

Dans ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I. Vecteur directeur et équation cartésienne de droite

Définition : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Conséquence : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition : Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs, on appelle déterminant de \vec{u} et \vec{v} noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$ le nombre réel défini par $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx'$

Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemple : On considère les points R, S et T de coordonnées : $R(-4; 4)$, $S(5; 8)$, $T(-2; 0)$.
Les points R, S et T sont-ils alignés ?

$$\begin{array}{lll} \vec{RS}(5 - (-4); 8 - 4) & \vec{RT}(-2 - (-4); 0 - 4) & \det(\vec{RS}; \vec{RT}) = 9 \times (-4) - 2 \times 4 = -44 \\ \vec{RS}(9; 4) & \vec{RT}(2; -4) & \end{array}$$

Le déterminant entre \vec{RS} et \vec{RT} est différent de 0 donc les vecteurs \vec{RS} et \vec{RT} ne sont pas colinéaires. Donc les points R, S et T ne sont pas alignés.

Propriété :

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x; y)$ d'une droite d vérifient une relation $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels.

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 1 : En utilisant le déterminant

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $C(4; -3)$ et $D(2; 1)$

Soit $M(x; y)$ un point appartenant à la droite (d) . Par conséquent les points M, C et D sont alignés et donc le déterminant entre \vec{CD} et \vec{CM} est égal à 0.

$$\vec{CD}(-2; 4) \text{ et } \vec{CM}(x - 4; y + 3)$$

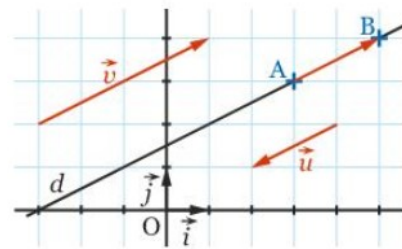
$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \det(\vec{CD}; \vec{CM}) &= 0 & -2 \times (y + 3) - (x - 4) \times 4 &= 0 \\ & & -2y - 6 - 4x + 16 &= 0 \\ & & -4x - 2y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (CD) est : $-4x - 2y + 10 = 0$

Définition :

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout représentant du vecteur \overrightarrow{AB} où A et B sont deux points quelconques distincts de la droite d .

Sur le schéma ci-contre les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \overrightarrow{AB} sont des vecteurs directeurs de (AB) .



Donnons les coordonnées des vecteurs ci-contre graphiquement:

$$\vec{u}(-2;-1) \quad \vec{v}(4;2) \quad \overrightarrow{AB}(2;1)$$

On peut voir que tous les vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires entre eux.

Propriété :

Soit d une droite dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$.

Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un **vecteur directeur** de d .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 2 : en utilisant les coordonnées d'un vecteur directeur

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par les points $C(4;-3)$ et $D(2;1)$:

(d) passe par les points C et D donc \overrightarrow{CD} est un vecteur directeur de (d) .

$$\overrightarrow{CD}(-2;4) \text{ donc } -b=-2 \text{ et } a=4 \\ b=2 \text{ et } a=4$$

Par conséquent la droite (CD) a pour équation cartésienne : $4x+2y+c=0$

Reste à déterminer c :

Pour cela on prend un point appartenant à (d) par exemple le point $C(4;-3)$. Puisque le point C appartient à la droite (d) ses coordonnées doivent vérifier l'équation de (d) on peut donc remplacer x et y par les coordonnées de C afin de déterminer la valeur de c :

$$4 \times 4 + 2 \times (-3) + c = 0 \quad 16 - 6 + c = 0 \quad 10 + c = 0 \quad c = -10$$

Par conséquent une équation cartésienne de (d) est $4x+2y-10=0$

Remarque: On ne trouve pas exactement la même équation cartésienne qu'avec la première méthode, il existe une infinité d'équations cartésiennes pour une même droite mais on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un nombre réel non nul.

Exercice type :

1. Est-ce que le point $E(5;-3)$ appartient à (CD) ?

(CD) a pour équation cartésienne $4x+2y-10=0$

Si E appartient à (CD) alors les coordonnées de E doivent vérifier l'équation de (CD) :

$$4 \times 5 + 2 \times (-3) - 10 = 20 - 6 - 10 = 4 \text{ on ne tombe pas sur 0 donc E n'appartient pas à (CD).}$$

2. Déterminer les coordonnées du point F intersection entre (CD) et l'axe des ordonnées.

Si F appartient à l'axe des ordonnées son abscisse est égale à 0.

De plus F appartient à (CD) , on va donc remplacer x par 0 dans l'équation cartésienne de (CD) pour trouver l'ordonnée de F:

$$4 \times 0 + 2y - 10 = 0 \quad 2y - 10 = 0 \quad 2y = 10 \quad y = 5$$

Par conséquent $F(0;5)$

3. Déterminer les coordonnées du point G intersection entre (CD) et l'axe des abscisses.

Si G appartient à l'axe des abscisse son ordonnée est égale à 0.

De plus G appartient à (CD), on va donc remplacer y par 0 dans l'équation cartésienne de (CD) pour trouver l'ordonnée de F:

$$4x + 2 \times 0 - 10 = 0 \quad 4x - 10 = 0 \quad 4x = 10 \quad x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Par conséquent $F(\frac{5}{2}; 0)$

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 parallèle à (CD) et passant par $E(5; -3)$.

d_2 est parallèle à (CD) donc les vecteurs directeurs de (CD) sont également des vecteurs directeurs de d_2 en particulier $\overrightarrow{CD}(-2; 4)$.

On a donc : $-b = -2$ et $a = 4$
 $b = 2$ et $a = 4$

Donc d_2 a pour équation cartésienne $4x + 2y + c = 0$

Or $E(5; -3)$ appartient à d_2 donc : $4 \times 5 + 2 \times (-3) + c = 0$
 $20 - 6 + c = 0 \quad 14 + c = 0 \quad c = -14$

Donc d_2 a pour équation cartésienne $4x + 2y - 14 = 0$

Remarque : L'équation réduite d'une droite nous donne également les coordonnées d'un vecteur directeur.

En effet si une droite d a pour équation réduite $y = mx + p$ alors on peut en déduire que le vecteur $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de d .

II. Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Vecteur normal : On dit qu'un vecteur \vec{n} est un vecteur normal à une droite (d) si la direction de \vec{n} est orthogonale à (d) .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 3 : en utilisant le produit scalaire

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$

Soit $M(x; y)$ appartenant à (d) alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ car \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{AM}\left(x - \frac{2}{3}; y - \frac{1}{6}\right) \text{ et } \vec{n}(1; -1)$$

On a donc : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) \times 1 + \left(y - \frac{1}{6}\right) \times (-1) = 0$$
$$x - \frac{2}{3} - y + \frac{1}{6} = 0 \quad ; \quad x - y - \frac{3}{6} = 0 \quad ; \quad x - y - \frac{1}{2} = 0$$

Une équation cartésienne de (d) est alors : $x - y - \frac{1}{2} = 0$

Propriété : Soit (d) la droite d'équation $ax + by + c = 0$ alors, le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à la droite (d) .

Déterminer une équation cartésienne d'une droite méthode 4 : en utilisant les coordonnées d'un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -1)$

$\vec{n}(1; -1)$ et on sait que $\vec{n}(a; b)$, on a directement : $a=1$ et $b=-1$

Par conséquent une équation cartésienne de (d) est sous la forme : $x - y + c = 0$

Reste à déterminer la valeur de c pour cela on utilise le point $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + c = 0 \quad \frac{3}{6} + c = 0 \quad c = -\frac{1}{2}$$

Une équation cartésienne de (d) est donc : $x - y - \frac{1}{2} = 0$

Exercice type :

On considère les droites (d_1) , (d_2) , (d_3) et (d_4) d'équations respectives $3x - 2y + 1 = 0$, $-5x + y + 4 = 0$, $6x + 9y + 4 = 0$ et $-x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0$

1. Associer les droites parallèles et les droites perpendiculaires entre elles.

(d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(2; 3)$

(d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u}_2(-1; -5)$

(d_3) a pour vecteur directeur $\vec{u}_3(-9; 6)$

(d_4) a pour vecteur directeur $\vec{u}_4\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$

A retenir:

- Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont **colinéaires** donc si le **déterminant** entre ces vecteurs est égal à 0.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont **orthogonaux** donc si le **produit scalaire** entre ces vecteurs est égal à 0.

$$\det(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 2 \times (-5) - (-1) \times 3 = -7 \text{ donc } (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas parallèles.}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 \times (-1) + 3 \times (-5) = -17 \text{ donc } (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas perpendiculaires.}$$

$$\det(\vec{u}_1; \vec{u}_3) = 2 \times 6 - (-9) \times 3 = 39 \text{ donc } (d_1) \text{ et } (d_3) \text{ ne sont pas parallèles.}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 2 \times (-9) + 3 \times 6 = 0 \text{ donc } (d_1) \text{ et } (d_3) \text{ sont perpendiculaires.}$$

$$\det(\vec{u}_1; \vec{u}_4) = 2 \times (-1) - \left(-\frac{2}{3}\right) \times 3 = 0 \text{ donc } (d_1) \text{ et } (d_4) \text{ sont parallèles.}$$

On peut en déduire que (d_3) et (d_4) sont perpendiculaires et que (d_2) n'est ni parallèle ni perpendiculaire avec (d_3) et (d_4)

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_5) perpendiculaire à (d_2) passant par $A(-1; 2)$

(d_5) est perpendiculaire à (d_2) donc un vecteur directeur de (d_2) est un vecteur normal de (d_5)

Par conséquent $\vec{u}_2(-1; -5)$ est un vecteur normal de (d_5) et il vient que $a = -1$ et $b = -5$.

Une équation cartésienne de (d_5) est sous la forme $-x - 5y + c = 0$

Pour déterminer c on se sert du point A puisque A appartient à (d_5) :

$$-(-1) - 5 \times 2 + c = 0 \quad 1 - 10 + c = 0 \quad c = 9.$$

Une équation cartésienne de (d_5) est alors : $-x - 5y + 9 = 0$

III. Équation de cercle

Soit un cercle de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$ et de rayon r et un point $M(x ; y)$ appartenant à ce cercle

Théorème : Une équation d'un cercle de centre $\Omega(\alpha ; \beta)$ et de rayon r est :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Déterminer une équation du cercle C méthode 1 : en utilisant les coordonnées de son centre et son rayon :

Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 3.

Exercice type :

Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, déterminer les coordonnées de son centre et son rayon

Théorème : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble de points M tels que :
$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

Démonstration : Si M est en A ou en B, le résultat est évident.

Déterminer une équation du cercle C méthode 2 : en utilisant les coordonnées des extrémités d'un diamètre

Déterminer une équation du cercle C de diamètre [AB] avec $A(-1;2)$ et $B(1;3)$ puis déterminer les coordonnées de son centre et son rayon