FONCTION EXPONENTIELLE

Compte tenu de la situation exceptionnelle, nous ne traiterons pas les démonstrations de ce chapitre qui sont présentes dans votre manuel

I. Généralités

Théorème-Définition : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout nombre réel x, $f'(x)=f(x)$ et $f(0)=1$.
On appelle cette fonction la fonction exponentielle.

Notation : $f(x)=\exp(x)$ ou $f(x)=\mathrm{e}^x$ (on utilisera plus souvent cette dernière notation)
On a donc $\mathrm{e}^0=1$ et pour tout nombre réel x, $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$

Remarque :
$\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ et $\mathrm{e}\approx 2{,}718$

Propriétés algébriques :
Pour tous nombres réels x et y, on a :

- $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{e^y}$
- $(\mathrm{e}^x)^n=\mathrm{e}^{nx}$

Exemples :
Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$

$A=\mathrm{e}^{2x}\times\mathrm{e}^{3+5x}\times\mathrm{e}$ $\quad$ $B=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$ $\quad$ $C=(\mathrm{e}^{3x})^2\times\mathrm{e}^{1-3x}$

Pour vous entraîner :
Exercice 1 ou copier le lien https://mathenpoche.sesamath.net/?page=terminale#terminale_1_5_4_sesabibli/5d24fe5170dffc21dad32b5a

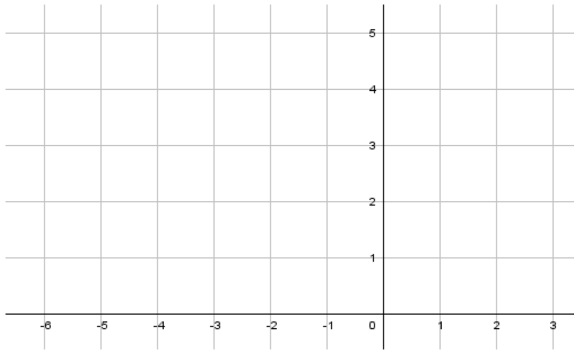
Exercice 2 ou copier le lien https://mathenpoche.sesamath.net/?page=terminale#terminale_1_5_4_sesabibli/5d263e3f70dffc21dad32b60

II. Étude de la fonction exponentielle

Propriété : Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

On peut en déduire le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)=e^x$				$+$			
$f(x)=e^x$			1		e		



Conséquences :
Pour tous nombres réels a et b :

- $a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$
- $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$

Exemples :

Résoudre :

$2\times e^{3x-1}=2$	$e^{-2x+5}>e$
$e^{3x-1}=1$	$e^{-2x+5}>e^1$
$e^{3x-1}=e^0$	$-2x+5>1$
$3x-1=0$	$-2x>-4$
$3x=1$	$x<2$
$x=\frac{1}{3}$	$x\in\ ]-\infty;2[$

Pour vous entraîner :
Exercice 3 ou copier le lien https://mathenpoche.sesamath.net/?page=terminale#terminale_1_5_4_sesabibli/5d31840870dffc21dad33d9a

Exercice 4 ou copier le lien https://mathenpoche.sesamath.net/?page=terminale#terminale_1_5_4_sesabibli/5e46b2a111bf937495a7e6f9

Propriété :
Soit u une fonction définie et dérivable sur I, alors pour tout $x \in$ I, $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)\times e^{u(x)}$
En particulier : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(e^{ax+b}\right)'=a\times e^{ax+b}$ avec a et b des nombres réels.

Exemples :
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x)=e^{5x+2}$

De la forme e^U avec
$U(x)=5x+2 \quad U'(x)=5$

$f'(x)=U'\times e^U=5\times e^{5x+2}$

$g(x)=xe^{-x}$

g est de la forme UV avec $U(x)=x$ et $V(x)=e^{-x}$
$U'(x)=1$ $\quad V'(x)=-1\times e^{-x}=-e^{-x}$

$g'(x)=U'V+V'U=1\times e^{-x}+(-e^{-x})\times x=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$.

$$h(x)=\frac{2x-1}{3\,\mathrm{e}^{2x}}$$

h est de la forme $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$ avec $\mathrm{U}(x)=2x-1$ et $\mathrm{V}(x)=3\,\mathrm{e}^{2x}$

$\mathrm{U}'(x)=2$ $\mathrm{V}'(x)=3\times2\times\mathrm{e}^{2x}=6\,\mathrm{e}^{2x}$

$$h'(x)=\frac{\mathrm{U}'\mathrm{V}-\mathrm{V}'\mathrm{U}}{\mathrm{V}^2}=\frac{2\times3\,\mathrm{e}^{2x}-6\,\mathrm{e}^{2x}\times(2x-1)}{(3\,\mathrm{e}^{2x})^2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}(6-6(2x-1))}{9\,\mathrm{e}^{4x}}=\frac{\mathrm{e}^{2x}(6-12x+6)}{9\mathrm{e}^{4x}}$$

$$h'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-2x}(12-12x)}{9}=\frac{\mathrm{e}^{-2x}(4-4x)}{3}$$

Pour vous entraîner, vous pouvez faire les exercices de la partie « calcul de dérivées » et « étude de fonctions » de ce lien. Ou copier le lien https://mathenpoche.sesamath.net/?page=terminale#terminale_1_5_4