

1 Reguły wyczerpujące (exhaustive) - z użyciem macierzy nieodróżnialności:

Dany mamy system decyzyjny (U, A, d), gdzie $U = o_1, o_2, \dots, o_7, o_8$,
 $A = a_1, a_2, \dots, a_6$, d – atrybut decyzyjny

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	d
o_1	1	1	1	1	3	1	1
o_2	1	1	1	1	3	2	1
o_3	1	1	1	3	2	1	0
o_4	1	1	1	3	3	2	1
o_5	1	1	2	1	2	1	0
o_6	1	1	2	1	2	2	1
o_7	1	1	2	2	3	1	0
o_8	1	1	2	2	4	1	1

Tworzymy dla niego macierz nieodróżnialności $\mu_A = [c_{ij}]_{8 \times 8}$, gdzie $i, j = 1, 2, \dots, 8$. Dla obiektów o_1, \dots, o_8 zostawiamy w kolumnach tylko kratki o współrzędnych, które odpowiadają obiektom o innych decyzjach, gdzie

$$c_{ij} = \{a \in A : a(o_i) = a(o_j)\}$$

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1			$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_4 a_6$		$a_1 a_2 a_5 a_6$	
o_2			$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2 a_5$	
o_3	$a_1 a_2 a_3 a_6$	$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_6$
o_4			$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_5$	
o_5	$a_1 a_2 a_4 a_6$	$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_6$
o_6			$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3$	
o_7	$a_1 a_2 a_5 a_6$	$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$
o_8			$a_1 a_2 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$	

Wyliczania reguły za pomocą macierzy nieodróżnialności. Rozważana tabela pozwala na szybkie wyszukiwanie niesprzecznych reguł, wystarczy znaleźć deskryptor, lub grupę deskryptorów, które nie występują w danej kolumnie.

Zacznijmy od reguł I rzędu (rzad oznacza liczbę deskryptorów warunkowych, długość reguły):

dla o_2 mamy

$$(a_6 = 2) \Rightarrow (d = 1)$$

dla o_4 mamy

$$(a_6 = 2) \Rightarrow (d = 1)$$

dla o_6 mamy

$$(a_6 = 2) \Rightarrow (d = 1)$$

dla o_8 mamy

$$(a_5 = 4) \Rightarrow (d = 1)$$

pozostałe kolumny nie generują żadnej reguły.

Trzy podkreślone reguły zapisujemy jako regułę z supportem 3 (support oznacza liczbę obiektów systemu decyzyjnego, do których pasuje reguła), czyli grupa reguł rzędu I jest postaci:

$$(a_6 = 2) \Rightarrow (d = 1)[3]$$

$$(a_5 = 4) \Rightarrow (d = 1)$$

W kolejnym etapie modyfikujemy tabele nieodróżnialności, zaznaczając deskryptory, z których nie będziemy mogli zbudować reguł wyższych rzędów. (czyli deskryptory: $(a_6 = 2), (a_5 = 4)$).

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1			$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_4 a_6$		$a_1 a_2 a_5 a_6$	
o_2			$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2 a_5$	
o_3	$a_1 a_2 a_3 a_6$	$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_6$
o_4			$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_5$	
o_5	$a_1 a_2 a_4 a_6$	$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_6$
o_6			$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3$	
o_7	$a_1 a_2 a_5 a_6$	$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$
o_8			$a_1 a_2 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$	



Teraz wybieramy reguły II rzędu, (szukamy kombinacji bez powtórzeń długości 2, które nie występują w danej kolumnie, pamiętając o pominięciu kombinacji zawierających reguły niższego rzędu)

z o_1 mamy

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

z o_2 mamy

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

z o_3 mamy

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_5 = 2) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

z o_4 mamy

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

z o_5 mamy

$$(a_5 = 2) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

z o_7 mamy

$$(a_3 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

Teraz reguły identyczne zapisujemy jako pojedyncze z odpowiednim supportem, otrzymujemy reguły postaci:

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)[3]$$

$$(a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_5 = 2) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)[2]$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

Następnie korzystając z macierzy nieodróżnialności, wypisujemy kombinacje długości 3, które będą kandydatami na reguły:

z o_1 mamy

$$(a_1 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

z o_2 mamy

$$(a_1 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

z o_3 mamy

$$(a_1 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_4 = 3) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_4 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_1 = 1) \& (a_5 = 2) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_2 = 1) \& (a_3 = 1) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$\begin{aligned}
(a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0)
\end{aligned}$$

z o_4 mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_1 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 1)
\end{aligned}$$

z o_5 mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 2) \&(a_4 = 1) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 2) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_4 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0)
\end{aligned}$$

z o_7 mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \&(a_3 = 2) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \&(a_3 = 2) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 2) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 2) \&(a_5 = 3) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0)
\end{aligned}$$

Rozważane kombinacje na pewno nie są sprzeczne, stąd teraz eliminujemy, tych kandydatów, którzy zawierają reguły niższego rzędu: zaznaczmy podkreśleniem, zawieranie reguł niższego rzędu:

z o_1 mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&(a_4 = 1) &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_1 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_1 = 1) \&\underline{(a_4 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_4 = 1)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&\underline{(a_4 = 1)} \&\underline{(a_5 = 1)} &\Rightarrow (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_4 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_4 = 1)} \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 1) \\
\underline{(a_4 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} \&(a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 1)
\end{aligned}$$

z o_2 mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_4 = 1)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_1 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_1 = 1) \&\underline{(a_4 = 1)} \&\underline{(a_5 = 3)} &\Rightarrow (d = 1) \\
(a_2 = 1) \&\underline{(a_3 = 1)} \&\underline{(a_4 = 1)} &\Rightarrow (d = 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_2 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_2 = 1) \&(a_4 = 1) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_3 = 1) \&(a_4 = 1) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)\end{aligned}$$

z o_3 mamy

$$\begin{aligned}(a_1 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_1 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_1 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_1 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_4 = 3) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)\end{aligned}$$

z o_4 mamy

$$\begin{aligned}(a_1 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_1 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_2 = 1) \&(a_3 = 1) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_2 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1) \\ (a_3 = 1) \&(a_4 = 3) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)\end{aligned}$$

z o_5 mamy

$$\begin{aligned}(a_1 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_3 = 2) \&(a_4 = 1) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \text{ ta jest prawidłowa} \\ (a_3 = 2) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_4 = 1) \&(a_5 = 2) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)\end{aligned}$$

z o_7 mamy

$$\begin{aligned}(a_1 = 1) \&(a_3 = 2) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_1 = 1) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_3 = 2) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_2 = 1) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_3 = 2) \&(a_4 = 2) \&(a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_3 = 2) \&(a_5 = 3) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0) \\ (a_4 = 2) \&(a_5 = 3) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)\end{aligned}$$

Mamy tylko jedną regułę trzeciego rzędu postaci,

$$(a_3 = 2) \&(a_4 = 1) \&(a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

Kolejne rzędy reguł wyliczamy analogicznie. W naszym przypadku nie ma potrzeby sprawdzać, czy istnieją reguły rzędu cztery, otrzymanie tylko jednej reguły rzędu III, może być tu warunkiem stopu. Ostatecznie nasz zbiór reguł exhaustive wyliczony zmodyfikowana macierzą nieodróżnialności jest postaci:

I

$$\begin{aligned}(a_6 = 2) \Rightarrow (d = 1)[3] \\ (a_5 = 4) \Rightarrow (d = 1)\end{aligned}$$

II

$$(a_3 = 1) \& (a_4 = 1) \Rightarrow (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)[3]$$

$$(a_4 = 1) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 2) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_5 = 2) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)[2]$$

$$(a_4 = 3) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 1)$$

$$(a_3 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \& (a_5 = 3) \Rightarrow (d = 0)$$

III

$$(a_3 = 2) \& (a_4 = 1) \& (a_6 = 1) \Rightarrow (d = 0)$$