3.6 集合的基数

定义

- 1. (无序号 集合的基数) 对于任意一个一个元素个数有限的集合X, 称其中元素的数目n为集合X的 基数, 并记为#(X)=n。
- 2. (3.6.1 基数的相等) 称两个集合X与Y有相同的基数,当且仅当存在一个 $X \to Y$ 的双射 $f: X \to Y$ 。
- 3. (3.6.5 基数定义) 设n是一个自然数,称集合X的基数为n,当且仅当X与集合 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}$ 拥有相同的基数。另一种说法是称X中有n个元素,当且仅当X的基数为n
- 4. **(3.6.10 有限集)** 一个集合是**有限**的,当且仅当它的基数是某个自然数n,否则称这个集合为**无限 集**。

命题

(设X, Y, Z为集合)

- 1. (3.6.4 自反性?) X与X有相同的基数。
- 2. (3.6.4 对称性?) 如果X与Y有相同的基数,则Y与X有相同的基数
- 3. **(3.6.4 可传递性?)** 如果X与Y有相同的基数,且Y与Z有也有相同的基数,则认为X与Z也有相同的基数。
- 4. (3.6.8 基数的唯一性) 设集合X的基数为n,则X不可能还有其它的基数。换言之,对任意 $m \neq n$,m不可能为X的基数。
- 5. (3.6.9) 假设 $n \geq 1$,且X的基数为n,那么X是非空的,而且若有x是X中任意一个元素,则有 $X \setminus \{x\}$ 的基数为n-1。
- 6. (3.6.14 基数运算) 集合的基数满足下述命题(设X, Y是有限集):
 - 。 设x是一个对象且x不是X中的元素,则 $X \cup \{x\}$ 是有限的,且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$ 。
 - 。 $X \cup Y$ 是有限的,且 $\#(X \cup Y) \le \#(X) + \#(Y)$,特别地,当 $X \cap Y = \emptyset$ 时,有 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ 。
 - 。 假定 $f: X \to Y$ 是一个函数,那么f(X)是一个有限集且满足 $\#(f(x)) \le \#(X)$,特别地,当f是一个单射时,则有#(f(X)) = #(X)。
 - 。 假定Y是X的子集,则Y是有限的,且 $\#(Y) \le \#(X)$,若Y是X的真子集,则有 #(Y) < #(X)。
 - \circ 笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的,且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。
 - 集合 Y^X 是有限的,且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ 。
- 7. (习题3.6.10 抽屉原理) 设 A_1 ,, A_n 都是有限集,且有 $\#(\bigcup_{1\leq i\leq n}A_i)>n$,则存在 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 使得 $\#(A_i)\geq 2$ 。

课后习题

3.6.1 证明命题3.6.4

分别证明:

自反性:

X到X间有恒等映射 $\iota_{X\to X}$ 为双射,于是成立结论。

对称性:

X与Y有相同的基数,则存在 $f:X\to Y$ 为双射,相应的 $f^{-1}:Y\to X$ 也是一个双射,于是Y与X有共同的基数。

可传递性:

X与Y有相同的基数,且Y与Z有也有相同的基数,于是存在两个函数 $f: X \to Y$ 与 $f: Y \to Z$ 为双射,根据习题3.3.7结论,则有 $g \circ f: X \to Z$ 也是一个双射,于是X与Z有相同的基数。

3.6.2 证明: 一个集合的基数为0, 当且仅当它是空集

假定该集合为X,基数为0,于是存在双射 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}\to X$ 。又有 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq 0\}=\varnothing$,于是即空函数 $f:\varnothing\to X$ 为双射,根据习题3.3.3的讨论,可以得到空函数 $f:\varnothing\to X$ 为双射,当且仅当 $X=\varnothing$,于是结论得证。

3.6.3 设n是一个自然数,且 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to\mathbb{N}$ 是一个函数,证明:存在一个自然数M使得对任意 $1\leq i\leq n$, $f(i)\leq M$ 始终成立(提示:对n进行归纳,你可能还需要用到一个引理5.1.14)。由此我们有对任意自然数集 \mathbb{N} 的有限子集都是有界的。

对自然数n做归纳:

当 n = 0时:

f是空函数,结论显然是成立的。

现假设对n = m时成立结论,对n = m + 1时:

将函数 f变为如下形式:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) & 1 \le x \le m \\ f(m+1) = C & \end{cases}$$

其中C为某个自然数, $g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}\to\mathbb{N}$ 是一个函数,于是由归纳假设,有存在自然数M使得对任意 $1\leq i\leq m$, $f(i)=g(i)\leq M$,于是对任意 $1\leq i\leq m+1$,若有 $M\leq C$,此时存在 $f(i)\leq M\leq C$;反之,若有M>C,则 $f(i)\leq M$ 依旧恒成立。此时我们取 $M'=\max(M,C)$,于是对任意 $1\leq i\leq m+1$, $f(i)\leq M'$ 恒成立,于是假设得证。

综上,结论得证。

3.6.4 证明命题3.6.14

1. 设x是一个对象且x不是X中的元素,则 $X \cup \{x\}$ 是有限的,且 $\#(X \cup \{x\}) = \#(X) + 1$

假设存在双射 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq \#(X)\}\to X$,于是我们定义下面一个函数g,它的映射关系有:

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & 1 \le i \le \#(X) \\ x & i = \#(X) + 1 \end{cases}$$

且g定义域为 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq\#(X)+1\}$,值域为 $X\cup\{x\}$ 。于是根据基数定义,可以得到 $\#(X\cup\{x\})=\#(X)+1$ 。

2. $X \cup Y$ 是有限的,且 $\#(X \cup Y) \le \#(X) + \#(Y)$,特别地,当 $X \cap Y = \emptyset$ 时,有 $\#(X \cup Y) = \#(X) + \#(Y)$ 。

不妨令#(X)=n, #(Y)=m, 于是存在两个双射 $f:X \to \{i\in \mathbb{N}: 1\leq i\leq n\}$ 与 $g:Y \to \{i\in \mathbb{N}: 1\leq i\leq m\}$ 。于是我们取下面一个函数 $h:X\cup Y \to \{i\in \mathbb{N}: 1\leq i\leq n+m\}$:

$$h(i) = egin{cases} f(i) & i \in X \ g(i) + n & i \in Y \end{cases}$$

于是当 $Y\cap X=\varnothing$,于是对任意 i_1 , $i_2\in X\cup Y$ 且 $i_1\neq i_2$,可以分情况讨论得到 $h(i_1)\neq h(i_2)$ 始终成立,于是得知h是单射,h同时又显然是满射,于是h是双射,进而得到 $\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)$ 成立。

若存在 $Y\cap X\neq\varnothing$,于是此时存在a>n与 $1\leq b\leq n$ 使得 $h(y)=a=b\;(y\in X\cup Y)$,所以此时h的映射关系使它不能成为一个函数,考虑修改h的定义,

 $h: X \cup Y \to \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k\}$,其映射关系有:

$$h(i) = \begin{cases} f(i) & i \in X \\ g'(i) + n & i \in Y \cap X \end{cases}$$

其中 $g':Y\cap X\to \{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m'\}$ 为双射,此时可以得到h是双射,且 $k\le m+n$,进而 $\#(X\cup Y)\le \#(X)+\#(Y)$ 成立。

3. 假定 $f: X \to Y$ 是一个函数,那么f(X)是一个有限集且满足 $\#(f(X)) \le \#(X)$,特别地,当f是一个单射时,则有#(f(X)) = #(X)。

令#(X)=n,于是存在某个双射 $g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to X$,令函数 $f':X\to f(X)$ 与f有完全相同的映射关系,根据象的定义于是有f'是满射。取函数 $f'\circ g$,由习题3.3.2结论有 $f'\circ g$ 是满射。当f是单射时,由于f'与f有相同的映射关系,于是f'也是单射,进而 $f'\circ g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to f(X)$ 是一个双射,于是根据基数定义有#(f(X))=n=#(X)。

当f不是单射时,此时 $f'\circ g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to f(X)$ 为满射。存在至少一对 i_1 , $i_2\leq n(i_1\neq i_2)$ 使得 $f'\circ g(i_1)=f'\circ g(i_2)$,考虑对所有这样的对做以下处理:取对中最小值 i_n 使得 $h(i_n)$ 等于对中所有元素的函数值 $f'\circ g(i_n)$,然后对所有对中其他元素i',对所有 $i'\leq j\leq n$ 执行操作 $h(j-1)=f'\circ g(j)$ 。最终可以得到函数 $h:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq k\}\to f(X)$ 为双射且k< n,于是有 $\#(f(x))\leq \#(X)$ 。

4. 假定Y是X的子集,则Y是有限的,且 $\#(Y) \leq \#(X)$,若Y是X的真子集,则有 #(Y) < #(X)。

我们有 $X=Y\cup(X\backslash Y)$,于是根据2中结论,有若Y=X,于是 $X\backslash Y=\varnothing$, $\#(X)=\#(Y)+\#(X\backslash Y)=\#(Y)+0$,若Y是X的真子集,于是 $X\backslash Y\neq\varnothing$,进而 $\#(X\backslash Y)\neq0$, $\#(X)\geq\#(Y)$ 。于是结论得证。

5. 笛卡尔积 $X \times Y$ 是有限的,且 $\#(X \times Y) = \#(X) \times \#(Y)$ 。

我们有#(X)=n, #(Y)=m, 且存在两个双射 $f:X\to \{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\}$ 与 $g:Y\to \{i\in\mathbb{N}:1\le i\le m\}$ 。然后定义函数 $h:\{i\in\mathbb{N}:1\le i\le n\times m\}\to X\times Y$,其映射关系定义如下:

$$h(i) = (f(a), g(b))$$

其中有 $i=a\times m+b$,根据欧几里得算法可以得到对任意的 $1\leq i\leq n\times m$ 这样的一对(a,b)是唯一存在的,进而根据f,g的双射特性与有序对相等的特性得到h的单射性质。对任意 $X\times Y$ 中的元素,由于始终有 $1\leq a\leq n$ 与 $1\leq b\leq m$, $(a\times m+b)$ 也可以被 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\times m\}$ 中的某个i映射。于是可以得到h是双射,即 $\#(X\times Y)=n\times m$ 。

6. 集合 Y^X 是有限的,且 $\#(Y^X) = \#(Y)^{\#(X)}$ 。

令#(X)=n,#(Y)=m,并且我们假设存在两个双射 $f:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to X$ 与 $g:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}\to Y$ 。集合 Y^X 包含了全部以X为定义域,Y为值域的函数f,于是我们首先考虑这样一个函数

 $h:\{(z_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{N}^n: \forall 1\leq i\leq n, z_i\in\mathbb{N}$ 且 $1\leq z_i\leq m\}\to Y^X$,它存在这样的映射关系:

$$h((z_i)_{1 \le i \le n}) = h': X \to Y,$$
其中有对任意 $i \in [1, n], h' \circ f(i) = g(z_i)$

对任意 $h' \in Y^X$,对每一个 $h'(x) = y \ (x \in X, \ y \in Y)$,总能找到一个i与 z_i 使得f(i) = x与 $g(z_i) = y$,进而可以找到与之对应的有序n元组 $(z_i)_{1 \le i \le n}$ 。同时由于f与g是双射,这使得不同的有序n元组必然由h映射到不同的函数h'上,于是可以得到h是双射。

然后考虑令一个函数

 $l:\{(z_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{N}^n: \forall 1\leq i\leq n, z_i\in\mathbb{N}$ 且 $1\leq z_i\leq m\}\to\{i\in\mathbb{N}: 1\leq i\leq m^n\}$,它具有下面的映射关系:

$$l((z_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n z_i m^{i-1}$$

对于 l ,它的满射与单射性质是非常容易证明的(重复性太高不赘述),于是此时取双射 $h\circ l^{-1}$,进而有 $\#(Y^X)=\#(Y)^{\#(X)}$ 成立。

3.6.5 设A与B是两个集合,试着构造一个双射证明 $A \times B$ 与 $B \times A$ 有相同的基数,然后利用命题 3.6.14,尝试给出引理2.3.3的另一种证明方法

考虑下面一个双射 $f: A \times B \to B \times A$:

$$f((a,b)) = (b,a)$$

对f,任意一个(b,a) ($b \in B$, $a \in A$) 都存在一个 $(a,b) \in A \times B$ 使得它被映射,对任意不同的(a,b)与(a',b'),(b,a)与(b',a')也是不同的。于是验证得到f是双射。

考虑引理2.3.3的另一种证明:

对任意两个自然数m,n,我们知道它们分别是集合 $M=\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}$ 与集合 $N=\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}$ 的基数。于是有 $m\times n=\#(M\times N)=\#(N\times M)=n\times m$ 。

证毕。

3.6.6 设A,B,C是集合,通过构造一个明确的双射来证明:集合 $(A^B)^C$ 与 $A^{B\times C}$ 有相同的基数,由此推导出 $(a^b)^c=a^{bc}$ 对任意自然数a,b,c均成立。利用类似的方法推导出 $a^b\times a^c=a^{b+c}$ 对任意自然数a,b,c均成立

我们定义这样一个函数 $h:(A^B)^C \to A^{B imes C}$,它有下述的映射关系:

$$h(f:C o A^B) = g:B imes C o A$$

其中对每一个 $c_0 \in C$, 若 $b \in B$, 有 $g((b, c_0)) = f(c)(b)$ (看着有点奇怪,但是f本身会映射到函数的集合 A^B ,所以这里f(c)应该是某个新的函数 $l: B \to A$,也就是 $g((b, c_0)) = l(b)$))。

对于函数h, 首先要明确集合 $(A^B)^C$ 包含了全体可能的函数 $f:C\to A^B$, 于是对于任意的 $g\in A^{B\times C}$, 对每一个 $c_0\in C$ 必然存在一个函数f使得对任意的 $b\in B$, $f(b)=g((b,c_0))\in A$, 进而这个函数定义域为B, 值域为A, 于是它属于 $(A^B)^C$, 所以g能通过h被 $(A^B)^C$ 中的元素映射; 反过来,对任意不同 f_1 , $f_2\in (A^B)^C$, 根据函数相等的定义, $h(f_1)$ 必然不等于 $h(f_2)$ (存在某个 c_0 使得 $f_1(c_0)(=l_1)\neq f_2(c_0)(=l_2)$,于是存在 $b_0\in B$ 使得 $l_1(b_0)\neq l_2(b_0)$,进而此时 $h(f_1)((b_0,c_0))\neq h(f_2)((b_0,c_0))$ 。)。于是综上h同时是满射与单射,进而h是双射,集合 $(A^B)^C$ 与 $A^{B\times C}$ 有相同的基数。

对于任意自然数a, b, c, 我们有它们分别是三个集合 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq a\}$, $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq b\}$, $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq c\}$ 的基数,于是分别令这三个集合为A, B, C。根据前面的结论应当有 $\#((A^B)^C)=\#(A^{B\times C})$,即 $(a^b)^c=a^{bc}$ 。

先证明集合 $A^B \times A^C$ 与 $A^{B \cup C}$ 在 $B \cap C = \emptyset$ 的条件下有相同的基数。构造函数 $h: A^B \times A^C \to A^{B \cup C}$,其映射关系定义如下:

$$h((f:B\to A,g:C\to A))=l:B\cup C\to A$$

其中1有这样的定义:

$$l(i) = egin{cases} f(i) & i \in B \ g(i) & i \in C \end{cases}$$

对任意的 $l\in A^{B\cup C}$,有我们取函数 $f:B\to A$ 与 $g:C\to A$ 与l有相同的映射关系,由于 $A^B\times A^C$ 中包含了所有的这样的(f,g)的组合。于是l必然能被 $A^B\times A^C$ 中的元素通过l映射;此外,对任意不同的(f,g)与 $(f',g')\in A^B\times A^C$,根据函数相等定义与l的定义,显然有 $h((f,g))\neq h((f',g'))$ (话很长而且很不必要,随便写写就能知道了)。于是可以得到l为双射。

对于任意自然数a, b, c, 我们有它们分别是三个集合 $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq a\}$, $\{i\in\mathbb{N}:c+1\leq i\leq b+c\}$, $\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq c\}$ 的基数,于是分别令这三个集合为A, B, C (显然有 $B\cap C=\varnothing$)。于是根据上面的结论,有 $\#(A^B\times A^C)=\#(A^{B\cup A})$,即 $a^b\times a^c=a^{b+c}$ 对任意自然数a, b, c均成立。

3.6.7 设A与B是集合,如果存在一个从A到B的单射 $f:A\to B$,则称集合A的基数小于或等于集合B的基数。证明集合A的基数小于或等于集合B的基数,当且仅当 $\#(A)\leq\#(B)$

f是单射,于是有双射 $f:A\to f(A)$ (这个结论好像在以前的章节证明过,过程很好说明但是写起来很长,这里跳过)与集合 B-f(A),其中包含了所有 B中不被 f 映射到的元素(可能为空)。于是令有#(A)=n,#(B-f(A))=m,双射 $a:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n\}\to A$, $b':\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq m\}\to (B-f(A))$ 。则定义函数 $b:\{i\in\mathbb{N}:1\leq i\leq n+m\}\to B$ 有:

$$b(i) = \begin{cases} a(i) & 1 \le i \le n \\ b'(i) & n+1 \le i \le n+m \end{cases}$$

由于B-f(A)的基数大于等于0,于是必然有 $\#(A)=n\leq n+m=\#(B)$,进而题目结论成立。

3.6.8 设A与B是集合,且存在一个从A到B的单射 $f:A\to B$ (也即集合A的基数小于或等于集合B的基数),证明:存在一个从B到A的满射 $g:B\to A$ (该命题的逆命题证明需要用到选择公理,详情参考习题8.4.3)

根据单个选择引理,我们可以从A中获得一个元素x。

于是给出9的映射关系如下:

$$g(b) = \begin{cases} a & b \in f(A) \exists f(a) = b \\ x & b \in B \exists b \notin f(A) \end{cases}$$

由于f是一个单射,于是对任意 $a_0\in A$,总是存在 $f(a_0)\in B$ 使得 $g(f(a_0))=a_0$ (f要满足垂线测试);同时,由于f是一个单射,于是对于任意 a_1 , $a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$,必然有 $f(a_1)\neq f(a_2)$,这意味着对任意两个不同的 a_1 , $a_2\in A$,它们不可能由同一个b通过g映射得到,因此g是满足垂线测试的。

综上, g即要求的满射。

3.6.9 设A与B是两个有限集,证明 $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 也是有限集,且 $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$ 始终成立

根据习题3.6.4的结论,应当有#(A) + #(B-A) = # $(A \cup B)$ ($A \cap (B-A) = \emptyset$) ,又有 $(B-A) \cap (B \cap A) = \emptyset$,于是#(B-A) + # $(B \cap A)$ = #(B)。综合两式可以得到:

$$\#(A) + \#(B) = (\#(A) + \#(B - A)) + \#(B) - \#(B - A)$$
$$= \#(A \cup B) + \#(B \cap A)$$

干是结论得证。

3.6.10 设 A_1 , …, A_n 是有限集,并且有 $\#(\bigcup_{i\in\{1,2,...,n\}}A_i)>n$,证明:存在 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\#(A_i)\geq 2$ (这也被称为抽屉原理)

假设对任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都有 $\#(A_i) \leq 1$,于是我们有:

$$\#(\bigcup_{i\in\{1,2,...,n\}}A_i)\leq \#(A_1)+\#(A_2)+\ldots+\#(A_n)=n$$

等号仅在对任意j, $i\in\{1,\ldots,n\}$, 都有 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$ 时成立,这同 #($\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}A_i$) > n的假设矛盾,于是必然存在 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 使得# $(A_i)\geq 2$,结论得证。

本章相关跳转

实分析 5.1 柯西序列