GEOMETRIE REPEREE

Dans ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

I. Vecteur directeur et équation cartésienne de droite

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}=k\times\vec{v}$

Conséquence : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition : Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs, on appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $det(\vec{u}\,;\vec{v})$ le nombre réel défini par $det(\vec{u}\,;\vec{v})=xy'-yx'$

Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemple : On considère les points R, S et T de coordonnées : $R(-4\,;4)$, $S(5;8)$, $T(-2\,;0)$.
Les points R , S et T sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{RS}(5-(-4);8-4)$ $\quad$ $\overrightarrow{RT}(-2-(-4);0-4)$ $\quad$ $det(\overrightarrow{RS};\overrightarrow{RT})=9\times(-4)-2\times4=-44$
$\overrightarrow{RS}(9\,;4)$ $\quad$ $\overrightarrow{RT}(2;-4)$

Le déterminant entre $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ est différent de 0 donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points R, S et T ne sont pas alignés.

Propriété :
Dans un repère orthonormé , les coordonnées de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ d'une droite d vérifient une relation $ax+by+c=0$ où a , b et c sont des nombres réels.
La relation $ax+by+c=0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 1 : **En utilisant le déterminant**
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $C(4;-3)$ et $D(2;1)$

Soit $M(x\,;y)$ un point appartenant à la droite (d) . Par conséquent les ponts M, C et D sont alignés et donc le déterminant entre $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CM}$ est égal à 0.

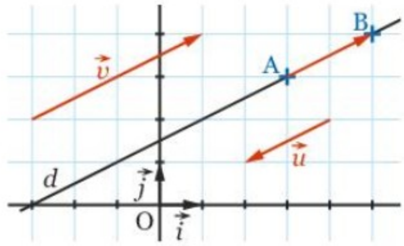
$\overrightarrow{CD}(-2\,;4)$ et $\overrightarrow{CM}(x-4\,;y+3)$

On a alors : $det(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CM})=0$ $\quad$ $-2\times(y+3)-(x-4)\times4=0$
$-2\,y-6-4\,x+16=0$
$-4\,x-2\,y+10=0$

Une équation cartésienne de la droite (CD) est : $-4\,x-2\,y+10=0$

Définition :

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques distincts de la droite d.



Sur le schéma ci-contre les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de (AB) .

Donnons les coordonnées des vecteurs ci-contre graphiquement:
$\vec{u}(-2;-1)$ $\vec{v}(4;2)$ $\overrightarrow{AB}(2;1)$
On peut voir que tous les vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires entre eux.

Propriété :

Soit d une droite dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$.
Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un **vecteur directeur** de d .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 2 : **en utilisant les coordonnées d'un vecteur directeur**

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $C(4;-3)$ et $D(2;1)$:

(d) passe par les points C et D donc $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de (d) .
$\overrightarrow{CD}(-2;4)$ donc $-b=-2$ et $a=4$
$b=2$ et $a=4$
Par conséquent la droite (CD) a pour équation cartésienne : $4x+2y+c=0$
Reste à déterminer c :
Pour cela on prend un point appartenant à (d) par exemple le point $C(4;-3)$. Puisque le point C appartient à la droite (d) ses coordonnées doivent vérifier l'équation de (d) on peut donc remplacer x et y par les coordonnées de C afin de déterminer la valeur de c :

$4\times 4+2\times(-3)+c=0$ $16-6+c=0$ $10+c=0$ $c=-10$
Par conséquent une équation cartésienne de (d) est $4x+2y-10=0$

Remarque: On ne trouve pas exactement la même équation cartésienne qu'avec la première méthode , il existe une infinité d'équations cartésiennes pour une même droite mais on peut passe de l'une à l'autre en multipliant par un nombre réel non nul.

Exercice type :

1. Est-ce que le point $E(5;-3)$ appartient à (CD) ?

   (CD) a pour équation cartésienne $4x+2y-10=0$
   Si E appartient à (CD) alors les coordonnées de E doivent vérifier l'équation de (CD):

   $4\times 5+2\times(-3)-10=20-6-10=4$ on ne tombe pas sur 0 donc E n'appartient pas à (CD).

2. Déterminer les coordonnées du point F intersection entre (CD) et l'axe des ordonnées.

   Si F appartient à l'axe des ordonnées son abscisse est égale à 0.
   De plus F appartient à (CD), on va donc remplacer x par 0 dans l'équation cartésienne de (CD) pour trouver l'ordonnée de F:
   $4\times 0+2y-10=0$ $2y-10=0$ $2y=10$ $y=5$
   Par conséquent $F(0;5)$

3. Déterminer les coordonnées du point G intersection entre (CD) et l'axe des abscisses.

Si G appartient à l'axe des abscisse son ordonnée est égale à 0.
De plus G appartient à (CD), on va donc remplacer y par 0 dans l'équation cartésienne de (CD) pour trouver l'ordonnée de F:

$4x+2\times 0-10=0 \qquad 4x-10=0 \qquad 4x=10 \qquad x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

Par conséquent $\mathrm{F}(\frac{5}{2};0)$

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 parallèle à (CD) et passant par $\mathrm{E}(5;-3)$.

d_2 est parallèle à (CD) donc les vecteurs directeurs de (CD) sont également des vecteurs directeurs de d_2 en particulier $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(-2;4)$.

On a donc : $-b=-2$ et a=4
$b=2$ et $a=4$

Donc d_2 a pour équation cartésienne $4x+2y+c=0$

Or $\mathrm{E}(5;-3)$ appartient à d_2 donc : $4\times 5+2\times(-3)+c=0$
$20-6+c=0 \qquad 14+c=0 \qquad c=-14$

Donc d_2 a pour équation cartésienne $4x+2y-14=0$

Remarque : L'équation réduite d'une droite nous donne également les coordonnées d'un vecteur directeur.
En effet si une droite d a pour équation réduite $y=mx+p$ alors on peut en déduire que le vecteur $\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de d .

II. Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Vecteur normal : On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite (d) si la direction de $\vec{n}$ est orthogonale à (d).

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode3 : en utilisant le produit scalaire

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1)$

Propriété : Soit (d) la droite d'équation $ax+by+c=0$
alors, le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à la droite (d).

Démonstration :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 4 : en utilisant les coordonnées d'un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1)$

Exercice type :

On considère les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) d'équations respectives $3x-2y+1=0$, $-5x+y+4=0$, $6x+9y+4=0$ et $-x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}=0$

1. Associer les droites parallèles et les droites perpendiculaires entre elles.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_5) perpendiculaire à (d_2) passant par $A(-1;2)$

III. Équation de cercle

Soit un cercle de centre Ω(α ; β) et de rayon r et un point $M(x;y)$ appartenant à ce cercle

Théorème : Une équation d'un cercle de centre Ω(α ; β) et de rayon r est :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

***Déterminer une équation du cercle C méthode 1 :* en utilisant les coordonnées de son centre et son rayon** :

Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 3.

Exercice type :
Soit le cercle d'équation $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, déterminer les coordonnées de son centre et son rayon

Théorème : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble de points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

Démonstration : Si M est en A ou en B, le résultat est évident.

***Déterminer une équation du cercle C méthode 2 :* en utilisant les coordonnées des extrémités d'un diamètre**

Déterminer une équation du cercle C de diamètre [AB] avec $A(-1;2)$ et $B(1;3)$ puis déterminer les coordonnées de son centre et son rayon