Definizioni Analisi II

Insiemi

1. Sfera aperta

$$B_\delta(x_0) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

*L' insieme dei punti la cui distanza da x_0 è **minore** di δ*

2. Sfera chiusa

$$\overline{B_\delta(x_0)} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta\} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

*L' insieme dei punti la cui distanza da x_0 è **minore o uguale** a δ*

3. Punto interno

Il punto x_0 si dice **interno** a Ω se:

$$\exists \delta : \; B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$$

se esiste una sfera centrata in x_0 completamente contenuta in Ω

4. Punto esterno

Il punto x_0 si dice **esterno** a Ω se:

$$\exists \delta : \; B_\delta \cap \Omega = \emptyset$$

esiste una sfera di raggio δ centrata in x_0 la cui intersezione con Ω è vuota

5. Punto di frontiera

Il punto $x_0 \in \Omega$ si dice **di frotiera** se:

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in \Omega, \; y \notin \Omega : \; x, y \in B_\delta(x_0)$$

se in un qualsiasi intorno di x_0 esistono sia punti appartenenti e non appartenenti a Ω

6. Punto isolato

Il punto $x_0 \in \Omega$ si dice **isolato** se:

$$\exists \delta : B_\delta(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$$

esiste una sfera di raggio δ centrata in x_0 la cui intersezione con Ω è x_0, ovvero x_0 è l'unico punto dell'insieme Ω in quella sfera

7. Punto di accumulazione

Il punto x_0 si dice di accumulazione rispetto Ω se:

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \Omega : x \in B_\delta(x_0), \;\; x \neq x_0$$

*per ogni possibile sfera centrata in x_0 esiste un punto x **diverso da** x_0 appartenente ad Ω e alla sfera*

8. Insieme aperto

L'insieme Ω si dice **aperto** se ogni suo punto è **interno**

9. Insieme chiuso

L'insieme Ω si dice **chiuso** se ogni suo punto **di frontiera** appartiene all'insieme

10. Insieme Limitato

L' insieme Ω si dice **limitato** se esiste una sfera centrata nell'origine (o in un punto qualsiasi) che contiene tutto l'insieme.

$$\exists B_\delta(0) \supseteq \Omega, \quad \delta \in \mathbb{R}$$

11. Insieme connesso

L'insieme Ω si dice **connesso** se:

$$\forall x_1, \; x_2 \in \Omega \; \exists \gamma : [0,1] \to \Omega \;\; \text{continua in } [0,1] \text{ tale che:}$$
$$\gamma(0) = x_1, \; \gamma(1) = x_2$$

per ogni coppia di punti x_1, x_2 appartenenti ad Ω esiste una curva continua $\gamma : [0,1] \to \Omega$ tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

12. Insieme convesso

L'insieme Ω si dice **convesso** se:

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \text{ l'insieme } \{x : x = (1-t)x_1 + tx_2, t \in [0,1]\} \subseteq \Omega$$

per ogni coppia di punti x_1, x_2 esiste un segmento contenuto in Ω che li connette

13. Cono

Dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ esso viene detto **cono rispetto all'origine** se:

$$\forall x \in \Omega \Rightarrow tx \in \Omega \;\; \forall t > 0, \;\; t \in \mathbb{R}$$

Successioni

14. Successione convergente

Una successione $a_n \in \mathbb{R}^n$ viene detta **convergente ad** x se:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta : |a_n - x| < \epsilon \;\;\; \forall n > \delta$$

15. Successione divergente

Una successione $a_n \in \mathbb{R}^n$ viene detta **divergente** se:

$$\forall M > 0 \;\; \exists N : |a_n| > M \;\;\; \forall n > N$$

Funzioni

16. Continuità

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ viene detta **continua in** x_0 se:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{con } x, x_0 \in \Omega$$

17. Punto di massimo assoluto

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ il punto $x_0 \in \Omega$ viene detto di **massimo assoluto** se:

$$f(x_0) \geq f(x) \;\;\; \forall x \in \Omega$$

18. Punto di massimo locale

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ il punto $x_0 \in \Omega$ viene detto di **massimo locale** se:

$$\exists \delta > 0 : \;\; f(x_0) \geq f(x) \;\;\; \forall x \in B_\delta(x_0) \subset \Omega$$

19. Punto di sella

Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ il punto $x_0 \in \Omega$ viene detto di **sella** se la matrice Hessiana di f nel punto x_0 risulta indefinita, **ovvero ha un autovalore strettamente positivo e un autovalore strettamente negativo**.

20. Curva di livello

Data una funzione f si definisce **curva di livello**:

$$\{x \in Dom(f) : f(x) = k,\ k \in Im(f)\}$$

21. Funzione α-omogenea

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω **cono** in $\mathbb{R}^n$. Allora f si dirà **omogenea di grado** α se:

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad x \in \Omega,\ \ t, \alpha \in \mathbb{R}$$

22. Funzione di classe $C^1(\Omega)$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Si dirà che $f \in C^1(\Omega)$ se tutte le sue derivate parziali f_{x_i} esistono e sono continue in Ω

Calcolo differenziale

23. Derivata parziale

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \Omega$. Le derivate direzionali di f in x_0 nelle direzioni dei versori della base canonica $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vengono dette **derivate parziali** e si denotano con i simboli speciali:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \equiv f_{x_i}(x_0) \equiv \partial_{x_i}\ f(x_0)$$

24. Gradiente

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora il suo gradiente $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ nel punto x viene definito come:

$$\nabla f(x) \equiv \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

25. Derivata direzionale

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \Omega$. Si dice che f è derivabile in x_0 nella direzione di $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

Esso verrà chiamato **derivata direzionale di f nella direzione di v in x_0** e denotato con uno qualunque di questi simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \equiv \frac{\partial f(x_0)}{\partial v} \equiv f_v(x_0) \equiv \partial_v\, f(x_0)$$

26. Punti critici (o stazionari)

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora il punto $x_0 \in \Omega$ viene detto **punto critico (o stazionario)** se:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

27. Differenziabilità

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $w \in \mathbb{R}^n$, allora f si dirà differenziabile in x_0 se $\exists A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **lineare** tale che:

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

La funzione A verrà quindi detta **differenziale** di f in x_0 e viene denotata con i simboli:

$$df(x_0, w) \equiv A(w)$$

La funzione f verrà detta **differenziabile in Ω** se è differenziabile in ogni punto di Ω

28. Matrice Jacobiana

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **la sua matrice Jacobiana** $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nel punto x viene definita come:

$$f'(x) \equiv \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

o più brevemente:

$$(f'(x))_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$$

Dove $f_i(x)$ indica la componente i-esima del vettore $f(x)$

29. Matrice Hessiana

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tutte le sue derivate parziali prime e seconde esistono, **la sua matrice Hessiana** $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nel punto x viene definita come:

$$Hf(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

o più brevemente:

$$(Hf(x))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Campi vettoriali e forme differenziali

30. Campo vettoriale (o campo)

Dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si può definire **campo** in Ω di classe C^k una funzione $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ la cui componente i-esima è a sua volta una funzione, definita però come $A_i : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e derivabile fino all'ordine k, $\forall i = 1 \ldots n$:

$$A : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ tale che } A(x) = (\, A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots,\ A_n(x)\,)$$

31. Forma differenziale lineare (o forma differenziale, o forma)

Si definisce **forma** una funzione $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $\bar{x} \in \Omega$ la funzione $w \to \alpha(\bar{x}, w)$ sia lineare rispetto w.

32. Campo associato ad una forma

Data una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si definisce **campo associato alla forma** α:

$$A : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ tale che } A(x)w = \alpha(x, w)$$

33. Integrale di un campo esteso ad una curva (integrale di linea)

Sia $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe $C^0(\Omega)$. Per ogni curva parametrica $\gamma : [a, b] \to \Omega$ si definisce l'**integrale di A eseteso a** γ ponendo:

$$\int_\gamma A \equiv \int_a^b \underbrace{A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{prodotto scalare}} \, dt$$

34. Integrabilità di un campo e primitiva

Dato un campo di vettori $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ esso si dirà **integrabile** (o anche campo potenziale) se esiste una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\nabla f(x) = A(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Ogni funzione f verificante la proprietà precedente si dirà **primitiva** (o potenziale) del campo A

35. Integrabilità di una forma e primitiva

Data una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ essa si dirà **integrabile** (o esatta) se esiste una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che:

$$df \equiv \alpha \quad \text{su } \Omega \times \mathbb{R}^n$$

Ogni funzione f verificante la proprietà precedente si dirà **primitiva** (o potenziale) della forma α

36. Curva chiusa

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ viene detta **curva chiusa** se:

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

37. Campo irrotazionale

Un campo $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice **irrotazionale** se:

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$$

38. Forma differenziale chiusa

Una forma differenziale si definisce **chiusa** se il suo campo associato $A(x) : \alpha(x,w) = A(x)w$ è **irrotazionale**

39. Congiunzione di curve e curva opposta

Date due curve $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $\sigma : [b,c] \to \Omega$ si definisce:

- **Congiunzione di γ e σ**

$$(\gamma \oplus \sigma) : [a,c] \to \Omega$$
$$(\gamma \oplus \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \forall t \in [a,b] \\ \sigma(t) & \forall t \in [b,c] \end{cases}$$

- **Curva opposta di γ**

$$\gamma : [b,a] \to \Omega$$
$$\ominus\, \gamma(t) = \gamma(b-t+a)$$

40. Curve omotope (o deformabili)

Date due curve $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\sigma : [0,1] \to \Omega$ esse si dicono **omotope** (o deformabili) se esiste una funzione $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ **continua** tale che:

$$h(0,t) = \gamma(t), \quad h(1,t) = \sigma(t)$$

41. Insieme semplicemente connesso

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva **chiusa** $\gamma : [0,1] \to \Omega$ è **omotopa** in Ω ad una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0, \ \ \forall t \in [0,1]$

42. Insieme a stella

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ viene detto **a stella** se esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che il segmento $\overline{x_0 x} \subseteq \Omega$ per ogni $x \in \Omega$

Curve e lunghezza

43. Partizione di un intervallo

Dato un intervallo arbitrario $[a,b]$ si definisce **partizione di** $[a,b]$ ogni sequenza finita di punti $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tali che:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$$

44. Lunghezza di una poligonale inscritta ad una curva

Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ed una partizione $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, si definisce la **lunghezza della poligonale inscritta** $\wedge(\Pi)$ come il numero:

$$\wedge(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

45. Curva rettificabile

Una curva parametrica $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ viene detta **rettificabile** se esiste **finito** il numero:

$$\wedge(\gamma) \equiv \sup_{\Pi} \wedge(\Pi)$$

al variare di tutte le possibili partizioni dell'intervallo dei parametri. Il numero $\wedge(\gamma)$ verrà detto **lunghezza** della curva. Vale inoltre che:

$$\wedge(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

46. Retta tangente al sostegno di una curva

Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e un punto $t_0 \in [a, b]$ si definisce **retta tangente al sostegno (ovvero all'immagine) di γ nel suo punto $\gamma(t_0)$** la retta parametrica:

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$$

47. Piano tangente e vettore normale

Il **piano tangente** al grafico di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è quello di equazione implicita:

$$z - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0) = 0$$

inoltre la sua **direzione normale** è quella del vettore:

$$\nu = (-\nabla f(x_0), 1) \equiv (-f_{x_1}(x_0), \ -f_{x_2}(x_0), \ \dots, \ -f_{x_n}(x_0), \ 1)$$

48. Spazio tangente

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $x_0 \in \Omega$ si definisce **spazio tangente** ad f in x_0 lo spazio T generato dalle colonne T_i di $f'(x_0)$ (la sua matrice Jacobiana in x_0). L'equazione parametrica dello **spazio affine tangente** sarà invece:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$$

49. Curva regolare

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dice **regolare** se:

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

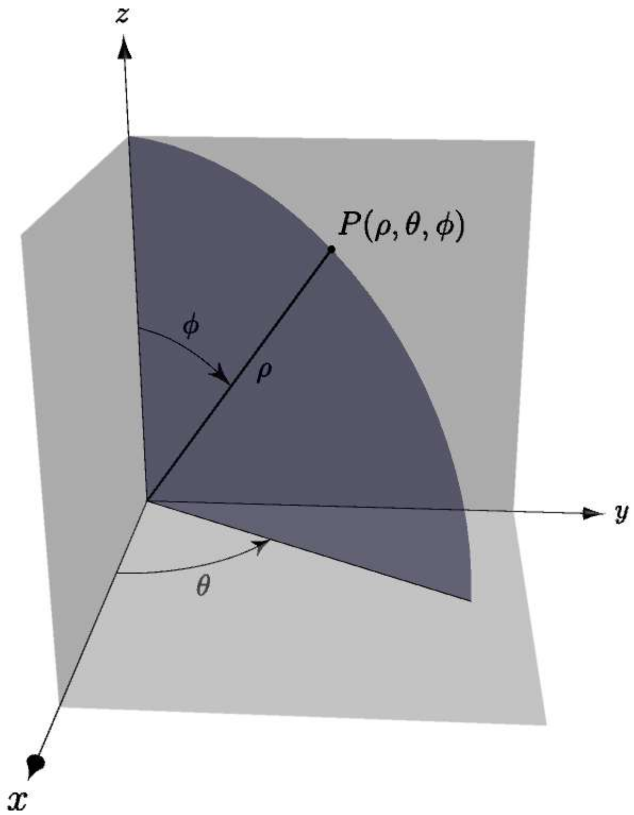
50. Coordinate polari sferiche

Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ la sua rappresentazione in **coordinate polari sferiche** è:

$$P(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\phi) \end{pmatrix} = x_0$$

dove:

- ρ indica la distanza di x_0 dall'origine
- $\theta \in [0, \pi]$ indica l'angolo tra l'asse z e il vettore x_0
- $\phi \in [0, 2\pi]$ indica l'angolo tra l'asse x e la proiezione del vettore x_0 sul piano orizzontale



Teoria della misura

51. Intervalli in $\mathbb{R}^n$ e la loro norma

Un **intervallo in** $\mathbb{R}^n$ è definito come il prodotto cartesiano di n intervalli in $\mathbb{R}$:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i]\}$$

La **norma di un intervallo** è definita come:

$$|I| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

52. Plurintervalli e la loro norma

Un **plurintervallo** P è un insieme tale che esistano un numero infinito di intervalli I_i, $i = 1 \dots n$, **privi di punti interni comuni**, verificanti:

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

La **norma di un plurintervallo** è definita come:

$$|P| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$$

53. Misura di un insieme aperto

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, allora la sua **misura** viene definita come:

$$|\Omega| = \sup |P|, \quad P \subseteq \Omega$$

dove P è un plurintervallo che approssima l'area di Ω, quindi $P \subseteq \Omega$

54. Misura di un insieme compatto (quindi chiuso e limitato)

Sia Ω un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$, allora la sua misura viene definita come:

$$|\Omega| = \inf |P|, \quad P \supseteq \Omega$$

dove P è un plurintervallo che contiene interamente l'insieme Ω

55. Insieme misurabile secondo Lebesgue

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ **limitato**, si definisce:

- **Misura interna**
$$m_*(E) = \sup |K|, \quad K \subseteq E,\ K \text{ compatto}$$
- **Misura esterna**
$$m^*(E) = \inf |\Omega|, \quad \Omega \supseteq E,\ \Omega \text{ aperto}$$

si dirà quindi che E è **misurabile secondo Lebesgue** se:
$$m_*(E) = m^*(E)$$

ed il valore comune di $m_*(E)$ e $m^*(E)$ verrà detto **misura di Lebesgue** di E, e viene denotato con:

$$|E| \text{ oppure } m(E)$$

56. Misurabilità di insiemi non limitati

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. Allora E si dirà **misurabile** se lo sono tutti gli insiemi:

$$E_k = E \cap [-k, k]^n \quad \text{e si porrà } |E| = \sup_{\mathbb{N}} |E_k|$$

57. Funzione integrabile secondo Lebesgue

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione reale su E, **insieme misurabile di dimensione finita**. Sia $\pi = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ una partizione misurabile di E, ossia una famiglia finita di sottoinsiemi misurabili (secondo Lebesgue) di E verificante:

$$\bigcup_{i=1...n} E_i = E$$

$$i \neq j \Rightarrow E_i \bigcap E_j = \emptyset$$

Per ogni fissata partizione π, si definiscono la **somma inferiore** σ_π e la **somma superiore** Σ_π ponendo:

$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \inf_{E_i} f$$

$$\Sigma_\pi = \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \sup_{E_i} f$$

Si definiscono poi **l'integrale inferiore** $\underline{\int}_E f$ e **integrale superiore** $\overline{\int}_E f$ ponendo:

$$\underline{\int}_E f \equiv \sup_\pi \sigma_\pi$$

$$\overline{\int}_E f \equiv \inf_\pi \Sigma_\pi$$

al variare di π nell'insieme di tutte le partizioni misurabili.

Infine si dice che f **è integrabile secondo Lebesgue** se e solo se gli integrali superiore e inferiore su E coincidono. Il loro comune valore è detto **integrale di Lebesgue di f su E**

58. Integrale di funzioni positive su insiemi di misura finita

Sia ora f una funzione positiva, non necessariamente limitata. Per definirne l'integrale poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \min(f(x), n)$$

Si pone allora:

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

la funzione f si dirà **integrabile su E** se il secondo membro dell'equazione precedente è finito.

59. Integrale di funzioni positive su insiemi misurabili arbitrari

Dato un qualunque insieme misurabile E poniamo $E_n = E \cap B_n(0)$. Ogni E_n ha misura finita, minore o uguale a quella della sfera. Si pone, per ogni funzione positiva:

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} f$$

la funzione f si dirà **integrabile su E** se il secondo membro dell'equazione precedente è finito.

60. Integrale di funzioni arbitrarie su inisiemi arbitrari

Data una funzione f si definisce:

- **parte positiva di f**

$$f^+(x) = \max(f(x), 0)$$

- **parte negativa di f**

$$f^-(x) = \max(0, -f(x))$$

Le funzioni così definite sono funzioni positive, per le quali l'integrale è già stato definito. Esse verificano:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$
$$f^+(x) = frac12[|f(x)| + f(x)] \quad \text{e} \quad f^-(x) = frac12[|f(x)| - f(x)]$$

Si pone allora:

$$\int_E f \equiv \int_E f^+ - \int_E f^-$$

infine f sarà detta **integrabile** se e solo se lo sono (separatamente) la sua parte positiva e la sua parte negativa.