TEORIA DAS ESTRUTURAS II

Aula 07

Bacharelado em Engenharia Civil - 6º Período

Prof. Celso José Roberto Soares Júnior

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia
Campus
Porto Velho Calama

ASSUNTOS DE HOJE:

- Método dos deslocamentos – Introdução
- Método dos deslocamentos – Deslocabilidades
- Método dos deslocamentos – metodologia
- Método dos deslocamentos – Aplicacão

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – INTRODUÇÃO

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – INTRODUÇÃO

- Quando estudamos o método anterior (método das forças), as incógnitas do problema hiperestático eram esforços simples (ou reações de apoio), que após determinados permitiam o desenvolvimento dos diagramas de esforços solicitantes para a estrutura em estudo.
- O método das forças sempre inicia a resolução da estrutura através da determinação dos seus esforços para posteriormente obter as deformações.
- Pode-se também solucionar a problemática de estruturas hiperestáticas de maneira inversa, ou seja, determinando as deformações sofridas pelos nós das barras da estruturas para a partir desses valores obter os diagramas de esforços solicitantes da estrutura.
- Logo, esse é o caminho adotado no método dos deslocamentos, em que as incógnitas nesse método são: ângulos de rotação e os deslocamentos lineares sofridos pelas barras.

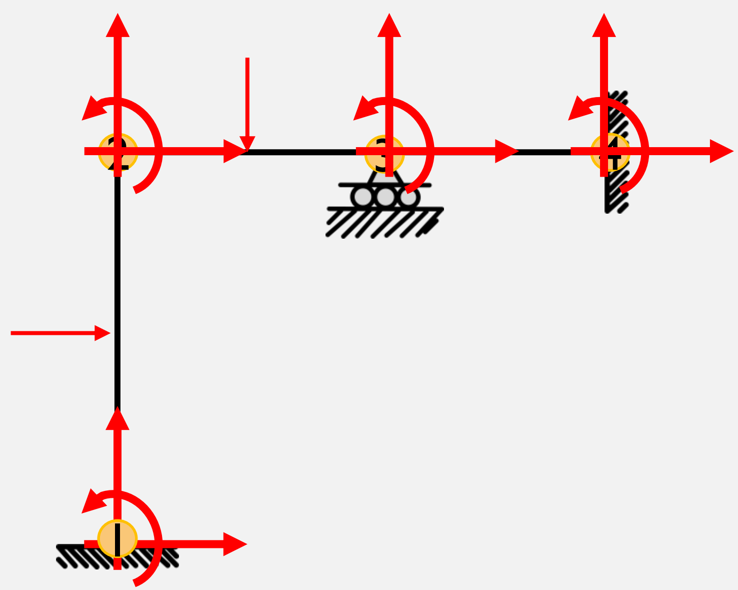
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- Os deslocamentos serão os as incógnitas desse método e por esse motivo é necessário entender o número de incógnitas. Que são divididos em:
  - Deslocabilidade Interna; e
  - Deslocabilidade Externa.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Interna**
- Atente-se ao pórtico abaixo:



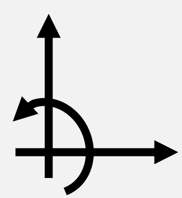
No nó 1, é um engaste. Como é conhecido esse tipo de apoio restringe todos os movimentos.

Desconsiderando os deslocamentos por esforços normais, tem-se que no nó 2. A peça não se moverá nem para cima, nem para baixo, restando somente o momento.

No nó 3, tem-se a mesma configuração que o nó 2. Sem movimentações verticais e horizontais, porém há rotações.

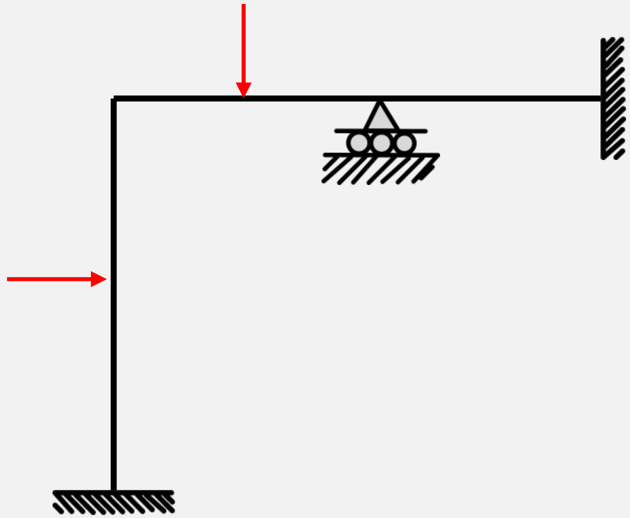
No nó 4, é um engaste. Como é conhecido esse tipo de apoio restringe todos os movimentos.

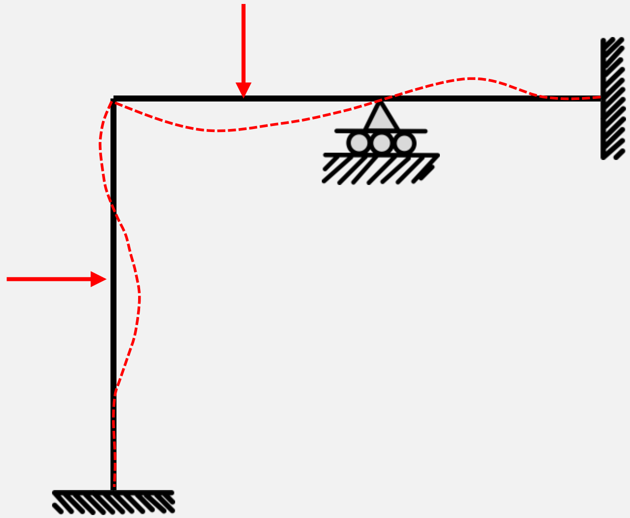
Considerando essas três possibilidades de movimento em cada nó.



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

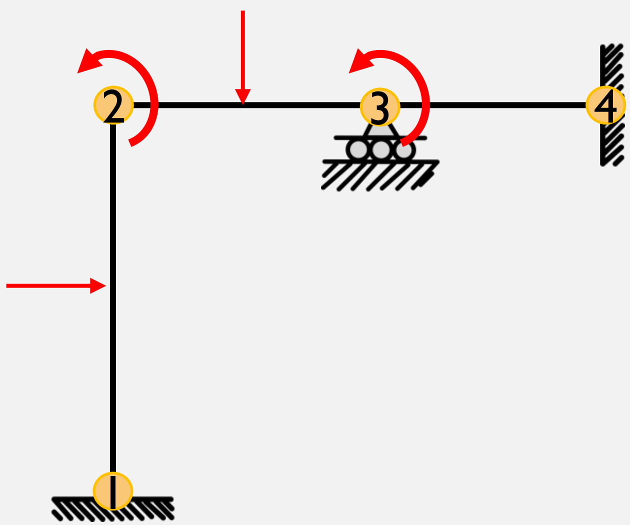
- **Deslocabilidade Interna**
- Atente-se ao pórtico abaixo:
- Com a aplicação das forças indicadas abaixo, a estrutura ficaria aproximadamente da seguinte forma:





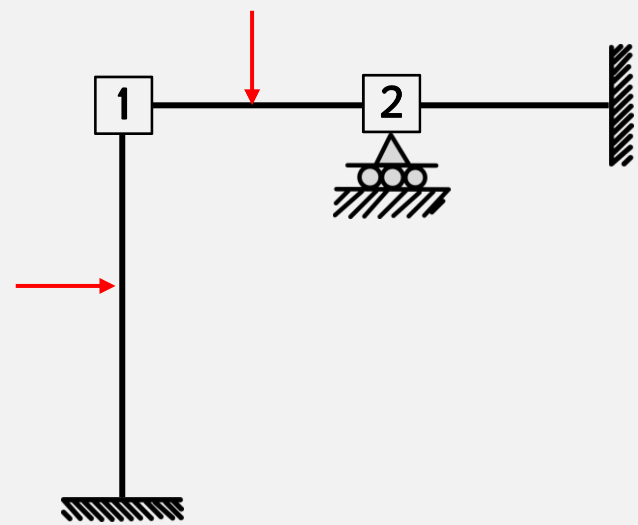
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Interna**
- Atente-se ao pórtico abaixo:



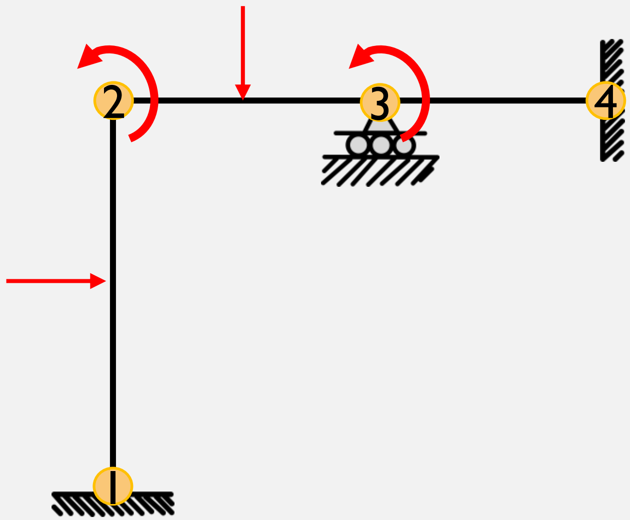
Para fazer o travamento dessas deslocabilidades, é necessário fazer a inserção de **chapas** ou **placas fixas** nos nós que estão com o grau de liberdade para rotações.

Como mostra abaixo:



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Interna**
- Atente-se ao pórtico abaixo:

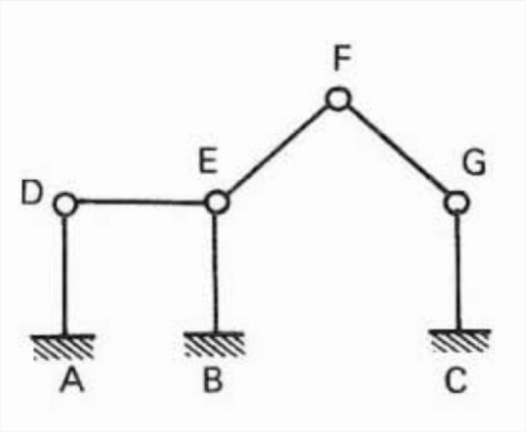


Conclui-se então que o número de incógnitas a estrutura abaixo é de 2 incógnitas.

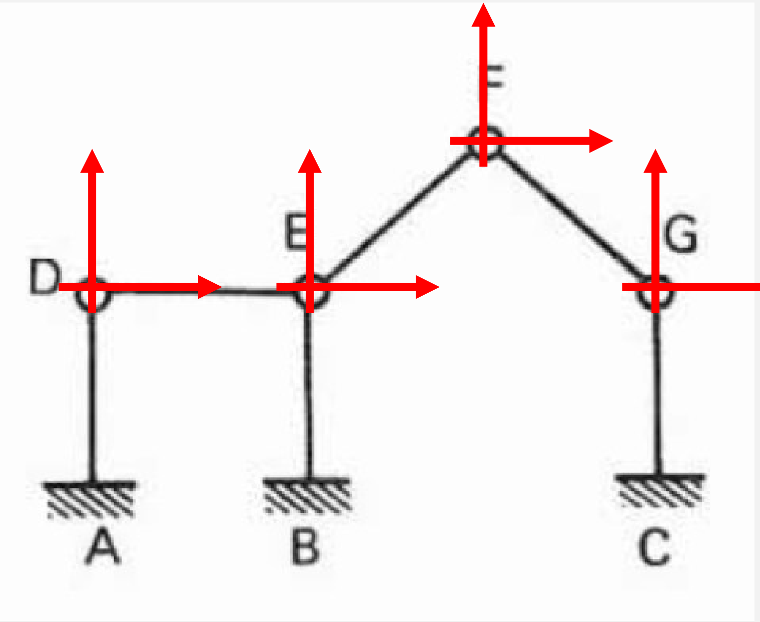
Diz-se que o número de deslocabilidade interna de uma estrutura é igual ao número de rotações de nós que precisa conhecer para resolvê-la.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Externa**:
- Observe a estrutura abaixo:

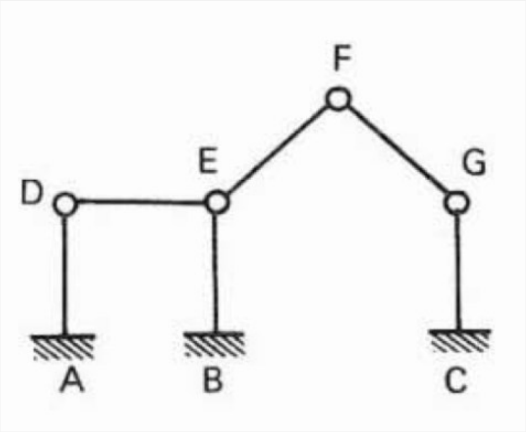


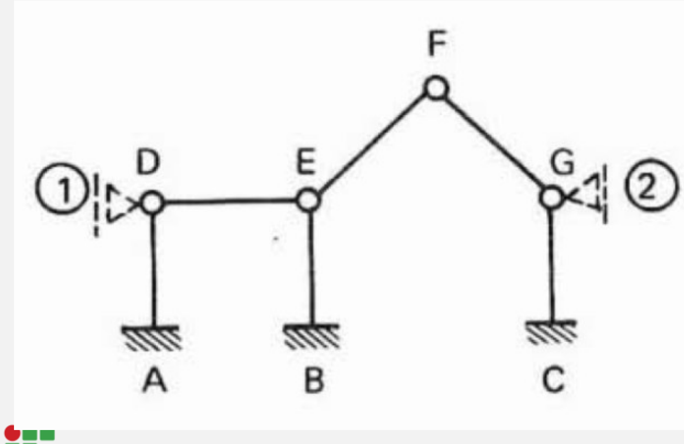
Como seus nós internos estão rotulados, não é necessário conhecer as rotações das barras nesses nós. Ou seja, não há deslocabilidade interna na estrutura.



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Externa**
- Observe a estrutura abaixo:





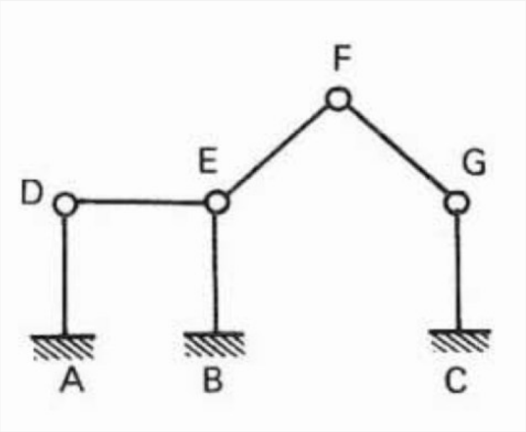
Como seus nós internos estão rotulados, não é necessário conhecer as rotações das barras nesses nós. Ou seja, não há deslocabilidade interna na estrutura.

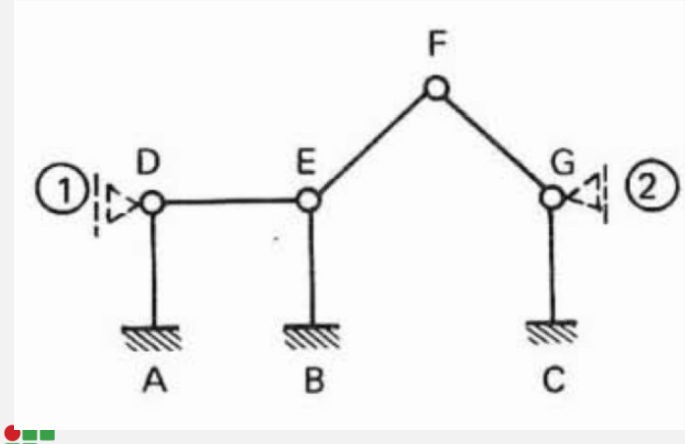
Ao iniciar a análise no nó D, observa que não há deslocabilidade vertical, devido ao engaste A, no entanto, nada impede do seu deslocamento horizontal, logo tem-se a primeira incógnita do problema.

Para representar essa incógnita, indica-se um apoio de 1º gênero no nó D, evidenciando que seria necessária a existência de mais um vínculo na estrutura para que nó D não desloque linearmente.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- **Deslocabilidade Externa**
- Observe a estrutura abaixo:





Na estrutura ao lado, o mesmo que ocorre no nó D é valido para o nó G, que pode deslocar na direção horizontal e para caracterizar essa nova incógnita, indica-se com um apoio de 1º gênero em G, pois seria necessária mais esse apoio para que o nó G não possuísse deslocabilidade linear.

Coso existissem apoios adicionais de 1º gênero (1 e 2), os nós D e G seriam indeslocáveis, consequentemente os nós E e F teriam indeslocabilidade linear.

A estrutura então possui dois deslocamentos lineares, impedidos pela adição dos apoios de 1º gênero, por isso, a estrutura possui duas deslocabilidade lineares ou externas.

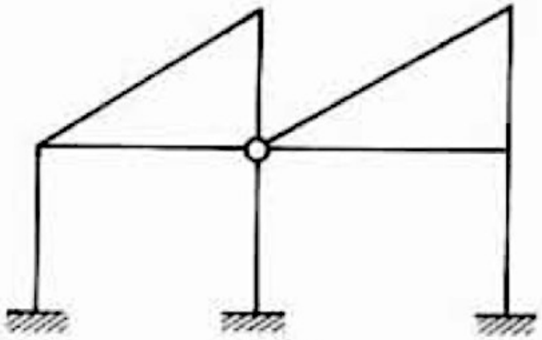
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- Deslocabilidade Externa
- Deslocabilidade externa de uma estrutura é igual ao número de apoios de 1º gênero que a ela precisa-se acrescentar para que todos os seus nós fiquem sem deslocabilidade lineares.

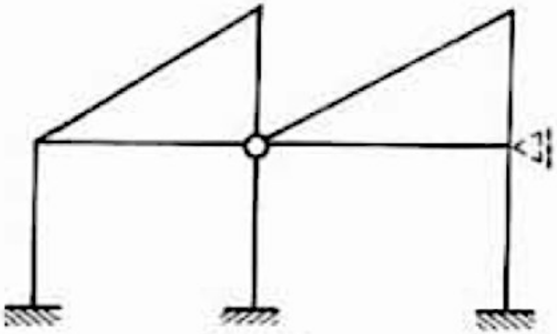
- Número total de deslocabilidade
- Como as incógnitas são as rotações dos nós internos e os deslocamentos lineares independentes de seus nós, tem-se que:
- O número total de deslocabilidade de uma estrutura é igual ao número total de incógnitas de sua resolução pelo método das deformações, e é dado pela soma de seu número de deslocabilidade interna e externa.
- $D_t = D_i + D_e$

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

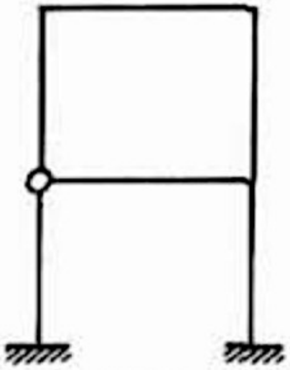
- Exemplos:



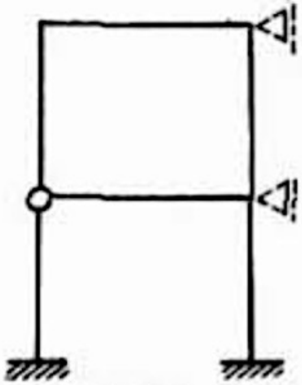
1-9.1



1-9.2



1-5.1

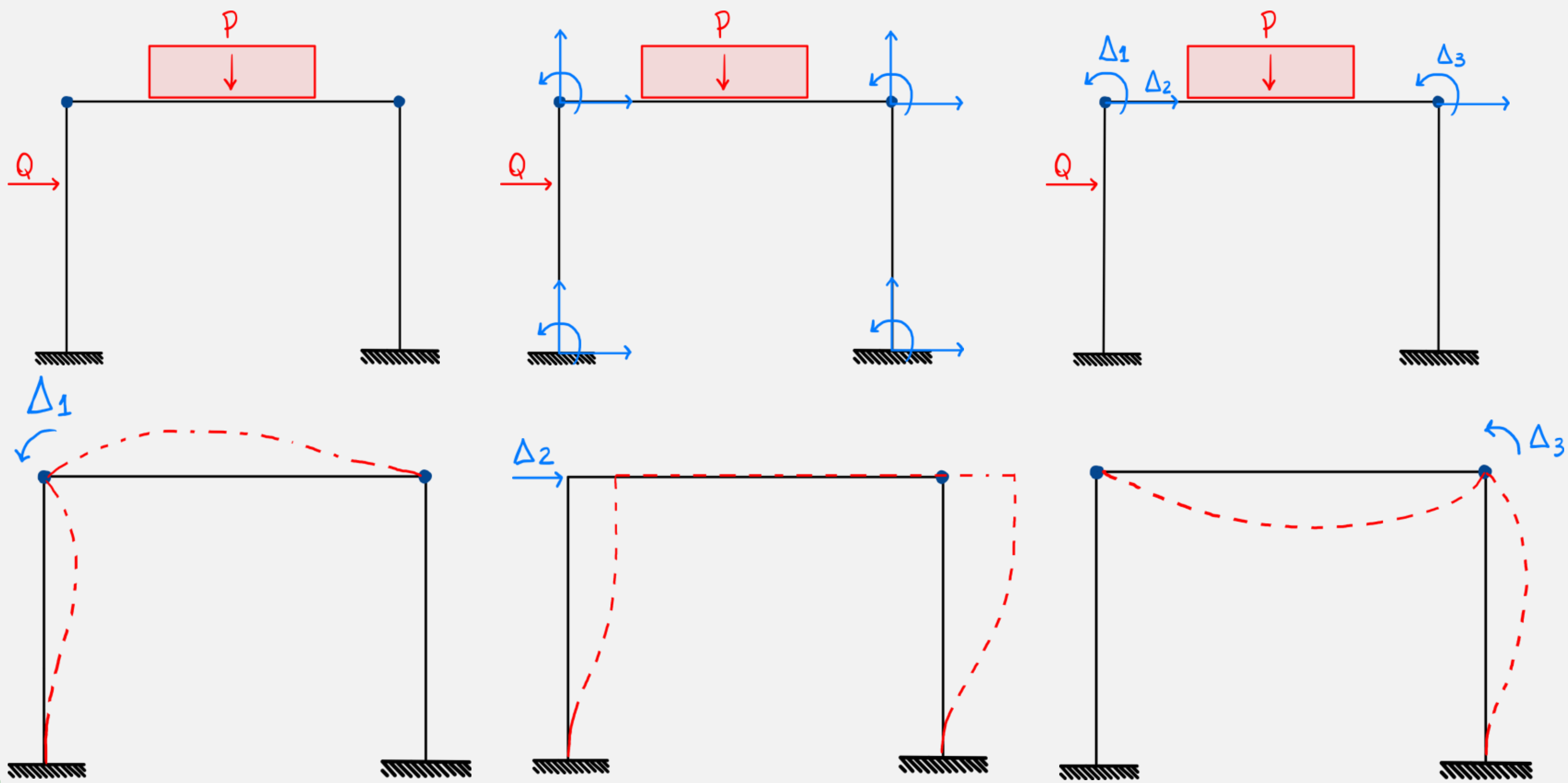


1-5.2

INSTITUTO FEDERAL Rondônia | *Campus* Porto Velho Calama

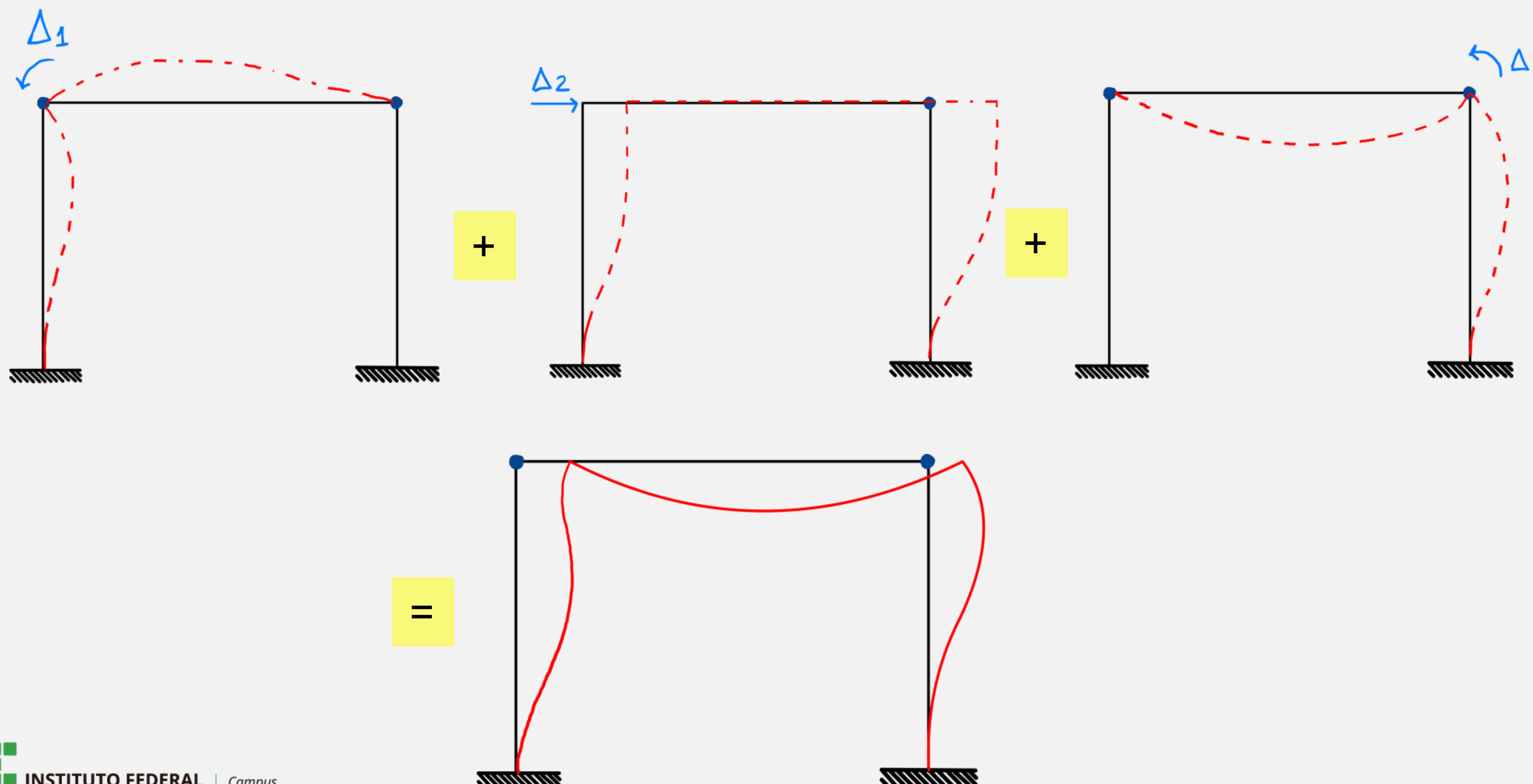
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- O método dos deslocamentos pode ser interpretada como uma superposição de soluções cinematicamente determinadas, ou seja, configurações deformadas conhecidas. Desconsiderando as deformações dos esforços normais, observe a estrutura abaixo:



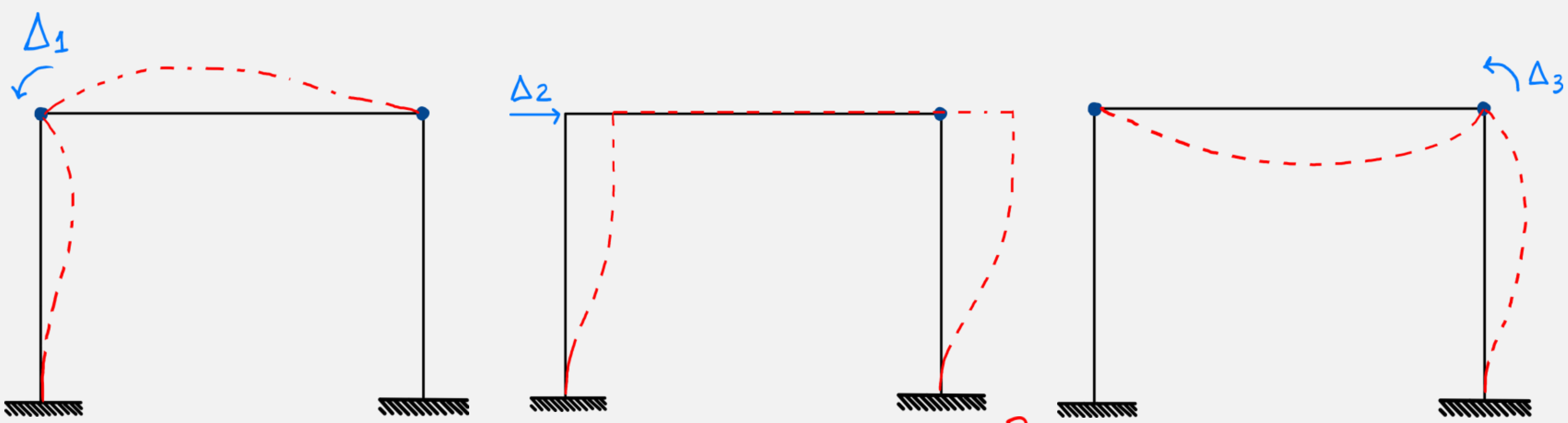
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- O método dos deslocamentos pode ser interpretada como uma superposição de soluções cinematicamente determinadas, ou seja, configurações deformadas conhecidas. Desconsiderando as deformações dos esforços normais, observe a estrutura abaixo:

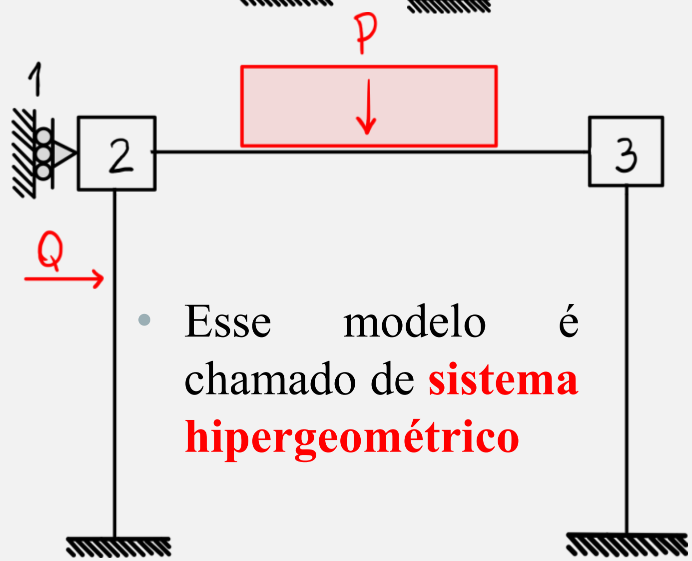


MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

- Como é apresentado abaixo, tem-se que todas as deslocabilidades são conhecidas.
- $\Delta_1 =$ Rotação no nó superior esquerdo - $\Delta_2 =$ deslocamento dos nós superiores
- $\Delta_3 =$ Rotação no nó superior direito



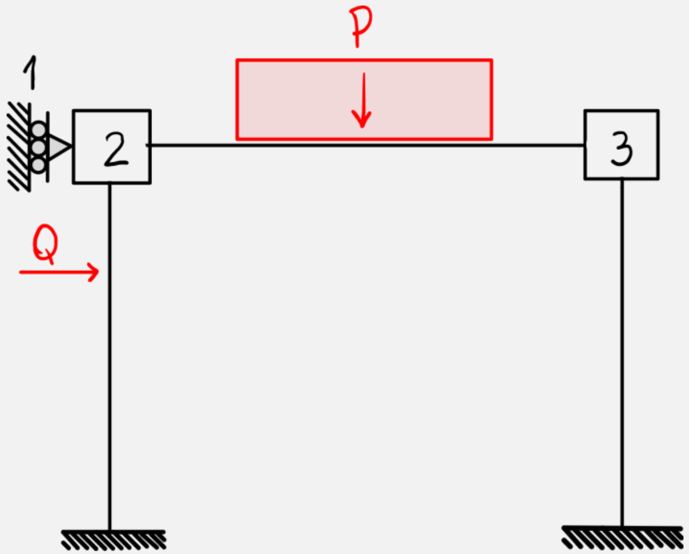
- O modelo estrutural utilizado nos casos básicos é o de uma estrutura cinematicamente determinada obtida por meio da estrutura principal, com a adição de vínculos fictícios, a fim de travar os deslocamentos.



- Esse modelo é chamado de **sistema hipergeométrico**

- Apoio 1 – Deslocamento
- Apoio 2 e 3 - Rotação

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – DESLOCABILIDADES

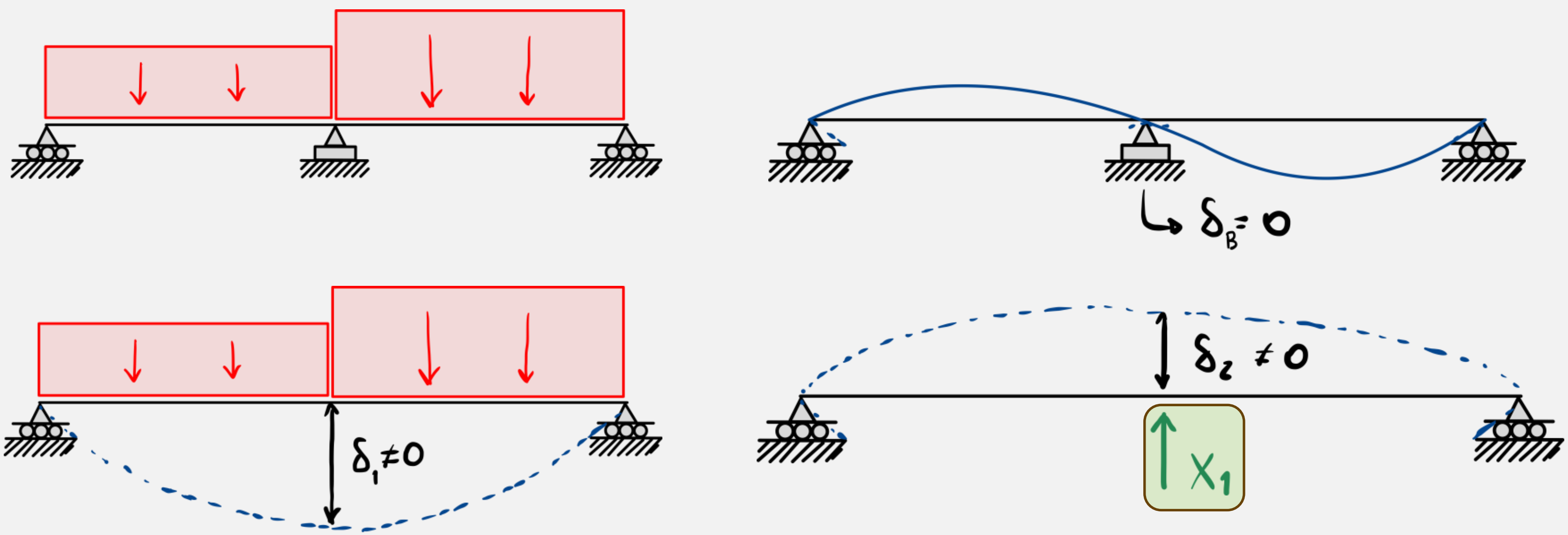


- Quando é inserida as chapas para evitar a rotação, indica que os nós estão engastados completamente.
- O sistema hipergeométrico é utilizado para isolar diversas componentes cinemáticas da estrutura. Isolando os efeitos de cada uma de suas deslocabilidades.
- Para o método dos deslocamento, diferente do método das forças, só há uma possibilidade para chegar ao sistema hipergeométrico, que é impedindo a suas deslocabilidades.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLOGIA

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLOGIA

- Antes de falar sobre o método dos deslocamento, vale relembrar a diferença entre o método das forças e o método dos deslocamentos.
- Síntese do método das forças:



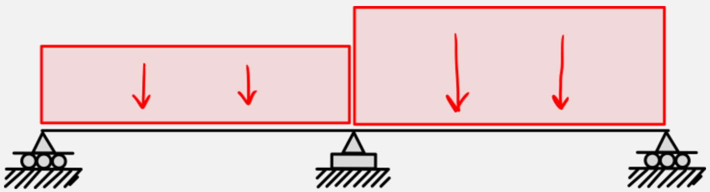
- As incógnitas são forças estáticas, resolvidas por um sistema de equação de compatibilidade de deslocamentos.

Equação de compatibilidade

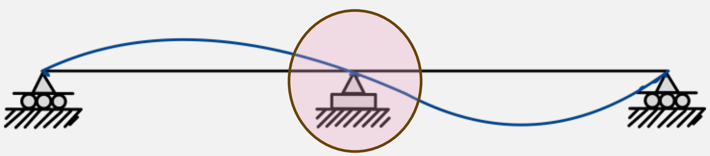
$$\delta_B = \delta_1 + \delta_2 . \boxed{X_1} = 0$$

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

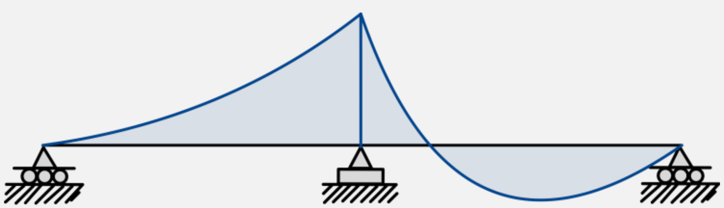
- No método dos deslocamentos, as incógnitas são deslocamentos em pontos adequadamente escolhidos na estrutura, que são obtido por meio da resolução de um sistema de equações lineares de equilíbrio.



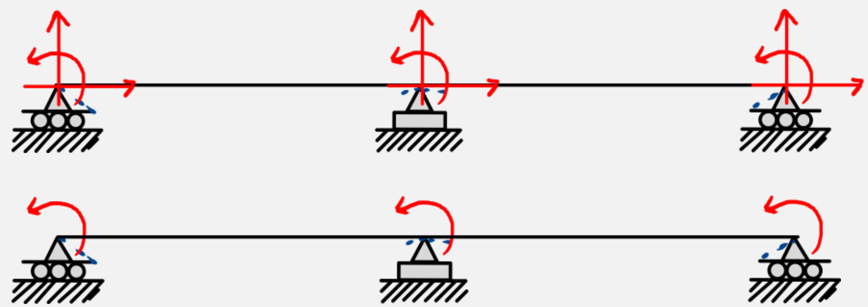
- A curva elástica fica da seguinte forma:



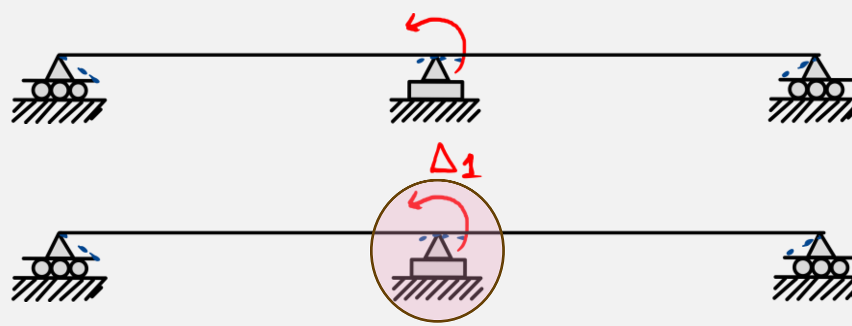
- O diagrama de momento fletor:



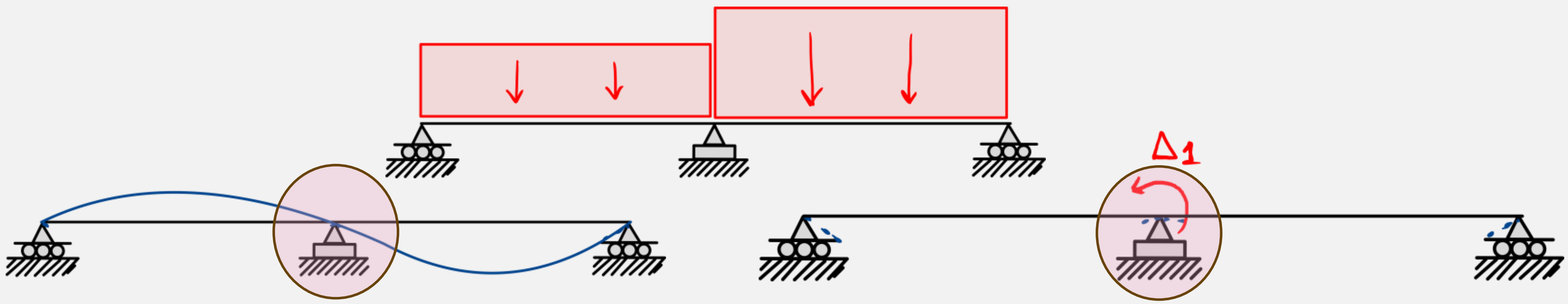
- Verificação de deslocabilidades da estrutura:



- Observando que a análise é feita em deslocabilidades que envolvam no mínimo duas barras, tem-se somente uma deslocabilidade:



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA



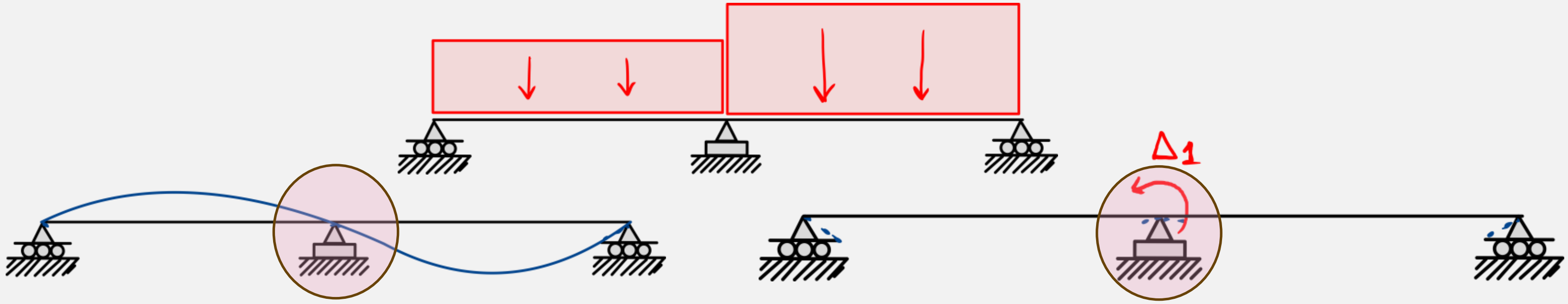
- Há infinitas possibilidades de valores de (Δ_1), para satisfazer as condições de compatibilidade.

- O método do deslocamento procura, dentro de todas as configurações deformadas que satisfazem a compatibilidade, aquela que também satisfaça o equilíbrio.

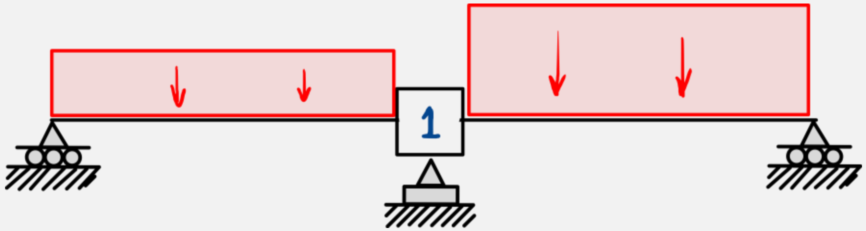
- O equilíbrio da estrutura é imposto na forma de equilíbrio dos nós isolados, considerando que as barras isoladas estão em equilíbrio.

- Por esse motivo, a solução do método dos deslocamentos incide em encontrar valores que Δ_1 devem ter para que o nó interno fique em equilíbrio, observando que nos outros apoios o equilíbrio já é satisfeito pelas reações de apoio.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

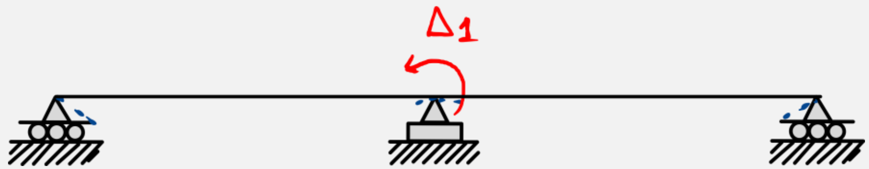


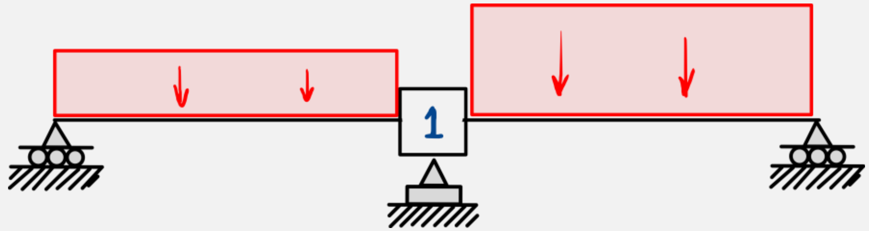
- Na metodologia do método dos deslocamentos, os casos básicos isolam o efeito da solicitação externa (carregamento) e os efeitos de cada uma das deslocabilidades.
- Cada efeito isolado afeta o equilíbrio do nó interno.
- Na superposição dos casos básicos é imposto o equilíbrio do nó interno.
- Abaixo é apresentado o sistema hipergeométrico da estrutura:



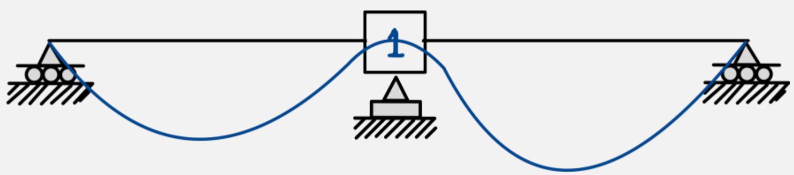
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- Para iniciar a análise da estrutura cria-se uma sistema principal, ou sistema hipergeométrico. Realizando o travamento dos deslocamentos encontrados:





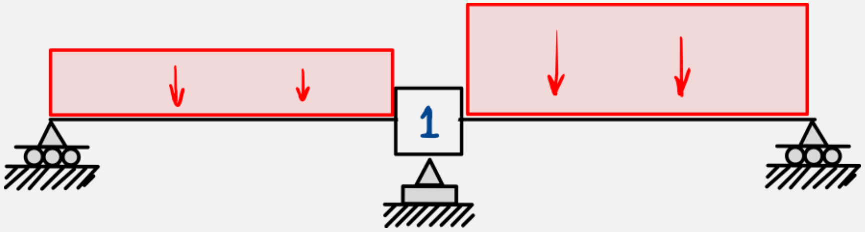
- A curva elástica da estrutura fica da seguinte forma:



- Deslocamento de rotação nula (0).

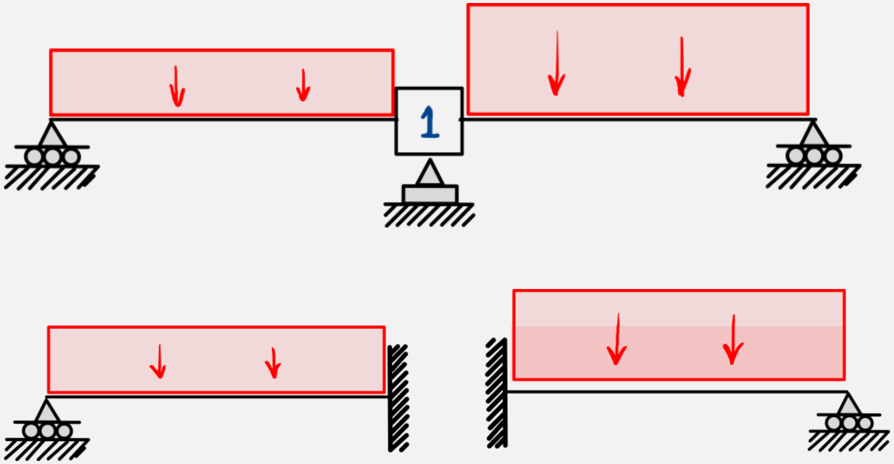
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- Portanto, com o Sistema Hipergeométrica definida, inicia-se os casos básicos da estrutura.
- **Caso 0 – Solicitação externa (carregamento) isolado no Sistema Hipergeométrico.**
- Nesse caso, é realizado o isolamento da solicitação externa (carregamento aplicado).
- Como na estrutura de estudo está ocorrendo deslocamento de rotação aparecerá momentos no apoio fictício. Que serão chamados de **termo de carga ($\boldsymbol{\beta_{ij}}$).** No caso do exemplo, será $\boldsymbol{\beta_{10}}$.
- O primeiro subscrito do termo de carga se refere ao deslocamento que está sendo analisado e o segundo subscrito é o caso que está ocorrendo.



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- **Caso 0 – Solicitação externa (carregamento) isolado no Sistema Hipergeométrico.**
- Como a chapa não transmite esforços entre as barras, faz-se a análise isolada de cada barra.



- Para resolver essa situação utiliza-se tabelas. Ou método das forças.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

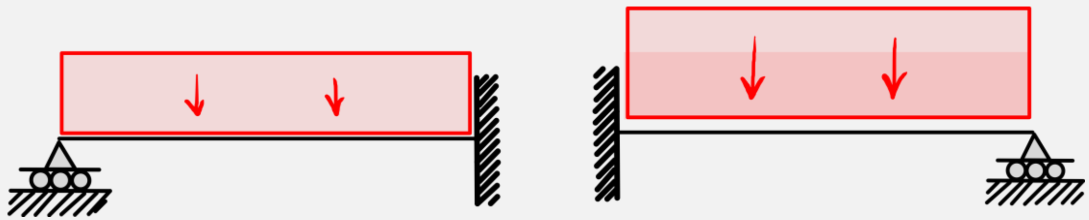


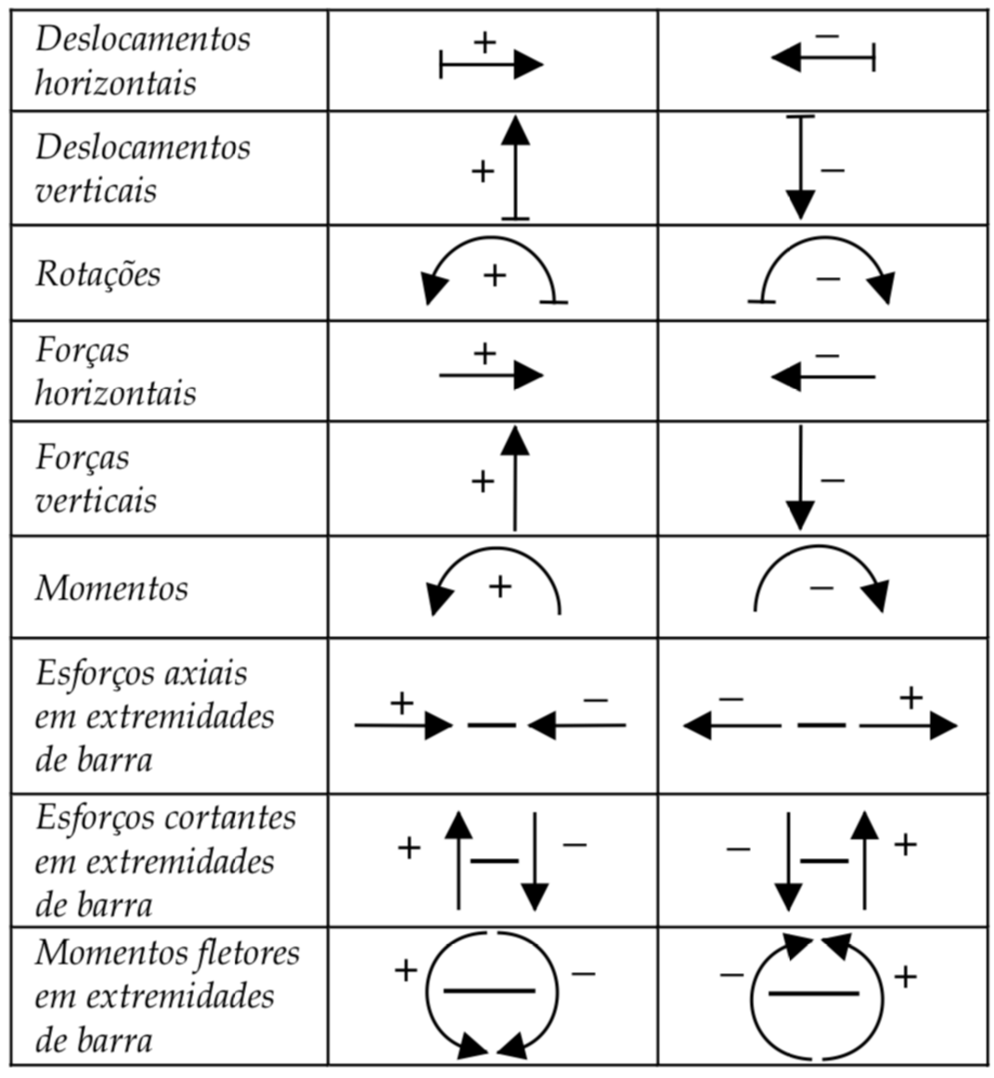
TABELA 3.2a MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO		A ℓ B	C ℓ D		E ℓ F
CARREGAMENTO		M_{BA}	M_{CD}	M_{DC}	M_{EF}
1	p	$-\dfrac{p\ell^2}{8}$	$\dfrac{p\ell^2}{12}$	$-\dfrac{p\ell^2}{12}$	$\dfrac{p\ell^2}{8}$
2	p; a, c, a	$-\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$-\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$

- Importante ressaltar que a convenção de sinais para momento:

Momentos	+	−

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- Convenção de todos os esforços:



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

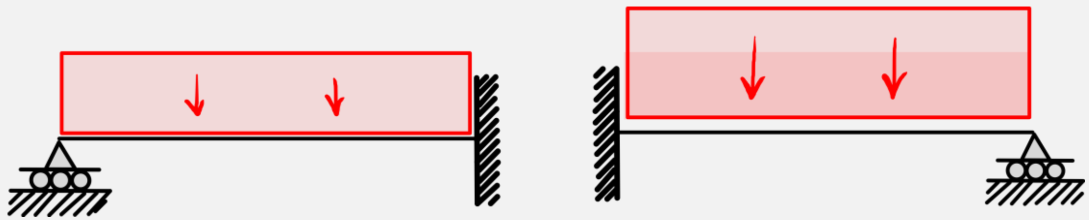


TABELA 3.2a					
MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO					
CARREGAMENTO		A ℓ B	C ℓ D		E ℓ F
		M_{BA}	M_{CD}	M_{DC}	M_{EF}
1	p	$-\dfrac{p\ell^2}{8}$	$\dfrac{p\ell^2}{12}$	$-\dfrac{p\ell^2}{12}$	$\dfrac{p\ell^2}{8}$
2	p; a c a	$-\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$-\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$

- Com os valores dos momentos calculados em cada extremidade, tem-se o valor do termo de carga (β_{10})
- Atente-se que no termo de carga β_{10} o primeiro índice representa o deslocamento analisado e o segundo índice representa o caso analisado.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

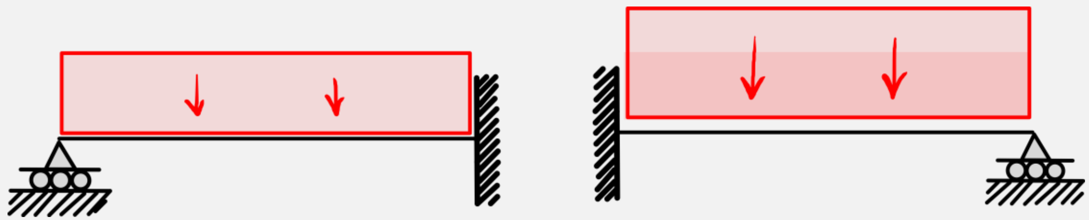
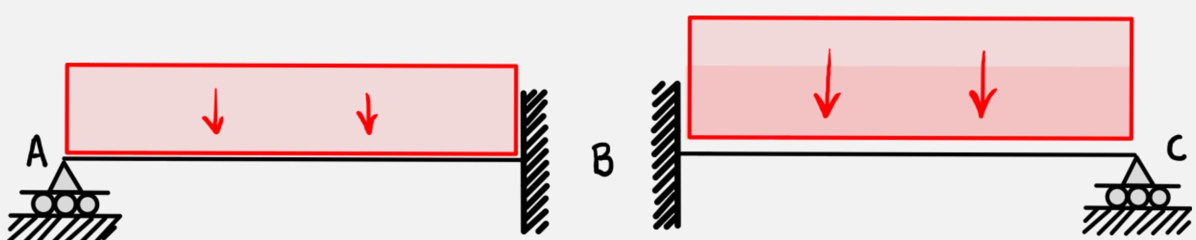


TABELA 3.2a MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO					
CARREGAMENTO		A ℓ B	C ℓ D		E ℓ F
		M_{BA}	M_{CD}	M_{DC}	M_{EF}
1	p	$-\dfrac{p\ell^2}{8}$	$\dfrac{p\ell^2}{12}$	$-\dfrac{p\ell^2}{12}$	$\dfrac{p\ell^2}{8}$
2	p; a, c, a	$-\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$-\dfrac{pc}{24\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$	$\dfrac{pc}{16\ell}\left(3\ell^2-c^2\right)$

- O termo de carga é a soma dos momentos de cada extremidade

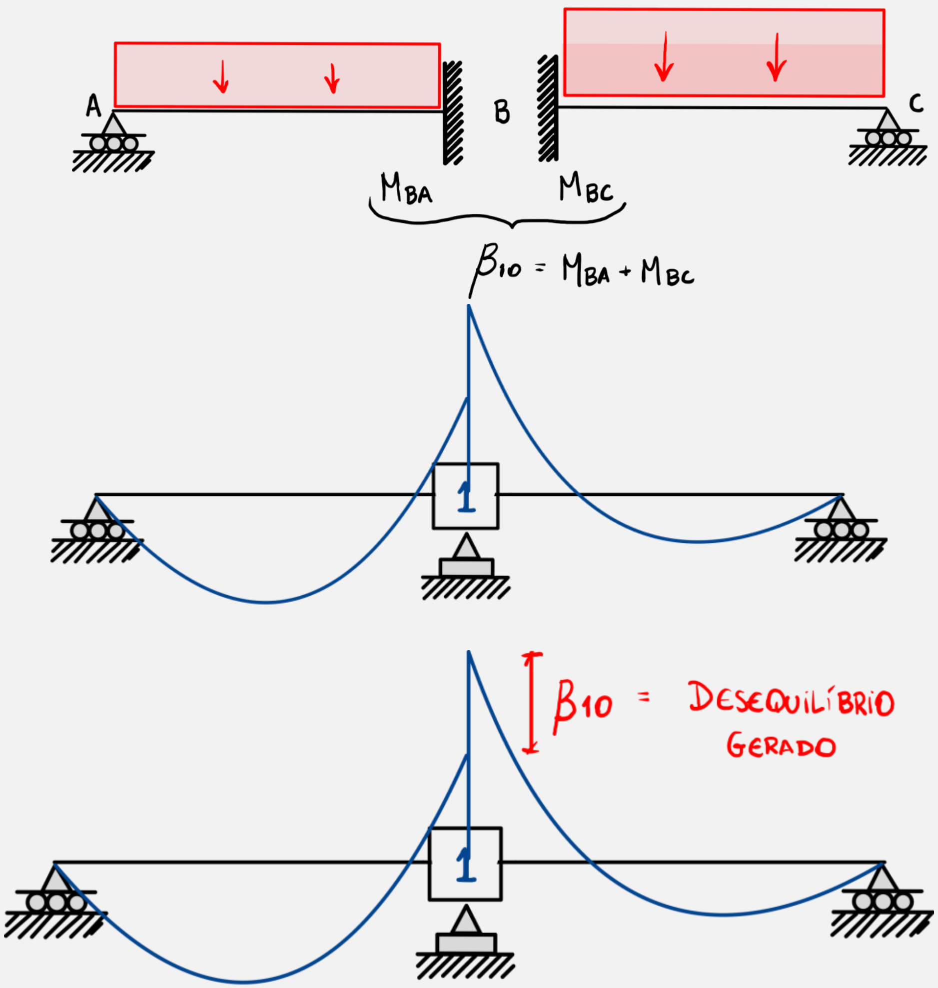


$$\underbrace{M_{BA} \qquad M_{BC}}$$

$$\beta_{10} = M_{BA} + M_{BC}$$

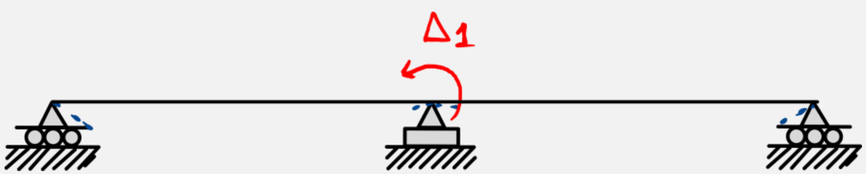
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

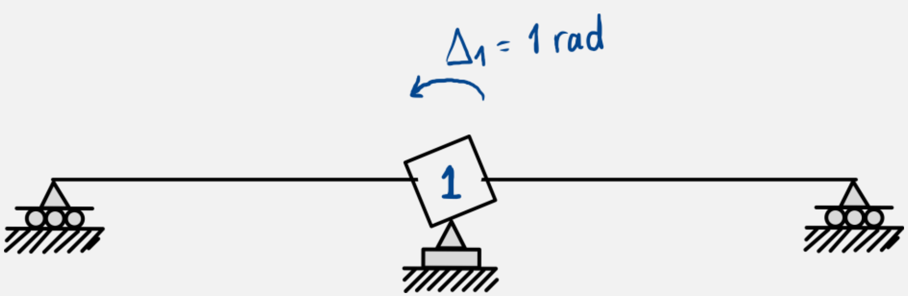
- O termo de carga é a soma dos momentos de cada extremidade

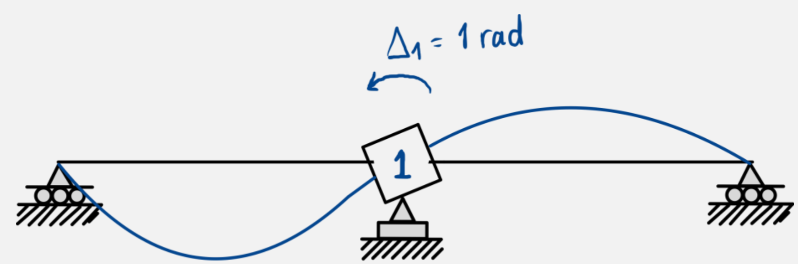


MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- **Caso 1 – Deslocabilidade Δ_1 isolada no sistema hipergeométrico**
- O próximo passo (Caso 1) isola o efeito da deslocabilidade Δ_1. Se nesse exemplo tivesse mais deslocabilidades, elas seriam mantidas nulas
- É realizada uma rotação unitária porque é o nosso deslocamento em análise.
- Considera um valor unitário para Δ_1, sendo o efeito Δ_1 multiplicado pelo valor final que Δ_1 deverá ter.





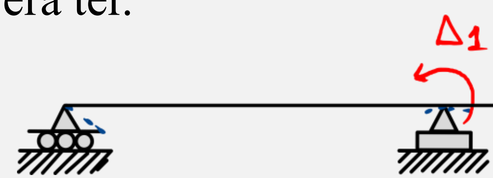


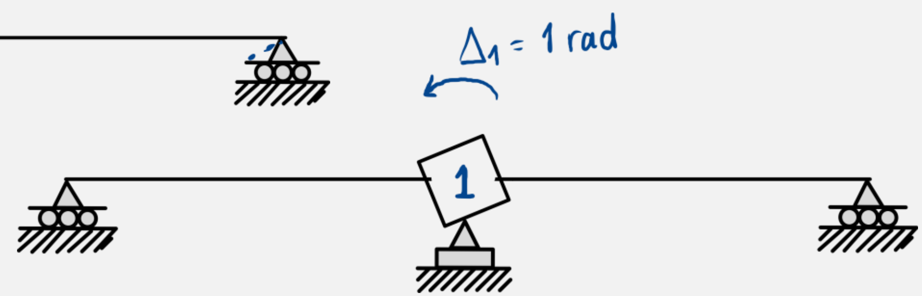
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

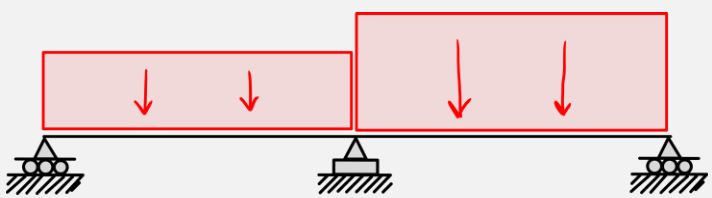
- **Caso 1 – Deslocabilidade Δ_1 isolada no sistema hipergeométrico**
- Para se ter a configuração deformada em que $\boldsymbol{\Delta_1} = 1$ é necessário aplicar um momento nodal que mantém o sistema hipergeométrico em equilíbrio nessa configuração.
- O momento que aparece no apoio fictício do sistema hipergeométrico para equilibrá-lo quando $\boldsymbol{\Delta_1} = 1$, é chamado de **coeficiente de rigidez global** (K_{ij})
- O **coeficiente de rigidez global** (K_{ij}) é força ou momento que deve atuar na direção do $\boldsymbol{\Delta_1}$ para manter a estrutura em equilíbrio quando é forçada a configuração de $\boldsymbol{\Delta_1} = 1$.
- No nosso exemplo o coeficiente de rigidez global é um momento.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

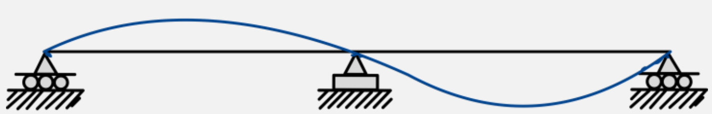
- **Caso 1 – Deslocabilidade Δ_1 isolada no sistema hipergeométrico**
- O próximo passo (Caso 1) isola o efeito da deslocabilidade Δ_1. Se nesse exemplo tivesse mais deslocabilidades, elas seriam mantidas nulas
- É realizada uma rotação unitária porque é o nosso deslocamento em análise.
- Considera um valor unitário para Δ_1, sendo o efeito Δ_1 multiplicado pelo valor final que Δ_1 deverá ter.

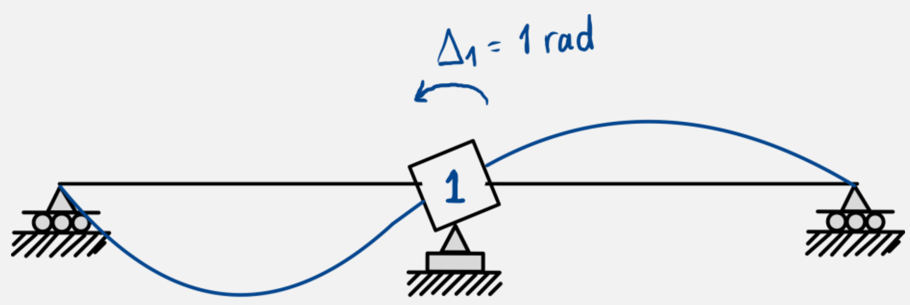






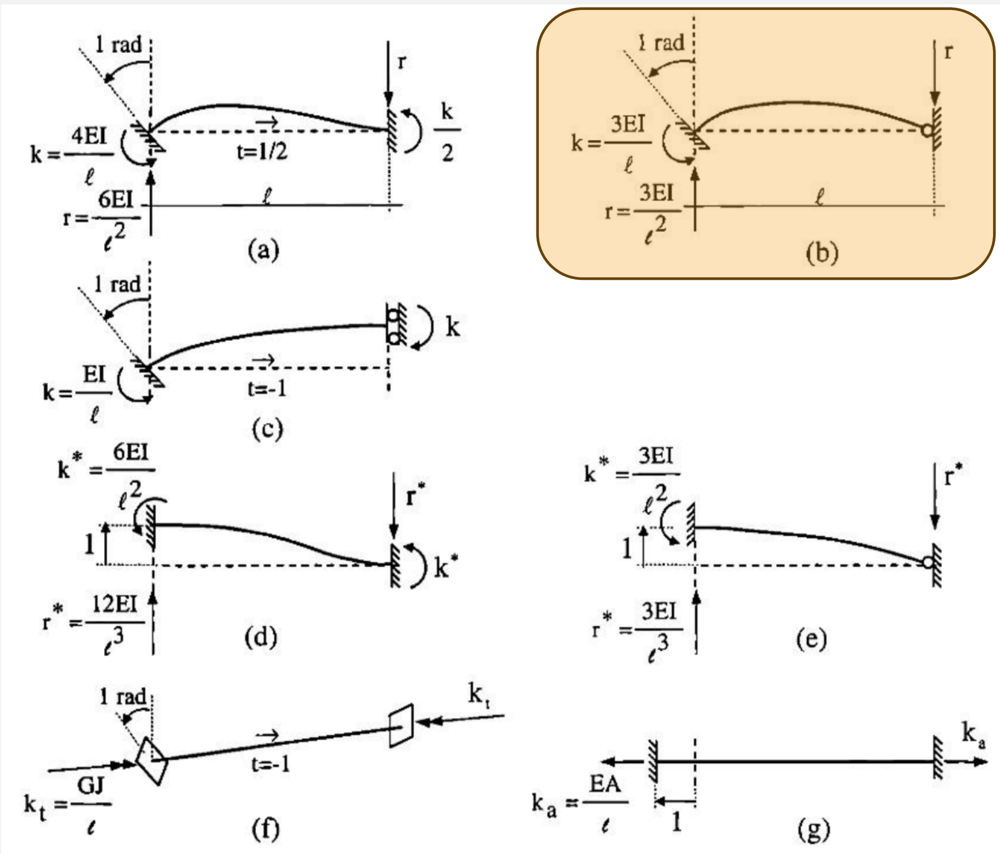
- A linha elástica fica da seguinte forma:

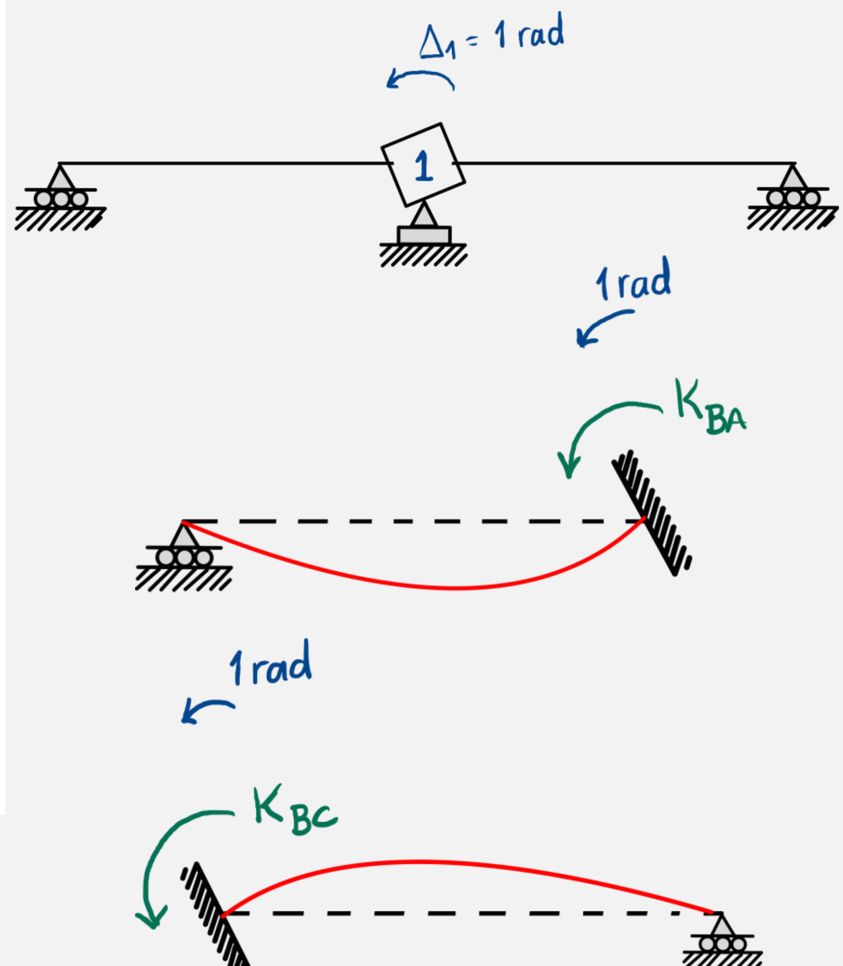




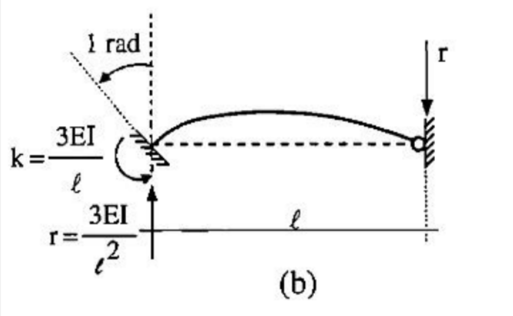
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- O cálculo da **a rigidez de uma barra** é realizado através de tabelas.

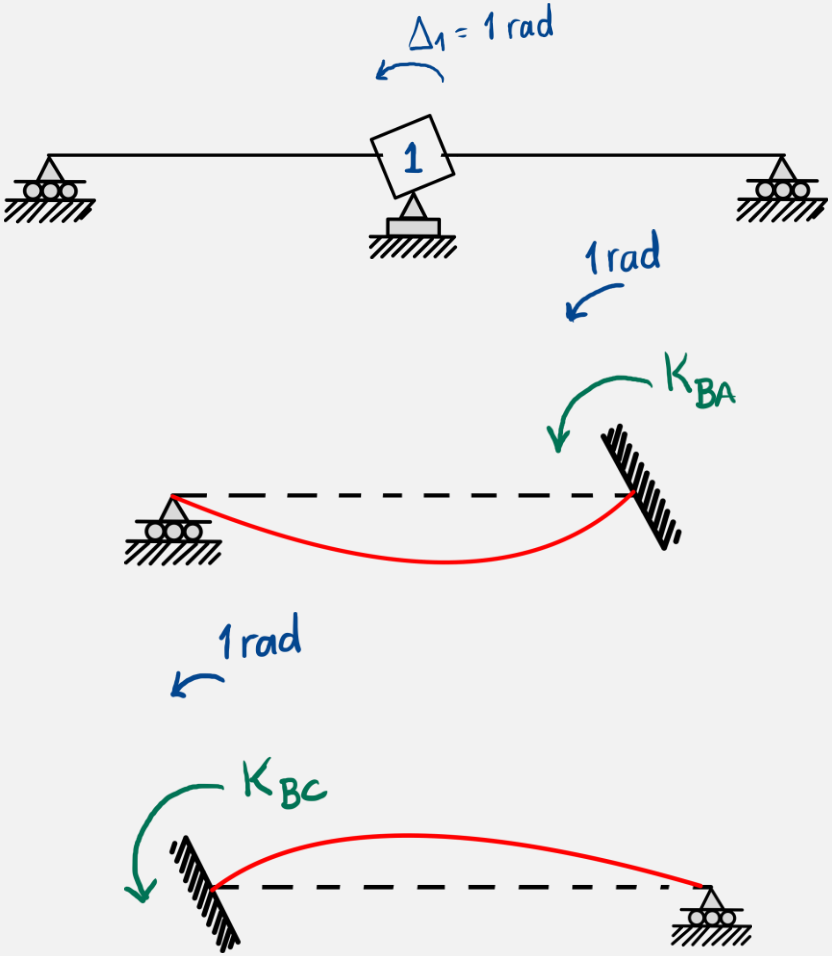




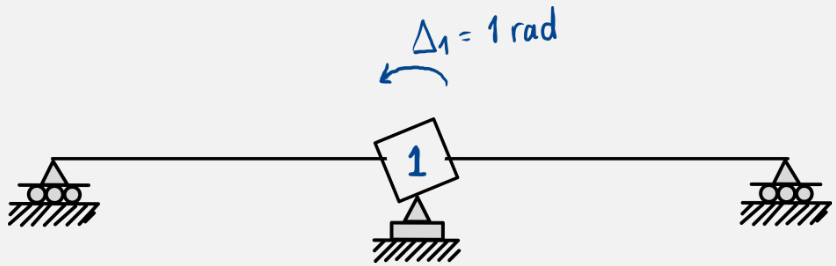
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA



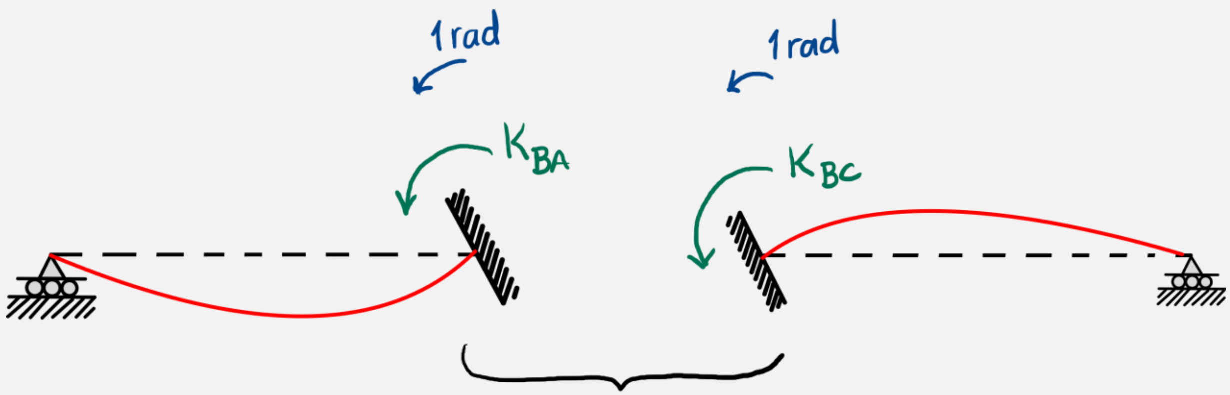
- Para a situação ao lado, tem-se:
- $Momento \ = \frac{3EI}{L}$
- $Reação\ de\ apoio \ = \frac{3EI}{L^2}$



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA



- O valor do coeficiente de rigidez global do caso será a soma de cada rigidez das barras, como apresenta abaixo:

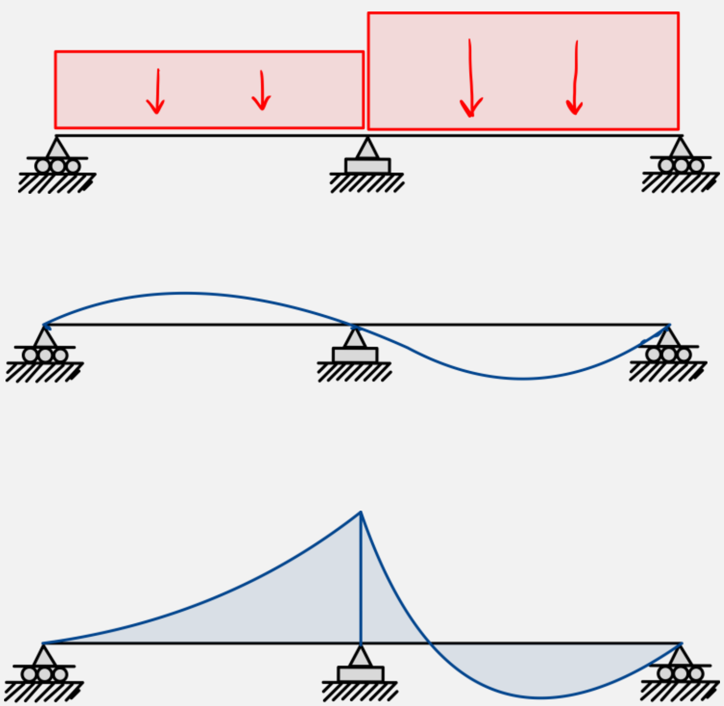


$$K_{11} = K_{BA} + K_{BC}$$

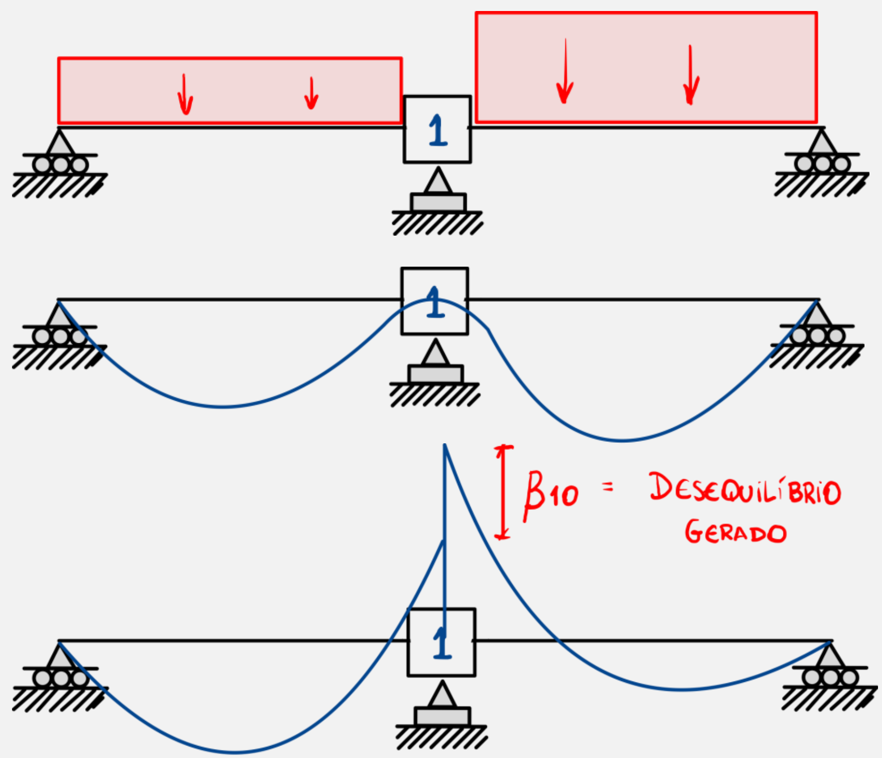
MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- Para finalizar a análise da estrutura, é necessário **reestabelecer as condições de equilíbrio da estrutura.**

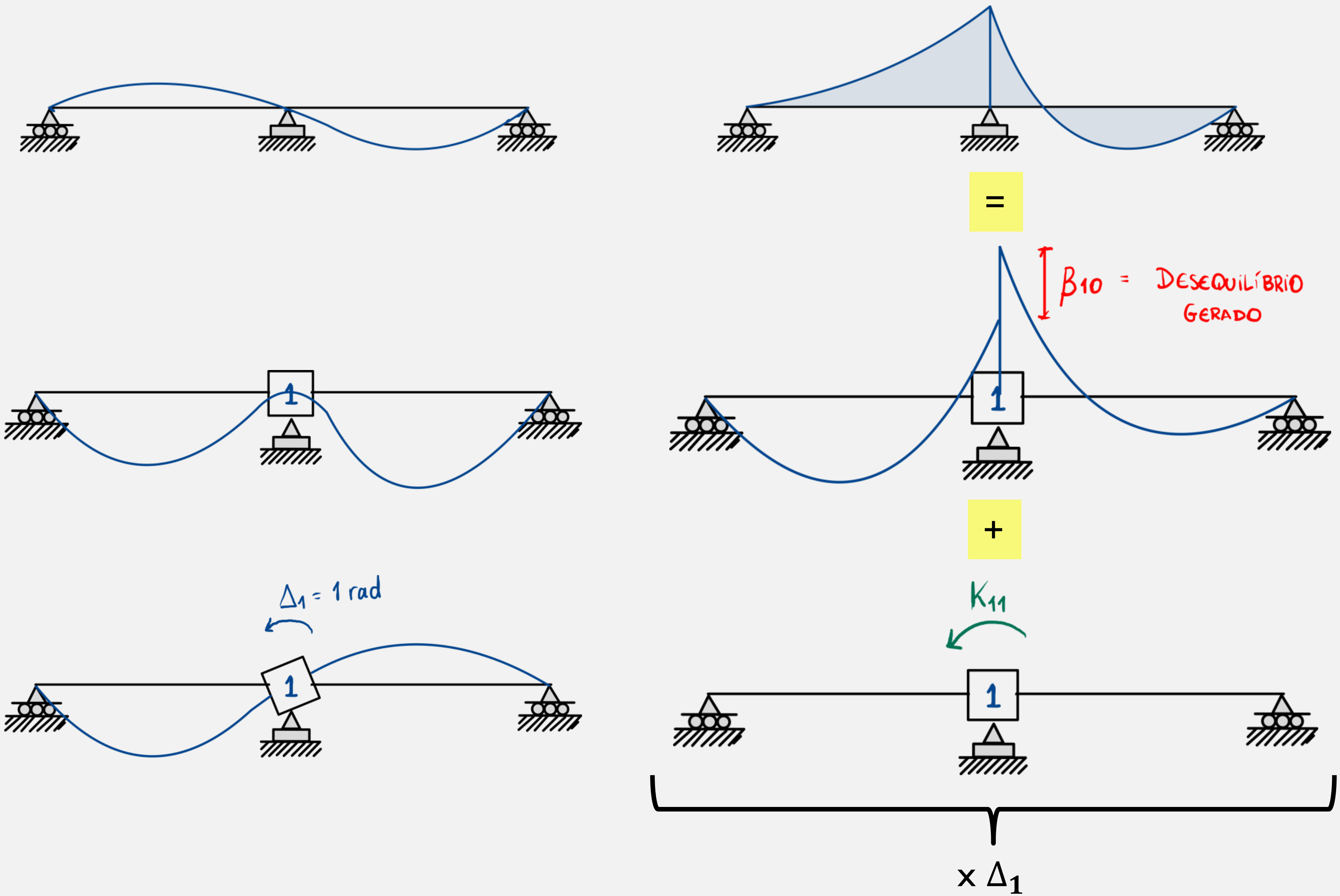
- Abaixo tem-se a estrutura em equilíbrio



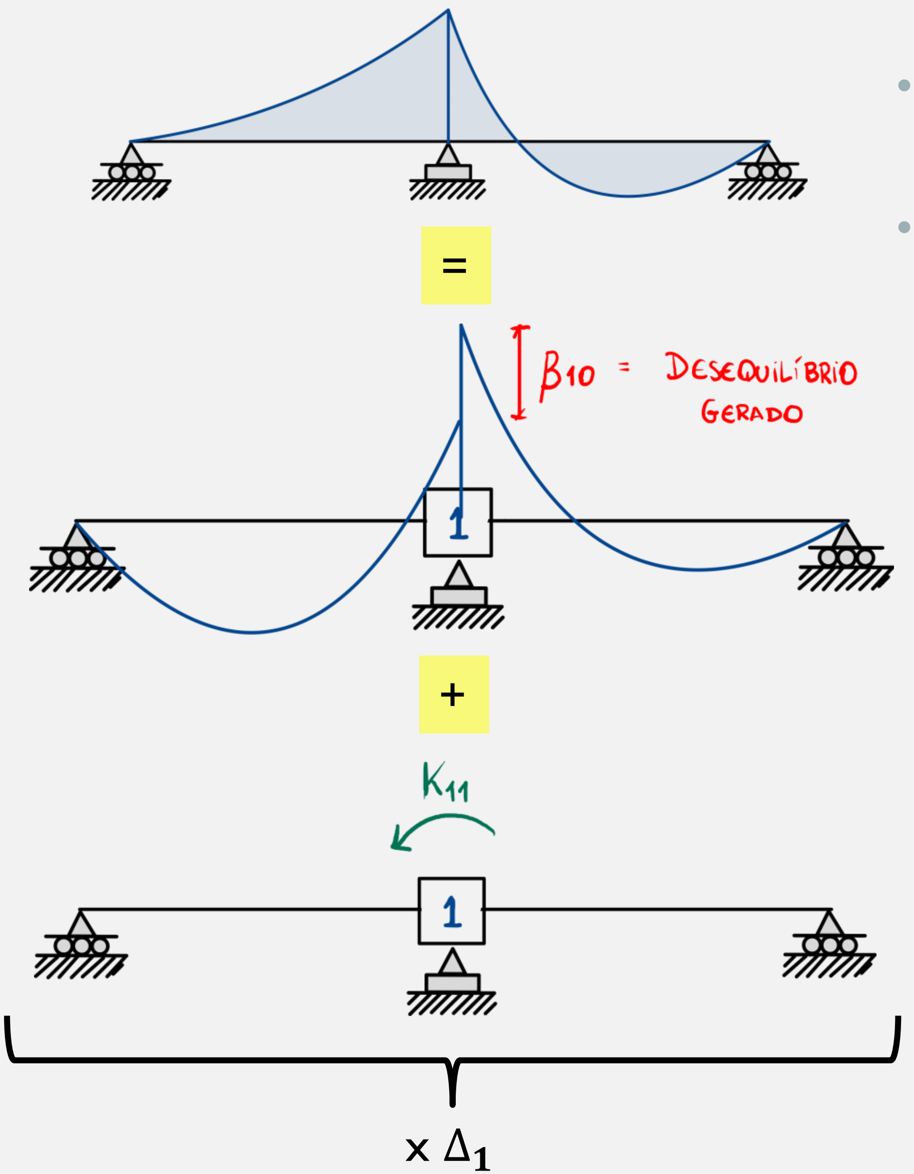
- Ao observar o caso 0, houve um desequilíbrio, como apresenta abaixo:



MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

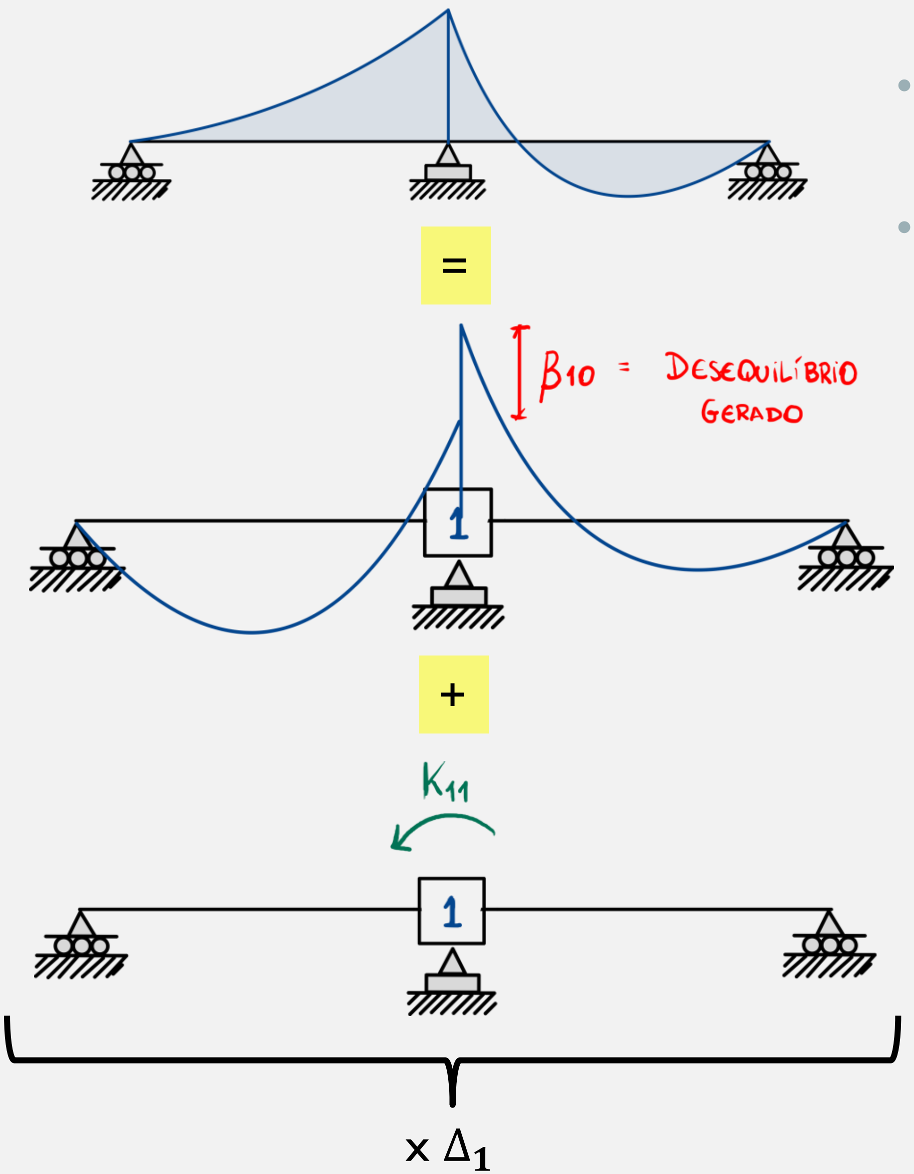


MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA



- **Reestabelecimento das condições de equilíbrio.**
- Considerando que a estrutura inicial possui equilíbrio. Tem-se:
- $$\beta_{10} + K_{11}.\Delta_1 = 0$$
- Por Δ_1 ser rotação sua unidade é rad.
- O valor de Δ_1 faz com que a resultante de momento externo que atuam no nó interno da estrutura sejam nulas.
- Com isso, atingiu-se a solução correta da estrutura, pois além de satisfazer as condições de compatibilidade, satisfaz também as condição de equilíbrio.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA



- Reestabelecimento das condições de equilíbrio.
- Considerando que a estrutura inicial possui equilíbrio. Tem-se:
- $$\beta_{10} + K_{11}.\Delta_1 = 0$$
- Os sinais das deslocabilidades são determinadas pelos sentidos em que foram impostos nos casos básicos.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- **Determinação dos esforços internos**

- Com os valores das deslocabilidades determinados, o cálculo dos diagramas finais de esforços da estrutura segue o mesmo caminho utilizado no método das forças.
- Utilizando a superposição dos casos básicos.
- Por exemplo, os momentos fletores:

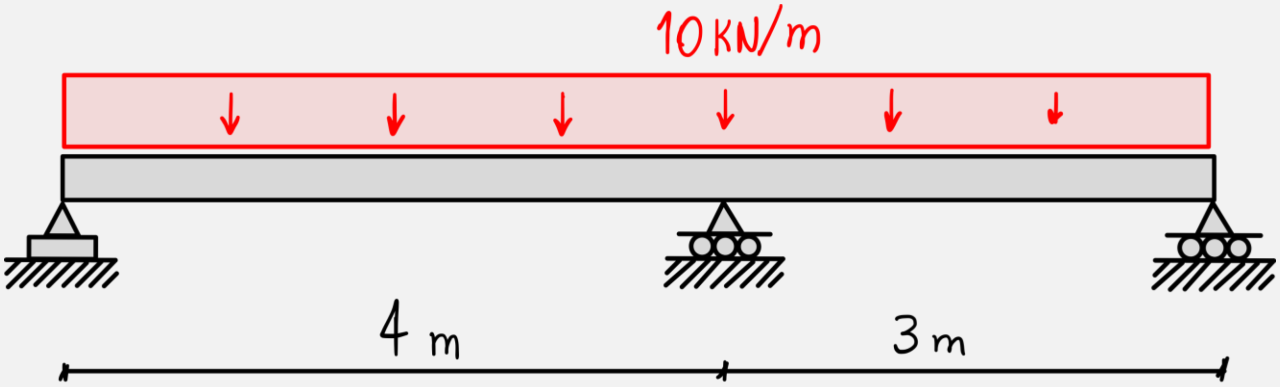
$$M_R = M_0 + M_1 . \Delta_1$$

- A superposição pode ser utilizada para todos os esforços internos.

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – APLICAÇÃO

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

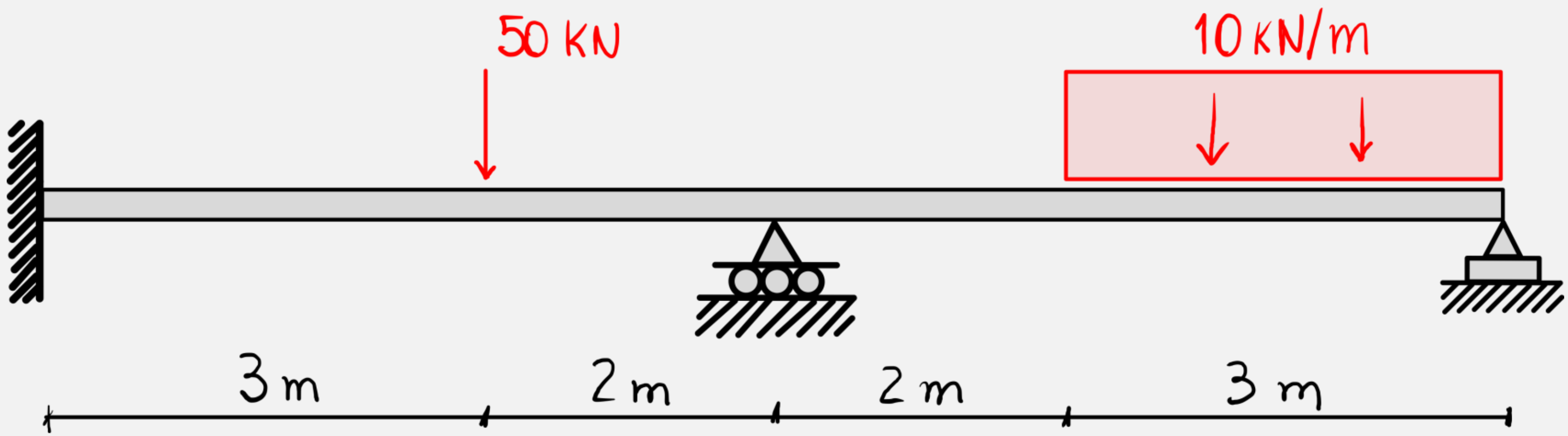
- Exemplobpresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:
- Considerar EI: 23.426 kN.m2



- Rya = 15,95 kN
- Ryb = 44,5 kN
- Ryc = 9,61 kN

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

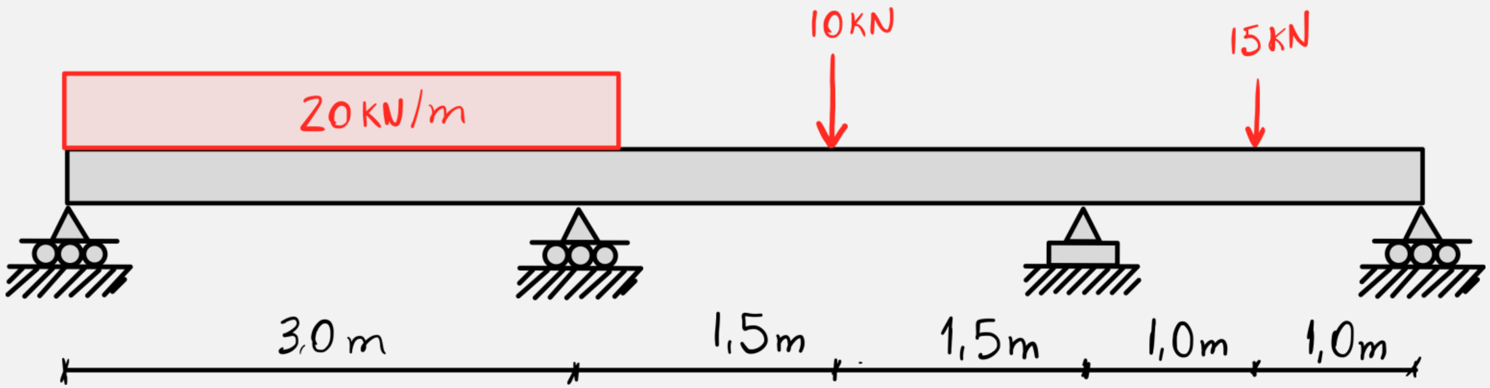
- Exemplo
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:
- Considerar EI: 23.426 kN.m2



- Rya = 20,61 kN
- Ma = 29,01 kNm
- Ryb = 43,59 kN
- Ryc = 15,81 kN

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

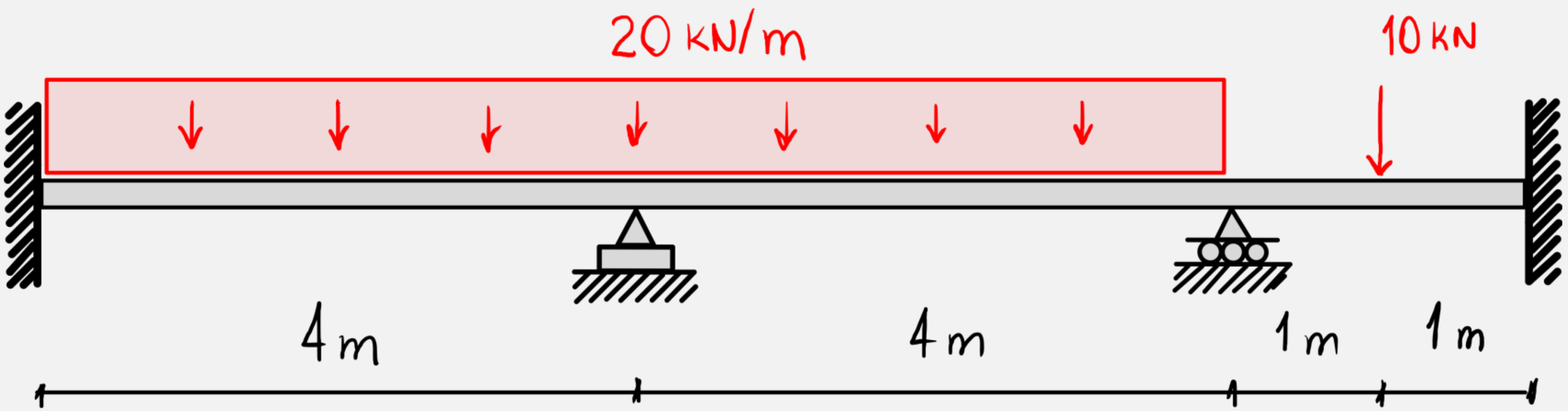
- Exemplo
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:
- Considerar EI: 23.426 kN.m2



- Rya = 25,4 kN
- Ryb = 43,6 kN
- Ryc = 9,21 kN
- Ryd = 6,74 kN

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS – METODOLODIA

- Exemplo
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:
- Considerar EI: 23.426 kN.m2



- Rya = 39,21 kN - Ma = 25,62 kNm
- Ryb = 83,15 kN
- Ryc = 55,24 kN
- Ryd = -7,61 kN - Md = 5,91 kNm