

TEORIA DAS ESTRUTURAS II

Aula 06

Bacharelado em Engenharia Civil - 6º Período

Prof. Celso José Roberto Soares Júnior



ASSUNTOS DE HOJE:

- Introdução a Estruturas Estaticamente Indeterminadas
- Métodos para análise de estruturas hiperestáticas
 - Método das forças
 - Método das forças - estrutura com um único grau hiperestático
 - Método das forças - estrutura com mais de um grau hiperestático

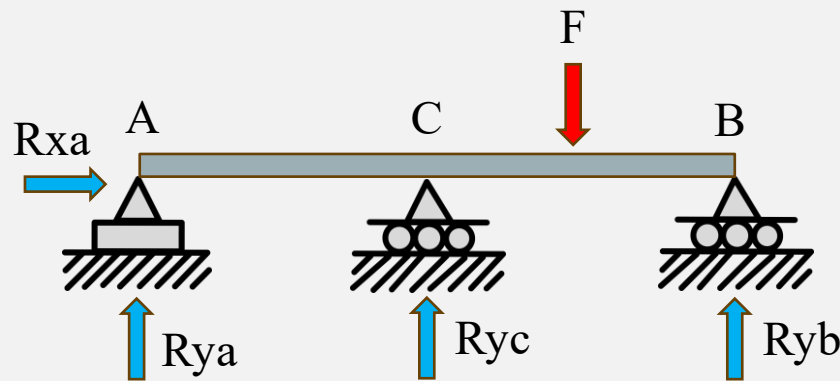


INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS



INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

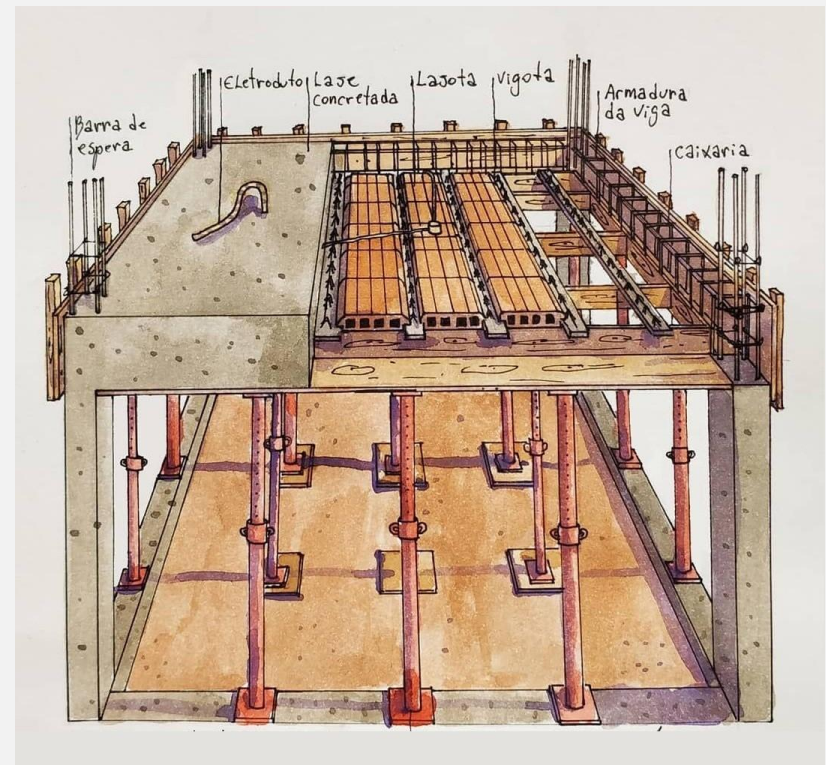
- Quando em uma estrutura houver muitas reações externas e/ou forças internas a serem determinadas e não for capaz de resolvê-las utilizando as equações de equilíbrio estático, mesmo com a inclusão de equações de compatibilidade, ela será uma **estrutura estaticamente indeterminada ou hiperestáticas**.
- Por exemplo:



- Acima tem-se 4 reações nos apoios, não sendo possível calcular utilizando somente as equações de equilíbrio estático.

INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- Até o momento somente foi apresentado estruturas isostáticas, estruturas as quais **não são usuais em estruturas modernas**. Dificilmente é encontrada uma viga bi apoiada ideal.
- Inclusive treliças isostáticas, as suposições que eram feitas sobre treliças isostáticas não são todas verdadeiras, por exemplo os **nós aparafusados ou soldados serem lisos**, sem atrito. De certa forma, **as treliças apresentam algum tipo de momento fletor**.
- As estruturas de concreto armado moldadas no local são estaticamente indeterminadas.
- Como é apresentado na imagem ao lado, as vigas, lajes e até mesmo pilares podem ser lançado ao mesmo tempo.



INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- Barras de aço da armadura são prolongadas de um elemento ao outro de uma viga para o próximo elemento.
- Em juntas construtivas, barras de armaduras são deixadas salientes no concreto antigo para serem emendadas ou justapostas às barras da armadura do concreto novo.
- Ou seja, **geralmente uma estrutura de concreto armado é monolítica ou contínuas, portanto, é estaticamente indeterminada.**



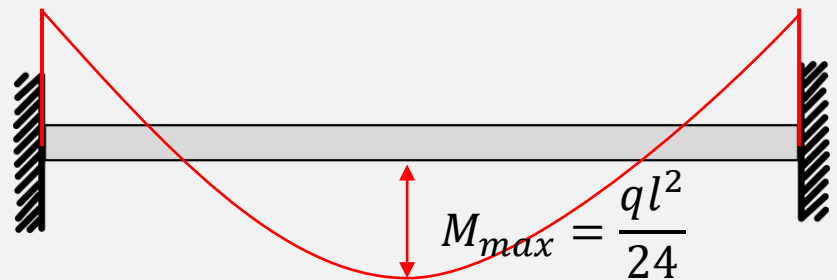
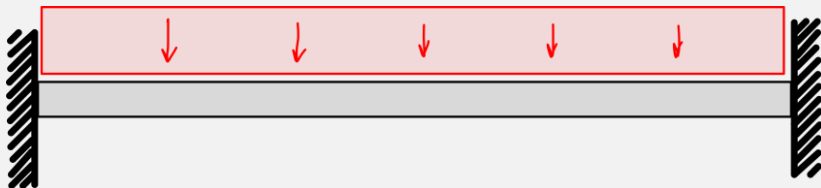
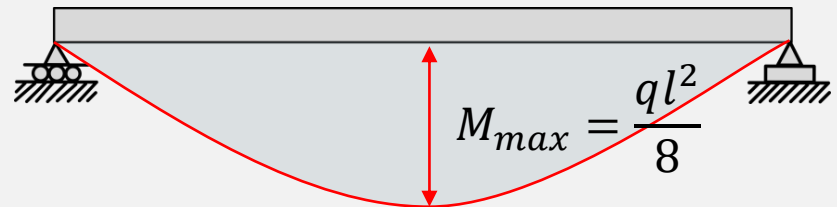
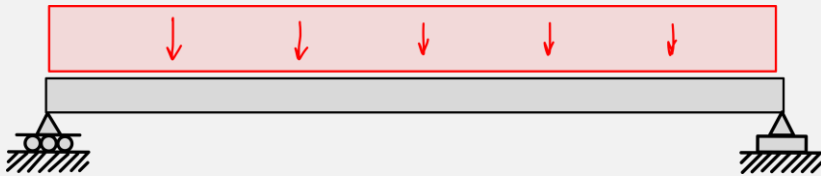
INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- O mais próximo de uma estrutura estaticamente determinada seriam as estruturas de concreto pré-moldado, montadas no local da obra. E ainda sim, podem apresentar alguma continuidade das em suas juntas.



INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

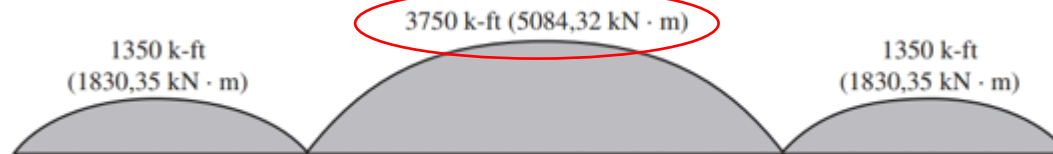
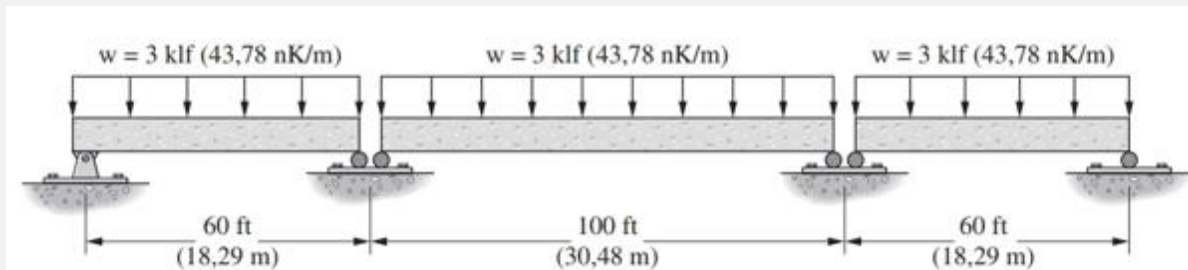
- Observe a viga abaixo, em que apresenta o seu diagrama de momento fletor.



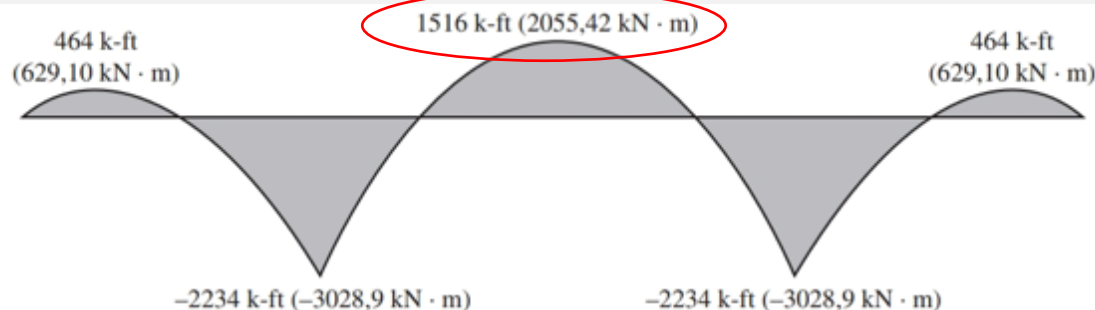
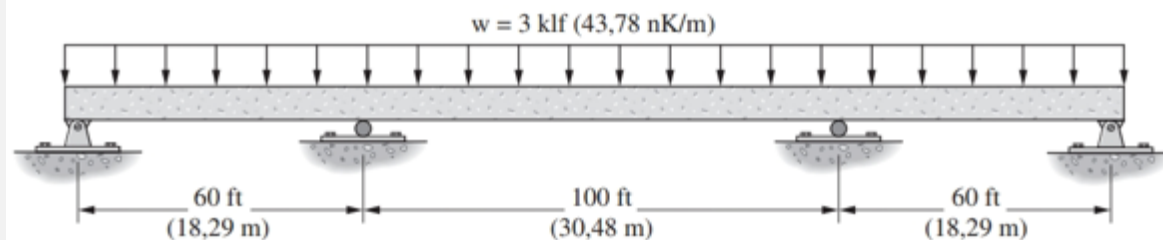
- Percebe-se uma diminuição considerável no momento fletor máximo em uma estrutura hiperestática.

INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- O mesmo ocorre em vãos contínuos.



(a) Diagrama de momentos fletores no caso de três vigas biapoiadas



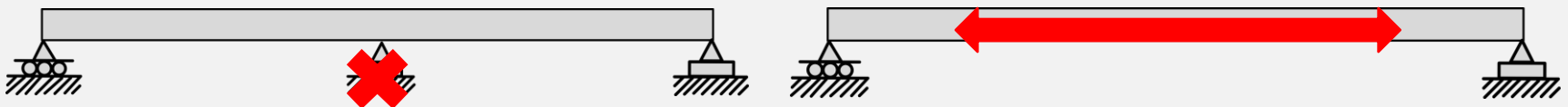
INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- Quando se compara estruturas hiperestáticas com isostáticas, **a primeira consideração é o custo**. Apesar de que cada estrutura possui uma questão diferente e exclusiva e todos os fatores devem ser levados em consideração.
- Como foi observado nos exemplos anteriores, em estruturas isostáticas **há o desenvolvimento de momentos fletores maiores**, conseqüentemente há a necessidade da utilização **de elementos maiores**. Em estruturas hiperestáticas, **por ter menores momentos fletores permite elementos menores**.
- Um elemento estrutural de um determinado tamanho pode suportar mais carga sendo parte de uma estrutura contínua do que se for simplesmente apoiado.
- A continuidade permite o uso de elementos estruturais menores para as mesmas cargas e os mesmos vãos ou maiores espaçamentos entre os apoios para elementos estruturais de mesmo tamanho.
- A possibilidade de menos pilares em edifícios ou menos colunas em pontes pode permitir uma redução nos custos globais.



INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

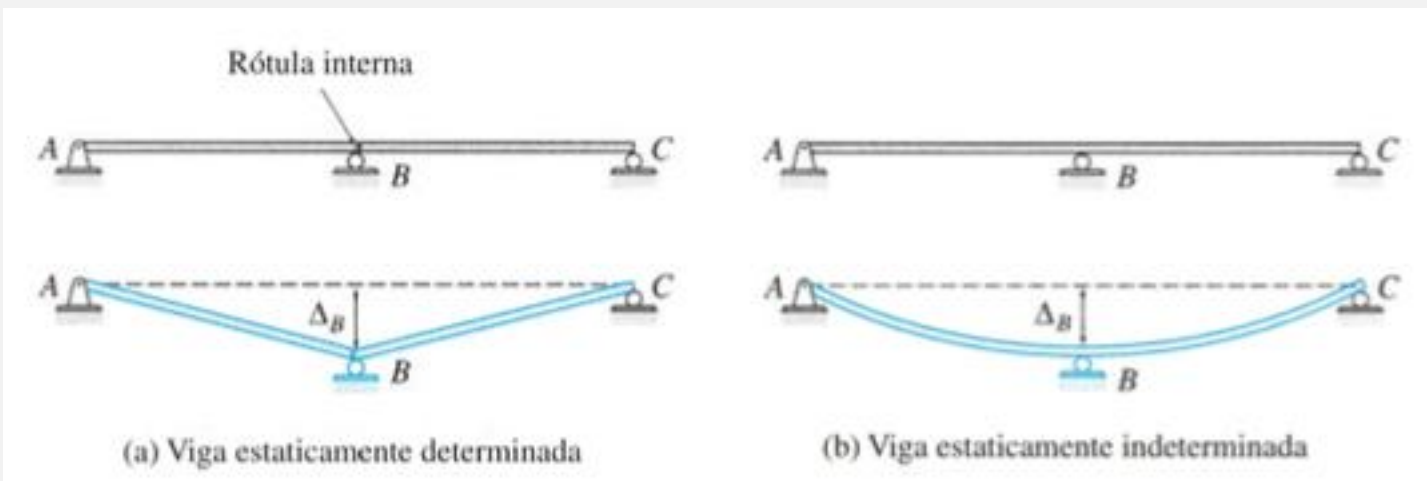
- Geralmente, as estruturas hiperestáticas possuem **coeficientes de segurança** maiores que estruturas isostáticas.
- Quando uma estrutura hiperestática é submetida a tensões acima de seus limites, frequentemente elas possuem **capacidade de redistribuir** partes daquelas tensões para áreas menos solicitadas.
- Caso uma estrutura isostática atinja o valor limite da capacidade de resistir ao momento fletor, ela entrará em colapso. **Em estruturas hiperestáticas ela pode ser redistribuída para outras partes da estrutura.**
- Por exemplo:



- Obviamente, as estruturas hiperestáticas por possuírem momentos fletores menor, **apresentam menores deflexões.**

INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

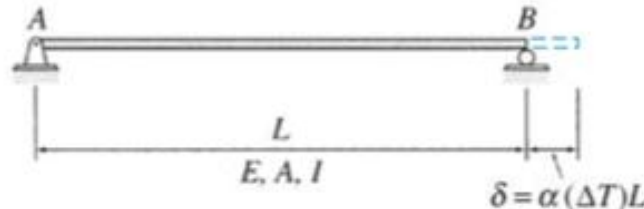
- Por outro lado, em situações em que as condições de fundações forem ruins as estruturas hiperestáticas não são tão desejáveis.



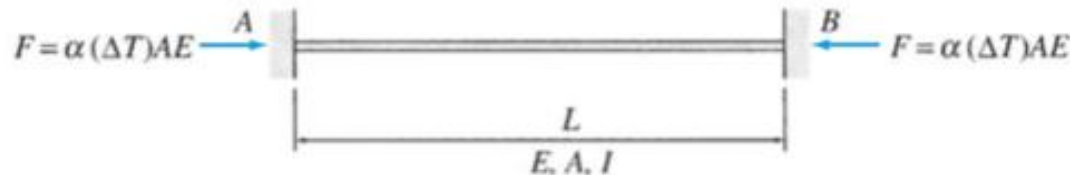
- Qualquer recalque ou rotação dos apoios pode gerar variações nos momentos fletores, esforços cortantes, forças de reação e forças nos elementos estruturais.

INTRODUÇÃO A ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

- Da mesma forma que os recalques de apoio, os efeitos de variação de temperatura não causam tensões em estruturas isostáticas, porém em estruturas hiperestáticas **induzem a tensões significativas**.



(a) Viga estaticamente determinada



(b) Viga estaticamente indeterminada

MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS



MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- Estruturas estaticamente indeterminadas **possuem mais forças desconhecidas** do que equações de equilíbrio estático.
- Dessa forma, não podem ser analisadas utilizando **somente** as equações de equilíbrio.
- As forças além das necessárias para manter a estrutura estável são denominadas **forças redundantes**.
- As forças redundantes podem ser **forças de reação ou forças** nos elementos que fazem parte da estrutura.
- Não importa se a estrutura é isostática ou hiperestática, a análise completa requer o uso de 3 tipos de relações:
 - Equações de equilíbrio;
 - Condições de compatibilidade; e
 - Relações entre força-deformação do elemento.



MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- Os métodos clássicos para análise de estruturas hiperestática são:
 - Métodos das forças, método da flexibilidade ou métodos da compatibilidade
 - Métodos dos deslocamentos ou método da rigidez
- **Métodos das forças**
- Nesse método, as incógnitas principais do problema são **forças e momentos**, que pode ser reações de apoio ou esforços internos. Todas as outras incógnitas são expressas em **termos de incógnita principais** escolhidas e substituídas em equações de compatibilidade, que então são resolvidas.
- A ideia básica é determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as **condições de equilíbrio**, qual solução faz com que as condições de compatibilidade também sejam satisfeitas.



MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- **Métodos dos deslocamentos ou método da rigidez**
- Nesse método, as incógnitas principais do problema são **deslocamentos e rotações**. Todas as outras incógnitas são expressas em termos de incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de equilíbrio, que depois são resolvidas.
- A ideia básica é determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as **condições de compatibilidade**, qual solução faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.



MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

- Esses métodos formam a base para os métodos modernos de análise.
- Sendo os métodos modernos:
 - Métodos de distribuição de momentos (Método de Cross)
 - Métodos matriciais.



MÉTODO DAS FORÇAS



MÉTODO DAS FORÇAS

- Método introduzido por James C. Maxwell, método das forças ou método da flexibilidade ou método das deformações compatíveis é utilizado para a análise de **estruturas estaticamente indeterminadas lineares e elásticas**.
- Os métodos utilizados para analisar estruturas hiperestáticas exigem que a solução atenda os **requisitos de equilíbrio e compatibilidade**.
- **Compatibilidade:** a estrutura deve se ajustar, não existindo lacunas e a sua forma defletida deve ser coerente com as restrições dos apoios.
- **Equilíbrio:** utilização de equações de equilíbrio estática em cada etapa da análise



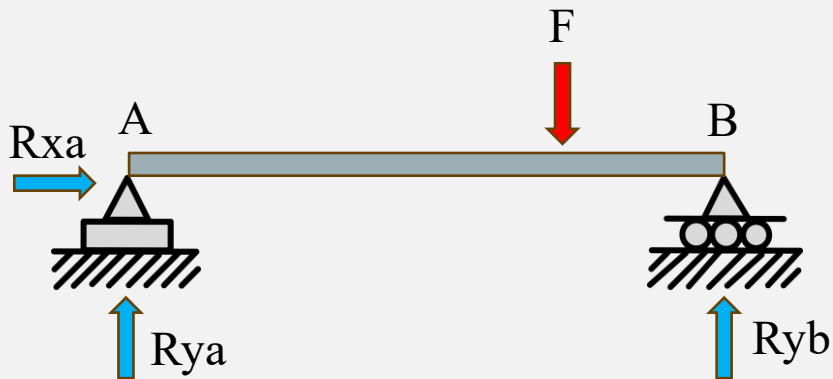
MÉTODO DAS FORÇAS

- A compatibilidade é satisfeita utilizando **uma ou mais equações de compatibilidade**, demonstrando que não há lacuna internamente ou que as deflexões **são coerentes com a geometria imposta pelos apoios**.
- O método envolve **a remoção de restrições** suficientes da estrutura hiperestática para torná-la isostática.
- Essa estrutura transformada em estrutura isostática deve ser estaticamente estável e é chamada de **estrutura principal**.
- As restrições em excesso são chamadas de **restrições redundantes** e as reações ou forças internas associadas com essa restrição são conhecidas por **hiperestáticos**.

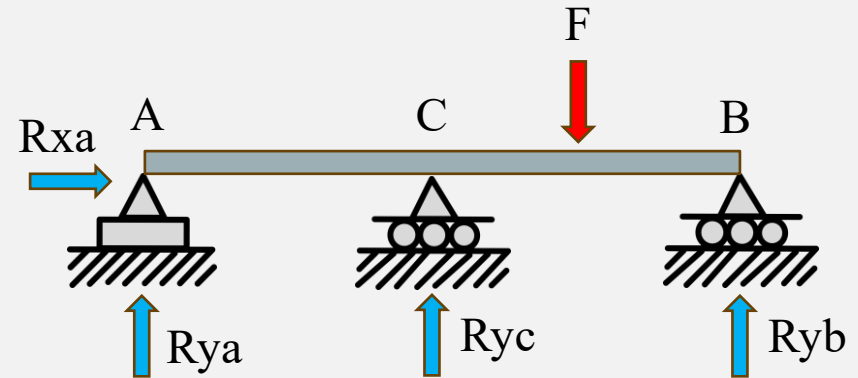


MÉTODO DAS FORÇAS

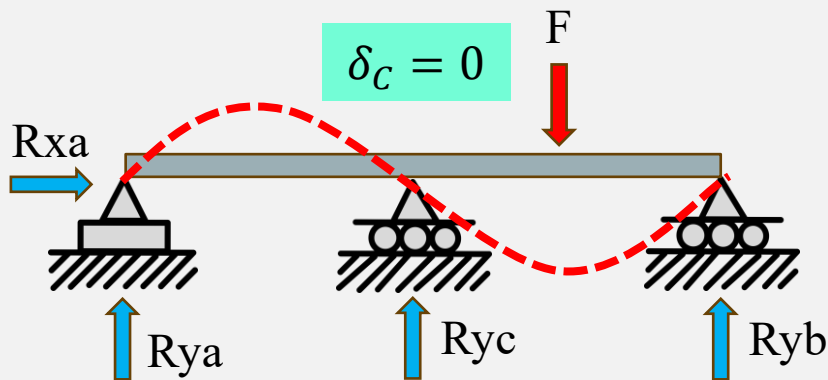
- Atente-se as vigas abaixo:



Estrutura Isostática



Estrutura Hiperestática



Com a inserção do apoio C, temos uma reação adicional para suportar a viga e como a reação C não é essencial para a estabilidade da estrutura ela é chamada de **redundante**.

Uma informação importante é que ao inserir o apoio C, tem-se que naquele ponto a deflexão vertical é nulo.

MÉTODO DAS FORÇAS

- Os hiperestáticos são aplicados como **cargas desconhecidas na estrutura principal** e seu valores são determinados resolvendo as **equações de compatibilidade** baseada na condição de que **as deformações da estrutura principal devem ser as mesmas que as deformações da estrutura indeterminada original.**
- Como nesse método as variáveis independentes ou incógnitas no método das deformações compatíveis são as forças hiperestáticas (e/ou momento), que devem ser determinadas antes que as outras características de resposta possam ser avaliadas, esse método é chamado de **método das forças.**
- Para ter um melhor entendimento, dividiu-se em o método em duas aplicações:
 - Aplicação em estrutura com um único grau hiperestático
 - Aplicação em estrutura com mais de um grau hiperestático

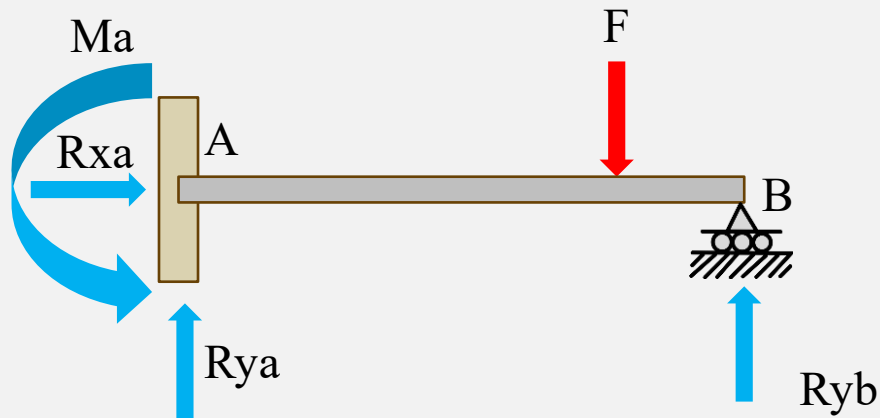


MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO



MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Observe o exemplo a seguir:

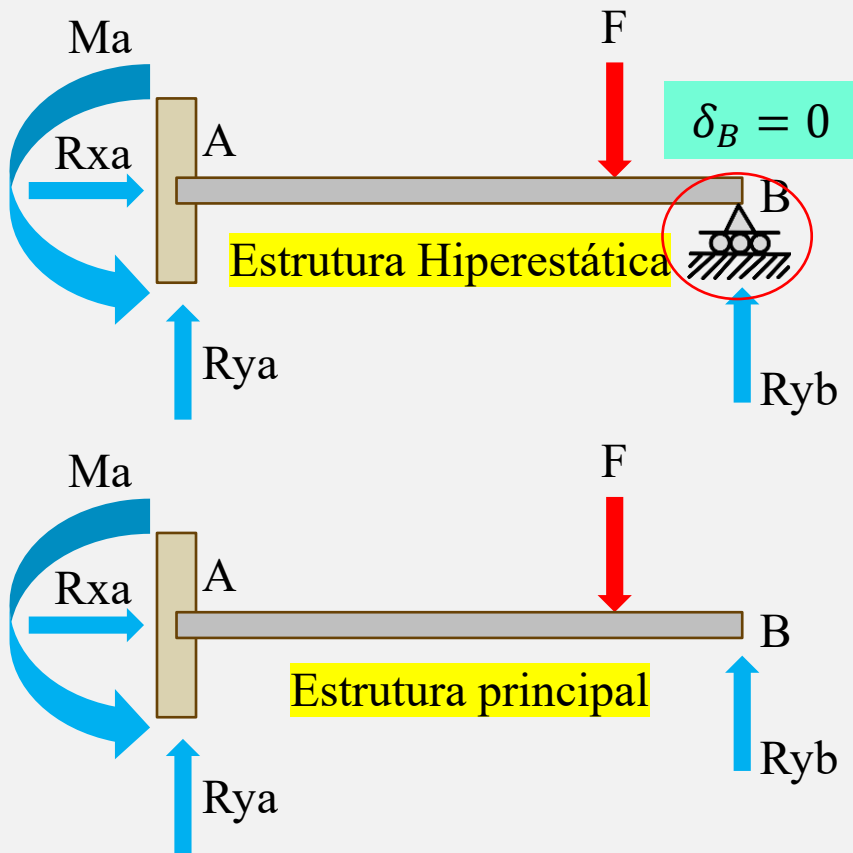


- Há 4 incógnitas nessa estrutura:
- R_{ya} , R_{xa} , M_a e R_{yb} .
- Com 3 equações de equilíbrio, não é suficiente para determinar as reações de apoio.

- O grau hiperestático da viga é igual ao número de reações desconhecidas menos a quantidade de equações de equilíbrio.
- G_h (Grau hiperestático) = $4 - 3$
- $G_h = 1$
- Com isso, tem-se uma estrutura com 1 grau hiperestático.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

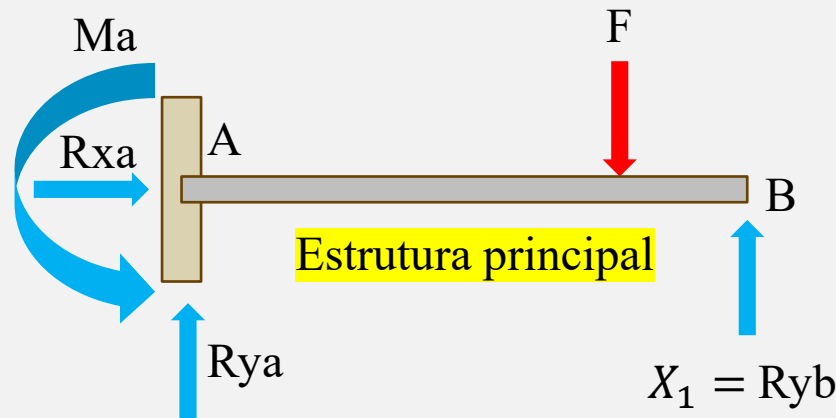
- Para estabelecer a equação de compatibilidade, deve-se escolher uma das reações da viga para ser o **hiperestático**.



- No exemplo ao lado, escolheu-se o apoio B.
- Então para transformar a estrutura em estrutura isostática (determinada e estável), retira-se o apoio B. Por fim, tem-se a **estrutura principal**.
- Outro ponto é que a presença do apoio B impõe a condição de compatibilidade na curva elástica em que a flecha em B deve ser nula.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

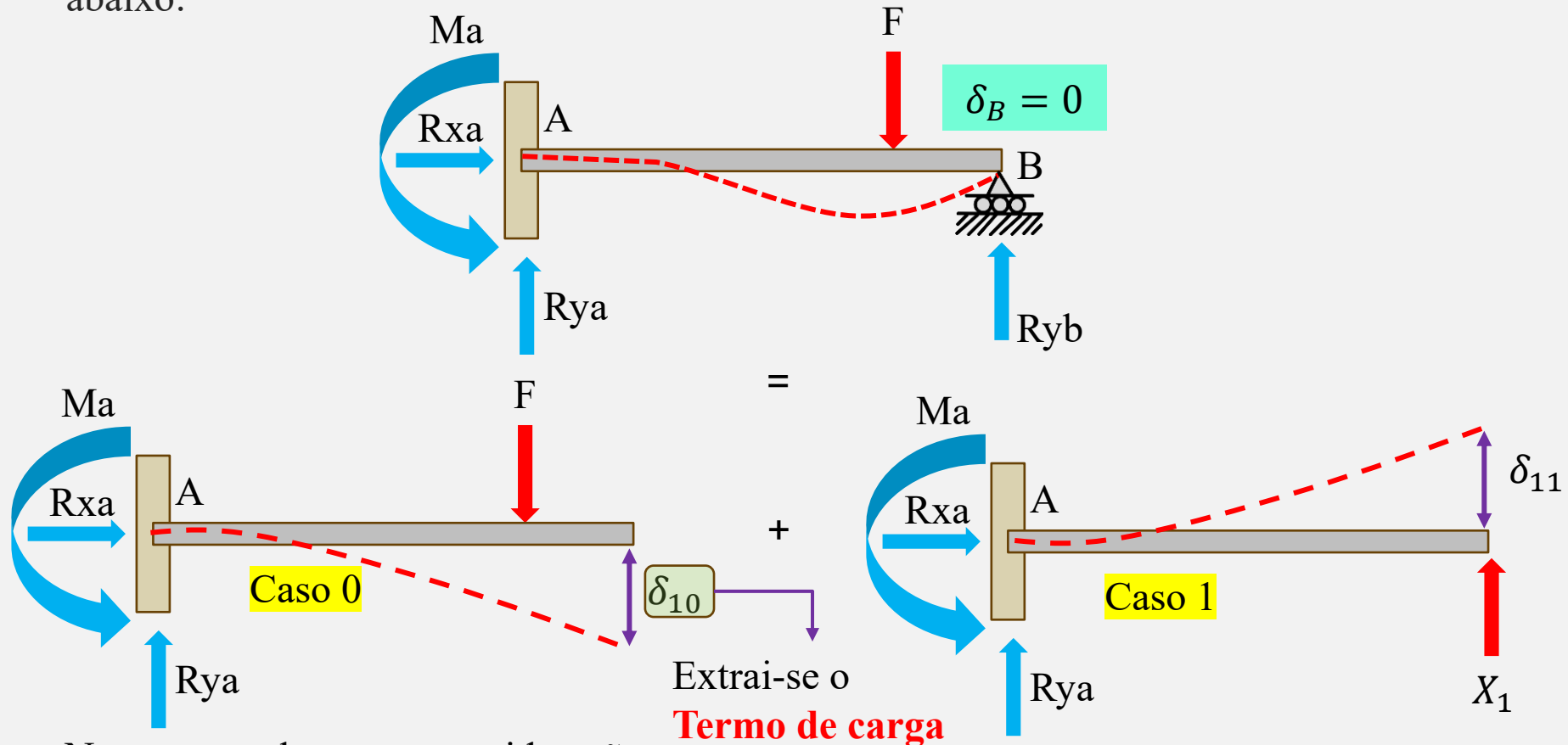
- O hiperestático R_{yb} pode ser determinado utilizando o seguinte raciocínio:



- O valor da carga desconhecida (R_{yb}) que chamaremos de X_1 atuando na estrutura principal deve ser o mesmo que a reação R_{yb} agindo na viga original.
- Com isso a flecha na extremidade livre B, na viga principal deve ser a mesma que a flecha na viga indeterminada no apoio B.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Para ficar mais prático, faz-se a aplicação das cargas em casos, como apresenta abaixo:

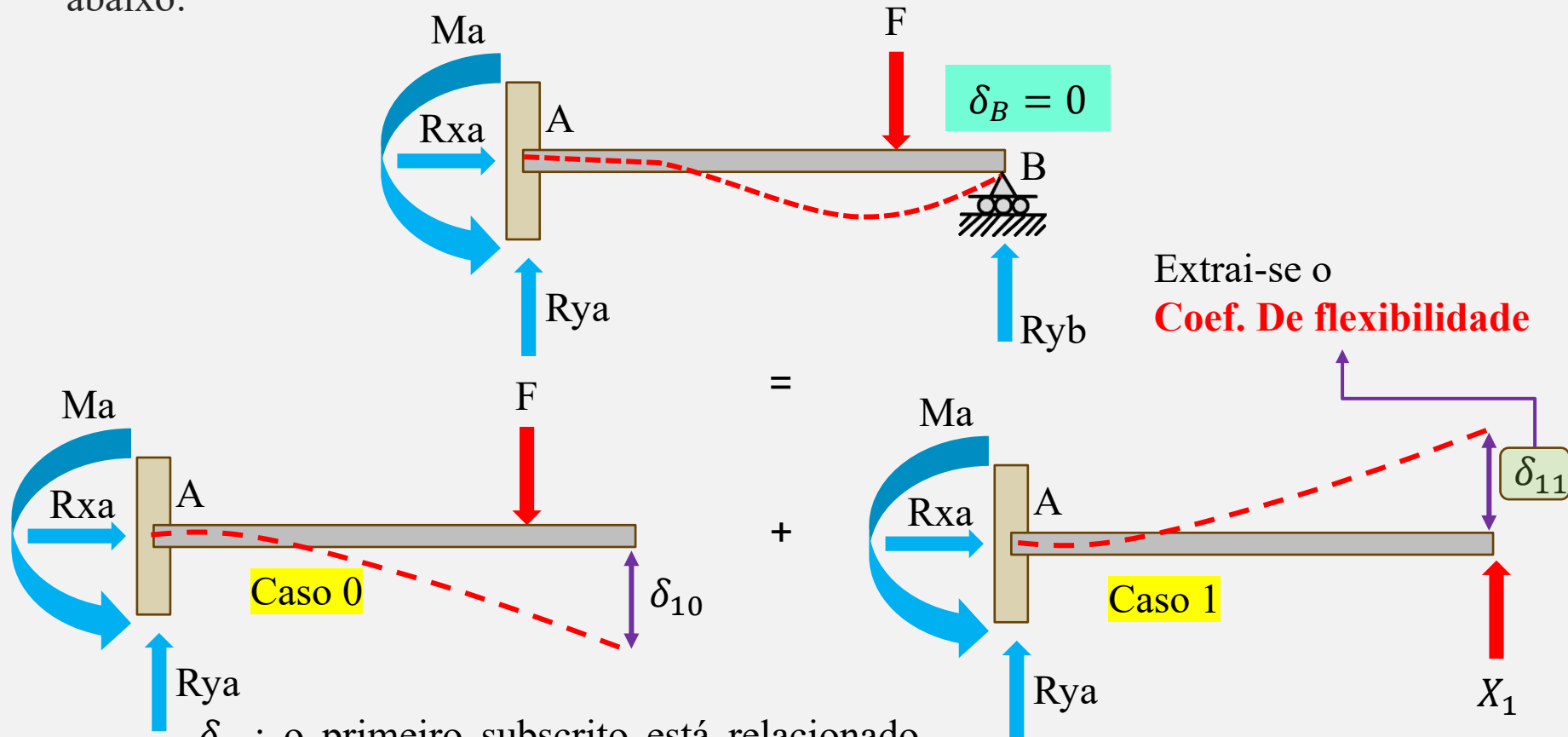


Nesse caso, leva em consideração as carga originais da viga principal

δ_{10} : o primeiro subscrito está relacionado ao número do hiperestático, enquanto o segundo subscrito está relacionado ao caso.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Para ficar mais prático, faz-se a aplicação das cargas em casos, como apresenta abaixo:

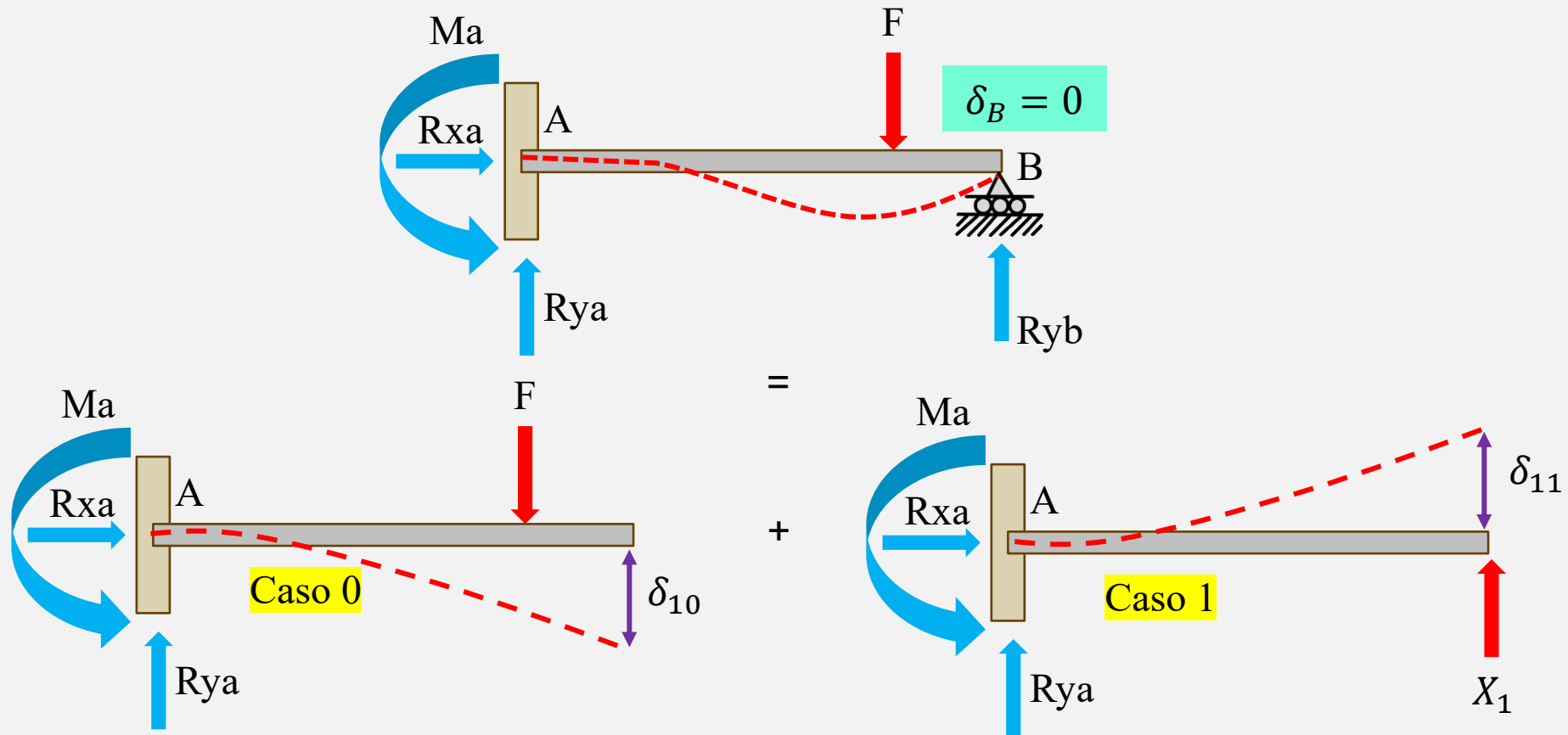


Extrai-se o
Coef. De flexibilidade

δ_{11} : o primeiro subscrito está relacionado ao número do hiperestático, enquanto o segundo subscrito está relacionado ao caso.

No caso 1, leva em consideração a carga desconhecida (hiperestático X_1) na viga principal.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO



Observando acima, tem-se:

$$\delta_B = \delta_{10} + \delta_{11}$$

Sabendo que $\delta_B = 0$, conclui-se que:

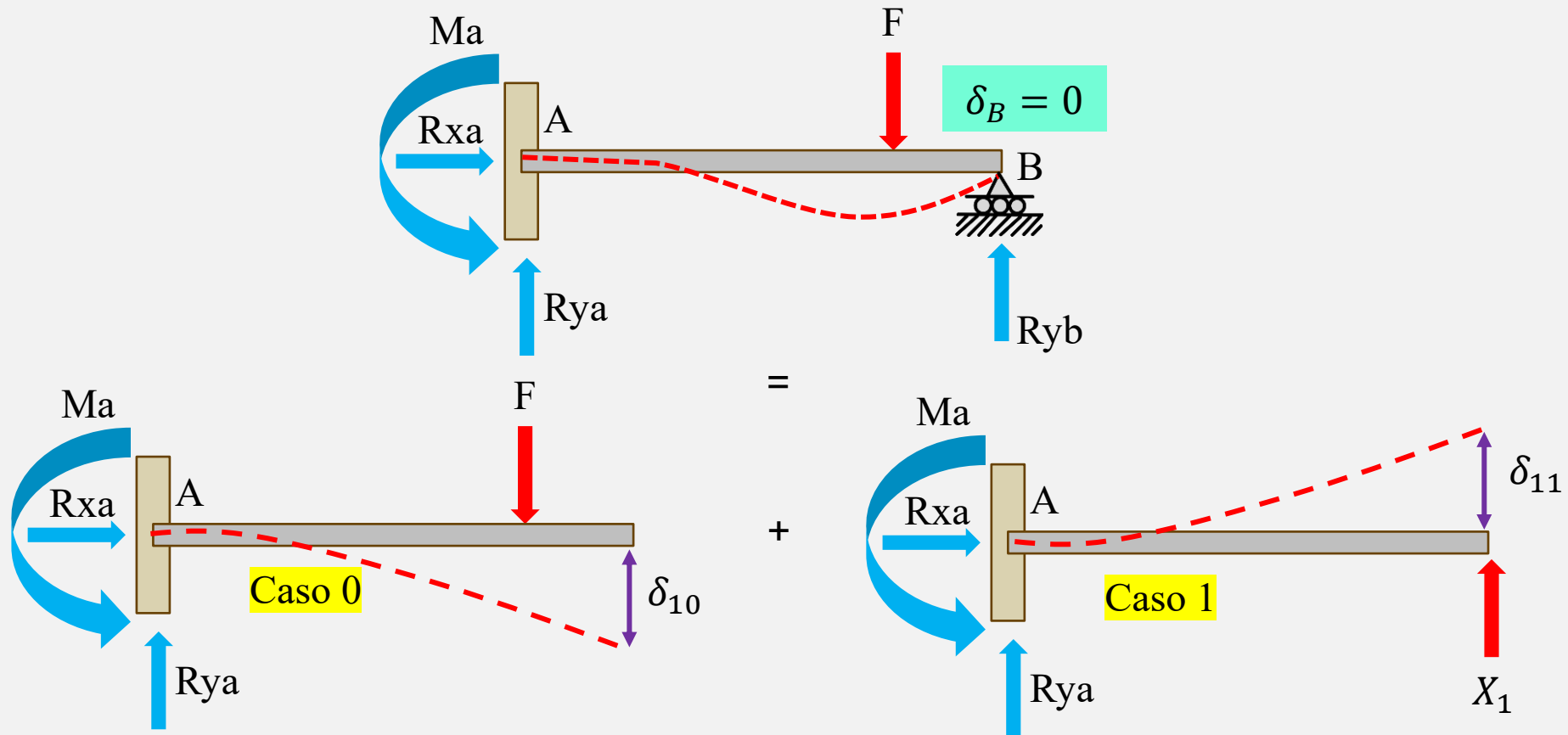
$$\delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} = 0$$

Sendo que:

δ_{10} = flecha no ponto B pela carga original

δ_{11} = flecha no ponto B pela carga X_1

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO



E com a equação de compatibilidade completa, é possível encontrar o valor do hiperestático (X_1), que é o valor da reação R_{yb} (no exemplo).

$$\delta_B = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0$$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Com o conhecimento do valor de R_{yb} , as outras três reações restantes podem agora ser determinada **pela aplicação das três equações de equilíbrio** para o corpo livre da viga indeterminada.
- **Ou pode ser também calculado pelas relações semelhantes na forma para a relação de superposição da flecha.**

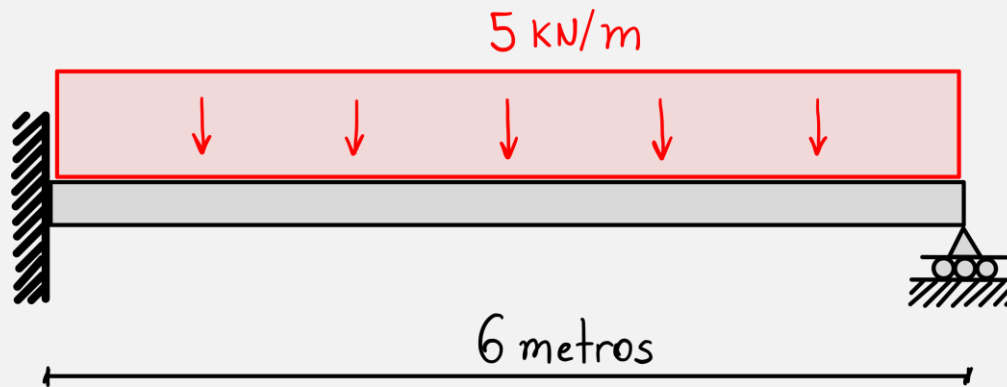


MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Para a finalização da análise da estrutura é necessário calcular os diagramas de esforços internos e os deslocamentos da estrutura. **Para isso iremos utilizar a própria superposição dos casos básicos para obtenção dos esforços internos.**
- Há a possibilidade de calcular a estrutura principal com os carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos, como se fossem as forças e momentos pertencentes ao carregamento. Porém como já realizamos a elaboração dos diagramas dos esforços internos dos casos básicos, fica bem mais fácil.
- Para obter os diagramas, precisamos realizar a superposição dos esforços internos dos casos básicos. No caso dos momentos fletores finais (M) podemos obter pela superposição dos diagramas de momento fletores (Mi) dos casos básicos:
- $M_F = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 \dots$
- $V_F = V_0 + V_1 \cdot X_1 + V_2 \cdot X_2 \dots$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

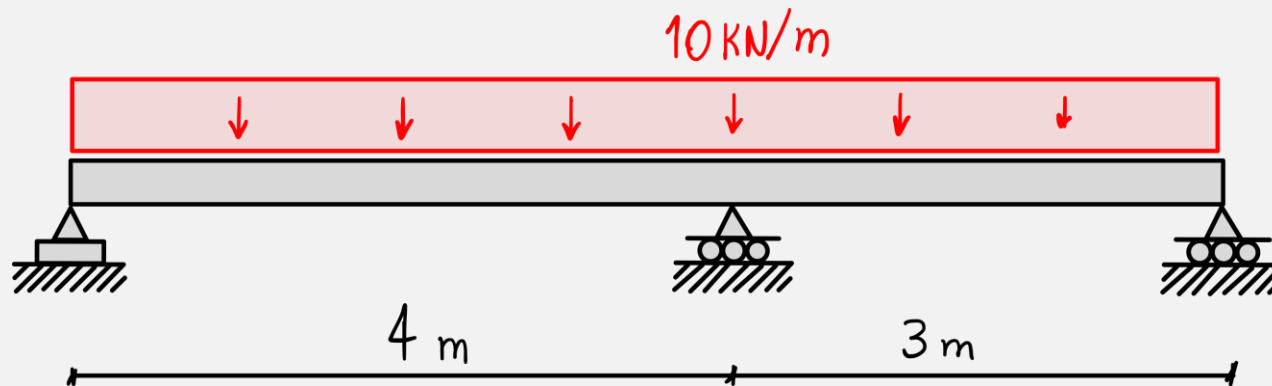
- Exemplo
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:



- $R_{ya} = 18,75 \text{ kN}$
- $R_{xa} = 0 \text{ kN}$
- $M_a = 22,5 \text{ kN.m}$
- $R_{yb} = 11,25 \text{ kN}$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM UM ÚNICO GRAU HIPERESTÁTICO

- Exemplo
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:



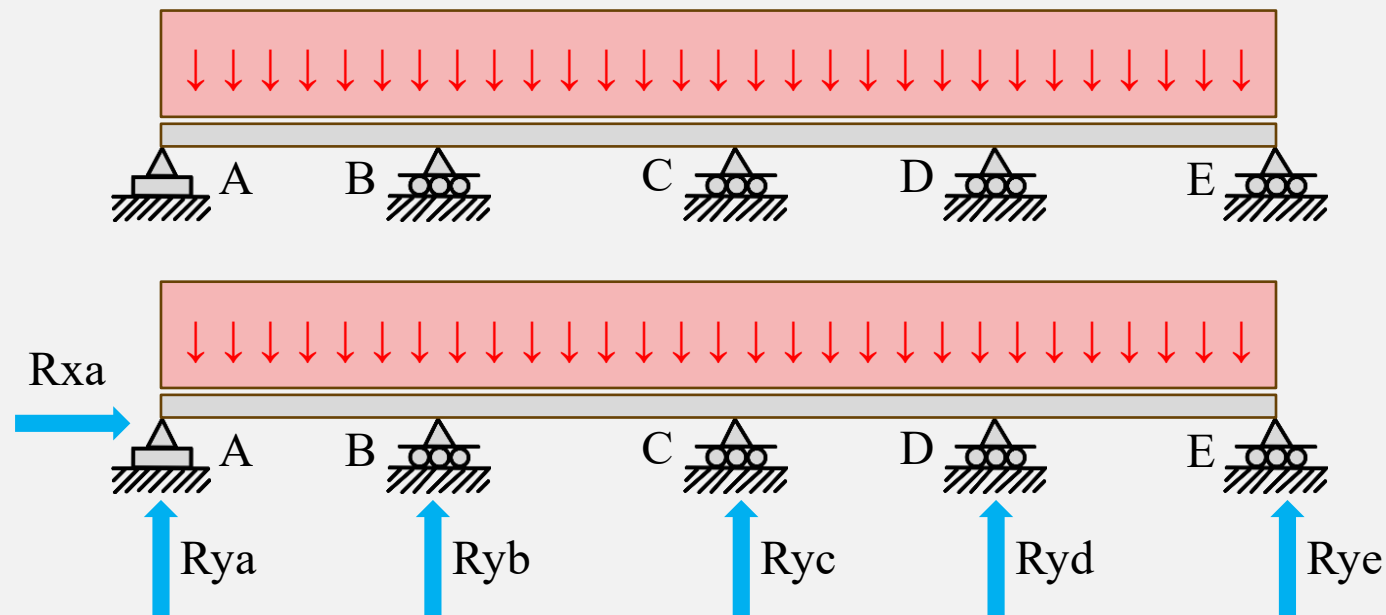
- $R_{ya} = 15,95 \text{ kN}$
- $R_{yb} = 44,5 \text{ kN}$
- $R_{yc} = 9,61 \text{ kN}$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO



MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

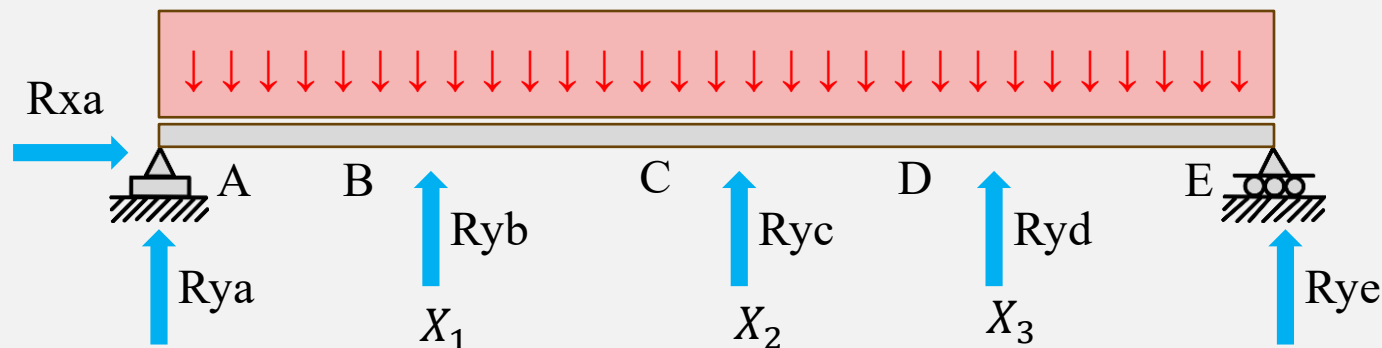
- Método utilizado para análise de estruturas com um único grau hiperestático, pode ser facilmente utilizada para a análise de vigas com vários graus hiperestáticos.



- O grau de hiperestático dessa viga é: $gh = 6 - 3 = 3$.
- Diante disso, deve-se selecionar três reações para serem os hiperestáticos e terá a estrutura principal.

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

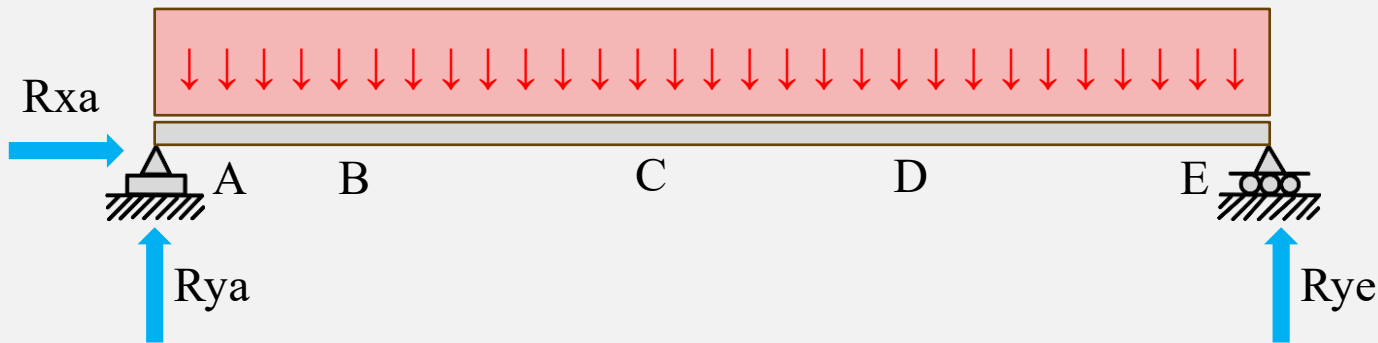
- Procurando ter uma estrutura estável e determinada, retirou-se os apoios B, C e D. Então tem-se a estrutura principal abaixo.



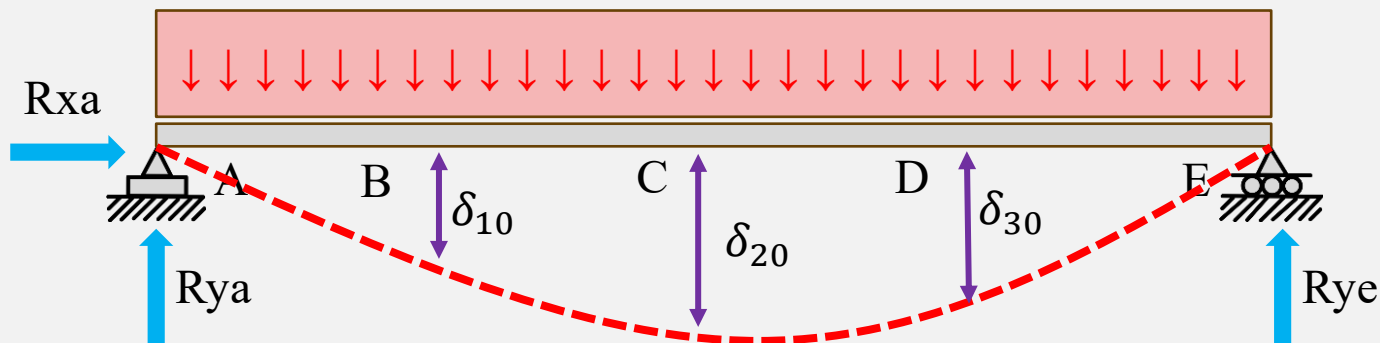
- Sendo os hiperestáticos
 - $X_1 = R_{yb}$
 - $X_2 = R_{yc}$
 - $X_3 = R_{yd}$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

- Para estabelecermos as equações de compatibilidade, submetemos a viga principal separadamente à carga externa e a um valor unitário em cada um dos hiperestáticos



Caso 0



Com o caso 0, extrai-se os **termos de carga**:

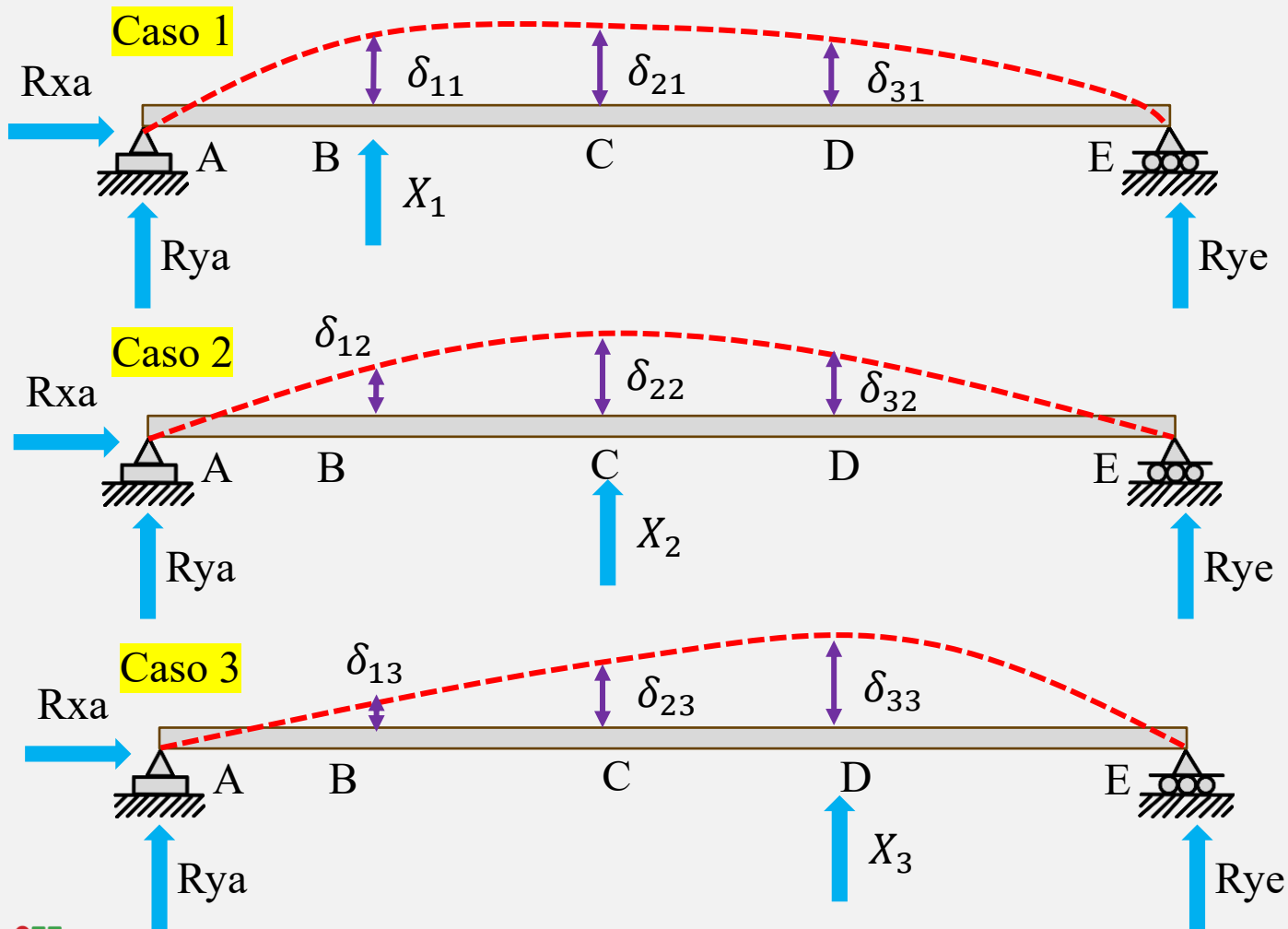
δ_{10} = flecha no ponto B pela carga original

δ_{20} = flecha no ponto C pela carga original

δ_{30} = flecha no ponto D pela carga original

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

- Estabelecendo os casos, para extrair os coeficientes de flexibilidade, tem-se:



Com os casos, extrai-se os coeficientes de flexibilidade:

Caso 1: $\delta_{11}, \delta_{21}, \delta_{31}$

Caso 2: $\delta_{12}, \delta_{22}, \delta_{32}$

Caso 3: $\delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33}$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

- Com os valores dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade, pode-se escrever a equação de compatibilidade:

$$\bullet \delta_B = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 = 0$$

$$\bullet \delta_C = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 = 0$$

$$\bullet \delta_D = \delta_{30} + \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 = 0$$

Termos de carga

Coeficientes de flexibilidade

Hiperestáticos

Sendo os hiperestáticos

$$X_1 = R_{yb}$$

$$X_2 = R_{yc}$$

$$X_3 = R_{yd}$$



MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

- Para a finalização da análise da estrutura é necessário calcular os diagramas de esforços internos e os deslocamentos da estrutura. Para isso iremos utilizar a própria superposição dos casos básicos para obtenção dos esforços internos.
- Há a possibilidade de calcular a estrutura principal com os carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos, como se fossem as forças e momentos pertencentes ao carregamento. Porém como já realizamos a elaboração dos diagramas dos esforços internos dos casos básicos, fica bem mais fácil.
- Para obter os diagramas, precisamos realizar a superposição dos esforços internos dos casos básicos. No caso dos momentos fletores finais (M) podemos obter pela superposição dos diagramas de momento fletores (Mi) dos casos básicos:

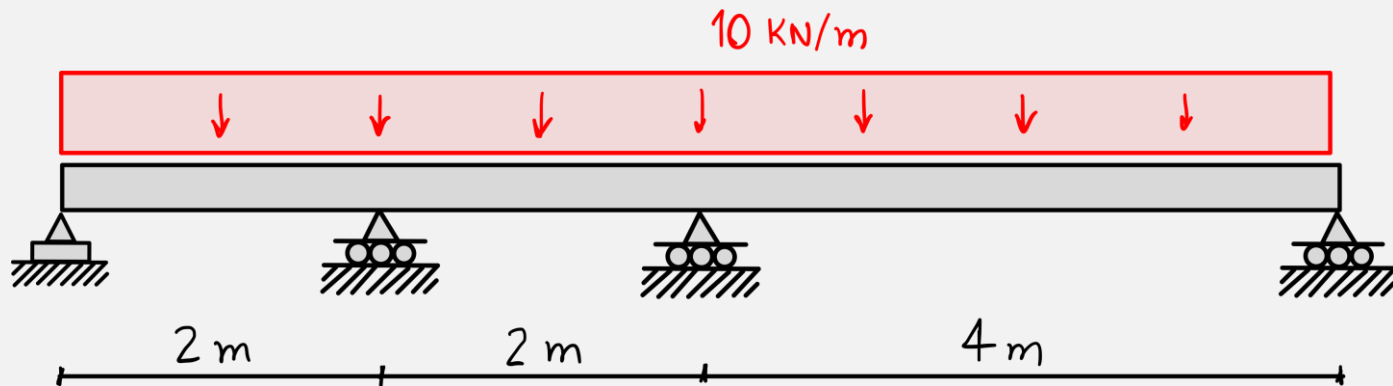
$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=8} N_j \cdot X_j$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=8} Q_j \cdot X_j$$

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=8} M_j \cdot X_j$$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

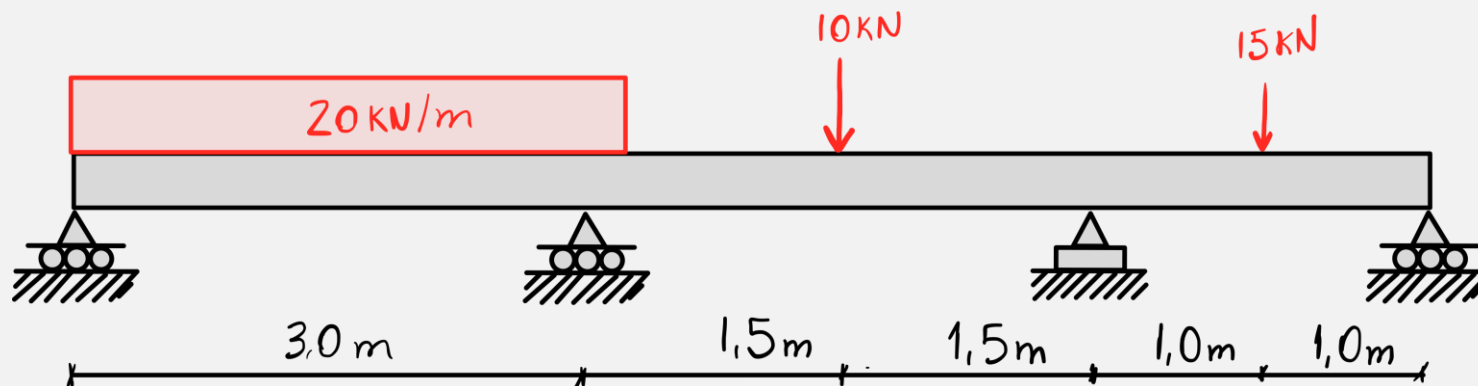
- Exemplo:
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:



- $R_{ya} = 9,35 \text{ kN}$
- $R_{yb} = 19,9 \text{ kN}$
- $R_{yc} = 40,4 \text{ kN}$
- $R_{yd} = 16,3 \text{ kN}$

MÉTODO DAS FORÇAS - ESTRUTURA COM MAIS DE UM GRAU HIPERESTÁTICO

- Exemplo:
- Apresente os diagramas de esforços internos da viga hiperestática abaixo:



- $R_{ya} = 25,4 \text{ kN}$
- $R_{yb} = 43,6 \text{ kN}$
- $R_{yc} = 9,21 \text{ kN}$
- $R_{yd} = 6,74 \text{ kN}$