



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CELSO RICARDO CALDEIRA REGO

EXPOENTE DE HURST EM SÉRIES TEMPORAIS

Monografia apresentada ao
Departamento de Física da
Universidade Federal do
Amazonas, para obtenção do título
de Bacharelado em Física.

ORIENTADORA: MARTA SILVA DOS SANTOS GUSMÃO

MANAUS-AM

2010

CELSO RICARDO CALDEIRA REGO

EXPOENTE DE HURST EM SÉRIES TEMPORAIS

BANCA EXAMINADORA

Professora PhD. Marta Silva dos Santos Gusmão	- Orientadora
Professor	- Membro
Professor	- Membro

**MANAUS-AM
2010**

Sumário

Agradecimentos	vi
Lista de Siglas	viii
Resumo	ix
1 Introdução	1
2 Convecção de Fluidos	4
2.1 Escoamentos de Fluidos	4
2.2 Convecção de Fluidos	7
3 Sistema de Lorenz	10
3.1 Aspectos Históricos	10
3.2 Lei de Escala	12
3.3 Comportamento Caótico	12
3.4 Espaço de Fase e Fractais	13
3.5 Equações de Lorenz	14
3.6 Cálculo da Componente $Z(t)$	16
4 Multifractalidade de Séries Temporais	18
4.1 Noções Sobre Séries Temporais	18
4.2 Método MF-DFA	19

5	Resultados	25
5.1	Modelo	25
5.2	Resultados	26
6	Conclusão	31

Lista de Figuras

2.1	Furacão Catarina, em 24 de Março de 2004 (Brasil-SC), (b) Sistema de refri geração de uma geladeira (c) Panela com água sendo aquecida, (d) Xícara com chocolate quente, (e) Mapa mostrando as principais correntes oceânicas.	5
2.2	As setas indicam como são as camadas de fluidos dos tipos de escoamento: (a) regime laminar; (b) transiente; (c) turbulento.	6
2.3	Rolos de convecção, mostrando o perfil de temperatura para $T_2 > T_1$, sem levar em conta os efeitos de contornos.	8
3.1	Triângulo de Sierpinski, com dimensão $d = 1,584$	13
3.2	Atrator de Lorenz para $X(0) = 0$, $Y(0) = 1$, $Z(0) = 0$ com os parâmetros: $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$	15
3.3	Valores da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz para diferentes valores de r : (a) $r_1 = 10$, (b) $r_2 = 20$, (c) $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$	17
4.1	Série $Z(t)$ em (a) e suas componentes: Sazonal $S(t)$ em (b), Tendência $T(t)$ em (c) e aleatória $a(t)$ em (d).	20
4.2	Série integrada de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$. As retas são ajustes polinomiais de primeira ordem ($m = 1$), para a escala de $s = 500$	22
5.1	Sequência de dados $Z(t)$ de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$	27

5.2	Espectro multifractal para uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e $\sigma_1^2 = 1$. Em evidência, é mostrado o valor de $y = H(q)$ para $x = q = 2$	28
5.3	Espectros multifractais das componentes $Z(t)$ do sistema de Lorenz para: $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$, nas respectivas temperaturas ΔT_1 , ΔT_2 , ΔT_3 e ΔT_4	29

Lista de Tabelas

V.1	Primeiros 25 valores dos espectros multifractais de $H(q)$ para os respectivos valores de r da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz	30
-----	---	----

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a **Deus** por ter me dado força de vontade para perseverar até o término deste trabalho. Agradeço também à professora **Marta Silva dos Santos Gusmão** pela paciência que ela teve comigo durante esses anos de graduação. Período no qual sempre me incentivou e se dedicou o máximo possível para tentar ajudar no meu crescimento intelectual.

À minha mãe **Maria da Glória Caldeira Rêgo**, por ter me dado a vida, seu amor e seu apoio nesta difícil caminhada. Às minhas duas outras mães **Isabel Caldeira Rego** (tia Isabel) e **Maria Celeste Parente de Almeida** que me deram o seu amor e apoio; à minha madrinha tia **Roseli** que esteve sempre presente na minha infância; aos meus sogros **Maria Auxiliadora Farias de Matos e Jocermar Texeira (Cecé)** por terem me dado a sua filha (ainda que eles não quisessem muito!!!); ao meu tio **Sebastião Caldeira Rêgo** que sempre foi um pai amoroso e dedicado.

À minha noiva **Jorcemara Matos Cardoso** por seu apoio e amor, ainda que ela diga que eu dê mais atenção a física do que a ela, mas isso não é verdade !!!.

Aos meus irmãos **Fredson Charles Caldeira Rêgo, Luciana Caldeira Rêgo, Marcos Vinícios Caldeira Rêgo, Rafael Caldeira Rêgo e Igor Oliveira Rêgo**, pelos nossos momentos na infância. Aos meus amigos **Léo Cesar Parente de Almeida (Jhon)** e **Antônio Rosinan Damasceno (Tony)** pela nossa amizade que surgiu na infância e que dura até hoje.

Ao amigo **Janderson Pena Teixeira**, pela sua coragem por ter deixado Santarém, para irmos estudar em Parintins, ainda que nós tivéssemos pouco dinheiro (bem pouco mesmo !!!).

Aos meus amigos **Michael Pinto Sousa, Nete e João Vitor** por terem me acolhido em suas casas sem que me conhecessem direito.

Aos amigos da Casa do Estudante (CEU-AM): **Leandro da Costa Dutra (Caveirinha)**, **Manoel de Jesus Miranda (Gaúcho)**, **Chanderlei (Chandele)**, **Vanderlei (Mata-Mata)**, **João Rodrigo Leitão (Joãozinho)** e **Leonardo (Soldado)**, pelos

bons e maus momentos que passamos juntos na casa, pelo forte laço de amizade que nos une e pela aprovação da resolução que normatiza o acesso à CEU-AM.

Aos amigos que eu encontrei no departamento de física: **Dênis Mota, Andréia Baima, Márcio Gomes, Robson e Dilcelino**, pelas piadas que **Dênis** contava e fazia a graça da turma. Aos amigos **José Diego Quintiliano Meneses** e **Emanuel Bezerra Constabile** pelo sufoco que passamos em quântica e pelo grande laço de amizade que nasceu nesse período de graduação.

À Universidade Federal Do Amazonas (UFAM) por ter me dado casa e comida nestes anos de graduação. Aos professores do departamento de Física da UFAM, pelos conselhos e incentivos que muito contribuiu para a minha formação profissional, em particular ao professor **Antonio Carlos Rodrigues Bittencourt**, por acreditar que eu pudesse trilhar o meu próprio caminho no primeiro PIBIC.

E à todas as pessoas que de certa forma contribuíram para o sucesso de minha jornada.

Lista de Siglas

DFA- Análise da Flutuação Destendenciada

ML-DFA-Multifractal Generalizado DFA

ED-Equações Diferencias

Resumo

O expoente de Hurst é um parâmetro capaz de detectar correlações de longo alcance presentes em séries temporais. Neste trabalho, a partir de uma das três componentes das equações de Lorenz, que descrevem o fenômeno de convecção de um fluido entre duas placas paralelas a diferentes temperaturas, caracterizou-se os expoentes de Hurst generalizados (multifractalidade) dessa variável através da Análise Multifractal da Flutuação Destendenciada (MF-DFA). A partir dessa análise, mostramos que, quando o fluido está no regime laminar, o aumento da diferença de temperatura entre as placas provoca a diminuição da intensidade dos expoentes de Hurst, o que implica dizer que o sistema está perdendo memória. Em outras palavras, uma camada de fluido está perdendo o seu poder de influência sobre as camadas vizinhas e que quando o fluido passa para o regime turbulento, a série em estudo vai se tornando um monofractal.

Capítulo 1

Introdução

A determinação do movimento convectivo de um fluido é um problema clássico, um tanto complicado, que somente em 1916 teve uma explicação aceitável. A convecção é o mecanismo de transporte de calor no qual fluxos de matéria com temperaturas distintas viajam pelo sistema. Esse mecanismo é bastante presente no nosso cotidiano, pois ele é responsável pelas correntes oceânicas, pela circulação geral da atmosfera e outros fenômenos.

Foi devido ao estudo dos movimentos convectivos, que a teoria do caos teve suas bases lançadas na ciência, quando em 1959 Edward N. Lorenz ¹ escreveu um programa baseado inicialmente em doze equações que, de modo geral, simulava as principais componentes climáticas que influenciavam o tempo. Seu modelo seguiu um caminho que não se enquadrava como randômico, periódico ou convergente, mostrando um comportamento bastante complexo, embora fosse definido por poucas equações diferenciais. A dinâmica gerada pelo modelo mostrava uma peculiaridade nunca antes observada na ciência, tal que, dois pontos, localizados a uma distância desprezível, seguiam trajetórias bem distintas [1].

¹Edward Norton Lorenz (West Haven, 23 de Maio de 1917 — Cambridge, 16 de Abril de 2008) foi um meteorologista e matemático estadunidense. Seus trabalhos com os fundamentos matemáticos do sistema de equações da meteorologia nos laboratórios do MIT na década de 1960 foram os primeiros estudos do que na teoria do caos se denominou posteriormente por atrator estranho.

Lorenz descobriu que pequenas alterações em um conjunto de variáveis levavam a efeitos totalmente desproporcionais, mais tarde Lorentz chamou isso de efeito borboleta. Sistemas como o de Lorenz são chamados de caóticos determinísticos, pois, apesar de apresentarem um comportamento irregular e imprevisível, a sua dinâmica é governada por equações diferenciais bem definidas.

Uma das maneiras de caracterizar os sistemas que apresentam caos é a partir de sua escala fractal e/ou multifractal envolvida no processo. Uma metodologia, que vem sendo utilizada para este fim, é o método da Análise da Flutuação Destendenciada (DFA) que mede as propriedades de escala e detecta correlações de longo alcance. O DFA é, na realidade, um melhoramento na técnica desenvolvida por Harold Edwin Hurst² para calcular o expoente de Hurst, H , o qual se encontra no intervalo $[0, 1]$. Conforme os valores deste expoente somos capazes de caracterizar uma série temporal. Para $H = 0,5$ a série analisada não possui nenhuma correlação. Para $H > 0,5$ a série é dita persistente e $H < 0,5$ é anti-persistente. A metodologia DFA foi aplicada com bastante sucesso em áreas como: estrutura de nuvens, andadura humana, sequenciamento de DNA, dinâmica de batimentos cardíacos, séries financeira e outras ([2], [3],[4] e [5]). Porém, quando a série de dados apresenta a componente tendência $T(t)$, ou seja, a série em estudo tem uma direção de crescimento privilegiada, esta não pode ser normalizada. Sendo assim, o DFA não é uma boa representação da fractalidade do processo. Diante disto, em 2002, J.W. Kantelhardt e seus colaboradores [6] propõem a generalização do método DFA, chamado de Multifractal Generalizado DFA (MF-DFA), também conhecido como expoente de Hurst generalizado, o qual elimina o problema da tendência na série.

O objetivo principal deste trabalho é fazer uma caracterização da multifractalidade (expoente de Hurst generalizado) envolvida no movimento de convecção que ocorre em

²Harold Edwin Hurst (1880-1978) foi hidrólogo britânico que dedicou parte da sua vida estudando o fluxo de água do Rio Nilo e seus afluentes. Hurst se deparou com o problema de como construir um reservatório ideal, o qual nunca transbordaria ou secaria. Para resolver isto, estudou uma série de dados de mais de 800 anos de registros das cheias anuais do Nilo, desse estudo Hurst desenvolveu um novo método estatístico para analisar a entrada e saída de água do reservatório, chamado de Análise de Reescalonamento.

um dado fluido preso entre duas placas paralelas com temperaturas diferentes, sendo que a placa inferior possui uma temperatura maior que a placa superior. Tal sistema foi estudado por Lorenz e tem como característica o aparecimento de rolos de convecção a partir de uma dada diferença de temperatura entre as placas. Neste trabalho a nossa série de entrada será a componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz, que será apresentado no Capítulo 3. De posse desta caracterização, vamos dar a nossa interpretação física do que está ocorrendo.

O que nos motivou a usar o caracterizador MF-DFA na análise multifractal, foi devido a duas características que esta metodologia apresenta: a primeira é que a série em estudo pode ser não estacionária e a segunda é a sua grande aplicabilidade em diversas áreas da ciência. Esta caracterização multifractal pode ser uma grande ferramenta em casos em que seja difícil exibir um modelo baseado em Equações Diferenciais (ED), ou mesmo quando tenhamos êxito em exibir os fenômenos através de EDs, as soluções podem mascarar omitir aspectos importantes sobre o fenômeno.

No Capítulo 2 deste trabalho, fazemos uma abordagem conceitual sobre os tipos de escoamento dos fluidos, seguido por uma apresentação sobre o processo de convecção. No Capítulo 3, mostramos alguns conceitos sobre caos, iniciando com alguns aspectos históricos, seguido das definições de espaço de fase, fractais e comportamento caótico. Neste Capítulo efetuamos ainda, o cálculo para a obtenção das componentes de $Z(t)$ do sistema de Lorenz. No Capítulo 4 temos um breve apanhado sobre séries temporais seguido da apresentação do método MF-DFA ou expoente de Hurst generalizado. No Capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos com a análise multifractal da componente $Z(t)$. No Capítulo 6 versa a nossa interpretação física sobre a multifractalidade do fenômeno de convecção, juntamente com a conclusão do objetivo a que se propõe este trabalho.

Capítulo 2

Convecção de Fluidos

A convecção está presente em vários fenômenos, tais como: formação de furacões, correntes oceânicas, sistemas de refrigeração, uma panela com água aquecendo e até mesmo uma xícara com chocolate quente. Tais exemplos podem ser vistos na Figura 2.1. Vamos apresentar neste Capítulo, de forma conceitual, alguns aspectos inerentes aos escoamentos, em particular, aos tipos de escoamento e convecção de fluidos. Ao movimento de convecção será dada uma atenção maior, pois é uma parte importante para o entendimento físico dos nossos resultados.

2.1 Escoamentos de Fluidos

Os escoamentos podem ser classificados quanto à compressibilidade e quanto ao grau de mistura macroscópica. Quando a densidade do fluido varia denominamos de escoamento compressível, caso a densidade não varie significativamente, então é dito incompressível.

O grau de mistura de um fluido em escoamento depende do seu regime de escoamento, que pode ser laminar, turbulento ou de transição. No regime laminar, o fluido se move em camadas sem que haja mistura e variação da velocidade das mesmas, isto é, as linhas de fluxo são paralelas ao escoamento fazendo com que o fluido escoe sem que ocorra

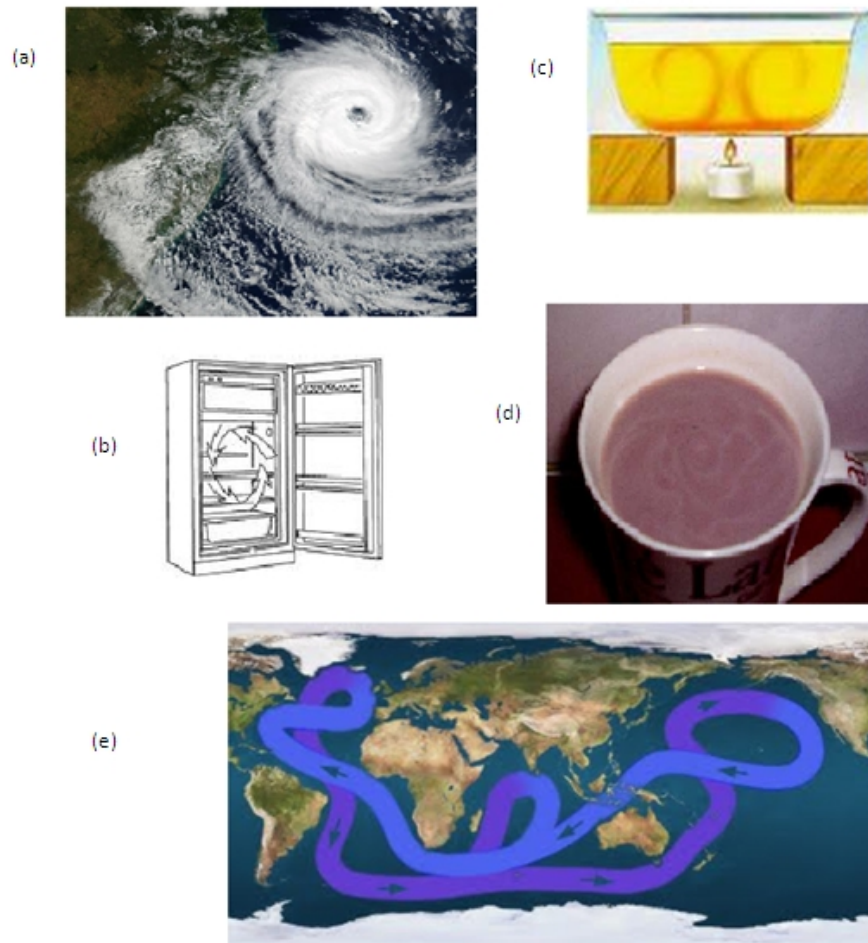


Figura 2.1: Furação Catarina, em 24 de Março de 2004 (Brasil-SC), (b) Sistema de refrigeração de uma geladeira (c) Panela com água sendo aquecida, (d) Xícara com chocolate quente, (e) Mapa mostrando as principais correntes oceânicas.

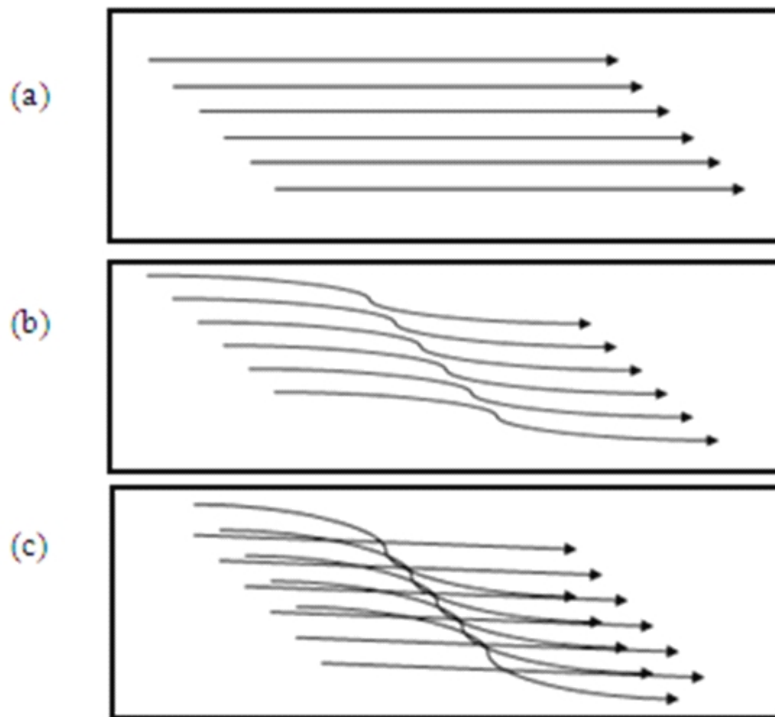


Figura 2.2: As setas indicam como são as camadas de fluidos dos tipos de escoamento: (a) regime laminar; (b) transiente; (c) turbulento.

mistura.

Na transição entre os regimes laminar e turbulento, percebe-se que as linhas de fluxo se tornam onduladas, indicando que começa haver mistura entre uma camada e outra de fluido, isto é, as velocidades das partículas do fluido começam a variar.

Na fase do regime turbulento, percebe-se uma mistura entre as camadas de fluxo, ou seja, surge o comportamento aperiódico das partículas e as velocidades destas variam consideravelmente uma em relação a outra [7]. Na Figura 2.2 observamos os três tipos de escoamentos tratados aqui.

2.2 Convecção de Fluidos

A convecção é o mecanismo de transporte de calor no qual fluxos de matéria com temperaturas distintas passeiam pelo sistema. Tal fenômeno é responsável pelas correntes de água dos rios, oceanos e o movimento da atmosfera. Teoricamente é um problema difícil de se caracterizar. Uma teoria bem sucedida foi proposta em 1916 por J.W.Strutt, conhecido como Lord Rayleigh¹, numa tentativa de explicar as observações experimentais feitas por H. Bénard em 1900 e 1901.

Uma das maneiras de observar movimentos convectivos é aquecer um fluido pela sua parte inferior. Considere o caso em que o fluido esteja confinado entre duas placas paralelas, separadas por uma distância h , onde a placa de baixo é mantida a uma temperatura T_2 e a placa superior a uma temperatura T_1 , de tal modo que $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$.

Quando a diferença de temperatura ΔT entre as placas é pequena, o calor da placa de baixo é transportado por condução para a de cima. O fluido em contato com a placa inferior está a uma temperatura maior que o fluido em contato com a placa fria. Desta forma, temos camadas de fluidos com uma densidade maior em cima de camadas com densidade menor, o que configura um equilíbrio instável, pois temos algo mais pesado em cima de algo mais leve.

Experimentalmente, nota-se que, quando a diferença de temperatura ΔT ultrapassa um certo valor crítico, o fluido começa a girar, formando rolos, como os mostrados na Figura 2.3. Sendo assim, o calor no fluido passa a ser transportado também por convecção. As dimensões dos rolos são comparáveis a distâncias entre as placas, esse movimento surge na tentativa de se estabelecer uma configuração de equilíbrio na temperatura e na densidade do fluido.

A priori, poderíamos pensar que a situação de equilíbrio instável possa ocorrer para qualquer valor de ΔT , pois qualquer ΔT define um gradiente de densidade [8]. Contudo,

¹John William Strutt (Maldon, Essex, 12 de Novembro de 1842 — Witham, Essex, 30 de Junho de 1919) é também conhecido como o 3º Barão de Rayleigh de Terling Place, Witham, condado de Essex. Foi um matemático e físico inglês, conhecido por suas pesquisas em fenômenos ondulatórios

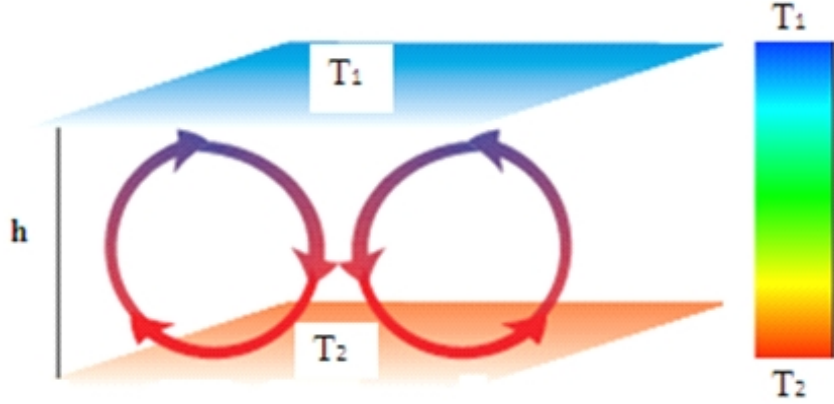


Figura 2.3: Rolos de convecção, mostrando o perfil de temperatura para $T_2 > T_1$, sem levar em conta os efeitos de contornos.

isso não ocorre devido a duas propriedades dos fluidos, que são: a viscosidade μ e a condutividade térmica κ , onde μ gera uma resistência à formação dos rolos convectivos e κ tende a eliminar o gradiente de temperatura no fluido. Um grande valor de κ significa que o calor é rapidamente trocado no fluido, dificultando o surgimento de rolos convectivos.

A principal contribuição de Lord Rayleigh foi mostrar que os rolos de convecção surgem a partir de um dado ΔT crítico que vamos denominar de ΔT_c . O número de Rayleigh R é definido como sendo proporcional a temperatura de acordo com a equação abaixo ([8] e [9]):

$$R = \frac{g\beta h^3}{\mu\kappa} \Delta T \quad (2.1)$$

onde o R crítico, R_c , é dado por:

$$R_c = \frac{\pi^4(1 + a^2)^3}{a^2} \quad (2.2)$$

sendo g a aceleração da gravidade, β o coeficiente de dilatação volumétrica do fluido, e a a razão entre a distância das placas e a largura média dos rolos. A partir destas equações,

temos que os movimentos convectivos ocorrem para $R > R_c$, isto é,

$$\Delta T > R_c \frac{\mu \kappa}{g \beta h^3} \equiv \Delta T_c. \quad (2.3)$$

Parte do movimento da atmosfera é causado por um mecanismo semelhante ao estudado por Rayleigh e Bénard, no qual o ar é aquecido perto da superfície terrestre e se esfria nas alturas. Foi estudando esse mecanismo que Lorenz , em 1961, descobre a natureza do caos a partir de um simples modelo de convecção baseado em um sistema de poucas equações. É essa natureza caótica, juntamente com o sistema de Lorentz que vamos apresentar no Capítulo a seguir.

Capítulo 3

Sistema de Lorenz

Certos sistemas hidrodinâmicos exibem comportamento estacionário, outros até oscilam de maneira periódica. Tais sistemas podem ser descritos de maneira razoável com modelos tipos filtros lineares, mas, de modo geral, a natureza não é linear, então que fazer? Uma proposta é partir para uma caracterização que use como ferramenta a física-matemática do caos. Neste Capítulo apresentaremos alguns aspectos importantes sobre a teoria do caos, de maneira bem conceitual.

Ainda neste Capítulo mostraremos como se deu o surgimento das equações do sistema de Lorenz, explicando o significado físico das componentes que compõem esse sistema. Uma vez que, o nosso objetivo primeiro é a caracterização dos expoentes de Hurst generalizado (multifractalidade) da componente $Z(t)$ do sistema de Lorentz, esta componente é obtida utilizando o ambiente MatLab 7.0.

3.1 Aspectos Históricos

Possivelmente a origem da dinâmica não linear está relacionada ao trabalho do matemático francês Henri Poincaré¹ sobre a Mecânica Celestial na virada do século XX. A mecânica

¹Jules Henri Poincaré (29 de abril de 1854 - Paris, 17 de julho de 1912) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francesa. Ingressou na Escola Politécnica em 1873, continuou seus estudos na Escola de Minas sob a tutela de Charles Hermite, e se doutorou em matemática em 1879. Foi nomeado professor

clássica é, em geral, não linear em relação à dependência da posição e velocidades das partículas, por exemplo, vibrações com forças restauradoras não lineares. As equações de Navier-Stokes são não lineares, o que torna a mecânica dos fluidos difícil de se manipular. Porém, durante quase quatro séculos, seguindo os passos de Galileu, Newton e outros físicos se concentraram em respostas previsíveis, efetivamente lineares de sistemas clássicos, que, de modo geral, têm características não lineares.

Possivelmente, Poincaré foi o primeiro a entender a possibilidade de comportamento completamente irregular, ou caótico de soluções de equações diferenciais que possuem uma grande sensibilidade às condições iniciais. Essa propriedade do caos foi redescoberta quando em 1959 Edward N. Lorenz simulando algumas componentes atmosféricas, tais como: temperatura, pressão, velocidade e direção do vento, redescobriu a natureza do caos, partindo de um modelo bidimensional proposto por Rayleigh em 1909, que descreve as correntes de convecção entre duas placas paralelas (ver Figura 2.3). Inicialmente, o seu modelo era baseado em doze equações diferenciais não lineares.

O simulador que ele usava era um arcaico computador Royal Mecbee que imprimia apenas três casas decimais, mas que guardava seis casas decimais em sua memória. No inverno de 1961, Lorenz quis reexaminar uma série de dados e, para ser mais rápido, iniciou a simulação inserindo os dados de apenas três casas decimais. Com o decorrer do tempo, Lorenz percebeu que a série que havia sido reanalisada começava a divergir da série original a partir de determinado instante. Esse pequeno erro foi suficiente para mudar completamente a evolução do sistema. Mais tarde ele chamou isso de efeito borboleta ou sensibilidade às condições iniciais.

Lorenz queria divulgar os seus resultados, mas não estava satisfeito com o seu sistema de doze equações. Então, em 1961, ele visita B.Saltzman² (veja [9]), que trabalhava com um sistema de sete equações para o qual existia uma solução que parecia estar eterna-

de física matemática na Sorbonne (1881), posto que manteve até sua morte.

²Barry Saltzman (1931-, New York). Graduou-se na escola de Ciência de New York e tirou o seu Ph D no MIT. É um geólogo que muito contribuiu para a meteorologia, tanto que em 1998 recebeu a mais alta honraria da Sociedade Americana de Meteorologia a medalha Carl-Gustaf Rossby.

mente no regime transiente. Do sistema de sete equações de Saltzman, Lorenz conseguiu simplificar para um sistema de três equações. No dia seguinte, ele resolveu o sistema simplificado com apenas três variáveis e obteve, também, uma solução aperiódica para os mesmos parâmetros usados por Saltzman. Tal sistema de equações ficou conhecido como sistema de Lorenz.

3.2 Lei de Escala

As leis ou comportamentos de escala surgem em vários fenômenos naturais, entre eles crescimento biológico, comportamento populacional, propriedades de estado sólido e outros fenômenos relacionados à física, biologia, ciências humanas e outras áreas da ciências. Frequentemente, as propriedades de escala se manifestam em sistemas fractais. Tais sistemas evoluem longe do equilíbrio, sendo estes altamente dissipativos, os quais são descritos conforme a equação abaixo:

$$A = \alpha B^\tau, \quad (3.1)$$

onde A e B são duas variáveis que podem ser as medidas de um dado ente físico, econômico ou qualquer outro ente que se pretenda estudar; α e τ são constante de calibração, sendo α normalmente denominada de constante de normalização [16].

3.3 Comportamento Caótico

De maneira geral, não há uma definição de caos, assim como não há uma para energia, o que temos é características sobre o caos. Segundo Ilya Prigogine, 2002 [10], o caos é sempre a consequência de fatores de instabilidade, ou seja, é o comportamento aperiódico de um sistema determinístico, que exhibe sensibilidade às condições iniciais.

A expressão comportamento aperiódico refere-se às trajetórias que não convergem para pontos fixos, órbitas periódicas ou quase periódicas quando $t \rightarrow \infty$.

O termo determinístico é caracterizado pelo fato que o sistema não possui a componente aleatória em seu bojo, ou seja, o comportamento irregular é devido apenas a não linearidade do sistema.

A sensibilidade às condições iniciais significa que trajetórias inicialmente próximas afastam-se de acordo com taxas exponenciais.

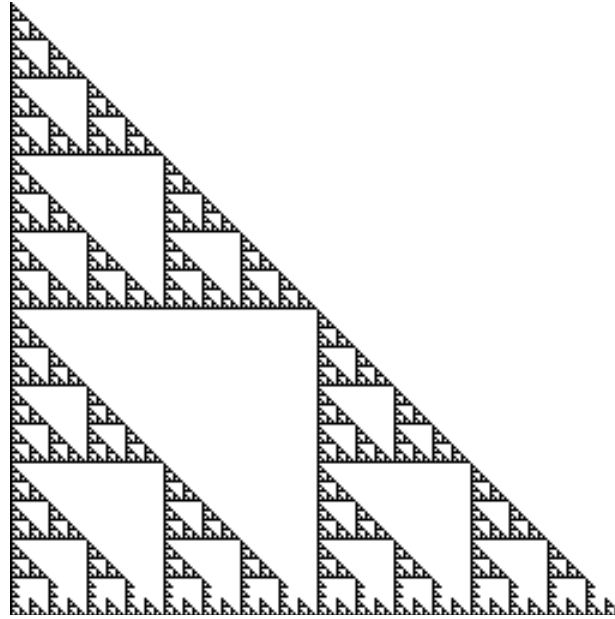


Figura 3.1: Triângulo de Sierpinski, com dimensão $d = 1,584$.

3.4 Espaço de Fase e Fractais

Outro conceito importante para o entendimento do trabalho é o de espaço de fase, que é tido como o conjunto das variáveis dinâmicas que regem a evolução do sistema.

Os fractais surgem em sistemas dissipativos caóticos, onde muitas vezes aparecem como objetos geométricos de formas intrincadas, porque suas dimensões são números não inteiros. Suas partes menores são parecidas com as partes maiores, ou seja, um fractal é um conjunto que é similar a si mesmo, como o mostrado na Figura 3.1.

A compreensão das idéias sobre fractais (monofractal) serem relevantes para o entendimento da análise multifractal, que será abordada mais a frente, neste trabalho.

3.5 Equações de Lorenz

Seja o sistema dinâmico proposto por Lorenz, composto de duas placas paralelas preenchidas por um fluido, as quais são mantidas em temperaturas diferentes, sendo a temperatura da placa inferior maior que a da superior, isto é, $T_1 > T_2$ como mostrado no esquema da Figura 2.3. Lorenz obteve um conjunto de três equações diferenciais, descritas a seguir, que representam um simples modelo de convecção, as quais são baseadas na mecânica dos fluidos e foram umas das precursoras a apresentar o caos:

$$\frac{dX}{dt} = -\sigma X + \sigma Y, \quad (3.2 \text{ a})$$

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ, \quad (3.2 \text{ b})$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ, \quad (3.2 \text{ c})$$

onde t é um parâmetro adimensional proporcional ao tempo, $\sigma \equiv \mu/\kappa$ é denominado de número de Prandtl, em homenagem a L. Prandtl (1875-1953). Os parâmetros r e b são definidos como: $r \equiv R/R_c$ e $b \equiv 4/(1 + a^2)$, lembrando que R_c e R foram definidos no Capítulo 2 nas Eqs (2.1) e (2.2). Das Eqs (2.1) e (2.2) notamos que o parâmetro r é proporcional à diferença de temperatura ΔT e b , evidentemente, depende das dimensões do sistema [12].

A variável $X(t)$ é proporcional à intensidade da convecção, ou seja, para $X = 0$ não existe movimento convectivo, isto é, o calor é transportado apenas por condução. A variável $Y(t)$ é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendentes e descendentes do fluido. $Z(t)$ é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear, isto é, para $Z = 0$ a temperatura decresce linearmente, conforme se sobe pelo eixo z , da seguinte maneira $T = T_1 + \Delta T(1 - z/h)$.

O espaço de fase de um sistema é sempre associado às variáveis responsáveis que regem a sua dinâmica. Para o sistema mostrado nas Eqs.(3.2), temos que o seu espaço de fase é definido pelas coordenadas $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$. Se fixarmos os valores de $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, temos o atrator mostrado na Figura 3.2.

Um conjunto de pontos de atração com dimensões não inteira é denominado de atrator estranho [11].

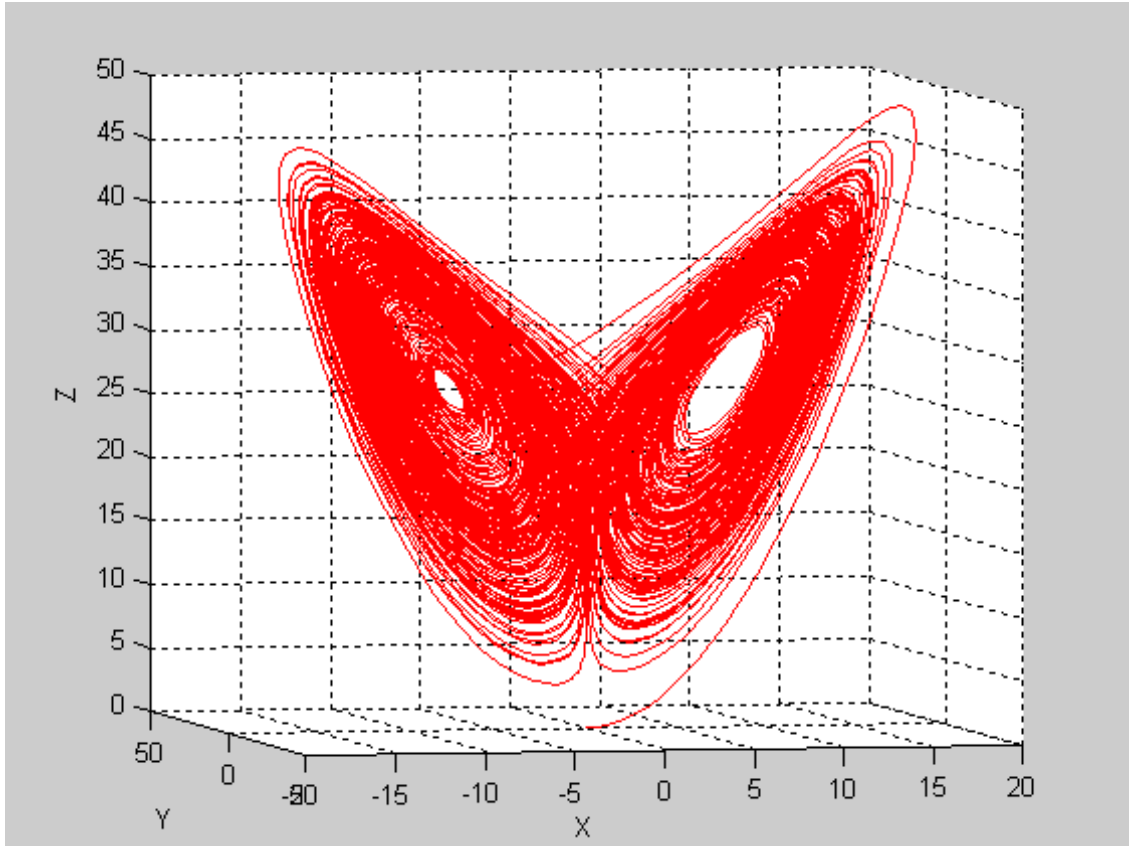


Figura 3.2: Atrator de Lorenz para $X(0) = 0$, $Y(0) = 1$, $Z(0) = 0$ com os parâmetros: $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$.

Sistemas que apresentam comportamento estável, periódico ou caótico possuem atratores característicos. Um sistema estável é representado por um ponto fixo no espaço de fase; enquanto um sistema periódico é caracterizado por uma órbita fechada. No caso de sistemas caóticos, e em particular o sistema de Lorenz, as órbitas do atrator nunca

passam pela mesma trajetória duas vezes. Porém, elas estão confinadas em uma região do espaço de fase, as quais se alternam sobre um dos dois pontos fixos instáveis [13]. Os atratores caóticos são também conhecidos como atratores estranhos, os quais exibem comportamento com propriedades de escala.

3.6 Cálculo da Componente $Z(t)$

Esta seção é destinada à obtenção dos valores da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz. As séries obtidas serão caracterizadas através dos expoentes de Hurst generalizados (multifractalidade), descrito no próximo Capítulo.

O primeiro passo para a obtenção das séries $Z(t)$ é resolver o sistema de Lorenz, Eqs.(3.2). As condições iniciais para este sistema serão: $(X(0) = 0; Y(0) = 1; Z(0) = 0)$, conforme sugere Lorenz [12]. Com esses dados, as equações de Lorenz podem ser resolvidas com um método de integração. Para a presente situação escolhemos o método de Range-Kutta de quarta ordem [14]. Então, usando os parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e quatro valores diferentes de r : ($r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$), obtemos quatro séries de $Z(t)$, vistas na Figura 3.3. No trabalho de Lorenz [12], o valor de r a partir do qual surge os rolos de convecção, isto é, o regime de escoamento turbulento é $r = 470/19 = 24,74$. Observe que os dois primeiros valores r estão no regime de escoamento laminar e os outros dois no regime turbulento. Todos os cálculos inerentes a $Z(t)$ foram gerados usando o ambiente MatLab 7.0.

Notamos na Figura 3.3 que para os valores r_1 e r_2 , as séries rapidamente vão para o equilíbrio, sendo que r_1 entra primeiro que r_2 . No caso de r_3 e r_4 as séries parecem não convergir como as séries com parâmetros r_1 e r_2 .

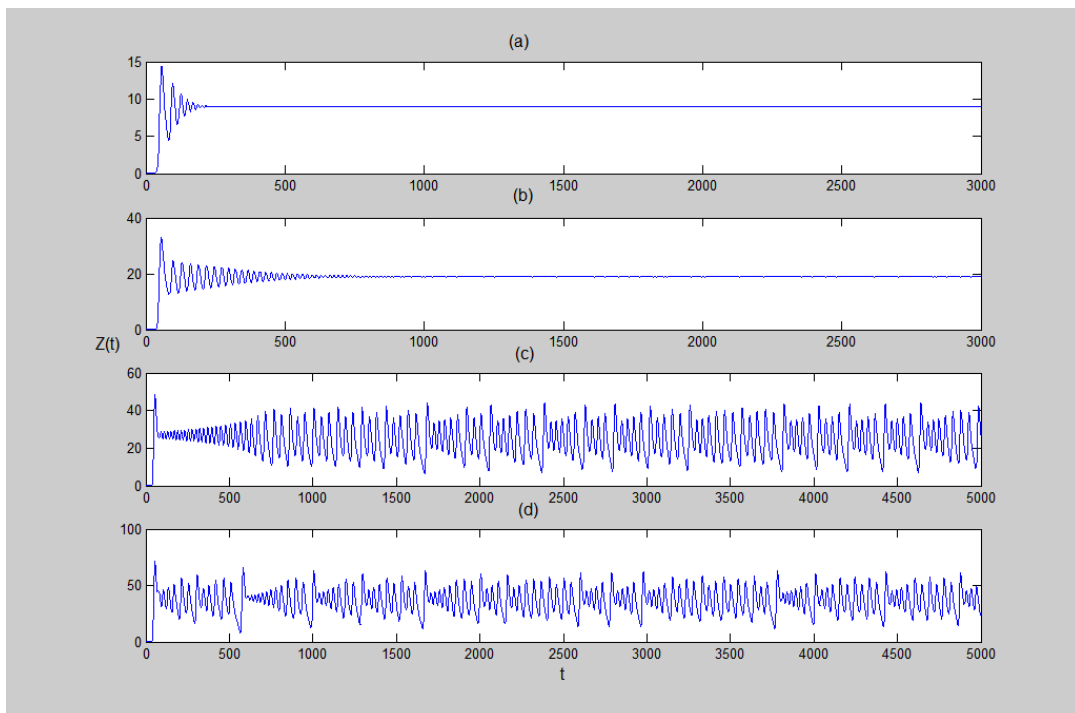


Figura 3.3: Valores da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz para diferentes valores de r : (a) $r_1 = 10$, (b) $r_2 = 20$, (c) $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$.

Capítulo 4

Multifractalidade de Séries Temporais

Um dos principais objetivos da análise de séries temporais, consiste em estimar eventos futuros. E para que possamos compreender os mecanismos desta análise é que apresentamos neste Capítulo de maneira bem introdutória alguns aspectos relacionado à séries temporais. Apresentamos ainda o método da Análise Multifractal da Flutuação Destendenciada generalizada (MF-DFA), que é o tópico mais importante tratado aqui, uma vez que este será o método que utilizaremos para caracterizar a multifractalidade das séries $Z(t)$ vistas na Figura 3.3.

4.1 Noções Sobre Séries Temporais

Uma série temporal $Z(t)$ é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo, que podem ser contínuas ou discretas. Um dos principais interesses da análise de séries temporais consiste em estimar eventos futuros a partir de séries existentes.

De modo geral, uma série temporal pode ser escrita como a soma de três componentes não observáveis,

$$Z(t) = T(t) + S(t) + a(t), \quad (4.1)$$

onde $T(t)$ e $S(t)$ são, respectivamente, as componentes tendência e sazonalidade, enquanto que $a(t)$ é a componente aleatória de média zero e variância constante σ_a^2 . Quando $a(t)$ é descorrelacionada, dizemos que esta caracteriza uma série ruído branco comumente denotada por $a(t) = (0, \sigma_a^2)$. A componente tendência tem a função de dar a informação sobre como e para onde a série está evoluindo, isto é, se a série cresce ou decresce com o passar do tempo. Já a componente sazonal, é a repetição de um dado fenômeno em determinado período, como exemplo temos as cheias e secas que ocorrem todos os anos na Amazônia [15]. O nosso interesse neste trabalho será apenas na componente tendência. Na Figura 4.1 mostramos uma série e suas respectivas componentes.

Uma maneira de se estimar a tendência $T(t)$ da série em estudo é o ajuste polinomial dos dados existente. Será com essa estimativa que iremos trabalhar, abaixo descrevemos o método do ajuste polinomial.

Suponha que a componente tendência possa ser escrita como uma série de potência, isto é,

$$T(t) = \beta_o + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m,$$

onde m é grau do polinômio. Para estimar os parâmetros β_m utilizaremos o método dos mínimos quadrados [14], que consiste na minimização da equação a seguir em relação a cada parâmetro β_m

$$f(\beta_o, \dots, \beta_m) = \sum_{t=1}^N (Z(t) - \beta_o - \beta_1 t - \dots - \beta_m t^m)^2.$$

4.2 Método MF-DFA

Muitas séries temporais não são monofractais (fractais), isto é, não apresentam apenas um simples expoente de escala que caracterize o seu comportamento. Em muitos casos, existem vários expoentes separando vários regimes da série em questão. Isso ocorre sem-

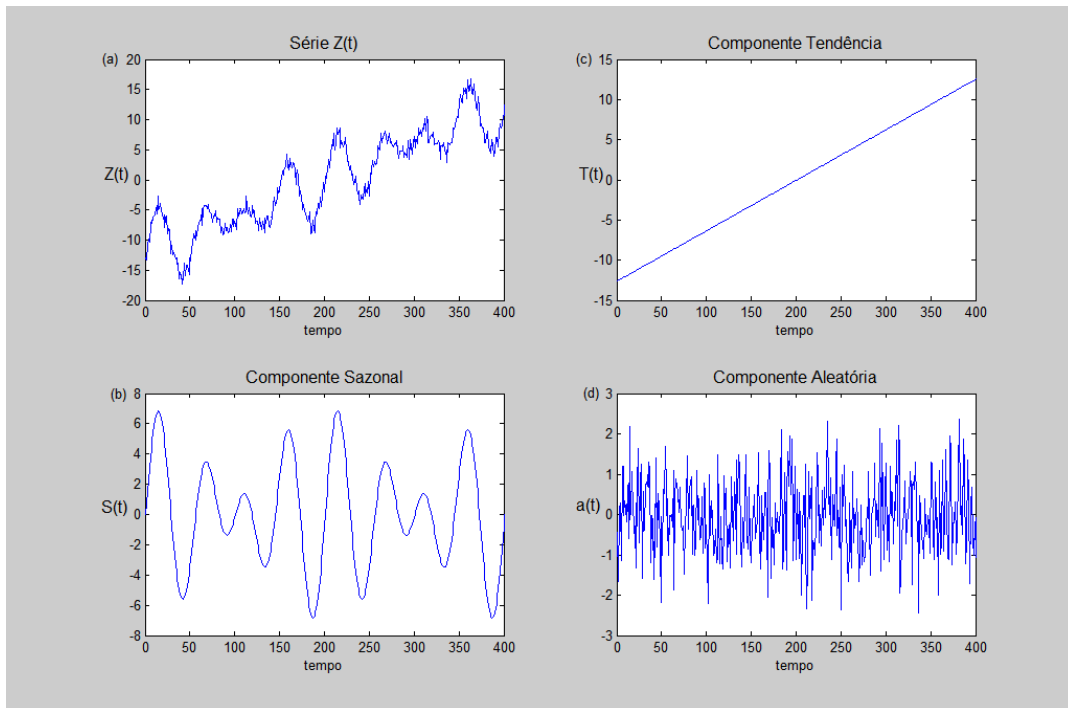


Figura 4.1: Série $Z(t)$ em (a) e suas componentes: Sazonal $S(t)$ em (b), Tendência $T(t)$ em (c) e aleatória $a(t)$ em (d).

pre que o comportamento de escala da primeira metade da série difere da outra segunda metade. Essa necessidade de vários expoentes de escalas para explicar o comportamento da série, sempre, está associada com correlações de longo alcance presentes na série temporal em estudo. Quando há a necessidade de vários expoentes de escala para explicar o comportamento da série, devemos aplicar a análise multifractal para a devida caracterização da série.

O termo multifractalidade surge com a necessidade de explicar o comportamento de escala de séries temporais que apresentem correlações, sendo uma das principais causas de correlações em séries temporais a presença da componente tendência na série em estudo, $T(t)$. Uma das metodologias que vem sendo usada para caracterizar séries temporais que apresentem ou não a componente tendência $T(t)$ é o método MF-DFA.

Antes de mostrar o procedimento que descreve o método MF-DFA, salientamos que o DFA (Peng et al, 1994 [2]) convencional consiste apenas nos três primeiros passos da metodologia MF-DFA. Em linhas gerais, o MF-DFA mede a correlação de longo e curto alcance de séries temporais não estacionárias [6]. O objetivo aqui é entender o processo multifractal de $Z(k)$, onde todos os elementos de $Z(k)$ são reais para N finito, sendo N o número de observações. A seguir apresentamos os passos que compõem a metodologia MF-DFA, que na essência é uma generalização dos expoentes de Hurst [6].

O procedimento que descreve o método MF-DFA é dividido em cinco partes, os quais são descritos abaixo. Para a descrição completa da MF-DFA, vamos supor que $Z(k)$ seja uma sequência de tamanho N , com poucos elementos nulos $Z(k) = 0$, onde tais elementos são descartados, disto temos que todo elemento $Z(k) \neq 0, \forall k$, onde k admite apenas valores inteiros.

(1°) Passo: Determine a sequência dada pela equação logo abaixo.

$$X(i) \equiv \sum_{k=1}^i [Z(k) - \langle Z(k) \rangle], \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

O procedimento realizado pela Eq.(4.2) é comumente chamado de integração da série

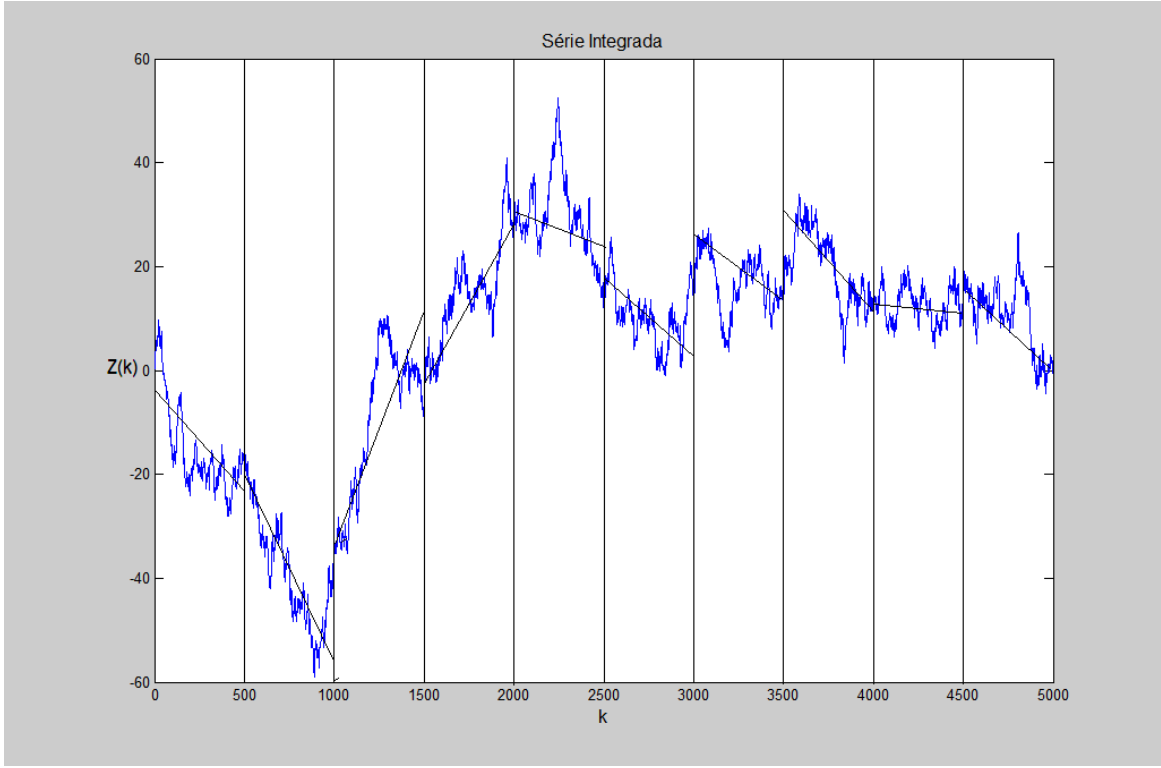


Figura 4.2: Série integrada de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$. As retas são ajustes polinomiais de primeira ordem ($m = 1$), para a escala de $s = 500$.

$Z(k)$, na Figura 4.2 vemos uma série integrada para uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$, obtida do Matlab 7.0 usando a função $\text{randn}(N,1)$.

(2°) Passo: Divide-se a sequência $X(i)$ em $N_s \equiv (N/s)$; $N_s \in \mathbb{N}^*$, subsequência de igual tamanho s não sobrepostos. Geralmente, o tamanho da sequência $X(i)$ não é um múltiplo da escala s , então uma pequena parte da sequência $X(i)$ deve restar. A fim de não descartarmos estas observações, o mesmo procedimento deve ser feito, só que desta vez iniciando a divisão pelo final da sequência de $X(i)$. Disto, nós teremos $2N_s$ subsequências de tamanho s .

(3°) Passo: Por um ajuste polinomial, calcule a tendência local para cada uma das $2N_s$

subsequências. Com isso, determine a variância dada pelas equações seguintes:

$$F^2(\nu, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{X[(\nu - 1)s + i] - x_\nu(i)\}^2 \quad (4.3)$$

para cada intervalo ν , onde $\nu = 1, \dots, N_s$ e

$$F^2(\nu, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{X[N - (\nu - N_s)s + i] - x_\nu(i)\}^2 \quad (4.4)$$

para $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$. Denominamos $x_\nu(i)$ o ajuste polinomial no segmento ν , que pode ser linear, quadrático ou de ordem mais alta. Tal procedimento é comumente denominado de *DFA1*, *DFA2*, ..., *DFAm*, com m sendo a ordem do ajuste polinomial. Como o destendenciamento de uma série é feita pela subtração do ajuste polinomial das sequências $X(i)$, então diferentes ordens na DFA diferem na capacidade de eliminar a tendência da sequência $X(i)$. Na *(MF)DFAm* (m –ésima ordem de *(MF) – DFA*) a m –ésima tendência em $X(i)$ é eliminada (ou, equivalentemente, $(m-1)$ –ésima ordem na sequência $Z(k)$) [6]. Na Figura 4.2, a título de ilustração, mostramos o ajuste polinomial feito na sequência integrada com $m = 1$ na escala $s = 500$.

(4°) Passo: Tire a média sobre todas as subsequências para obter a q –ésima ordem da função de flutuação generalizada $F_q(s)$ definida como:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \equiv \left\{ \left\langle [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\rangle \right\}^{1/q} \quad (4.5)$$

Neste trabalho, vamos adotar $q \in \mathbb{R} - \{0\}$. O nosso interesse é entender como a função de flutuação generalizada depende da escala de tempo s para diferentes valores de q . Para entendermos isso, devemos repetir os passos 2 até 4 para diferentes escalas de tempo s . Geralmente, ocorre que $F_q(s)$ aumenta conforme s . É evidente que $F_q(s)$ depende da ordem do *DFAm*. Por construção, disto $F_q(s)$ é definido apenas para $s \geq m + 2$.

(5°) **Passo:** Determine o comportamento de escala para a função de flutuação generalizada, analisando o gráfico log-log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q . Se a sequência $Z(k)$ apresenta correlação de longo alcance, então $F_q(s)$ aumenta conforme aumenta os valores de s , na forma de uma lei de potência, isto é:

$$F_q(s) \approx s^{H(q)}, \quad (4.6)$$

onde $H(q)$ é denominado de expoente de Hurst generalizado por depender de q . Em $q = 2$ recuperamos o DFA padrão, o qual caracteriza o expoente de Hurst H , que varia entre: $0 \leq H \leq 1$ [6]. Para uma série de dados descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$ ($a(t) = (0, 1)$ série ruído branco), H assume o valor 0,5. Quando $H > 0,5$, dizemos que temos um evento persistente, para $H < 0,5$ temos um evento anti-persistente [2].

Para escalas muito grandes $s > N/4$, $F_q(s)$ torna-se estatisticamente não confiável, devido o número de subsequência N_s , mediadas no Passo 4 tornar-se pequena. Portanto, escalas $s > N/4$ são excluídas.

No próximo Capítulo, caracterizaremos a série $Z(t)$ do sistema de Lorenz, através do expoente de Hurst generalizado (multifractalidade) descrito acima.

Capítulo 5

Resultados

O principal objetivo deste Capítulo será fazer a caracterização multifractal (expoentes de Hurst generalizado) da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz, onde a variável t irá fazer o papel do índice k na caracterização multifractal, descrita no Capítulo 4. A escolha desta componente se deve ao fato de ela estar relacionada à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear, isto é, ela descreve a não linearidade na diferença de temperatura ao longo dos rolos de convecção [13].

5.1 Modelo

O sistema em estudo é composto de duas placas paralelas preenchidas por um fluido, as quais são mantidas em temperaturas diferentes, sendo a temperatura da placa inferior maior que a da superior, isto é, $T_1 > T_2$ como mostrado no esquema da Figura 2.3. Para obter as soluções numéricas das equações de convecção, Eqs.(3.2), escolhemos valores numéricos para as constantes σ e a^2 , que segundo Saltzman, 1962, adotou $\sigma = 10$, $a^2 = 1/2$, de modo que $b = 8/3$, conforme a definição dada no Capítulo 2. O critério do número de Rayleigh para que ocorra a instabilidade da convecção, isto é, o aparecimento dos rolos convectivos, ocorre quando o parâmetro $r = R/R_c = 24,74$ [9].

As séries analisadas serão obtidas da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz, vista na

Figura 3.3, calculadas no Capítulo 3. Cada série possui um r diferente, sendo as escolhas desses valores de r puramente arbitrárias. No entanto, $r_1 = 10$ e $r_2 = 20$ estão na região do regime laminar e/ou transição (periódico) e $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$ encontram-se na região do regime turbulento.

Para alcançarmos o objetivo proposto neste trabalho temos que calcular os espectros multifractais para as componentes de $Z(t)$, ou seja, temos que aplicar as equações (4.2) até (4.6) para as séries da Figura 3.3. Para isto, desenvolvemos um programa que denominamos de *MF DFA1*, em linguagem MatLab 7.0, que segue o conjunto de equações que compõem o MF-DFA exposto no Capítulo 4. No referido programa escolhemos o valor de escala s , sendo múltiplo de seis, isto é, $s = 6n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Para a ordem do ajuste polinomial escolhemos $m = 3$. Tais parâmetros foram mantidos fixos em todos os casos que calculamos os espectros multifractais, evidentemente o valor de N é obtido diretamente do tamanho das séries em estudo.

5.2 Resultados

Para testarmos a confiabilidade do programa que desenvolvemos, submetemos a este, uma série de dados descorrelacionados, que, a priori deve nos retornar um expoente de Hurst com valor $H(q = 2) = 0,5$ e, portanto, ter uma dependência linear no espectro multifractal conforme observa Kantelhardt, et al 2002 [6] e Peng, et al 1995 [2]. Satis fazendo tais condições, então podemos assumir que este esteja de acordo com o que propõe o método MF-DFA.

A série de teste foi obtida de uma distribuição gaussiana com média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$, obtida do Matlab 7.0 usando a função *randn(N,1)*, a qual é mostrada na Figura 5.1.

Substituímos os valores da variável descorrelacionada no programa *MF DFA1*, obtivemos como resposta o gráfico da Figura 5.2, no qual observamos que $H(q = 2) \simeq 0,5$ e $H(q)$ tem uma dependência aproximadamente linear, de acordo com aquilo que prevê a

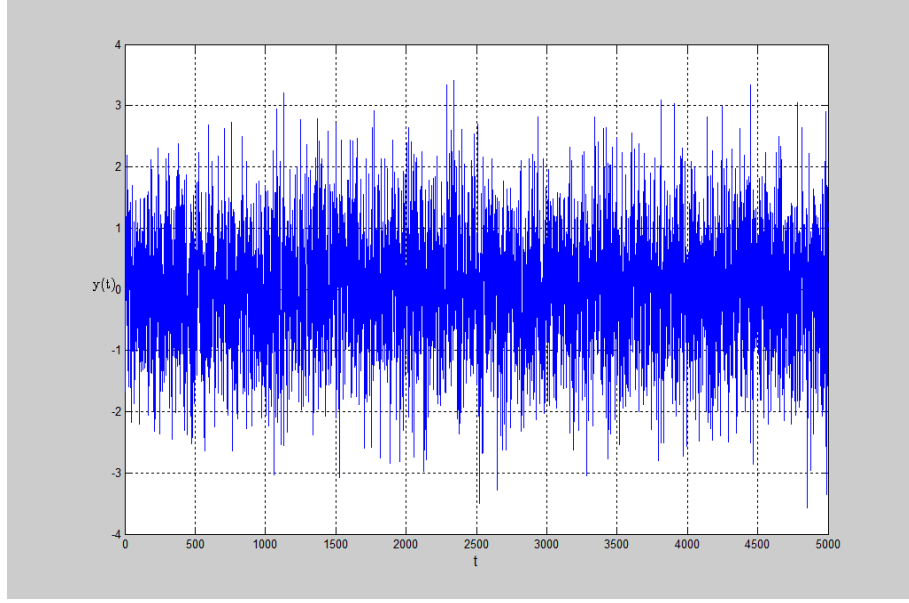


Figura 5.1: Sequência de dados $Z(t)$ de uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e variância $\sigma_a^2 = 1$.

teoria. Disto, temos que o nosso programa segue fielmente o método da caracterização multifractal.

O espectro multifractal das séries $Z(t)$ pode ser visto na Figura 5.3. Na Tabela V.1, mostramos ainda, os 25 primeiros valores do espectro multifractal calculado.

Como o parâmetro $r = R/R_c$ é proporcional a variação de temperatura, ΔT , (ver Eq.(2.1)) e sendo os valores de r dados por: $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$ temos que $\Delta T_1 < \Delta T_2 < \Delta T_3 < \Delta T_4$. Da Figura 5.3 observamos que os valores de $H(q)$ para r_1 e r_2 diminuem conforme a variação da temperatura aumenta, lembrando que r_1 e r_2 estão no regime laminar e/ou transiente; no caso dos espectros de r_3 e r_4 , observamos um comportamento linear dos valores de $H(q)$, os quais pertencem ao regime turbulento, isto é, na região onde ocorre o aparecimento dos rolos de convecção.

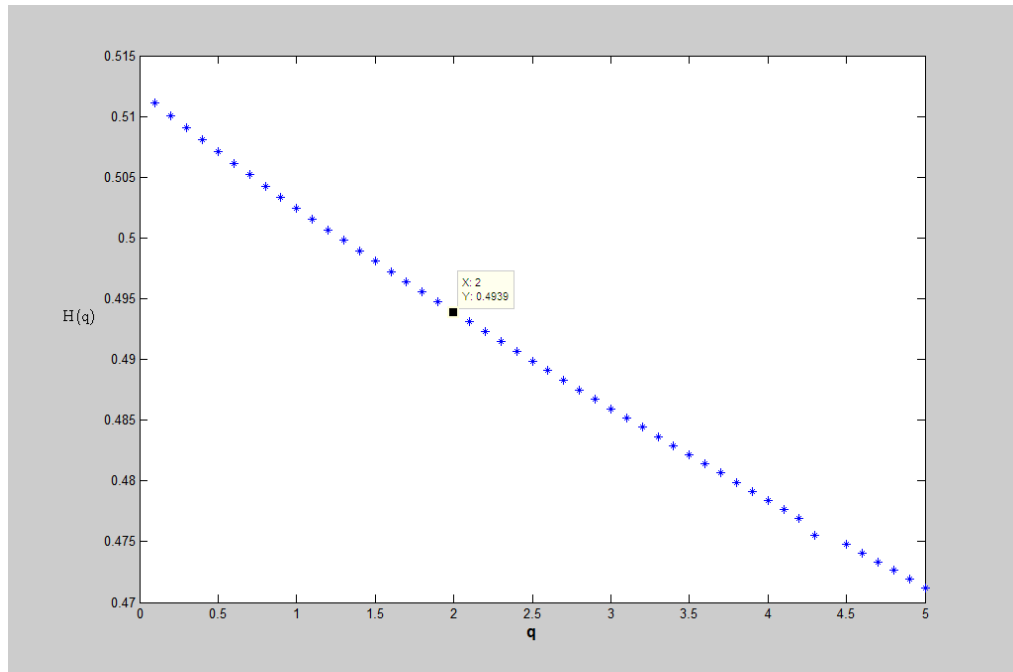


Figura 5.2: Espectro multifractal para uma variável aleatória descorrelacionada de média zero e $\sigma_1^2 = 1$. Em evidência, é mostrado o valor de $y = H(q)$ para $x = q = 2$.

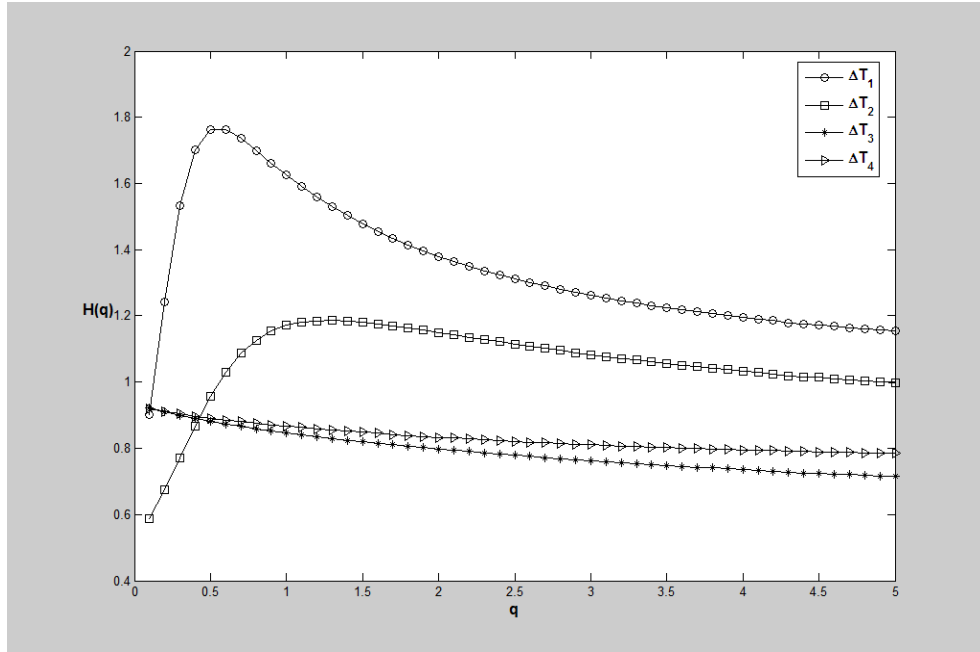


Figura 5.3: Espectros multifractais das componentes $Z(t)$ do sistema de Lorenz para: $r_1 = 10$, $r_2 = 20$, $r_3 = 28$ e $r_4 = 40$, nas respectivas temperaturas ΔT_1 , ΔT_2 , ΔT_3 e ΔT_4 .

q	$H(q)_1$	$H(q)_2$	$H(q)_3$	$H(q)_4$
0,1	0,9031	0,58772	0,92138	0,91912
0,2	1,2434	0,67351	0,91006	0,91101
0,3	1,5330	0,77019	0,89990	0,90382
0,4	1,7005	0,86791	0,89060	0,8973
0,5	1,7618	0,95684	0,88200	0,89131
0,6	1,7618	1,0305	0,87401	0,88576
0,7	1,7624	1,0867	0,86654	0,8806
0,8	1,7360	1,1269	0,85954	0,87577
0,9	1,7001	1,15400	0,85294	0,87122
1,0	1,6622	1,17100	0,84671	0,86693
1,1	1,6256	1,18060	0,84081	0,86287
1,2	1,5913	1,18500	0,83519	0,8590
1,3	1,5594	1,1857	0,82984	0,85531
1,4	1,5301	1,1838	0,82472	0,85178
1,5	1,5031	1,1801	0,81981	0,8484
1,6	1,4782	1,1752	0,81509	0,84516
1,7	1,4553	1,1694	0,81055	0,84204
1,8	1,4341	1,1631	0,80616	0,83903
1,9	1,4146	1,1564	0,80192	0,83613
2,0	1,3965	1,1495	0,79782	0,83334
2,1	1,3642	1,1425	0,79384	0,83065
2,2	1,3497	1,1354	0,78998	0,82805
2,3	1,3362	1,1284	0,78623	0,82555
2,4	1,3235	1,1215	0,78259	0,82313
2,5	1,3117	1,1147	0,77905	0,82081

Table V.1: Primeiros 25 valores dos espectros multifractais de $H(q)$ para os respectivos valores de r da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz

Capítulo 6

Conclusão

A caracterização multifractal da componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz Eq.(3.2) é de fundamental importância para o campo da dinâmica dos fluidos, pois nos permite analisar os mecanismos geradores de convecção de um sistema de duas placas paralelas com temperaturas diferentes, sem apelar diretamente para as equações da mecânica dos fluidos, é como se tivéssemos uma visão global do fenômeno ao invés de local, que é o que propõe a solução diferencial. Apesar de termos usados os dados de um sistema de equações diferenciais, tudo que se passa como se essa entrada fosse apenas dados medidos. Em linhas gerais o método MF-DFA caracterizador da multifractalidade, apresentou resultados satisfatório no que diz respeito a dinâmica do sistema de duas placas, pois ficou evidente a diferença entre os regimes laminar e turbulento observado na Figura 5.3.

Como a multifractalidade (valores de $H(q)$) mede a correlação existente na série em estudo $Z(t)$, pela análise da Figura 5.3, observamos que no regime laminar, o fluido perde sua correlação conforme o valor de r aumenta, isto é, conforme aumenta a diferença de temperatura ΔT entre as placas, as camadas de fluido vão se descorrelacionando. Na situação do regime turbulento, vemos que o espectro multifractal (correlação de $Z(t)$) adquire um comportamento linear, o que sugere que a componente $Z(t)$ do sistema de Lorenz está se tornando um monofractal, estrutura esta, idêntica a de um gás livre. Acreditamos que fisicamente esse descorrelacionamento é devido a formação das correntes

de convecção, quanto maior for a diferença de temperatura entre as placas, mais rápido uma camada de fluido deixa de influenciar a sua primeira vizinha superior.

Sistemas do tipo placas paralelas podem ser usados para modelar a atmosfera terrestre, as correntes oceânicas e o fluxo de água de grandes rios como os Rios Negro, Solimões, Tapajóis e Amazonas.

Uma vez que a atmosfera terrestre, as correntes dos oceanos e dos grandes rios podem ser modeladas com um conjunto de sistemas de placas paralelas, a caracterização multifractal deste sistema torna-se muito relevante para a mecânica dos fluidos. Podemos, portanto, inferirmos que o sistema de placas é de grande importância para a mecânica dos fluidos, assim como os osciladores harmônicos são na área do estado sólido.

A nossa pretensão é poder, em um futuro próximo, aprimorar este trabalho no intuito de aplicar o que foi feito aqui para sistemas reais como os citados acima.

Referências

- [1] Gleick, J. *Caos A Criação de Uma Nova Ciência*. Rio de Janeiro Campus, 1991.
- [2] C.-K. Peng, S. Havlin, H.E. Stanley, A.L. Goldberger. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos* 5 (1995) 82.
- [3] S.M. Ossadnik, S.B. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, R.N. Mantegna, C.-K. Peng, M. Simons, H.E. Stanley, *Biophys. J.* 67 (1994) 64.
- [4] J.M. HausdorC, S.L. Mitchell, R. Firtion, C.-K. Peng, M.E. Cudkowicz, J.Y. Wei, A.L. Goldberger, *J. Appl. Physiol.* 82 (1997) 262.
- [5] K. Ivanova, M. Ausloos, E.E. Clothiaux, T.P. Ackerman, *Europhys. Lett.* 52 (2000) 40.
- [6] Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bundec, Shlomo Havlin, Armin Bunde, H. Eugene Stanley. Multifractal detrended Fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A* 316 (2002) 87-114.
- [7] Fox. W. R, Mcdolnald T. A. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Rio de Janeiro. LTC, 2001.
- [8] Monteiro, Luiz Henrique Alves. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo. Livraria da Física, 2002.

- [9] Saltzman, Barry. Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I. Journal of the Atmospheric Sciences. (1962) 329-341.
- [10] Prigogine. I. As Leis do Caos. São Paulo: Unesp, 2002.
- [11] Arfken. B. G, Weber H. J. Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física. Rio de Janeiro. Elsevier, 2007.
- [12] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of The Atmospheric Sciences. (1963) 130-141.
- [13] Campanharo, A.S.L.O, Macau E.E.N, Ramos.F.M. Detectando a Presença de Caos em Séries Temporais. São José dos Campos. Lac.
- [14] Campos, Filho Frederico Ferreira, Algoritmos Numéricos. 2 ed.- Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- [15] Morettin, P. A.; Toloí, C. M. Análise de Séries Temporais. 2 ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2006.
- [16] A.L.A. Penna, F.A. Oliveira. Leis de escala e a dinâmica do crescimento em estruturas biológicas. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n.3, (2008) 3301.