Suite arithmétique / Suite géométrique

I- Suites arithmétiques

Exemple de situation faisant intervenir une suite arithmétique :
On a placé en 2005 la somme de 2000€ sur un compte en banque. Chaque année cette somme augmente de 60€.
On note u_n la somme sur le compte en banque l'année 2005 + n . $u_0=2000$

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1=2000+60=2060$ $u_2=2060+60=2120$
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . $u_{n+1} = u_n+60$
3. Quelle somme sera sur le compte en 2018 ? $u_{13}=2000+13\times 60 = 2060+12\times 60 = 2780$
4. Exprimer u_n en fonction de n: $u_n = 2000+n\times 60 = 2060+(n-1)\times 60$

Définition :
Une suite **arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en **ajoutant le même nombre** r au terme précédent.
r est appelé **la raison** de la suite dans ce cas là.

Schéma : $u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3$ .... $u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$

On a donc : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$

Remarque :
Si la raison r est **positive**, la suite est **croissante.** Si la raison r est **négative**, la suite est **décroissante.**

Propriété importante :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier n:

$\boxed{u_n = u_0+n\times r}$ **ou** $\boxed{u_n = u_1+(n-1)r}$ **ou** $\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}$ avec $p\in \mathbb{N}$

Méthode : Démontrer qu'une suite est arithmétique ou non
Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique on calcule l'écart entre deux termes consécutifs quelconques et il faut que le résultat soit une constante (il s'agira de la raison si tel est le cas!).
C'est à dire : on calcule $u_{n+1}-u_n$ et il faut que le résultat soit constant.

Exemple 1:
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=-2n+4$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n=-2(n+1)+4-(-2n+4)=-2n-2+4+2n-4=-2$
Le résultat étant constant on peut affirmer que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=-2$.

Exemple 2:
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2+3$.
Pour tout entier nature n , $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+3-(n^2+3)=n^2+2n+1+3-n^2-3 = 2n+1$
Le résultat n'est pas constant donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Remarque: on aurait pu également calculer $u_0=0^2+3=3$; $u_1=1^2+3=4$; $u_2=2^2+3=7$
et remarquer que l'écart entre u_0 et u_1 est de 1 , et l'écart entre u_1 et u_2 est de 3 , donc (u_n) ne peut pas être une suite arithmétique.

II- Suites géométriques

Rappel très important :

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier par : $1+\frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par : $1-\frac{t}{100}$.

Exemple de situation faisant intervenir une suite géométrique :
En janvier 2015 une entreprise produit 300 sacs en cuir par mois. Elle prévoit d'augmenter tous les mois sa production de 2%. On note u_n le nombre de sacs produits le n-ième mois après janvier 2015. $u_0=300$

1. Calculer u_1 et u_2 : $u_1=300\times1{,}02=306$ $u_2=306\times1{,}02\simeq312$
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n : $u_{n+1} = u_n\times1{,}02$
3. Combien de sacs seront produits en mars 2016 ? $u_{14}=300\times1{,}02^{14}=306\times1{,}02^{13}\simeq396$
4. Exprimer u_n en fonction de n : $u_n=300\times1{,}02^n=306\times1{,}02^{n-1}$

Définition :
Une suite **géométrique** est une suite dont chaque terme est obtenu en **multipliant le même nombre** q au terme précédent.
q est appelé **la raison** de la suite dans ce cas là.

Schéma : $u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3$ .... $u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$

On a donc : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1}=u_n\times q}$

Remarques :

- Si $U_0 > 0$ et si la raison q est telle que **0 <** q **< 1** , la suite est **décroissante.** Si la raison q est telle que q **> 1**, la suite est **croissante.**
- Si $U_0 < 0$ et si la raison q est telle que **0 <** q **< 1** , la suite est **croissante.** Si la raison q est telle que q **> 1**, la suite est **décroissante.**
- Si q<0, la suite n'est ni croissante, ni décroissante

Propriétés importantes :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n :

$\boxed{u_n=u_0\times q^n}$ **ou** $\boxed{u_n=u_1\times q^{n-1}}$ **ou** $\boxed{u_n=u_p\times q^{n-p}}$ avec $p\in\mathbb{N}$

Méthode : Démontrer qu'une suite est géométrique ou non
Pour montrer qu' une suite (u_n) est géométrique il faut essayer d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et voir si on est sous la forme $u_{n+1}=u_n\times q$ avec $q\in\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique , le plus simple est de calculer les premiers termes et de constater qu'on ne peut pas passer d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre.

Exemple 1:
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{3^{n+1}}{5^n}$.

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+2}}{5^{n+1}}=\frac{3^{n+1}\times3^1}{5^n\times5^1}=\frac{3^{n+1}}{5^n}\times\frac{3}{5} = u_n\times\frac{3}{5}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}$

Exemple 2:
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2+3$.

On a $u_0=0^2+3=3$; $u_1=1^2+3=4$; $u_2=2^2+3=7$. $\frac{u_1}{u_0}=\frac{4}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{7}{4}$ et $\frac{4}{3}\neq\frac{7}{4}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exemple 3:
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1}=0{,}96u_n+300$ et $u_0=5000$.
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-7500$.

1. Montrons que (v_n) est une suite géométrique:
2. Calculer v_0 .
3. Exprimer v_n en fonction de n .
4. Exprimer u_n en fonction de n .

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-7500=0{,}96u_n+300-7500=0{,}96u_n-7200$

   Donc $v_{n+1}=0{,}96(v_n+7500)-7200$ car $u_n=v_n+7500$
   $v_{n+1}=0{,}96v_n+7200-7200$
   $v_{n+1}=0{,}96v_n$
2. $v_0=u_0-7500=5000-7500=-2500$
3. (v_n) est une suite géométrique , on a donc pour tout entier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=-2500\times 0{,}96^n$.
4. Pour tout entier naturel n on a $u_n=v_n+7500$, donc $u_n=-2500\times 0{,}96^n+7500$.

III- Somme d'une suite arithmétique / somme d'une suite géométrique

Une nouvelle notation:

En mathématiques le symbole $\sum$ symbolise une somme.

Par exemple : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ peut s'écrire $\sum_{k=1}^{10} k$ (somme des k pour k allant de 1 à 10)

$\sum_{k=0}^{4}(k+5)$ = 5 + 6 + 7 + 8 + 9. (somme des k + 5 pour k allant de 0 à 4)

$u_0+u_1+....+u_{n-1}+u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$ (somme des u_k pour k allant de 0 à n)

Un peu d'histoire:

Une anecdote relate comment *Gauss* a su faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss*, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux.

Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

Propriété :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$1+2+3+\ldots\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ou avec la notation de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exemples:

Calculer 1+2+3+............+75 : $\dfrac{75\times 76}{2}=2850$

Calculer 21 + 22 + 23 + …........... + 75 : $2850-(1+2+3+\ldots.+20)=2850-\displaystyle\sum_{k=0}^{20} k=2850-\frac{20\times 21}{2}=2640$

Propriété :

On considère une suite **arithmétique** (u_n) de raison r et de premier terme u_0 :

$u_0+u_1+\ldots.+u_{n-1}+u_n=(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$ ou avec la notation de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$

En français : $u_0+u_1+\ldots.+u_{n-1}+u_n=\textit{nombre de termes}\times\dfrac{1\,\textit{er terme}+\textit{dernier terme}}{2}$

Exemples : - (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison $r = 3$.

Calculer $u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{12}$:

$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{12}=13\times\dfrac{u_0+u_{12}}{2}$ $\quad u_0=5 \quad u_{12}=u_0+12\times r=5+12\times 3=41$

$=13\times\dfrac{5+41}{2}=299$

- (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 24$ et de raison $r = 10$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} u_k = u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_8 = 9\times\frac{u_0+u_8}{2}$ $\quad u_0=14 \quad u_8=24+10\times 7=94$

$=9\times\dfrac{14+94}{2}=486$

Propriété :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$1+q+q^2+\ldots\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ ou avec la notation de la somme $$\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété :

On considère une suite **géométrique** (u_n) de raison q et de premier terme u_0 :

$$u_0+u_1+\ldots.+u_{n-1}+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ ou avec la notation de la somme $$\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

En français : $$u_0+u_1+\ldots.+u_{n-1}+u_n=premier\ terme\times\frac{1-q^{nombre\, de\ termes}}{1-q}$$

Exemples : - (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison q = 0,5.

Calculer $v_0+v_1+\ldots\ldots+v_9$:

$$v_0+v_1+\ldots\ldots+v_9=5\times\frac{1-0{,}5^{10}}{1-0{,}5} \simeq 9{,}99$$

- (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 = -4 et de raison q = 1,2.

Calculer $\sum_{k=3}^{11} u_k$ =u_3+u_4+....... $+u_{11}$ $u_3=-4\times1{,}2^3$ =-6,912

$$\sum_{k=3}^{11} u_k=-6{,}912\times\frac{1-1{,}2^9}{1-1{,}2} \simeq -143{,}76$$