Fonction exponentielle : Feuille d'exercices n°1

Exercice 1

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe.
Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0; 7]$.
2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

Partie B

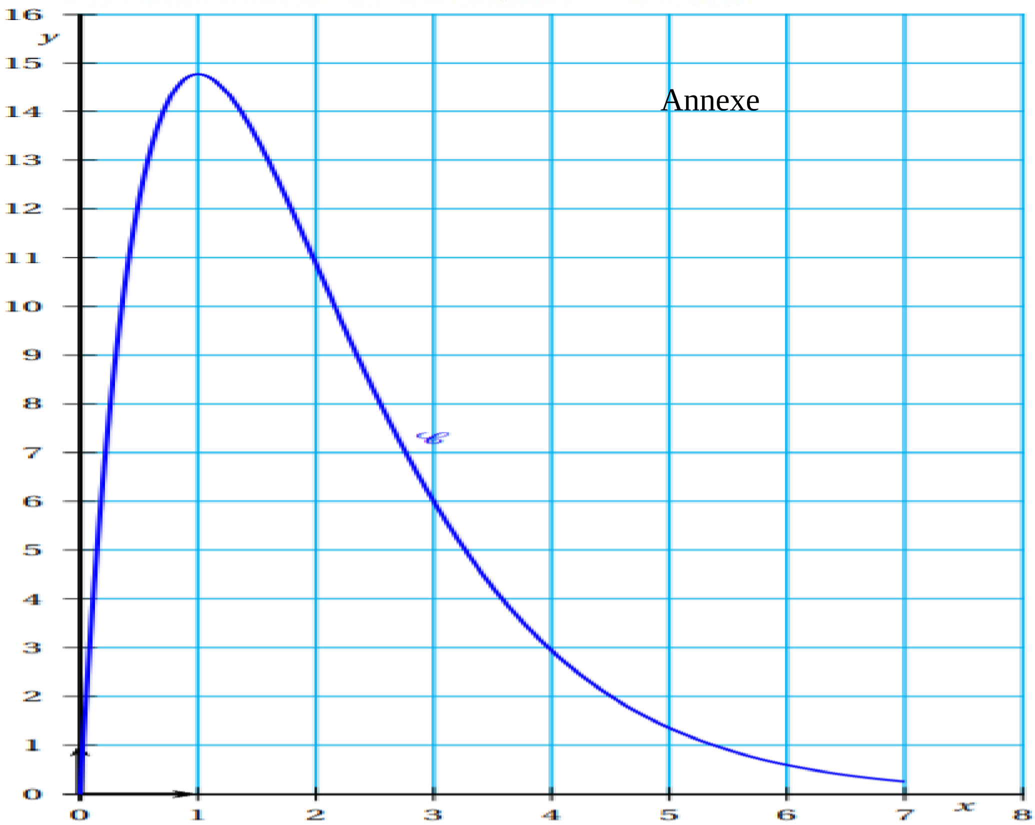
La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}.$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 7]$, $f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$.
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

   b. Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$.

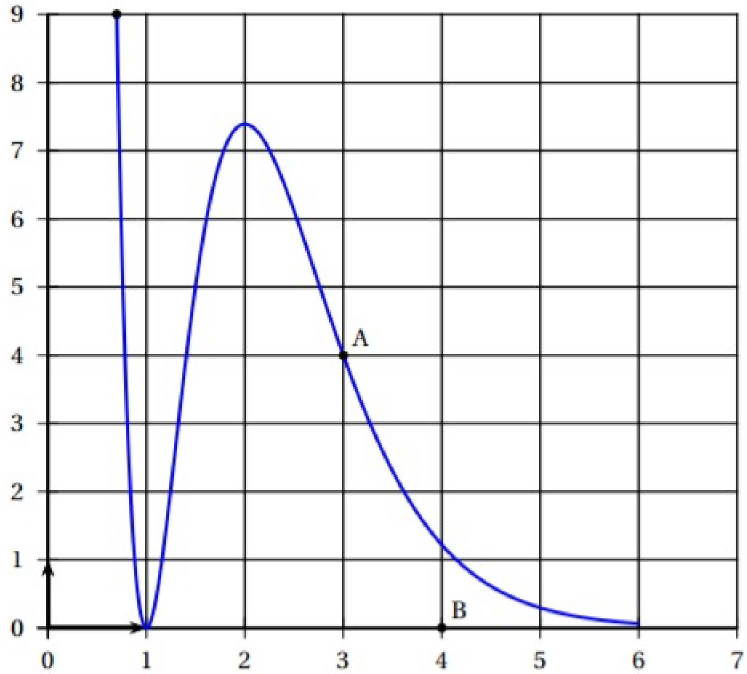


Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points A$(3\,;\,4)$ et B$(4\,;\,0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7\,;\,6]$.
   On ne demande pas de calculer les ordonnées.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{}(-2x+6)$ $\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$

On note f'' la fonction dérivée de f' . Dresser, en utilisant les résultats du logiciel, le tableau de signe de f'' et en déduire le tableau de variations de f' sur $[0{,}7\,;6]$.