6.1 收敛与极限定律

定义

1. (6.1.1 两个实数间的距离）给定两个实数x和y，定义它们的距离为$d(x,y)$，有：

$$d(x,y):=|x-y|$$

2. (6.1.2 ε-接近的实数）设$\varepsilon>0$是一个实数，称x与y是ε**-接近的**，当且仅当$d(x,y)\leq\varepsilon$。

   (这个ε-接近性的定义与定义4.3.4的“ε-接近性”是一致的)

3. (6.1.3 实数的柯西序列）设$\varepsilon>0$是一个实数，则称从某个整数指标N开始的实数序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε**-稳定的**，当且仅当对任意j，$k\geq N$都有a_j与a_k是ε-接近的。

   又有从某个整数指标m开始的实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$被称为是**最终**ε**-稳定**的，当且仅当存在一个整数$N\geq m$使得$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-稳定的。

   一个实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$被称为**柯西序列**，当且仅当对每一个$\varepsilon>0$，该序列都是最终ε-稳定的。

   (这些定义与有理数上的相关定义（5.1.3，5.1.6，5.1.8）是一致的，在这两个意义下的有理数序列是一致的，耳熟能详了已经)

4. (6.1.5 序列的收敛）设$\varepsilon>0$是一个实数，且L也是一个实数。称实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是ε**-接近**于L的，当且仅当对任意的$n\geq m$，a_n与L都是ε-接近的，即有$d(a_n,L)\leq\varepsilon$。

   称序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是**最终**ε**-接近**于L的，当且仅当存在一个$N\geq m$使$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-接近于L的。

   称序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是**收敛**于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon>0$，该序列都是最终ε-接近于L的。

   (展开的表述：称序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是收敛于L的，当且仅当对于任意实数$\varepsilon>0$，存在一个$N\geq m$使得$|a_n-L|\leq\varepsilon$对所有的$n\geq N$成立)

5. (6.1.8 序列的极限）如有序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于实数L，那么序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的且它的极限为L，用下式表示：

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n$$

6. (6.1.16 有界序列）实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$以实数M为界，当且仅当存在有$|a_n|\leq M$对全部$n\geq m$成立。称实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是有界的，当且仅当存在某个实数$M>0$使得该序列以M为界。

   (该定义同样可以证明与定义5.1.12是一致的)

命题

1. (6.1.4 柯西序列的定义是一致的？）设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的有理数序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.8下的柯西序列，当且仅当它是定义6.1.3下的柯西序列。

2. (6.1.7 极限的唯一性）设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的实数序列，且有$L\neq L'$是两个不同的实数，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$不可能同时收敛于L和L'。

3. (6.1.11 收敛实例？）有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$。

4. (6.1.12 收敛序列也是柯西序列）假设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个收敛的实数序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$也是一个柯西序列。

5. (6.1.15 形式极限是真正的极限）假定有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是某个有理数的柯西序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n$，即有：

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

（如同之前在定义有理数，整数一样，于此形式极限被真正的极限替代，形式减法被真正的减法替代，形式除法被真正的除法替代）

6. （6.1.17 引理5.1.15推论）每一个收敛的实数序列都是有界的。
7. （6.1.19 极限定律）设有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的实数序列，并且设实数x，y有$x := \lim_{n\to\infty} a_n$与$y := \lim_{n\to\infty} b_n$。

> - 序列$(a_n+b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x+y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = x+y$$
>
> - 序列$(a_nb_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于xy:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = xy$$
>
> - 对任意实数c，序列$(c\cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$c\cdot x$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
>
> - 序列$(a_n-b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x-y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = x-y$$
>
> - 设$y\neq 0$，且对全部$n\geq m$都有$b_n\neq 0$，则序列$(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$收敛于$y^{-1}$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{-1} = (\lim_{n\to\infty} b_n)^{-1}$$
>
> - 设$y\neq 0$，且对全部$n\geq m$都有$b_n\neq 0$，则序列$(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x/y:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{x}{y}$$
>
> - 序列$(\max(a_n,b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\max(x,y)$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\max(a_n,b_n) = \max(x,y)$$
>
> - 序列$(\min(a_n,b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\min(x,y)$，即:
>
> $$\lim_{n\to\infty}\min(a_n,b_n) = \min(x,y)$$

课后习题

6.1.1 设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是一个实数序列，并且满足$a_{n+1} > a_n$对任意的自然数n均成立。证明：只要n和m都是自然数且满足$m > n$，那么$a_m > a_n$（我们把这种序列记作增序列）

> 由于序列指标总是自然数，因此我们可以选择固定n，然后使用归纳法证明对任意$m > n$均有$a_m > a_n$成立。由于自然数序关系，我们可以由$m > n$得到$m = n + c$，其中c是正自然数。我们对c归纳。
>
> 当$c = 1$时：
>
> 由题设条件我们有$a_n < a_{n+1} = a_m$，于是成立结论。
>
> 现归纳性假设当$c = b$时成立结论，对$c = b + 1$时：

> 根据题设条件我们有$a_{n+b+1} > a_{n+b}$成立，由归纳假设我们又有$a_{n+b} > a_n$成立，于是由实数序的传递性可以得到$a_{n+b+1} > a_n$成立，即$a_{n+c} > a_n$。
>
> 综上，于是归纳得证，对n和m都是自然数且满足$m > n$，那么$a_m > a_n$。

6.1.2 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，且L是一个实数。证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于L，当且仅当对于任意给定的实数$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$|a_n - L| \leq \varepsilon$对所有的$n \geq N$均成立

> 根据定义，我们有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于L，当且仅当对于任意实数$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$都是最终ε-接近于L的。
>
> 根据最终ε-接近的定义，这等价于对任意实数实数$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$都存在一个整数$N > m$使得实数序列$(a_n)_{n=N}^{\infty}$是ε-接近于L的。
>
> 再根据ε-接近的定义，这等价于对任意实数实数$\varepsilon > 0$，序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$都存在一个整数$N > m$使得对任意$n \geq N$都有$|a_n - L| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是整理上述内容，即可得到$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于L，当且仅当对于任意给定的实数$\varepsilon > 0$，存在一个$N \geq m$使得$|a_n - L| \leq \varepsilon$对所有的$n \geq N$均成立，于是题目结论得证。

6.1.3 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，c是一个实数，且$m' \geq m$是一个整数，证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，当且仅当$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$收敛于c（于是极限与指标的起点无关）

> 必要性：
>
> $(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数$\varepsilon > 0$，总有$N' \geq m$使得对任意$n \geq N'$都有$|a_n - c| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是对任意实数$\varepsilon > 0$，我们定义整数N选取规则有$N = \max(N', m')$，其中N'是在选定ε代入上面结论中得到的整数N'。根据选取规则，我们有$N \geq m'$，并且对任意$n \geq N$，都会有$n \geq N'$（因为$N \geq N'$），于是此时有$|a_n - c| \leq \varepsilon$成立，进而根据收敛的定义可以得到有实数序列$(a_n)_{n=m'}^{\infty}$收敛于$c$。
>
> ---
>
> 充分性：
>
> $(a_n)_{n=m'}^{\infty}$收敛于c，于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数$\varepsilon > 0$，总有$N' \geq m'$使得对任意$n \geq N'$都有$|a_n - c| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是对任意实数$\varepsilon > 0$，我们定义整数N选取规则有$N = N'$，其中N'是在选定ε代入上面结论中得到的整数N'。根据上面结论，我们有$N \geq m$（因为$N' \geq m'$且$m' \geq m$），并且对任意$n \geq N = N'$，于是此时有$|a_n - c| \leq \varepsilon$成立，进而根据收敛的定义可以得到有实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$c$。

6.1.4 设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个实数序列，c是一个实数，且$k \geq 0$是一个非负整数，证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，当且仅当$(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$收敛于c（于是极限与序列的指标无关）

> 必要性：
>
> $(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数$\varepsilon > 0$，总有$N' \geq m$使得对任意$n \geq N'$都有$|a_n - c| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是对任意实数$\varepsilon > 0$，我们定义整数N选取规则有$N = N'$，其中N'是在选定ε代入上面结论中得到的整数N'。根据选取规则，我们有$N = N' \geq m$；并且对任意$n \geq N$，都会有$n + k \geq N' + k \geq N'$（因为$N \geq N'$），于是此时有$|a_{n+k} - c| \leq \varepsilon$成立，进而根据收敛的定义可以得到有实数序列$(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$收敛于$c$。
>
> ---

> 充分性：
>
> $(a_{n+k})_{n=m}^{\infty}$收敛于c，于是根据习题6.1.2的结论有此时对任意实数$\varepsilon > 0$，总有$N' \geq m$使得对任意$n \geq N'$都有$|a_{n+k} - c| \leq \varepsilon$成立。
>
> 于是对任意实数$\varepsilon > 0$，我们定义整数N选取规则有$N = N' + k$，其中N'是在选定ε代入上面结论中得到的整数N'。根据选取规则，我们有$N \geq N' \geq n$；对任意$n \geq N = N' + k$，不妨令$n - k = l$，于是此时有$l + k \geq N' + k \iff l \geq N'$，根据上面结论，此时有$|a_{l+k} - c| \leq \varepsilon \iff |a_n - c| \leq \varepsilon$成立。于是综合上述内容，根据收敛定义可以得到有实数序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c。

6.1.5 证明命题6.1.12（提示：利用三角不等式或者命题4.3.7）

> 不妨假设$(a_n)_{n=0}^{\infty}$收敛于实数L。
>
> 对任意$\varepsilon > 0$，取$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$。由收敛定义我们可知有存在整数$N \geq 0$使得对任意$n \geq N$都有$|a_n - L| \leq \varepsilon$成立。于是根据三角不等式，此时有对任意$i, j \geq N$：
>
> $$|a_i - a_j| = |(a_i - L) + (L - a_j)| \leq |a_i - L| + |a_j - L| \leq 2\varepsilon'$$
>
> 又有$2\varepsilon' = \varepsilon$，于是综合可以得到：对任意实数$\varepsilon > 0$，总存在整数$N \geq 0$使得对任意$i, j \geq N$都有$|a_i - a_j| \leq \varepsilon$成立。于是根据定义6.1.3，可以得到$(a_n)_{n=0}^{\infty}$是柯西序列。

6.1.6 利用下述框架来证明命题6.1.15：设$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个有理数的柯西序列，并且记$L := \mathrm{LIM}_{n\to\infty} a_n$，我们必须证明$(a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$L$，设$\varepsilon > 0$，利用反证法，假设序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$不是最终$\varepsilon$-接近于$L$的。利用这一点以及$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是柯西序列的事实，证明存在一个$N \geq m$使得$a_n > L + \dfrac{\varepsilon}{2}$对所有的$n \geq N$均成立，或者$a_n < L - \dfrac{\varepsilon}{2}$对所有的$n \geq N$均成立，然后利用习题5.4.8

> 使用反证法：
>
> 结论1：我们假设有序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$不收敛于L的，根据习题6.1.2的结论，那么存在一个实数$\varepsilon_0 > 0$，使得对任意整数$N \geq m$，总存在一个$n \geq N$使得$|a_n - L| \geq \varepsilon_0$成立。若此时有$a_n > L$，那么我们有$a_n - L > \varepsilon_0 \iff a_n > L + \varepsilon_0$；若此时$a_n < L$，那么我们有$L - a_n > \varepsilon_0 \iff a_n < L - \varepsilon_0$。
>
> 结论2：又根据$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是一个有理数的柯西序列，于是对于任意实数$\varepsilon > 0$，存在一个整数$N \geq m$使得对任意$n \geq N$都有$|a_n - L| \leq \varepsilon$成立。于是我们选取$\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$，并记对应整数为$N_0$。
>
> 于是根据上面的结论，根据结论1，对整数N_0，总存在一个$n_0 \geq N_0$使得$|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0$成立，并且根据结论2，对任意$n \geq N_0$我们有$|a_n - a_{n_0}| \geq \dfrac{\varepsilon_0}{2}$，根据习题5.4.6于是此时有$a_{n_0} - \dfrac{\varepsilon_0}{2} \leq a_n \leq a_{n_0} + \dfrac{\varepsilon_0}{2}$，于是对$a_{n_0}$讨论：
>
> > - 若有$a_{n_0} > L$，则根据结论1，有$a_n > L + \varepsilon_0$，进而有对任意$n \geq N_0$有$a_n \geq a_{n_0} - \dfrac{\varepsilon_0}{2} \geq L + \varepsilon_0 - \dfrac{\varepsilon_0}{2} = L + \dfrac{\varepsilon_0}{2}$成立，即对任意$n \geq N_0$有$a_n \geq L + \dfrac{\varepsilon_0}{2}$成立。
> > - 若有$a_{n_0} < L$，则根据结论1，有$a_n < L - \varepsilon_0$，进而有对任意$n \geq N_0$有$a_n \leq a_{n_0} + \dfrac{\varepsilon_0}{2} \leq L - \varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_0}{2} = L - \dfrac{\varepsilon_0}{2}$成立，即对任意$n \geq N_0$有$a_n \leq L - \dfrac{\varepsilon_0}{2}$成立。

> 于是根据习题5.4.8，当$a_{n_0} > L$时，此时有$\text{LIM}_{n\to\infty}a_n \geq L + \frac{\varepsilon_0}{2}$即$L \geq L + \frac{\varepsilon_0}{2} > L \iff L > L$；当$a_{n_0} > L$时，此时有$\text{LIM}_{n\to\infty}a_n \leq L - \frac{\varepsilon_0}{2}$即$L \leq L - \frac{\varepsilon_0}{2} < L \iff L < L$。无论哪种情况都会导致悖论，于是反证假设不成立，我们只能有对任意有理数的柯西序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$必然有收敛于L成立。

6.1.7 证明定义6.1.16与定义5.1.12是一致的（即证明一个与命题6.1.4类似的结论，其中命题6.1.4中的柯西序列被替换成有界序列）

> 即证明：$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是从某个整数指标开始的有理数序列，那么$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.12下的有界序列，当且仅当它是定义6.1.16下的柯西序列。
>
> 若序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.12下的有界序列，那么根据定义5.1.12，存在一个有理数M使得对任意$n \geq m$都有$|a_n| \leq M$成立，特别地，我们知道M是有理数的同时也是实数，于是根据定义6.1.16，序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义6.1.16下有界的。
>
> 若序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义6.1.16下的有界序列，那么根据定义6.1.16，存在一个实数M使得对任意$n \geq m$都有$|a_n| \leq M$成立。根据习题5.4.3的结论，对M有$M < \lfloor M \rfloor + 1$成立，其中$\lfloor M \rfloor$是$M$的整数部分，于是$\lfloor M \rfloor + 1$是整数的同时也是有理数，此时对任意$n \geq m$我们都有$|a_n| \leq M < \lfloor M \rfloor + 1 \iff |a_n| \leq \lfloor M \rfloor + 1$，于是根据定义5.1.12，序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$是定义5.1.12下有界的。
>
> 综上，于是结论成立。

6.1.8 证明定理6.1.19（提示：你可以利用定理中的某些部分来证明其他的部分，例如：(b)可以被用来证明(c)，(a)和(c)可以用来证明(d)，并且(b)和(e)可以用来证明(f)。其证明类似于引理 5.3.6，命题 5.3.10以及引理5.3.15的证明。对于(e)，你可能首先需要证明一个辅助的结果：如果一个序列的所有元素都不为零，并且该序列收敛于一个非零极限，那么这个序列是远离0的）

> 即在前提设有$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的实数序列，并且设实数x，y有$x := \lim_{n\to\infty} a_n$与$y := \lim_{n\to\infty} b_n$的条件下，证明下述命题的成立：
>
> - 序列$(a_n + b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x + y$:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x + y$$
>
> 证明：
>
> 对于任意实数$\varepsilon > 0$，我们取$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$，于是根据习题6.1.2，由序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的可以得到对$\varepsilon'$分别存在整数$N \geq m$与整数$M \geq m$使得有：当$n \geq N$时，$|a_n - x| \leq \varepsilon'$；当$n \geq M$时，$|b_n - y| \leq \varepsilon'$。于是取整数$L = \max(N, M)$，此时我们对任意$n \geq L$有：
>
> $$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (x + y)| &= |a_n + b_n - x - y| \\ &= |(a_n - x) + (b_n - y)| \\ &\leq |a_n - x| + |b_n - y| \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$
>
> 于是总结得到对任意实数$\varepsilon > 0$，总存在整数$L \geq m$使得对任意$n \geq L$都有$|(a_n + b_n) - (x + y)| \leq \varepsilon$成立，于是根据习题6.1.2结论此时有$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x + y$成立。
>
> ---
>
> - 序列$(a_n b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于xy:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = xy$$

证明:

对于任意实数$\varepsilon > 0$，我们取$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{A+|y|}$，其中$A$是序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$的一个界，根据命题6.1.17，这样的界是存在的。于是根据习题6.1.2，由序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的可以得到对ε'分别存在整数$N \geq m$与整数$M \geq m$使得有：当$n \geq N$时，$|a_n - x| \leq \varepsilon'$；当$n \geq M$时，$|b_n - y| \leq \varepsilon'$。于是取整数$L = \max(N, M)$，此时我们对任意$n \geq L$有:

$$\begin{aligned}|a_nb_n - xy| &= |a_nb_n - a_ny + a_ny - xy| \\ &\leq |a_n||b_n - y| + |y||a_n - x| \\ &\leq A|b_n - y| + |y||a_n - x| \\ &\leq (A + |y|)\varepsilon' \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

于是总结得到对任意实数$\varepsilon > 0$，总存在整数$L \geq m$使得对任意$n \geq L$都有$|a_nb_n - xy| \leq \varepsilon$成立，于是根据习题6.1.2结论此时有$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = xy$成立。

- 对任意实数c，序列$(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$c \cdot x$，即:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

证明:

对任意实数c，取序列$b_n = c$，显然$(b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于c，于是代入结论(b)即可得证有序列$(c \cdot a_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$c \cdot x$成立。

- 序列$(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$x - y$:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = x - y$$

证明:

对序列$(-b_n)_{n=m}^{\infty}$，由序列$(b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛，于是对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N \geq m$使得对任意$n \geq N$都有$|b_n - y| \leq \varepsilon$，又根据绝对值的性质，此时有$|b_n - y| = |y - b_n| = |(-b_n) - (-y)|$，于是根据习题6.1.2结论可得序列$(-b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于$-y$成立。

于是根据结论(a)，我们有序列序列$(a_n - b_n)_{n=m}^{\infty} \iff (a_n + (-b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$x + (-y) = x - y$，于是结论得证。

- 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(b_n^{-1})_{n=m}^{\infty}$收敛于$y^{-1}$:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{-1} = (\lim_{n\to\infty} b_n)^{-1}$$

证明:

$(b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛，于是存在$N_0 \geq m$使得对任意$n \geq N_0$都有$|b_n - y| \leq \dfrac{|y|}{2}$成立，于是:

$$-\frac{|y|}{2} \leq b_n - y \leq \frac{|y|}{2} \implies \begin{cases} 0 \leq \frac{y}{2} \leq b_n \leq \frac{3y}{2} & y \geq 0 \\ 0 < -\frac{y}{2} \leq -b_n \leq -\frac{3y}{2} & y < 0 \end{cases} \iff \frac{|y|}{2} \leq |b_n| \leq \frac{3|y|}{2}$$

对任意实数$\varepsilon > 0$，我们取$\varepsilon' = \dfrac{|y|^2}{2}\varepsilon$，由序列$(b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛，对$\varepsilon'$，存在$N \geq m$使得对任意$n \geq N$都有$|b_n - y| \leq \varepsilon'$。取整数$L = \max(N, N_0)$。我们又有变形
$\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{y}\right| = \left|\dfrac{y - b_n}{b_n y}\right| = \dfrac{|b_n - y|}{|y||b_n|} \leq \dfrac{\varepsilon'}{|b_n||y|}$，此时代入$\varepsilon'$，则有：

$$\frac{\varepsilon'}{|b_n||y|} \leq \frac{2\varepsilon'}{|y|^2} = \varepsilon$$

于是总结可得对任意实数$\varepsilon > 0$，总存在整数$L \geq m$得对任意$n \geq L$都有$|{b_n}^{-1} - y^{-1}| \leq \varepsilon$成立，于是根据习题6.1.2结论此时有$\lim\limits_{n\to\infty} {b_n}^{-1} = y^{-1}$成立。

- 设$y \neq 0$，且对全部$n \geq m$都有$b_n \neq 0$，则序列$(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x/y:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{x}{y}$$

根据结论(e)与结论(b)可以直接推知有序列$(a_n/b_n)_{n=m}^{\infty}$收敛于x/y成立。

- 序列$(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\max(x, y)$，即：

$$\lim_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \max(x, y)$$

不妨假设有$x \leq y$（若$y \geq x$，那么我们让a_n，b_n相互替换就好），于是此时即原命题等价于证明序列$(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$y$。取$\varepsilon' = \dfrac{y - x}{3}$，则是根据序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的可以得到对$\varepsilon'$分别存在整数$N \geq m$与整数$M \geq m$使得有：当$n \geq N$时，$|a_n - x| \leq \varepsilon'$；当$n \geq M$时，$|b_n - y| \leq \varepsilon'$于是，代入$\varepsilon'$，我们可以得到下面结论：

当$n \geq L = \max(N, M)$时，则有

$$\begin{gathered}\frac{4x}{3} - \frac{y}{3} \leq a_n \leq \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} \quad \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} \leq b_n \leq \frac{4y}{3} - \frac{x}{3} \\ \Downarrow \\ a_n \leq \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} < \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} \leq b_n \\ \Downarrow \\ a_n < b_n\end{gathered}$$

于是即$\max(a_n, b_n) = b_n$对任意$n \geq L$成立，又根据习题6.1.3的结论，我们有序列$(\max(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$与$(\max(a_n, b_n))_{n=L}^{\infty}$收敛于同一个值，综合即得：

$$\lim_{n\to\infty} \max(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n = y$$

于是结论得证。

- 序列$(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$\min(x, y)$，即：

$$\lim_{n\to\infty} \min(a_n, b_n) = \min(x, y)$$

适当修改结论(g)的证明即可，个人修改版本如下：

> 不妨假设有$x \geq y$（若$y \leq x$，那么我们让a_n，b_n相互替换就好），于是此时即原命题等价于证明序列$(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$收敛于$y$。取$\varepsilon' = \dfrac{x-y}{3}$，则根据序列$(a_n)_{n=m}^{\infty}$与$(b_n)_{n=m}^{\infty}$是收敛的可以得到对$\varepsilon'$分别存在整数$N \geq m$与整数$M \geq m$使得有：当$n \geq N$时，$|a_n - x| \leq \varepsilon'$；当$n \geq M$时，$|b_n - y| \leq \varepsilon'$于是，代入$\varepsilon'$，我们可以得到下面结论：
>
> 当$n \geq L = \max(N, M)$时，则有
>
> $$\frac{y}{3} + \frac{2x}{3} \leq a_n \leq \frac{4x}{3} - \frac{y}{3} \quad \frac{4y}{3} - \frac{x}{3} \leq b_n \leq \frac{2y}{3} + \frac{x}{3}$$
> $$\Downarrow$$
> $$b_n \leq \frac{2y}{3} + \frac{x}{3} < \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} \leq a_n$$
> $$\Downarrow$$
> $$b_n < a_n$$
>
> 于是即$\min(a_n, b_n) = b_n$对任意$n \geq L$成立，又根据习题6.1.3的结论，我们有序列$(\min(a_n, b_n))_{n=m}^{\infty}$与$(\min(a_n, b_n))_{n=L}^{\infty}$收敛于同一个值，综合即得：
>
> $$\lim_{n \to \infty} \min(a_n, b_n) = \lim_{n \to \infty} b_n = y$$
>
> 于是结论得证。

6.1.9 解释为什么当分母的极限为0时，定理6.1.19(f)不成立。 （为了修复这个问题，需要用到洛必达法则，参见10.5节）

> 我们可以给出一个特例来证明这个结论在分母极限为0时是不可靠的。
>
> 不妨考虑序列$\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$，我们显然有该序列收敛于$0$，于是根据定理6.1.19(f)，此时我们应该有：
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}$$
>
> 由于$\dfrac{0}{0}$是无定义的，因此这个结论是荒谬的。
>
> 但是在另一方面，我们又有：
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$
>
> 即序列$\left(\dfrac{1/n}{1/n}\right)_{n=1}^{\infty}$收敛于$1$，这和无定义的结果$\dfrac{0}{0}$冲突，然而收敛于$1$的结论是通过收敛定义得到的于是不会错，因此，定理6.1.19(f)在分母极限为0时是不可靠的。

6.1.10 证明：当把定义5.2.6中的ε由正有理数替换成正实数时，等价的柯西序列这一概念不发生任何改变，更准确地说，如果$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是实数序列，证明：对于任意的有理数$\varepsilon > 0$，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的，当且仅当对于任意的实数$\varepsilon > 0$它们都是最终ε-接近的（提示：修改命题6.1.4的证明）

> 充分性：
>
> 若有对于任意的实数$\varepsilon > 0$有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的。对任意有理数$\varepsilon > 0$，我们知道ε同时也是一个实数，于是根据前提可以得到对于任意的有理数$\varepsilon > 0$，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的成立。
>
> ---

> 必要性：
>
> 若有对于任意的有理数$\varepsilon>0$有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终ε-接近的。对任意实数$\varepsilon>0$，根据习题5.4.4，我们知道此时存在一个正整数N使得有$\varepsilon>\frac{1}{N}>0$成立，此外由于$\frac{1}{N}$是有理数，于是根据前提有存在某个$M\geq 0$使得对任意$n\geq M$都有$|a_n-b_n|\leq\frac{1}{N}$成立，此时也有$|a_n-b_n|\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$。于是对任意实数$\varepsilon>0$，总有$(a_n)_{n=0}^{\infty}$和$(b_n)_{n=0}^{\infty}$都是最终$\varepsilon$-接近的，结论得证。

本节相关跳转

[实分析 4.3 绝对值与指数运算]

[实分析 5.1 柯西序列]

[实分析 5.2 等价的柯西序列]

[实分析 5.3 实数的构造]

[实分析 5.4 对实数排序]

[实分析 10.5 洛必达法则]