Correction exercices

Corrigé exercice 26 :

1. f est une fonction polynôme donc $D_{f'} = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$.
2. f est un polynôme donc $D_{f'} = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
3. Cette fonction est de la forme $f = u + v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x$. Comme $D_{u'} =]0; +\infty[= I$ et v est dérivable sur I, en tant que fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $D_{f'} =]0; +\infty[$ et $f' = u' + v'$ donc pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = \dfrac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$.
4. Cette fonction est de la forme $f = u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$. Comme u est dérivable sur $I = \mathbb{R}^*$ (fonction carré dérivable sur $\mathbb{R}$) et $D_{v'} = \mathbb{R}^*$ alors $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $f' = u' + v'$ donc pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = 2x - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

Corrigé exercice 27 :

Dans chaque cas, f est une fonction polynôme donc $D_{f'} = \mathbb{R}$; et dans chaque cas on utilise les formules $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$ avec k réel.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2x - 4 \times 1 + 0 = 6x - 4$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4 \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 1 = -16x^3 + 9x^2 - 4x + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 3x^2 - 4x + 3$.

Corrigé exercice 28 :

1. Cette fonction est de la forme $f = uv$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x^3 - 1$. Comme $D_{u'} = \mathbb{R}^* = I$ et v est dérivable sur I (fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$) alors $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ et $f' = u'v + uv'$ donc pour tout $x \in D_{f'}$,
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}(x^3 - 1) + \dfrac{1}{x} \times 3x^2 = -x + \dfrac{1}{x^2} + 3x = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.
2. Cette fonction est de la forme $f = uv$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x} + 1$. Comme u est dérivable sur $I =]0; +\infty[$ (fonction carré dérivable sur $\mathbb{R}$) et $D_{v'} =]0; +\infty[$ alors $D_{f'} =]0; +\infty[$ et $f' = u'v + uv'$ donc pour tout $x \in D_{f'}$,
$f'(x) = 2x\left(\sqrt{x} + 1\right) + x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + 2x + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x^2 + 4x\sqrt{x} + x^2}{2\sqrt{x}}$
d'où $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.
3. Cette fonction est de la forme $f = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 1$. Comme $D_{v'} = \mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors $D_{f'} = \mathbb{R}$, et $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$ donc pour tout $x \in D_{f'}$,
$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

4. Cette fonction est de la forme $f = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = \sqrt{x}$. Comme $D_{v'} =]0;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ alors $D_{f'} =]0;+\infty[$, et $f' = -\frac{v'}{v^2}$ donc donc pour tout $x \in D_{f'}$,
$f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$.

Corrigé exercice 29 :

1. Cette fonction est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = x-2$. Comme $D_{u'} = \mathbb{R}$ et $D_{v'} = \mathbb{R}$ avec v qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc, pour tout $x \in D_{f'}$,
   $f'(x) = \frac{1 \times (x-2) - (x+1) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$.
2. Cette fonction est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3+1$ et $v(x) = x^2-1$. Comme $D_{u'} = \mathbb{R}$ et $D_{v'} = \mathbb{R}$ avec v qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ alors $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc, pour tout $x \in D_{f'}$,
   $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - (x^3+1) \times 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.
3. Cette fonction est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x-1$. Comme $D_{u'} =]1;+\infty[= I$ (fonction racine carrée dérivable sur $]0;+\infty[$) et v est dérivable sur I (fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$) et ne s'annule pas sur I alors f est dérivable sur I et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x-1) - \sqrt{x} \times 1}{(x-1)^2}$
   $f'(x) = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \times \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1+x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$
   et donc, en conclusion, $f'(x) = -\frac{\sqrt{x}(x+1)}{2x(x-1)^2}$.
4. Cette fonction est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2+x+1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Comme u est dérivable sur $]0;+\infty[$ (fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$) et $D_{v'} =]0;+\infty[$ avec v qui ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ alors $D_{f'} =]0;+\infty[$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \frac{(2x+1) \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2+x+1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$
   $f'(x) = \frac{4x^2 + 2x - x^2 - x - 1}{2x\sqrt{x}}$
   $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3x^2 + x - 1)}{2x^2}$.

Corrigé exercice 38 :

La fonction f admet trois extremums locaux en : –1, 0 et 2, sa dérivée f' s'annule donc trois fois en changeant de signe. La courbe C_3 représente f'.

Corrigé exercice 39 :

$f'(x)$ est positif sur $]-\infty;1]$, négatif sur $[1;3]$ et positif sur $[3;+\infty[$ donc f est croissante sur $]-\infty;1]$, décroissante sur $[1;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$. La courbe qui vérifie ces conditions est la courbe de f_2.

Corrigé exercice 40 :

f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc $f'(x)$ est positif sur $]0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$. La courbe qui vérifie ces conditions est la courbe C_2.

Corrigé exercice 43 :

1. f est une fonction trinôme du second degré donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est une fonction trinôme du second degré donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 \times 2x + 6 = 4x + 6$.
3. f' est une fonction affine qui s'annule pour $x = \dfrac{-3}{2}$. La fonction f admet donc le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{-25}{2}$	$\nearrow$	

Corrigé exercice 45 :

1. f est une fonction polynôme du troisième degré donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est une fonction polynôme du troisième degré donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
3. f' est une fonction trinôme du second degré qui admet deux racines 1 et $-\dfrac{1}{3}$. De plus le coefficient de x^2 est positif. La fonction f admet donc le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Corrigé exercice 48 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme $f = \dfrac{u}{v}$ alors $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et donc $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 4 + 8x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$.
3. $f'(x)$ a le même signe que le produit $(x+1)(x-1)$. On obtient donc :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	