times Y\to X}(h(z)) = \pi_{X\times Y\to X}((f(z), g(z))) = f(z)$以及$\pi_{X\times Y\to Y}(h(z)) = \pi_{X\times Y\to Y}((f(z), g(z))) = g(z)$，再根据两者间相同的值域与定义域可以判断得到$\pi_{X\times Y\to X} \circ h = f$且$\pi_{X\times Y\to Y} \circ h = g$同时成立，于是$h$是满足题目要求的直和。
>
> 再证明它的唯一性：
>
> 假设存在两个函数h_1，h_2满足题设条件。对任意$z \in Z$，由于$\pi_{X\times Y\to X} \circ h_i = f$且$\pi_{X\times Y\to Y} \circ h_i = g$对$i = 1, 2$为真，于是应当有$\pi_{X\times Y\to X} \circ h_1(z) = \pi_{X\times Y\to X} \circ h_2(z) = f(z)$且$\pi_{X\times Y\to Y} \circ h_1(z) = \pi_{X\times Y\to Y} \circ h_2(z) = g(z)$，于是有$h_1(z) = (f(z), g(z)) = h_2(z)$，又根据两个函数拥有共同的值域与定义域，于是可以得到$h_1 = h_2$，即h的存在是唯一的。

3.5.8 设X_1，...，X_n是集合，证明：笛卡儿积$\prod_{i=1}^{n} X_i$是空集，当且仅当至少有一个X_i为空集。

> 使用反证法：
>
> 假设笛卡儿积$\prod_{i=1}^{n} X_i$是空集，且对任意$1 \leq i \leq n$有$X_i \neq \varnothing$。由于对任意$1 \leq i \leq n$有$X_i \neq \varnothing$，于是对任意的X_i，至少可以指定一个元素x_i使得$x_i \in X_i$，于是选取这些所有的被指定的元素x_i组成一个有序n元组$(x_i)_{1\leq i\leq n}$，其中对任意$1 \leq i \leq n$有$x_i \in X_i$。根据笛卡尔积的定义，此时有$(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{i=1}^{n} X_i$，这与$\prod_{i=1}^{n} X_i$是空集的前提假设相矛盾，于是不成立假设，命题得证。

3.5.9 假设I和J是两个集合，对所有的$\alpha \in I$令A_α是一个集合，且对所有的$\beta \in J$令B_β是一个集合。证明：

$$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta\in J} B_\beta) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I\times J} A_\alpha \cap B_\beta$$

> 对任意$x \in (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta\in J} B_\beta)$，应当有$x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$且$x \in \bigcup_{\beta\in J} B_\beta$，进而存在$\alpha_0 \in I$与$\beta_0 \in J$有$x \in A_{\alpha_0}$且$x \in B_{\beta_0}$，该结论等效存在$(\alpha_0, \beta_0) \in I \times J$有$x \in A_{\alpha_0} \cup B_{\beta_0}$，即$x \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I\times J} A_\alpha \cap B_\beta$。
>
> ---
>
> 对任意$x \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I\times J} A_\alpha \cap B_\beta$，有存在$(\alpha_0, \beta_0) \in I \times J$有，于$x \in A_{\alpha_0}$且$x \in B_{\beta_0}$，既有存在$\alpha_0 \in I$与$\beta_0 \in J$有$x \in A_{\alpha_0}$且$x \in B_{\beta_0}$，于是$x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$且$x \in \bigcup_{\beta\in J} B_\beta$，进而$x \in (\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta\in J} B_\beta)$
>
> 综上，根据集合相等的定义，有$(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \cap (\bigcup_{\beta\in J} B_\beta) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in I\times J} A_\alpha \cap B_\beta$。

3.5.10 如果$f : X \to Y$是一个函数，定义f的图为$X \times Y$的一个子集$\{(x, f(x)) : x \in X\}$。证明：两个函数$f : X \to Y$和$\tilde{f} : X \to Y$相等，当且仅当它们有相同的图。反过来，如果$X \times Y$的任意一个子集G具有下述性质：对每一个$x \in X$，集合$\{y \in Y : (x, y) \in G\}$中恰好有一个元素（或者换言之，$G$满足垂线测试）。证明：恰好存在一个函数$f : X \to Y$，它的图与$G$相等。

> 两个函数$f : X \to Y$和$\tilde{f} : X \to Y$相等，当且仅当它们有相同的图：
>
> 证明必要性：
>
> > 两个函数$f : X \to Y$和$\tilde{f} : X \to Y$相等，于是对任意$x \in X$，都有$f(x) = \tilde{f}(x)$，于是对任意f图中的元素$(x, f(x)) = (x, \tilde{f}(x))$，即$(x, f(x)) \in \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$，即属于$\tilde{f}$的图。反过来同样可以得到对任意$\tilde{f}$的图中的元素$(x, \tilde{f}(x))$，$(x, \tilde{f}(x)) \in \{(x, f(x)), x \in X\}$，即属于$f$的图。于是根据集合相等的概念，可以得到：$\{(x, f(x)), x \in X\} = \{(x, \tilde{f}(x)), x \in X\}$。

> 证明充分性：
>
> > 已知有$\{(x,f(x)),x\in X\}=\{(x,\tilde{f}(x)),x\in X\}$成立，于是对任意的$x\in X$，可以找到元素$(x,f(x))$，并且根据集合相等的定义，$(x,f(x))\in\{(x,\tilde{f}(x)),x\in X\}$，于是有$f(x)=\tilde{f}(x)$对任意$x\in X$成立，又根据$f$与$\tilde{f}$有相同的值域与定义域，于是可以得到$f=\tilde{f}$。
>
> ---
>
> 若对每一个$x\in X$，集合$A=\{y\in Y:(x,y)\in G\}$中恰好有一个元素，则恰好存在一个函数$f:X\to Y$，它的图与G相等：
>
> 先证明这样的函数是存在的：
>
> > 根据命题中的条件，假设这样一个函数$f:X\to Y$，它存在这样的映射关系：
> >
> > $$f(x)\text{使得}f(x)\in\{y\in Y:(x,y)\in G\}\text{且}(x,f(x))\in G$$
> >
> > 由于集合$\{y\in Y:(x,y)\in G\}$恰好有一个元素与x对应，于是这样的映射关系是满足垂线测试的，这也保证f确实是一个函数。
> > 于是对于这个函数f，它的图$\{(x,f(x)):x\in X\}$根据定义应当有任意图中元素都属于G。对于任意G中元素(x,y)，由题设，对每个$x\in X$，恰有一个$(x,y)\in G$，又根据$(x,f(x))\in G$，于是只能有$f(x)=y$，即(x,y)属于f的图，于是根据集合相等的定义，G就是f的图。
>
> 再证明这样的函数是唯一的：
>
> > 假设有两个函数f_1与f_2满足该条件，于是两者具有共同的图，根据前结论，两者图相同即有$f_1=f_2$，于是两个函数其实是一个函数，由此唯一性得证。
>
> 证毕。

3.5.11 证明：[公理3.10幂集公理]实际上能够由[引理3.4.9]和其他的集合论公理推导出来，从而引理3.4.9可以看作是幂集公理的替代形式。（提示:对任意两个集合X和Y，利用引理3.4.9和分类公理构造出由$X\times Y$的一切子集组成的集合，它满足垂线测试。然后再利用习题3.5.10和替代公理。）

> 对任意两个集合X，Y，对笛卡尔积$X\times$使用引理3.4.9，可以得到集合Z_0：
>
> $$Z_0=\{Z:Z\text{是}X\times Y\text{的一个子集}\}$$
>
> 对Z_0使用分类公理，于是得到集合Z_1：
>
> $$Z_1=\{Z\in Z_0:\text{对任意}x\in X,\text{恰有一个}(x,y)\in Z\}$$
>
> 于是以Z_1为图的集合，使用替代公理，得到集合$Y\wedge X$：
>
> $$Y\wedge X=\{f:f\text{是以某个}G\in Z_1\text{为图的函数}\}$$
>
> 于是得到集合$Y\wedge X$即为幂集公理所给出的Y^X，它包含了所有以X为定义域，Y为值域的函数f。

3.5.12 本题将建立严格形式的命题2.1.16，设$f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$是一个函数，$c$是一个自然数。证明：存在一个函数$a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$使 $a(0)=c$且对任意的$n\in\mathbb{N}$均有$a(n++)=f(n,a(n))$，而且这个函数是唯一的。（提示:首先通过修改引理3.5.12的证明过程去归纳地证明：对于任意自然数$N\in\mathbb{N}$，存在唯一的函数 $a_N:\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}\to\mathbb{N}$使得$a_N(0)=c$且$a_N(n++)=f(n,a(n))$对所有满足$n<N$ 的$n\in\mathbb{N}$均成立。）另一个挑战是,不利用除了皮亚诺公理之外任何有关自然数的性质，直接证明上述结论（特别地，不利用自然数的次序关系，也不借助于命题2.1.16）。（提示：首先只利用皮亚诺公理和集合论的基本知识归纳地证明：对每一个自然数$N\in\mathbb{N}$，存在唯一一对$\mathbb{N}$的子集A_N，B_N满足下列性质：$(a)A_N\cap B_N=\varnothing$；$(b)A_N\cup B_N=\mathbb{N}$；$(c)0\in A_N$；$(d)N++\in B_N$；$(e)$只要$n\in B_N$，就有$n++\in B_N$；$(f)$只要$n\in A_N$且$n\neq N$，就有$n++\in A_N$。一旦我们得到这些集合，就用$A_N$来代替前面论述中的$\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}$。）

> 考虑使用归纳法，对自然数n做归纳，证明命题"对于任意自然数$N\in\mathbb{N}$，存在唯一的函数$a_N:\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}\to\mathbb{N}$使得$a_N(0)=c$且$a_N(n++)=f(n,a(n))$对所有满足$n<N$的$n\in\mathbb{N}$均成立。"成立。
>
> $n=0$时：
>
> 显然只有唯一的函数$a:\{0\}\to\mathbb{N}$，其映射关系为$a(0)=c$才能使得该命题成立。
>
> 现归纳性假设该命题在$n=N$时成立，对$n=N++$时：
>
> 先证明其存在：
>
> 由于$n=N$时命题成立，于是$n=N$时存在这么一个函数a_N有对任意$n\leq N$的$a(n)$都满足命题中的性质，此时根据给定的f，取一个自然数$f(n,a_N(n))$，然后定义一个新函数$a_{N+1}:\{n\in\mathbb{N}:n\leq N+1\}\to\mathbb{N}$，它的映射关系为：
>
> $$\begin{cases}a_{N+1}(n)=a_N(n) & (0\leq n\leq N)\\ a_{N+1}(n)=f(n,a_N(n)) & (n=N+1)\end{cases}$$
>
> 可以验证对新函数$a_{N+1}:\{n\in\mathbb{N}:n\leq N+1\}\to\mathbb{N}$，它满足命题中的一切条件。
>
> 再证明其唯一性：
>
> 假设有两个函数a^1_{N+1}与a^2_{N+1}满足命题，于是首先有$a^1_{N+1}(0)=a^2_{N+1}(0)=c$，由于命题在$n=N$时成立，于是对任意的$n\leq N$，都会有$a^1_{N+1}(n)=a^2_{N+1}(n)$（由同样的过程产生），特别地，有$a^1_{N+1}(N)=a^2_{N+1}(N)$，于是根据命题有$f(N,a^1_{N+1}(N))=f(N,a^2_{N+1}(N))$，即$a^1_{N+1}(N+1)=a^2_{N+1}(N+1)$。于是综上对任意$n\leq N+1$都有$a^1_{N+1}(n)=a^2_{N+1}(n)$。再考虑两者有相同的值域与定义域，于是两者为同一个函数，即a_{N+1}唯一。
>
> 综上，该命题归纳得证。于是结论可推广至自然数集$\mathbb{N}$的情况，即"存在一个函数$a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$使$a(0)=c$且对任意的$n\in\mathbb{N}$均有$a(n++)=f(n,a(n))$，而且这个函数是唯一的。"为真。
>
> ---
>
> 挑战：
>
> 由于挑战的限制，我们无法直接由某个给出的自然数N得到集合$\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}$，于是考虑这样一个方法，仅借助集合论的基础知识与皮亚诺公理，对任意给定自然数N构造出集合$\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}$的等效替代集合$A_N$，使用$A_N$替代上述证明过程即可：
>
> 于是证明提示中的命题，考虑对给定的自然数N，使用归纳法（公理2.5）进行归纳：
>
> （为了满足性质(a)，(b)，于是下文默认选取A_N时，取$B_N=\mathbb{N}\backslash A_N$，这在下文证明中不再重复）
>
> $N=0$时：
>
> 取$A_N=\{0\}$，此时可以验证对后四条性质均成立。$0\in A_N$，$0++=1\in B_N$，由公理2.2与公理2.3可推知(e)成立，A_N中不存在不等于N的元素于是(f)成立。同时根据(e)可以推断出该A_N是唯一的。

> 假设$N=n$时成立结论，证明$N=n++$时一样唯一存在这样的集合：
>
> 先证明其存在：
>
> 考虑取A_{n++}为$A_n\cup\{n++\}$，此时有(c)成立（$n++\in A_{n++}$），同时由于$n++\notin A_n$，于是$(n++)++\notin A_N$，且$(n++)++\notin\{n++\}$，于是$(n++)++\in B_{n++}$，(d)成立。(e)依旧可由(d)与公理2.2，公理2.3推出。对任意$m\in A_{n++}$且$m\neq n++$，若$m=n$，则$n++\in A_{n++}$，成立；若$m\neq n$，则由于$m\in A_n$与假设条件可推出必然有$m++\in A_{n++}$，即(f)成立。
>
> 再证明其唯一性：
>
> 假设存在两个集合A^1_{n++}与A^2_{n++}都满足这个条件，于是首先0是两个集合共有的元素，$(n++)++$都不属于这两个集合。根据题述条件，由于A_n是唯一的，于是可以推知得到对任意$m\in A_n$都有$m\in A^1_{n++}$与$m\in A^2_{n++}$，于是$n++$也是他们所共有的元素，对$n++$后的元素由归纳可证明均不属于他们，于是得到两个集合本质是一个集合。

3.5.13 本题的目的是证明在集合论中，本质上只存在唯一的自然数系（参见注2.1.12中的讨论）。假设我们有一个由"另类的自然数"组成的集合$\mathbb{N}'$、一个"另类的零"0以及一个"另类的增量运算"，并且该运算对任意一个另类的自然数$n'\in\mathbb{N}'$作用后，会返回另一个另类的自然数$n'++'\in\mathbb{N}'$，这使得当自然数、零以及增长运算被它们的另类物替代时，皮亚诺公理（公理2.1~公理2.5）仍然成立。证明：存在一个从自然数集到另类的自然数集的双射$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$使得 $f(0)=0'$，且对任意的$n\in\mathbb{N}$和$n'\in\mathbb{N}'$，有$f(n)=n'$，当且仅当$f(n++)=n'++'$。（提示:利用习题3.5.12。）

> 如题目所述，对这种另类的自然数系，我们用已有自然数系中的符号加上一个符号"'"来表示它们。
>
> 于是我们假定一个函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}'$，其映射关系定义如下：
>
> $$f(n)=\begin{cases}0' & n=0\\ f(n-1)++' & n>0\end{cases}$$
>
> 对这个函数，我们来证明它是一个双射：
>
> f是单射：
>
> 对这个命题，我们选择使用数学归纳法原理，对N进行归纳证明：对任意x_1，$x_2\in\{n\in\mathbb{N}:n\leq N\}$且$x_1\neq x_2$，都有$f(x_1)\neq f(x_2)$，由此将结论推广至$f$整个定义域（也即$\mathbb{N}$）
>
> $N=0$时：
>
> 该结论显然成立（因为不存在一对元素）
>
> 现归纳性假设$N=m$时有结论成立，对$N=m++$时：
>
> 根据定义有$f(m++)=f(m)++'\neq f(m)$，对任意$n\leq m$，根据归纳假设有结论成立，于是对任意x_1，$x_2\in\{n\in\mathbb{N}:n\leq m\}$且$x_1\neq x_2$，都有$f(x_1)\neq f(x_2)$，对$f(m++)$，使用逆向归纳法，若有$f(m++)=f(m-1)=f(m-2)++'$，则$f(m)++'=f(m-2)++' \iff f(m)=f(m-2)$同归纳假设矛盾，于是逆向归纳逐步可以得到$f(m++)\neq f(n)$对任意$n\in\{n\in\mathbb{N}:m\leq N\}$成立。综合得到结论对任意$x_1$，$x_2\in\{n\in\mathbb{N}:n\leq m++\}$且$x_1\neq x_2$，都有$f(x_1)\neq f(x_2)$，于是归纳假设得证。
>
> 综上，得证有f是单射。
>
> ---
>
> f是满射：
>
> 对这个命题，我们选择使用数学归纳法原理，对N'进行归纳证明：对任意$n'\in\{n\in\mathbb{N}':n'\leq N'\}$，存在$n\in\mathbb{N}$使得$f(n)=n'$，由此将结论推广至$f$整个值域（也即$\mathbb{N}'$）

> $N'=0$时：
>
> 该结论显然成立（$f(0)=0'$）
>
> 现归纳性假设$N'=m'$时有结论成立，对$N'=m'++'$时：
>
> 根据假设，于是得知存在$n\in\mathbb{N}$使得$f(n)=m'$，因此对$m'++'$，应当有$f(n)++'=m'++'$，即$f(n++)=m'++'$（看定义），显然$n++\in\mathbb{N}$。综上，得到结论，对任意$n'\in\{n\in\mathbb{N}':n'\leq m'++'\}$，存在$n\in\mathbb{N}$使得$f(n)=n'$于是归纳假设得证。
>
> 综上，得证有f是满射。

本节相关跳转

[实分析 2.1 皮亚诺公理]

[实分析 3.1 基础知识]

[实分析 3.3 函数]

[实分析 3.4 象和逆象]