

3.3 函数

定义

1. (3.3.1 函数定义) 设 X 与 Y 为集合。令 $P(x, y)$ 表示关于对象 $x \in X$ 与对象 $y \in Y$ 的一个性质, 且 $P(x, y)$ 满足对任意 $x \in X$, 恰好存在一个 $y \in Y$ 使得 $P(x, y)$ 为真 (有时称其为垂线测试), 则定义由 P 在定义域 X 与值域 Y 上确定的函数 $f: X \rightarrow Y$ 为下述事物: 对任意给定输入 $x \in X$, f 指定了一个输出 $f(x) \in Y$ 与之对应, 且 $f(x)$ 是 $P(x, f(x))$ 唯一为真的对象。因此, 对任意 $x \in X$ 与 $y \in Y$:

$$y = f(x) \rightarrow P(x, y) \text{ 为真}$$

2. (3.3.4-3.3.9 特殊的函数) 从空集到任意一个集合 X 的函数称为空函数, 表示为 $f: \emptyset \rightarrow X$ 。
另外地, 令 $P(x, y)$ 表示性质: $y = n$ (n 为常数) 则对任意的输入 x 其输出 y 是恒定的, 此时称该构造出这样的一个 $f: X \rightarrow Y$ 为常数函数, n 是一个确定的数。
3. (3.3.7 函数的相等) 两个具有相同定义域与值域的函数 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: X \rightarrow Y$ 被称为是相等的, 当且仅当对任意的 $x \in X$ 有 $f(x) = g(x)$ 成立 (若仅在部分 $x \in X$ 有 $f(x) = g(x)$, 则认为 f 和 g 不相等)
4. (3.3.10 函数的复合) 令 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow Z$ 为两个函数, 则定义两个函数 g 和 f 的复合:
 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 为一个函数, 并由下式进行显式定义:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

如果 f 的值域与 g 的定义域不一致, 则不对作 $g \circ f$ 出定义。

5. (3.3.14 单射) 如果函数 f 把不同的元素映射到不同的元素, 即有:

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

则函数 f 是单射的, 即如果函数 f 有:

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

也可称之为**一对一函数**。

6. (3.3.17 满射) 如果 Y 中每一个元素都能通过 f 对 X 中的某个元素起作用得到, 也可以写做 $f(X) = Y$ (这个表述同下一节的像很像), 那么称函数 f 是满射的或称其为**映上函数**。即:

$$\text{对每一个 } y \in Y, \text{ 存在 } x \in X \text{ 使得 } f(x) = y$$

(单射与满射之间的性质上存在很多对偶的关系, 这点可以在习题里面看到)

7. (3.3.20 双射) 同时是单射与满射的函数 $f: X \rightarrow Y$ 也可被称为双射函数或**可逆函数**, 对于一个双射, 可以将 x 的值记为 $f^{-1}(y)$, 于是 f^{-1} 是一个从 Y 到 X 的函数, 称 f^{-1} 为 f 的逆。

(一个常见的错误就是将双射的概念认为是: 对任意的 X 中的元素 x , 恰好存在一个 Y 中的 y 使得 $y = f(x)$ 。事实上, 这样的关系仅仅只能将 f 确定为是一个**函数**, 这个命题在事实上就是垂线测试的另一种表述)

命题

1. (3.3.12 复合函数的可结合性) 设 $f: Z \rightarrow W$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: X \rightarrow Y$ 是三个函数, 则有:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

课后习题

3.3.1 证明定义3.3.7中的集合相等的定义是自反的，可传递的与对称的，同时证明替换性质：如果 $f: X \rightarrow Y$, $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $\tilde{g}: Y \rightarrow Z$ 都是函数，且满足 $f = \tilde{f}$ 与 $g = \tilde{g}$ ，则有 $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$

自反性（证明对任意的函数 $f: X \rightarrow Y$, $f = f$ ）：

两者显然有相同的定义域与值域，对任意 $x \in X$ ，由垂线测试得到的 $y \in Y$ 唯一，即 $f(x) = f(x)$ ，于是有 $f = f$

对称性（证明对任意的函数 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: X \rightarrow Y$ ，若有 $g = f$ ，则 $f = g$ ）：

$g = f$ ，于是两者具有相同的值域与定义域，且对任意 $x \in X$ ，
 $g(x) = f(x) \iff f(x) = g(x)$ ，于是得到 $f = g$

可传递性（证明对任意的函数 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ 与 $h: X \rightarrow Y$ ，若有 $f = g$ 且 $g = h$ 成立，于是 $f = h$ ）：

$f = g$ 且 $g = h$ ，于是根据集合相等定义可以得到 f 与 g ， g 与 h 有相同的定义域与值域 $\iff f$ 与 h 有相同的定义域（ X ）与值域（ Y ）。另外有对任意 $x \in X$ ， $f(x) = g(x)$ 且 $g(x) = h(x) \iff f(x) = h(x)$ 。于是综合有 $f = h$ 。

替代性质：

$f = \tilde{f}$ 与 $g = \tilde{g}$ ，于是首先有定义域与值域是相同的 $\iff \tilde{g} \circ \tilde{f}$ 与 $g \circ f$ 有相同的定义域 X 与值域 Z 。另外又有对任意 $x \in X$ ， $f(x) = \tilde{f}(x)$ ；对任意 $y \in Y$ ， $g(y) = \tilde{g}(y)$ ，于是对任意 $x \in X$ ，应当有 $f(x) = \tilde{f}(x) \iff g(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ ，于是综合得到 $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ 。

3.3.2 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为函数，证明：若 f 与 g 均为单射，则 $g \circ f$ 也是单射，类似的，若 f 与 g 均为满射，则 $g \circ f$ 也是满射

若 f 与 g 均为单射，于是对任意 $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ ，有 $x \neq x' \iff f(x) \neq f(x')$ ，
 $y \neq y' \iff g(y) \neq g(y')$ ，

进而有 $x \neq x' \iff f(x) \neq f(x') \iff g(f(x)) \neq g(f(x'))$ ，于是根据单射的定义，有 $g \circ f$ 是单射

若 f 与 g 均为满射，于是对任意 $z \in Z$, $y \in Y$ ，存在 $y' \in Y$ 与 $x' \in X$ ， $z = g(y')$ ， $y = f(x')$ ，于是对任意 $z \in Z$ ，存在 $y \in Y$ 使得 $g(y) = z$ ，对 y ，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y \iff$ 对任意 $z \in Z$ ，存在 $x \in X$ 使得 $g \circ f(x) = z$ ，于是有 $g \circ f$ 是满射。

3.3.3 何时空函数是单射？满射？双射？

对空函数 $f: \emptyset \rightarrow A$ ，分别考察单射与满射的定义。

单射：

要求对任意 $x, x' \in \emptyset$ ，若有 $x \neq x'$ ，则 $f(x) \neq f(x')$ ，由于空集中不包含任何元素，于是这个命题自然是成立的。换言之，在任意情况下，都有 f 是单射。

满射：

要求对任意 $a \in A$ ， $\exists x \in \emptyset$ ， $f(x) = a$ ，但是空集中不存在任何元素，换言之，只有在 A 中不存在任何元素的时候，才能使得这个命题为真。换言之， A 为 \emptyset 时成立单射。

双射：

双射要求 f 同时是满射与单射，于是综合上面两个结论，可以得到 A 为空集的时候， f 是双射。

3.3.4 下面将给出复合函数的消去律： 设 $f: X \rightarrow Y$, $\tilde{f}: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $\tilde{g}: Y \rightarrow Z$ 为函数，若有 $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ 且 g 为单射，则此时有 $f = \tilde{f}$ （假设 g 不是单射，这个结论还成立吗？）另外有 $\tilde{g} \circ f = g \circ f$ 且 f 是满射，则 $g = \tilde{g}$ （假设 f 不是满射，这个结论还成立吗？）

$g \circ f = g \circ \tilde{f}$ ，于是对任意 $x \in X$, $g(f(x)) = g(\tilde{f}(x))$ 。

g 是单射，于是对任意 $y, y' \in Y$, $y \neq y' \iff g(y) \neq g(y')$ ，于是对任意 $x \in X$ ，假设有 $f(x) \neq \tilde{f}(x)$ ，此时必然有 $g(f(x)) \neq g(\tilde{f}(x))$ ，这同 $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ 的结论矛盾，于是只能导出结论：于是对任意 $x \in X$ ，有 $f(x) = \tilde{f}(x)$ ，即 $f = \tilde{f}$ 。

当 g 非单射时，上述论证中“ $f(x) \neq \tilde{f}(x)$ ，则 $g(f(x)) \neq g(\tilde{f}(x))$ ”的结论无法得出，于是这个结论无法证明。

$\tilde{g} \circ f = g \circ f$ ，于是对任意 $x \in X$, $\tilde{g}(f(x)) = g(f(x))$ 。

f 是满射，于是对任意 y ，存在 $x \in X$ 有 $f(x) = y$ ，于是对任意 $y \in Y$ ，假设有 $g(y) \neq \tilde{g}(y)$ ，对 y ，根据 f 是满射可以得到一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，于是此时有 $\tilde{g}(f(x)) \neq g(f(x))$ ，这同 $\tilde{g} \circ f = g \circ f$ 的结论矛盾，于是只能导出结论：于是对任意 $y \in Y$ ，有 $g(y) = \tilde{g}(y)$ ，即 $g = \tilde{g}$ 。

当 f 非满射时，上述论证中的结论无法得出，于是这个结论无法证明。

3.3.5 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 为函数，证明：若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射（ g 也一定是吗？）类似的，若 $g \circ f$ 是满射，那么 g 是满射（ f 也一定是吗？）

$g \circ f$ 是单射，于是对任意 $x, x' \in X$, $x \neq x' \iff g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ ，于是对假设 f 不是单射，那么至少存在一对 x, x' ，有 $x \neq x'$ 且 $f(x) = f(x')$ ，但是又有 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ ，这样便出现一个情景即对于某个 $f(x) = y \in Y$ ， $g(y)$ 值不唯一，换言之即 g 不满足垂线测试，这同 g 是函数的前提是矛盾的，于是 f 只能是单射。

对于 g ，可以简单设想这样的一个场景： $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{3\}$, $f(1) = 2$, $g(2) = g(3) = 3$ ，显然此时有 g 不是单射，但是 $g \circ f$ 确实满足单射的条件。通过这样一个反例可以大致看出为何 g 并不一定是单射。

$g \circ f$ 是满射，于是对任意 $z \in Z$ ，存在某个 $x \in X$ 有 $g \circ f(x) = z$ ，假设 g 不是满射，那么存在 $z \in Z$ ，使得对任意 $y \in Y$ 均有 $g(y) \neq z$ ，又由于 f 为函数，于是对任意 $x \in X$, $f(x) \in Y$ ，进而可以得到 $\forall x \in X, g(f(x)) \neq z$ ，这跟前面结论矛盾。于是 g 只能为满射。

对于 f ，考虑这样一个情况 $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{3\}$, $f(1) = 2$, $g(2) = 3$, $g(3) = 3$ ，这个情景下 g 是满射， $g \circ f$ 也是满射，但是 f 不是满射。通过这个反例可以大致看出 f 不是满射的原因。

3.3.6 令 $f: X \rightarrow Y$ 是一个双射， $f^{-1}: X \rightarrow Y$ 是 f 的逆，证明下面所述的消去律：对任意 $x \in X$ 有 $f^{-1}(f(x)) = x$ ，对任意 $y \in Y$ 有 $f(f^{-1}(y)) = y$ ，并且推导 f^{-1} 是可逆的，并且它的逆就是 f ，即 $(f^{-1})^{-1} = f$

$f^{-1}(f(x)) = x$:

对任意 $x \in X$ ，函数 f 指定一个输出 $y = f(x)$ ，又由于 f 是双射，这样的指定是唯一的，即 $\forall x_0 \in X, x_0 \neq x \iff f(x_0) \neq f(x)$ ，根据逆函数的定义， $f^{-1}(y) = x$ ，这就是我们所需要的结论。

$f(f^{-1}(y)) = y$:

对任意 $y \in Y$ ，由于 f 是满射，于是存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，根据逆函数 f^{-1} 的定义，有 $f^{-1}(y) = x$ ，又 $f(x) = y$ ，于是 $f(f^{-1}(y)) = y$ 。

$$(f^{-1})^{-1} = f:$$

先证明 f^{-1} 是双射:

由于 f 是双射, 于是 $\forall y \in Y$, 存在 $x \in X$ 有 $y = f(x)$, 且 $\forall x, x' \in X$,
 $f(x) \neq f(x') \iff x \neq x'$, 即 $\forall y', y \in Y, y \neq y' \iff f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$, 即
 f^{-1} 是单射。

另外, f 是一个函数, 于是 $\forall x \in X$, 存在 $y \in Y$ 使得 $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$, 即 f^{-1}
 是满射。

于是 f^{-1} 是双射, 再证明 $(f^{-1})^{-1} = f$:

$\forall y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $f^{-1}(y) = x$, 依据可逆函数的定义, 有 $(f^{-1})^{-1}(x) = y$, 又根
 据可逆函数的性质, 有 $f(x) = y$, 于是 $\forall x \in X$, 有 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$, 即 $(f^{-1})^{-1} = f$
 。

**3.3.7 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 为函数, 证明: 若 f, g 均为双射, 则 $g \circ f$ 也是双射, 且有
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$**

$g \circ f$ 也是双射:

f 与 g 为双射, 于是对任意 $z \in Z$, 存在 $y \in Y$ 使得 $g(y) = z$, 对任意 $y' \in Y$, 存在 $x' \in X$ 使得
 $f(x') = y'$ 。

\implies 对任意 $z \in Z$, 存在 $x \in X$ 使得 $g \circ f(x) = z$, 即 $g \circ f$ 是满射。

另外的, 对任意 $x, x' \in X, x \neq x' \iff f(x) \neq f(x')$, f 是一个函数, 于是 $y, y' \in Y$ 且 $y \neq y' \iff g(y) \neq g(y')$, 于是整合得到 $\forall x, x',$
 $x \neq x' \iff g(f(x)) \neq g(f(x'))$, 于是 $g \circ f$ 是单射。

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}:$$

根据逆函数的定义, 应该有对任意 $z \in Z$, 若有 $z = g(f(x)) (x \in X)$, 则 $(g \circ f)^{-1}(z) = x$,
 对函数 $f^{-1} \circ g^{-1}$, 应当存在关系 $f^{-1}(z) = y (y \in Y)$ 并且 $g^{-1}(y) = x (x \in X)$ 使得有
 $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = x$, 该关系等效于 $g(f(x)) = z$, 考虑到 $g \circ f$ 也是双射, 于是有
 $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ g^{-1}(z)$ 对任意 $z \in Z$ 成立, 加上两者具有相同的定义域与值域, 于是可以
 得到 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

**3.3.8 如果 X 是 Y 的一个子集, 令 $\iota_{X \rightarrow Y}: X \rightarrow Y$ 表示 X 到 Y 上的包含映射, 该映射定义为: 对任意
 $x \in X$ 有 $x \mapsto x$, 也即对任意 $x \in X$ 有 $\iota_{X \rightarrow Y}(x) := x$ 。特别地, 称 $\iota_{X \rightarrow X}$ 为 X 上的恒等映射。**

(a) 证明: 若有 $X \subseteq Y \subseteq Z$, 则有 $\iota_{Y \rightarrow Z} \circ \iota_{X \rightarrow Y} = \iota_{X \rightarrow Z}$

两者显然有相同的定义域与, 对于任意的 $x \in X, \iota_{X \rightarrow Y}(x) = x, \iota_{Y \rightarrow Z}(x) = x,$
 $\iota_{X \rightarrow Z}(x) = x$, 于是对任意 $x \in X, \iota_{X \rightarrow Z}(x) = \iota_{Y \rightarrow Z} \circ \iota_{X \rightarrow Y}(x)$, 综合可得函数相等。值
 域

(b) 证明: 若 $f: A \rightarrow B$ 是一个函数, 那么有 $f = f \circ \iota_{A \rightarrow A} = \iota_{B \rightarrow B} \circ f$

三者显然有共同的定义域与值域, 对任意 $a \in A$, 有 $f(a) = b, f(\iota_{A \rightarrow A}(a)) = f(a) = b,$
 $\iota_{B \rightarrow B}(f(a)) = \iota_{B \rightarrow B}(b) = b$, 于是对任意 $a \in A, f(a) = f \circ \iota_{A \rightarrow A}(a) = \iota_{B \rightarrow B} \circ f(a),$
 综上有 $f = f \circ \iota_{A \rightarrow A} = \iota_{B \rightarrow B} \circ f$ 。

(c) 证明: 若 $f: A \rightarrow B$ 是一个双射函数, 那么有 $f^{-1} \circ f = \iota_{A \rightarrow A}$ 与 $f \circ f^{-1} = \iota_{B \rightarrow B}$

定义域与值域显然相同, 考虑映射关系的问题:

$$f^{-1} \circ f \text{ 与 } \iota_{A \rightarrow A}:$$

根据习题 3.3.6 的结论, 有 $\forall a \in A, f^{-1} \circ f(a) = a$, 根据恒等映射定义, $\iota_{A \rightarrow A}(a) = a,$
 于是对任意 $a \in A$, 显然 $f^{-1} \circ f(a) = \iota_{A \rightarrow A}(a)$ 。

$f \circ f^{-1}$ 与 $\iota_{B \rightarrow B}$:

根据习题3.3.6的结论, 有 $\forall b \in B, f \circ f^{-1}(b) = b$, 根据恒等映射定义, $\iota_{B \rightarrow B}(b) = b$, 于是对任意 $b \in B$, 显然 $f \circ f^{-1}(b) = \iota_{B \rightarrow B}(b)$ 。

综上, 有 $f^{-1} \circ f = \iota_{A \rightarrow A}$ 与 $f \circ f^{-1} = \iota_{B \rightarrow B}$ 成立。

(d)证明: 如果 X 与 Y 是互不相交的集合, 并且 $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ 为函数, 那么存在唯一的函数 $h: X \cup Y \rightarrow Z$ 使得 $h \circ \iota_{X \rightarrow X \cup Y} = f$ 与 $h \circ \iota_{Y \rightarrow X \cup Y} = g$ 成立

存在性:

取函数 h 为这样一个函数, 他有性质:

$$\forall x \in X, h(x) = f(x), \forall y \in Y, h(y) = g(y)$$

于是由上述定义显然可以得到 $h \circ \iota_{X \rightarrow X \cup Y} = f$ 与 $h \circ \iota_{Y \rightarrow X \cup Y} = g$ (定义域, 值域, 映射关系相同)

唯一性:

假设存在两个函数 h_1 与 h_2 同时满足条件, 那么对任意 $a \in X \cup Y$, 首先有 $a \in X$ 或者 $a \in Y$ 恰有一个为真, 分类讨论:

$a \in X$:

$$\text{由于 } h \circ \iota_{X \rightarrow X \cup Y} = f, h_1(a) = h_1(\iota_{X \rightarrow X \cup Y}(a)) = f(a) = h_2(\iota_{X \rightarrow X \cup Y}(a)) = h_2(a).$$

$a \in Y$:

$$\text{由于 } h \circ \iota_{Y \rightarrow X \cup Y} = g, h_1(a) = h_1(\iota_{Y \rightarrow X \cup Y}(a)) = g(a) = h_2(\iota_{Y \rightarrow X \cup Y}(a)) = h_2(a).$$

于是得出结论, 对任意 $a \in X \cup Y$, 有 $h_1(a) = h_2(a)$, 又根据两者有共同值域与定义域, 于是 $h_1 = h_2$, 即 h 只可能唯一。