DERIVATION (partie 1)

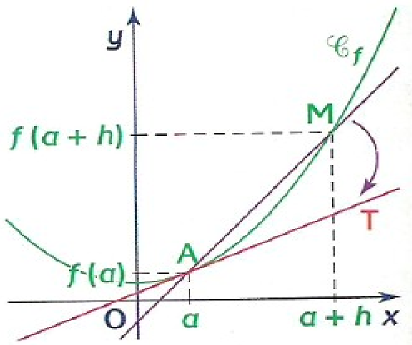
I. Tangente et nombre dérivé

Dans toute la suite, on considère une fonction *f* définie sur un intervalle *I*.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$.

1.1 Notion de tangente à une courbe, nombre dérivé

Soit *a* de l'intervalle *I* et *h* un réel.
On note $A\ (a\ ;f\ (a))$ et $M\ (a+h\ ;f\ (a+h))$ deux points appartenant à la courbe C_f .
On appelle **taux de variation** de *f* entre *a* et *a* + *h* le nombre réel : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Graphiquement, il s'agit du **coefficient directeur** de la droite (AM).

Lorsque M se rapproche du point A, c'est à dire quand *h* se rapproche de 0 , la droite (AM) se rapproche d'une position limite « au ras de la courbe ».
On obtient **la tangente** de C_f en A. Son **coefficient directeur** s'appelle **nombre dérivé de *f* en *a*,** il est noté $f'(a)$



<u>Définition :</u> Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre *fini* lorsque *h* tend vers zéro, on dit que la fonction *f* est dérivable en *a*.
Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de *f* en *a*. On le note $f'(a)$.
On a donc :

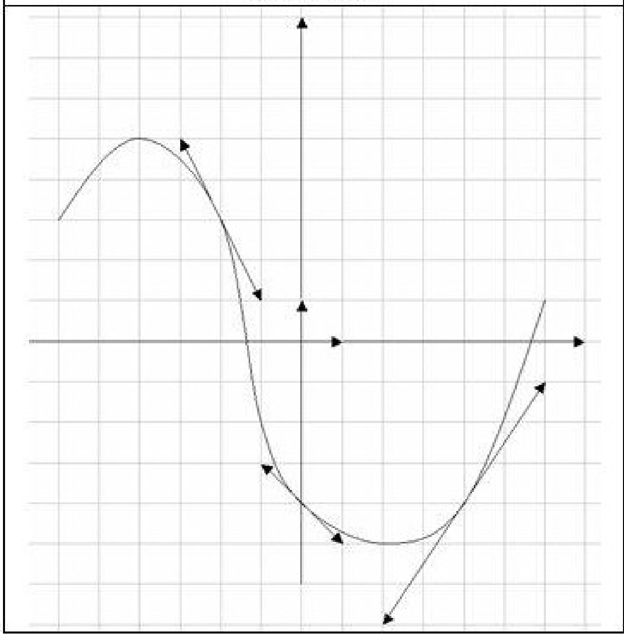
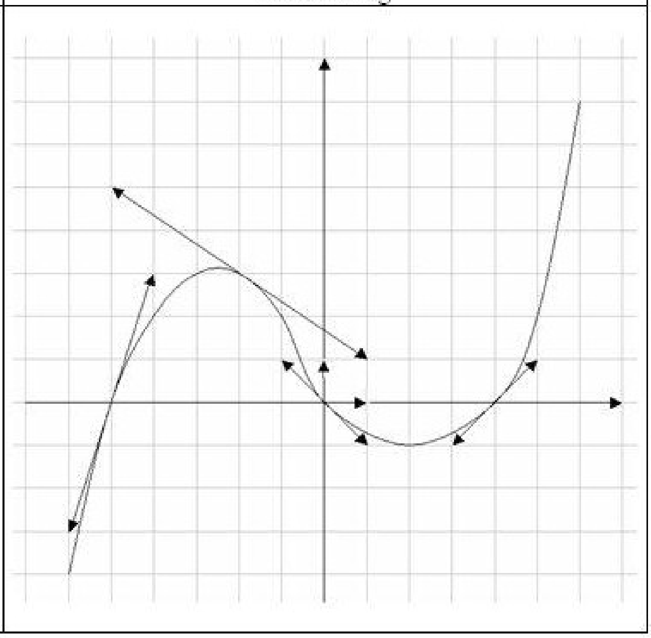
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple :

Soit *f* la fonction définie sur par $f(x)=3x^2+4x-5$
Montrons que *f* est dérivable en *a* = 1.

Donc , *f* est dérivable en 1 et $f'(1)=\ldots\ldots$

Remarque : lecture graphique du nombre dérivé

Courbe Cf	Courbe Cg
	

$f(-4)=$ $\qquad$ $f(-2)=$ $\qquad$ $g(-5)=$ $\qquad$ $g(-2)=$

$f(0)=$ $\qquad$ $f(4)=$ $\qquad$ $g(0)=$ $\qquad$ $g(4)=$

$f'(-4)=$ $\qquad$ $f'(-2)=$ $\qquad$ $g'(-5)=$ $\qquad$ $g'(-2)=$

$f'(0)=$ $\qquad$ $f'(4)=$ $\qquad$ $g'(0)=$ $\qquad$ $g'(4)=$

1.2 Équation de la tangente à une courbe

Propriété :	Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration

Exemple :
Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ dont on a montré ci dessus la dérivabilité en 1.
Trouver l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

On a :
$f(1)=$.. et $f'(1)=$...............

L'équation réduite de la tangente au point de la courbe est donc :

II. Fonctions dérivées

2.1 Notion de fonction dérivée

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle I.

Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle I la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f'.

Remarque : Ne pas confondre la fonction f et la fonction f' !

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x)=k$ (constante)		$\mathbb{R}$
$f(x)=x$		$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$		$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$		$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)		$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$		$\mathbb{R}$
$f(x)=ax^2+bx+c$		$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$		$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$		$]0;+\infty[$

Remarques :

On peut également démontrer que pour toutes fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, on a pour tout x appartenant à I : $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ et $(k\ f(x))'=k\ f'(x)$

Démonstration lignes 3, 6 et 8