Corrigé exercice 55 :

1. $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$

   On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{0+5}{0+1} = 5$, $u_1 = \dfrac{1+5}{1+1} = 3$ et $u_2 = \dfrac{2+5}{2+1} = \dfrac{7}{3}$

   On a $u_2 - u_1 = -\dfrac{2}{3}$ et $u_1 - u_0 = -2$.
   La suite n'est donc pas arithmétique.

2. $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$

   On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{5}{8}$, $u_1 = \dfrac{-3+5}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ et
   $u_2 = \dfrac{-3 \times 2 + 5}{8} = -\dfrac{1}{8}$

   On a $u_2 - u_1 = -\dfrac{3}{8}$ et $u_1 - u_0 = -\dfrac{3}{8}$, la suite semble arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

   $u_{n+1} = \dfrac{-3(n+1)+5}{8} = \dfrac{-3n+2}{8}$

   D'où $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n+2}{8} - \dfrac{-3n+5}{8} = -\dfrac{3}{8}$.

   La suite est arithmétique de raison $r = -\dfrac{3}{8}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{8}$.

3. $u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$

   On calcule les premiers termes :
   $u_0 = \dfrac{3}{3} = 1$, $u_1 = \dfrac{1^2+4\times 1+3}{1+3} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $u_2 = \dfrac{2^2+4\times 2+3}{2+3} = \dfrac{15}{5} = 3$
   On a $u_2 - u_1 = 1$ et $u_1 - u_0 = 1$, la suite semble arithmétique. Il faut vérifier pour tout entier naturel n.

   $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+4(n+1)+3}{n+1+3}$

   $u_{n+1} = \dfrac{n^2+2n+1+4n+4+3}{n+4} = \dfrac{n^2+6n+8}{n+4}$

   D'où $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+6n+8}{n+4} - \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$

   $= \dfrac{(n^2+6n+8)(n+3)-(n^2+4n+3)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$

   $= \dfrac{n^3+3n^2+6n^2+18n+8n+24-(n^3+4n^2+4n^2+16n+3n+12)}{(n^2+3n+4n+12)}$

   $= \dfrac{n^2+7n+12}{n^2+7n+12} = 1$.

   La suite est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 1$.

4. $u_n = \dfrac{n^2+3}{n+5}$

On calcule les premiers termes : $u_0 = \dfrac{3}{5}$, $u_1 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $u_2 = \dfrac{7}{7} = 1$.

On a $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{15}$. La suite n'est donc pas arithmétique.

Corrigé exercice 60 :

1. D'après la formule $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, on obtient :
$S=\dfrac{73\times 74}{2}=2\ 701$

2. $T=1+(1+3\times 1)+(1+3\times 2)+(1+3\times 3)+\cdots+(1+3\times 13)$
$T=1\times 14+3\times(1+2+3+\cdots+13)$
$T=14+3\times\dfrac{13\times 14}{2}=14+3\times 91=287$

<u>Autre méthode</u> :
Les termes $1;4;7;10;...$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0=1$ et de raison $r=3$. La somme de $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$.
On a donc la somme $T=u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{13}$.
D'où $T=14\times\dfrac{1+40}{2}=287$

3. $U=(70+1)+(70+2)+(70+3)+\cdots+(70+30)$
$U=70\times 30+(1+2+3+\cdots+30)$
$U=2\ 100+\dfrac{30\times 31}{2}=2\ 100+465=2\ 565$

<u>Autre méthode</u> :
Les termes $71;72;73;...$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 71 et de raison 1.
On a donc la somme $U=30\times\dfrac{71+100}{2}=2\ 565$

4. $V=2\times(1+2+3+\cdots+25)$
$V=2\times\left(\dfrac{25\times 26}{2}\right)=650$

<u>Autre méthode</u> :
Les termes $2;4;6;...$ sont les termes d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2.
On a donc la somme $U=25\times\dfrac{2+50}{2}=650$

Corrigé exercice 61 :

1.
   a. $S=1+3+5+\cdots+31$
   $S=16\times 1+2(1+2+\cdots+15)$
   $S=16+2\times\dfrac{15\times 16}{2}=256$

   b. $T=4+7+10+\cdots+19$
   $T=6\times(-2)+3(2+3+\cdots+7)$
   $T=-12+3\times\left(\dfrac{7\times 8}{2}-1\right)=-12+81=69$

2.
   a. $U=\displaystyle\sum_{i=1}^{27}3i$
   $U=3(1+2+3+\cdots+27)=3\times\dfrac{27\times 28}{2}=1\ 134$

b. $$V = \sum_{i=0}^{10}(5+4i)$$
$$V = 5 \times 11 + 4 \times \frac{10 \times 11}{2} = 275$$

Corrigé exercice 70 :

1. $v_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$

   On calcule les premiers termes :

   $v_0 = \dfrac{4^0}{3^{0+1}} = \dfrac{1}{3}$

   $v_1 = \dfrac{4^1}{3^{1+1}} = \dfrac{4}{9}$

   $v_2 = \dfrac{4^2}{3^{2+1}} = \dfrac{16}{27}$

   On a $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{\frac{16}{27}}{\frac{4}{9}} = \dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}$. La suite semble donc géométrique.

   Il faut vérifier : Pour tout entier n,

   $v_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{3^{n+1+1}} = \dfrac{4^n \times 4}{3^{n+1} \times 3} = \dfrac{4}{3}v_n$.

   La suite est donc bien géométrique de raison $q = \dfrac{4}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$.

2. $v_n = (-7)^n$

   On calcule les premiers termes :

   $v_0 = (-7)^0 = 1$

   $v_1 = (-7)^1 = -7$

   $v_2 = (-7)^2 = 49$

   On a $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-49}{7} = -7$ et $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{-7}{1} = -7$. La suite semble donc géométrique. Il faut vérifier : Pour tout entier n,

   $v_{n+1} = (-7)^{n+1} = (-7)^n \times (-7) = -7v_n$

   La suite est donc bien géométrique de raison $q = -7$ et de premier terme $v_0 = 1$.

3. $v_n = 5n + 2^n$

   On calcule les premiers termes :

   $v_0 = 5 \times 0 + 2^0 = 1$

   $v_1 = 5 \times 1 + 2^1 = 7$

   $v_2 = 5 \times 2 + 2^2 = 14$

   On a $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{14}{7} = 2$ et $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{7}{1} = 7$.

   La suite n'est donc pas géométrique.

4. $v_n = \frac{1}{3^n}$

On calcule les premiers termes :

$v_0 = \frac{1}{3^0} = 1$

$v_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$v_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

On a $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ et $\frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$. La suite semble donc géométrique. Il faut vérifier : Pour tout entier n,

$v_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} v_n$

La suite est donc bien géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Corrigé exercice 72 :

a. $S = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^9 = \frac{1 - 4^{10}}{1 - 4}$

$S = \frac{1\ 048576 - 1}{3} = 349\ 525$

b. $T = 3(1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 64)$

$T = 3\left(1 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots + (-2)^6\right)$

$T = 3 \times \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)}$

$T = 3 \times \frac{129}{3} = 129$

c. $U = 9\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{6\ 561}\right)$

$U = 9\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \cdots + \frac{1}{3^8}\right)$

$U = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9\ 841}{729}$

d. $V = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^5} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$

Corrigé exercice 73 :

1.

a. $$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15} = \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} = 65\ 535$$

b. $$T = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

$$T = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^5}\right) = \frac{1}{16} \times \frac{1 - \frac{1}{4^6}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$T = \frac{1\ 365}{16\ 384}$$

2.

a. $$U = \sum_{i=0}^{8} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$$

$$U = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^9}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$U = \frac{171}{256}$$

b. $$V = \sum_{i=0}^{8} (2 \times 3^i)$$

$$V = 2(1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^8) = 2 \times \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = 19\ 682$$