**Лабораторная работа 1**

**Действия над приближенными величинами**

Задача 1. Найти значение соответствующей функции при заданных приближенных значениях аргументов, оценить его погрешность и запишите с указанием только верных цифр.

Задача 2. Оцените погрешность задания исходных данных, необходимую для получения результата с *m* верными значащими цифрами*.*

Не вызывает сомнения, что расчетная величина прибыли предприятия, проектная мощность газопровода, затраты на сооружение детской площадки, на обеспечение комфортности условий труда и т. д. зависят от множества показателей (толщины трубы. образования персонал, освещенности рабочего места, близости к культурным центрам и т.п. Характер этой связи выясняется на основании чужого опыта, гипотезы научного консультанта и др. Это может быть обычная линейная связь (при соблюдения каких−то условий, затраты на покупку хлеба пропорциональны объему закупки) или сложная функциональная связь, в достаточной степени отражающая реальность.

Если Вы сообщите конструктору ракеты, что расстояние до Альфа Центавра составит 41.4865 триллионов километров, а банкиру выставите счет на 25934467.365 рублей, то …

Во-первых, такая точность никому не нужна. Во-вторых, ваш расчет строится на основании приближенных оценок (не найдете собственный рост с точностью до миллиметра или реальной численности студентов в вузах Томска с точностью до одного человека). Это нереально из-за точности измерительного инструмента.

На дворе ХХI век. Продавец на рынке пользуется калькулятором, округляя до 10 или 100 рублей в большую или меньшую сторону, а студент в буфете извлекает свой гаджет для подсчета стоимости трех пирожков.

Ручной счет исчезает, калькулятор сообщает итог с 10−12 цифрами и его нужно округлить, отбросить сомнительные цифры.

Жизнь требует уметь оценить не только значение функции (выражения), но и его погрешность, определяемую погрешностью исходных данных.

На помощь можно призвать ряд Тейлора для функции нескольких переменных

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

при заданной погрешности параметров Δ*х*1,Δ*х*2, *…,* Δ*хn*.

Если значения отклонений Δ*хi*сравнительно малы, то их произведения), тем более малы и для грубой оценки итога ограничиваются только линейной частью (1).

В итоге абсолютная погрешность найденного значения функции

(знак для таких величин игнорируется)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Теперь другая сторона медали. Постановщик задачи часто не может сообщить значения погрешности задания параметров и, если он сказал, что *х*=2.573, то ∆*х* приходится принять ∆*х*=0.0005.

Возникает лишь сомнение в достоверности конкретного числа верных цифр в итоге.

Частные производные в (2) характеризуют *скорость изменения* значения *F(X*) в окрестности конкретного значения *xi* и меняется в зависимости от значения параметра.

Величина



характеризует относительный вклад параметра в погрешность найденного значения функции и определяет допустимую погрешность задания параметра.

Если эта погрешность определяется количеством верных десятичных цифр *m*, то *∆F*=|*F*(*X*)| ∙10-*m*.

В итоге, если допустимая погрешность меньше исходной погрешности, то сообщите постановщику задачи, что для получения результата с требуемой точностью необходимо уточнить значение соответствующего параметра.

Так возникают прямая и обратная задачи теории погрешностей.

**Пример решения прямой задачи**.

Фиксируем значения параметров

*a*=28.3; *b*=7.45; *t*=0.7854

и абсолютной погрешности

*∆a*=0.02, *∆b*=0.01, *∆t*=0.0001

Любопытства ради, вычисляем относительные погрешности

*δa**=∆a/|a|;*  *δb* =*=∆b/|b*|; *δt* = *=∆t/|t|* .

Для функции

*F*(*a*,*b*,*t*)=(*a*2+*b*3)/*Cos*(*t*)

находим ее частные производные

=2*a*/*cos*(*t*) , =3*b*2/*cos*(*t*) , = -(*a*2+*b*3) ∙sin(*t*)/*cos*2(*t*)

Вычисляем абсолютную погрешность значения функции



и относительную погрешность *δF* = Δ*F /F* (можно в процентах).

Вручную, с помощью калькулятора или последовательности операторов Matlab

a=28.3; b=7.45; t=0.7854;

da=0.02; db=0.01; dt=0.0001;

dda=da/abs(a); ddb=db/abs(a); ddt =dt/abs(t);

F=(a^2+b^3)/cos(t)

dFa= 2\*a/cos(t); dFb=3\*b^2/cos(t); dFt=(a^2+b^2)\*sin(t)/cos(t)^2; dF= abs(dFa\*da)+ abs(dFb\*db)+ abs(dFt\*dt)

ddF =dF/abs(F)

получаем итог вычислений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | А | B | T |
| Значения | 28.3 | 7.45 | 0.7854 |
| Погрешность абсолютная | 0.02 | 0.01 | 0.0001 |
| Погрешность относит. | 7.06714 ⋅10-4 | 3.53357⋅10-4 | 1.27324⋅10-4 |
| Значение функции |  | 1.71740⋅103 |  |
| Частные производные | 80.0446 | 2.35478 ⋅102 | -1.21113 ⋅103 |
| Абсолютная погрешность F(a,b,t) | | 4.07678 |  |
| Относительная. погрешность F(a,b,t) | | 0.002374 |  |

Обнаружив, что отклонение затронет четвертую цифру найденного значения функции, округляем по ней и принимаем *F***=172⋅101** (но не 1720, поскольку последний знак сомнителен).

Другой подход базируется на найденной относительной вероятности отклонения 0.2 % (1% определяет достоверность оценки до сотых).

**Пример решения обратной задачи**

Предлагается вычислить значение *F*=(*a*2+*b*3) / *Cos*(*t*) при заданных значениях *a*=28.3, *b*=7.45, *t*=0.7854 и выяснить, можно ли доверять в нем не менее *m*=5 значащим цифрам.

Находим значение функции, с учетом *m* =5 принимаем его равным 1717.4. Следует ли всем цифра верить?

Находим значения функции и ее частных производных

=2*a*/*cos*(*t*) =80.0446 , =3*b*2/*cos*(*t*) = 2. 354782∙ 102 = - (*a*2+*b*3) ∙sin(*t*)/*cos*2(*t*) = - 1.21113∙103

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Приступив к поиску |  |  |

находим составляющие суммы

*a⋅*(*dF*/*da* = 2 265.26 , *b*⋅(*dF*/*db*)= 1169. 57,

*t*⋅(*dF*/*dt*)= 1348.85,

знаменатель = 5368.42, Δ*F=* 0.01717

и оценки допустимых погрешностей исходных данных

Δa = 9.05339 ⋅10-5 Δb = 2.383314 ⋅10-5 Δ*t* = 2.51256 ⋅10-6

Сопоставляя их с точностью фактических параметров 0.05, 0.005 и 0.00005, видим, что они много меньше (особенно по первым двум) и доверять 5 цифрам в найденном значении *F* нельзя.

**Контрольные вопросы**

1. Когда разумнее использовать оценку по абсолютной погрешности: для значений, близких к 1, 0, 1000, 10–9 или 1019.

2. Когда разумнее использовать оценку по относительной погрешности: при измерении – расстояния от Земли до Альфы Центавра, диаметра молекулы, численности шахматистов в г. Нью-Васюки, ширины тротуара около учебного корпуса ?

3. Выберите вариант: относительная погрешность умножения  *а*×*b* при *δа*=0.01 и *δ* =0.001 равна 0.01, 0.011, 0.009, 0.00001.

5. На экран калькулятора выдано значение 12.333333. Если относительная погрешность равна 0.001, то его запись с верными цифрами имеет вид: 12.3300000, 12.33, 12.3, 12.300000 или 12 ?

6. В найденном результате расчета 0.000123454321 можно верить 5 значащим цифрам. Правильна ли его запись в виде: 12345⋅10-8, 0.12345⋅10-3 , 0.123450 ⋅10-3 ?

7. Вспомните, что sin(x+y)=sin(x)⋅cos (y) +cos(x)⋅sin(y). при вычислении *sin*(*x*) от малых *x* абсолютная погрешность неизменна, удваивается или уменьшается вдвое?

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  | *F*(*a,b,c*) | *a* | *B* | *c* | *M* |
| 1 | 1 |  | 2456  ±0.0005 | 0.00078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 5 |
| 2 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.20078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 5 |
| 3 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0. 0078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 4 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.20078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 5 |
| 5 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.078  ±0.0003 | 0.2468  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.835 | 4 |
| 6 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.20078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 5 |
| 7 | 1 |  | 2456  ±0.0005 | 0.00078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 8 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.20078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 9 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.0078  ±0.00003 | 0.008  ±0.00013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 10 | 1 |  | 0.2556  ±0.0005 | 0.50078  ±0.00003 | 0. 8  ±0.013 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 11 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.0078  ±0.00003 | 8  ±1.23 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 12 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 0.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0.0348 | 5 |
| 13 | 1 |  | 0.2456  ±0.0005 | 0.078  ±0.003 | 8  ±1.25 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.007823 | 0.8348 | 4 |
| 14 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0.0348 | 5 |
| 15 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0. 348 | 5 |
| 16 | 1 |  | 0.1245  ±0.0005 | 0.120  ±0.0003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 3.0148 | 4 |
| 17 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.2456 | 0.1823 | 0.0348 | 5 |
| 18 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0.0348 | 5 |
| 19 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0. 348 | 5 |
| 20 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 2. 348 | 4 |
| 21 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0. 348 | 3 |
| 22 | 1 |  | 0.22456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0. 348 | 3 |
| 23 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.12456 | 0.01823 | 2. 08 | 4 |
| 24 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.02456 | 0.01823 | 0. 348 | 5 |
| 25 | 1 |  | 0.12456  ±0.0005 | 0.12078  ±0.00003 | 2.08  ±0.015 |  |
| 2 |  | 0.12456 | 0.11823 | 2. 08 | 5 |

**Лабораторная работа 2**

**Решение систем линейных алгебраических уравнений**

**Задание 1.** Выполните решение системы АХ=В, обращение матрицы А и поиск определителя методом Гаусса по схеме единственного деления вручную, ограничиваясь в записи чисел 2−3 значащими цифрами. Сравните полученные результаты с оценками на основе функций MatLab.

**Задание 2.** Решите систему СХ=D методом квадратных корней (С − симметрическая матрица) вручную с той же точностью и средствами MatLab.

**Задание 3.** Выполните преобразование АХ=В к виду X=αX+β, используя любой из итерационных методов; средствами MatLab найдите решение с установленной точностью или продемонстрируйте отсутствие сходимости.

Напомним некоторые известные из школьной программы.

Если вы знакомы с определителями, то решая систему 2 уравнений с 2 неизвестными

7 х1 + 3 х2=32

3 х1 + 7х2 = 8

представимую матричной записью АХ=В, где

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А= | 7 3 | Х= | х1 | В= | 32 |  |
| 3 7 | х2 | 28 |  |

можно воспользоваться правилом Крамера (определитель системы в знаменателе)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х1= | 32 3 | = | 32×7-8×3  =200 | =5, | х2 = | 7 32 | = | 7×8-3×32=- 40 | = -1 |
| 8 7 | 3 8 |
| 7 3 | 7×7-3×3  =40 | 7 3 | 7×7-3×3 = 40 |
| 3 7 | 3 7 |

|  |  |
| --- | --- |
| По существу, мы нашли точку пересечения двух прямых, которые могли бы пересекаться (в нашем примере), быть параллельными или противоречить друг другу. В случае n неизвестных каждое уравнение можно представить как гиперплоскость (плоскость *п*-мерного пространства) и прийти к основополагающим выводам. |  |

Система линейных алгебраических уравнений AХ=В имеет единственное решение, если определитель (детерминант) det (A)≠ 0, имеет бесчисленное множество решений или противоречива в противном случае.

В реальной практике приходится иметь дело с числом *т* ограничений меньшим числа неизвестных *п* и число возможных решений бесконечно. Для выбора однозначного решения конкретного решения значения *n*−*m* неизвестных устанавливают принудительно (корректируя В) и выбирают соответственно в R квадратную подматрицу A. −

**1.** Один из вариантов гауссовой схемы единственного деления предлагает построить расширенную матрицу W= [А | В | Е ], где Е − единичная матрица за *n* шагов преобразуют к виду [Е | А-1 | Х =А-1В], *n*  − размерность (число неизвестных) и А-1  − символ обратной матрицы.

Далее идет однообразный процесс выбираем *i*-ую строку (начиная с *i*=1 до *n* ) делим ее на W*ii* и исключаем соответствующую переменную, вычитая из всех остальных строк k полученную строку, умноженную на Wk*i .*

Для иллюстрации такой процедуры обратимся к примеру.

*x*1 + 3 *x* 2 + 5 *x*3 = 20

3 *x*1 +0.7 *x*2 л - 11 *x*3 = 2

5 *x*1 −11 *x*2 +0.13 *x*3 = -2

Ищем решение вручную, ограничиваясь 2 знаками после десятичной точки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | 3 | 5 | 1 |  |  | 20 |  |  |
|  | 3 | 0.7 | -11 |  | 1 |  | 10 | ⇒ |  |
|  | 5 | -11 | 0.13 |  |  | 1 | 5 |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | 20 |  |  |
|  | 0 | **-8.3** | -26 | -3 | 1 | 0 | -50 | ⇒ |  |
|  | 0 | -26 | -24.87 | -5 | 0 | 1 | -95 |  |  |

+=+

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 4.39 | -0.0800 | 0.36 | 0 | 1.92 |  |  |
|  | 0 | 1 | 3.13 | 0.36 | -0.12 | 0 | 6.02 | ⇒ |  |
|  | 0 | 0 | **56.57** | -14.39 | 3.13 | 1 | 61.62 |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | 0.26 | 0.11 | 0.07 | 6.70 |  |  |
|  | 0 | 1 | 0 | 0.11 | 0.05 | -0.05 | 2.61 |  |  |
|  | 0 | 0 | 1 | 0.07 | -0.05 | 0.01 | 1.08 |  |  |

Перемножив выделенные диагональные элементы, получаем значение определителя (детерминанта), равное 57.76\*8.3 = -479.41.

В итоге этого достаточно грубого расчета (с округлением промежуточных величин) получаем информацию к размышлению.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | 3 | 5 |  | 20 |  | 0.26 | 0.11 | 0.07 |  | 6.70 |
| А= | 3 | 0.7 | -11 | В= | 10 | А-1= | 0.11 | 0.05 | -0.05 | Х= | 2.61 |
|  | 5 | -11 | 0.13 |  | 5 |  | 0.07 | -0.05 | 0.01 |  | 1.08 |

Вспомним понятие обратной матрицы А-1 и убедимся, что умножение ее на исходную дает единичную матрицу А-1А=Е, а решить систему АХ=В можно умножив ее на вектор правой части Х= А-1В.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А-1А = | 0.9400 0.0100 -0.030  0.0870 0.9150 0.0650  0.0991 -0.0065 0.9013 | Х= А-1В= | 6.6500  2.4500  0.9500 | AX= | 19.93  10.0470  4.9304 |

Налицо довольно значимая погрешность (представьте, что будет при большей размерности порядка десятков и сотен). Нужна, по крайней мере, предельно возможная точность хранения промежуточных величин расчета.

Обратимся к функциям MatLab линейной алгебры (точность представления чисел в памяти 12−14 значащих цифр), среди которых

**det(A)** − определитель квадратной матрицы;

**inv(A)** – обращение матрицы.

Их применение в нашем случае дает

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А-1=inv(A) = | 0.2575 | 0.1180 | 0.0777 |  | 6.7179 |
| 0.1180 | 0.0530 | -0.0554 | Х= А-1B= | 2.6119 |
| 0.0777 | -0.0554 | 0.0177 |  | 1.0893 |

Если det(A) близок к нулю, то выдается сообщение:

<Matrix is singular to working precision.>

 <При заданной точности матрица вырождена.>

Для априорной оценки ранга матрицы (числа независимых строк− столбцов) можно прибегнуть к функции **rank(A)**.

В заключение, отметим существование *монитора*, который *сам* на основе предварительного анализа типа матрицы (треугольная, симметрическая, прямоугольная разреженная или полная) *выбирает* метод решения (Гаусса, вращений, Холецкого, Хаусхолдера, Холлерита) и предлагает решать систему АХ=В с помощью оператора **X = A \ B** или **X = B / A** (здесь лишь иллюзия примитивного деления, не существующего в матричной алгебры). В качестве В можно брать несколько столбцов (вариантов правой части системы).

**2.** При обработке статистических данных с цельювыяснить наличие взаимосвязи между факторами наблюдаемого явления и при аппроксимации сложных и эмпирических функций линейными функциями и алгебраическими много членами, приходится решать системы линейных уравнений с **симметрической матрицей** коэффициентов. Любопытство к этим матрицам связано с возможностью хранить только верхний или нижний относительно главной диагонали треугольник− вместо *п2*элементов хранить лишь *п*(*п*−1)/2 .

Здесь эффективен **метод квадратных корней**, основанный на представлении A=RTR (T – символ транспонирования).

Если такое разложение выполнено, то AX=B превращается в RTRХ=В, исходная задача превращается в пару задач RT Y=В и RX=Y c треугольными матрицами коэффициентов.

Обратившись к библиотечной функции **R=chol(A)**, получаем

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 1 1  1 6 15  1 15 74 |  | 19  33  107 |  | 1 1 1  0 2.2361 6.2610  0 0 5.8138 |  |
| A= | B= | R = |  |
|  |  |  |  |

Теперь запишем и найдем решение упомянутых задач

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 |  | y1 |  | 19 |
| RT Y=В | 1 | 2.2361 | 0 | ∙ | y2 | = | 33 |
|  | 1 | 6.2610 | 5.8138 |  | y3 |  | 107 |

y1 = 19.0000, y2 =(33-19) / 2.2361=6.2610,

y3 = (107-19 -6.2610^2) / 5.8138= 8.3939

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 1 1  0 2.2361 6.2610  0 0 5.8138 |  | x1 |  | 19 |  |  |
| RX=Y |  | ∙ | x2 | = | 6.2610 |  |
|  |  |  | x3 |  | 8.3939 |  |

x3 = 8.3939 / 5.8138 =1.4438,

x2 = (6.2610 - 6.2610 ∙1.4438) / 2.2361 = -1.2426 ,

x3 = 19 - 1.4438+ 1.2426 =18.7988

Таким образом последовательность операторов

R=chol(A); Y=R'\B; X=R\Y

обеспечивает решение задачи.

Возьмем другую задачу, где

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 2 3  2 5 4  3 4 5 |  | 5 |  |
| А= | , В= | 8 |
|  |  | 11 |

Обратившись к chol(A) , получаем сообщение

Error using chol Matrix must be positive definite.

Действительно, эта функция требует положительной определенности матрицы (положительны ее главные миноры).

В нашем случае

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| М1=1>0, | M2=det | 1 2 | =1 >0, M3=det(A) = **-8** |
| 2 5 |

Представим *R* в развернутом виде

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *r11 r*12*.  r*13 …. *r*1*n* |  |  |
|  |  | 0*r*22  *r*23 …. *r*2*n* |  |  |
|  | *R=* | 00*r*33 …. *r*3*n* |  |  |
|  |  | … … … … |  |  |
|  |  | 00 0 ….  *rnn* |  |  |

Для определения *R*  имеем систему



решение которой имеет вид



(все элементы *R* либо вещественные, либо чисто мнимые числа).

Решение систем с треугольными матрицами сводится к поиску



Вернувшись к системе

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 2 3  2 5 4  3 4 5 |  | 5 |  |
| А= | , В= | 8 |
|  |  | 11 |

получаем



т.е.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
| *R* = | 0 | 1 | -2 |
|  | 0 | 0 |  |

Решение возникающих систем *R*T*Y=B , R X=Y*



**3**. Решение больших систем чревато большой погрешностью результата и для его уточнения используют методы итераций (последовательных приближений), процесс которых продолжается до достижения приемлемой точности (не надейтесь найти абсолютно точное решение).

Здесь система *AX=В*  обычно преобразуется к эквивалентной системе *X = α X + β* , которая заменяется итерационным процессом

*X*(*k*+1) *= α X*(*k*) *+ β* , *k =* 0, 1, 2, ...

где начальное приближение *X*(0)выбирается произвольно, например, *X*(0)=0 или оценке другими методами.

Подобных преобразований можно предложить множество. Так уравнение 4 *x*1 + 0.24 *x*2 − 0.08 *x*3 = 8 можно заменить на

*x*1 = 2 −0.06 *x*2 + 0.02 *x*3

*x*1 = 8 −3 *x*1 −0.24 *x*2 + 0.08 *x*3

Это преобразование выполняют так, чтобы итерационный процесс был сходящимся, а достаточным условием сходимости является требование, чтобы ||*α*|| (т.н. норма матрицы *α*), была меньше 1.

Понятие нормы матрицы (вектора) используется при решении многих задач, связанных с сходимостью итерационных процессов.

Существует несколько интерпретаций этого понятия.

**norm(v)**, **norm(v, p**) − норма векторов: корень из суммы квадратов элементов или сумма абсолютных значений элементов, р=1,2;

**norm(A)**, **norm(A, p)** – норма матрицы (максимум из аналогичных оценок по строкам, р=1,2.

 , =

Обеспечить ||*α*|| <1 элементарно, если диагональные элементы *A* больше суммы абсолютных значений внедиагональных для всех строк.

Так систему

4 *x*1 + 0.24 *x*2 −0.08 *x*3 = 8

0.09 *x*1 + 3 *x*2 − 0.15 *x*3 = 9

0.04 *x*1 − 0.08  *x*2 + 4 *x*3 = 20

легко (делением на диагональные элементы) преобразуем ее к виду

*x*1 = 2 - 0.06 *x*2 + 0.02 *x*3

*x*2 = 3 - 0.03 *x*1 + 0.05 *x*3

*x*3 = 5 - 0.01 *x*1 + 0.02 *x*2

Строим процесс **простой итерации** с X(0) =0, получая

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 |  | 0 | -0.06 | 0.02 |  | 2 |  | 2 |  | 1.92 |
| X(1) = | 3 | X(2) = | -0.03 | 0 | 0.05 |  | 3 | + | 3 | = | 3.19 |
|  | 5 |  | -0.01 | 0.02 | 0 |  | 5 |  | 5 |  | 5.04 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | -0.06 | 0.02 |  | 1.92 |  | 2 |  | 1.9094 |
| X(3) = | -0.03 | 0 | 0.05 |  | 3.19 | + | 3 | = | 3.1944 |
|  | -0.01 | 0.02 | 0 |  | 5.04 |  | 5 |  | 5.0446 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | -0.06 | 0.02 |  | 1.9094 |  | 2 |  | 1.90923 |
| X(3) = | -0.03 | 0 | 0.05 |  | 3.1944 | + | 3 | = | 3.19495 |
|  | -0.01 | 0.02 | 0 |  | 5.0446 |  | 5 |  | 5.04485 |

(продолжаем процесс до обнаружения | Х(*k*+1) – Х(*k*) | < ε (требуемой точности); найденное приближение гарантирует, по крайней мере, три верных цифры после десятичной точки).

Более быстрый **метод Зейделя** отличается от метода простой итерации тем, что на очередной итерации используются не оценки предыдущей итерации, а самые последние из полученных оценок

**Контрольные вопросы**

1.Что такое обратная матрица и как проверить безошибочность результата ее поиска?

2. Что такое единичная и транспонированная матрицы?

3. Что такое положительно определенная матрица ?

4. Есть ли уверенность, что СЛАУ с положительно определенной матрицей имеет единственное решение?

5. Что делать, если det(A)≠0, но какой-то из меньших миноров нулевой?

6. В чем отличие схем главных элементов и единственного деления?

7. Можно ли в программе условием окончания итераций поставить требования совпадения очередных приближений?

8. Как связано условие ||*α*|| <1 с погрешностью вычислений?

9. Предсказуемо ли время решения СЛАУ методом Гаусса и итерационными методами?

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | A | | | | B |  | C | | | D |
| 1 | 1 | 0.47 | −0.11 | 0.55 | 1.33 |  | 1 | 2 | 3 | 13 |
|  | 0.42 | 1 | 0.35 | 0.17 | 1.29 |  | 2 | 3 | 5 | 4 |
|  | -0.25 | 0.67 | 1 | 0.36 | 2.11 |  | 3 | 5 | 9 | 17 |
|  | 0.54 | -0.32 | −0.74 | 1 | 0.10 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 0.63 | 1 | 0.11 | 0.34 | 2.08 |  | 1 | 2 | 3 | 0.55 |
|  | 0.17 | 1.18 | -0.45 | 0.11 | 0.17 |  | 2 | 5 | 8 | 1.35 |
|  | 0.31 | −0.15 | 1.17 | −2.35 | 1.28 |  | 3 | 8 | 27 | 3.55 |
|  | 0.58 | 0.21 | −3.45 | −1.18 | 0.05 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 0.77 | 0.04 | −0.21 | 0.18 | 1.24 |  | 0.42 | 1.43 | 0.27 | 1 |
|  | −0.45 | 1.23 | −0.06 | 0 | -0.88 |  | 1.43 | −0.84 | 0.93 | 2 |
|  | −0.26 | −0.34 | 1.11 | 0 | 0.62 |  | 0.27 | 0.93 | -0.48 | 3 |
|  | −0.05 | 0.26 | −0.34 | 1.12 | −1.17 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 0.79 | -0.12 | 0.34 | 0.16 | -0.64 |  | 0.64 | 0.54 | -0.33 | 3 |
|  | -0.34 | 1.18 | -0.17 | 0.18 | 1.42 |  | 0.54 | -0.92 | 0.24 | 2 |
|  | -0.16 | -0.34 | 0.85 | 0.31 | -0.42 |  | -0.33 | 0.24 | 0.78 | 1 |
|  | -0.12 | 0.26 | 0.08 | 0.75 | 0.83 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | -0.68 | -0.18 | 0.02 | 0.21 | -1.83 |  | 0.5 | 1.50 | 0.30 | 1.5 |
|  | 0.16 | -0.88 | -0.14 | 0.27 | 0.65 |  | 1.50 | 3.25 | 1.30 | 2.5 |
|  | 0.37 | 0.27 | -1.02 | -0.24 | -2.23 |  | 0.30 | 1.30 | -0.41 | 3 |
|  | 0.12 | 0.21 | -0.18 | -0.75 | 1.13 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | -0.58 | -0.32 | 0.03 | 0 | -0.44 |  | 0.19 | 0.51 | 0.86 | 0.35 |
|  | 0.11 | -1.26 | -0.36 | 0 | -1.42 |  | 0.51 | 0.32 | 0.95 | 0.42 |
|  | 0.12 | 0.08 | -1.14 | -0.24 | 0.83 |  | 0.86 | 0.95 | -0.12 | 0.45 |
|  | 0.15 | -0.35 | -0.18 | 0 | 1.42 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | -0.83 | 0.31 | -0.18 | 0.22 | 1.71 |  | 0.64 | 1.54 | -0.33 | 0.3 |
|  | -0.21 | -0.67 | 0 | 0.22 | -0.62 |  | 1.54 | -0.92 | 0.24 | 0.2 |
|  | 0.32 | -0.18 | -0.95 | -0.19 | 0.89 |  | -0.33 | 0.24 | 0.78 | 0.1 |
|  | 0.12 | 0.28 | -0.14 | -1 | -0.94 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8 | -0.87 | 0.27 | -0.22 | -0.18 | -1.21 |  | 0.55 | 1.77 | 0.40 | 1.5 |
|  | -0.21 | -1. | -0.45 | 0.18 | 0.33 |  | 1.77 | 1.79 | 0.95 | 2.5 |
|  | 0.12 | 0.13 | -0.33 | 0.18 | 0.48 |  | 0.40 | 1.03 | 1.40 | 3 |
|  | 0.33 | -0.41 | 0 | -1 | 1.21 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | -0.81 | -0.07 | 0.38 | -0.21 | 0.81 |  | 0.60 | 1.75 | 1.75 | 1.5 |
|  | -0.22 | -0.92 | 0.11 | 0.33 | 0.64 |  | 1.75 | 1.80 | 1.00 | 2.5 |
|  | 0.51 | -0.07 | -0.81 | -0.11 | 1.71 |  | 1.75 | 1.00 | -0.40 | 3 |
|  | 0.33 | -0.41 | 0 | -1 | 1.21 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 | -1 | 0.22 | -0.11 | 0.31 | -2.7 |  | 1.42 | 1.43 | 0.27 | 0.1 |
|  | 0.38 | -1 | -0.12 | 0.22 | 1.5 |  | 1.43 | -0.84 | 0.93 | 0.2 |
|  | 0.11 | 0.23 | 1 | -0.51 | 1.2 |  | 0.27 | 0.93 | -0.48 | 0.3 |
|  | 0.17 | -0.21 | 0.31 | -1 | 0.17 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 | -0.93 | -0.08 | 0.11 | -1.18 | 0.51 |  | 0.93 | 1.08 | 0.11 | 1.18 |
|  | 0.18 | -0.48 | 0 | 0.21 | -1.17 |  | 1.08 | 0.48 | 0 | 0.21 |
|  | 0.13 | 0.31 | -1 | -0.21 | 1.02 |  | 0.11 | 0 | -1 | 0.21 |
|  | 0.08 | 0 | -0.33 | -0.72 | 0.28 |  |  |  |  |  |
|  |
| 12 | -0.95 | -0.06 | -0.12 | 0.14 | 2.17 |  | 1 | 1 | 0.21 | 0.92 |
|  | 0.04 | -1.12 | 0.08 | 0.11 | 1.4 |  | 1 | 0.03 | -0.42 | 0.92 |
|  | 0.11 | 0.12 | 0 | 1.03 | 0.8 |  | 0.21 | -0.42 | -0.04 | 1.2 |
|  | 0.34 | 0.08 | -1.06 | 0.14 | 2.1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 13 | 0 | -0.19 | 0.27 | -0.88 | 1.2 |  | -1 | -0.07 | 0.21 | 0.92 |
|  | -0.33 | -1 | -0.07 | 0.21 | 0.92 |  | 0.07 | 0.03 | -0.42 | 0.92 |
|  | 0.11 | 0 | 1.03 | -0.42 | 0.92 |  | 0.21 | 0.42 | -0.04 | 1.2 |
|  | -0.92 | -0.03 | 0 | -0.04 | 1.2 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 14 | -0.88 | -0.23 | 0.25 | -0.16 | 1.24 |  | 0.08 | 0.12 | -0.77 | 0.32 |
|  | 0.33 | 0.03 | -0.84 | -0.32 | -1.15 |  | 0.12 | 0.22 | 0.14 | -1 |
|  | 0.14 | -0.66 | -0.18 | 0.24 | 0.89 |  | -0.77 | 0.14 | 0.06 | -0.12 |
|  | 0.12 | -0.05 | 0 | -0.85 | 0.57 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 15 | 0.12 | -1 | 0.32 | -0.18 | 0.72 |  | 0.08 | 0.25 | -0.77 | 0.32 |
|  | 0.08 | -0.12 | -0.77 | 0.32 | 0.58 |  | 0.25 | 0.22 | 0.14 | -1 |
|  | 0.25 | 0.22 | 0.14 | -1 | -1.56 |  | -0.77 | 0.14 | 0.06 | -0.12 |
|  | -0.77 | -0.14 | 0.06 | -0.12 | -1.21 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 16 | -0.86 | 0.23 | 0.18 | 0.17 | 1.42 |  | 1 | 2 | 3 | 0.55 |
|  | 0.12 | -1.14 | 0.08 | 0.09 | 0.83 |  | 2 | 4 | 9 | 0.35 |
|  | 0.16 | 0.24 | -1 | -0.35 | -1.21 |  | 3 | 9 | 5 | 0.55 |
|  | 0.23 | -0.08 | 0.05 | -0.75 | -0.65 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 17 | 76 | 21 | 6 | -34 | -142 |  | 1 | 2 | 4 | 0.55 |
|  | 12 | -114 | 8 | 9 | 83 |  | 2 | 4 | 10 | 1.35 |
|  | 16 | 24 | -100 | -35 | -121 |  | 4 | 10 | 64 | 3.55 |
|  |  |  | 23 | -8 | 85 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 18 | -83 | 27 | -13 | -11 | 142 |  | 0.64 | 0.53 | -0.33 | 3 |
|  | 5 | -68 | 13 | 24 | 26 |  | 0.53 | -0.92 | 0.23 | 2 |
|  | 9 | 54 | 127 | 36 | 23 |  | -0.33 | 0.23 | 0.78 | 1 |
|  | 13 | 27 | 34 | 156 | 49 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 19 | 1 | 2 | 3 | 9 | 1.11 |  | 5 | 3 | 1 | 11 |
|  | 2 | 1 | 9 | 4 | 1.16 |  | 3 | 5 | 3 | 17 |
|  | 3 | 9 | 1 | 4 | 1.24 |  | 1 | 3 | 5 | 19 |
|  | 9 | 1 | 3 | 4 | 1.55 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 20 | -1 | 0.28 | -0.17 | 0.06 | -21 |  | 11 | 12 | 13 | 13 |
|  | 0.52 | -1 | 0.12 | 0.17 | 117 |  | 12 | 13 | 15 | 4 |
|  | 0.17 | -0.18 | -0.79 | 0 | 0.81 |  | 13 | 15 | 19 | 17 |
|  | 0.11 | 0.22 | 0.03 | -0.95 | -0.72 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 76 | 21 | 6 | -34 | 142 |  | 1 | 2 | 4 | 0.55 |
|  | 12 | -114 | 8 | 9 | 83 |  | 2 | 4 | 7 | 1.35 |
|  | 16 | 24 | -100 | 35 | 121 |  | 4 | 7 | 14 | 3.55 |
|  | 23 | -8 | 5 | -75 | 85 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 22 | -83 | 27 | -13 | -11 | 142 |  | 1.64 | 0.53 | -0.33 | 3 |
|  | 5 | -68 | 13 | 24 | 26 |  | 0.53 | -0.92 | 0.23 | 2 |
|  | 9 | 54 | 127 | 36 | 23 |  | -0.33 | 0.23 | 1.78 | 1 |
|  | 13 | 27 | 34 | 156 | 49 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 23 | 25 | 3 | 5 | 4 | 1.11 |  | 15 | 13 | 11 | 11 |
|  | 5 | 4 | 3 | 25 | 1.16 |  | 13 | 15 | 13 | 17 |
|  | 3 | 25 | 4 | 5 | 1.24 |  | 11 | 13 | 15 | 19 |
|  | 4 | 5 | 25 | 3 | 1.55 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 24 | 0.12 | -1 | 0.32 | -0.18 | 0.72 |  | 0.08 | 0.25 | -1.77 | 0.32 |
|  | 0.08 | -0.12 | -0.77 | 0.32 | 0.58 |  | 0.25 | 0.22 | 0.14 | -1 |
|  | 0.25 | 0.02 | 0.14 | -1 | -1.56 |  | -1.77 | 0.14 | 0.06 | -0.12 |
|  | -0.77 | -0.14 | 0.06 | -0.12 | -1.21 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 25 | -0.86 | 0.23 | 0.18 | 0.17 | 1.42 |  | 11 | 21 | 31 | 0.55 |
|  | 0.12 | -1.14 | 0.08 | 0.09 | 0.83 |  | 21 | 41 | 91 | 0.35 |
|  | 0.16 | 0.24 | -1 | -0.35 | -1.21 |  | 31 | 91 | 51 | 0.55 |
|  | 0.23 | -0.08 | 0.05 | -0.75 | -0.65 |  |  |  |  |  |

**Лабораторная работа 3**

**Решение нелинейных уравнений**

**Задание 1.** Выполните отделение корней алгебраического многочлена *f*1(*x*)=0 с использованием аналитических оценок. Средства компьютерной графики используйте лишь для иллюстрации выводов.

**Задание 2.** Найдите оценку одного из вещественных корней уравнения *f*1(*x*)=0 методами дихотомии и хорд с заданной точностью. Сравните объем вычислений при использовании указанных методов.

**Задание 3.** Найдите один из корней уравнений *f*2(*x*)=0 методами Ньютона (касательных) и простой итерации с заданной точностью, обеспечив условия сходимости процесса итераций. Сопоставьте с оценкой, получаемой с помощью функции MatLab х=fzero(f ,x0).

**Задание 4.** Решите систему уравнений *f*1(*x,y*)=0, *f*2(*x,y*)=0 методом Ньютона с точностью 0.0005.

**1.** Идея отделения корней связана с тем, что для непрерывной функции *f*(*x*) факт *f*(*а*)∙ *f*(*b*)<0 говорит о наличии в интервале (*а*,*b*) хотя бы одного корня.

Если *f(x*) - алгебраический многочлен *n*-й степени, то уравнение

, *a*0≠ 0

с действительными коэффициентами, имеет *n* корней (различных, совпадающих, действительных или комплексно–сопряженных). Решая уравнение для многочлена четвертой степени, мы можем получить 4 вещественных корня (не обязательно различных), 2 вещественных и 2 комплексно-сопряженных или 2 пары комплексно-сопряженных. Для многочленов нечетной степени имеется хотя бы один действительный (вещественный) корень. Так уравнение х3+8=0 имеет 3 корня −2, 1 +*i*, 1 *–i*.

Для алгебраических уравнений проблема отделения корней упрощается за счет некоторых известных теорем.

*Теорема* 1. Все корни *хk* (*k=*1, .. ,*n*) полинома, в том числе и комплексные лежат в кольце *r* < ⏐*хk*⏐ < *R* , где

 ,

*A* = max {⏐*a*1⏐,⏐ *a*2⏐, .. ,⏐ *an*⏐}, *B* = max {⏐*a*0⏐,⏐ *a*1⏐, .. ,⏐ *an*-1⏐} .

Так для уравнения

*P*(*x*) *=* 2 *x*5 – 100 *x*2*+* 2*x –* 1=0

*A*=max(0,0,100,2,1)=100, *B*= max(2,0,0,100,2}=100, соответственно *R*=51, *r*=1/101 ~0.01. Степень многочлена нечетная - среди 5 корней есть хотя бы один вещественный корень в интервале (0.01, 51) или (*–*51, *–*0.01).

***Теорема* 2**. Если *a*0 > 0 и *ak*– первый из отрицательных коэффициентов полинома, то для положительных корней имеет место неравенство

 , .

Для вышеприведенного полинома *k*=3, *В*=max(100, 1)=100 и верхняя граница положительных корней равна  <<51.

Для установления нижней границы отрицательных корней можно выполнить аналогичные оценки для полинома *P*(-*x*)

*P*(-*x*) *=* -2 *x*5 – 100 *x*2*-* 2*x –* 1=0,

эквивалентного уравнению 2 *x*5 +100 *x*2*+* 2*x +*1=0 с неотрицательными коэффициентами (отрицательных корней нет).

***Теорема 3.*** Если при *x=Z* значения полинома и его производных неотрицательны, то *Z* можно принять за верхнюю границу положительных корней полинома.

Если для нашего полинома взять *х*=4, то при этом значении

*P*(*x*) *=* 2 *x5 –*100 *x*2 + 2*x* –1 >0, *P*’(*x*) *=* 10 *x*4–200 *x*+ 2 >0,

*P’*’(*x*) = 40 *x*3–200>0, *P’*’’(*x*) = 120 *x*2>0,

*P*(4)(*x*) *=* 240 *x*>0, *P*(5)(*x*) *=*240 .

Вывод: верхняя граница положительных корней не более 4.

***Теорема 4****.* Число положительных корней полинома равно числу перемен знаков его коэффициентов или меньше его на четную величину.

В рассматриваемом *P*(*x*)*=*2 *x*5–100 *x*2*+*2*x –*1 три перемены знаков - число положительных корней равно 3 или 1. Поскольку в полиноме *P*(–*x*) *=* –2 *x*5–100 *x*2–2*x –*1 нет перемен знаков, нет отрицательных корней.

**2**. Идея методов дихотомии и хорд в последовательном изменении границ интервала поиска [*a*,*b*], содержащего корень, в зависимости от знака *f*(*а*)∙ *f*(*хk*).

При дихотомии выбирают середину интервала *xk*=(*a*+*b*)/2 и меняют одна из границ в зависимости от соотношения знаков .

Реализация этого процесса представлена в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | А | b | F(a) | F(b) | x | F(x) |
| 1 | 0.01 | 4 | -0.9900 |  | 2.0050 | -334.1885 |
| 2 | 2.0050 | 4 | -334.1885 |  | 3.0025 | -408.4672 |
| 3 | 3.0025 | 4 | -408.4672 |  | 3.5012 | -167.5580 |
| 4 | 3.5012 | 4 | -167.5580 |  | 3.7506 | 84.1731 |
| 5 | 3.5012 | 3.7506 |  | 84.1731 | 3.6259 | -54.9695 |
| 6 | 3.6259 |  | -54.9695 |  | 3.6883 | 11.0897 |
| 7 |  | 3.6883 |  | 11.0897 | 3.6571 | -22.7933 |
| 8 | 3.6571 |  | -22.7933 |  | 3.6727 | -6.0682 |
| 9 | 3.6727 |  | -6.0682 |  | 3.6805 | 2.4563 |
| 10 | 3.6727 | 3.6805 | 2.4563 |  | **3.6766** | **-1.8195** |

Определив функцию F=@(x) 2\*x^5–100\*x^2+2\*x–1, задав, согласно найденным оценкам, границы a=0.01 и b= 4, находим fa=F(a) и fb=F(b).

Затем, пока не соблюдается условие окончания процесса,

x=(a+b)/2; fx=F(x); if fx\*fa>0 a=x else b=x end;

Упомянутым условием служит требование допустимой абсолютной погрешности корня |*b*–*a* |<ε (выше принято ε=0.005) или малости соответствующего значения функции. .

При методе хорд очередное приближение выбирается как



условием окончания процесса приближений служит близость очередных приближений | *xk*+1–*xk*|<ε или значение функции |*f*(*хk*)|< ε.

Bо избежание многократного обращения к функции (5 или 6 раз) разумнее вместе со сменой границ сохранять значение функции

x=(a\*fb-b\*fa)/(fb-fa); fx=F(x);

if fx\*fa>0 a=x; fa=fx else b=x; fb=fx end;

В нашем примере корень ближе к верхней границе, берем интервал от 3 до 4 и получаем одностороннюю сходимость:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | А | b | F(a) | F(b) | x | F(x) |
| 1 | 3 | 4 | -409 | 455 | 3.4734 | -189.3965 |
| 2 | 3.4734 | 4 | -189.3965 | 455 | 3.6282 | -52.7307 |
| 3 | 3.6282 | 4 | -52.7307 | 455 | 3.6668 | -12.4688 |
| 4 | 3.6668 | 4 | -12.4688 | 455 | 3.6757 | -2.8316 |
| 5 | 3.6777 | 4 | -2.8316 | 455 | 3.6777 | -0.6371 |
| 6 | 3.6779 | 4 | -0.6371 | 455 | **3.6779** | **-0.3600** |

Оценки корней полинома в среде MatLab легко найти с помощью функции **roots(P)**, где Р *–* массив значений коэффициентов. В нашем случае P=[2 0 0 -100 2 -1]; **roots**(P), сообщает корни

-1.8491+3.1897i, -1.849 -3.1897 i, **3.67825**,

0.0100+0.0995i, 0.0100- 0.0995i

Кстати, имеется функция для выполнения обратного действия: задав корни R=[1 2 3], оператором **P=poly(R)** получаем P =[1 -6 11 -6], т. е. полином P(х) = х3–6х2 + 11 х –6.

**3**. В основе итерационных методов решения уравнения *f* (*x*) =0 необходимо выбрать начальное приближение *х*0 (нетривиальная задача, неудачный выбор дает расходящийся процесс приближений или уход на поиск другого корня, отличного от искомого) и последовательное уточнение до выполнения |*xk*+1 – *xk*|<ε| или | *f*(*хk*)|< ε.

Выбор начального приближения для корня – трудная задача. В век компьютеров предлагают взять интервал (какой?), шаг табулирования (как не перескочить через область корня?) и создать картинку.

Возьмите функцию F(х) = х3+ х –10000. Выполнив

X=0:1: 1000; F= X.^3+X-10000; plot(X,F)

мы не увидим никаких намеков на корень. Если же заметим, что эта функция – полином, то легко видеть, что действительный корень один и меньше 100.

Метод Ньютона определяет итерации

*хk*+1*= xk−, k*=0.1,2,…

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | Для примера возьмем уравнение sin(x)–e-x =0, т. е. *f*(*х*) = sin(x) –eхр(–х). Схематичный набросок графиков y=sin(x) y= e-x показывает, что старший корень в интервале (0,2).  Имеем *f‘*(*х*)=cos(x)+eхр(–х).  Потребовав⏐*f*(*x*)⏐< 0.001, при *x*0=1 оперативно получаем | |
| k | xk | F(xk) |
|  | 1 | 0.473591 |
| 1 | 0.478527 | -0.159222 |
| 2 | 0.584157 | -0.006079 |
| 3 | 0.588525 | -0.000011 |

В случае метода простой итерации *f*(*х*)=0 преобразуется к эквивалентному *х*=*ϕ* (x) так, чтобы в окрестности корня ⏐ϕ‘(x)⏐< 1, и далее стоится итерационный процесс *графиков xk*+1 = *ϕ* (*xk*) *, k=*0,1,2,...

Можно предложить десятки вариантов построения *ϕ*(*x*). В нашем случае возможен выбор *xk*+1=  *xk* *-*f (*xk*)/*M* , где *M* ≥ max⏐ *f’*(*x*)⏐ (в случае *f’*(*x*)<0 возьмите функцию *f*(*x*) с противоположным знаком).

Можно взять *xn*+1= arcsin(exp(-*xn*)) или *xn*+1= - log(sin(*xn*)), но надо проверить условие сходимости. В последнем варианте имеем

1.0000 0.1726 1.7617 0.0183 3.99880 0.2797-3.1416i -…

(ушли в комплексную область (логарифмы отрицательных величин)

**4.** Итерации по методу Ньютона в случае системы уравнений определяются в виде

*X*(*k*+1) = *X*(*k*) −*W* -1(*X*(*k*)) *F*(*X*(*k*)) =0 , *k*=0.1,2,…,

где *Х* – вектор неизвестных, *F*(*X*) – вектор функций, *W*-1(*X*) – обратная матрица частных производных.

Для системы  *f*1(*x,y*)=0, *f*2(*x,y*)=0

*F*(*x,y*) =  ,  .

Этот метод является условно сходящимся и значимо зависит от выбора начального приближения.

Для примера рассмотрим систему

*x*3*+ y*3=8, *y=*1*+x*3/2

Здесь

*f*1(*x,y*)= *x*3*+ y*3-8, *f*2(*x,y*)=1+ *x*3/2*- y* ,

,  , , .

В итоге

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *F*(*x,y*)= | *x*3*+ y*3-8 | *W*(*x,y*)= | | 3*x*2 | 3*y*2 |
|  | 1+ *x*3/2*- y* |  | -1 |
|  | | | |  | | | |
| Рис.1 | | | | Рис.2 | | | |

Выбор начального приближения, как правило, нетривиален.

В данном случае не трудно выразить *у* через *х* в обоих уравнениях (здесь это), и обратившись к

х=0:0.1:1.5; R1= (8-x.^3).^(1/3); R2= 1+x.^(3/2);

plot (x,R1, '- k', x,R2, '- k')

видим, что за начальное приближение можно принять окрестность х=1, у=2.

Другой подход для оценки начального приближения связан с заменой решения системы минимизацией функции *z*(*x,y*)= *f*12(*x,y*)+ *f*22(*x,y*) и в среде MatLab построением ее изолиний (линий уровня) с помощью

[x,y]=meshgrid([0.9:0.01:1.25],[1.95:0.01:2.25]);

Z= (x.^3+ y.^3-8).^2 +(1+x.^(3/2)-y).^2;

[C,h] = contour(x,y,Z,16)

и последующим визуальным обзором.

Последующий процесс приближений может оказаться достаточно быстрым

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | x y |  | |  |  | | --- | --- | | *F*(*x,y*)= | *x*3*+ y*3-8 | | 1+ *x*3/2*- y* | |
| 1 | 1.2000 2.0000 |  | 1.7280 0.3145 |
| 2 | 0.9711 1.9384 |  | 0.1992 0.0186 |
| 3 | 0.9501 1.9260 |  | 0.0022 0.0002 |
| 4 | 0.9499 1.9259 |  | 0.2461 10-6 0.017310-6 |

**Контрольные вопросы**

1. В чем отличие корней уравнения и нулей функции?
2. Способы отделения корней без компьютерной графики ?
3. Средствами компьютерной графики построен график функции. Гарантирована ли информация о всех корнях уравнения ?
4. Гарантирует ли *f*(*а*)∙ *f*(*b*)>0 отсутствие корней на [*a*,*b*]?
5. На вопрос о корнях уравнения *ax*4*+bx*3*+c*x2*+dx+e=*0предложены варианты ответа: 1) 4 разных корня, 2) один действительный и три комплексных, 3) два действительных и два комплексных,5) нет корней, 5) 4 комплексных корня. Какие следует отвергнуть?
6. Почему в методе хорд не используют критерий |*b*–*a* |<ε?
7. Зачем для метода простой итерации условие⏐*ϕ‘*(*x*)⏐< 1. ?
8. Решение системы *f*1(*x,y*)=0, *f*2(*x,y*)=0 иногда заменяют задачей **минимизации до нуля** функции *А*1 *f*12(*x,y*)+ *А*2 *f*22(*x,y*), где *А*1*, А*2 *>*0. Правомерность такой замены ?

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 3*x*4*+*4*x*3–12*x*2–5=0 | *ln*(*x*)+(*x*+1)3=0 | *sin*(*x*+1) –*y*=1.2  2*x+cos*(*x*)=2 |
| 2 | 2*x*3–9*x2*–60*x*+1=0 | *x*⋅2*x*=1 | *tg*(*xy*+0.4)= *x*2  0.6 *x2* +2 *y*2=1 |
| 3 | *x*4–*x*–1 =0 | *x+cos*(*x*)=1 | *cos*(*x*–1)+*y*=0.5  *x*–*cos*(*x*)=3 |
| 4 | 2*x*4 – *x*2–10=0 | *x+lg*(1+*x*)=1.5 | *sin*(*x*)*+*2*y*=2  *cos*(*y*–1)+*x*=0.7 |
| 5 | 3*x*4*+*8*x*3*+*6*x*2–10=0 | *lg*(2+*x*)+2*x*=3 | *cos*(*x*–1)+*y*=1  *sin*(*y*)*+*2*x*=1.6 |
| 6 | *x*4 –18*x*2*+*5*x*–8=0 | 2*x+*5*x*–3=0 | *sin*(*x+*1) –*y=*1  *2x+cоs*(*y*)=2 |
| 7 | *x*4*+*4*x*3–12*x*2+1=0 | 5*x+*3*x* =0 | *sin*(*x*–*y*) –*xy*=0  *x*2– *y*2=0.75 |
| 8 | *x*4 – *x*3–2*x*2+3*x*–3=0 | 3*ex*=5*x*+2 | *sin*(*x+y*) –1.5*xy*=0  *x*2+ *y*2=1 |
| 9 | 3*x*4*+*4*x3*–12*x*2+1=0 | 5*x=*6*x*+3 | *sin*(*x*–*y*) – *xy*+1=0  *x*2–*y*2=0.75 |
| 10 | 3*x4*–*8x3*–18*x*2+2=0 | 2*ex+*5*x*–6=0 | *y=*1/(*x*3/2+1)  *x*2+ *y*2=9 |
| 11 | *2x4-8x3+8x2-1=0* | *2arctg(x)-x+3=0* | *x*2+ *y*2=9  *y*=1+ *e*–*x* |
| 12 | 2*x*4*+*8*x*3*+*8*x*2–1=0 | (*x*–3) ⋅ *cos*(*x*)=1 | *x2+ y2=5*  *y=*1-2 *e*–*xy* |
| 13 | *x*4–4*x*3–8*x*2+1=0 | *xx*= 20–9*x* | *x*2+ *y*2=5  *y= e*–*xy* |
| 14 | *2x4*–*9x3*–*60x2+1=0* | *x⋅ lg*(*x*)=1 | *sin*(*x*–0.6) –*y*=1.6  3*x*–*cos*(*y*)=0.9 |
| 15 | *x*5 *+x*2–5=0 | *tg*3*x=x*–1 | *x*2*+ y*2=6  *y= e*–*x* |
| 16 | 3*x4+*4*x3*–12*x*2–7=0 | 5*x* =1+*e*–*x* | *x*3*+ y*3=6  *y= e*–*x* |
| 17 | 3*x*4*+8x*3+6*x*2–11=0 | 5*x*  =3–*ex* | *x*4+ *y*4=5  *y= e*–*x* |
| 18 | *x*4–18*x*3–10=0 | *arctg*(*x2*+1)=*x* | *x2+ y*2=1  *sin*(*x+y*)=1.2 *x* |
| 19 | 3*x4*–8*x3*–18*x2*+2=0 | *tg*(0.55*x*+0.1)=*x*2 | *x2+ y*2=1  *sin*(*x+y*)=0.2+*x* |
| 20 | *x*4 –18*x*–10=0 | 5*x*–6*x* =7 | *x+cos*(*y*–1)=0.8  *y*–*cos*(*x*)=2 |
| 21 | *x*4 *+*18*x*–10=0 | 5*x*–6*x* =3 | *x2+ y*2=1  *x*3+ *y*3=2 |
| 22 | *x*4 *+*18*x*3–6*x*2+*x*–10 =0 | 5*x* =1*+e-*2*x* | *x2+ y2=*1  *x*–*y*3*=0.5* |
| 23 | *x*5 *+*12*x*3–6*x2+x*–10=0 | 7*x*–6*x* =2 | *x*3*+ y*3=8  *y=x*3/2 |
| 24 | 3*x*5–*8x*3–18*x*2+2=0 | 5*x* =2+*e-*2*x* | *x*3*+ y*3=8  *y=1+x3/2* |
| 25 | *x*3 –18*x*–10=0 | *x⋅* 2*x*=3 | *x*3*+ y*3=8  *y*=1–*x*3/2 |

F

**Лабораторная работа 4**

**Аппроксимация функций**

**Задание 1.**  Выберите таблицу 11 значений функции *у*(*x*), начиная с узла, равного номеру вашего варианта.

Постройте таблицу конечных разностей, проследите за динамикой изменения значений и дайте объяснение замеченным фактам.

Выполните экстраполяцию на два узла от начала и от конца таблицы.

**Задание 2.** Для начальных трех узлов выбранной таблицы постройте интерполяционный многочлен Лагранжа и с его помощью найдите значения функции в узлах, соответствующих полушагу таблицы.

Выполните аналогичные действия для всей таблицы с помощью функций MatLab – аппроксимация функции полиномом *n*-й степени Р=polifit(X,F,*n*) и вычисления значений полинома y= рolyval(Р,x).

**Задание 3.** Для выбранной таблицы возьмите какое-то значение *х* в окрестности центрального узла таблицы и найдите значение *f*(*x*) с помощью формул Ньютона интерполирования вперед или назад.

**Задание 4.** Найдите оценку значений производных первого и второго порядка с погрешностью, не превышающей O(*h*2).

**Задание 5.** Выполните среднеквадратическую аппроксимацию тригонометрическим многочленом (отрезком ряда Фурье) третьей степени. Оцените качество аппроксимации сравнением с исходным материалом, дайте графическую интерпретацию этого сравнения

**Задание 6.** Выполните аппроксимацию алгебраическими многочленами разных степеней (от 1 и выше) и оцените их качество по отношению значений остаточного и исходного среднеквадратичного отклонений или по отношению двух его последовательных значений.

Можете воспользоваться функциями MatLab – аппроксимации табличной функции полиномом заданной степени k P=polyfit (X,F,k) и вычисления значений полинома Y = polyval(P,X).

Иллюстрируйте качество на графике для k от 0 и более в пределах разумного.

**Задание 7.** Для выбранной таблицы постройте квадратичную сплайн-интерполяцию, используя только 6 узлов (шаг 0.2). Оцените качество полученного сплайна сравнением оценок для промежуточных узлов, дайте графическую интерпретацию этого сравнения.

**1.** Построение таблицы конечных разностей для функции *f*(*х*), заданной значениями *fk* при равноотстоящих узлах  *х=хk* (*k*=0÷*N*), может оказаться полезным для последующего *интерполирования* (поиска значений функции для промежуточных значениях *х*) или *экстраполяции* (аналогичного поиска за пределами таблицы), оценке значений производных в узлах и выборе степени полинома, аппроксимирующего заданную функцию.

Соответствующая процедура видна из приведенных примеров.

Пример1. Заданы *п* =6 значений функции *f*(*х*) [1 3 9 19 33 51] для *х* от 0 до 5 с шагом 1. Последовательно находим разности первого порядка Δ *fk*= *fk*+1  − *fk,* (*k*=0÷*n*−1), второго порядка Δ2*fk* =Δ *fk*+1−Δ *fk* = *fk*+2− 2 *fk+1* +*fk  ,* (*k*=0÷*n*−2) и так далее до получении нулевых значений (на практике нереально) или исчерпания таблицы. В нашем случае имеем

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xk* | *fk* | Δ *fk* | Δ2*fk* | Δ3*fk* |
| 0 | 1 | 2 | 4 | 0 |
| 1 | 3 | 6 | 4 | 0 |
| 2 | 9 | 10 | 4 | 0 |
| 3 | 19 | 14 | 4 | **0** |
| 4 | 33 | 18 | **4** |  |
| 5 | 51 | **22** |  |  |
| **6** | **73** |  |  |  |

Здесь, обнаружив обращение в нуль всех значений Δ3*fk* (постоянство Δ2*fk*), делаем вывод признак, что *f*(*х*) алгебраический многочлен степени 2. Допускаем, что это верно при *х* >5 и обратным ходом находим *f*(6): Δ3*f*(3)=0, Δ2*f*(4)= Δ2*f*(3)+0=4, Δ*f*(5)= Δ*f*(4)+18+4=22 и *f*(6)= *f*(5)+22=73. Так же можно выполнить интерполяцию назад для *х*=-1.

Пример 2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | F(x) | Δ *fk* | Δ2 *fk* | Δ3 *fk* | Δ 4*fk* | Δ 5*fk* |
| 3.0 | -0,00011 | 0.54407 | -0.03668 | -0.05249 | 0.00750 | 0.00482 |
| 3.1 | 0,543966 | 0.50739 | -0.08917 | -0.04499 | 0.01232 | 0.00368 |
| 3.2 | 1,051358 | 0.41821 | -0.13416 | -0.03266 | 0.01600 | 0.00213 |
| 3.3 | 1,469572 | 0.28404 | -0.16683 | -0.01665 | 0.01814 | 0.00032 |
| 3.4 | 1,753617 | 0.11721 | 0.18348 | 0.00148 | 0.01846 | -0.00155 |
| 3.5 | 1,870829 | -0.06627 | -0.18200 | 0.01995 | 0.01690 | -0.00331 |
| 3.6 | 1,804553 | -0.24827 | -0.16204 | 0.03686 | 0.01359 |  |
| 3.7 | 1,556275 | -0.41032 | -0.12518 | 0.05045 |  |  |
| 3.8 | 1,145949 | -0.53551 | -0.07473 |  |  |  |
| 3.9 | 0,610438 | -0.61024 |  |  |  |  |
| 4.0 | 0,000196 |  |  |  |  |  |

Нет надежды получить нулевые значения какой-то конечной разности, стабилизация наблюдается в разностях 4 го порядка и можно сделать вывод, что табличная функция близка в полиному этого порядка.

Допущенная ошибка в исходных значениях будет нарастать

**2**. Интерполяционный многочлен Лагранжа в случае *n*+1 *несовпадающих* узлов имеет вид

,

где узлы таблично заданной функции необязательно равноотстоящие.

Для функции, заданной значениями *f*(0) =1, *f*(1)=3,  *f*(2)=9, получаем многочлен второй степени

2*х*2+1

Вычислить *L*2(*x*) при х=0.5 и 1.5 не составит труда.

При использовании функций MatLab в случае *n*+1 узлов задаем *n*+1-мерные массивы X, F, Z и выполняем операторы

» P=polyfit(X,F,*n*) % строка коэффициентов полинома

» FF=polyval(P, Z) % значения полинома для массива Z.

**3.** При узлах таблицы, равноотстоящих с шагом *h*,*формула Ньютона интерполирования вперед*



используется в диапазоне узлов, удаленных от конца таблицы, и узел *xk* подбирают для конкретного *x* так, чтобы 0< *t =* (*x−xk*) / *h* <1 .

*Формула Ньютона интерполирования назад*



используется в диапазоне узлов, удаленных от начала таблицы.

Узел *xk* подбирают так, чтобы величина 0< *t =* (*xk* *- x*) */ h* <1 .

**4**. Для численного дифференцирования табличной функции в узлах таблицы можно рекомендовать





*O*(*h*) понимаем как величину порядка малости *h* .

Для начального и конечного узлов



Убедиться в правомерности этих оценок можно подстановкой в разложение функции в ряд Тейлора в окрестности *xk*

*f*(*xk+h*) = *f*(*xk*) *+h* ⋅+*h*  2⋅+*h* 3⋅+…+*h m*⋅+ ….

**5**. Любую функцию можно представить суммой гармоник с разными амплитудами и периодами. Тем более в случае колебательных процессов (динамика спроса, цен и др.) поиск основных гармоник представляет интерес.

Заменой  переходим к диапазону от 0 до 2π.  Отрезок аппроксимирующего ряда Фурье *m-*ой степени (2*m+*1*<n*)

*Pm*(*z*)*=,*



Задайтесь небольшим значением *т*, найдите коэффициенты разложения, постройте графики для полученных аппроксимаций на фоне табличной функции и оцените эффект аппроксимации.

**6.** Имеется таблица значений некоторой функции *F*(*x*) при значительном количестве *N* значений *х*, полученная в результате наблюдений над каким-то явлением в статистике, социологии, экономике, технике и т.п.

Возникает желание найти достаточно *простую* функцию (нет функций проще полинома), которая могла бы выявить основные закономерности и даже строить прогнозы.

Построение аппроксимирующего многочлена *m -*го порядка

*Pm*(*x*)*= a*0*+a*1*x+a*2*x*2*+ . . . + amxm*

по критерию минимума суммы квадратов отклонений его значений от табличной функции сводится к решению системы

; .

Обратите внимание на симметричность матрицы коэффициентов и ее положительную определенность (возможность применения метода квадратных корней и функции **chol**).

Качество аппроксимации определяется величиной стандартного отклонения



в абсолютных значениях или по отношению к *s*0. Если в *реальной задаче* она уменьшилась в 2-3 раза, то это превосходно; если очередное приближение стало отличаться от предыдущего менее чем на 10%, то нет резона продолжать улучшение.

**7**. Происхождение задачи – на профиле крыла самолета намечены узловые точки, требовалась из технических соображений провести через них (*интерполяция*) гладкую (без углов) линию, что выражено требованием равенства производных слева и справа.

Пусть интервал аппроксимации разбит на *n* подынтервалов с граничными узлами  *x*0*, x*1 , *..., xN*-1 , *xn*  *.*

*Квадратичный сплайн* для *f*(*x*) – это кусочно-непрерывная функция

*P*(*x*) *=*{*P*1(*x*), *P*2(*x*), ..., *Pn*(*x*)},

где *Pk*(*x*)*=Ak⋅*(*x−xk*−1)2*+Bk*(*x−xk*−1)*+Ck, k*=1÷*n*.

Соблюдаются условия интерполяции и непрерывности *P*1(*x*0)=*f*0, *P*(*xk*)=*Pk*+1(*xk*) =*fk*, *k*=1÷*N−*1, *PN*(*xn*)=*fn* .

В промежуточных узлах к тому же обеспечены условия непрерывности первой производной  *Pk*′(*xk*) = *Pk*+1′ (*xk*) , *k* =1÷*n*-1.

При поиске коэффициентов полиномов возникает система 3*N−*1 уравнений с 3*N* неизвестными и приходится задавать *B*1= *P′*1(*x*0)равной аппроксимации производной, например

*−*







****

В пакете Matlab  есть встроенная функция

**yi = interpl (x, y, xi, method),**

где x и y  - массивы координат заданных точек, – массив ординат экспериментальных точек, xi – точки, в которых необходимо вычислить значение с помощью сплайна, method – определяет метод построения сплайна; в частности ‘linear’ – линейная интерполяция и ‘spline’ – кубический сплайн.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое аппроксимация и каковы ее критерии?
2. Связь между конечными разностями и производными ?
3. 4.Максимальная степень аппроксимирующего многочлена ?
4. Необходимое число узлов для аппроксимации многочленом10-ой степени?
5. Что такое сплайн и зачем он нужен ?
6. Требования к линейному сплайну. Как выглядит его графическое изображение?
7. Почему не столь популярен кубический сплайн и тем более сплайны более высоких порядков?
8. Как можно выполнять интерполяцию в случае табличной функции двух переменных?

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | | *f*(*x*) | *x* | | *f*(*x*) | *x* | | *f*(*x*) | *x* | *f*(*x*) |
| 1,0 | | 0 | 4,7 | | -17,8711 | 8,4 | | -2,8763 | 12,1 | -1,12952 |
| 1,1 | | 0,324097 | 4,8 | | -13,5425 | 8,5 | | -3,04297 | 12,2 | -2,15806 |
| 1,2 | | 0,643881 | 4,9 | | -7,41942 | 8,6 | | -2,91168 | 12,3 | -2,98314 |
| 1,3 | | 0,922415 | 5,0 | | 0 | 8,7 | | -2,49175 | 12,4 | -3,52184 |
| 1,4 | | 1,1253 | 5,1 | | 8,037451 | 8,8 | | -1,82115 | 12,5 | -3,71872 |
| 1,5 | | 1,224745 | 5,2 | | 15,89357 | 8,9 | | -0,96308 | 12,6 | -3,55153 |
| 1,6 | | 1,20301 | 5,3 | | 22,72513 | 9,0 | | -10-13 | 12,7 | -3,03371 |
| 1,7 | | 1,054847 | 5,4 | | 27,73269 | 9,1 | | 0,97427 | 12,8 | -2,21331 |
| 1,8 | | 0,788625 | 5,5 | | 30,25 | 9,2 | | 1,863736 | 12,9 | -1,16858 |
| 1,9 | | 0,425989 | 5,6 | | 29,82532 | 9,3 | | 2,579679 | 13,0 | -0,00055 |
| 2,0 | | 4,62⋅10-5 | 5,7 | | 26,2854 | 9,4 | | 3,049516 | 13,1 | 0,447264 |
| 2,1 | | -0,44776 | 5,8 | | 19,77381 | 9,5 | | 3,224158 | 13,2 | 0,871348 |
| 2,2 | | -0,87178 | 5,9 | | 10,75785 | 9,6 | | 3,083118 | 13,3 | 1,226577 |
| 2,3 | | -1,2269 | 6,0 | | 0,001176 | 9,7 | | 2,636854 | 13,4 | 1,473176 |
| 2,4 | | -1,47335 | 6,1 | | -11,4973 | 9,8 | | 1,926069 | 13,5 | 1,581139 |
| 2,5 | | -1,58114 | 6,2 | | -22,5932 | 9,9 | | 1,01801 | 13,6 | 1,533737 |
| 2,6 | | -1,53356 | 6,3 | | -32,1089 | 10,0 | | 0,000108 | 13,7 | 1,329751 |
| 2,7 | | -1,3294 | 6,4 | | -38,9547 | 10,1 | | -1,02845 | 13,8 | 0,984119 |
| 2,8 | | -0,98363 | 6,5 | | -42,25 | 10,2 | | -1,96638 | 13,9 | 0,526919 |
| 2,9 | | -0,52634 | 6,6 | | -41,4287 | 10,3 | | -2,72032 | 14,0 | 0,000735 |
| 3,0 | | -0,00011 | 6,7 | | -36,3182 | 10,4 | | -3,21408 | 14,1 | -0,54336 |
| 3,1 | | 0,543966 | 6,8 | | -27,1814 | 10,5 | | -3,3964 | 14,2 | -1,05084 |
| 3,2 | | 1,051358 | 6,9 | | -14,7151 | 10,6 | | -3,24618 | 14,3 | -1,46919 |
| 3,3 | | 1,469572 | 7,0 | | 0,00018 | 10,7 | | -2,77495 | 14,4 | -1,75341 |
| 3,4 | | 1,753617 | 7,1 | | 0,856485 | 10,8 | | -2,02598 | 14,5 | -1,87083 |
| 3,5 | | 1,870829 | 7,2 | | 1,640842 | 10,9 | | -1,07035 | 14,6 | -1,80476 |
| 3,6 | | 1,804553 | 7,3 | | 2,27459 | 11,0 | | -0,00023 | 14,7 | -1,55668 |
| 3,7 | | 1,556275 | 7,4 | | 2,692863 | 11,1 | | 1,080087 | 14,8 | -1,14651 |
| 3,8 | | 1,145949 | 7,5 | | 2,851227 | 11,2 | | 2,064282 | 14,9 | -0,61111 |
| 3,9 | | 0,610438 | 7,6 | | 2,730379 | 11,3 | | 2,854531 | 15,0 | -0,00091 |
| 4,0 | | 0,000196 | 7,7 | | 2,338403 | 11,4 | | 3,37121 | 15,1 | 0,624825 |
| 4,1 | | -5,19505 | 7,8 | | 1,710348 | 11,5 | | 3,560925 | 15,2 | 1,203832 |
| 4,2 | | -10,3689 | 7,9 | | 0,905108 | 11,6 | | 3,402017 | 15,3 | 1,677044 |
| 4,3 | | -14,959 | 8,0 | | -9,6⋅10-5 | 11,7 | | 2,90698 | 15,4 | 1,994648 |
| 4,4 | | -18,4126 | 8,1 | | -0,91714 | 11,8 | | 2,121544 | 15,5 | 2,12132 |
| 4,5 | | -20,25 | 8,2 | | -1,75557 | 11,9 | | 1,120452 | 15,6 | 2,040105 |
| 4,6 | | -20,1243 | 8,3 | | -2,43156 | 12,0 | | 0,000357 | 15,7 | 1,754519 |
| *x* | | *y(x)* | *x* | | *y(x)* | *x* | | *y(x)* | *x* | *y(x)* |
| 15,8 | 1,288629 | | 19,0 | -0,00059 | | 22,2 | -1,49251 | 25,4 | 1,021332 |
| 15,9 | 0,685062 | | 19,1 | 0,328168 | | 22,3 | -2,08686 | 25,5 | 1,077122 |
| 16,0 | 0,001095 | | 19,2 | 0,661197 | | 22,4 | -2,49087 | 25,6 | 1,027476 |
| 16,1 | -0,6968 | | 19,3 | 0,95903 | | 22,5 | -2,6582 | 25,7 | 0,876673 |
| 16,2 | -1,33944 | | 19,4 | 1,183327 | | 22,6 | -2,56506 | 25,8 | 0,638952 |
| 16,3 | -1,86182 | | 19,5 | 1,301545 | | 22,7 | -2,21332 | 25,9 | 0,337172 |
| 16,4 | -2,20969 | | 19,6 | 1,29113 | | 22,8 | -1,63099 | 26,0 | -0,00055 |
| 16,5 | -2,34521 | | 19,7 | 1,142726 | | 22,9 | -0,87009 | 26,1 | 0,328549 |
| 16,6 | -2,25098 | | 19,8 | 0,86201 | | 23,0 | -0,00046 | 26,2 | 0,627288 |
| 16,7 | -1,93222 | | 19,9 | 0,46989 | | 23,1 | 0,309544 | 26,3 | 0,866148 |
| 16,8 | -1,41658 | | 20,0 | 0,000974 | | 23,2 | 0,591083 | 26,4 | 1,021332 |
| 16,9 | -0,7518 | | 20,1 | -0,49956 | | 23,3 | 0,816324 | 26,5 | 1,077122 |
| 17,0 | -0,00128 | | 20,2 | -0,98043 | | 23,4 | 0,962789 | 26,6 | 1,027476 |
| 17,1 | 0,761981 | | 20,3 | -1,38957 | | 23,5 | 1,015605 | 26,7 | 0,876673 |
| 17,2 | 1,462508 | | 20,4 | -1,67979 | | 23,6 | 0, 969005 | 26,8 | 0,638952 |
| 17,3 | 2,029831 | | 20,5 | -1,8141 | | 23,7 | 0,826959 | 26,9 | 0,337172 |
| 17,4 | 2,405585 | | 20,6 | -1,77023 | | 23,8 | 0,602835 | 27,0 | 0,000606 |
| 17,5 | 2,549509 | | 20,7 | -1,54364 | | 23,9 | 0,318152 | 27,1 | -0,33789 |
| 17,6 | 2,443738 | | 20,8 | -1,14883 | | 24,0 | 0,000505 | 27,2 | -0,64508 |
| 17,7 | 2,094918 | | 20,9 | -0,6186 | | 24,1 | -0,3191 | 27,3 | -0,89064 |
| 17,8 | 1,533913 | | 21,0 | -0,00133 | | 24,2 | -0,60929 | 27,4 | -1,05011 |
| 17,9 | 0,8131 | | 21,1 | 0,643412 | | 24,3 | -0,84138 | 27,5 | -1,10737 |
| 18,0 | 0 | | 21,2 | 1,250753 | | 24,4 | -0,99223 | 27,6 | -1,05623 |
| 18,1 | -0,06906 | | 21,3 | 1,757043 | | 24,5 | -1,04654 | 27,7 | -0,90112 |
| 18,2 | -0,20633 | | 21,4 | 2,106558 | | 24,6 | -0,99841 | 27,8 | -0,65672 |
| 18,3 | -0,36975 | | 21,5 | 2,257585 | | 24,7 | -0,85196 | 27,9 | -0,34653 |
| 18,4 | -0,52416 | | 21,6 | 2,187247 | | 24,8 | -0,62099 | 28,0 | -0,00066 |
| 18,5 | -0,63728 | | 21,7 | 1,894532 | | 24,9 | -0,32771 | 28,1 | 0,347125 |
| 18,6 | -0,68247 | | 21,8 | 1,401147 | | 25,0 | -0,00055 | 28,2 | 0,662688 |
| 18,7 | -0,64188 | | 21,9 | 0,750042 | | 25,1 | 0,328549 | 28,3 | 0,914876 |
| 18,8 | -0,50883 | | 22,0 | 0,001688 | | 25,2 | 0,627288 | 28,4 | 1,078594 |
| 18,9 | -0,28908 | | 22,1 | -0,77156 | | 25,3 | 0,866148 | 28,5 | 1,137301 |

**Лабораторная работа 5**

**Решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

Дифференциальные уравнения уже два столетия являются рабочим инструментом физиков-инженеров, связанных с электромагнитными и другими колебаниями, астрономией, гидротехникой, ракето- и авиастроением и всеми явлениями, где что–то движется. Сегодня они проникли в биологию, социологические и макроэкономические исследования.

Здесь читателю предлагается получить хотя бы минимальные представления о численном решении *обыкновенных* дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих некоторую систему, начавшую движение из некоторого состояния и учитывающую в этом движении свое текущее состояние.

**Задание 1.** Рассмотрите задачу, состоящую в поиске решения *y*=*y*(*t*) задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка  для *t* от *t*0 до *tk*  с шагом Δ*t* при начальном условии *y*(*t*0)=*y*0.

Попытайтесь найти аналитическое решение задачи, чтобы было с чем сравнить результаты последующих расчетов.

**Задание 2.** Выполните решение задачи методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера–Коши при Δ*t*, равном десятой доле интервала интегрирования. Сопоставьте с аналитической оценкой, если таковая найдена. Дайте графическую иллюстрацию роста погрешности.

**Задание 3**. Выполните решение задачи средствами MatLab с использованием какой-нибудь функции группы solver.

1. Для примера рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка , где *f*(*t,y*) = *y∙sin(t)* для *t* от *t*0=0 до *tk* =4 с шагом Δ*t=*0.4при начальном условии *y*(*t*0)=1.

При наличии небольшого опыта интегрирования можно попытаться найти аналитическое решение задачи.

Преобразуем исходное уравнение к виду d*y*/*y*=*sin*(*t*) d*t* (имеем дело с простейшим т.н. уравнением с разделяющими переменными). Интегрируя обе части равенства, получаем семейство решений *ln*(*y*)= –*cos*(*t*) +const, откуда *y*=*exp*(const–cos(*t*)).

Подставляя сюда начальные условия (выделяя из семейства конкретную функцию), получаем const = 1 и в итоге получаем точное решение у(*t*)=*exp*(1–*cos*(*t*)).

Появилась возможность сопоставления эффективности разных методов численного решения.

За исключением простейших случаев получить точное решение не удается.

**2.**  Процесс решения задачи методом Эйлера

и модифицированным методом Эйлера–Коши



иллюстрирован соответственно рис.1 и 2.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Рис.1 | Рис.2 |

Выполненное для нашего примера решение при значениях *t* от 0 до 4 (с довольно грубом шагом 0.4) дает

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Точное решение | | | | | | | | | | |
| 1.0 | 1.082 | 1.354 | 1.892 | 2.799 | 4.121 | 5.683 | 6.974 | 7.377 | 6.664 | 5.226 |
| Решение методом Эйлера | | | | | | | | | | |
| 1.0 | 1.000 | 1.156 | 1.487 | 2.042 | 2.858 | 3.898 | 4.951 | 5.615 | 5.484 | 4.513 |
| Решение модифицированным методом Эйлера | | | | | | | | | | |
| 1.0 | 1.080 | 1.342 | 1.859 | 2.728 | 4.003 | 5.534 | 6.829 | 7.240 | 6.508 | 5.057 |

и графическую иллюстрацию (рис. 3).



Рис.3

Полученные оценки подтверждают существенное преимущество модифицированного метода Эйлера.

|  |
| --- |
|  |

**3.** Обратимся к MatLab, где предусмотрена достаточно большая группа функций **solver** – решателя систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ordinary differential equation – ODE).

Эти функции различаются методом решения, порядком сходимости и спецификой уравнений [1].

Значимое место здесь занимают реализации метода Рунге–Кутта разного порядка, которые учет различного числа слагаемых в разложении функции в ряд Тейлора.

Так упомянутые выше обычный и модифицированный методы Эйлера учитывают только первую и вторую производные, допуская ошибку порядка малости О(*h*) и О(*h*2), где *h* – шаг по аргументу. Популярны в прикладных задачах аналогичные методы Рунге–Кутта с погрешностью порядка *O*(*h*4) и другие. Естественно, что высокая точность требует и большего объема вычислений.

Все функции могут решать системы уравнений



Обращение к solver содержит имя конкретной функции с параметрами (F, interval, Т0, [options]), гдеF– имя вектора–функции для вычисления правой части системы уравнений, interval – массив из двух чисел, определяющий интервал по *t*, Т0 – вектор начальных условий, options – параметры управления ходом решения.

На выходе возвращаются вектор-столбец Т – координаты узлов сетки, в которых ищется решение (формируется без учета пожеланий о равномерном шаге) и матрица  Y, каждый столбец которой содержит искомые решения в соответствующих узлах массива Т.

Из множества функций решения ОДУ упомянем наиболее популярные функции ode45 (метод Рунге–Кутта 4–5 порядка точности) и ode23 (метод Рунге-Кутта 2–3 порядка).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | Обратившись к рассмотренной задаче и выбрав функцию ode45:  Fun=@(t,y) y\*sin(t);  [t,y]=ode45(Fun,[0,4],1);  plot(t,y, 'LineWidth',2)  получаем | | | | |
| Рис. 4 | | | | |
| 0 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90  1.00 | 1.0000 1.0050 1.0201 1.0457 1.0821 1.1302 1.1908 1.2651 1.3543 1.4599 1.5836 | 1.10 1.20 1.30 1.40 1.50 1.60 1.70 1.8 0 1.90 2.00 | 1.7270  1.8920 2.0803 2.2934 2.5327 2.7988 3.0921 3.4117 3.7558 4.1212 | 2.10 2.20 2.30 2.40 2.50 2.60 2.70 2.8 0 2.90 5.00 | | 4.5035 4.8964 5.2924 5.6825 6.0566 6.4038 6.7132 6.9743 7.1776 7.3155 | 3.10 3.20 3.30 3.40 3.50 3.60 3.70 3.80 3.90 4.00 | 7.3827 7.3765 7.2971 7.1478 6.9342 6.6643 6.3477 5.9953 5.6178 5.2260 |

**Варианты заданий**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | *f*(*t,y*) | *t*0 | *tk* | *y*0 |  | *№* | *f*(*t,y*) | *t*0 | *tk* | *y*0 |
| 1 |  | 0 | 1 | 3 |  | 14 |  | 1 | 2 | 0 |
| 2 |  | 1 | 2 | 0 |  | 15 |  | 0 | 0.5 | 1 |
| 3 |  | 0 | 2 | 1 |  | 16 |  | 0 | 2 | 1 |
| 4 |  | 1 | 2 | 0 |  | 17 |  | 0 | 1 | 1 |
| 5 |  | 2 | 3 | 1 |  | 18 |  | 0 | 1 | 1 |
| 6 |  | 2 | 3 | 1 |  | 19 |  | 0 | 1 | 1 |
| 7 | *tg*(*t*) / *y*2 | 0 | π/4 | 1 |  | 20 | *tg*(*t*) / *y* | 0 | π/4 | 1 |
| 8 |  | 0 | 1 | 1 |  | 21 | *y*2*t*2 | 0 | 1 | 1 |
| 9 |  | 0 | 1 | 1/e |  | 22 | *y2/t2* | 1 | 3 | 1 |
| 10 |  | 0 | 1 | 1/e |  | 23 | *y ln*(*t*) / *t* | 1 | 3 | 1 |
| 11 |  | 0 | 1 | 0 |  | 24 | *y*2 *ln*(*t*) / *t* | 1 | 3 | 1 |
| 12 |  | 0 | 0.9 | 0 |  | 25 |  | 0 | 1 | 2 |

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Тынкевич М.А., Пимонов А. Г.  Введение в численный анализ.  – Кемерово: КузГТУ. 2017. – 138 c. *www.math.tsu.ru* › files › mmf2 › e-resources › Dit\_An

2. Тынкевич М.А. Система MATLAB. Справочное пособие к курсу “Численные методы анализа”– Кемерово: КузГТУ. 2011. <https://studfile.net/preview/416828/>

3. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005.

4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – Изд. Лань, 2008.

5. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы (Использование MATLAB). – М.–СПб–Киев: Вильямс. 2001.

6. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. – СПб.: «БХВ\_Петербург». 2005.

7. Ревинская О.Г. Символьные вычисления в MatLab: учебное пособие. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. – 528 с. <https://codetown.ru/matlab/simvolnye-vychisleniya/>

8. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.: ил.

8. [Потемкин В.Г. Введение в Matlab. Образовательный математический сайт Exponenta.ru. https://old.exponenta.ru › potemkin › book › matlab › chapter7](http://old.exponenta.ru/soft/matlab/potemkin/book/matlab/chapter7/7_3.asp)

9. Справочник по Matlab. <http://www.radiomaster.ru/cad/> matlab/

glava6/index39.php

Тынкевич Моисей Аронович

Пимонов Александр Григорьевич

**Введение в численный анализ**

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 01.01.2021. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе.

Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 7,0. Заказ № 45.

Кузбасский государственный технический университет,   
650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.

Типография Кузбасского государственного технического университета имени Т. Ф. Горбачева,   
650000, Кемерово, ул. Д. Бедного,