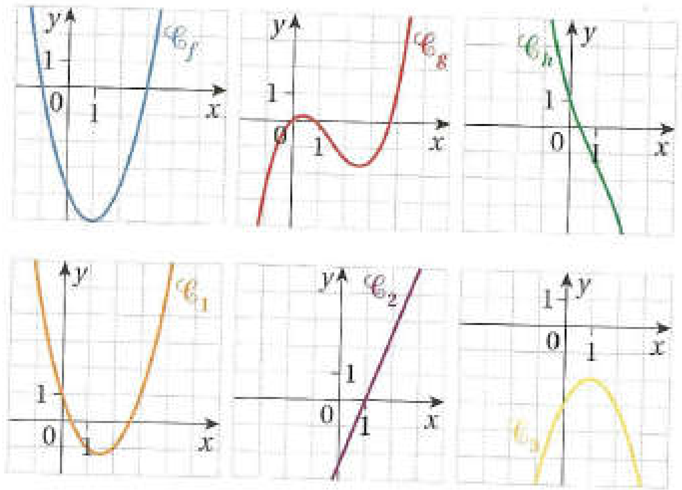
Application de la dérivation

I- lien entre f et f'

Propriétés :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est **croissante** sur un intervalle $[a;b]$ de I est équivalent à f' est **positive** sur cet intervalle $[a;b]$
- f est **décroissante** sur un intervalle $[a;b]$ de I est équivalent à f' est **négative** sur cet intervalle $[a;b]$
- f est **constante** sur un intervalle $[a;b]$ de I est équivalent à f' est nulle sur cet intervalle $[a;b]$

Exemple :

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentatives des fonctions dérivées des fonctions f, g et h de représentations respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Faire correspondre chaque fonction avec sa fonction dérivée.



f est décroissante sur $]-\infty;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$ donc f' doit être négative sur $]-\infty;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$.
Donc f' est représentée par C_2.

g est croissante sur $]-\infty;0,5]$ décroissante sur $[0,5;2,5]$ puis croissante sur $[2,5;+\infty[$ donc g' doit être positive sur $]-\infty;0,5]$, négative sur $[0,5;2,5]$ puis positive sur $[2,5;+\infty[$.
Donc g' est représentée par C_1.

h est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc h' est négative sur $\mathbb{R}$.
Donc h' est représentée par C_3.

II- Etude de fonctions

<u>Méthode pour dresser le tableau de variations d'une fonction:</u>

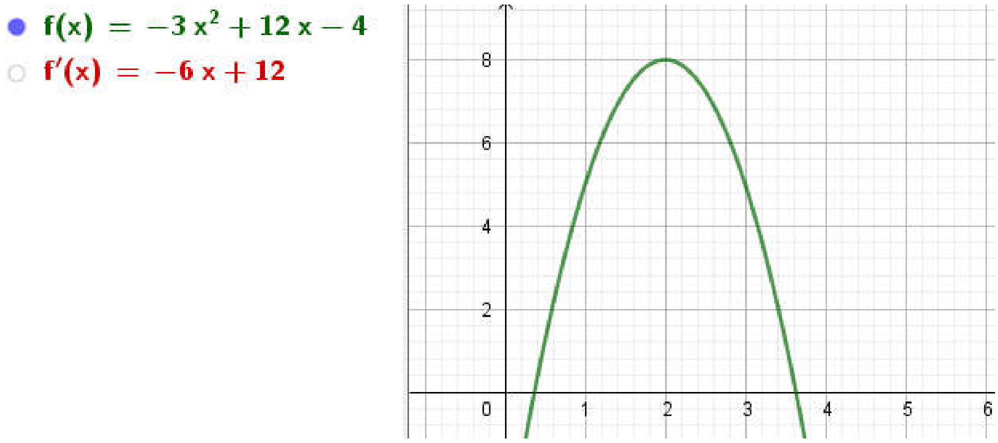
Pour établir le tableau de variations d'une fonction f il faut :
- Calculer la dérivée f'
- Etudier le signe de la dérivée
- En déduire les variations de f
- Calculer certaines images de f pour « compléter les flèches »

<u>Remarque :</u> Toujours vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou de geogebra la cohérence du tableau de variations avec la représentation graphique de la fonction que l'on souhaite étudier. Geogebra permet également de vérifier le calcul de la dérivée.

1. Etude d’une fonction polynôme de degré 2

Soit f la fonction définie sur [2;10] par $f(x)=-3x^2+12x-4$.
Dressons le tableau de variations complet de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

Dans un premier temps sur geogebra j’affiche la fonction et calcule la dérivée cela permettra de vérifier les différentes étapes.



Retrouvons cela par le calcul :

$f'(x)=-3\times 2x+12\times 1-0=-6x+12$
On étudie alors le signe de f' :

f' est une fonction affine avec un coefficient directeur négatif (-6) donc elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ et on peut en déduire qu’elle est positive puis négative reste à savoir quand elle s’annule : $-6x+12=0$ pour $x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de f'		+	0	−	
Variations de f		↗	8	↘	

$f(2)=-3\times 2^2+12\times 2-4=8$

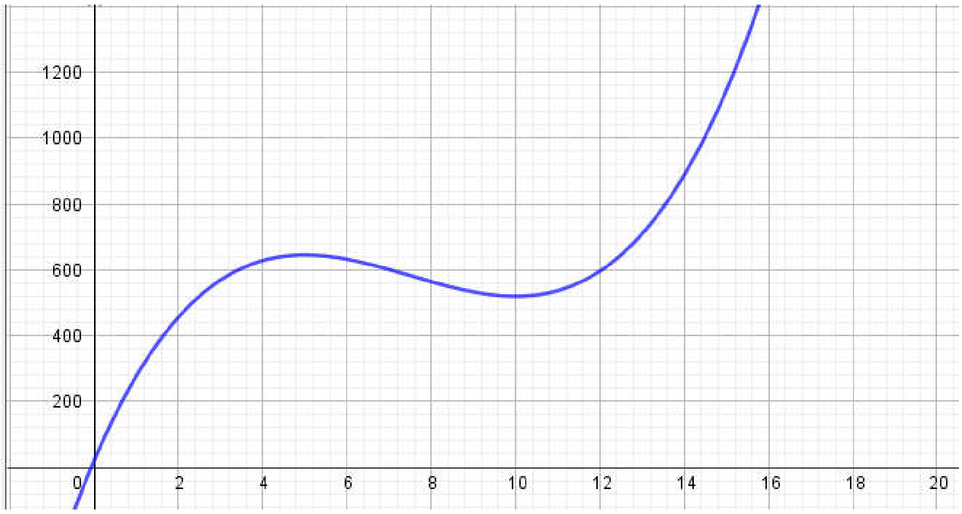
2. Etude d'une fonction polynôme de degré 3

Soit g la fonction définie sur $[0;20]$ par $g(x)=2x^3-45x^2+300x+20$.
Dressons le tableau de variations complet de cette fonction.

Dans un premier temps sur geogebra j'affiche la fonction et calcule la dérivée cela permettra de vérifier les différentes étapes.

$g(x) = 2x^3 - 45x^2 + 300x + 20$

$g'(x) = 6x^2 - 90x + 300$



Retrouvons cela par le calcul :

$g'(x)=2\times 3x^2-45\times 2x+300\times 1+0=6x^2-90x+300$

On étudie alors le signe de g' :

g' est une fonction du second degré avec un a positif (6) sa représentation graphique est donc une parabole tournée vers le haut (cela nous servira à compléter le tableau de signe).
Reste à résoudre $6x^2-90x+300=0$.

$\Delta = (-90)^2-4\times 6\times 300=900$

$\Delta > 0$ il y a donc 2 solutions : $x_1=\dfrac{-(-90)-\sqrt{900}}{2\times 6}=5$ et $x_2=\dfrac{-(-90)+\sqrt{900}}{2\times 6}=10$

x	0		5		10		20
Signe g'		+	0	−	0	+	
Variations g	20	↗	645	↘	520	↗	4020

$g(0)=2\times 0^3-45\times 0^2+300\times 0+20=20$

$g(5)=2\times 5^3-45\times 5^2+300\times 5+20=645$

$g(10)=2\times 10^3-45\times 10^2+300\times 10+20=520$

$g(20)=2\times 20^3-45\times 20^2+300\times 20+20=4020$

3.Etude d'une fonction rationnelle

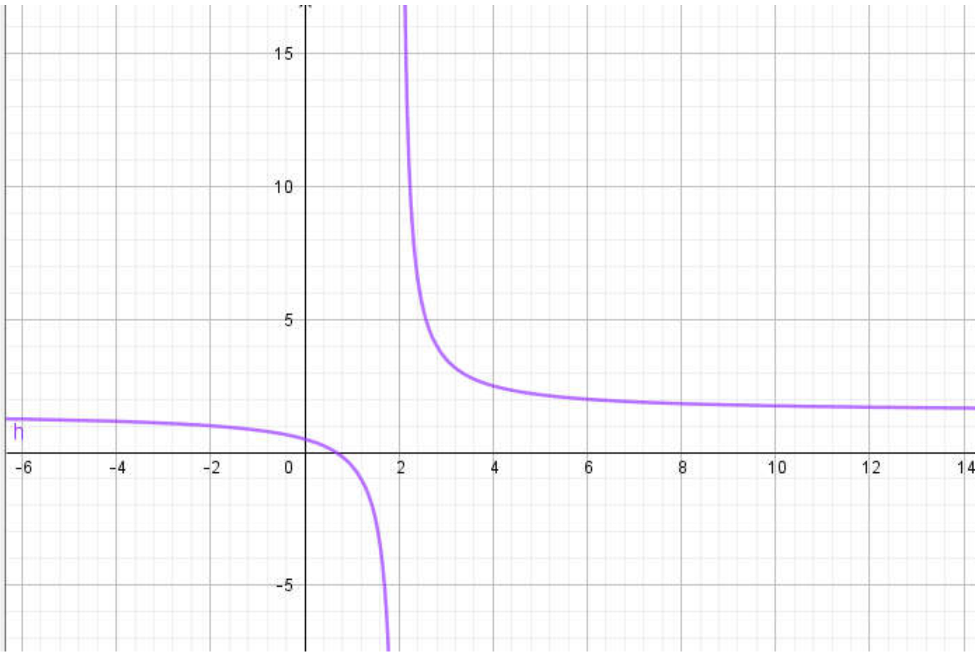
Soit h la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{3x-2}{2x-4}$.

Dressons le tableau de variations complet de cette fonction :

Dans un premier temps sur geogebra j'affiche la fonction et calcule la dérivée cela permettra de vérifier les différentes étapes.

$h(x) = \dfrac{3x-2}{2x-4}$

$h'(x) = -\dfrac{2}{x^2-4x+4}$



Retrouvons cela par le calcul :

$h'(x)=\dfrac{3(2x-4)-2(3x-2)}{(2x-4)^2}=\dfrac{6x-12-6x+4}{(2x-4)^2}=\dfrac{-8}{(2x-4)^2}$. (Le résultat est identique que sur geogebra sauf que le logiciel a développé le dénominateur et simplifié par 4, ce qu'il ne faut pas faire vous allez voir pourquoi!)

On étudie alors le signe de h' , ici c'est facile !! le numérateur est négatif et le dénominateur est positif (c'est un carré! D'où l'intérêt de ne pas développer le dénominateur!)
Cependant attention à la valeur interdite !!!! Le dénominateur ne peut pas être égal à 0 ! Dans un tableau une valeur interdite est représentée par une double barre.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe -8		$-$		$-$	
Signe $(2x-4)^2$		$+$	0	$+$	
Signe f'		$-$	‖	$-$	
Variations f		↘	‖	↘	