一. 一批灯泡有 40 只，其中有 3 只次品，从中任取 3 只．问：（1）3 只都是好的概率是多少？（2）3 只中有 2 只次品概率是多少？(3) 所取3只灯泡中次品数的期望与方差是多少？

解： 设 X--任取 5 只检查，其中次品灯泡的个数

(1) $P\{X=0\}=\frac{C_{37}^{3}}{C_{40}^{3}}=\frac{777}{988}$

(2) $P\{X=2\}=\frac{C_{3}^{2}C_{37}^{1}}{C_{40}^{3}}=\frac{111}{9880}$ (3)

X	0	1	2	3
P_k	$\frac{C_{37}^{3}}{C_{40}^{3}}$	$\frac{3C_{37}^{2}}{C_{40}^{3}}$	$\frac{C_{3}^{2}C_{37}^{1}}{C_{40}^{3}}$	$\frac{1}{C_{40}^{3}}$

$\therefore\ E(X)=\sum_{k=1}^{3}kP\{X=k\}=$ 0.225

$E(X^2)=\sum_{k=1}^{3}k^2P\{X=k\}=$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=$0. 197

二. 设某商店中每月某种电器商品的销售量

（台）近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，根据调查发现,每月销售量不超过 90 台的概率为 2.28%,每月销售量超过 105 台的概率为 15.87%.

问在月初进货时至少要库存多少台此种电器，才能保证当月脱销的概率不超过 1%?

解：设月初进货 n 台，X 为该种商品的当月销售量，则 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$。

已知，$\begin{array}{l} P\{X<90\}=\Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.0228 \\ P\{X>105\}=1-\Phi\left(\dfrac{105-\mu}{\sigma}\right)=0.1587 \end{array}$，查表得：

$$-\frac{90-\mu}{\sigma}=2$$

$$-\frac{105-\mu}{\sigma}=1 \quad -$$

解出 $\mu=100,\sigma=5$，故令

$$P\{X>n\}=1-\Phi\left(\frac{n-100}{5}\right)<0.01 \Rightarrow \frac{n-100}{5}>2.33 \Rightarrow n\geq 112$$

三. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{Ax}{(1+x)^4} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

（1）求常数 A；（2）求 X 的分布函数。（3）求$Y=1-X^2$的分布函数

解：（1）$\int_0^{\infty}\frac{Ax}{(1+x)^4}dx=1\Rightarrow A=6$ （2）

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x\frac{6t}{(1+t)^4}dt=1-\frac{3x+1}{(1+x)^3} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

（3） $F_Y(y)=P\left\{1-X^2\le y\right\}=P\left\{X^2\ge 1-y\right\}$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\left\{X^2\ge 1-y\right\}=1$

当$y<1$时，

$$\mathbf{F_Y(y)}=\mathbf{P}\left\{\mathbf{X}^2>1-\mathbf{y}\right\}=\mathbf{P}\left\{\mathbf{X}>\sqrt{1-\mathbf{y}}\right\}+\mathbf{P}\left\{\mathbf{X}<-\sqrt{1-\mathbf{y}}\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{\mathbf{X}>\sqrt{1-\mathbf{y}}\right\}$$

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{1-y}+1}{\left(1+\sqrt{1-y}\right)^3} & y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

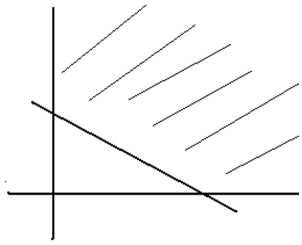
四，（15 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求$P\{X+2Y>1\}$；（2）(X,Y)关于 X 的边缘概率密度；

（3）求常数a，使得$P\{X>a\}=0.05$

解：（1）



$$P\{X+2Y>1\}=\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{2}}^{\infty} 2e^{-(x+2y)}dy+\int_1^{\infty} dx\int_0^{\infty} 2e^{-(x+2y)}dy=$$

（2）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)dy=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \int_0^{\infty} 2e^{-(x+2y)}dy=e^{-x} & x>0 \end{cases}$$

（3）

$$P\{X>a\}=\int_a^{\infty} e^{-x}dx=e^{-a}=0.05\Rightarrow a=-\ln 0.05\approx 3$$

五. 某运输公司有 500 辆汽车参加保险，在一年里汽车出事故的概率为 0.006，参加保险的汽车每年交 800 元的保险费。(1) 若出事故，保险公司最多赔偿 5000 元，求保险公司一年赚钱不小于 200,000 元的概率. (2)

其它条件不变，为使保险公司一年赚钱不小于 200,000 元的概率不低于 95%， 保险费至少应提高到多少?

解：（1） 设 A--保险公司一年赚钱不小于 200,000 元， 以 X 表示 500 辆汽车出事故的车辆数，则 X~B（500，0.006），由中心极限定理， 则所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P(A) = P\{500\times 800 - 50000X > 200000\}\\
&= P\{0 < X < 4\}\\
&= P\{\frac{0-3}{\sqrt{2.982}} \le \frac{X-3}{\sqrt{2.982}} \le \frac{4-3}{\sqrt{2.982}}\}\\
&\quad \approx \Phi(21.4) \approx 1
\end{aligned}
$$

（2） 假定每辆车交 a 元保险费，则令

$$P\{500a - 50000X > 200000\} = P\{0 < X < \frac{200000-500a}{50000}\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{500a-200000}{50000}-3}{\sqrt{2.982}}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{2.982}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{\frac{500a-200000}{50000}-3}{\sqrt{2.982}}\right) - 0.0409 > 0.95$$

解得： $a \geq 458$

六. 设总体 X 服从二项分布，它的概率分布为

$P(X=k)=C_l^k p^k(1-p)^{l-k}$， $k=0,1,\cdots l$， $0<p<1, q=1-p$，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，假定 l 已知，

(1)求未知参数 p 的极大似然估计 $\hat{p}_{MLE}$； (2)判断 $\hat{p}_{MLE}$ 的无偏性；(3)求 $\hat{p}_{MLE}$ 的方差

解：(1) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的子样观察值，那么 p 的似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} C_l^{x_i} p^{x_i} q^{l-x_i}$$

就有

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n} \ln C_l^{x_i}+\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p+\sum_{i=1}^{n}(l-x_i) \ln q$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp}=\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^{n} x_i-\frac{ln}{q}=0$$

从而，可得 $\hat{p}_{MLE}=\frac{1}{ln} \sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{\bar{X}}{l}$

(2) $E\hat{p}_{MLE}=\frac{E\left[\bar{X}\right]}{l}=\frac{E[X]}{l}=\frac{lp}{l}=p$

故 $\hat{p}_{MLE}$ 是无偏的；

(3) $D\hat{p}_{MLE}=\frac{D\left[\bar{X}\right]}{l^2}=\frac{D[X]}{nl^2}=\frac{lp(1-p)}{nl^2}=\frac{p(1-p)}{nl}$

七、某铝厂生产一种铝箔，长期正常生产积累的资料表明，铝箔片厚度服从正态分布，厚度的数学期望为 0.13 毫米。工厂引进一种新技术后，在某日的产品中，随机抽查 10 片，测得样本观察值的均值为 0.146 毫米，样本标准差为 0.015 毫米。问采用这种新技术后所生产铝箔厚度的数学期望与往日是否有显著降低（显著水平α =0.05）？

解

H_0： $\mu \geq \mu_0 = 0.13$， H_1： $\mu < \mu_0$

检验统计量为 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$， H_0 的拒绝域为 $W = \{t : t \leq t_\alpha(n-1)\}$

计算得 $\bar{x} = 0.146$ ， $s = 0.015$ ，

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.146 - 0.13}{0.015/\sqrt{10}} = 3.373$$

对 $a = 0.05$ 自由度 $n-1=9$，查 t- 分布表，

得 $t_{0.05}(9) = 1.8331$

因为 $3.573 > 1.8331$, 所以拒绝 H_0，即可以认为该日生产的铝箔片厚度的数学期望比往日有显著降低。

八、设随机过程$X(t)=e^{-At},t>0$，其中随机变量 A 服从区间（0，1）上的均匀分布，求过程的均值函数和自相关函数。

解 $\mu_X(t)=E(e^{-At})=\int_0^1 e^{-xt}dx=\frac{1}{t}(1-e^{-t})$, $t>0$

$$R_X(s,t)$$
$$=E(X(s)X(t))=\int_0^1 e^{-xs}e^{-xt}dx$$
$$=\int_0^1 e^{-x(s+t)}dx=\frac{1}{s+t}(1-e^{-(s+t)})$$

九、设随机过程$X(t)$是平稳过程，随机变量 Y 与$X(t)$相互独立，即对于任意的t，随机变量 Y 均与$X(t)$独立，证明$Z(t)=X(t)+Y$也是平稳过程。

证 因为 $X(t)$ 是平稳过程，所以 $\forall t,E(X(t))=c(\text{常数})$，$R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$

设 $E(Y)=a,E(Y^2)=b$，

$\forall t,E(Z(t))=E(X(t))+E(Y)=c+a$，也是常数；

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$$
$$=E[(X(t)+Y)\cdot(X(t+\tau)+Y)$$
$$=E[(X(t)\cdot(X(t+\tau)]+E[X(t)\cdot Y]+E[Y\cdot X(t+\tau)]+E[Y^2]$$
$$=R_X(\tau)+E[X(t)]\cdot E(Y)+E(Y)\cdot E[X(t+\tau)]+E[Y^2]$$
$$=R_X(\tau)+2ac+b$$

即 $R_Z(t,t+\tau)$ 只与 τ 有关，所以 $Z(t)=X(t)+Y$ 也是平稳过程。