第二章 随机变量及其分布

- 1、随机变量
- 2、离散型随机变量
- 3、随机变量的分布函数
- 4、连续型随机变量
- 5、随机变量函数的分布

对于一个随机试验，我们所关心的往往是与所研究的特定问题有关的某个或某些量，而这些量就是随机变量.

实例: 做试验抛一枚均匀硬币，其样本空间

S＝{H,T}

可规定映射

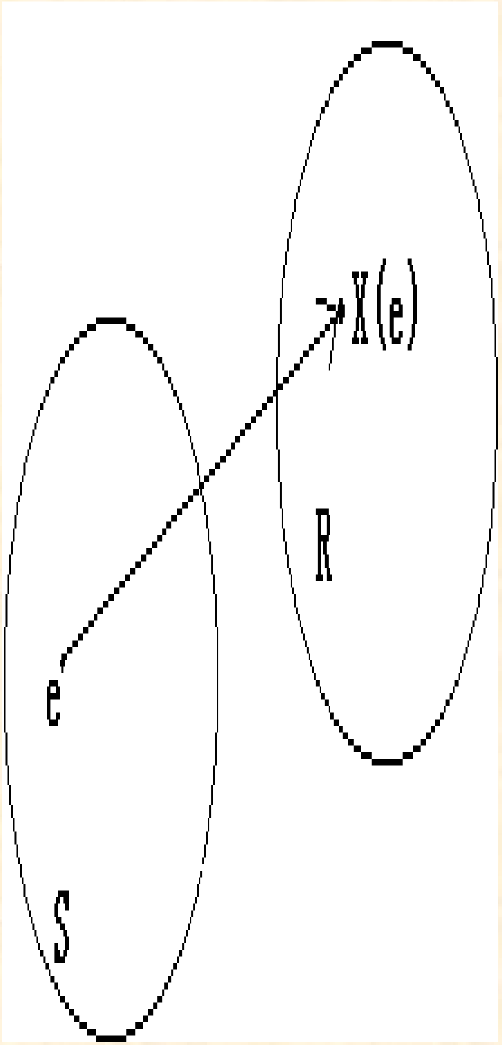
$$X = X(e) = \begin{cases} 1, & e = H \\ 0, & e = T \end{cases}$$

随机变量实际上是定义在样本空间上的一个实函数。

$$X:\ S \to R$$

2.1 随机变量

定义. 设S是试验的样本空间，如果量X是定义在S上的一个单值实值函数即对于每一个e∈S，有一实数X=X(e)与之对应，则称X为随机变量。随机变量常用X、Y、Z 或ξ、η、ζ等表示。



随机变量的特点:

1 X的部分可能取值可用来描述随机事件

2 X的每个可能取值所对应的事件是两两互不相容的

随机变量的例子1

例1：引入适当的随机变量描述下列事件：

①将3个球随机地放入三个格子中，事件
A={有1个空格}，B={有2个空格}，
C={全有球}。

②进行5次试验，事件 D={试验成功一次}，
F={试验至少成功一次}，G={至多成功3次}

解：① 设X为将3个球随机地放入三个格子后的空格数，则

A={X=1}，B={X=2}，C={X=0}

② 设Y为进行5次试验中成功的次数，则

D={Y=1}，F={Y≥1}，G={Y≤3}

随机变量的例子2

例2 掷一颗骰子，令 X：出现的点数．则 X 就是一个随机变量．它的取值为1，2，3，4，5，6．

$$\{X \le 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{X \text{ 取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件．

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{出现偶数点;} \\ 0 & \text{出现奇数点.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{点数为6;} \\ 0 & \text{点数不为6.} \end{cases}$$

随机变量的例子3

例3 上午 8:00～9:00 在某路口观察，令：

Y：该时间间隔内通过的汽车数.

则 Y 就是一个随机变量，它的取值为 0，1，…． .

$$\{Y < 100\}$$

表示通过的汽车数小于100辆这一随机事件；

$$\{50 < Y \le 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件.

注意 Y 的取值是可列无穷个！

随机变量的例子4

例 4 观察某电子元件的寿命（单位：小时），令

Z：该电子元件的寿命.

则Z 就是一个随机变量．它的取值为所有非负实数.

$$\{Z \le 500\}$$

表示该电子元件的寿命不超过500小时这一随机事件.

$$\{Z > 1000\}$$

表示该电子元件的寿命大于 1000小时这一随机事件.

注意 Z 的取值是不可列无穷个！

第一节 随机变量小结

知识点

1、随机变量的概念

考点

1、会用随机变量表示事件

随机变量的分类

随机变量 $\begin{cases} \text{离散型随机变量} \\ \text{非离散型} \begin{cases} \text{连续型} \\ \text{奇异型（混合型）} \end{cases} \end{cases}$

2.2离散型随机变量

定义　若随机变量X取值$x_1, x_2, \ldots, x_n, (\ldots)$且取这些值的概率依次为$p_1, p_2, \ldots, p_n, (\ldots,)$ 则称X为离散型随机变量，而称

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad (k=1, 2, \ldots)$$

为X的分布律（列）或概率分布。可表为

$$p_k=P\{X=x_k\}, \quad (k=1, 2, \ldots),$$

或

X	x_1	x_2	…	x_K	…
P_k	p_1	p_2	…	p_k	…

2. 分布律的性质

(1) 非负性： $p_k \geq 0,\ k=1, 2, \ldots$

(2) 归一性： $\sum_k p_k = 1$

例0 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

求常数c。

解： 由分布律的性质，得 $1=\sum_{n=1}^{\infty} P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{4}\right)^n$

该级数为等比级数，故有

$$=\frac{c/4}{1-1/4}=\frac{c}{3}$$

所以 c=3

随机变量分布律的例子1

例1 设袋中有5只球，其中有2只白3只黑。现从中任取3只球(不放回)，求抽得的白球数X为k的概率。

解: X的可能取值为0，1，2

$$P\{X=k\}=\frac{C_2^k C_3^{3-k}}{C_5^3}.\quad k=0,1,2$$

超几何分布

相关事件的概率

作业5.1和5.2参照此例题

随机变量分布律的例子2　　　例3

例2　从1～10这10个数字中随机取出5个数字，令 X：取出的5个数字中的最大值．试求X的分布律．

解：X 的可能取值为**5，6，7,8，9，10**

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^{4}}{C_{10}^{5}}\qquad k=5,\ 6,\ \cdots,\ 10.$$

具体写出，即可得 X 的分布律：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

随机变量分布律的例子3

例3. 某射手对目标独立射击5次，每次命中目标的概率为p，以X表示命中目标的次数，求X的分布律。

解：设Ai——第i次射击时命中目标，i=1,2,3,4,5

则$A_1,A_2,\ldots A_5$相互独立且$P(A_i)$=p,i=1,2,…5.

X的可能取值为0,1,2,3,4,5

$$P\{X=0\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5})=(1-p)^5$$

$$P\{X=1\}=P\{A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup\ldots\}=5p(1-p)^4$$

$$P\{X=2\}=P\{A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}\cup\ldots\}=C_5^2P^2(1-P)^3$$

$$P\{X=k\}=C_5^k p^k(1-p)^{5-k}\qquad k=0,1,\ldots,5$$

离散型随机变量相关事件的概率

$$P(X \in (a,b)) = \sum_{x_i \in (a,b)} P(X = x_i)$$

例1　设随机变量X的分布律为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.3 & 0.12 & 0.1 & 0.03 \end{pmatrix}$$

试求：　$P(X \le 4), P(2 \le X \le 5), P(X \ne 3)$

解：0.87　　0.72　　0.7　　　　**作业6.1参照此例**

几个常用的离散型分布

1、（0−1）分布

若以**X**表示进行一次试验中事件**A**发生的次数，则称**X**服从（**0**—**1**）分布**(**两点分布**)**

X的分布律为

$$P\left\{X=k\right\}=\mathrm{C}_1^k p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$$

X	1	0
p_k	p	$1-p$

$$\boldsymbol{X}=\begin{cases}\mathbf{1} & \text{若事件}A\text{发生}\\ \mathbf{0} & \text{若事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

2、二项分布

例2

（二）定义 设将试验独立重复进行n次，每次试验中，事件A发生的概率均为p，则称这n次试验为*n*重伯努利试验.

若以X表示n重伯努利试验中事件A发生的次数，则称X服从参数为n, p的二项分布。
记作X~B（n, p), 其分布律为：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,\ldots,n)$$

（0—1）分布是二项分布的特例.

二项分布分布律的证明

二项分布的例子

非负性

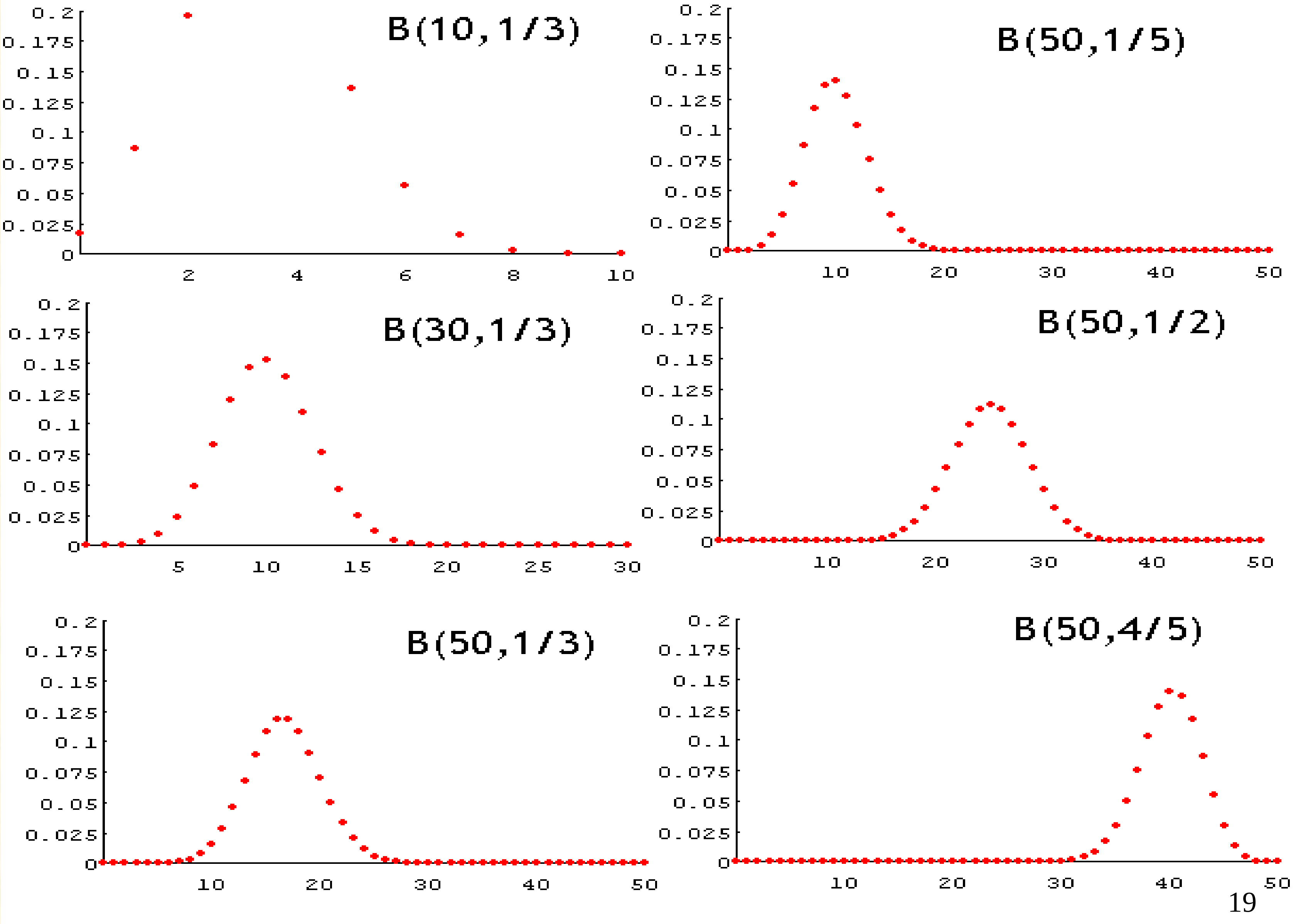
$$p_k = C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k} \geq 0 \qquad \left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n\right)$$

归一性

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k \left(1-p\right)^{n-k} = \left[p+\left(1-p\right)\right]^n = 1$$

几个二项分布的分布律图示



二项分布的例子1

例 1 一张考卷上有5道选择题，每道题列出4个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测能答对4道题以上的概率是多少？

解： 答5道题相当于做5重Bernoulli试验，

$$A = \{答对一道题\},\quad 则\quad P(A) = \frac{1}{4}$$

设X表示该学生靠猜测能答对的题数，

则 $X \sim B\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$

所以

$$P\{至少能答对4道题\} = P\{X \geq 4\}$$

$$= P\{X = 4\} + P\{X = 5\}$$

$$= C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{1}{64}$$

二项分布的例子2

作业5.3和5.4参照此例题

例2. 从某大学到火车站途中有6个交通岗, 假设在各个交通岗是否遇到红灯相互独立, 并且遇到红灯的概率都是1/3.

(1) 设X为汽车行驶途中遇到的红灯数, 求X的分布律.

(2) 求汽车行驶途中至少遇到5次红灯的概率.

解:(1) 由题意,X ～ B(6,1/3), 于是,X的分布律为:

$$P\{X=k\}=C_6^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \qquad k=0,1,\ldots,6$$

$$(2)\quad P\{X\geq 5\}=P\{X=5\}+P\{X=6\}$$

$$=C_6^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}$$

上例中以Y表示汽车行驶途中在停止前所通过的路口数，求Y的分布律。

解： Y的可能取值为0,1，…，6

$$P\{Y=k\}=(\frac{2}{3})^k\cdot\frac{1}{3},k=0,1,2,\ldots,5$$

$$\mathrm{P}\{Y=6\}=(\frac{2}{3})^6$$

3、 泊松(Poisson)分布P(λ)

如果随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \ (\text{其中}\lambda>0\text{为常数})$$

则称随机变量 X 服从参数为λ的*泊松分布*.

思考：*参数λ可不可以是零或负数？*

泊松分布分布律的归一性

$$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)e^{-\lambda}=1$$

泊松分布的例子1

例1. 设某国每对夫妇的子女数X服从参数为λ的泊松分布, 且知一对夫妇有不超过1个孩子的概率为$3e^{-2}$. 求任选一对夫妇, 至少有3个孩子的概率。

解: 由题意,

$$\because X \sim P(\lambda), 且 P\left\{X \le 1\right\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 3e^{-2}$$

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 3e^{-2} \Rightarrow \lambda = 2$$

$$P\{X \ge 3\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - 5e^{-2} \approx 0.323$$

泊松分布的例子2

泊松定理

例2：设书中每一页上印刷错误个数服从参数为**λ=1/2**的泊松分布，求（**1**）一页上至少有一处印错的概率？**(2) 10**页中至多有一页有错的概率？

解：(1) 设**X**为一页上印刷错误的个数，则 $X \sim \pi(\frac{1}{2})$

所求概率为：

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.395$$

(2) 设**Y**为**10**页中有错的页数，则

$$Y \sim b(10, 0.395)$$

所求概率为：

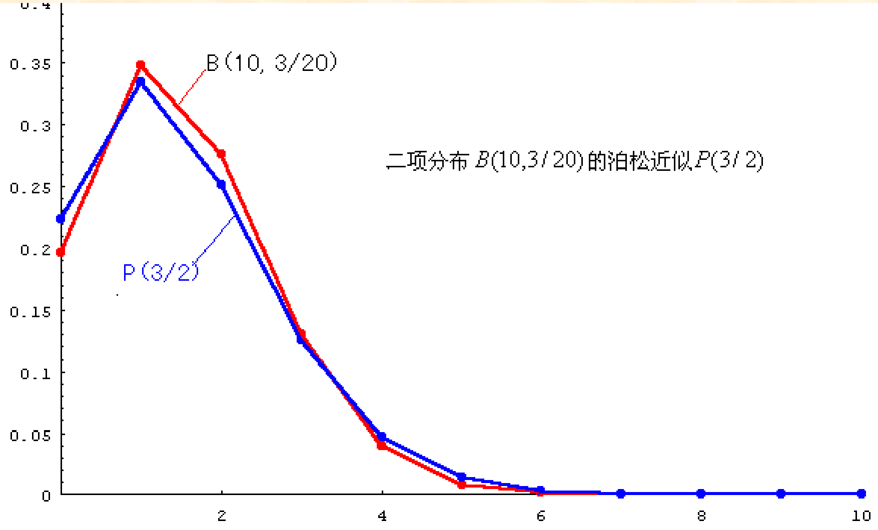
$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) \approx 0.049$$

泊松定理

泊松定理： 设随机变量X~B(n, p), 且n很大，p很小，记λ=np，则

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

泊松定理表明，泊松分布是二项分布的极限分布，当n很大，p很小时，二项分布就可近似地看成是参数λ=np的泊松分布。



泊松分布的例子3

作业5.6参照此例题

例3. 某人射击的命中率为**0.02**，他独立射击**400**次，试求其命中次数不少于**2**的概率。

解：设X表示400次独立射击中命中的次数，

则X～B(400，0.02)，故

$$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$=1-0.98^{400}-(400)(0.02)(0.98^{399})=\mathbf{0.997165}$$

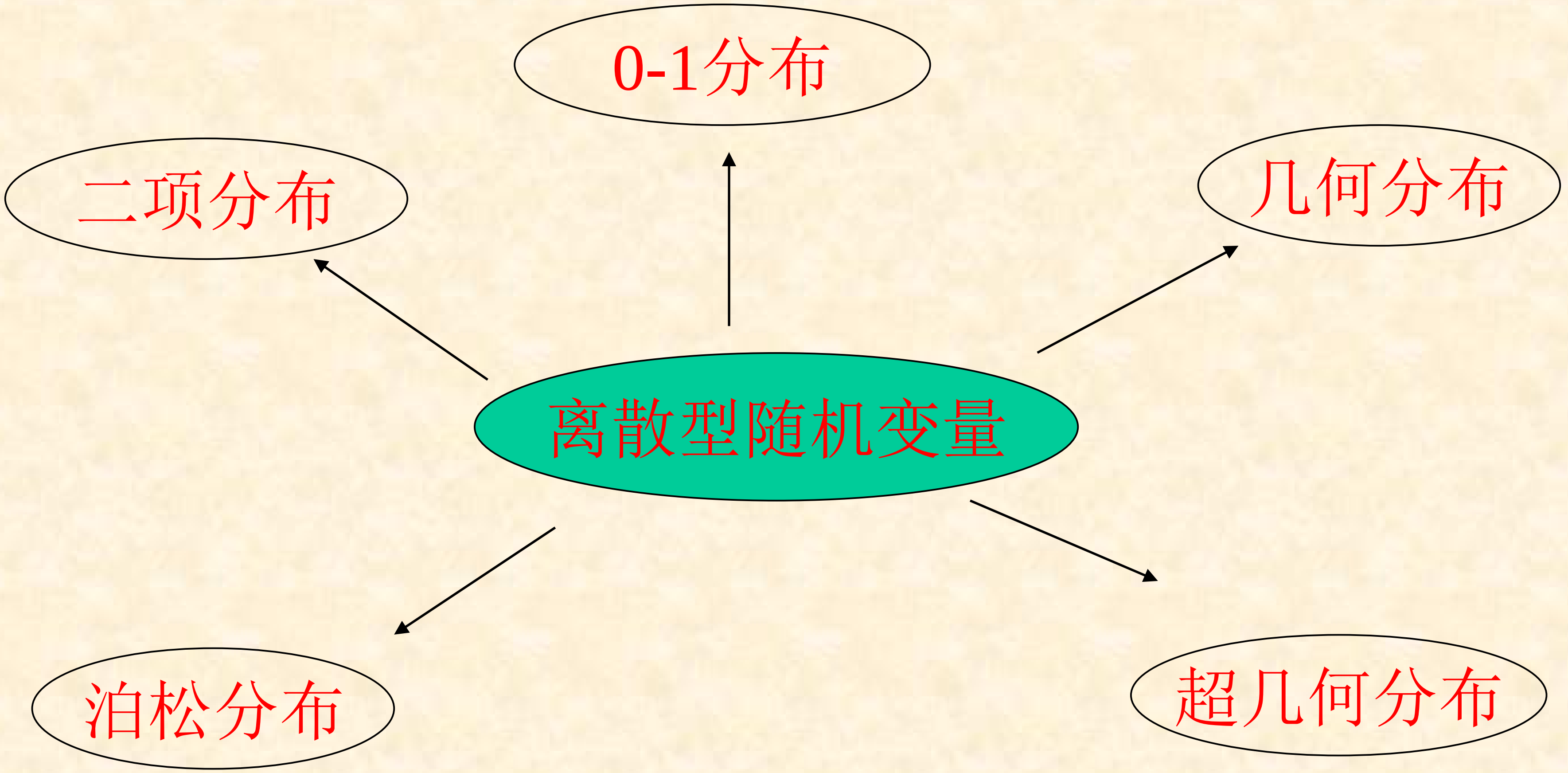
用泊松定理 取λ =np＝(400)(0.02)＝8,

故近似地有

$$P\{\mathbf{X}\geq 2\}=1-P\{\mathbf{X}=0\}-P\{\mathbf{X}=1\}$$

$$=1-(1+8)e^{-8}=0.996981$$

知识点示意图



第二节　离散型随机变量小结

知识点

1、离散型随机变量的分布律及其性质；

2、三大离散型分布的概念与分布律。

考点

1、掌握分布律的性质，会求随机变量的分布律；

2、会用分布律求相关事件概率；

3、熟练运用三大离散型分布模型解决实际问题, 特别是二项分布。

4、几何分布

知识点示意图

若随机变量 *X* 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1\text{-}p)^{k-1}p \quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (其中 0\le p\le 1)$$

则称X服从参数为p的几何分布

几何分布的概率背景

在贝努利试验中，试验进行到 事件A 首次出现为止.

令X为所需试验次数， 则X服从参数为p的几何分布.

归一性

$$\sum_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}(1\text{-}p)^{k-1}p=\frac{1}{1-(1-p)}p=1$$

例6. 进行独立重复试验，每次成功的概率为p，令X表示直到出现第m次成功为止所进行的试验次数，求X的分布律。

解:m=1时，$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\ldots$

m>1时,X的全部取值为:m,m+1,m+2,…

$$P\{X=m\}=p^m$$

P{X=m+1}=P{第m+1次试验时成功并且

在前m次试验中成功了m-1次}

$$=C_m^{m-1}p^{m-1}(1-p)p$$

$$\therefore P\{X=k\}=C_{k-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{k-m}p \quad k=m,m+1,m+2,\ldots$$

超几何分布

知识点示意图

如果随机变量 X 的分布律为　其中N, M, n均为自然数

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n))$$

此时随机变量X 服从参数为（ N, M, n）的超几何分布

超几何分布的概率背景

一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余 N-M 件为正品．现从中取出 n 件.

令 X：取出 n 件产品中的次品数，则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n))$$

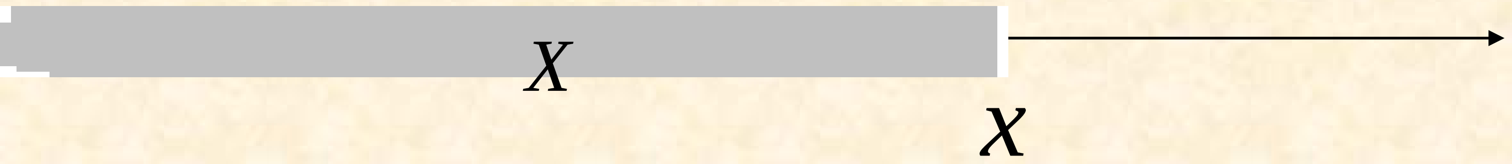
2.3 随机变量的分布函数

一、分布函数的概念

定义：设X是随机变量，对任意实数x，事件{X≤x}的概率P{X≤x}称为随机变量X的分布函数。

记分布函数为**F(x)**，即

$$F(x)=P\{X\le x\}$$



用分布函数计算某些事件的概率

易知，对任意实数**a, b (a<b),**

P {a<X≤b}＝P{X≤b}－P{X≤a}＝ F(b)－F(a)

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$P\{X < x_0\} = \lim_{x \to x_0^-} P\{X \le x\} = F\left(x_0 - 0\right)$$

$$P\{X = x\} = F(x) - F(x - 0)$$

二、分布函数的性质

1、单调不减性：若$x_1<x_2$，则$F(x_1)\le F(x_2)$；

2、归一 性：对任意实数x，$0\le F(x)\le 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0\,,\,F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

3、右连续性：对任意实数 x_0 ，

$$F(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0).$$

反之，具有上述三个性质的实函数，必是某个随机变量的分布函数。故该三个性质是分布函数的充分必要性质。

例1由分布律求分布函数

作业6.1参照此例题

例1 设随机变量X具分布律如右表

试求出X的分布函数。

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

解: $F(x) = P\{X \le x\}$

当x<0时, $F(x)=0$

当0 ≤ x<1 时,

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=0.1$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.1, & 0\le x<1 \\ 0.7, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

当1 ≤ x <2 时,

$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0.1+0.6=0.7$

当2 ≤ x时, $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1$

一般地，对离散型随机变量

$$X \sim P\{X = x_k\} = p_k,\quad k = 1, 2, \ldots$$

其分布函数为 $$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{k: x_k \le x} p_k$$

离散型随机变量的分布函数是阶梯函数,分布函数的分段点对应离散型随机变量的可能取值点,相邻的高度差对应随机变量取对应值（分段点）的概率;反之,如果某随机变量的分布函数是阶梯函数,则该随机变量必为离散型.

例2由分布函数求分布律

作业6.2参照此例题

例2：设离散r.v. X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} A & x<0 \\ \frac{1}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{2}{3} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{12} & 2\le x<3 \\ B & x\ge 3 \end{cases}$$

分布函数的分段点对应离散型随机变量的可能取值点,相邻的高度差对应随机变量取对应值（分段点）的概率。

求 r.v.X的分布律，并求 $P\{X\le 3\}$, $P\{X>0.5\}$, $P\{2\le X<4\}$

解: $F(-\infty)=A=0$, $F(+\infty)=B=1$ $P\{X\le 3\}=1$, $P\{X>0.5\}=\frac{1}{2}$,

X	0	1	2	3
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$P\{2\le X<4\}$

$=F(4-0)-F(2-0)=1/3$

例3 通过描述求分布函数

例3 向[0,1]区间随机抛一质点，以X表示质点坐标.假定质点落在[0,1]区间内任一子区间内的概率与区间长成正比，求X的分布函数

解： $F(x)=P\{X\le x\}$

当$x<0$时, $F(x)=0$; 当$x>1$, $F(x)=1$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时, $F(x)=P\{0\le X\le x\}=kx$

特别, $F(+\infty)=P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=k=1$

$$\therefore F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

例4 通过描述求分布函数

例 4 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.

解： 当$x<0$时, $F(x)=0$; 当$x>2$, $F(x)=1$

当$0\leqslant x\leqslant 2$时, $P\{0 \le X \le x\} = k x^2$,

第三节小结

取$x=2$,得$P\{0\le X\le 2\}=1$

得$k=1/4$, 即 $P\{0\le X\le x\}=\dfrac{x^2}{4}$.

所以，随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

第三节 分布函数小结

知识点

1、分布函数的概念与性质

考点

1、离散型随机变量的分布函数与分布律相互转化；

2、会求连续型随机变量的分布函数；

3、会用分布函数表示事件的概率。

2.4 连续型随机变量

一、概率密度

1. 定义：对于随机变量X，若存在非负函数f(x)，(-∞<x<+∞)，使对任意实数x，都有

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

则称X为连续型随机变量， f(x)为X的概率密度函数，简称概率密度或密度函数.

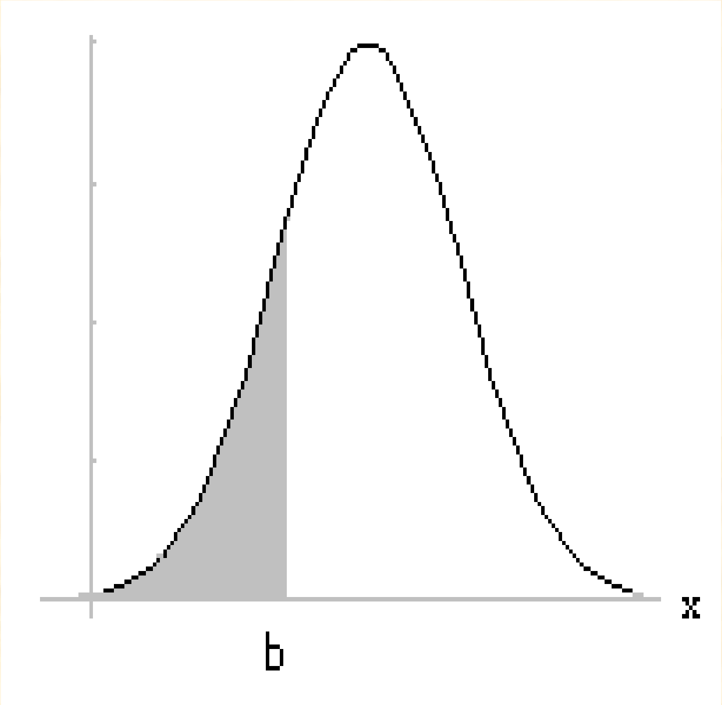
常记为　X～ f(x)，(-∞<x<+∞)

说明

(1) F(x)是连续函数。

（2）密度函数的几何意义为

$$P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(u)\,du$$



基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k 为常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C$ ($\mu \neq -1$)

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$ 或 $-\operatorname{arccot} x + C$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 或 $-\arccos x + C$

(6) $\int \cos x \mathrm{d}x = \quad \sin x + C$

(7) $\int \sin x \mathrm{d}x = \quad -\cos x + C$

(8) $\int e^{x} \mathrm{d}x = \quad e^{x} + C$

(9) $\int e^{-ax} \mathrm{d}x = \quad -\dfrac{1}{a} e^{-ax} + C$

(10) $\int a^{x} \mathrm{d}x = \quad \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

概率密度的性质

(1) 非负性 **f(x)≥0，(-∞<x<∞)；**

(2)归一性 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

性质**(1)**、**(2)**是密度函数的充要性质**.**

EX

设随机变量X的概率密度为

$$f(x) = ae^{-|x|}$$

求常数a.

答：a=0.5

(3) 若x是$f(x)$的连续点，则

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

EX

设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{x} & x<0 \\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0 \end{cases}$$

求$f(x)$ $$f(x)=e^{-|x|}/2$$

基本导数表

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(Cu)' = Cu'$ （ C为常数 ）

$(uv)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

3. 复合函数求导法则

$$y = f(u), u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

（4） 对任意实数b，若X～ f(x)，

(-∞<x<∞)，则P{X=b}＝0.

于是

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\}$$
$$= P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}$$
$$= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

例1 由概率密度求分布函数与其他　作业6.6参照此例题

例1：已知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2Ax & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（1）求参数A. (2) P{0.5<X<3}. (3) 求分布函数F(x).

解： (1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^1 2Axdx=1 \quad\Rightarrow\quad A=1$

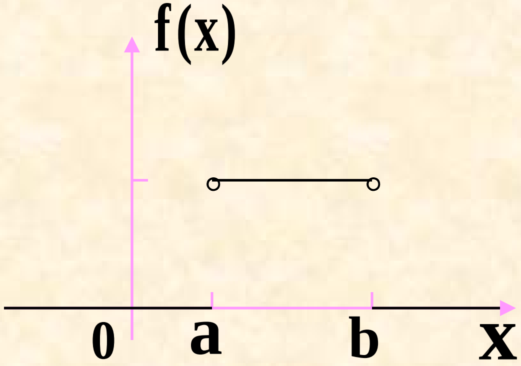
(2) $P\{0.5<X<3\}=\int_{0.5}^{3} f(x)dx=\int_{0.5}^{1} 2xdx=0.75$

(3) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

$P\{0.5<X<3\}=F(3)-F(0.5)$

二、几个常用的连续型分布

1. 均匀分布



若 X～f(x)＝ $\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0\ , \quad 其它 \end{cases}$

则称X在(a, b)内服从均匀分布,记作 X~U(a, b).

均匀分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

均匀分布的概率背景

例1

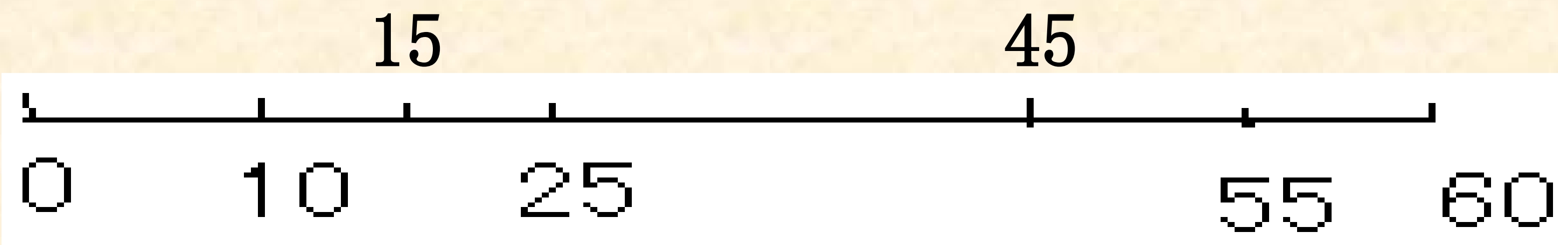
对任意实数c, d (a<c<d<b)，都有

$$P\{c < X < d\} = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$$

如果随机变量X服从区间（a,b）上的均匀分布，则随机变量X落在在区间（a,b）上的任意一个子区间的概率与该子区间的长度成正比，而与该子区间的具体位置无关。这时可以认为随机变量X在区间（a,b）上的取值是等可能的。

均匀分布的例1

例1. 长途汽车起点站于每时的10分、25分、55分发车，设乘客不知发车时间，于每小时的任意时刻随机地到达车站，求乘客候车时间超过10分钟的概率.



解：设A—乘客候车时间超过10分钟

X—乘客于某时X分钟到达，则X~U(0,60)

$$P(A)=P\{10<X<15\}+P\{25<X<45\}+P\{55<X<60\}$$

$$=(5+20+5)/60=0.5$$

均匀分布的例2　　作业6.5参考此例

例2 设随机变量Y~U（-1,3），试求方程

$$4x^2+4Y\,x+(Y+2)=0$$

有实根的概率。

解　方程有实根，所以判别式非负，即

$$(4Y)^2-4\times4\times(Y+2)\geq0$$

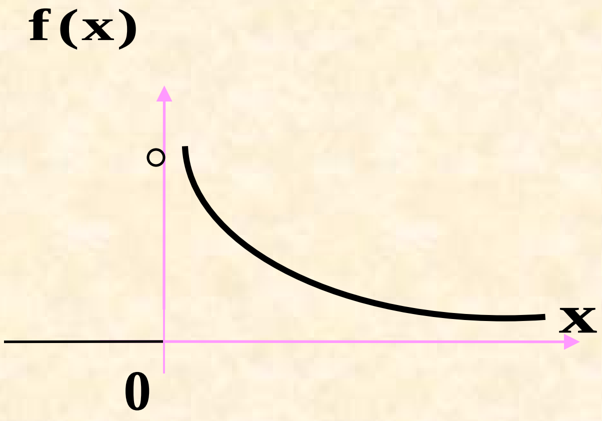
解得　$Y\leq-1$ 或 $Y\geq2$

方程有实根的概率

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx+=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{2}^{3}0.25dx+\int_{3}^{+\infty}0dx=0.25$$

2. 指数分布

若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$



则称**X**服从参数为**λ>0**的指数分布，
记作**X ～ E（λ）**或**Exp （λ）**。

其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0 \quad , \quad x \le 0 \end{cases}$$

指数分布的例1

例1 电子元件的寿命X(年）服从参数为3的指数分布

(1)求该电子元件寿命超过2年的概率。

(2)已知该电子元件已使用了超过1.5年，求它还能使用超过两年的概率为多少?

解

$$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & x\le 0, \end{cases}$$

$$\textbf{(1)}P\{X>2\}=\int_2^{\infty}3e^{-3x}dx=e^{-6}$$

⑵已知该电子元件已使用了超过1.5年，求它还能使用超过两年的概率为多少?

$$(2)P\{X>3.5\mid X>1.5\}$$

$$=\frac{P\{X>3.5,X>1.5\}}{P\{X>1.5\}}=\frac{\int_{3.5}^{\infty}3e^{-3x}dx}{\int_{1.5}^{\infty}3e^{-3x}dx}=e^{-6}$$

指数分布的例2

例2 某公路桥每天第一辆汽车过桥时刻为T，

设[0，t]时段内过桥的汽车数X_t服从

参数为λt的泊松分布，求T的概率密度。

解: $F(t)=P\{T\le t\}$ 当$t\le 0$时， $F(t)=0$

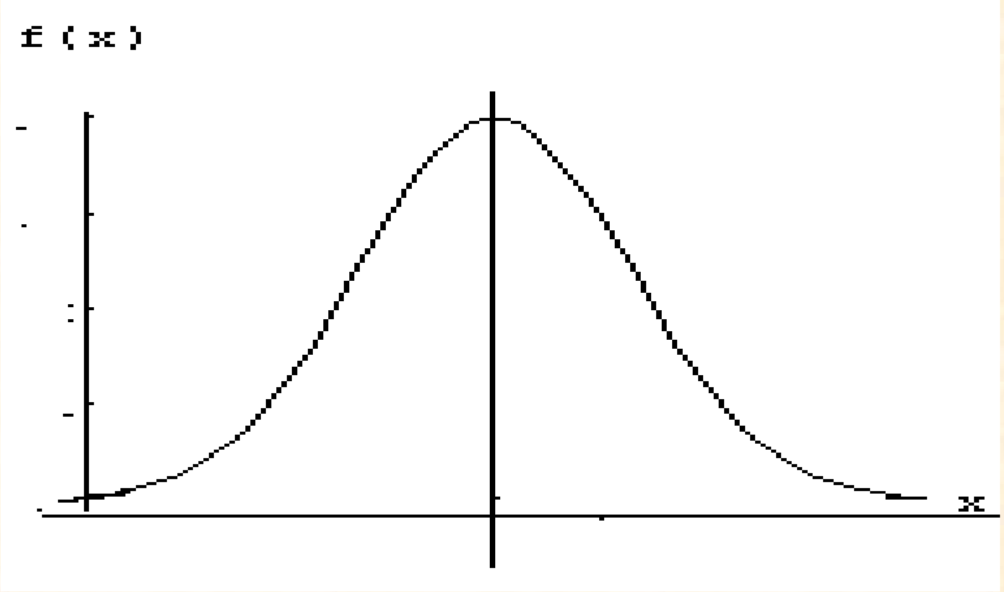
当t >0时， $F(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}$

$$=1-P\{X_t=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

于是

$$f(t)=F'(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

3. 正态分布



若随机变量

μ

$$X \sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty$$

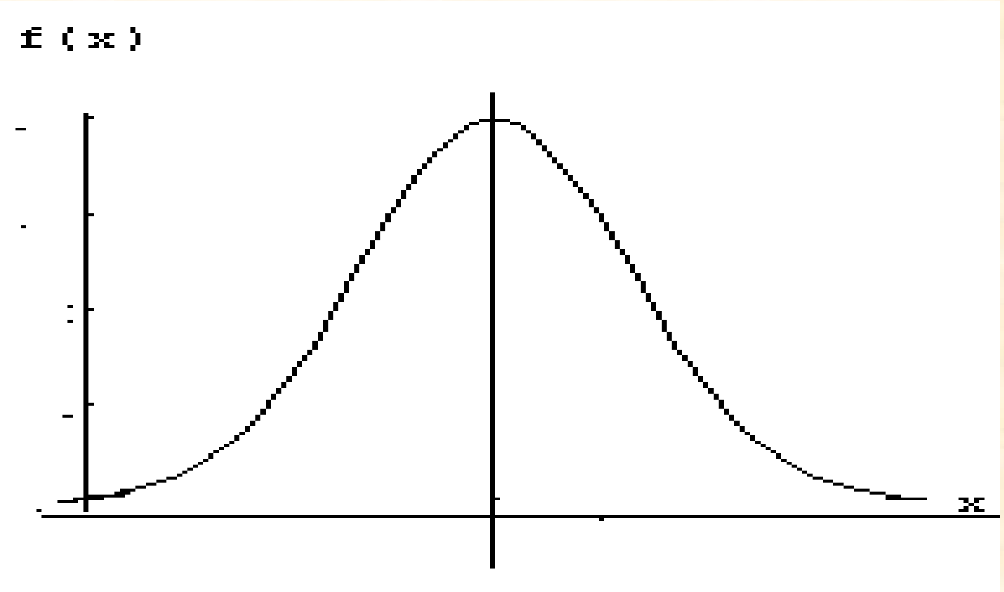
其中 μ为实数， σ>0 ，则称X服从参数为μ ,σ^2的正态分布,记为N(μ, σ^2)，可表为X～N(μ, σ^2).

正态分布有两个特性：

(1) 单峰对称

密度曲线关于直线x=μ对称；

$$f(\mu)=\max f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$



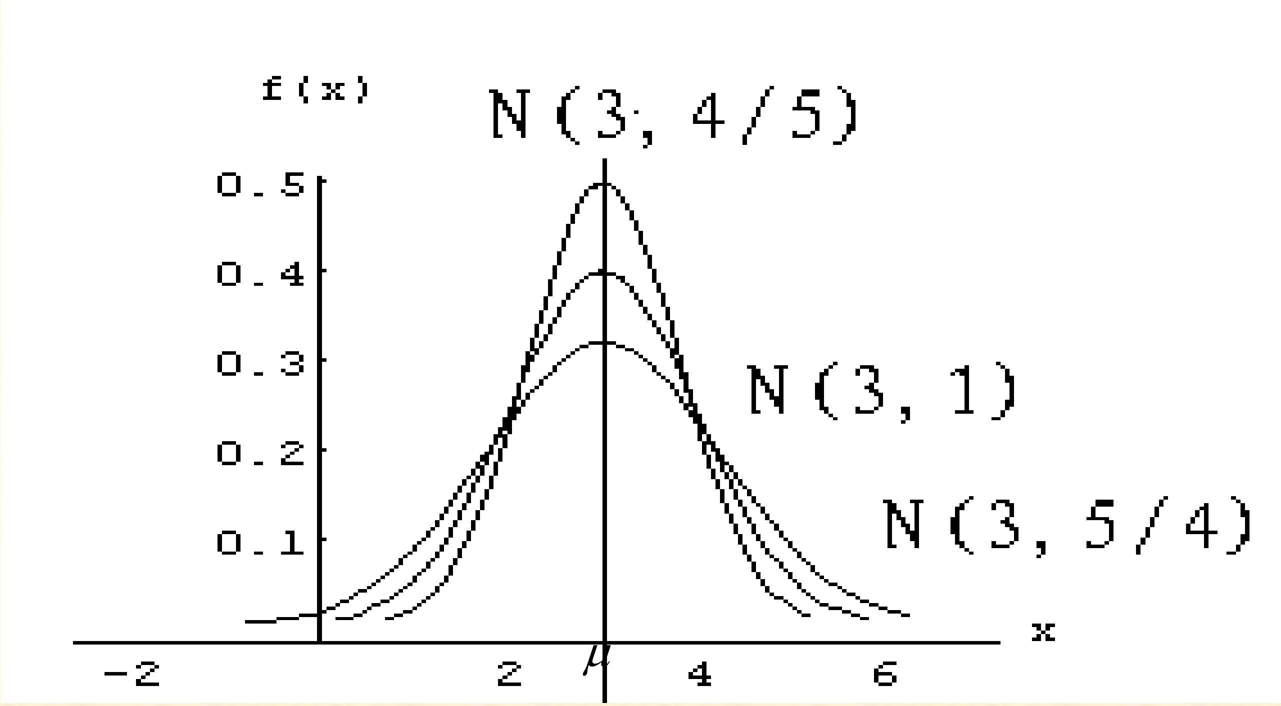
μ

(2) σ的大小直接影响概率的分布

σ越大，曲线越平坦，

σ越小，曲线越陡峻。

正态分布也称为高斯(Gauss)分布



正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布，这可以由以下情形加以说明：

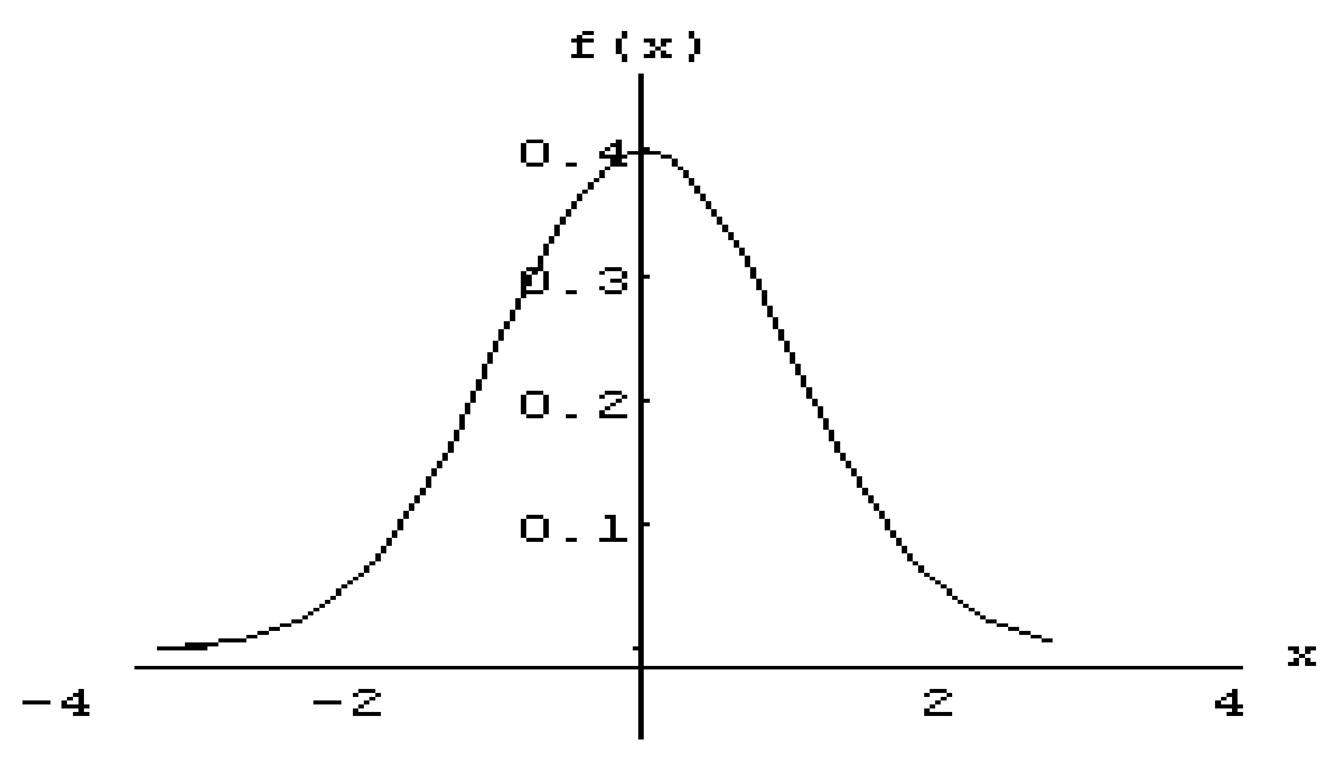
⑴ 正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的．可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布．

⑵ 正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的．

⑶ 正态分布可以作为许多分布的近似分布．

4.标准正态分布

参数$\mu = 0$，$\sigma^2 = 1$的正态分布称为标准正态分布，记作**X~N(0, 1)**。



其密度函数表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty< x<+\infty.$$

分布函数表示为

$$\Phi(x)=P\{X\le x\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,-\infty<x<+\infty$$

标准正态分布函数表　　N(0,1)分布函数Φ(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	0.1
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	0.2
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	0.3
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	0.4
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	0.5
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	0.6
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	0.9
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	1
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	1.1
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	1.2
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	1.3
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	1.4
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	1.5
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	1.6
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	1.7
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	1.8
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	1.9
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	2
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	2.1
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	2.2
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	2.3
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	2.4
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	2.5
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	2.6
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	2.7
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	2.8
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	2.9
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	3
	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	

通过标准正态分布函数表求正态分布分布函数

（1）$0 \le x \le 3.9$ ， 表上有的直接查表

（2） $0 \le x \le 3.9$， 表上没有 近似计算

（3）$x>3.9$ ， $\Phi(x)=1$

（4）$x<0$， $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$

（5）若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

注：(1) Φ(x)＝1- Φ(-x)；

(2) 若X～N(μ, σ²)，则

$$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

若 Z ～ N（0，1），

P{1.32<Z<2.43} =Φ(2.43)-Φ(1.32)=0.9925-0.9066

P{−1<Z<2} =Φ(2)-Φ(-1)= Φ(2)-[1-Φ(1)]

=0.9772+0.8413-1=0.8385

EX

(2) 若X～N(μ, σ²)，则

$$F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

1. 设随机变量X~N(-1,2²),P{-1<X<3}=?

$=\Phi(2)-\Phi(0)=0.9772-0.5=0.4772$

2. 设 X~N(μ, σ²), 求P{ μ−nσ ≤ X ≤ μ+nσ }

$=2\Phi(n)-1$

作业7.2参照此例题

特殊解法的例子　　　　作业7.1、7.4参照此例题

例 一种电子元件的使用寿命X（小时）服从正态分布$N(100,15^2)$,某仪器上装有3个这种元件，三个元件损坏与否是相互独立的.求：使用的最初90小时内无一元件损坏的概率.

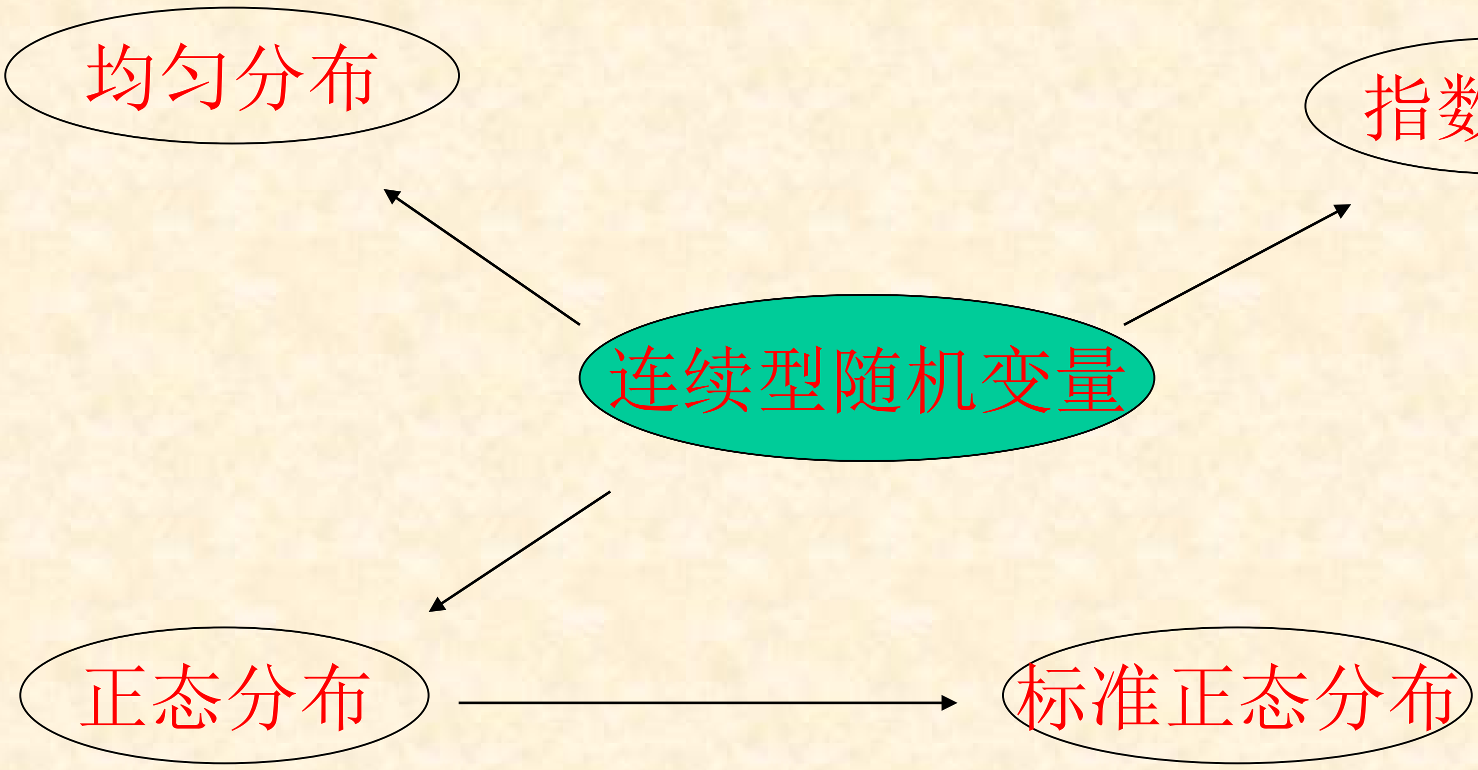
解:设Y为使用的最初90小时内损坏的元件数,

则$Y\sim B(3,p)$　　其中

$$p=P\{X<90\}=\Phi\left(\frac{90-100}{15}\right)\approx\Phi(-0.67)=0.2514$$

故　$P\{Y=0\}=(1-p)^3\approx 0.4195$

知识点示意图



第四节 连续型随机变量小结

知识点

1、连续型随机变量概念与性质；

2、三大连续型分布的概念与概率密度。

考点

1、连续型随机变量分布函数与概率密度的相互转化；

2、会用概率密度求相关事件概率；

3、熟练运用三大连续型分布模型解决实际问题；

4、标准正态分布查表，标准与非标准的互化。

2.5 随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布律

设X一个随机变量，分布律为

$X \sim P\{X = x_k\} = p_k$， $k = 1, 2, \ldots$

若$y = g(x)$是一元单值实函数，则$Y = g(X)$也是一个随机变量.求Y的分布律.

例1 已知

X	-1	0	1
p_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$
$Y=X^2$	**1**	**0**	**1**

求：$Y=X^2$的分布律

Y	1	0
p_k	$2/3$	$1/3$

作业8.1参照此例

一般地

X	x_1	$x_2 \cdots$	$x_k \cdots$
p_k	p_1	$p_2 \cdots$	$p_k \cdots$
Y=g(X)	$g(x_1)$	$g(x_2)\cdots$	$g(x_k)\cdots$

其中**g(x_k)**有相同的，其对应概率相加。

这种方法称为“分布律表法”

离散型随机变量函数的分布律例2（公式法）

已知 **X~b(n,p),求Y=2X的分布律**

解:Y的可能取值为0, 2, 4, ⋯, 2n.

$$P\{Y=k\}=P\left\{2X=k\right\}=P\left\{X=k/2\right\}$$

$$=C_n^{k/2}p^{k/2}\left(1-p\right)^{n-k/2}$$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,\ldots,n)$$

二、连续型随机变量函数的密度函数

1、分布函数法

若$X \sim f(x)$，$-\infty < x < +\infty$, $Y=g(X)$为随机变量X 的函数，则可先求Y的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

然后再求Y的密度函数

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

此法称为“ 分布函数法”.

分布函数法例1　　作业8.2、8.4—8.6参照此例题

例1.设X~U(-1,1),求$Y=X^2$的分布函数与概率密度。

解　$\because \quad f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad y=g(x)=x^2$

$$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\}$$

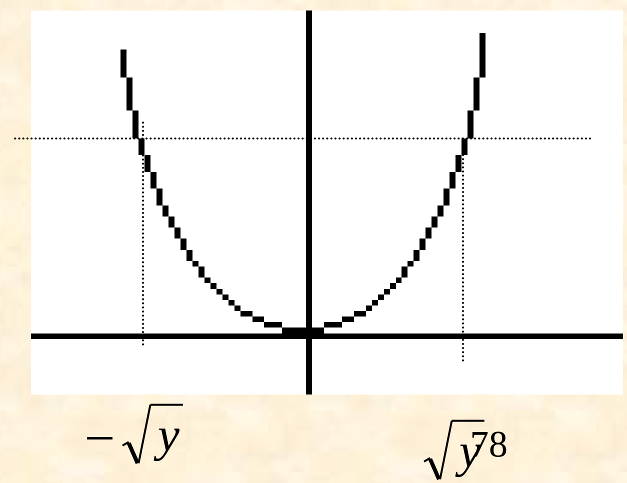
当y<0时　$F_Y(y)=0$

当0≤y<1时

当y≥1时　$F_Y(y)=1$

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{y}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



分布函数法2

例2. 已知X~N(μ, σ²), 求 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度

解: $$F_Y(y)=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le y\right\}=P\left\{X\le \mu+\sigma y\right\}=F_X\left(\mu+\sigma y\right)$$

故 $$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X\left(\mu+\sigma y\right)\sigma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

正态随机变量标准化后服从标准正态分布

分布函数法例3

例3设X的概率密度为$f_X(x)$,y=g(x)关于x处处可导且是x的严格单调减函数，求Y=g(X)的概率密度。

解：Y的分布函数为：

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$
$$= P\{X \ge g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

$\therefore$Y的概率密度为：

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$$

2、公式法

一般地，若$X \sim f_X(x)$, $y=g(x)$是**单调可导**函数，则

$$Y=g(X)\sim f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\,|\,[g^{-1}(y)]'_y\,| & ,\alpha<y<\beta \\ 0 & ,\quad 其它 \end{cases}$$

$\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$，$\beta=\max\{g(a),g(b)\}$

注：1. 只有当$g(x)$是x的单调可导函数时，

才可用以上公式推求Y的密度函数。

2. 注意定义域的选择

公式法例1 作业8.3参照此例题

例1. 已知X~N(μ,σ^2), 求 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的概率密度

解: $y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 关于x可导单调,反函数为

$$g^{-1}(y)=\sigma y+\mu$$

故 $f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|[g^{-1}(y)]'_y\right| = f_X(\sigma y+\mu)\sigma$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\sigma y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

正态随机变量标准化后服从标准正态分布

公式法例2

例2 设X~U(0,1),求Y=aX+b的概率密度.(a≠0)

解: y=ax+b关于x单调可导,反函数为 $g^{-1}(y)=\frac{y-b}{a}$

故

$$f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\left|[g^{-1}(y)]'_y\right| = f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{|a|}$$

而

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & others\end{cases}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{|a|} & 0<\frac{y-b}{a}<1\\ 0 & others\end{cases}$$

随机变量函数的分布

- 离散型的分布律
  - 分布律表法
  - 公式法
- 连续型的概率密度
  - 分布函数法
  - 公式法

第五节 随机变量函数的分布小结

知识点

1、离散型随机变量函数的分布律；

2、连续型随机变量函数的概率密度。

考点

1、会求离散型随机变量函数的分布律；

2、会求连续型随机变量函数的概率密度。

第二章小结

随机变量

随机变量函数的分布

离散型——分布律
- 归一性
- 分布函数与分布律的互变
- 概率计算

分布函数
- 归一性
- 概率计算
- 单调性

连续型——概率密度
- 归一性
- 概率计算
- 分布函数与概率密度的互变

离散型分布
- 0-1分布
- 二项分布B (n,p)
- 泊松分布P(λ)

正态分布的概率计算

连续型分布
- 均匀分布U(a,b)
- 正态分布N(a, σ^2)
- 指数分布E (λ)