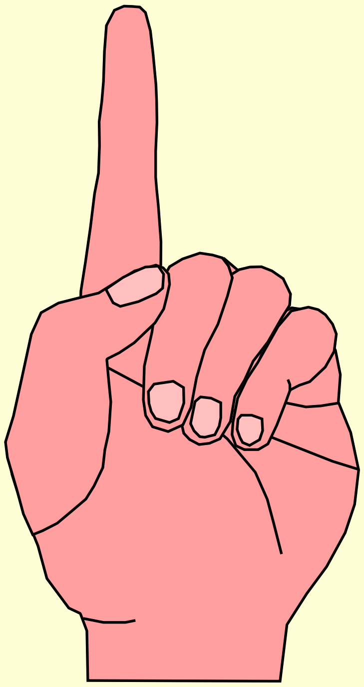
第三章 多维随机变量

- 二维随机变量的联合分布
- 边缘分布与独立性
- 条件分布
- 多维随机变量函数的分布



3.1 二维随机变量

一、 多维随机变量

1. 定义 将n个随机变量X_1，X_2，. . . , X_n构成一个n维向量（$X_{1,}$ X_2, . . . , X_n）称为n维随机变量。

一维随机变量X——R^1上的随机点坐标
二维随机变量(X,Y)——R^2上的随机点坐标
n维随机变量(X_1,X_2,…,X_n)——R^n上的随机点坐标

多维随机变量的研究方法也与一维类似，用分布函数、概率密度、或分布律来描述其统计规律.

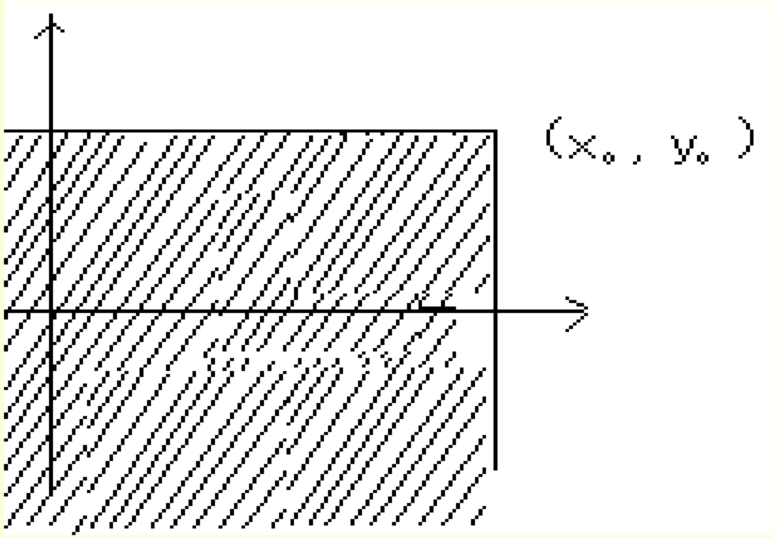
二. 联合分布函数

设(X, Y)是二维随机变量，(x, y)∈R^2, 则称

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为(X, Y)的分布函数，或X与Y的联合分布函数。

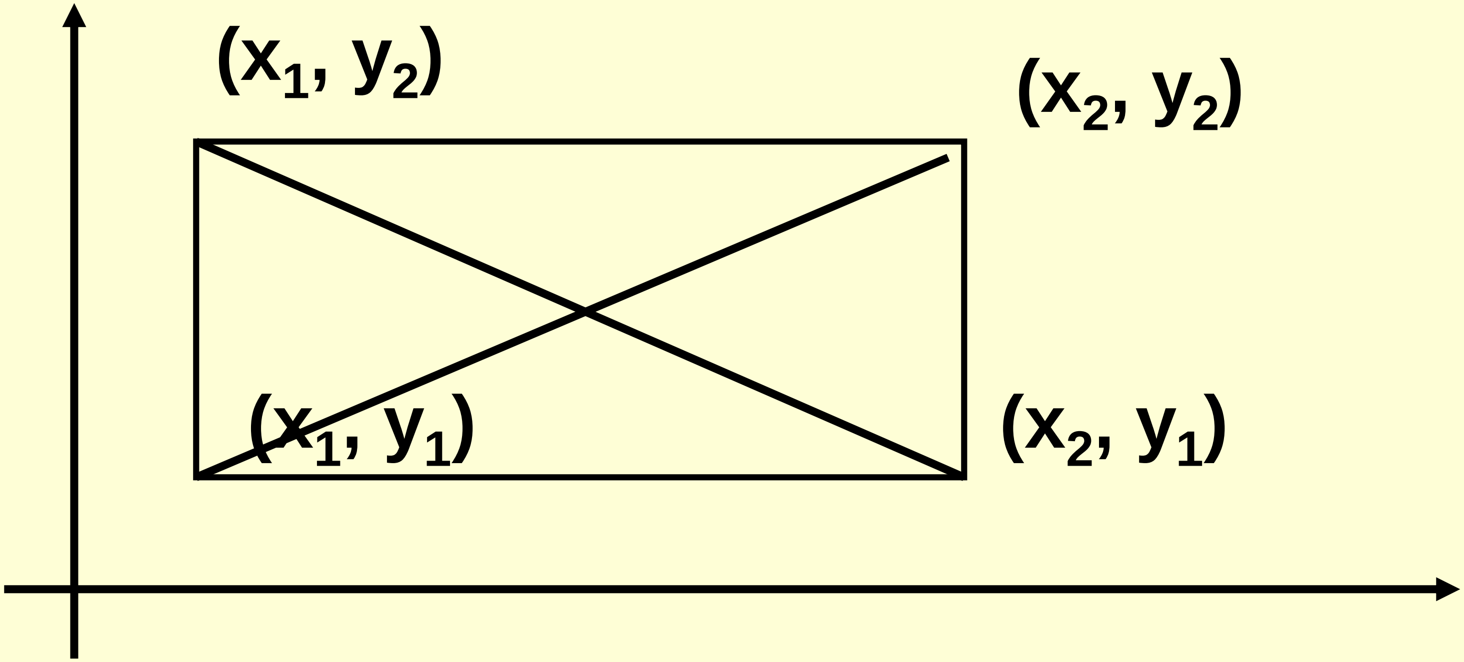
几何意义：分布函数F(x_0, y_0)表示随机点(X,Y)落在区域$\{(x,y), -\infty < x \le x_0, -\infty < y \le y_0\}$内的概率。如图阴影部分：



对于$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$,则

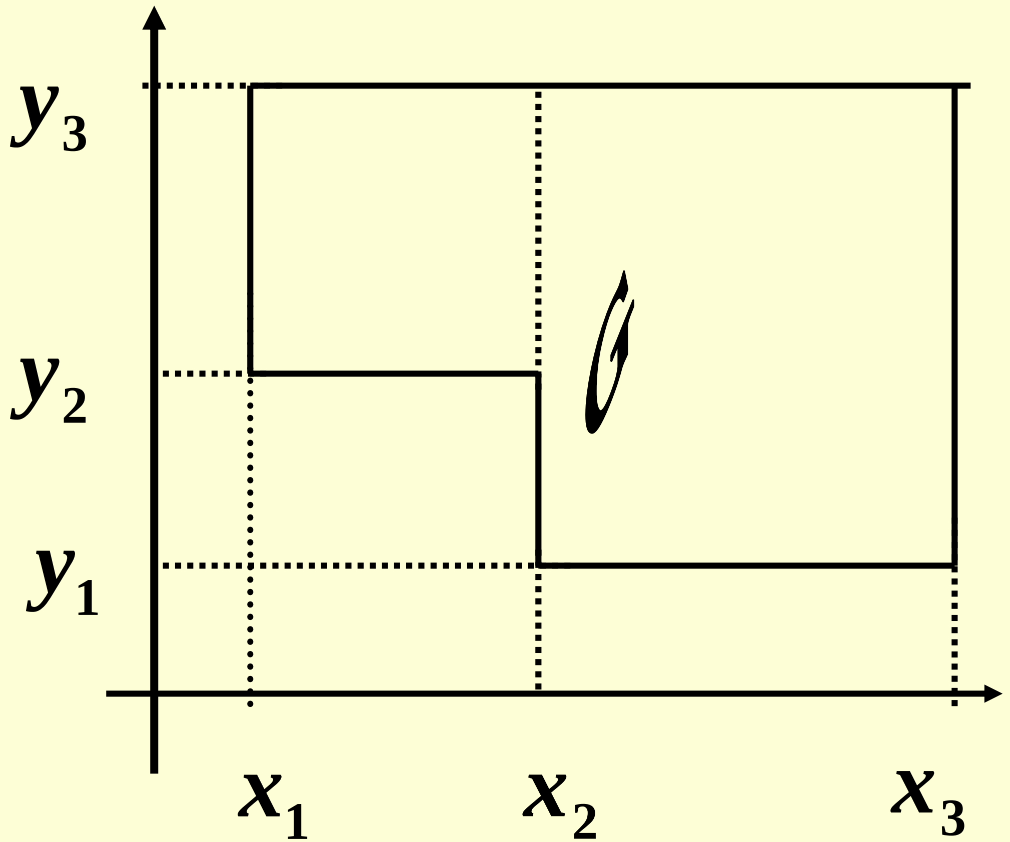
$$P\{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$



EX

已知随机变量(X,Y)的分布函数F (x,y),求(X,Y)落在如图区域G内的概率.



$$P\{(X,Y)\in G\}=[F(x_2,y_1)+F(x_3,y_3)-F(x_2,y_3)-F(x_3,y_1)]$$
$$+[F(x_1,y_2)+F(x_2,y_3)-F(x_1,y_3)-F(x_2,y_2)]=\cdots$$

分布函数F(x, y)具有如下性质：

(1) 归一性 对任意(x, y) $\in R^2$， $0 \le F(x, y) \le 1$,且

$$F(\infty,\infty)=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}F(x,y)=1$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

(2) 单调不减

对任意$y \in R$，当$x_1<x_2$时，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y);$$

对任意$x \in R$，当$y_1<y_2$时，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

(3) 右连续　对任意$x \in R$，　$y \in R$,

$$F(x, y_0+0) = \lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0).$$

$$F(x_0+0, y) = \lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0, y);$$

(4) 矩形不等式

对于任意$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, $(x_1 < x_2, \ y_1 < y_2)$,

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

反之，任一满足上述四个性质的二元函数F(x, y)都可以作为某个二维随机变量(X, Y)的分布函数。

例1. 已知二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A[B+\arctan(\frac{x}{2})][C+\arctan(\frac{y}{3})]$$

(1)求常数A，B，C。(2)求 $P\{0<X\le 2, 0<Y\le 3\}$

解: $F(\infty,\infty)=A[B+\frac{\pi}{2}][C+\frac{\pi}{2}]=1$

$$F(-\infty,y)=A[B-\frac{\pi}{2}][C+\arctan(\frac{y}{3})]=0$$

$$F(x,-\infty)=A[B+\arctan(\frac{x}{2})][C-\frac{\pi}{2}]=0$$

$$\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2} \quad A=\frac{1}{\pi^2}$$

作业9.1参照此例

$$P\{0<X\le 2, 0<Y\le 3\}=F(0,0)+F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)=\frac{1}{16}$$

三.联合分布律

若二维随机变量(X, Y)只能取至多可列个值 (x_i, y_j), (i, j＝1, 2, …)，则称(X, Y)为**二维离散型随机变量。**

若二维离散型随机变量(X,Y) 取 (x_i,y_j)的概率为p_{ij},

则称 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$，(i, j＝1, 2, …),

为二维离散型随机变量(X, Y)的分布律，
或随机变量X与Y的联合分布律.

可记为

$$(X, Y)\sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}，(i, j=1, 2, \ldots)$$

二维离散型随机变量的分布律也可列表表示如下:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布律的性质：

(1) $p_{ij} \geq 0$

(2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

例2 袋中有两只红球，三只白球，现不放回摸球二次，令

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸到红球}\\ 0 & \text{第一次摸到白球}\end{cases}$$

求(X,Y)的分布律。

$$Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸到红球}\\ 0 & \text{第二次摸到白球}\end{cases}$$

X \ Y	1	0
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{P_2^2}{P_5^2}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2\times 3}{P_5^2}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{3\times 2}{P_5^2}$$

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{P_3^2}{P_5^2}$$

作业9.2参照此例

例 3

将两个球等可能地放入编号为1, 2, 3的三个盒子中．令

X：放入1号盒中的球数

Y：放入2号盒中的球数

试求(X, Y)的联合分布律

解:

X的可能取值为0，1，2；Y的可能取值为0，1，2.

$$P\{X=0, \quad Y=0\} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$P\{X=0,\quad Y=1\} = \frac{2}{9}$$

$$P\{X=1,\quad Y=2\} = P(\varnothing) = 0$$

$$P\{X=0,\quad Y=2\} = \frac{1}{9}$$

$$P\{X=2,\quad Y=0\} = \frac{1}{9}$$

$$P\{X=1,\quad Y=0\} = \frac{2}{9}$$

$$P\{X=2,\quad Y=1\} = P(\varnothing) = 0$$

$$P\{X=1,\quad Y=1\} = \frac{2}{9}$$

$$P\{X=2,\quad Y=2\} = P(\varnothing) = 0$$

由此得$(X, \ Y)$的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

四.二维连续型随机变量及其密度函数

1、定义: 对于二维随机变量(X, Y)，若存在一个非负可积函数f (x, y)，使对∀(x, y)∈R^2，

其分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,$$

则称 (X, Y)为二维连续型随机变量，f(x,y)为(X, Y)的密度函数(概率密度)，或X与Y的联合密度函数，可记为

$$(X, Y) \sim f(x, y), \quad (x, y)\in R^2$$

2、联合密度f(x, y)的性质

(1)非负性： f (x, y)≥0，(x, y)∈R^2;

(2)归一性： $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

反之，具有以上两个性质的二元函数f（x，y），必是某个二维连续型随机变量的密度函数。

此外，f (x, y)还有下述性质

(3)若f (x, y)在(x, y)∈R^2处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$$

(4)对于任意平面区域$G \subset R^2$,

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{G\cap D} f(x,y)\,dxdy.$$

二重积分化为累次积分的方法

- 若积分区域为

$$(1)\ D\cap G = \left\{(x,y)\,\middle|\, a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$$

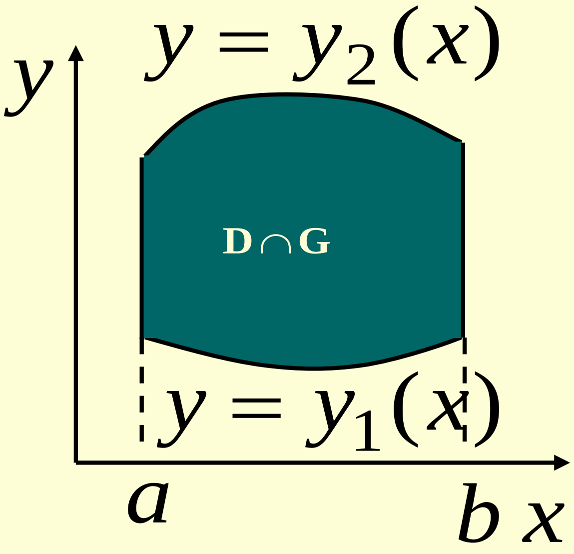
$$\iint_{D\cap G} f(x,y)dxdy$$

则

$$=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

- 若积分区域为



$$(2)\ D\cap G$$

$$=\left\{(x,y)\,\middle|\, a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$$

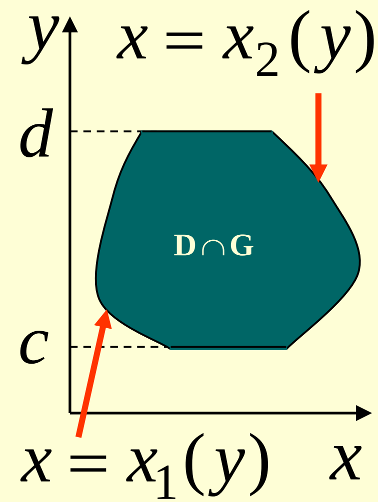
$$\iint\limits_{D\cap G} f(x,y)\,dxdy$$

则

$$=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

- 若积分区域为



$$(3)\, D \cap G$$

$$= \left\{ (x, y) \middle| c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \right\}$$

$$\iint\limits_{D \cap G} f(x, y)\,dxdy$$

则

$$= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \right] dy$$

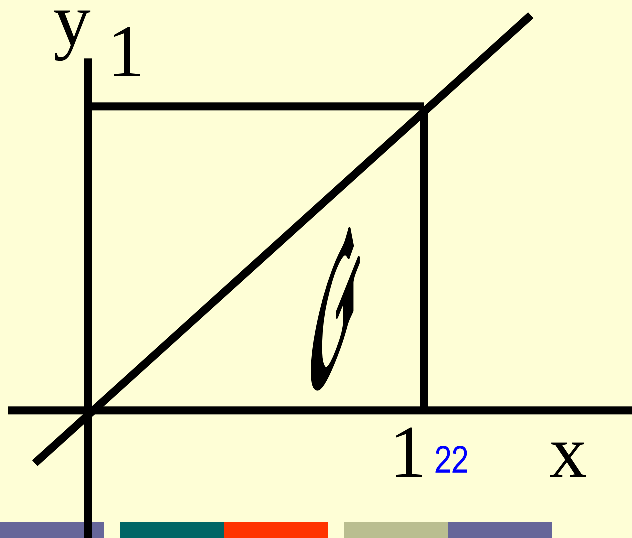
$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

例1 设 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & others \end{cases}$

求:P{X>Y} 作业9.2,9.4参照此例

$$P\{X > Y\} = \int_0^1 dx \int_0^x 1 \cdot dy = \frac{1}{2}$$

$$P\{X > Y\} = \int_0^1 dy \int_y^1 1 \cdot dx = \frac{1}{2}$$

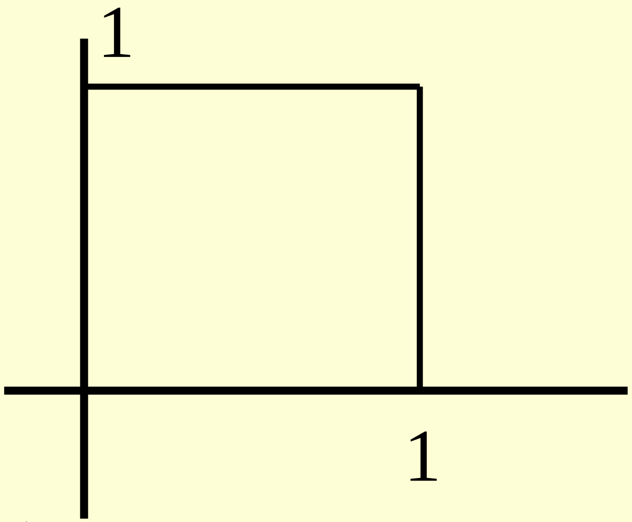


例2　设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, x>0, y>0 \\ 0,其它 \end{cases}$

求：(1)常数A；(2) F(1,1)；　　　作业9.2,9.4参照此例

(3) (X, Y)落在三角形区域D：x≥0, y≥0, 2X+3y≤6

内的概率。



解: (1) 由归一性

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy = 1$$

$$\Rightarrow A = 6 \quad (2)F(1,1) = \int_0^1\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dxdy = (1-e^{-2})(1-e^{-3})$$

(3) (X, Y)落在三角形区域D：x≥0, y≥0, 2X+3y≤6

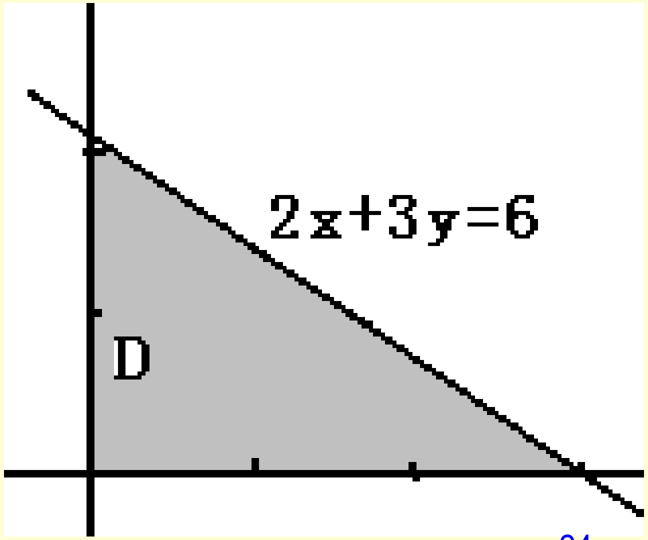
内的概率。

解:
$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D 6e^{-(2x+3y)}dxdy$$

$$=\int_0^3 \mathbf{dx}\int_0^{2-2\mathbf{x}/3} 6\mathbf{e}^{-(2\mathbf{x}+3\mathbf{y})}\mathbf{dy}$$

$$=1-7e^{-6}$$

$$\int_0^2 dy\int_0^{3-3y/2} 6e^{-(2x+3y)}dx$$



例 3 设二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求(X, Y)的联合分布函数

(3) 求$P\{0<X<1, 0<Y<2\}$.

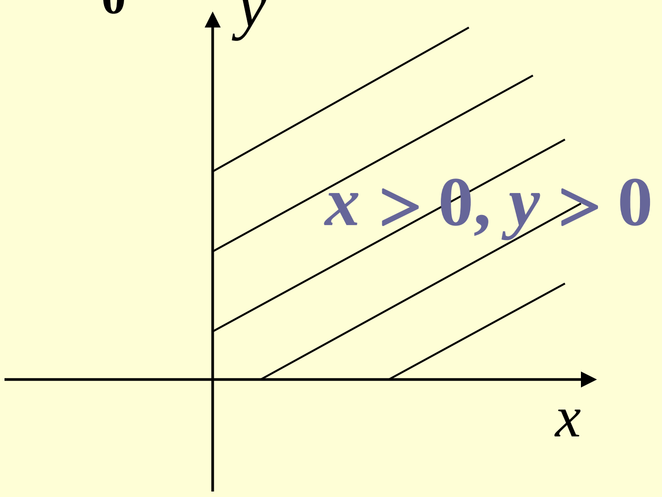
(4) $P\{X+Y\geq 1\}$.

解: (1)由密度函数的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dxdy$$

$$=c\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(3x+4y)}dxdy \quad =c\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}\,dy=\frac{c}{12}$$

所以，$c=12$.



(2) $\mathrm{F}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})=\mathrm{P}\{\mathrm{X}\le\mathrm{x},\ \mathrm{Y}\le\mathrm{y}\}$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dvdu$$

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,\ y)=0$；

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,\ v)\,du\,dv=12\int_0^x du\int_0^y e^{-(3u+4v)}dv$$

$$=12\int_0^x e^{-3u}du\cdot\int_0^y e^{-4v}\,dv=\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right)$$

所以，$F(x,\ y)=\begin{cases}\left(1-e^{-3x}\right)\left(1-e^{-4y}\right) & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) $P\{0<X<1,\quad 0<Y<2\}$

$$=\iint\limits_{0<x<1,\quad 0<y<2} f(x,\quad y)dxdy$$

$$=12\int_0^1 dx\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dy$$

$$=12\int_0^1 e^{-3x}dx\cdot\int_0^2 e^{-4y}\,dy \;=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$$

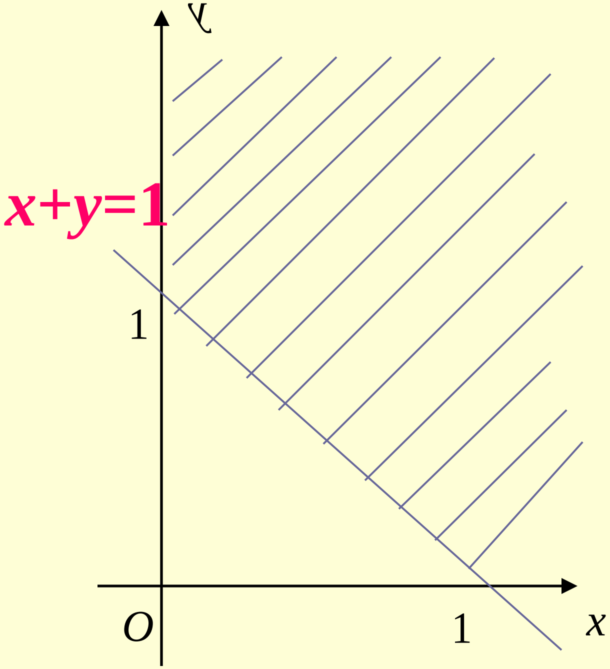
$$P\left\{X+Y\geq 1\right\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\geq 1} f(x,\quad y)dxdy$$

$$=12\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\infty} e^{-(3x+4y)}dy$$

$$+12\int_1^{\infty} dx\int_0^{\infty} e^{-(3x+4y)}dy$$

$$=4e^{-3}-3e^{-4}$$



3. 两个常用的二维连续型分布

(1)二维均匀分布*

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

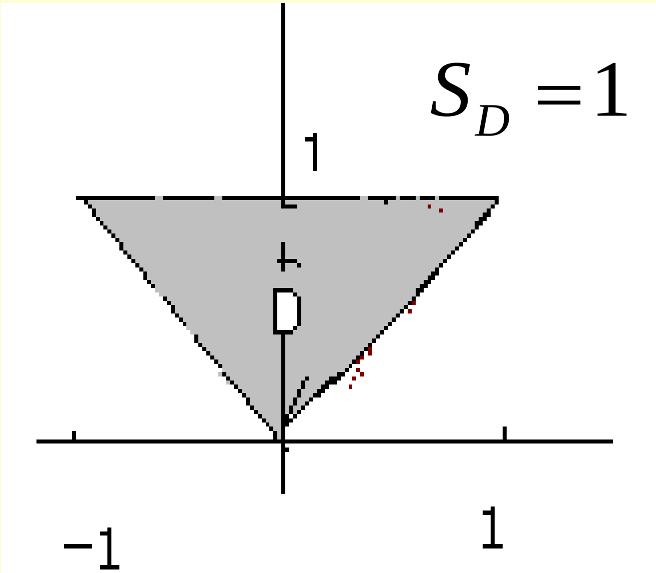
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}},(x,y)\in D\subset R^2\\ 0 \qquad\qquad ,\text{其它}\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域D上(内) 服从均匀分布。

易见，若（X，Y）在区域D上(内) 服从均匀分布，对任意区域G，有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\frac{S_{D\cap G}}{S_D}$$

例4　设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布，
(1) 求(X, Y)的概率密度;
(2) 求P{Y<2X} ;
(3) 求F(0.5, 0.5)

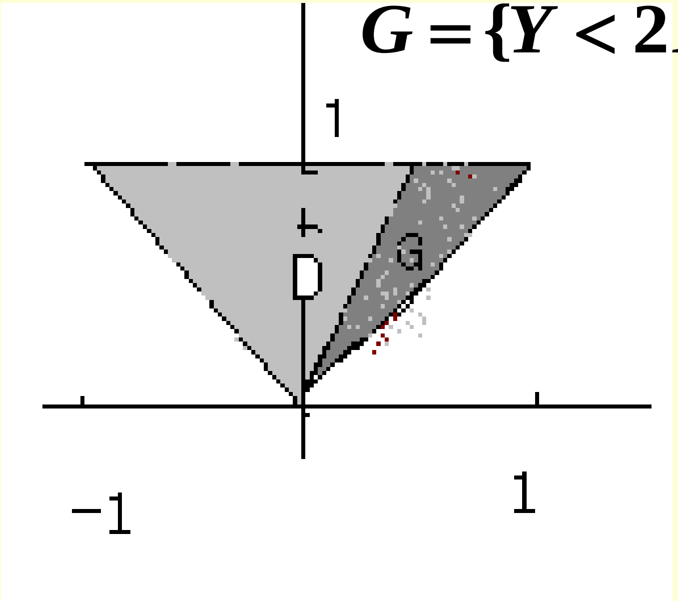


解:

作业9.5,10.7参照此例

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & others\end{cases}$$

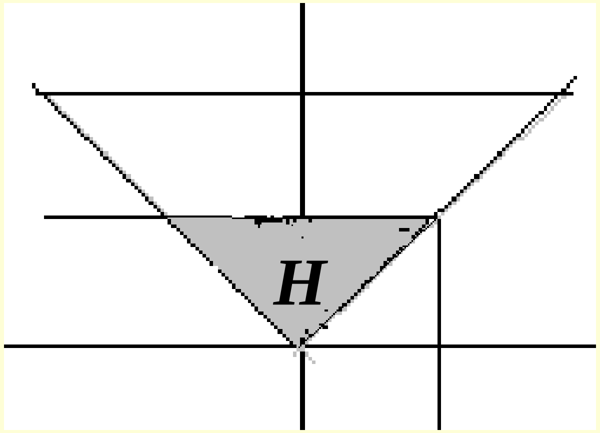
$$S_{D\cap G}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$$



$$(2)P\{Y<2X\}=\frac{1}{4}\Big/1=\frac{1}{4}$$

$$S_{D\cap H}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$H=\{X\le 0.5, Y\le 0.5\}$



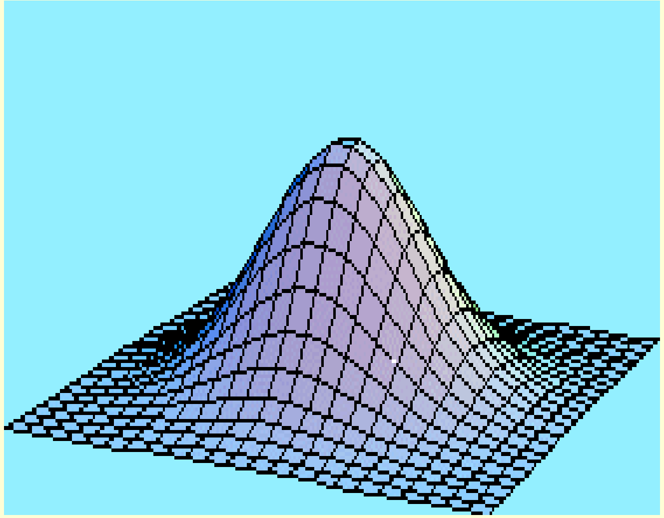
$$\mathbf{(3)}\boldsymbol{F(0.5,0.5)=\frac{1}{4}}$$

(2)二维正态分布

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中，μ_1、μ_2为实数，$\sigma_1>0$、$\sigma_2>0$、$|\rho|<1$，则称(X, Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，可记为



$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

n维随机变量的分布

事实上，对n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数，

或随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合分布函数。

定义. n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots X_n)$，如果存在非负的n元函数$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$使对任意的n元立方体

$$D = \{(x_1, \ldots x_n) : a_1 < x_1 \le b_1, \ldots a_n < x_n \le b_n\}$$

$$P\{(X_1 \ldots X_n) \in D\} = \int_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

则称$(X_1, X_2, ... X_n)$为n维连续型随机变量，称$f(x_1, x_2, ... x_n)$为$(X_1, X_2, ... X_n)$的概率密度。

定义. 若$(X_1, X_2, ... X_n)$的全部可能取值为R^n上的有限或可列无穷多个点，称$(X_1, X_2, ... X_n)$为n维离散型随机变量.

称 **P{X1=x1,X2=x2,...,Xn=xn},(x1,x2,...xn)∈Rn** 为n维随机变量**(X1,X2,...Xn)**的联合分布律。

第一节 二维随机变量小结

知识点

1、二维随机变量的分布函数;

2、二维离散型随机变量的分布律;

3、二维连续型随机变量的概率密度;

4、二维均匀分布与二维正态分布;

5、多维随机变量的分布（了解）

考点

1、会求二维离散型随机变量的分布律;

2、会求二维连续型随机变量的概率密度和分布函数;

3、会求二维连续型随机变量落在某个区域内的概率;

4、会利用二维均匀分布求相应概率;

3.2.边缘分布与独立性

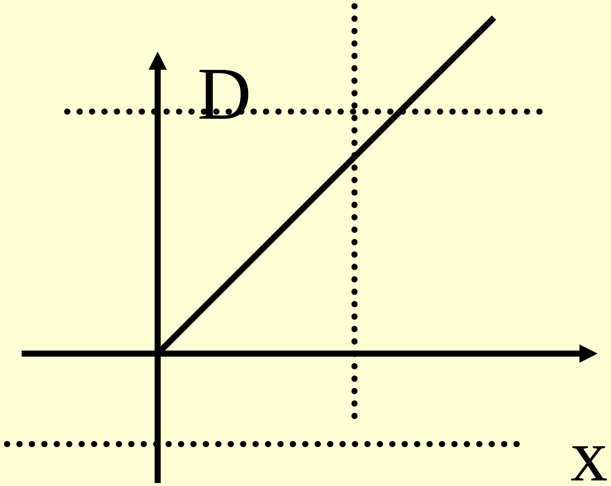
EX:随机变量（X, Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<y \\ 0 & others \end{cases}$

求：（1）P{X≤0}，(2)P{X≤1}，(3)P{Y ≤ y_0}

答: P{X≤0}=0

$$P\{X\le 1\}=\int_0^1 dx\int_x^{\infty} e^{-y}dy=1-e^{-1}$$

$$P\{Y\le y_0\}=\begin{cases} \int_0^{y_0} dx\int_x^{y_0} e^{-y}dy & y_0>0 \\ 0 & y_0\le 0 \end{cases}$$



一、边缘分布函数

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,\ Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty)$$

称为二维随机变量**(X, Y)**关于**X**的边缘分布函数；

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty, Y\le y\}=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y)$$

称为二维随机变量**(X, Y)**关于**X**的边缘分布函数；

边缘分布实际上是高维随机变量的某个

(某些**)**低维分量的分布。

例1 设二维随机变量$(X, \ Y)$的联合分布函数为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \ \mathbf{y})=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\mathbf{x}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\mathbf{y}}{3}\right)$$

求：**X**及**Y**的边缘分布函数.

解：

$$F_X(x)=F(x, \ \infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$$

$$F_Y(y)=F(\infty, \ y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

例2.已知(X,Y)的分布函数为　　作业10.1参照此例

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-y} & 0\le x\le y\\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求$F_X(x)$与$F_Y(y)$。

$$\lim_{y\to+\infty} y^{\alpha}e^{-y}=0\,(\alpha\ge 0)$$

解：$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}-ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

二、边缘分布律

若随机变量X与Y的联合分布律为

$(X, Y) \sim P\{X=x_i, Y=y_j,\}=p_{ij}$, $i, j=1, 2, \ldots$

则称

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

为(X, Y)关于X的边缘分布律

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

为(X, Y)关于Y的边缘分布律。

边缘分布律自然也满足分布律的性质。

例1 已知(X,Y)的分布律为

X\Y	1	0
1	1/10	3/10
0	3/10	3/10

求X、Y的边缘分布律。

解:

X\Y	1	0	$p_{i.}$
1	1/10	3/10	2/5
0	3/10	3/10	3/5
$p_{.j}$	2/5	3/5	

故关于X和Y的分布律分别为:

X	1	0
P	2/5	3/5

Y	1	0
P	2/5	3/5

例 2 从1, 2, 3, 4 这4个数中随机取出一个，记为X，再从1到X中随机地取出一个数，记为Y，试求$(X，Y)$的联合分布律与X及Y各自的边缘分布律.

X 与Y的可能取值都是

$i < j$ 时，$p_{ij} = P\{X$

当$i \geq j$时，由乘法公

$p_{ij} = P\{X = i$

$= P\{X = i\}P$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{4i}$

X \ Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$	

三、边缘密度函数

设$(X, Y) \sim f(x, y)$, $(x, y) \in R^2$，则称

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$

为(X, Y)关于X的边缘密度函数；

同理，称 $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

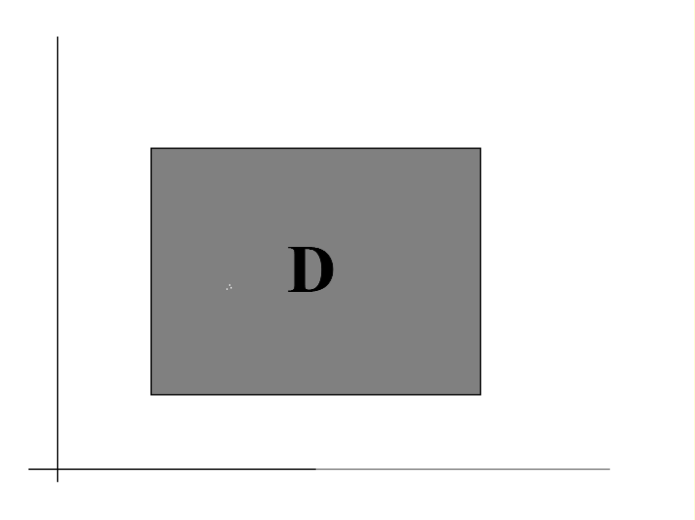
为(X, Y)关于Y的边缘密度函数。

易知$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$的边缘密度函数$f_X(x)$是$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的密度函数，而$f_Y(y)$是$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的密度函数，故二维正态分布的边缘分布也是正态分布。

三种情景下的边缘概率密度

(1) D

$$=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$



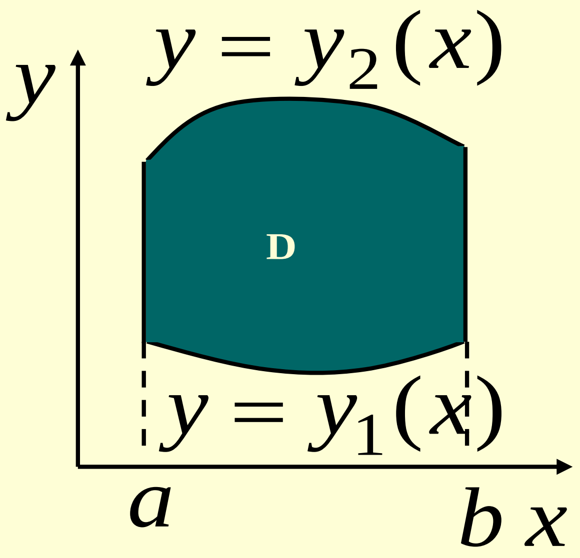
$$f_X(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy\quad a\le x\le b$$

则

$$f_Y(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx\quad c\le y\le d$$

(2) $\mathbf{D}$

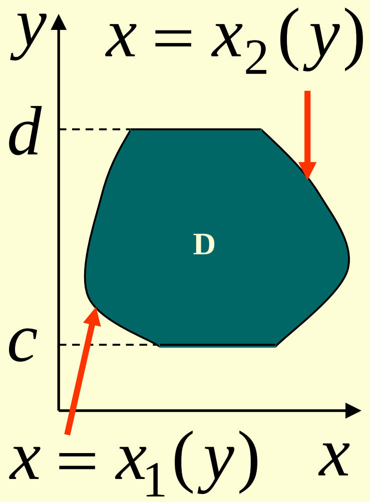
$$= \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) \le \mathbf{y} \le \mathbf{y}_2(\mathbf{x}) \}$$



则

$$\mathbf{f}_X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y}_1(\mathbf{x})}^{\mathbf{y}_2(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\mathbf{d}\mathbf{y} \quad \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

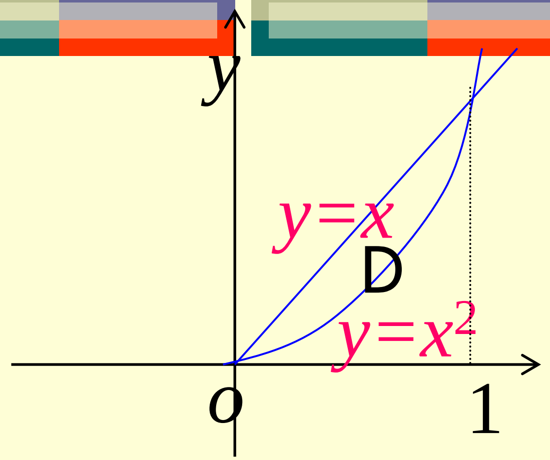
(3) $\mathbf{D} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \middle| \mathbf{c} \le \mathbf{y} \le \mathbf{d},\ \mathbf{x}_1(\mathbf{y}) \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_2(\mathbf{y}) \right\}$



则

$$\mathbf{f}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{x}_1(\mathbf{y})}^{\mathbf{x}_2(\mathbf{y})} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathbf{d}\mathbf{x} \quad \mathbf{c} \le \mathbf{y} \le \mathbf{d}$$

例1 . 设(X, Y)的概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases} c & x^2 \le y < x \\ 0 & others \end{cases}$$

（1）求常数c; (2)求关于X与Y的边缘概率密度

解:(1)由归一性 $\displaystyle \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} c\,dy = 1 \quad \Rightarrow c = 6$

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x \le 0 \ \ or \ \ x \ge 1 \\ \displaystyle\int_{x^2}^{x} 6dy = 6(x-x^2) & 0<x<1 \end{cases}$$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y \le 0 \ \ or \ \ y \ge 1 \\ \displaystyle\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y}-y) & 0<y<1 \end{cases}$$

作业10.2 参照此例

例2 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为

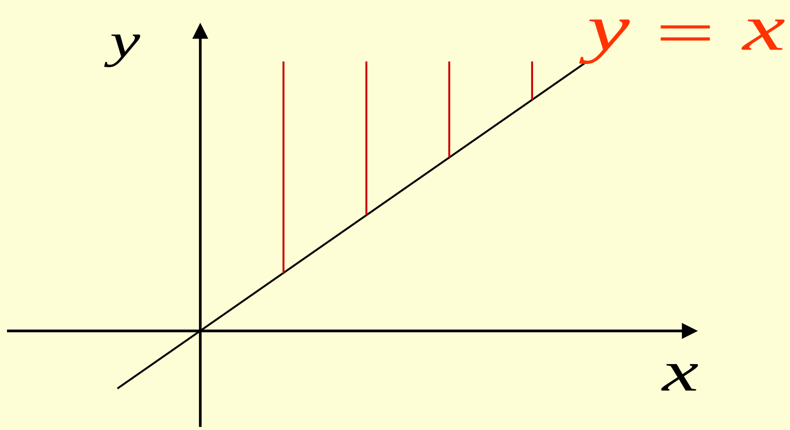
$$f(x, y)=\begin{cases} cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

试求：(1) 常数c;(2) X 及Y的边缘密度函数.

$c=1$

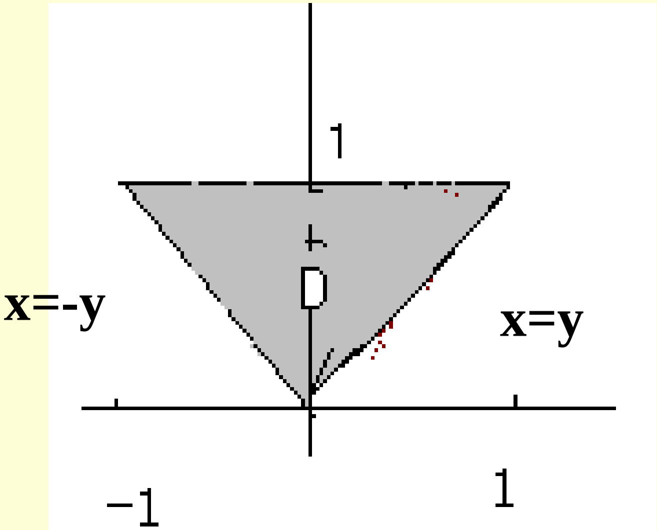
$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$



EX 设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布，

求关于X的和关于Y的边缘概率密度



$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-x}^{1}dy & -1<x<0\\ \displaystyle\int_{x}^{1}dy & 0\le x<1\\ 0 & others\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-y}^{y}dx & 0<y<1\\ 0 & others\end{cases}$$

作业10.2参照此例

四、随机变量的相互独立性

定义* 如果对任意实数 $a<b, c<d$，有

$$P\{a<X\le b, c<Y\le d\}=P\{a<X\le b\}P\{c<Y\le d\}$$

即事件 $\{a<X\le b\}$ 与事件 $\{c<Y\le d\}$ 独立，则称随机变量X与Y独立。

定理：随机变量X与Y独立的充分必要条件是

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

定理. 设(X,Y)是二维连续型随机变量，X与Y独立的充分必要条件是$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

定理. 设(X,Y)是二维离散型随机变量，则X与Y独立的充分必要条件是$P_{i,j}=P_{i\bullet}P_{\bullet j}$

由上述定理可知，要判断两个随机变量X与Y的独立性，只需求出它们各自的边缘分布，再看是否对(X,Y)的每一对可能取值点,边缘分布的乘积都等于联合分布即可

EX：判断前面例子中的X与Y是否相互独立

例1 .已知随机变量(X,Y)的分布律为

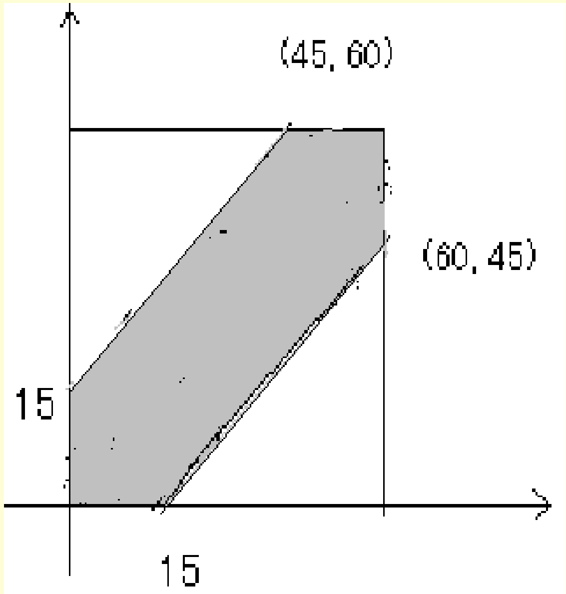
X \ Y	1	2
0	0.15	0.15
1	a	b

且知X与Y独立，求a、b的值。

0.15=0.3（0.15+a）
0.15=0.3（0.15+b）

a=b=0.35

例2 甲乙约定8:00~9:00在某地会面。设两人都随机地在这期间的任一时刻到达，先到者最多等待15分钟过时不候。求两人能见面的概率。



解：设甲于8点X分到，乙于8点Y分到

则X~U(0，60),Y~U(0，60),且X与Y独立，

（X,Y）在{0<x<60,0<y<60}服从均匀分布

所求事件 {|X-Y|≤15}，对应图中阴影部分，

所求事件概率为面积比 $60^2-2*0.5*45^2/60^2=7/16$

五．n维随机变量的边缘分布与独立性

定义. 设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots x_n)$，$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的k（$1\le k<n$)维边缘分布函数就随之确定，如关于(X_1,X_2)的边缘分布函数是 $F_{X1,X2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\infty\ldots\infty)$

若 X_k 的边缘分布函数为$F_{Xk}(x_k),k=1,2,\ldots,n$,

$$F(x_1,\ldots x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\ldots.F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1,X_2,\ldots X_n$ 相互独立，或称$(X_1,X_2,\ldots X_n)$是独立的。

对于离散型随机变量的情形，若对任意整数

n及实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$,有

$$P\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \ldots P\{X_n = x_n\}$$

则称离散型随机变量$\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$相互独立。

设$\mathbf{X_1}$，$\mathbf{X_2}$，…，$\mathbf{X_n}$为**n** 个连续型随机变量，若对任意的$\mathbf{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n}$,

$$\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)}$$

成立，则称$\mathbf{X_1}$，$\mathbf{X_2}$，…，$\mathbf{X_n}$相互独立。

定义 设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的分布函数为 $F_X(x_1,x_2,\ldots x_n)$；m维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$的分布函数为$F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$, $X_1,X_2,\ldots X_n, Y_1,Y_2,\ldots Y_m$ 组成的n+m维随机变量（$X_1,X_2,\ldots X_n, Y_1,Y_2,\ldots Y_m$）的分布函数为F（$x_1,x_2,\ldots x_n, y_1,y_2,\ldots y_m$).

如果

$$F(x_1,x_2,\ldots x_n, y_1,y_2,\ldots y_m)= F_X(x_1,x_2,\ldots x_n)\, F_Y(y_1,y_2,\ldots y_m)$$

则称n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$与m维随机变量$(Y_1,Y_2,\ldots Y_m)$独立。

定理 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$相互独立，则X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$与Y_j $(j=1, 2, \ldots, m)$相互独立；又若h, g是连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$与$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$相互独立.

第二节 边缘分布与独立性小结

知识点

1、边缘分布函数；

2、边缘分布律；

3、边缘密度函数；

4、二维随机变量的独立性；

5、多维随机变量的独立性（了解）。

考点

1、会求二维随机变量边缘分布函数；

2、会求二维离散型随机变量的边缘分布律；

3、会求二维连续型随机变量的边缘概率密度；

4、会利用独立性解题。

3.3 条件分布(4.5学分)

一.离散型随机变量的条件分布律

设随机变量X与Y的联合分布律为

$(X, Y) \sim P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, $(i, j=1, 2, \ldots)$,

X和Y的边缘分布律分别为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j\geq 1} p_{ij} \qquad i=1,2,\ldots$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i\geq 1} p_{ij} \qquad j=1,2,\ldots$$

若对固定的j, $p_{.j}>0$, 则称

$$p_{i|j}=P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{.j}},\quad j=1,2,\ldots$$

为在Y＝ y_j的条件下，X的条件分布律;

同理，对固定的i, $p_{i.}>0$, 称

$$P_{j|i}=P\{Y=y_j\,|\,X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i.}},\quad j=1,2,\ldots$$

为X＝ x_i的条件下，Y的条件分布律;

EX 设某昆虫的产卵数X服从参数为50的泊松分布，又设一个虫卵能孵化成虫的概率为0.8,且各卵的孵化是相互独立的，求此昆虫产卵数X与下一代只数Y的联合分布律.

解：X的分布律为P（50），即

$$p_{i.}=P\{X=i\}=\frac{50^{i}}{i!}e^{50},i=0,1,\cdots$$

题目

该昆虫下一代的只数Y在X＝i的条件下服从参数为0.8的二项分布，即

$$P\{Y=j|X=i\}=C_i^j\,0.8^j0.2^{i-j}\quad j=0,1,\cdots,i$$

所以X与Y的联合分布律为

$$P\{X=i，Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\}=\frac{50^{i}}{i!}e^{50}C_i^j\,0.8^j0.2^{i-j}\quad i=0,1,\cdots,\;j=0,1,\cdots,i$$

二 连续型随机变量的条件概率密度

定义： 给定y，设对任意固定的正数ε>0，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\{X \le x \mid y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}$$

存在，则称此极限为在Y=y条件下X的条件分布函数.
记作

$$F_{X|Y}(x \mid y) \equiv P\{X \le x \mid Y = y\}$$

可证当 $f_Y(y) \ne 0$ 时

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

若记 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 为在Y=y条件下X的条件概率密度，则由,当 $f_Y(y)\neq 0$ 时，

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{\partial F_{X|Y}(x\,|\,y)}{\partial x}=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

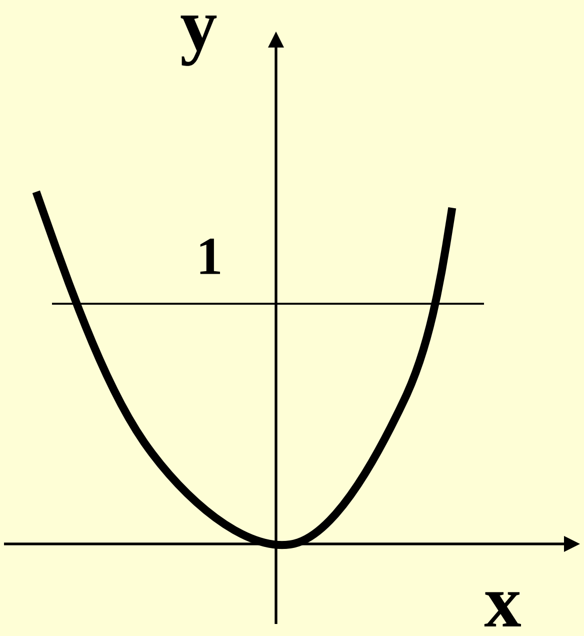
类似定义，当 $f_X(x)\neq 0$ 时

$$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_X(x)}$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{\partial F_{Y|X}(y\,|\,x)}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例2. 已知(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



(1)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$

(2)求条件概率 $P\{Y>1/3\,|\,X=-1/3\}$

解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right), & -1<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

当 $-1<x<1$ 时,

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因为 $$f_{Y|X}(y|-1/3)=\frac{f(-1/3,y)}{f_X(-1/3)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-1/81}, & 1/9<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$P\{Y>\tfrac{1}{3}\mid X=-\tfrac{1}{3}\}\quad=\int_{1/3}^{1}\frac{2y}{1-1/81}dy=0.9$$

第三节 条件分布小结

知识点

1、二维离散型随机变量的条件分布律；

2、二维连续型随机变量的条件概率密度；

考点

1、会求二维离散型随机变量的条件分布律；

2、会求二维连续型随机变量的条件概率密度；

3.4 多维随机变量函数的分布

一、二维离散型随机变量函数的分布律

设二维离散型随机变量（X，Y），

$(X, Y) \sim P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$， $i, j=1, 2, \ldots$

则 $Z=g(X, Y) \sim P\{Z=z_k\}=\sum\limits_{i,j:g(x_i,y_j)=z_k} p_{ij}=p_k$，

$k=1, 2, \ldots$

或

(X,Y)	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)	…	(x_i,y_j)	…
p_{ij}	p_{11}	p_{12}		p_{ij}	
$Z=g(X,Y)$	$g(x_1,y_1)$	$g(x_1,y_2)$		$g(x_i,y_j)$	

EX 设随机变量X与Y独立，且均服从0-1分布，其分布律均为

X	0	1
P	q	p

(1) 求$W=X+Y$的分布律;

(2) 求$V=\max(X,Y)$的分布律;

(3) 求$U=\min(X,Y)$的分布律。

(4) 求w与V的联合分布律。

作业10.3参照此例

(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
p_{ij}	q^2	pq	pq	p^2
$W = X + Y$	0	1	1	2
$V = \max(X, Y)$	0	1	1	1
$U = \min(X, Y)$	0	0	0	1

V \ W	0	1	2
0	q^2	0	0
1	0	$2pq$	p^2

二、多个随机变量函数的密度函数

分布函数法

若(X1, X2, …, Xn)~f (x1, x2, …, xn)，(x1, x2, …, n)∈Rn, Y=g(X1, X2, …, Xn)，则可先求Y的分布函数:

$$\mathbf{F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X_1, \ldots, X_n) \le y\}}$$

$$= \int_{g(x_1,\ldots,x_n)\le y} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

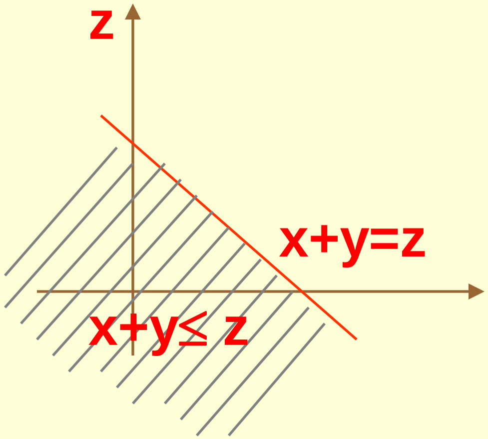
然后再求出Y的密度函数: $f_Y(y) = F_Y'(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

几个常用函数的密度函数

1、和的分布

已知(X, Y)～f(x, y)，(x, y)∈R^2，求Z＝X＋Y的密度。

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)\,dy \overset{\text{或}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,dx$$



若X与Y相互独立，则Z＝X＋Y的密度函数

$$\mathbf{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \overset{\text{或}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.}$$

例1. 设随机变量X与Y相互独立，且X ～U（0, 1），Y ～ Exp(1), 求随机变量Z=X+Y的概率密度。

解：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

需要满足条件 $0<z-y<1, y>0$ 即 $z-1<y<z, y>0$

$$=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ \int_0^z 1\times e^{-y}dy & 0<z<1 \\ \int_{z-1}^{z} 1\times e^{-y}dy & z\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & z\le 0 \\ 1-e^{-z} & 0<z<1 \\ (e-1)e^{-z} & z\ge 1 \end{cases}$$

例2设随机变量X与Y独立且均服从标准正态分布，求证：Z=X+Y服从N（0，2）分布。

一般地，设随机变量X_1, X_2，..., X_n独立且X_i服从正态分布$N(\mu_i, \sigma_i^2)$,i=1,...,n, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a_0 \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + a_0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

例3卡车装运水泥,设每袋水泥的重量X(kg)服从$N(50,2.5^2)$分布,该卡车的额定载重量为2000kg,问最多装多少袋水泥,可使卡车超载的概率不超过0.05?

解:设最多装n袋水泥,X_i为第i袋水泥的重量.

则由题意,令 $P\{\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\} \le 0.05$ $\quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(50n, 2.5^2 n)$

$$\Leftrightarrow P\{\sum_{i=1}^{n} X_i > 2000\} = 1 - \Phi\left(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right) \le 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \quad \text{查表得} \quad \frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}} \ge 1.645 \Rightarrow n \le 39$$

2、最大(小)值的分布

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)$，记

$$M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

则M和N的分布函数分别为：

$$F_M(x) = F_1(x) \ldots F_n(x)$$

$$F_N(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(x)]$$

$$F_M(x) = P\{M \le x\}$$

$$= P\{\max(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) \le x\}$$

$$= P\{ X_1 \le x, \quad X_2 \le x, \quad \cdots, \quad X_n \le x \}$$

$$= P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\} \cdots P\{X_n \le x\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{N}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\{\mathrm{N} \le \mathbf{x}\}$$

$$= P\{\min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) \le x\}$$

$$= 1 - P\{\min(X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n) > x\}$$

$$= 1 - P\{ X_1 > x, \quad X_2 > x, \quad \cdots, \quad X_n > x \}$$

$$= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}\cdots P\{X_n > x\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X_1 \le x\}][1 - P\{X_2 \le x\}]\cdots[1 - P\{X_n \le x\}]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(x)]$$

特别，当$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布(分布函数相同)时，则有

$$F_M(x) = [F(x)]^n$$

$$F_N(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

进一步地，若$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立且具相同的密度函数f (x)，则M和N的密度函数分别由以下二式表出

$$f_M(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

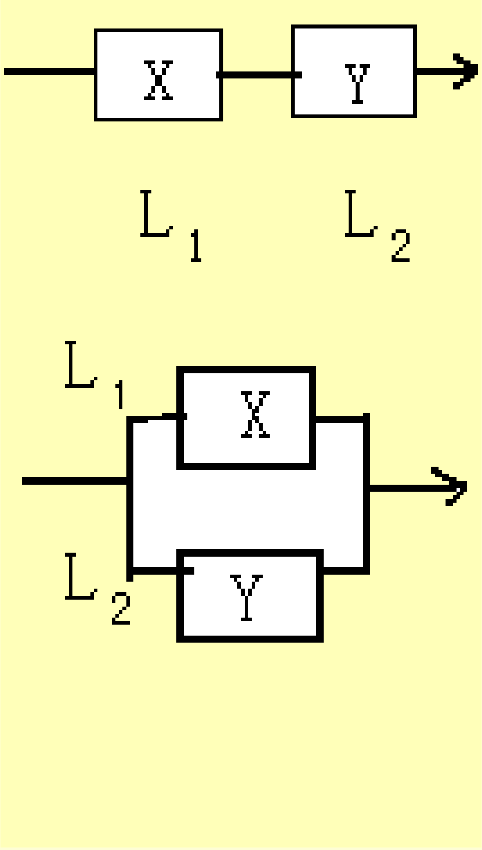
$$f_N(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

例3 设系统L由两个相互独立的子系统联接而成，联接的方式分别为(i)串联，(ii)并联，如图所示设L_1,L_2的寿命分别为X与Y，已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中α>0，β>0,试分别就以上两种联结方式写出L的寿命Z的概率密度.



解： $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

(1)串联时： Z= min{X,Y}

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

（2）并联时：Z=max{X,Y}

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\,e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=F_X(z)\,F_Y(z)=\begin{cases}\left(1-e^{-\alpha z}\right)\left(1-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\,e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

第四节 多维随机变量函数的分布小结

知识点

1、二维离散型随机变量函数的分布律；

2、二维连续型随机变量函数的概率密度；

考点

1、会求二维离散型随机变量函数的分布律；

2、会求二维连续型随机变量函数的概率密度；

第三章小结

多维随机变量

二维随机变量函数的分布

离散型——分布律
归一性
概率计算
分布函数与分布立场律的互变

分布函数
归一性
概率计算

连续型——概率密度
归一性
概率计算
分布函数与概率密度的互变

边缘分布律

边缘分布函数

边缘概率密度

均匀分布
正态分布

独立性