Отчёт по лабораторной работе 5

Простейший вариант 25

Тейшейра Морте Морте Селмилтон

Содержание

Цель работы 1
Задание 1
Теоретическое введение 1
Выполнение лабораторной работы 3

Цель работы

Решаем задачу Для модели «хищник-жертва»:.

Задание

Формула определения номера задания: (SnmodN)+1, где Sn — номер студбилета, N — количество заданий.

Вариант № 25

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.61x(t) + 0.059x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.51x(t) - 0.047x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: x_0=4, y_0=14. Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории).
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников a = 0.61 b = 0.51 c = 0.059 d = 0.047

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = -ax(t) + cx(t)y(t) \\ \dfrac{dx}{dy} = bx(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c-естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B. Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $x_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе. При малом изменении модели

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = -ax(t) + cx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \dfrac{dx}{dy} = bx(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon << 1 \end{cases}$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 рис. 2.

Рисунок2. Мягкаямодельборьбызасуществование.

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно. В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой. В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами). Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой). В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости

Выполнение лабораторной работы

1. julia

```
1.1
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.61
b = 0.51
c = 0.059
d = 0.047

x0 = 9
y0 = 12



function F(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + c*u[1]*u[2]
    du[2] = b*u[2] - d*u[1]*u[2]
end
v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 400.0)

prob = ODEProblem(F,v0,tspan)
sol = solve(prob)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt =
    plot(
        layout=(1,2),
        dpi=300,
        legend=false)
    plot!(
        plt[1],
        T,
        X,
        title="решение уравнения",
        color=:blue)
    plot!(
        plt[2],
        X,
        Y,
        label="Фразовый портрет",
        color=:blue)

savefig("lab5-1.png")
```

1.2

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.61
b = 0.51
c = 0.059
d = 0.047

x0 = 9
y0 = 12



function F(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + c*u[1]*u[2]
    du[2] = b*u[2] - d*u[1]*u[2]
end
v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 400.0)

prob = ODEProblem(F,v0,tspan)
sol = solve(prob)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plot(sol)

savefig("lab5-2.png")
```

2.OMEDIt

```
model lab51
parameter Real a = 0.61;
parameter Real b = 0.51;
parameter Real c = 0.059;
parameter Real d = 0.047;

parameter Real x0 = 9;
parameter Real y0 = 12;



Real x(start = x0);
Real y(start = y0);


equation

der(x) = -a*x + c*x*y;
der(y) = b*x - d*x*y;
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 400, Tolerance = 1e-6,Interval
= 0.1));
end lab51;
```