TEORIA DAS ESTRUTURAS II

Aula 01

Bacharelado em Engenharia Civil - 6º Período

Prof. Celso José Roberto Soares Júnior

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia
Campus
Porto Velho Calama

ASSUNTOS DE HOJE:

- Apresentação da disciplina
  - Ementa
  - Referências bibliográficas
  - Planejamento da disciplina
  - Avaliação de aprendizagem
- Deflexões de vigas – Método dos momentos das áreas
  - Vigas em balanço (engastada)
  - Viga simétricas

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

- **Objetivo geral**
- Compreender as estruturas hiperestáticas, por meio da determinação dos deslocamentos e esforços presente nos sistemas estruturais.
- **Objetivo específico**
- Entender o método de deslocamentos e aplicá-lo;
- Entender o método dos esforços e processo de Cross e aplicá-los
- Determinar as linhas de influências em estruturas hiperestáticas e aplicá-las
- **Ementa da disciplina**
- Determinação de estruturas hiperestáticas através do métodos: dos deslocamentos, dos esforços e processo de cross;
- Formulação matricial da estrutura; e
- Estudo da linha de influência das estruturas hiperestáticas.

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

- **Referência bibliográfica**

- UANG, Chia-ming; LEET, K. M. GILBERT, A. M: Fundamentos da Análise Estrutural. 3a ed. Rio de Janeiro: MCGRAW-HILL. 2009. 816p.
- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R., 1994 – Mecânica Vetorial para Engenheiros - Estática, Ed. Makron Books, SP;
- MARTHA, Luiz Fernando. Métodos básicos da análise de estruturas. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio. Departamento de Engenharia Civil. Rio de Janeiro, RJ, 2000.

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

- **Avaliação de aprendizagem**
- Durante o semestre ocorrerão 4 avaliações individuais (N1, N2 e N3), cada uma com o valor de 20 pontos.
- 40 pontos restantes serão distribuídos em trabalhos (T).
- A média final será:
- $\mathrm{Nf} = \mathrm{N1} + \mathrm{N2} + \mathrm{N3} + \mathrm{T} = 100$
- Para aprovação a nota final deverá ser igual ou superior a 60 pontos.
- Em casos de alunos com nota final (Nf) acima de 57 a nota será arredondada para 60.

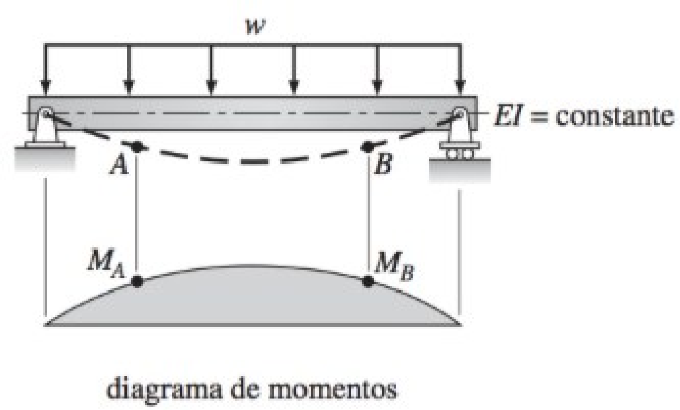
APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

- **Atendimento ao discente**
- Dia de atendimento: Quarta-feira
- Horário de Atendimento: 16h as 18h
- Local: Laboratório de Instalações Hidrossanitárias (Bloco C – ao lado do laboratório de desenho técnico)

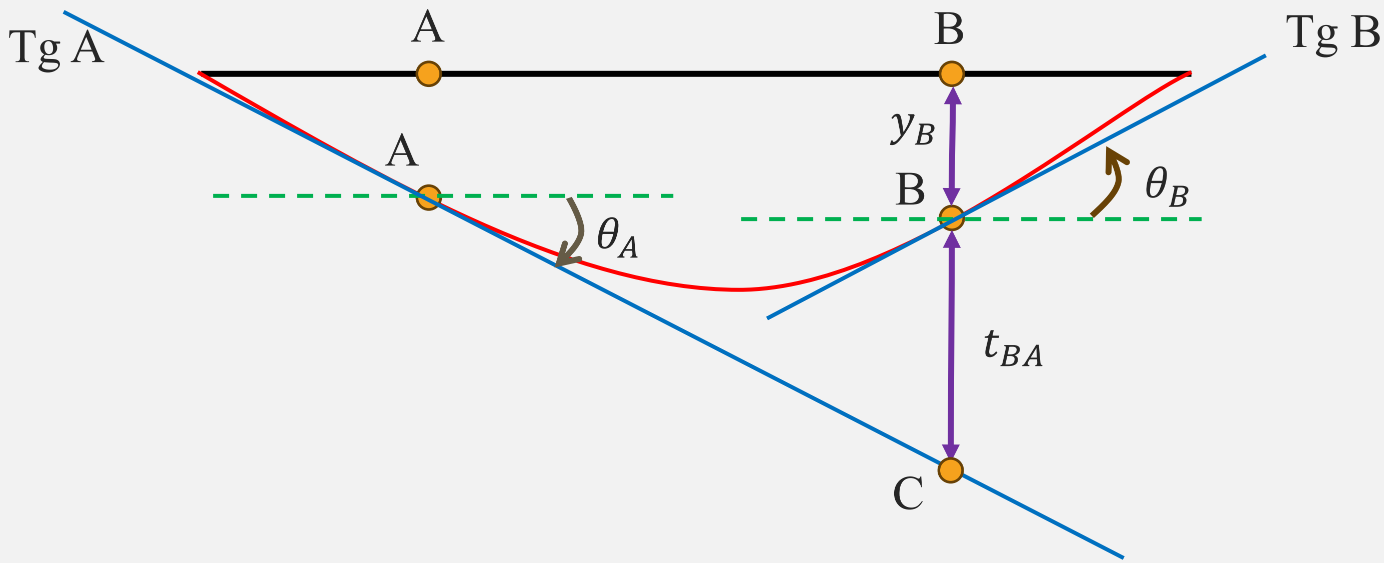
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Neste método é estabelecido um procedimento que utiliza a área dos diagramas de momento, em que na verdade o diagrama é M/EI, para avaliar a inclinação ou a deflexão em pontos selecionados ao longo do eixo de uma viga.
- Esse método, utiliza dois teoremas:
- Teorema para calcular uma mudança na inclinação entre dois pontos na curva elástica.
- Teorema para calcular a distância vertical (conhecida como desvio tangencial) entre um ponto na curva elástica e uma linha tangente a essa curva em um segundo ponto.
- Exemplo a ser estudado:

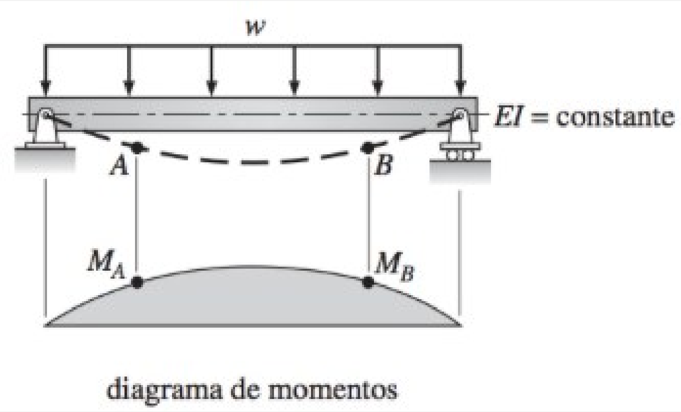


DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS



- Considerando a inclinação nos pontos A e B (θ_A e θ_B), com o eixo horizontal, traçados na curva elástica. Relembrando os sinais: θ_A é negativo e θ_B é positivo.
- A distância vertical entre o ponto B e o ponto C (ponto desenhado na tangente à curva elástica em a) é denominado desvio tangencial no ponto B, na imagem está representado por t_{BA}.
- Observe que o desvio tangencial no ponto B não é a deflexão do ponto B, sendo a deflexão é representada na figura por y_B.

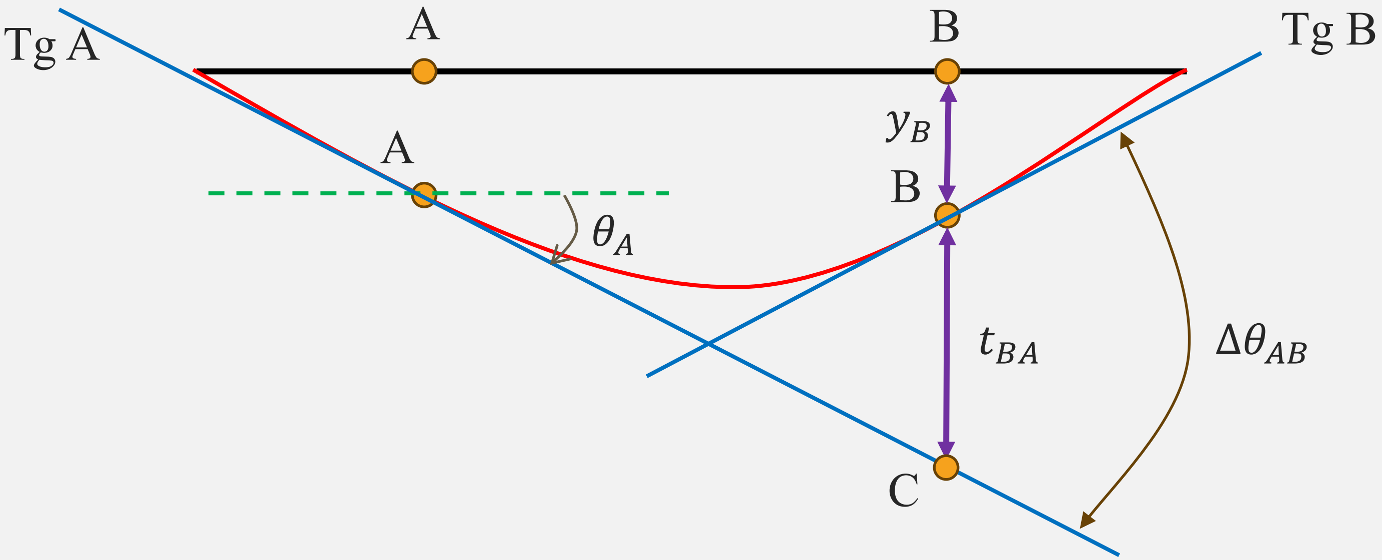
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS



- Considerando a viga integralmente do mesmo material e da mesma seção transversal, pode-se realizar a divisão do Momento/EI, produzindo um diagrama M/EI.
- Caso a seção e o material sejam constantes, a divisão M/EI produzirá um diagrama com mesmo aspecto que o diagrama de momento fletor.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

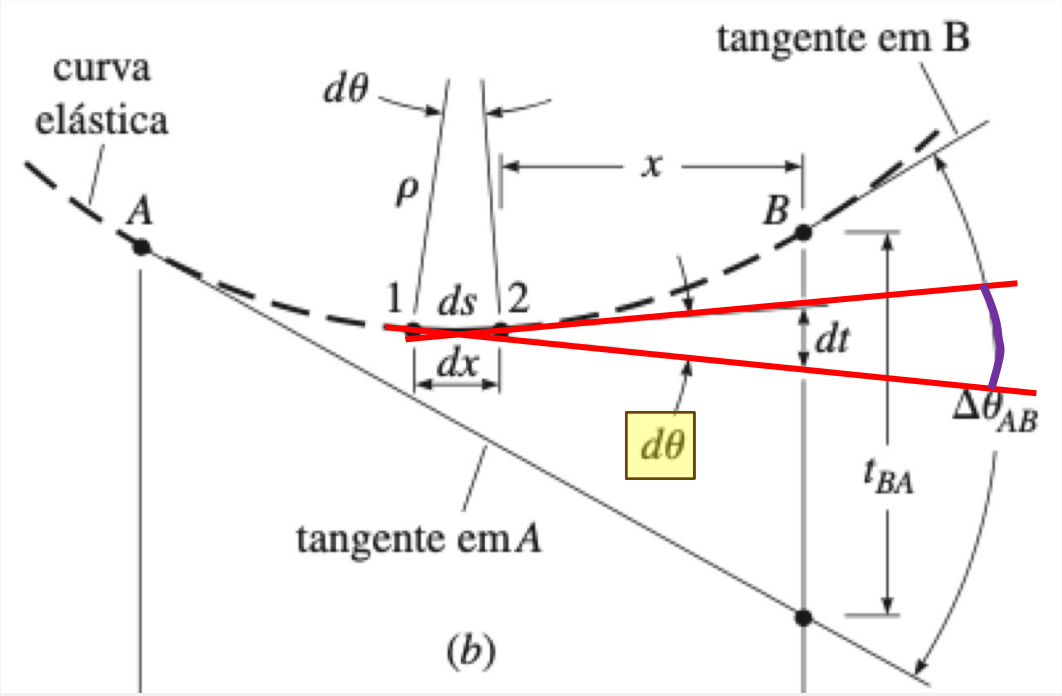
- Observe as tangentes dos pontos A e B.



- O ângulo total entre as duas tangentes é apresentado como $\Delta\theta_{AB}$.

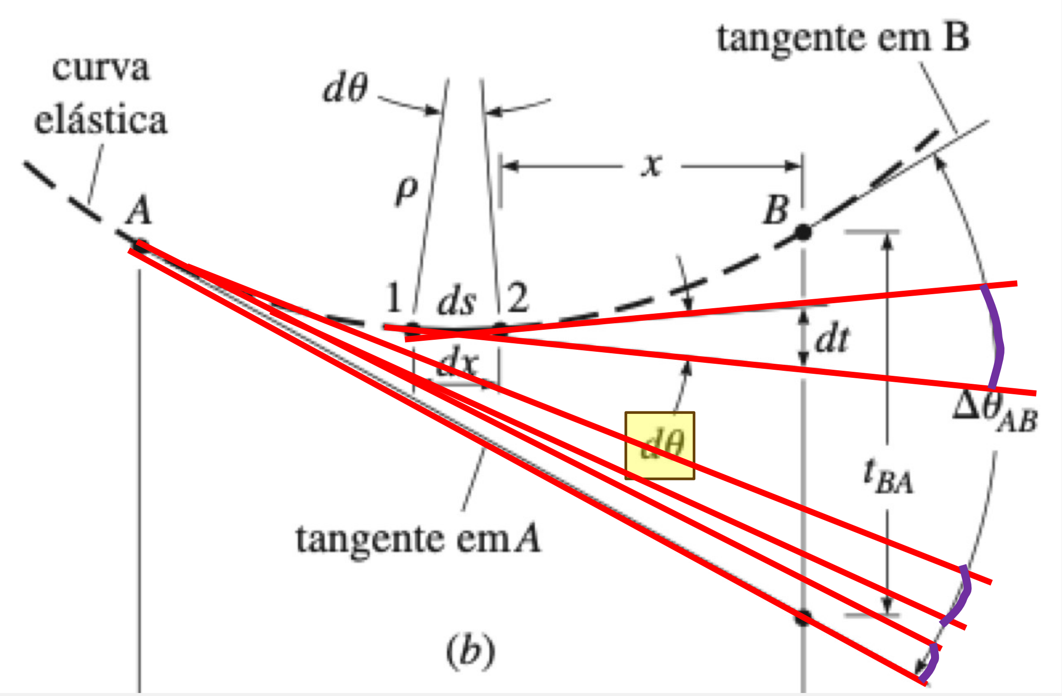
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Considerando um incremento da mudança de ângulo dθ que acontece ao longo do comprimento ds do segmento infinitesimal situado a uma distância x do ponto B (1 – 2)
  - Do último conteúdo, tem-se:
    - $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$
  - E que:
    - $\dfrac{M}{EI} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$
    - Logo $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{M}{EI}$
  - Isolando o $d\theta$, tem-se:
    - $d\theta = \dfrac{M}{EI} \,.\, \mathrm{dx}$



DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Isolando o $d\theta$, tem-se:
  - $d\theta = \frac{M}{EI}\,.\,\mathrm{dx}$



- Para determinar a mudança de ângulo total ΔθAB é necessário realizar a soma dos incrementos de dθ de todos os segmentos de comprimento ds entre os pontos A e B por integração:

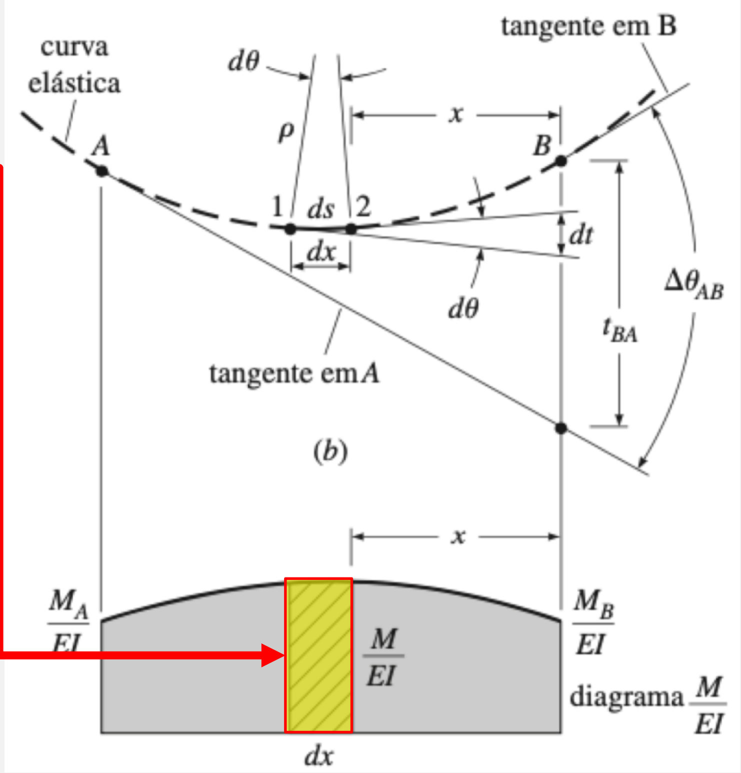
$$\Delta\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}dx \qquad \Delta\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI}dx$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Observando a fórmula apresentada.

$$\Delta\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

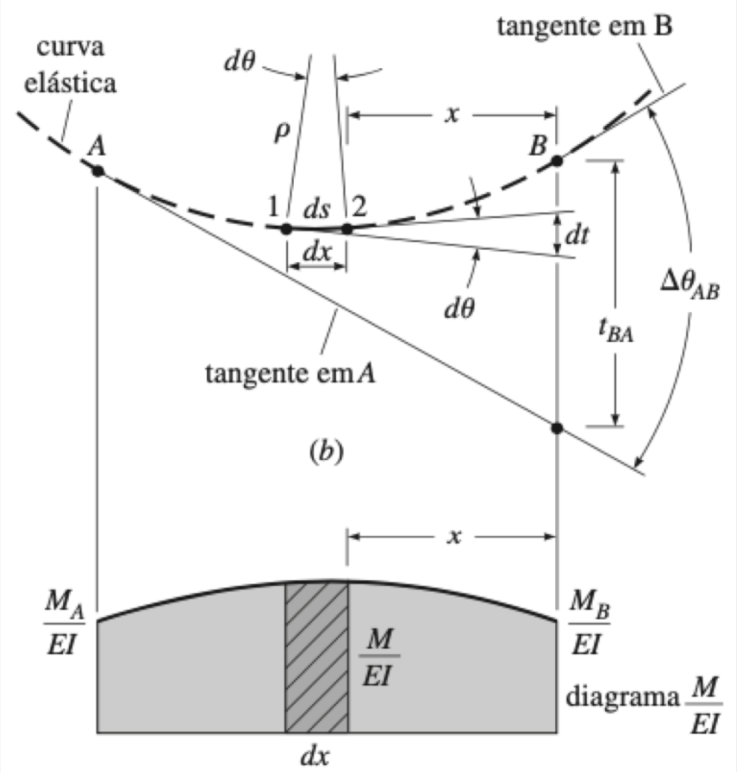
- A quantidade M.dx/EI representa uma área infinitesimal de altura M/EI e comprimento dx (área hachurada).
- Pode-se interpretar a integral mostrada acima representa a área sobre o diagrama M/EI entre os pontos A e B.
- Constituindo assim o princípio dos momentos das áreas, podendo ser apresentado assim:
- **“A mudança na inclinação entre quaisquer dois pontos em uma curva elástica continua e suave é igual à área sob o diagrama M/EI entre esses pontos"**



$\Delta\theta_{AB}$ = Área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e B.

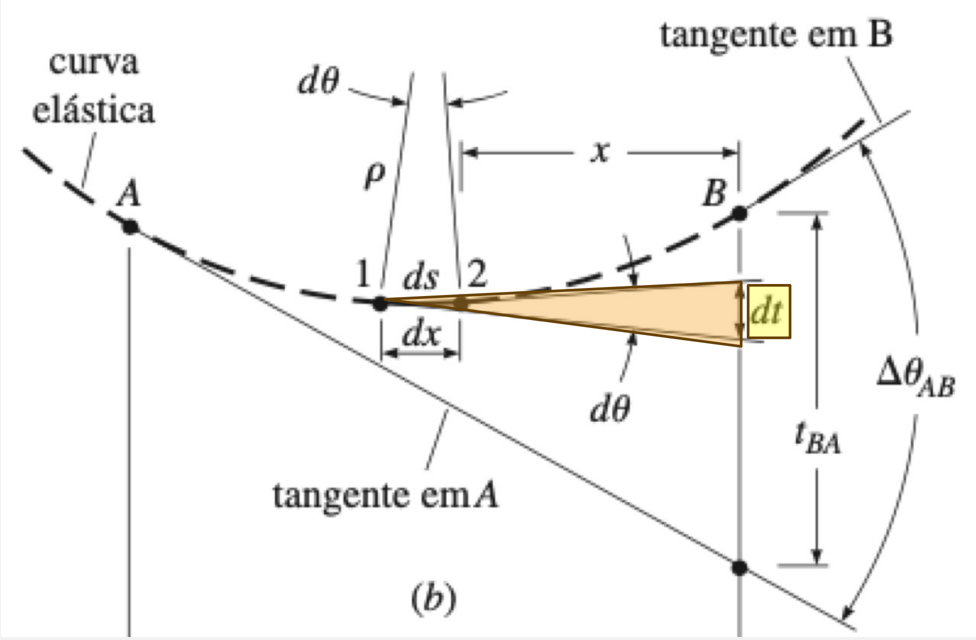
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Esse é o primeiro teorema e nesse caso somente se aplica quando a curva elástica entre os dois pontos é contínua e suave.
- Caso apareça uma articulação entre os dois pontos, a área sob o diagrama M/EI não considerará a diferença que possa existir na inclinação em um outro lado da articulação.
- Desta forma, devemos determinar as inclinação em uma articulação trabalhando com a curva elástica em um lado ou o outro lado.



DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Para determinar o segundo Teorema citado anteriormente, o qual permite avaliar um desvio tangencial, necessitamos somar os incrementos infinitesimais do comprimento dt, que constitui o desvio tangencial total t_{BA}.
- A grandeza de um incremento dt típico colaborou para o desvio tangencial t_{BA} causado pela curvatura de um segmento característico ds entre os pontos 1 e 2 na curva elástica.
- Podendo ser enunciado em termos do ângulo entre as linhas tangentes às extremidades do segmento e da distância x entre o segmento e o ponto B, como:

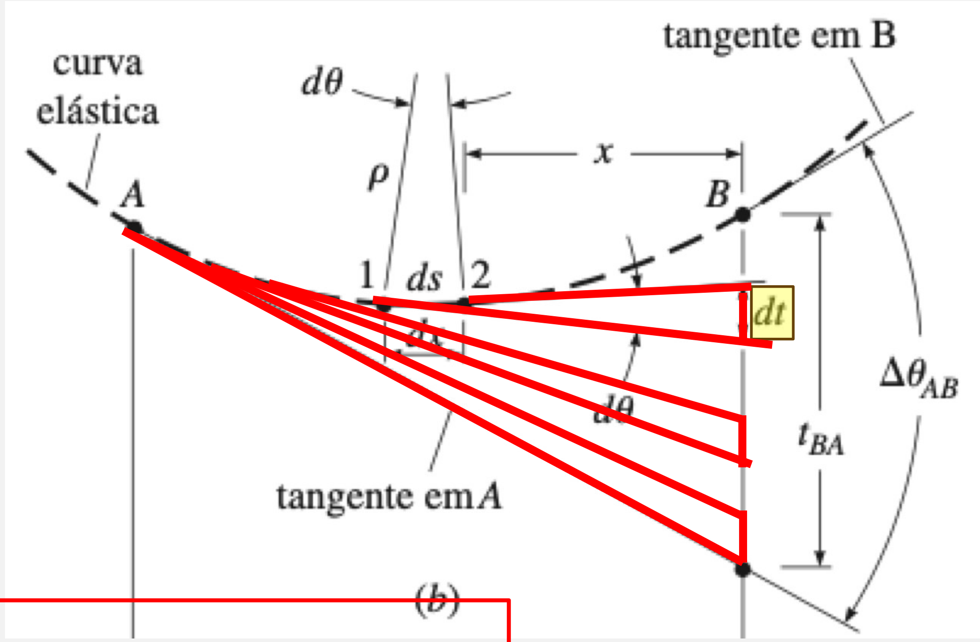


- $dt = d\theta . x$
- Sabe-se que:
- $d\theta = \frac{M}{EI} . dx$
- Logo:
- $dt = \frac{M}{EI} . dx . x$

INSTITUTO FEDERAL Rondônia | Campus Porto Velho Calama

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- $dt = d\theta . x$
- Sabe-se que:
- $d\theta = \frac{M}{EI} . dx$
- Logo:
- $dt = \frac{M}{EI} . dx . x$



- Somando todos os incrementos de dt (integrando) entre os pontos A e B, tem-se t_{BA} =

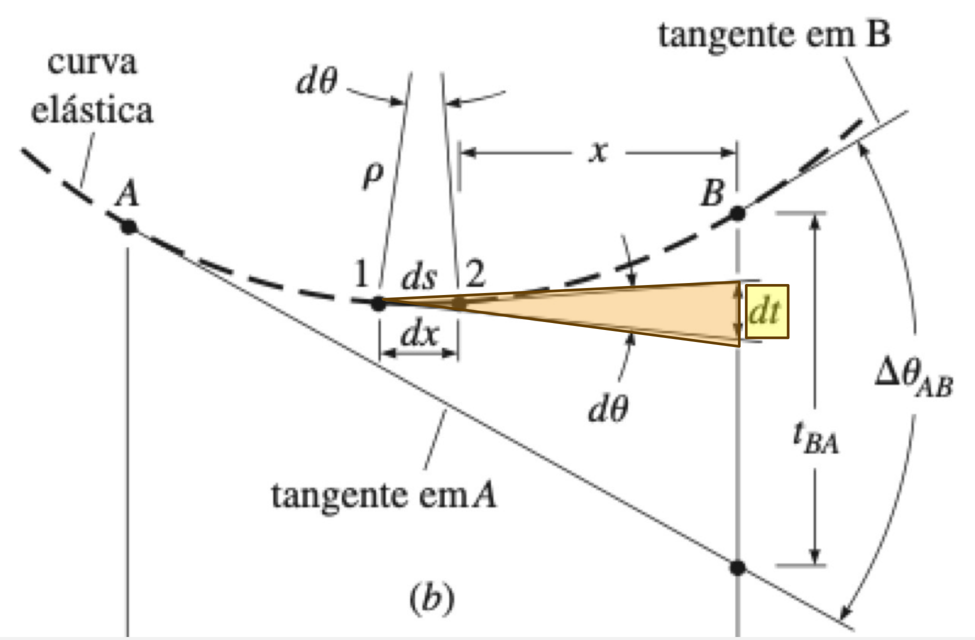
$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_A^B \boxed{\frac{M.dx}{EI}} \boxed{x}$$

- É a área infinitesimal sob o diagrama M/EI.

- x é a distância dessa área até o ponto B.
- Sendo essa distância a partir do seu centróide até o ponto em que o desvio tangencial deve ser calculado.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Constituindo assim o segundo teorema dos momentos das áreas, podendo ser esclarecido da seguinte forma:
- **“O desvio tangencial em um ponto B, em uma curva elástica contínua e suave, a partir da linha tangente desenhada na curva elástica em um segundo ponto A, é igual ao momento sobre B da área sob o diagrama M/EI entre os dois pontos”.**



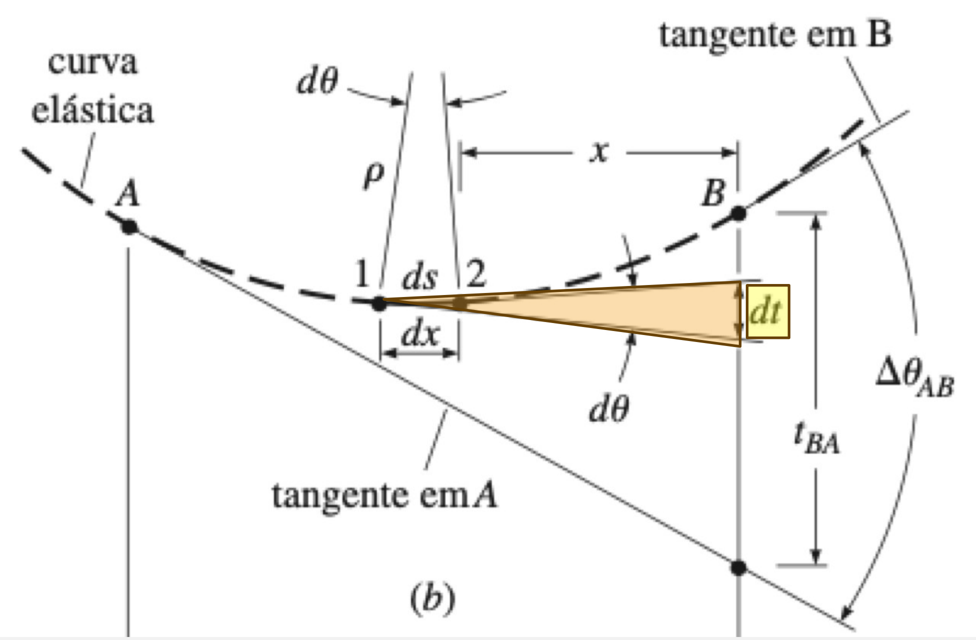
$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_A^B \boxed{\frac{M.dx}{EI}}\,\boxed{x}$$

- É a área infinitesimal sob o diagrama M/EI.

- x é a distância dessa área até o ponto B.
- Sendo essa distância a partir do seu centróide até o ponto em que o desvio tangencial deve ser calculado.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Ainda que seja possível avaliar a integral, expressando o momento M como uma função de x e a integrando, é mais rápido e mais simples efetuar o cálculo graficamente.
- Para esse procedimento, dividimos a área do diagrama M/EI em figuras geométricas simples (retângulos, parábolas, triângulos etc.).



$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_A^B \boxed{\frac{M.dx}{EI}}\,\boxed{x}$$

- É a área infinitesimal sob o diagrama M/EI.

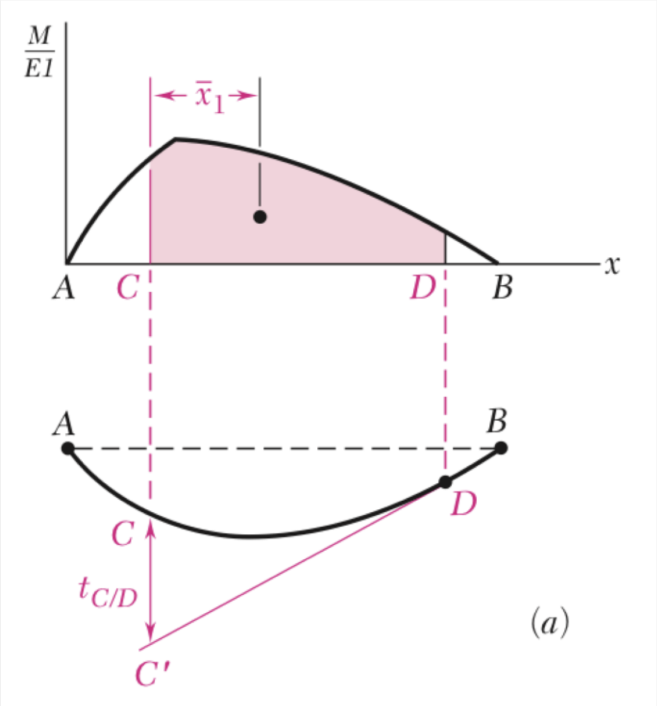
- x é a distância dessa área até o ponto B.
- Sendo essa distância a partir do seu centróide até o ponto em que o desvio tangencial deve ser calculado.

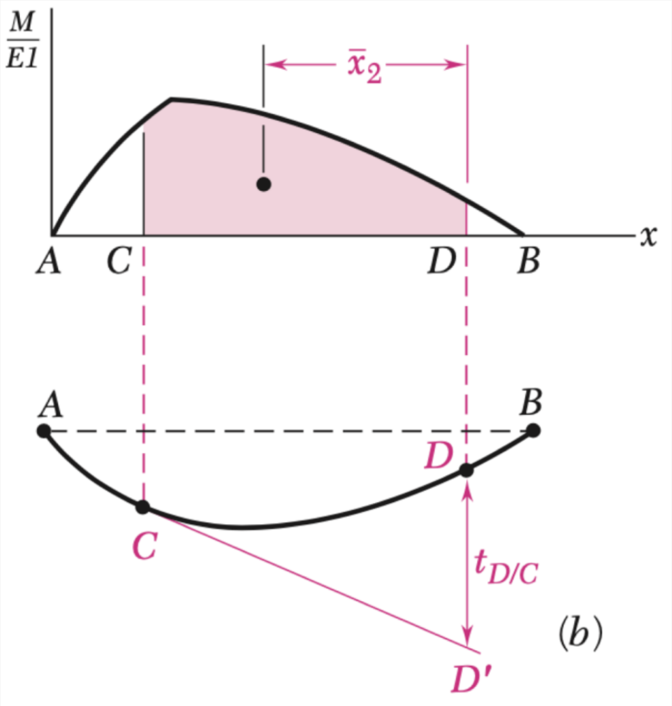
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Vale ressaltar a diferença entre os desvios tangenciais.

$$t_{CD} = \int_C^D dt = \int_C^D \frac{M.dx}{EI} x_1$$

$$t_{DC} = \int_D^C dt = \int_D^C \frac{M.dx}{EI} x_2$$





DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Para a execução do teorema dos momentos das áreas temos os seguintes passos:

1. Esboçar de forma precisa a viga defletida;
2. Encontrar um ponto na curva elástica onde a inclinação de uma tangente à curva seja conhecida; e
3. Aplicação dos teoremas das áreas para determinar a inclinação ou deflexão, utilizando a tangente de referência.

- Tudo isso dependerá de como a estrutura está apoiada e carregada. A maioria dos membros contínuos cairá nas três formas abaixo:

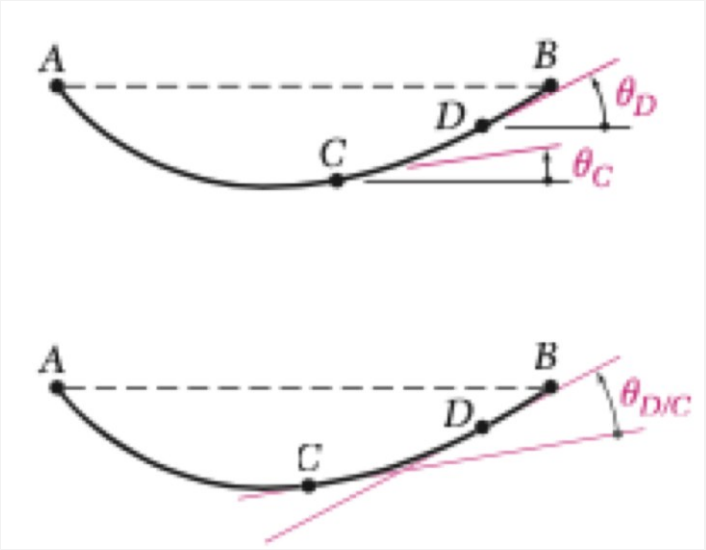
➢ Vigas em balanço

➢ Estruturas com um eixo de simetria vertical carregadas simetricamente.

➢ Estruturas que contêm um membro cujas extremidades não se deslocam na direção normal à posição original do eixo longitudinal do membro.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- Reforçando:
- Primeiro Teorema
  - Definição dos ângulos entre as tangentes de dois pontos
- Segundo Teorema
  - Definição da distância vertical (desvio tangencial) de um ponto até a tangente de outro ponto.

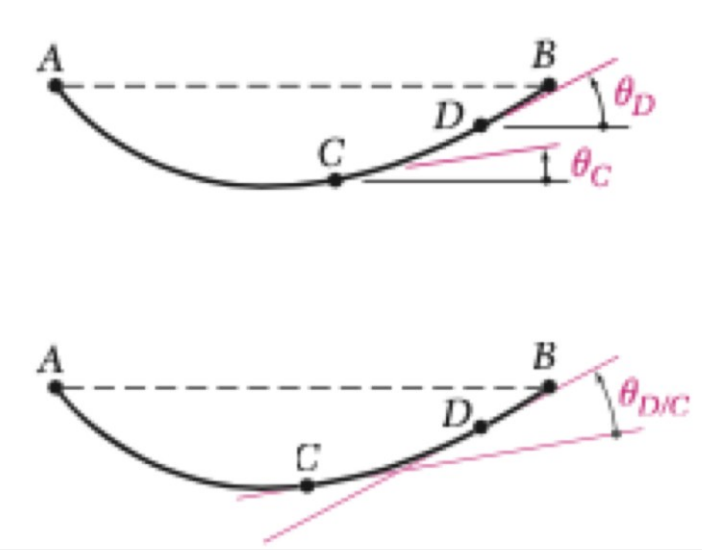


$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\, dx$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\, dx$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS

- O ângulo θ_D só pode ser obtido se a inclinação C for conhecida.
- O mesmo ocorre quando para o desvio tangencial, ele somente irá nos ajudar. Localizar os pontos se uma tangente for conhecida.



$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\, dx$$

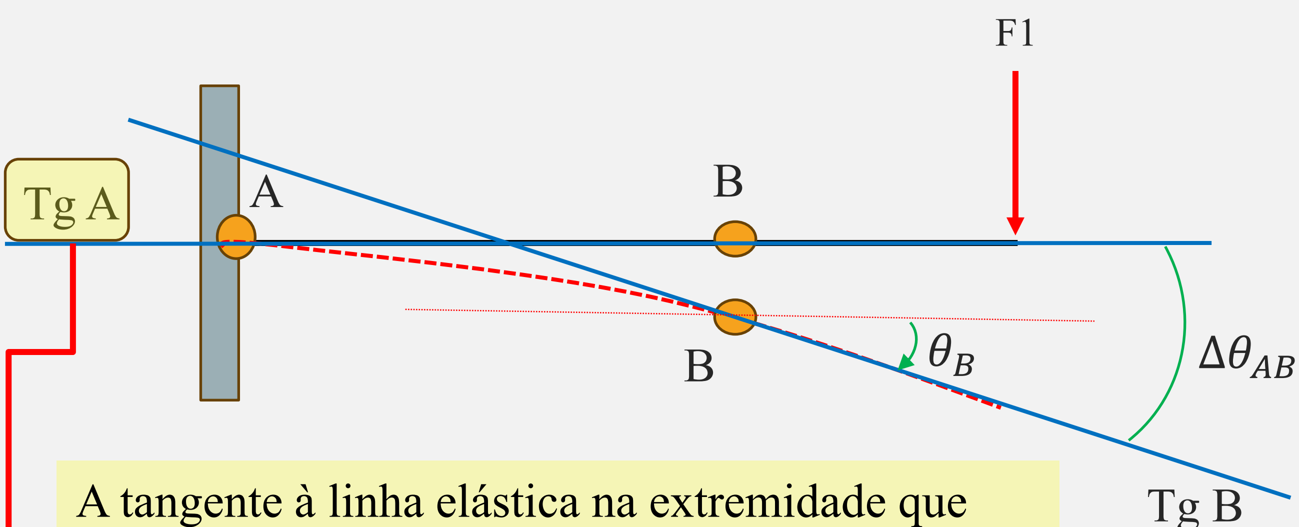
$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\, dx$$

- Concluímos que os dois teoremas do momento de área podem ser aplicados efetivamente na determinação das inclinações e das deflexões somente se uma certa tangente de referência à linha elástica tiver sido primeiro determinada.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – VIGA EM BALANÇO

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – VIGA EM BALANÇO

- Dada uma viga engastada em balanço, tem-se:



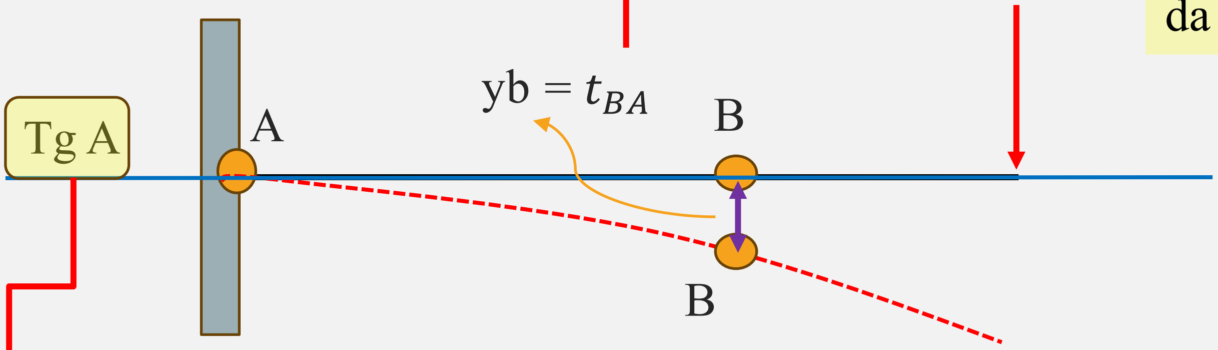
A tangente à linha elástica na extremidade que está engastada (Ponto A) é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência.

- Sabe-se que no ponto A a θ_A é igual a zero, logo utilizando a fórmula: $\Delta\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A$, temos então: $\Delta\theta_{AB} = \theta_B$

$$\Delta\theta_{AB} = \theta_B = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – VIGA EM BALANÇO

Da mesma forma, temos a deflexão do ponto B (yb), que será igual ao valor do desvio tangencial (t_{BA}) , medido a partir da tangente de referência em A.

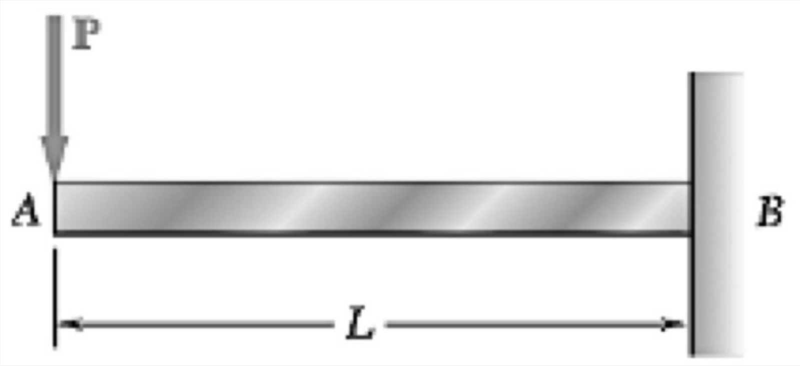


A tangente à linha elástica na extremidade que está engastada (Ponto A) é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência.

$$t_{BA} = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{M.dx}{EI} x$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – VIGA EM BALANÇO

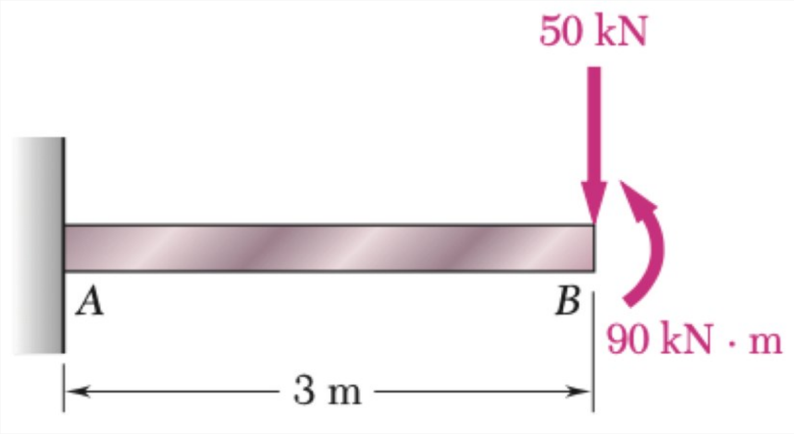
- Exemplo 001:
- A viga em balanço AB tem seção transversal uniforme e suporta uma força P na sua extremidade livre A. **Determine a equação da linha elástica**, a **deflexão** e a **inclinação** em A.



- Considere
- P = 10 kN
- L = 5 metros
- E = 22,1 Gpa
- Dimensão: 0,20 x 0,40 m
- Respostas: $\theta_A = 5{,}3\ x\ 10^{-3}\ rad\ e\ y_A = 17{,}7\ mm$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – VIGA EM BALANÇO

- Exemplo 002:
- Determine a inclinação e a deflexão na extremidade B da viga prismática em balanço AB quando ela for carregada conforme mostra a figura abaixo, sabendo que a rigidez à flexão da viga é EI = 10 MN.m2.

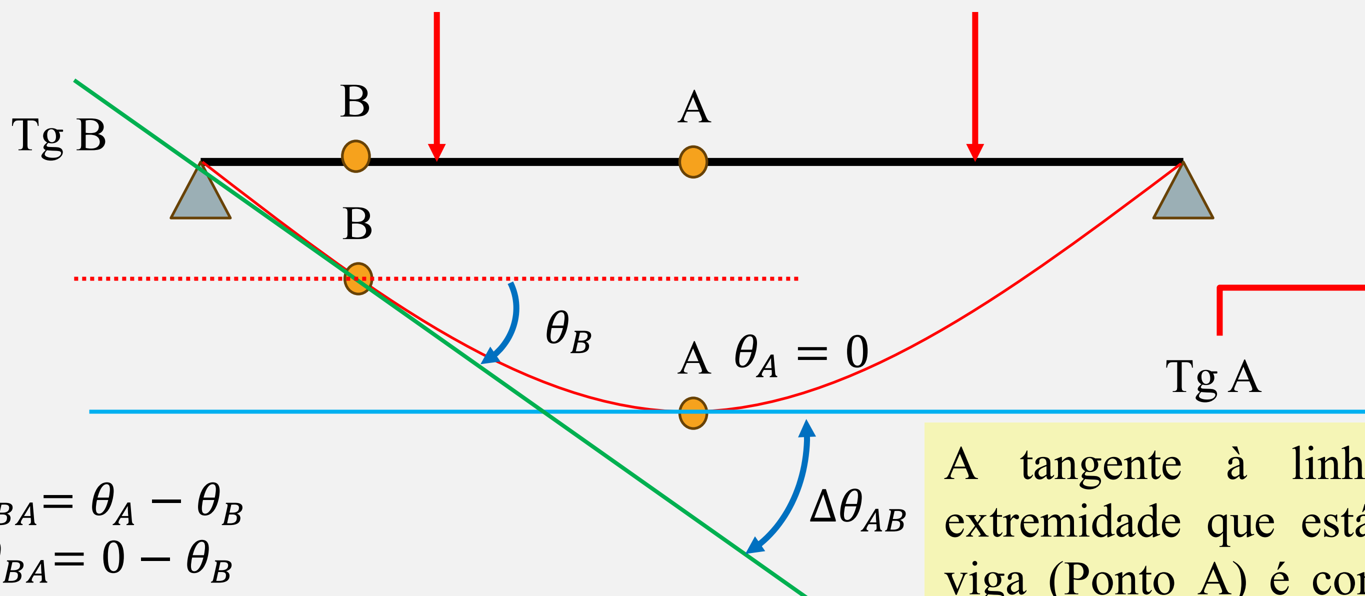


- Respostas: $\theta_b = 4{,}5\ x\ 10^{-3}\ rad\ e\ y_B = -4{,}5\ mm$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Nesses casos a inclinação da curva elástica é zero no ponto onde o eixo de simetria intercepta a curva elástica. Com isso, nesse ponto a curva elástica é horizontal. Desta forma, tem-se, com base no princípio dos momentos das áreas, que a inclinação em qualquer ponto da curva elástica é a área sob o diagrama M/EI entre esse ponto e o eixo da curva.
- Por exemplo:

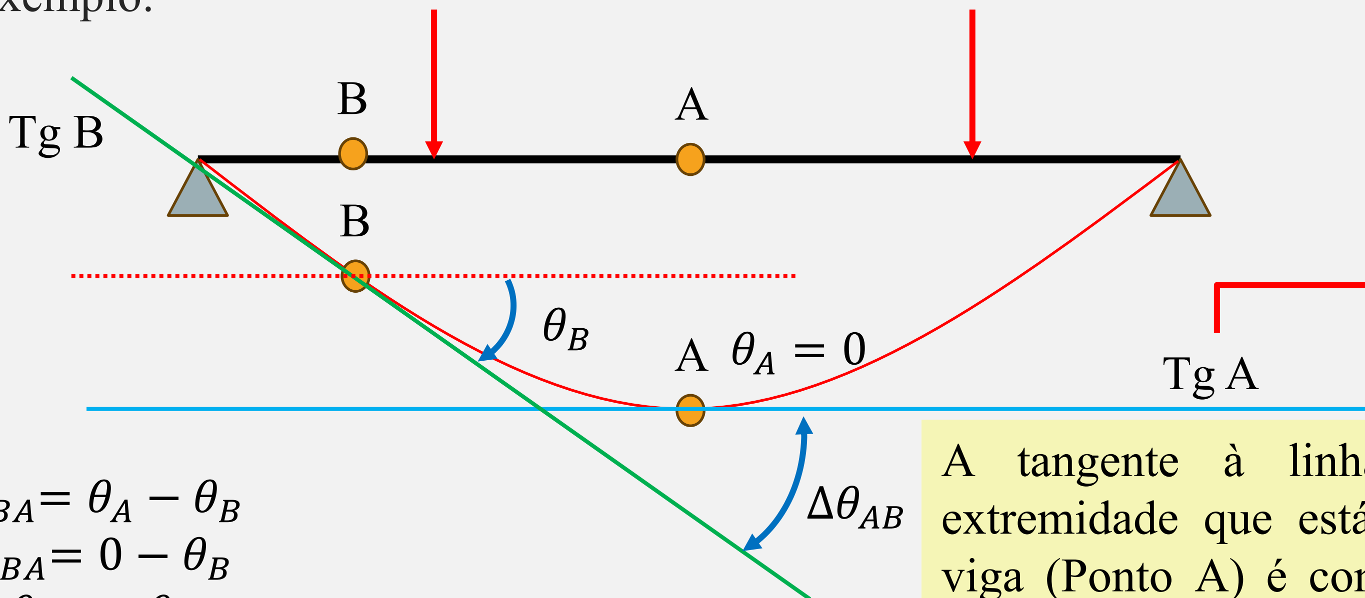


$$\Delta\theta_{BA} = \theta_A - \theta_B$$
$$\Delta\theta_{BA} = 0 - \theta_B$$
$$\Delta\theta_B = -\theta_B$$

A tangente à linha elástica na extremidade que está no centro da viga (Ponto A) é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Por exemplo:



$$\Delta\theta_{BA} = \theta_A - \theta_B$$
$$\Delta\theta_{BA} = 0 - \theta_B$$
$$\Delta\theta_B = -\theta_B$$

A tangente à linha elástica na extremidade que está no centro da viga (Ponto A) é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência.

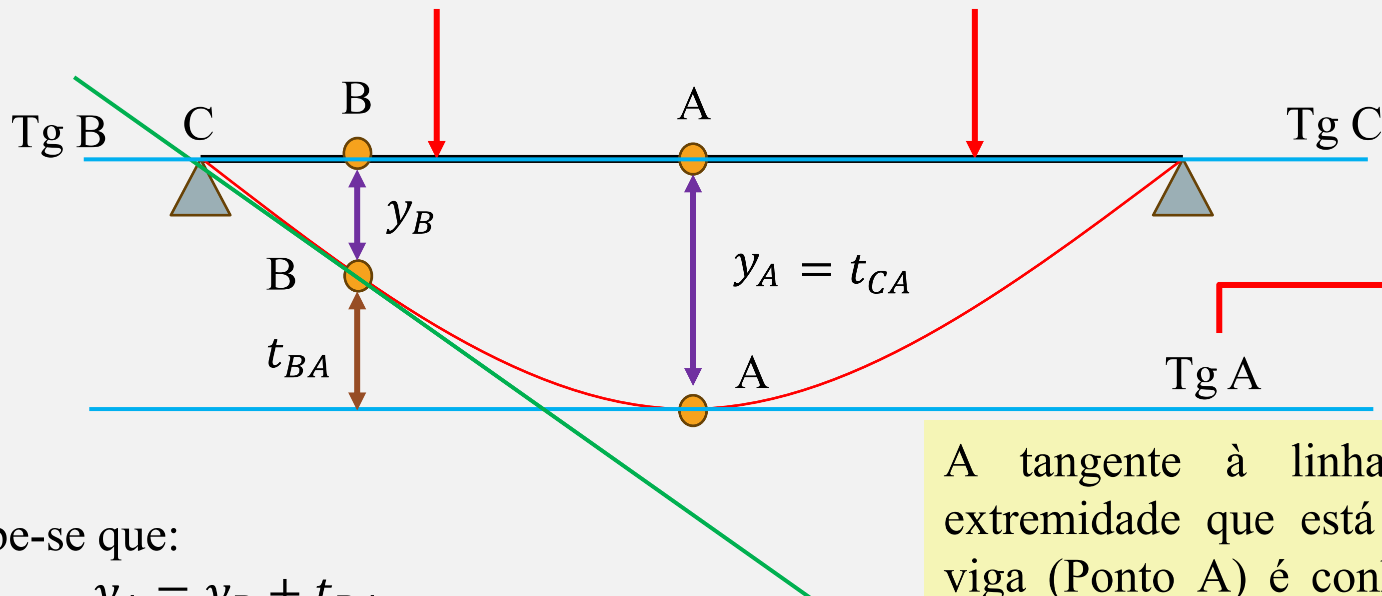
Portanto, para se conhecer o valor do θ_B, basta:

$$\Delta\theta_{BA} = \theta_A - \theta_B = \int_B^A \frac{M}{EI}\,dx$$

$\Delta\theta_{AB}$ = Área sob o diagrama M/EI entre os pontos B e A.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Por exemplo:



A tangente à linha elástica na extremidade que está no centro da viga (Ponto A) é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência.

Percebe-se que:

$$y_A = y_B + t_{BA}$$

Percebe-se também que:

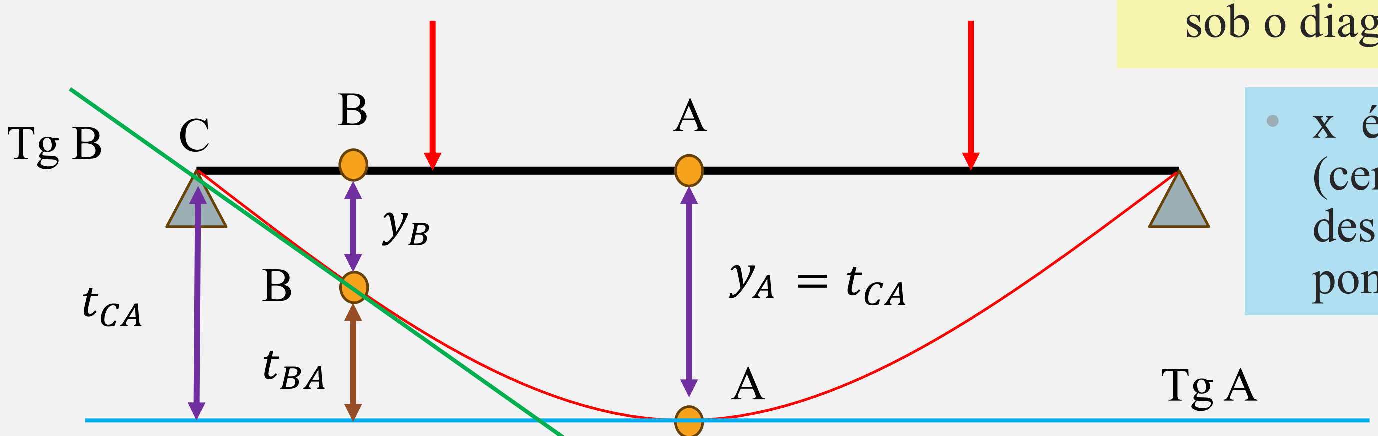
$$y_A = t_{CA}$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Por exemplo:

- É a área infinitesimal sob o diagrama M/EI.

- x é a distância (centróide) dessa área até o ponto.



Percebe-se que:

$$y_A = y_B + t_{BA}$$

Percebe-se também que:

$$y_A = t_{CA}$$

$$t_{CA} = \int_C^A dt = \int_C^A \boxed{\frac{M.dx}{EI}}\,\boxed{x}$$

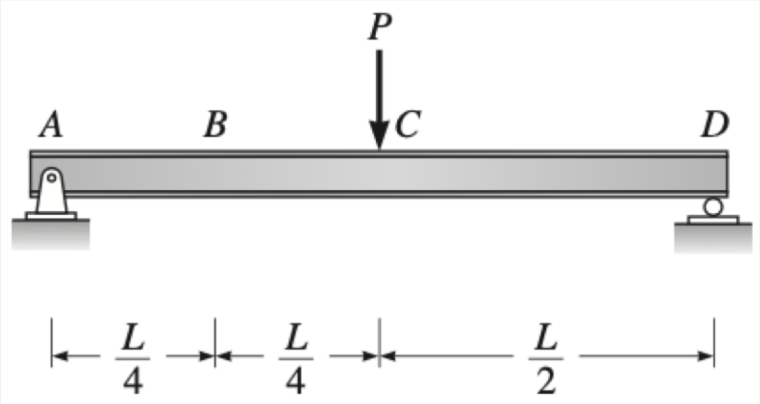
$$t_{BA} = \int_B^A dt = \int_B^A \frac{M.dx}{EI}x$$

Portanto, segue-se o cálculo para obter y_B:

1. Calcula-se $t_{CA} = y_A$
2. Calcula-se t_{BA}
3. Resolve-se: $y_B = y_A - t_{BA}$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Exemplo 003:
- A viga da figura abaixo suporta uma carga concentrada p no meio do vão (ponto C). Calculo as deflexões e inclinações nos pontos B e C. Além da inclinação em A. EI é constante.



Considere:

P = 50 kN

L = 4 metros

E = 22,1 Gpa

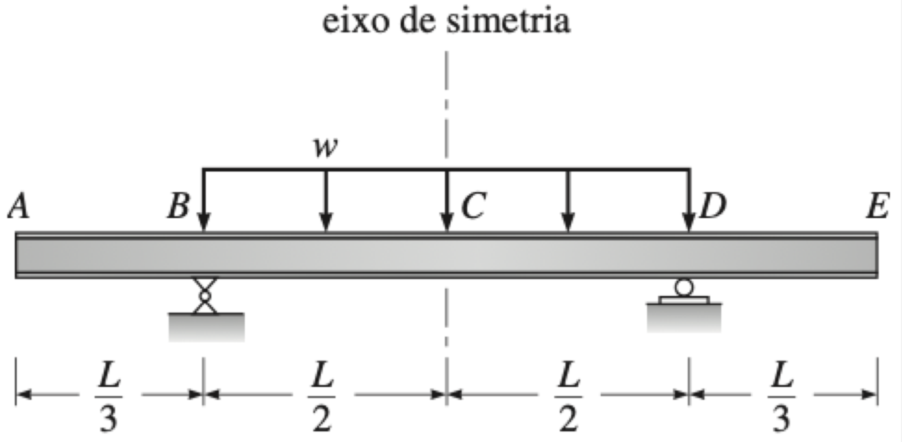
Dimensões: 0,20 x 0,40 m

Respostas:

$$\theta_C = 0\, rad \text{ e } y_C = -2{,}83\, mm$$
$$\theta_B = -1{,}59\, x\, 10^{-3}\, rad \text{ e } y_B = -1{,}94\, mm$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – CARREGAMENTO SIMÉTRICO

- Exemplo 004:
- Calcule a inclinação em B e as deflexões no meio do vão e no ponto A, na figura abaixo. EI constante.



Considere:

W = 5 kN/m

L = 6 metros

E = 22,1 Gpa

Dimensões: 0,20 x 0,40 m

Respostas:

$$\theta_B = -1{,}91 \; x \; 10^{-3} \; rad$$
$$y_C = -3{,}58 \; mm$$
$$y_A = 3{,}82 \; mm$$

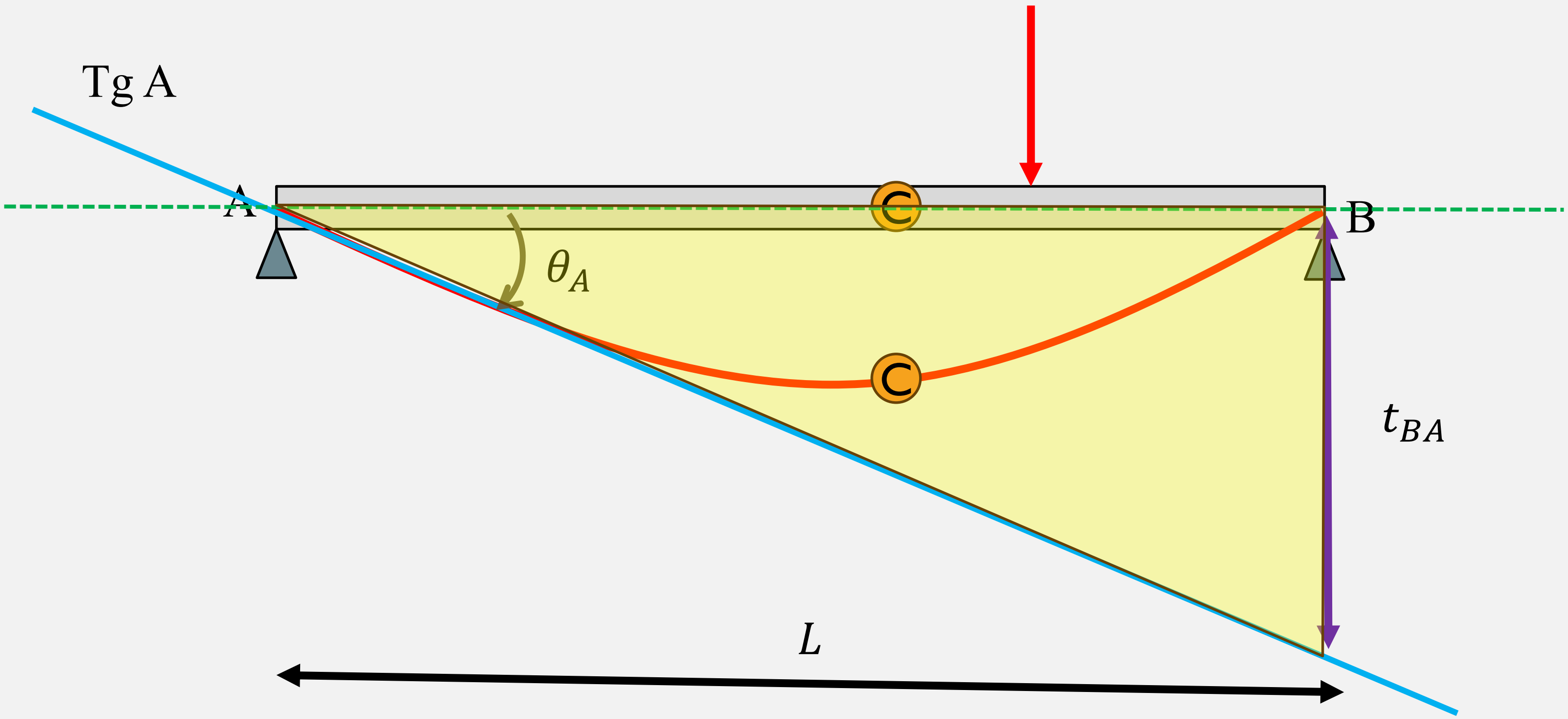
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

- Nesses casos o ponto em que a tangente à curva elástica é horizontal não é conhecida.
- Porém, devemos usar uma linha tangente inclinada como referência para calcular as inclinações e as deflexões nos pontos ao longo da curva elástica.
- Neste procedimento, iremos adotar uma inclinação da curva elástica em uma ou outra extremidade do membro.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

- Nessa extremidades desenhamos uma tangente à curva e calculamos o desvio tangencial na extremidade oposta. Como o exemplo mostrado abaixo:



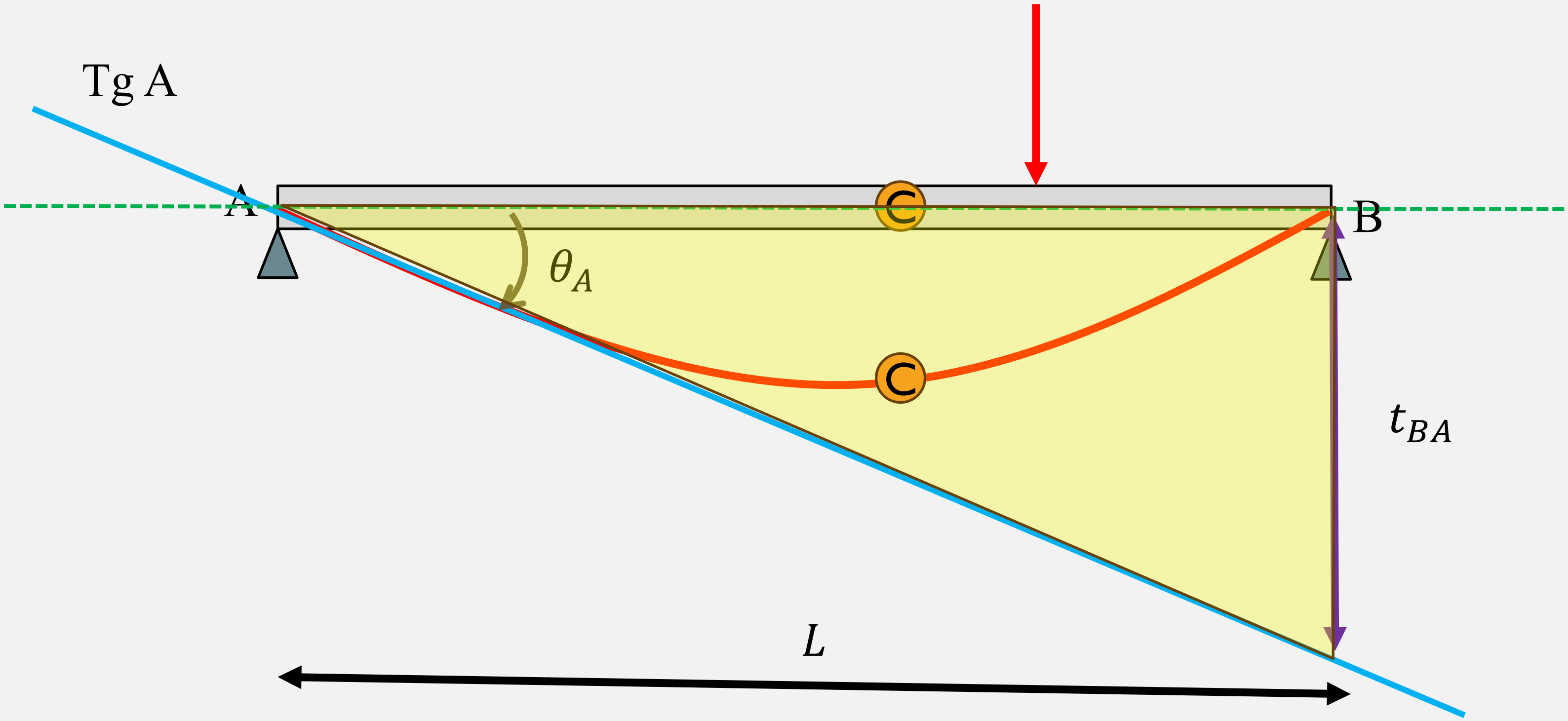
Observando o triângulo, pode-se escrever:

$$Tan\ \theta_A = \frac{t_{BA}}{L}$$

Como o valor de θ_A é pequeno, pode-se considerar $Tan\ \theta_A = \theta_A$, com isso:

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{L}$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

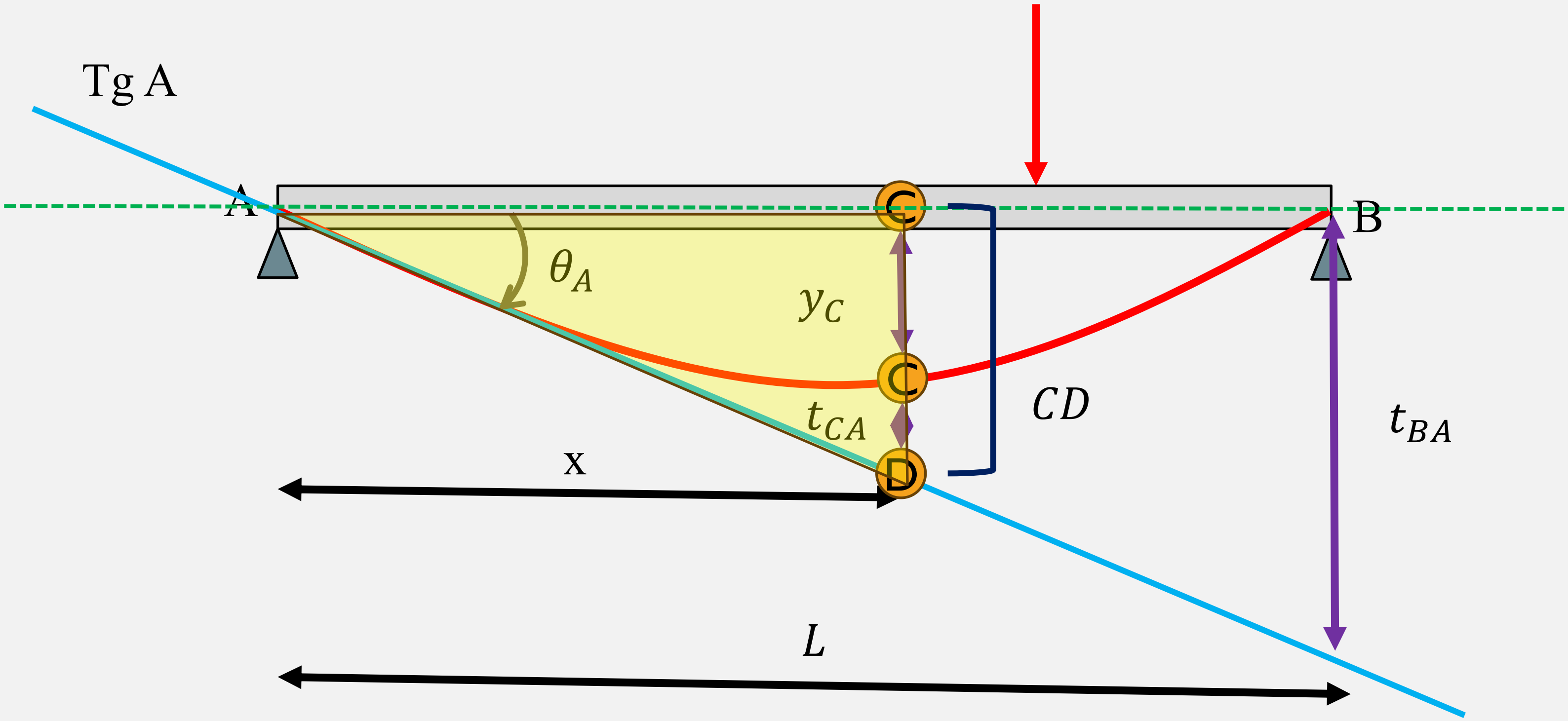


Em um ponto qualquer C, a inclinação seria igual a:

$$\theta_C = \theta_A + \Delta\theta_{AC}$$

Lembrando que $\Delta\theta_{AC}$ é igual à área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e C.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS



Para o cálculo do deslocamento o ponto C, localizado a uma distância x do apoio A, pode-se calcular a distância vertical CD. Por meio da equação:

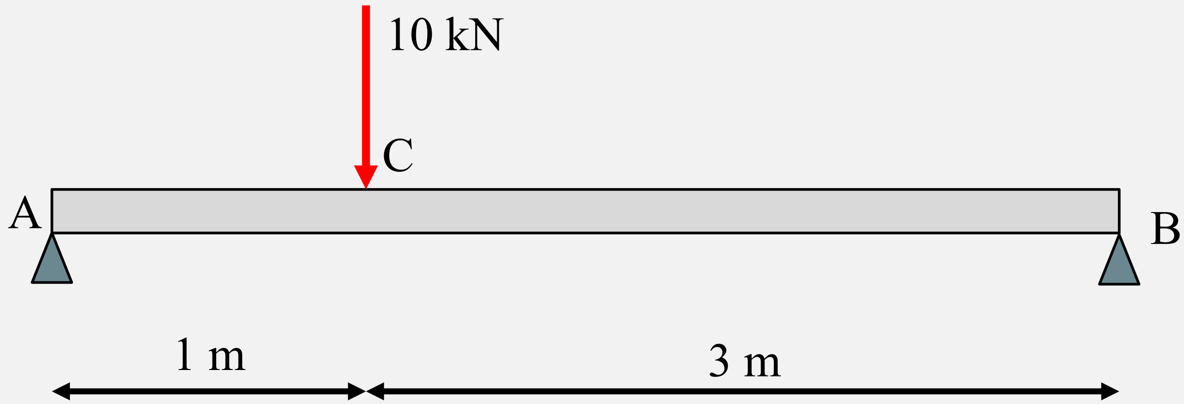
$$CD = \theta_A \, .(x)$$

Neste caso, a deflexão é obtido pela diferença do desvio tangencial e o valor de CD, conforme mostra abaixo:

$$y_c = CD - t_{CA}$$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

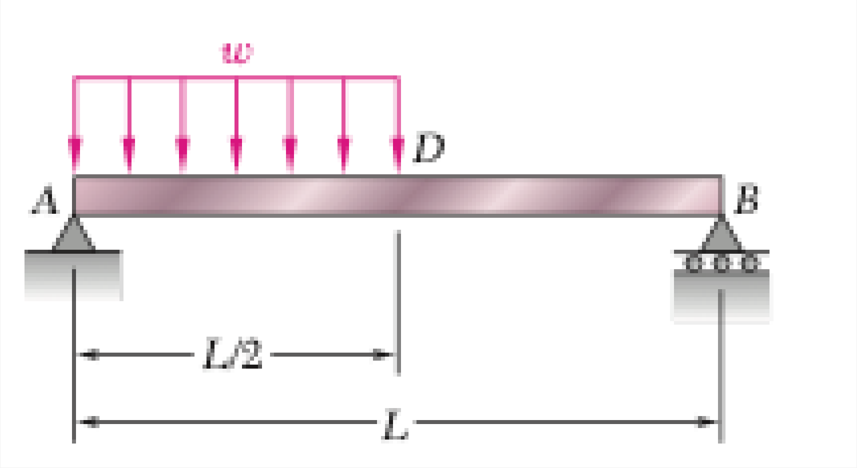
- Exemplo 001
- Para a viga prismática e o carregamento mostrados na figura abaixo, determine a inclinação e a deflexão no ponto C.



Considere:
E = 29 Gpa
Seção transversal (retangular): : 0,15 x 0,50
Respostas: $\theta_C = -110\ x\ 10^{-6}\ rad\ e\ y_C = 0{,}166\ mm \downarrow$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

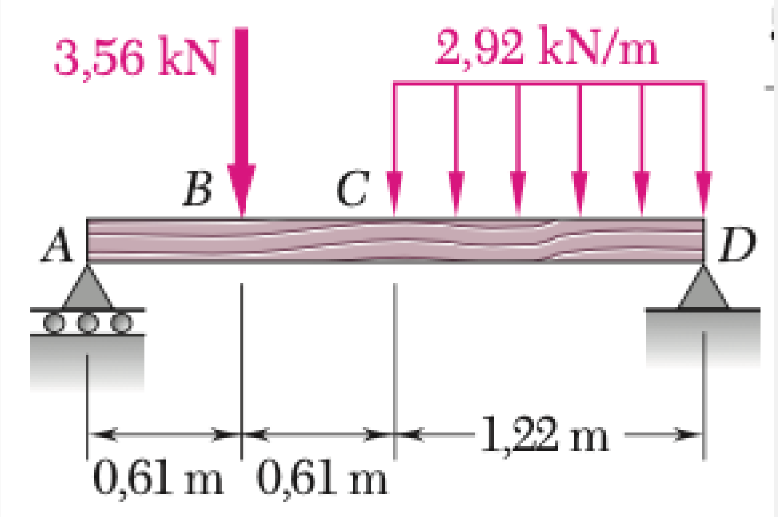
- Exemplo 002
- Para a viga prismática e o carregamento mostrado na figura abaixo, determine (a) a deflexão no ponto D e (b) a inclinação na extremidade A.



Considere:
L = 4 metros
W = 5 kN/m
E = 29 Gpa
Seção transversal (retangular): 0,15 x 0,50
Respostas: $\theta_A \cong -165 \text{ x } 10^{-6}$ m e $y_M = 0{,}183\ mm \downarrow$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

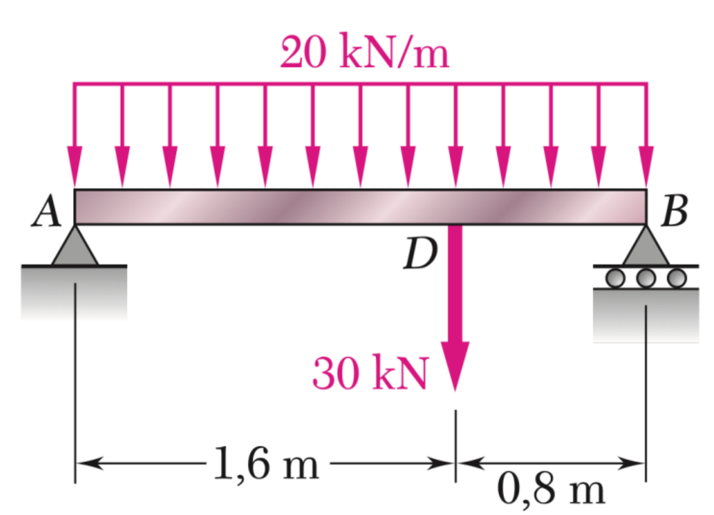
- Exemplo 003
- Para a viga de madeira e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *C*



Considere:
E = 8,96 Gpa
Seção transversal (retangular): 0,15 x 0,40 m
Respostas: $\theta_A \cong -269 \times 10^{-6}$ m e $y_C = 0{,}197\ mm \downarrow$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

- Exemplo 004
- Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (a) a inclinação no ponto A e (b) a deflexão no ponto D



Considere:
E (Concreto de alta resistência) = 29 Gpa
Seção transversal (retangular): 0,15 x 0,50
Respostas: $\theta_A \cong -443 \text{ x } 10^{-6}$ m e $y_D = 0{,}316\ mm \downarrow$

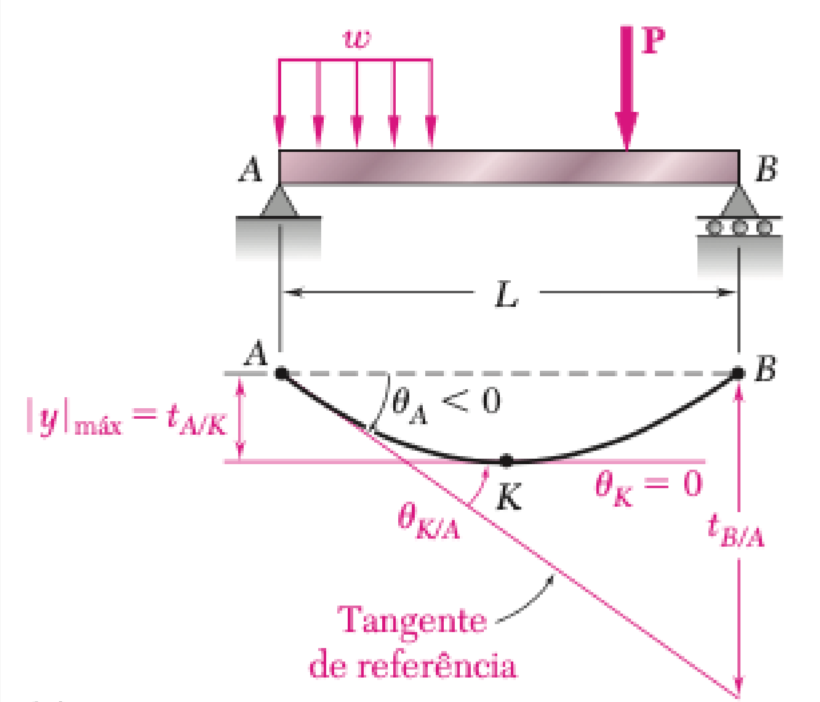
DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – DEFLEXÃO MÁXIMA

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – DEFLEXÃO MÁXIMA

- Quando uma viga biapoiada ou biapoiada com balanço suporta uma carga assimétrica, a deflexão máxima geralmente não ocorre no centro da viga.
- Para determinarmos a deflexão máxima de uma dessas vigas, devemos localizar o ponto K em que a tangente é horizontal e calcular a deflexão naquele ponto.
- Nossa análise deve começar com a determinação de uma tangente de referência em um dos apoios.
- Se for selecionado o apoio A, a inclinação θ_A da tangente em A será obtida pelo método indicado na seção anterior, isto é, calculando o desvio tangencial t_{BA} do apoio B em relação a A e dividindo-se aquele valor pela distância L entre os dois apoios.

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – DEFLEXÃO MÁXIMA

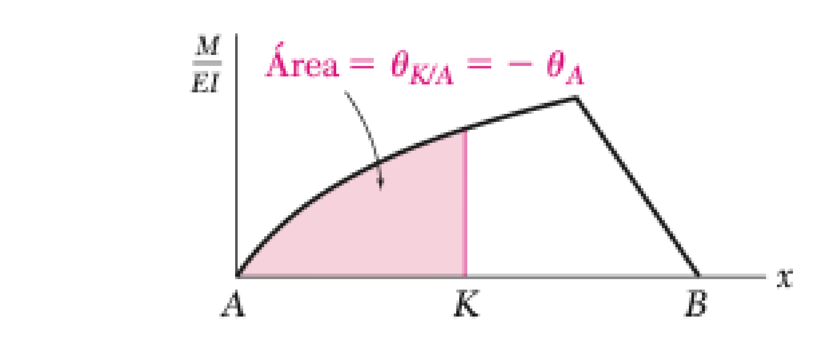
- Como a inclinação θ_M no ponto K é zero devemos ter :



(a)

$$\Delta\theta_{AK} = \theta_K - \theta_A$$

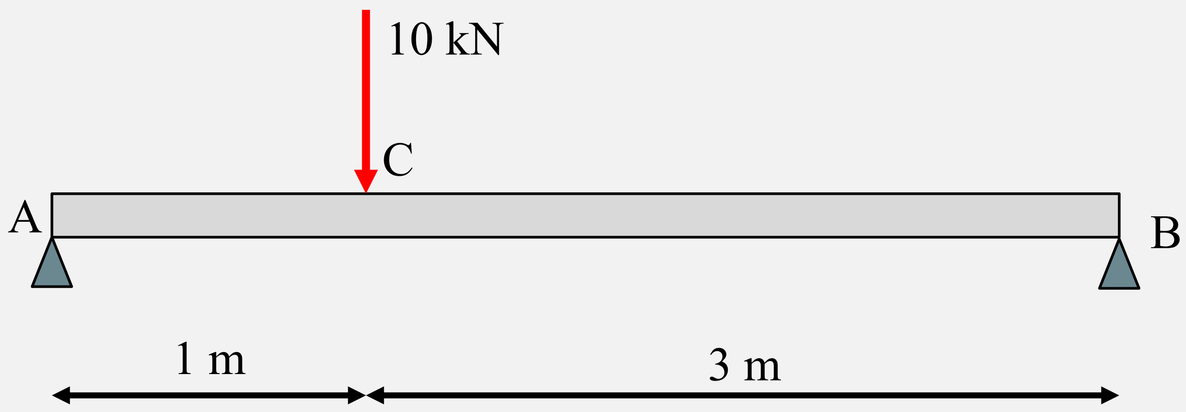
$$\Delta\theta_{AK} = -\theta_A$$



(b)

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

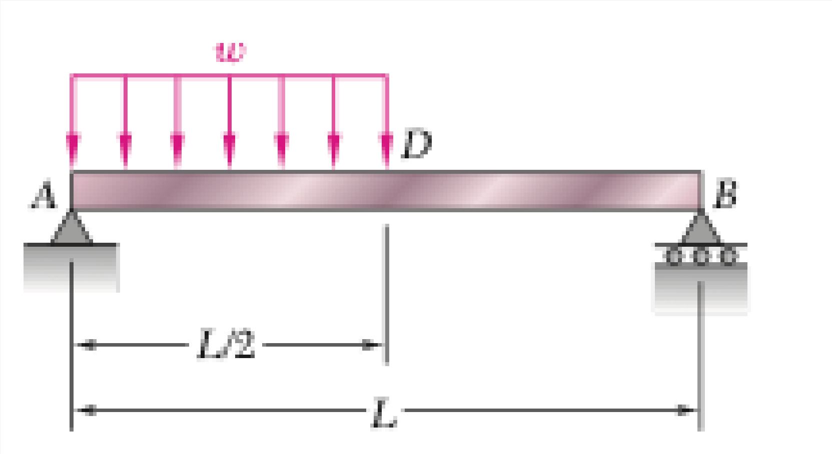
- Exemplo 005
- Calcule a deflexão máxima na viga abaixo.



Considere:
E = 29 GPa
Seção transversal (retangular): 0,15 x 0,50
Respostas: x ≅ 1,8 m e $y_M = 0{,}402\ mm \downarrow$

DEFLEXÕES DE VIGAS – MÉTODO DOS MOMENTOS DAS ÁREAS – ESTRUTURAS ASSIMÉTRICAS

- Exemplo 006
- Calcule a deflexão máxima na viga abaixo.



Considere:
L = 4 metros
W = 5 kN/m
E = 29 GPa
Seção transversal (retangular): 0,15 x 0,50
Respostas: x ≅ 1,83 m e $y_M = 0{,}362\ mm \downarrow$