TEORIA DAS ESTRUTURAS II

<u>Aula 02</u>

Bacharelado em Engenharia Civil - 6º Período

Prof. Celso José Roberto Soares Júnior

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia
Campus
Porto Velho Calama

ASSUNTOS DE HOJE:

- Método de trabalho-energia
  - Deflexões pelo método do trabalho-energia
  - Princípio do trabalho virtual
  - Cálculo de flecha em viga pelo método do trabalho virtual

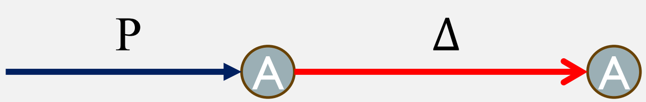
MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

- O método de trabalho energia é utilizado também para análise de flechas em estruturas isostáticas.
- O método é mais geral que os métodos geométricos, podendo ser aplicado a vários tipos de estruturas (treliças, vigas e pórticos)
- A única desvantagem é que o método consegue identificar **somente parâmetro de flecha ou rotação em um ponto da estrutura** a cada aplicação.

MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

- Inicialmente, é importante ressaltar o que é **trabalho**.
- O trabalho de uma força é definido por: forças vezes o deslocamento de seu ponto de aplicação na direção da força.
- O trabalho é positivo quando a força e o deslocamento possuem o mesmo sentido. Enquanto negativo quando apresentam sentidos opostos.



$$W = P.\Delta$$

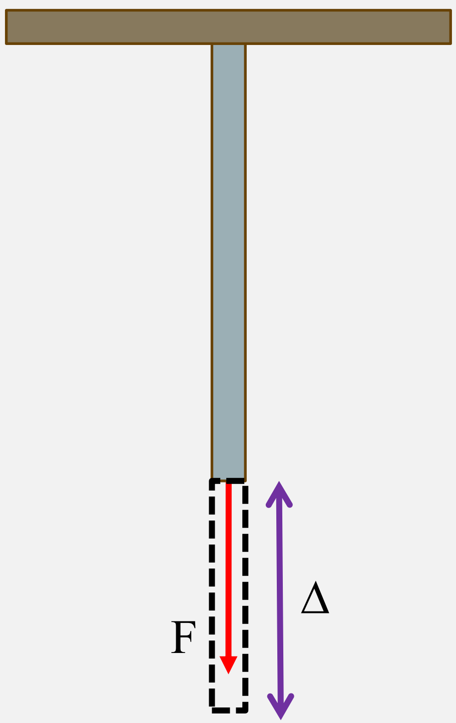
W = Trabalho

P = Força

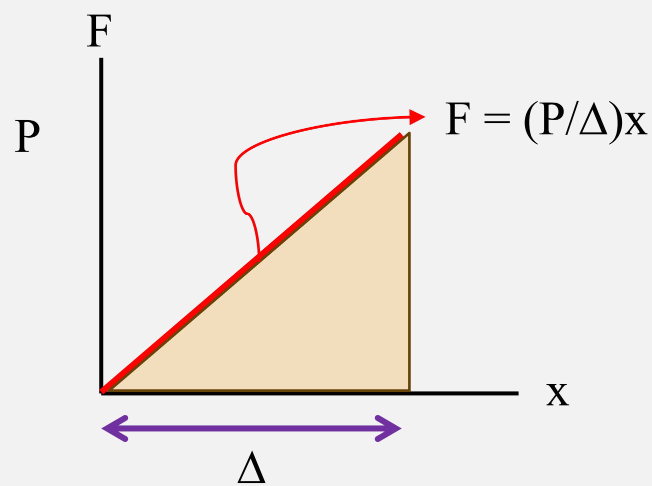
Δ = Deslocamento

MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

- Considere o efeito causado por uma força axial aplicada à extremidade de uma barra, como mostra abaixo:



A medida que a magnitude de F gradualmente aumenta de 0 a P, o alongamento final torna-se Δ, em um diagrama força-deformação, tem-se:



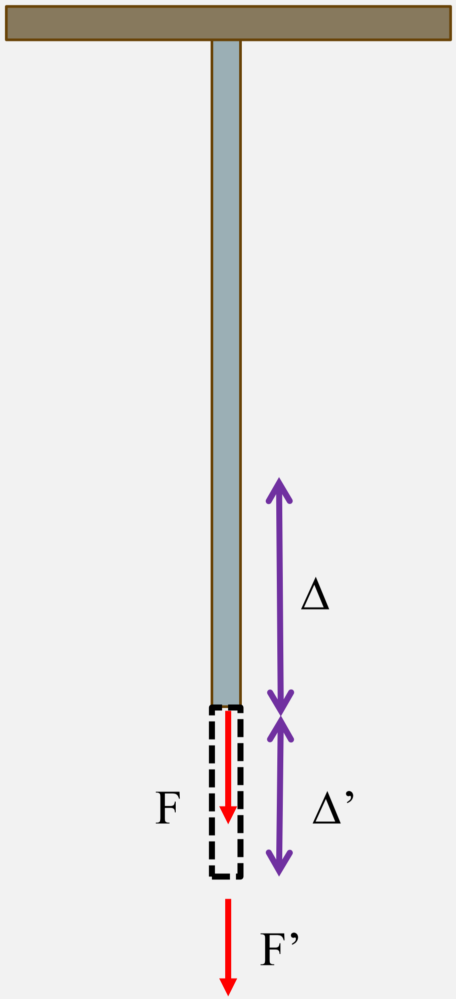
Nesse caso, o trabalho realizado será a magnitude da força média (P/2) vezes o deslocamento.

Caso o material tem uma resposta elástica linear, tem-se F = (P/Δ)x. O trabalho total será:

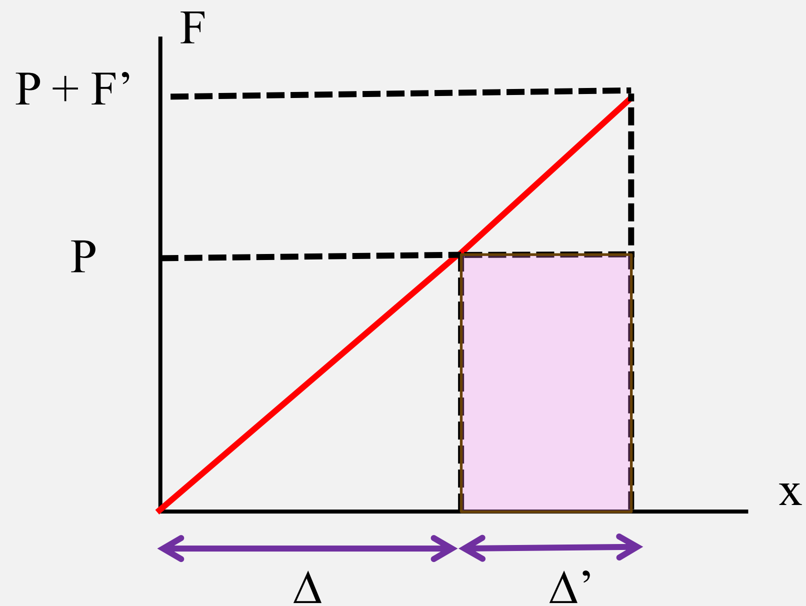
$$W = \int_0^x \left(\frac{P}{\Delta}\right) dx \;\therefore\; W = \frac{1}{2} P\Delta$$

MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

- No próximo caso, tem-se que além da aplicação da força, há outra força F’ aplicada.



Nesse caso, o trabalho realizado pela força F’ quando passa por mais essa deflexão é:

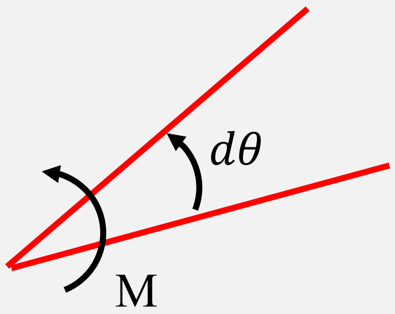


Quando uma força P é aplicada a barra, seguida pela aplicação de F’, o trabalho realizado por ambas as forças é o triângulo inteiro, contudo o trabalho realizado por P é a área do quadrado

$$W = P\Delta$$

MÉTODO DE TRABALHO-ENERGIA

- O trabalho de um momento é definido pelo produto da magnitude do momento M e o ângulo $d\theta$ do qual ele gira.



- Como nos exemplos anteriores, caso o momento é aplicado gradualmente a uma estrutura tendo resposta elástico linear de zero a M, o trabalho é:
- $W_e = \frac{1}{2}M.\theta$
- Caso o momento já é aplicado a estrutura (permanece constante) e outras cargas distorcem mais ainda, o momento (M) gira em θ', e o trabalho é:
- $W_e = M.\theta'$

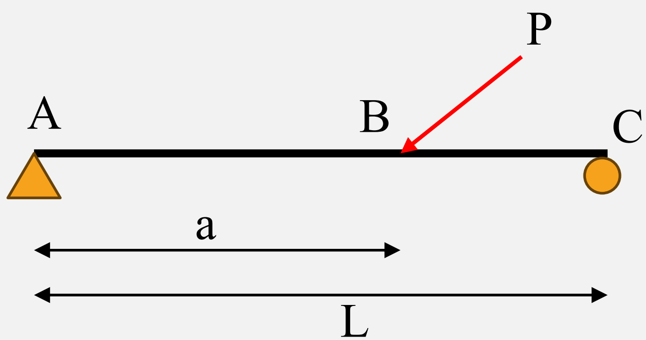
PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

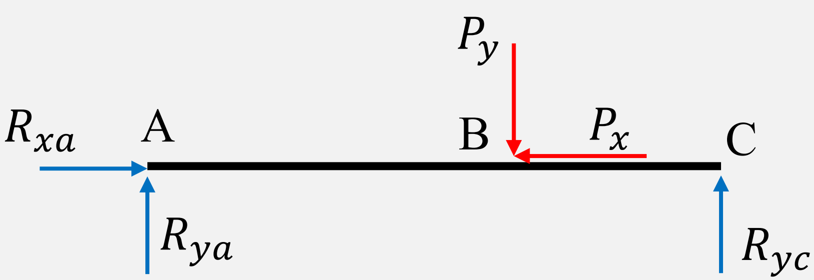
PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Introduzido por John Bernoulli (1717), fornece uma ferramenta poderosa para diversos problemas de mecânica estrutural.
- Podendo se dividir em:
  - Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
  - Princípio dos deslocamento virtuais para corpos deformáveis.
- É considerado como o **método mais abrangente** para determinar flechas em estruturas.

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

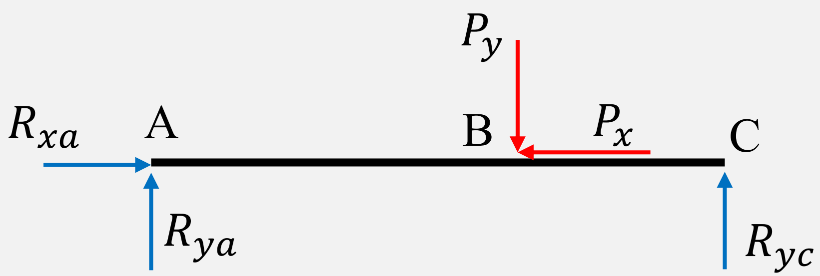
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- Se um corpo rígido estiver em equilíbrio sob um sistema de forças e se for sujeito a um pequeno deslocamento de corpo rígido virtual, o trabalho virtual feito pelas forças externas será zero.
- O termo **virtual** significa **imaginário**, ou seja, não é real.
- Considere a viga em equilíbrio abaixo e seu diagrama de corpo livre ao lado.

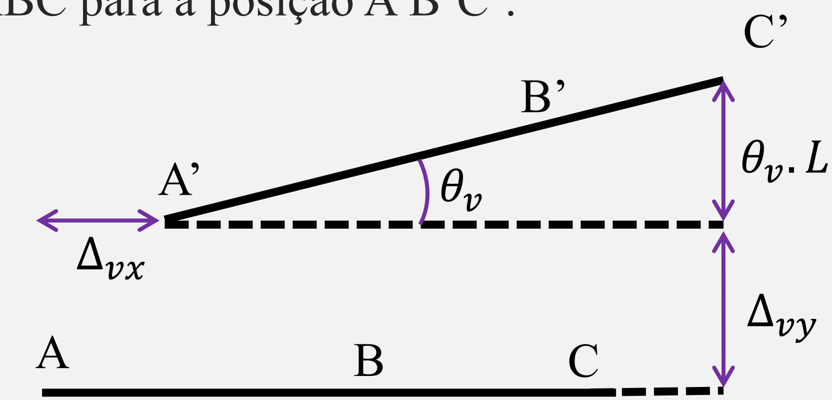




PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- Suponha que a viga esteja sob um pequeno deslocamento de corpo rígido virtual arbitrário de sua posição em equilíbrio inicial ABC para a posição A'B'C'.

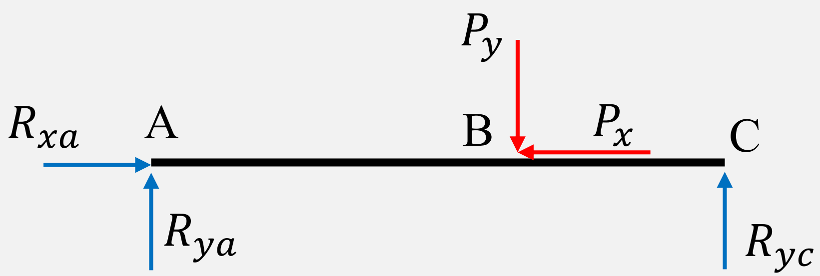


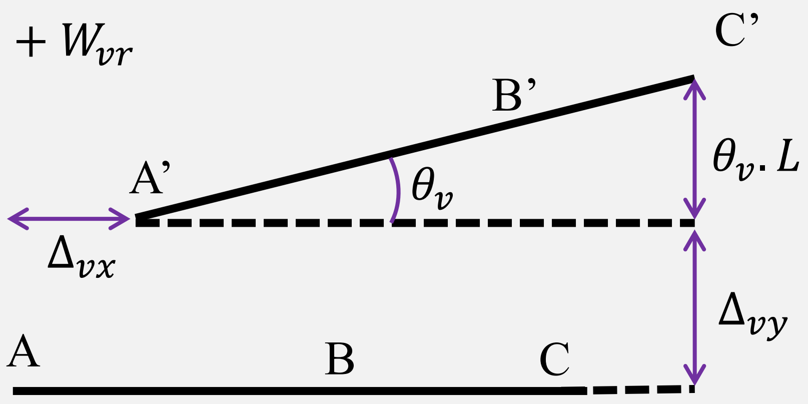


- Pode-se perceber que o deslocamento de corpo rígido virtual total pode ser decomposto em translações Δ_{vx}, Δ_{vy} e para a rotação θ_v, sobre o ponto A.

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- O trabalho virtual total (W_{ve}), realizado pelas forças externas que atuam sobre a viga pode ser expresso como a soma dos trabalhos virtuais de translações no eixo x e y (W_{vx} e W_{vy}) e o trabalho virtual de rotação (W_{vr}).
- $$W_{ve} = W_{vx} + W_{vy} + W_{vr}$$

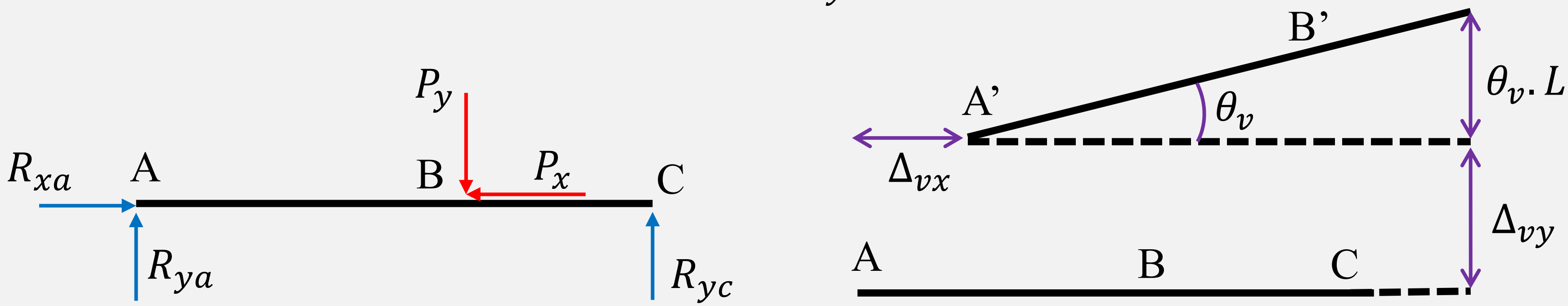




- Para as translações virtuais (Δ_{vx}, Δ_{vy}) na viga, o trabalho virtual feito pelas força é:
- $W_{vx} = R_{xa} \,.\, \Delta_{vx} - P_x . \Delta_{vx} \quad \rightarrow \quad W_{vx} = (R_{xa} - P_x) . \Delta_{vx}$
- $W_{vx} = (\Sigma F_x) . \Delta_{vx}$

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

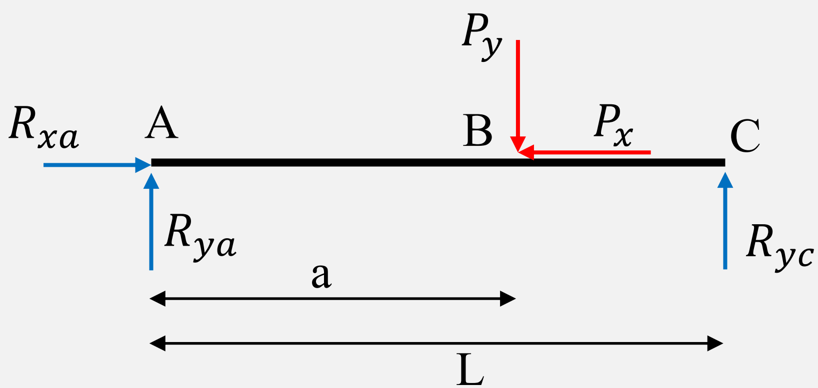
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- O trabalho virtual total (W_{ve}), realizado pelas forças externas que atuam sobre a viga pode ser expresso como a soma dos trabalhos virtuais de translações no eixo x e y (W_{vx} e W_{vy}) e o trabalho virtual de rotação (W_{vr}).
- $$W_{ve} = W_{vx} + W_{vy} + W_{vr}$$

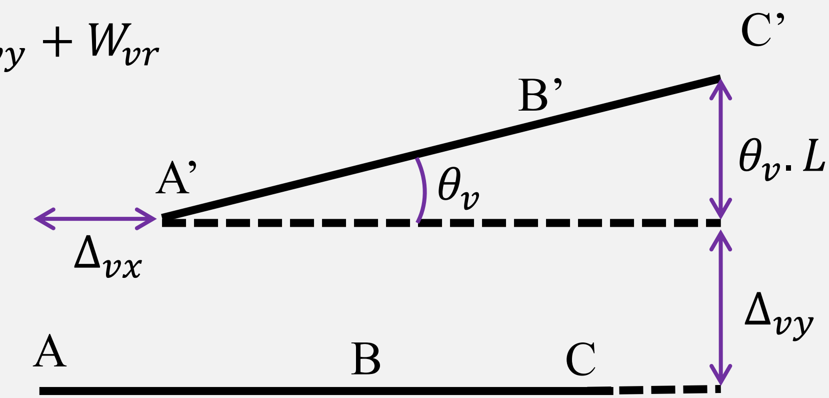


- Para as translações virtuais (Δ_{vx}, Δ_{vy}) na viga, o trabalho virtual feito pelas força é:
- $W_{vy} = R_{ya} \,.\, \Delta_{vy} + R_{yc} \,.\, \Delta_{vy} - P_y . \Delta_{vy} \quad \rightarrow \quad W_{vy} = (R_{ya} + R_{yc} - P_y)\Delta_{vy}$
- $W_{vy} = (\Sigma F_y) . \Delta_{vy}$

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- O trabalho virtual total (W_{ve}), realizado pelas forças externas que atuam sobre a viga pode ser expresso como a soma dos trabalhos virtuais de translações no eixo x e y (W_{vx} e W_{vy}) e o trabalho virtual de rotação (W_{vr}).
- $$W_{ve} = W_{vx} + W_{vy} + W_{vr}$$





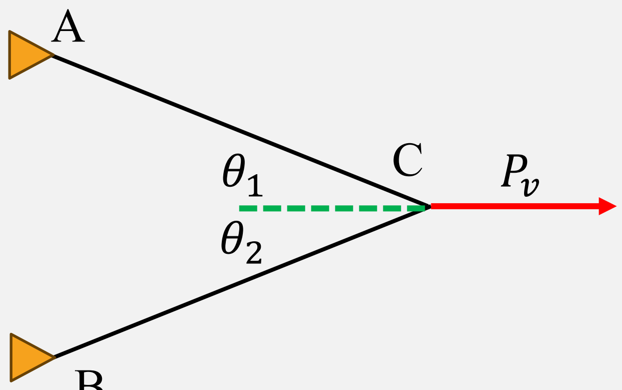
- O trabalho feito pelas forças durante a pequena rotação virtual (θ_v),é :
- $W_{vr} = \left(-P_y \,.\, a.\, \theta_v + R_{yc}.\, L.\, \theta_v\right) \quad \rightarrow \; W_{vr} = \left(-P_y \,.\, a \; + R_{yc}.\, L\right)\theta_v$
- $W_{vr} = (\Sigma M_a).\, \theta_v$

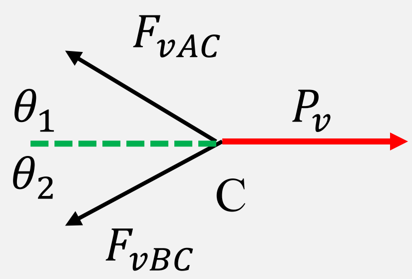
PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos
- Substituindo os valores encontrados para cada trabalho virtual, tem-se
- $$W_{ve} = W_{vx} + W_{vy} + W_{vr}$$
- $$W_{ve} = (\Sigma F_x).\Delta_{vx} + (\Sigma F_y).\Delta_{vy} + (\Sigma M_a).\theta_v$$
- Considerando que a viga está em equilíbrio, com isso: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_a = 0$.
- A equação acima torna-se
- $$\boxed{\boldsymbol{W_{ve} = 0}}$$
- Essa é a base matemática para o **princípio dos deslocamentos virtuais para corpos rígidos.**

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

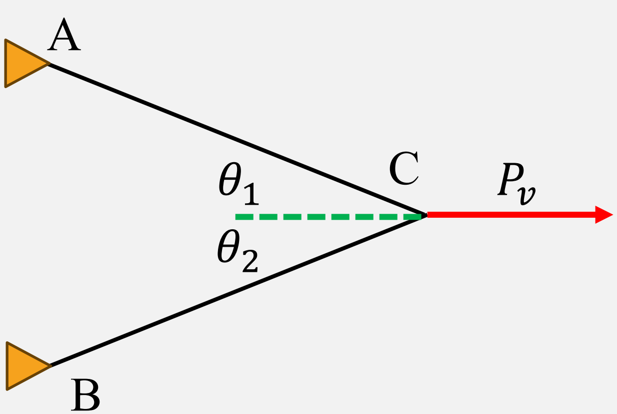
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis
- "Se uma estrutura deformável estiver em equilíbrio sob um sistema virtual de forças (e momentos) e se ela estiver sujeito a alguma e pequena deformação real compatível com o apoio e com as condições de continuidade da estrutura, então o trabalho virtual externo feito pelas forças virtuais externas (e momentos) que atuam por meio dos deslocamentos reais externos (e rotações) será **igual** ao trabalho virtual interno feito pelas forças virtuais internas (e momentos) que atuam por meio do deslocamento real interno (e rotações)."
- Para validar esse princípio, observe os elementos de uma treliça em equilíbrio abaixo, sob a ação de uma força virtual externa (P_v). Ao lado, o seu DCL

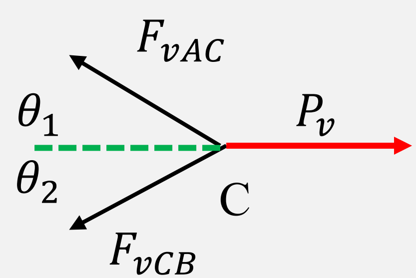




PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

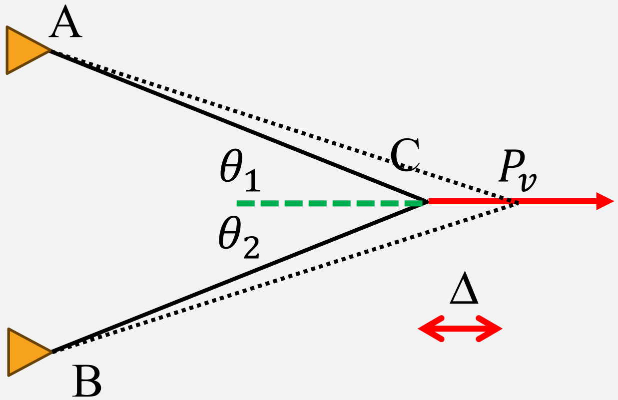
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis
- Como o ponto C está em equilíbrio, tem-se que:
- $(\rightarrow +)\ \Sigma F_x = 0 \qquad \longmapsto \qquad P_v - F_{vAC}.Cos\theta_1 - F_{vAB}.Cos\theta_2 = 0$
- $(\uparrow +)\ \Sigma F_y = 0 \qquad \longmapsto \qquad F_{vAC}.Sen\theta_1 - F_{vAB}.Sen\theta_2 = 0$
- F_{vAC} e F_{vAB} são forças virtuais internas nos elementos AC e BC.

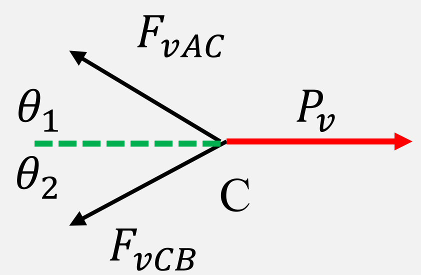




PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

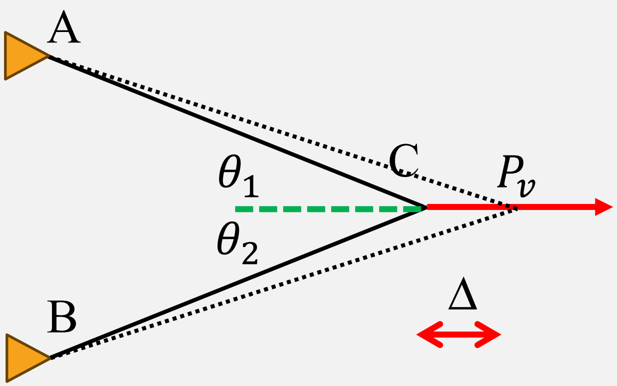
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis
- Como o ponto C está em equilíbrio, tem-se que:
- $(\rightarrow +)\ \Sigma F_x = 0 \quad \longmapsto \quad P_v - F_{vAC}.Cos\theta_1 - F_{vAB}.Cos\theta_2 = 0$
- $(\uparrow +)\ \Sigma F_y = 0 \quad \longmapsto \quad F_{vAC}.Sen\theta_1 - F_{vAB}.Sen\theta_2 = 0$
- Agora, considera-se que no nó C da treliça há um pequeno deslocamento real (Δ), no sentido da força virtual externa. Deslocamento esse compatível com as condições de apoio da treliça.

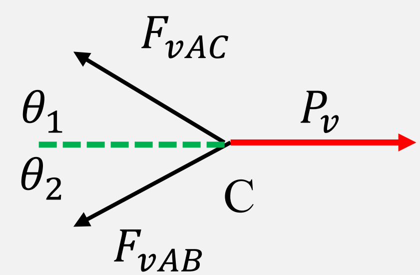




PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para <u>corpos deformáveis</u>
- Como o ponto C está em equilíbrio, tem-se que:
- $(\rightarrow +)\ \Sigma F_x = 0 \quad \longmapsto \quad P_v - F_{vAC}.Cos\theta_1 - F_{vAB}.Cos\theta_2 = 0$
- $(\uparrow +)\ \Sigma F_y = 0 \quad \longmapsto \quad F_{vAC}.Sen\theta_1 - F_{vAB}.Sen\theta_2 = 0$



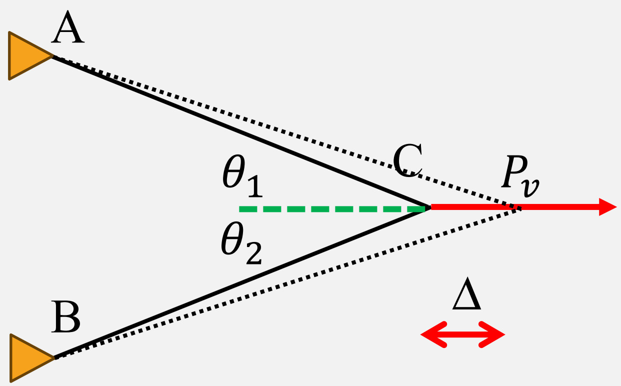


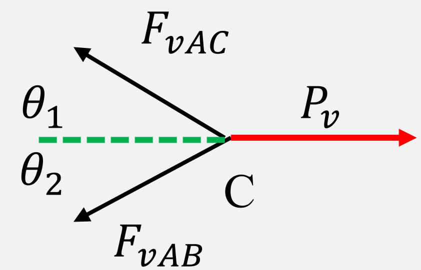
- O trabalho virtual total (W_V) da treliça será a soma algébrica das forças virtuais que atuam no ponto C.
- $W_V = P_v.\Delta - F_{vAC}(Cos\theta_1.\Delta) - F_{vAB}(Cos\theta_2\,.\Delta)$, evidenciando:
- $W_V = \Delta(P_v - F_{vAC}.Cos\theta_1 - F_{vAB}.Cos\theta_2)$

$W_V = 0$

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis
- Como o ponto C está em equilíbrio, tem-se que:
- $(\rightarrow +)\ \Sigma F_x = 0 \qquad \mapsto \qquad P_v - F_{vAC}.Cos\theta_1 - F_{vAB}.Cos\theta_2 = 0$
- $(\uparrow +)\ \Sigma F_y = 0 \qquad \mapsto \qquad F_{vAC}.Sen\theta_1 - F_{vAB}.Sen\theta_2 = 0$





$$W_V = 0$$

- Então, pode-se afirmar:
- $0 = P_v.\Delta - F_{vAC}(Cos\theta_1.\Delta) - F_{vAB}(Cos\theta_2\,.\Delta)$
- $P_v.\Delta = F_{vAC}(Cos\theta_1.\Delta) + F_{vAB}(Cos\theta_2\,.\Delta)$

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

- Princípio dos deslocamentos virtuais para <u>corpos deformáveis</u>

W_{vi} (Trabalho virtual interno)

Força virtual interna

Deslocamento real interno

- $P_v . \Delta = F_{vAC}(Cos\theta_1 . \Delta) + F_{vAB}(Cos\theta_2 \, . \Delta)$

Força virtual externa

Deslocamento real externo

W_{ve} (Trabalho virtual externo)

Conclui-se que:

W_{ve} = W_{vi}

Base matemática para o princípio das forças virtuais em os corpos deformáveis

O método do trabalho virtual é baseado no princípio de forças virtuais para corpos deformáveis.

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

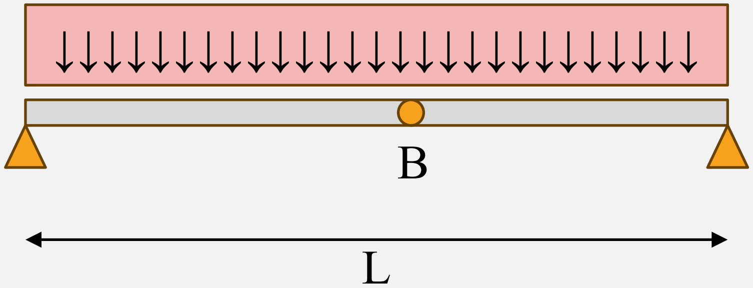
- Princípio dos deslocamentos virtuais para corpos deformáveis
- Percebe-se que as forças virtuais independem das ações que causam a deformação real e permanecem constantes durante a deformação real. Por esse motivo, as expressões de trabalho virtual externo e interno não possuem o fator ½ .
- Para determinar a flecha (ou rotação) em qualquer ponto de uma estrutura, um sistema de força virtual é selecionado para que a deformação desejada (ou rotação) seja a única incógnita da equação.

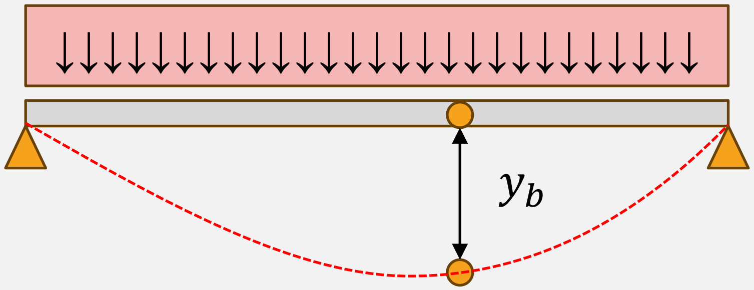
Força virtual externa	x	Deslocamento real externo	=	Força virtual interna	x	Deslocamento real interno

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

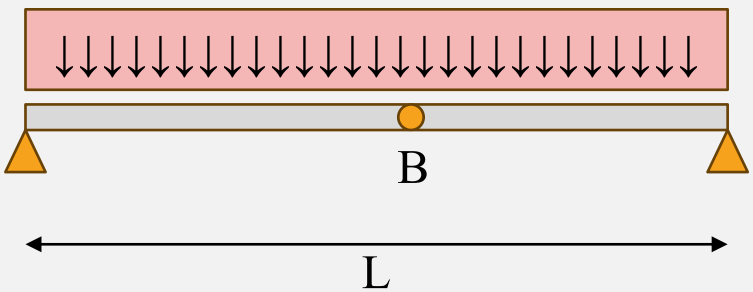
- Para desenvolver a expressão do método do trabalho virtual para determinar as flechas em vigas, tem-se a viga abaixo.
- Deseja-se obter o valor da flecha no ponto B da viga.

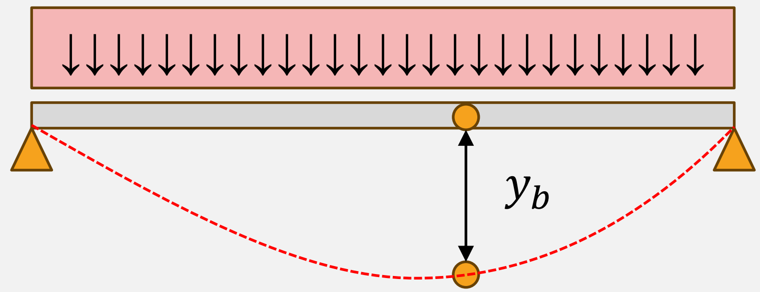




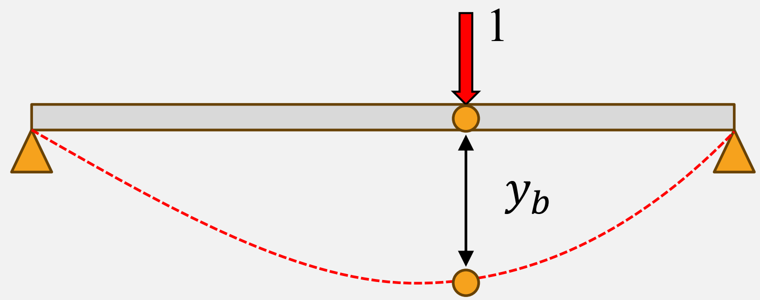
FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Para isso, selecionamos um sistema virtual que consiste em uma carga unitária agindo no ponto e na direção da flecha.





Se submete a viga as deformações reais devido a cargas reais, com uma carga unitária virtual, tem-se:



Trabalho virtual externo (W_{ve})

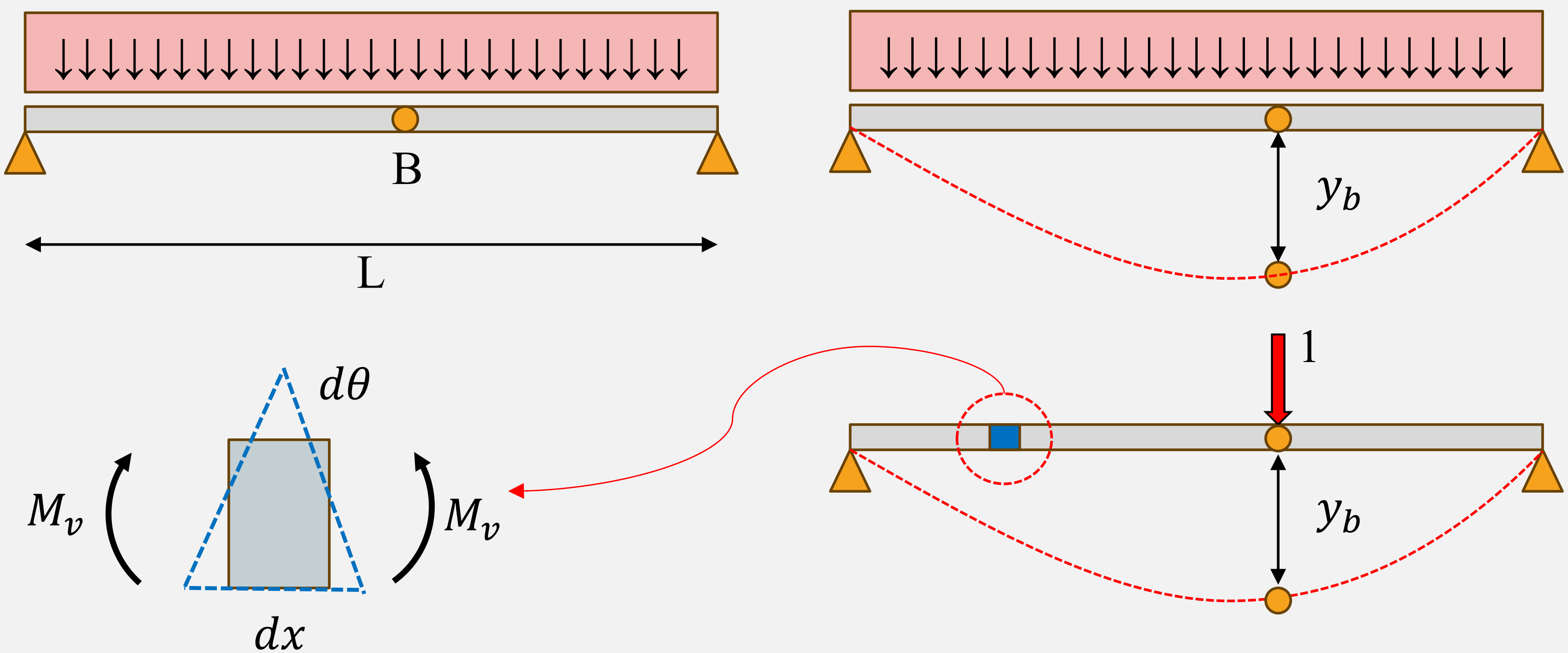
Força virtual externa x Deslocamento real externo

$$W_{ev} = P(1).\Delta(y_b)$$

$$W_{ev} = 1.y_b$$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Como a viga com a carga virtual está sujeita a deformação devido à carga real, o momento fletor virtual interno (Mv) agindo no elemento dx, realiza o trabalho virtual interno em função da rotação real $d\theta$.

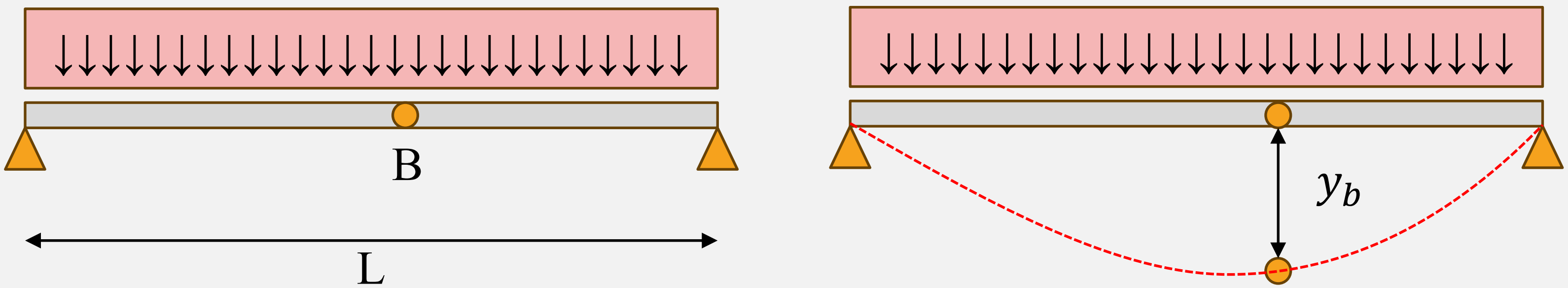


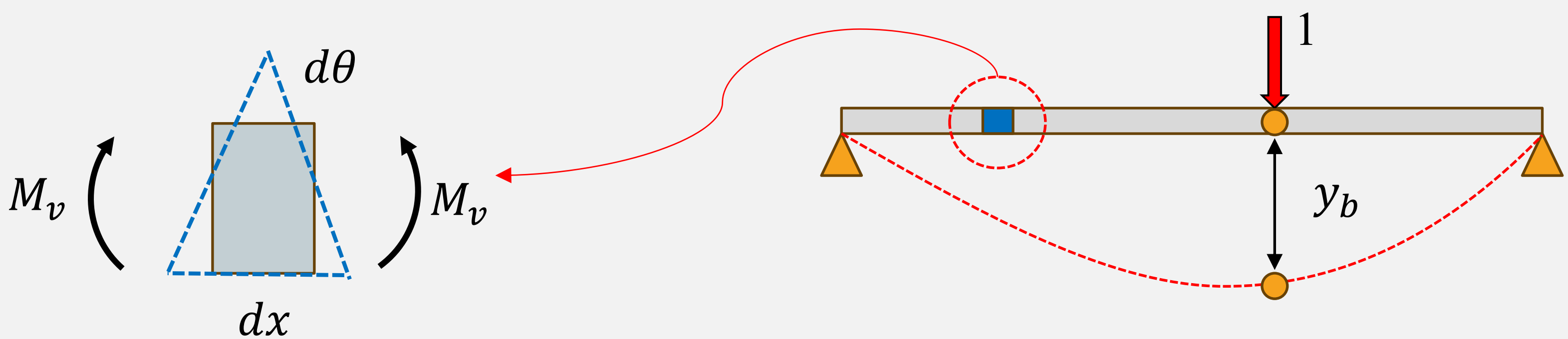
Diante da seção acima, o trabalho virtual interno é calculado por:

$$dW_{vi} = M_v.(d\theta)$$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Como a viga com a carga virtual está sujeita a deformação devido à carga real, o momento fletor virtual interno (Mv) agindo no elemento dx, realiza o trabalho virtual interno em função da rotação real $d\theta$.





Como o Mv é constante durante a rotação real $d\theta$, não possui fator ½.

$$dW_{vi} = M_v.(d\theta)$$

Lembrando que:

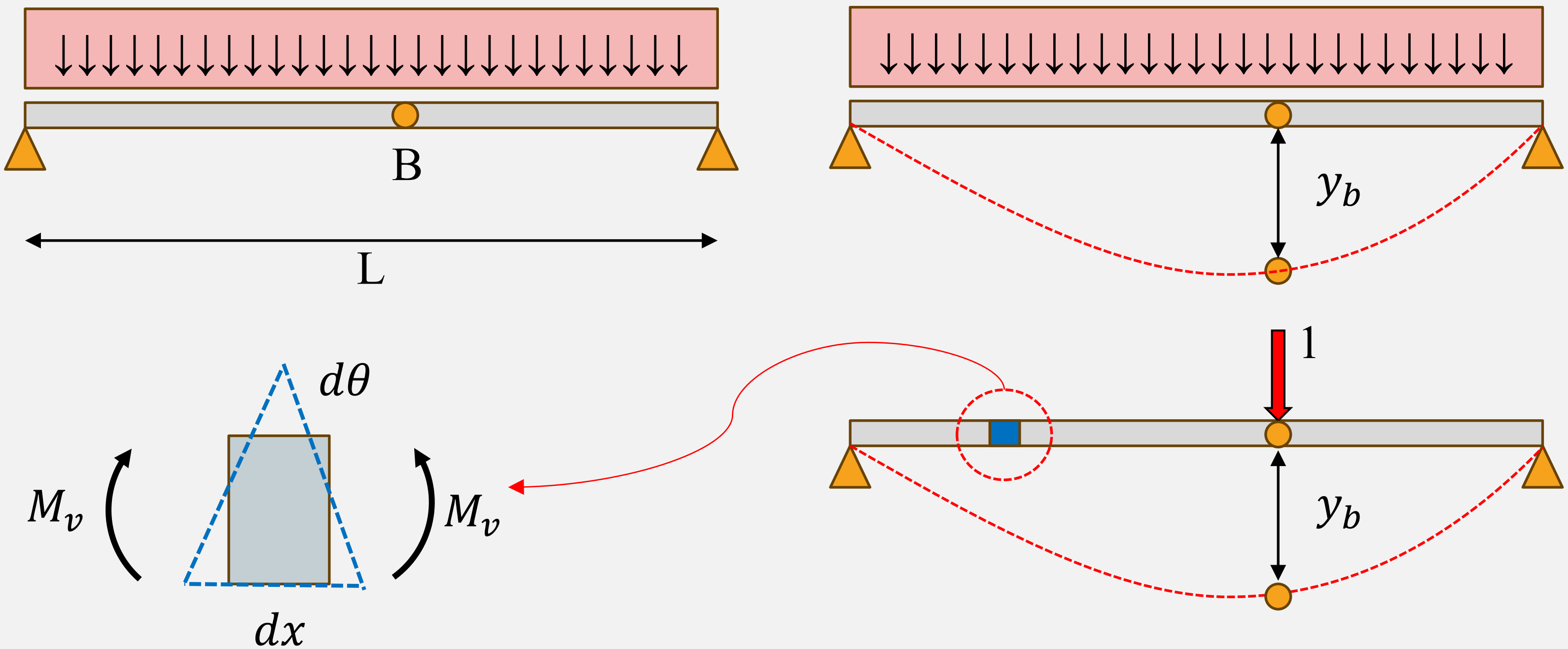
$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

Tem-se, então:

$$dW_{vi} = M_v.\left(\frac{M}{EI}\right)dx$$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Como a viga com a carga virtual está sujeita a deformação devido à carga real, o momento fletor virtual interno (Mv) agindo no elemento dx, realiza o trabalho virtual interno em função da rotação real $d\theta$.



Para o cálculo do trabalho virtual total na viga inteira, deve-se integrar ao longo do comprimento L da viga.

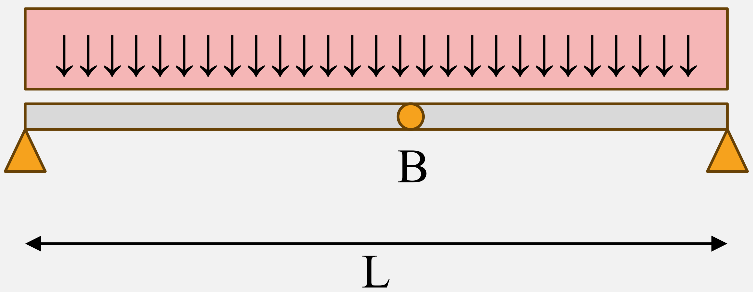
Tem-se, então:

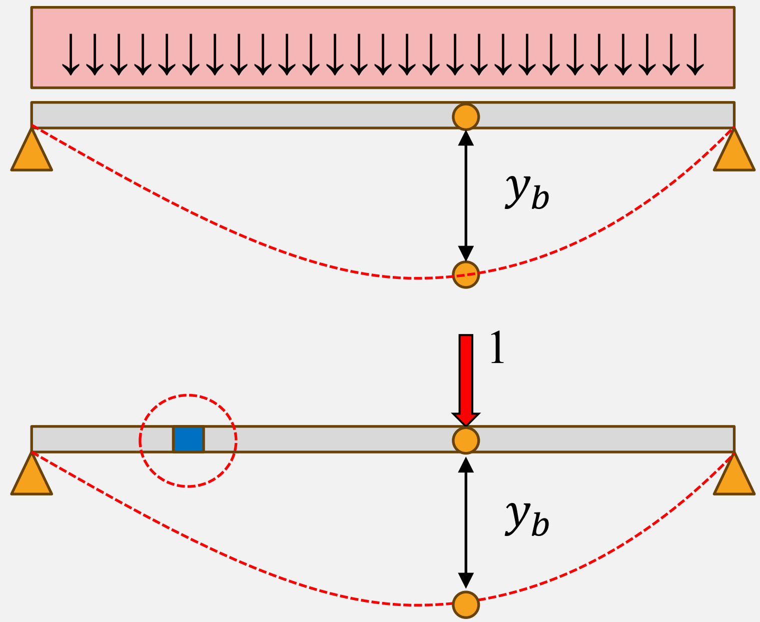
$$dW_{vi} = M_v.\left(\frac{M}{EI}\right)dx$$

$$W_{vi} = \int_o^L M_v.\left(\frac{M}{EI}\right)dx$$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Como demonstrado anteriormente, em corpos deformáveis, o trabalho virtual externo é igual ao trabalho virtual interno. Portanto:





$$W_{ve} = W_{vi}$$

$$W_{ev} = 1.\, y_b$$

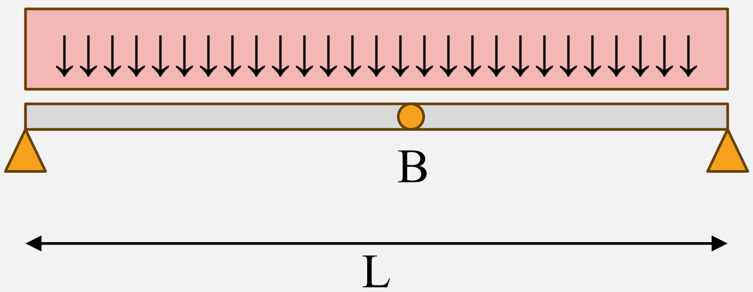
$$W_{vi} = \int_o^L M_v . \left(\frac{M}{EI}\right) dx$$

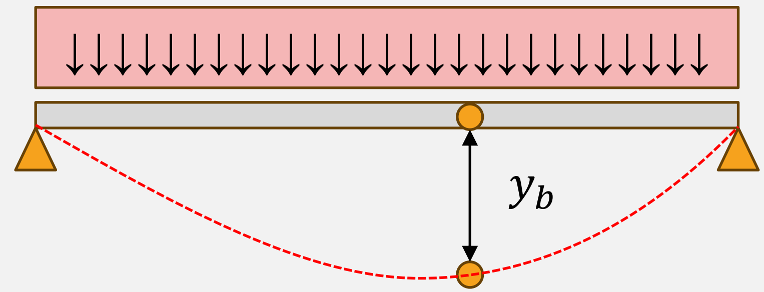
$$1.\, y_b = \int_o^L M_v . \left(\frac{M}{EI}\right) dx$$

Mv = Momento virtual
M = Momento real

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Para o caso da inclinação, usa-se um sistema virtual que consiste em um momento unitário que atua sobre o ponto.



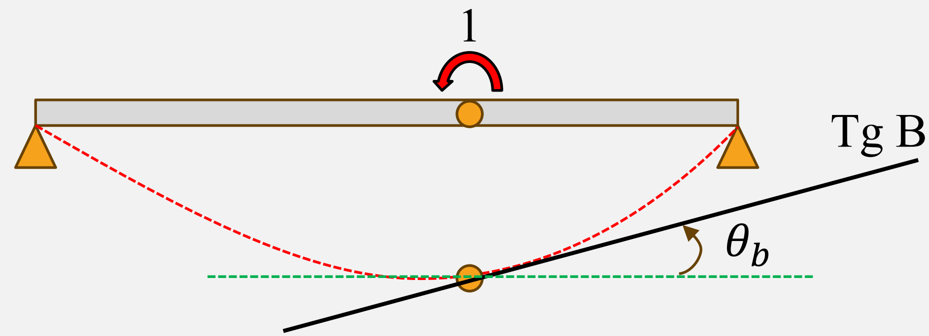


$$W_{ve} = W_{vi}$$

$$W_{ev} = 1.\theta_b$$

$$W_{vi} = \int_o^L M_v.\left(\frac{M}{EI}\right) dx$$

$$1.\theta_b = \int_o^L M_v.\left(\frac{M}{EI}\right) dx$$



Mv = Momento virtual
M = Momento real

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Observa-se que no trabalho interno pelas forças virtuais acontecem outras deformações reais (cisalhamento e normal).
- Como a maioria das vigas, as deformações de cisalhamento e normal são muito pequenas comparadas as deformações de flexão, seu efeito pode ser ignorado, salvo em vigas com elevada altura.

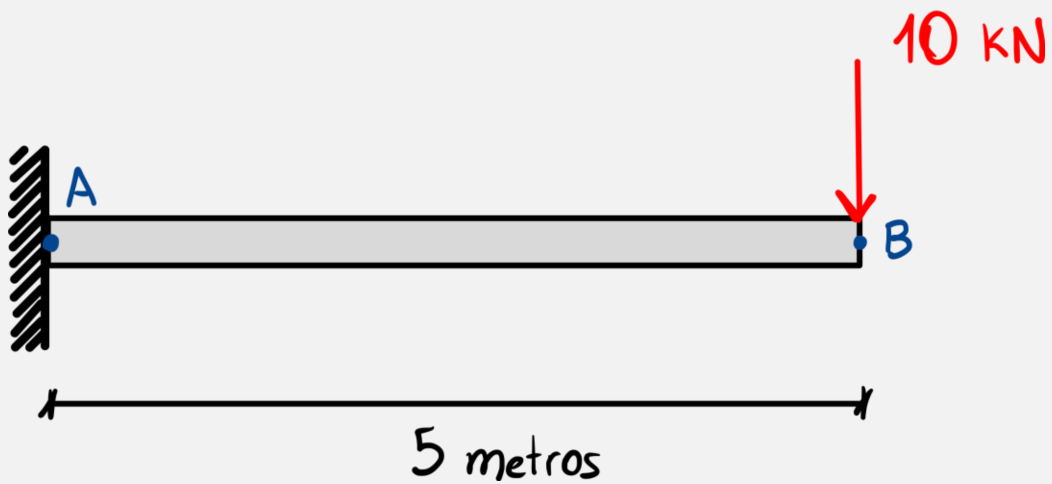
FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Procedimento para análise:

1. **SISTEMA REAL** – Desenhar o diagrama da viga apresentando as cargas reais agindo sobre ela.
2. **SISTEMA VIRTUAL** - Desenhar um diagrama da viga sem as cargas reais. Se a flecha precisar ser determinada, aplica-se uma carga unitária no ponto desejado. Caso a rotação precisa ser calculada, aplica-se um momento unitário no ponto da viga em que se deseja calcular a rotação.
3. Para cada segmento da viga, determine uma equação expressando a variação do momento fletor devido à carga real (M) com o comprimento do segmento em termos de coordenada de posição x.
4. Para cada segmento da viga, determine uma equação expressando a variação do momento fletor devido à carga virtual (Mv) com o comprimento do segmento em termos de coordenada de posição x.
5. Aplique a igualdade entre o trabalho virtual externo e interno, para obter os valores requisitados. Os valores podem ser obtidos algebricamente ou em casos que o diagrama possui figuras geométricas básicas pode ser obtidos graficamente.

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

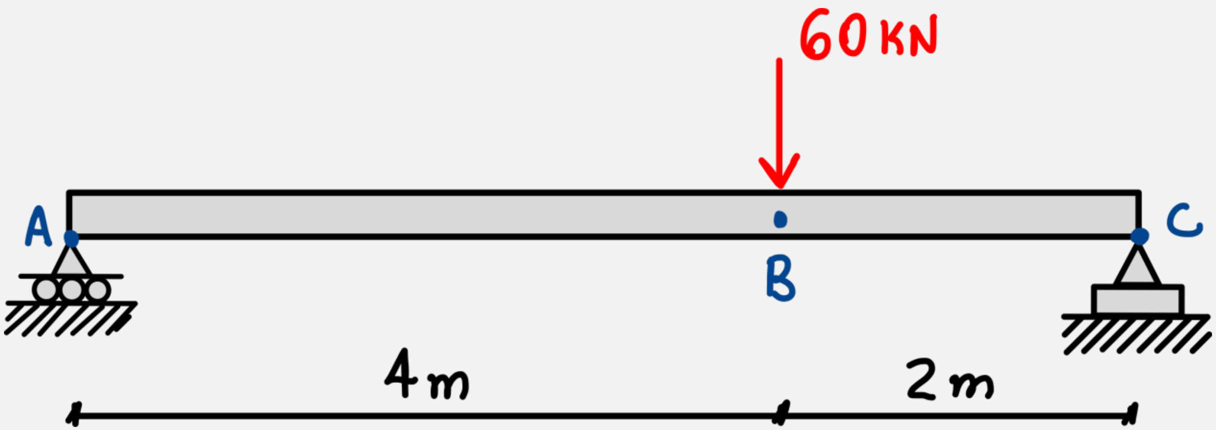
- Exemplo 001.
- Calcular a inclinação e deflexão no ponto B. Utilizando o método do trabalho virtual.
- E = 29 Gpa
- Seção transversal retangular de 0,15 x 0,40 m



- $\theta_B = -4{,}04\ x\ 10^{-3}\ y_B = -13{,}5\ mm$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

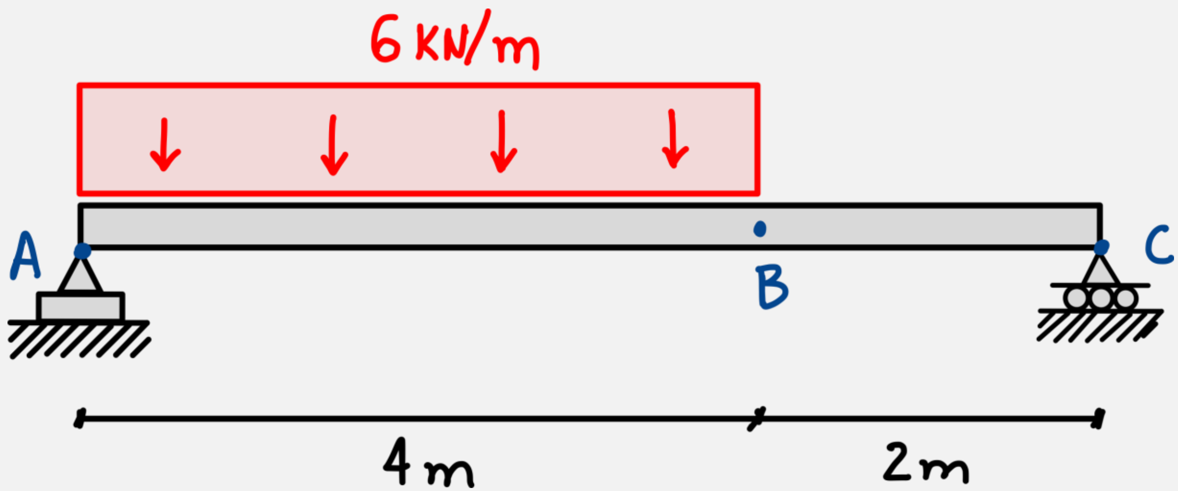
- Exemplo 002.
- Calcular a inclinação e deflexão no ponto B. Utilizando o método do trabalho virtual.
- E = 29 Gpa
- Seção transversal retangular de 0,15 x 0,40 m



- $\theta_B = 1,72\ x\ 10^{-3}\ y_B = -6,9\ mm$

FLECHAS EM VIGAS PELO MÉTODO DO TRABALHO VIRTUAL

- Exemplo 003.
- Calcular a inclinação e deflexão no ponto B. Utilizando o método do trabalho virtual.
- E = 29 Gpa
- Seção transversal retangular de 0,15 x 0,40 m



- $\theta_B = 115\ x\ 10^{-6}\ y_B = -0{,}345\ mm$