一. 在[0, 1]区间上随机取一点，将区间分成两段. (1) 求分点到区间任一端点的距离小于$\frac{1}{3}$的概率；(2)求短的一段与长的一段之比大于$\frac{1}{3}$的概率。

解：设分点坐标为X，由题意，X~$U(0, 1)$，

(1) $P\left\{X<\frac{1}{3}\cup X>\frac{2}{3}\right\}=P\left\{X<\frac{1}{3}\right\}+P\left\{X>\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$

(2) 设A--短的一段与长的一段之比大于$\frac{1}{3}$

则

$$P(A)=P\left\{\frac{X}{1-X}>\frac{1}{3}\mid X<\frac{1}{2}\right\}P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}+P\left\{\frac{1-X}{X}>\frac{1}{3}\mid X>\frac{1}{2}\right\}P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$$

$$=P\left\{X>\frac{1}{4},X<\frac{1}{2}\right\}+P\left\{X<\frac{3}{4},X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

二. 一秘书负责 5 部电话的接听工作，在同一时刻每部电话需要接听的概率均为 0.3, 设同一时刻有 X 部电话需要接听，（1）求同一时刻至少有 2 部电话需要接听的概率。(2)求随机变量 X 的数学期望与方差。

解： 由题意

$X\sim B(5,0.3)$, $P\{X=k\}=C_5^k 0.3^k 0.7^{5-k}, k=0,1,\ldots,5$，

$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-0.7^5-5\times 0.3\times 0.7^4=$

$E\left(X\right)=5\times0.3=1.5,\qquad D\left(X\right)=5\times0.3\times0.7=1.05$

三. 设星球A至最近的星球B的距离X（光年）的分布函数为

$$F(x)=1-\theta^{-\frac{4}{3}\pi\lambda x^3},x\geq0$$

（1） 若$\theta=2,\lambda=\frac{1}{4}$，求星球 A 至最近的星球 B 的距离大于 0.5 光年的概率；

求 B 对 A 的引力$Y=\frac{k}{X^2}(k>0$，为常数）的分布函数。

解：（1）若$\theta=2,\lambda=\frac{1}{4}$，则$F(x)=1-2^{-\frac{1}{3}\pi x^3},x\geq0$，

$P\left\{X>0.5\right\}=1-F\left(0.5\right)=2^{-\frac{1}{3}\pi\times0.5^3}\approx0.913$

（2）

$$F_Y(y)=P\left\{\frac{k}{X^2}\leq y\right\}=P\left\{\frac{k}{X^2}\leq y\right\}=P\left\{X^2\geq\frac{k}{y}\right\}$$

$$=P\left\{X\geq\sqrt{\frac{k}{y}}\right\}=\theta^{-\frac{4}{3}\pi\lambda\left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{3}{2}}},y>0$$

四，已知 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\leq x\leq y\\ 0 & 其它\end{cases}$，（1）求 X、Y 的概率密度；（2）问 X 与 Y 独立吗？

解：（1）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2）$\because f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y不独立。

五. 设$X\sim N(-1,1)$ $Y\sim N(1,1)$，（1）若 X与 Y独立，，求$\{X+Y>1\}$的概率。(2) 若 X与 Y的相关系数为$\rho=0.5$，求 Z_1=αX+βY 和 Z_2= αX–βY 的相关系数（其中α、β是不为零的常数）。

解:(1) 若 X与 Y独立, $X+Y\sim N(0,2)$, 于是

$$P\{X+Y>1\}=1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-\Phi(0.71)\approx 0.24$$

（2） D(Z_1)=D(αX+βY)=α^{2}D(X)+β^{2}D(Y)+

$2\alpha\beta\rho\sigma^2=\left(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\right)$,

（3） D(Z_2)=D(αX–βY)= α^{2}D(X)+β^{2}D(Y)

$-2\alpha\beta\rho\sigma^2=\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\right)$

CoV(Z_1 , Z_2)=Cov(αX+βY, αX–βY)

=α ^{2}Cov(X, X) – β ^{2}Cov(Y, Y)+αβ Cov(X, Y) –

αβ Cov(Y, X) = $\alpha^2-\beta^2$

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}$$

六.(15分) 一大批鸡蛋中有15%是莱克亨品种，单枚重量X(克)服从正态分布$N\left(60,5^2\right)$，其余 85%是当地品种,单枚重量Y(克)服从正态分布$N\left(50,6^2\right)$.(1) 从这批鸡蛋中任取 1 枚，其重量小于 60 克的概率是多少？（2）从这批鸡蛋中抽取 500 枚，试用中心极限定理近似计算单枚重量大于 60 克的鸡蛋数不低于 80 枚的概率是多少？

解:(1) 设 A 从这批鸡蛋中任取 1 枚，其重量小于 60 克,B—取到莱克亨品种的鸡蛋

由全概率公式，

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P\left(A\mid \bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)$$

$$=P(X<60\mid B)P(B)+P\left(Y<60\mid \bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{60-60}{5}\right)\times 0.15+\Phi\left(\frac{60-50}{6}\right)\times 0.85$$

$$=0.5\times 0.15+\Phi(1.67)\times 0.85\approx 0.88$$

（2）设 Z 为从这批鸡蛋中抽取 500 枚，其

中 单 枚 重 量 大 于 60 克 的 鸡 蛋 数 ， 则 $Z \sim B(500, 0.12)$, 由中心极限定理,

$$P\{Y \geq 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - 500 \times 0.12}{\sqrt{500 \times 0.12 \times 0.88}}\right) \approx 1 - \Phi(2.75) \approx 0.003$$

七设总体 X 具有概率密度为

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是未知参数， $\alpha > 0$ 是已知常数，试根据来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ ，(1) 求 λ 的极大似然估计. (2) 求 $\theta = \frac{1}{\lambda}$ 的极大似然估计。

解：样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda\alpha x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i^{\alpha}}) = \lambda^n \alpha^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1},$$

则

$$LnL(\lambda) = nLn\lambda + nLn\alpha - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} + Ln\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}$$

令

$$dLnL(\lambda)/d\lambda = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} = 0$$ 得

$\hat{\lambda} = n / \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$.

（2）$\theta = \frac{1}{\lambda}$关于$\lambda$严单，$\therefore \hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$

八．岩石密度的测量误差服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，在某次岩石密度测定中，检查了 6 块标本，测得数据如下：0.0987　0.11　0.101　0.0983　0.0997　0.0995

（1）试在水平$\alpha = 0.05$下检验是否可以认为平均测量误差为 0.1。

(2) 若已知$\mu = 0.1$，取σ^2 的区间估计为$\left(\frac{\sum_{i=1}^{6}(X_i - 0.1)^2}{171.2}, \frac{\sum_{i=1}^{6}(X_i - 0.1)^2}{24.3} \right)$，问此区间的置信度是多少？

解：（1）$H_0 : \mu = 0.1;\ \ H_1 : \mu \neq 0.1$

H_0下，$T = \frac{\bar{X} - 0.1}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

水平$\alpha = 0.05$的检验拒绝域为，$|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = 2.5706$

我们有 $\bar{x}=0.1012, s=4.4109\times10^{-3}$，由此，可得 $|t|\approx 0.067<2.5706$，

接受 H_0，可以认为平均测量误差为 0.1。

（2）此区间的置信度为

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(X_i-0.1\right)^2}{86.689}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(X_i-0.1\right)^2}{7.422}\right)$$

$$=P\left\{7.422<\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(X_i-0.1\right)^2}{\sigma^2}<86.689\right\}$$

$$=P\left\{7.422<\chi^2(6)<86.689\right\}\approx 30\%$$

9 设 $Y(t)=\sin(2\pi Xt), t=1,2,\cdots$，其中随机变量 X 服从区间（0，1）上的均匀分布，证明随机过程 $\{Y(t), t=1,2,\cdots\}$ 是平稳过程，但不是严平稳过程。

证明（1）

$$\mu_X(t)=E[\sin(2\pi Xt)]=\int_0^1\sin(2\pi xt)dx=0, t=1,2,\cdots$$

$$R_X(s,t)=E(X(s)X(t))=E[\sin(2\pi Xs)\sin(2\pi Xt)]$$

$$=\int_0^1\sin(2\pi xs)\sin(2\pi xt)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[\cos(2\pi(t-s)x)-\cos(2\pi(t+s)x)]dx$$

$$=\begin{cases}1/2, t=s\\ 0, t\neq s\end{cases}; s,t=1,2,\cdots$$

只与 $(t-s)$ 有关，所以是平稳过程。

（2）$\{Y(t),t=1,2,\cdots\}$ 不是严平稳过程，因为对于 $\forall t=1,2,\cdots$，$Y(t)=\sin(2\pi Xt)$ 的概率密度函数为

$$f_{Y(t)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi t\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1\\ 0, \qquad others\end{cases}$$

即 $\{Y(t),t=1,2,\cdots\}$ 的一维概率密度函数与时间 t 有关，所以 $\{Y(t),t=1,2,\cdots\}$ 不是严平稳过程。