概率与统计

开课系：数学与统计学院概率统计系

教师: 陆中胜
E-mail:lusin2000@163.com

教材：《概率论与数理统计》

刘力维 等编　　　　　　高等教育出版社

2010　第一版　　　2019第二版

参考书1：《概率论与数理统计》

浙江大学 盛骤等编　　　高等教育出版社

参考书2：《概率与统计》

陈萍 等编　　　　　　科学出版社

自然现象分类

确定性现象:

1、磁铁的同性相斥,异性相吸

2、液体在达到沸点时就会沸腾

不确定性现象:

1、抛硬币猜正反面

2、某一时刻新街口等车的人数

3、某个教室在一天中的某个时刻的学生数

序言

概率论是研究什么的?

随机现象：在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象。

不确定性与统计规律性的统一

概率论——研究和揭示随机现象的统计规律性的科学

第一章 概率论的基础知识

- 1、随机事件及其运算
- 2、古典概型
- 3、频率与公理化概率
- 4、条件概率
- 5、事件的独立性

1.1 随机事件及其运算

一、随机试验

对随机现象的观察，称为随机试验。简称试验。

随机试验的特点

1.可在相同条件下重复进行;

2.试验结果可能不止一个,但能明确所有的可能结果;

3.试验前无法确定是哪个结果会出现。

随机试验可表为E

随机试验的例子

E_1: 抛一枚硬币，分别用 “H” 和 “T” 表示出正面和反面, 观察正反面出现的情况;

E_2: 将一枚硬币连抛三次，观察正面出现的次数;

E_3:将一枚硬币连抛三次，观察正反面出现的情况;

E_4:掷一颗骰子，观察可能出现的点数;

E_5: 记录某网站一分钟内受到的点击次数;

E_6:在一批灯泡中任取一只，测其寿命;

E_7:任选一人，记录他的身高和体重 。

二、样本空间

1、样本空间：试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，记为S（Ω）.

2、样本点：试验的每一个结果或样本空间的元素称为一个样本点,记为e（ω）.

3.由一个样本点组成的单点集称为一个基本事件,记为{e}（{ω}）.

请给出试验E1—E7的样本空间

随机试验的样本空间

E_1: 抛一枚硬币，分别用“H”和“T”表示出正面和反面，观察正反面出现的情况; {H,T}

E_2: 将一枚硬币连抛三次，观察正面出现的次数;{0,1,2,3}

E_3:将一枚硬币连抛三次，观察正反面出现的情况；

$$S_3= \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}$$

E_4:掷一颗骰子，观察可能出现的点数；{1,2,3,4,5,6}

E_5: 记录某网站一分钟内受到的点击次数；$\{n: n\geq 0, n\in Z\}$

E_6:在一批灯泡中任取一只，测其寿命; $\{t: t\geq 0, t\in R\}$

E_7:任选一人，记录他的身高和体重 。

$\{(h,t): h_1\leq h \leq h_2 , t_1\leq t \leq t_2 \}$

三、随机事件

定义

试验中可能出现也可能不出现的情况叫“随机事件”，简称“事件”。记作A、B、C等。

注

任何事件均对应着样本空间的某个子集.

定义

样本空间的子集称为**随机事件**。

称**事件A发生**当且仅当试验的结果是子集A中的元素

例1

E4: 掷一颗骰子，考察可能出现的点数。

S4={1,2,3,4,5,6};

A="掷出偶数点" ={2，4，6}

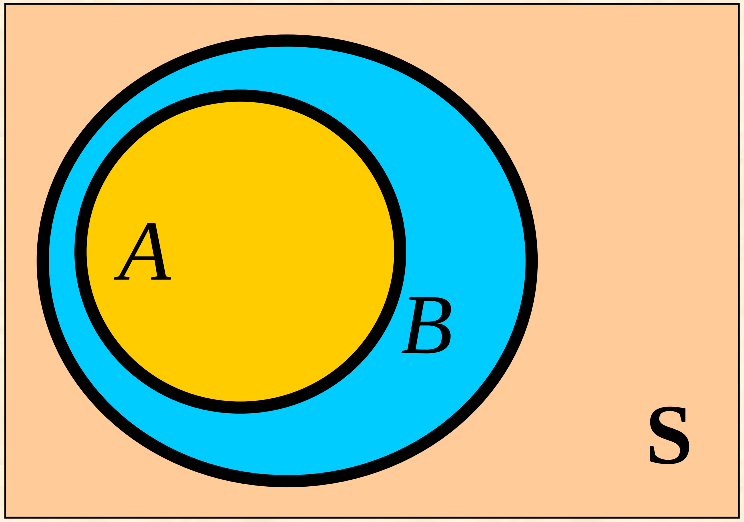
B="掷出大于4的点" ={5，6}

C="掷出奇数点"={1，3，5}

几个特殊事件: 必然事件S 、不可能事件ϕ、
基本事件{e}

四、事件间的关系和运算

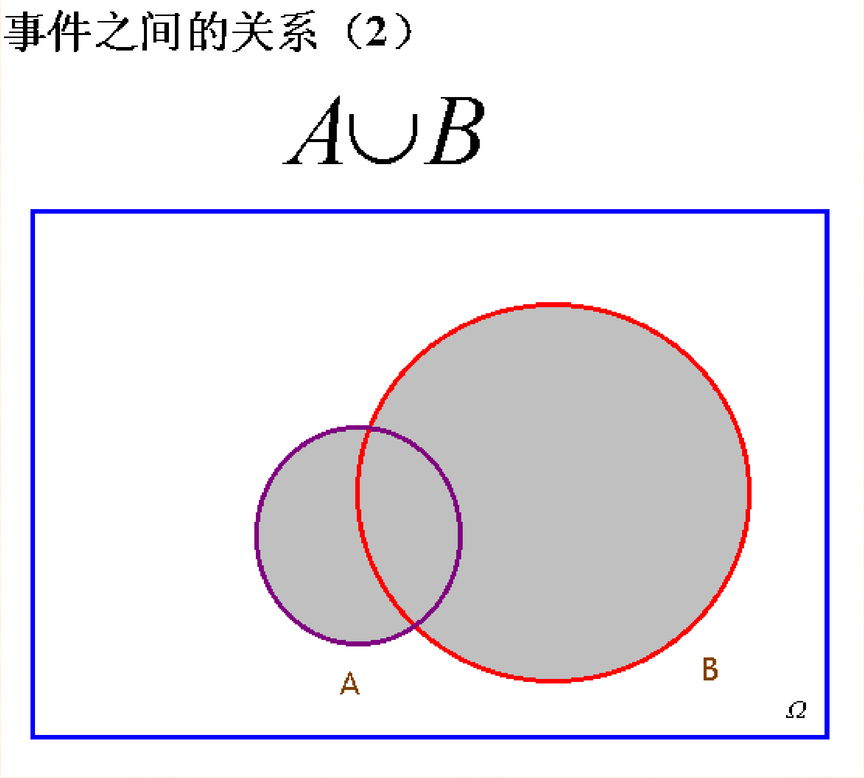
1.包含关系　$A \subset B \Leftrightarrow$ "A发生必导致B发生"。



2. 相等关系　$A = B \Leftrightarrow A \subset B$且$B \subset A$

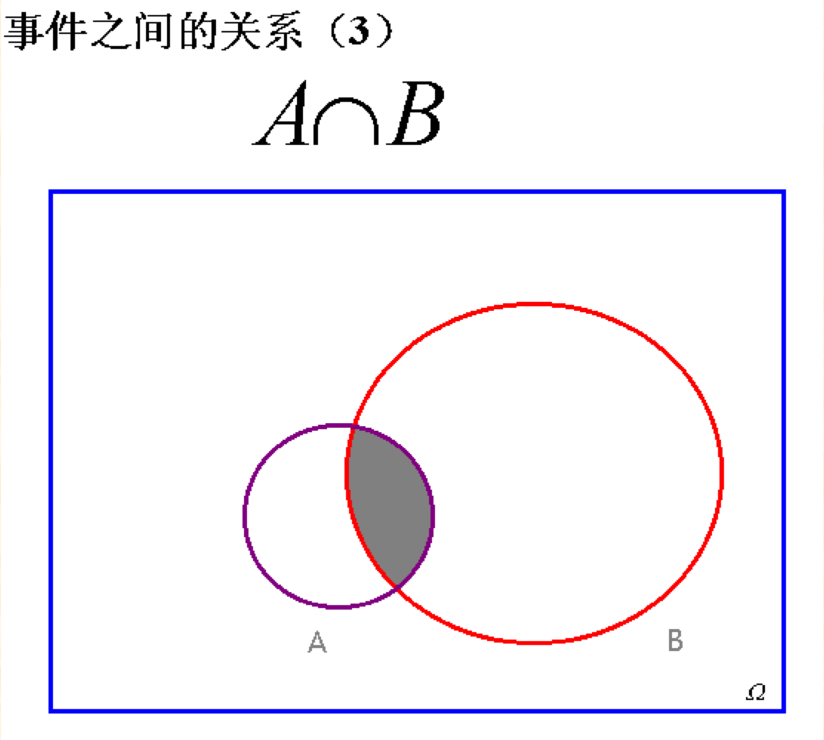
3.**和（并）事件：**“事件A与B至少有一个发生”

$\Leftrightarrow A\cup B$发生



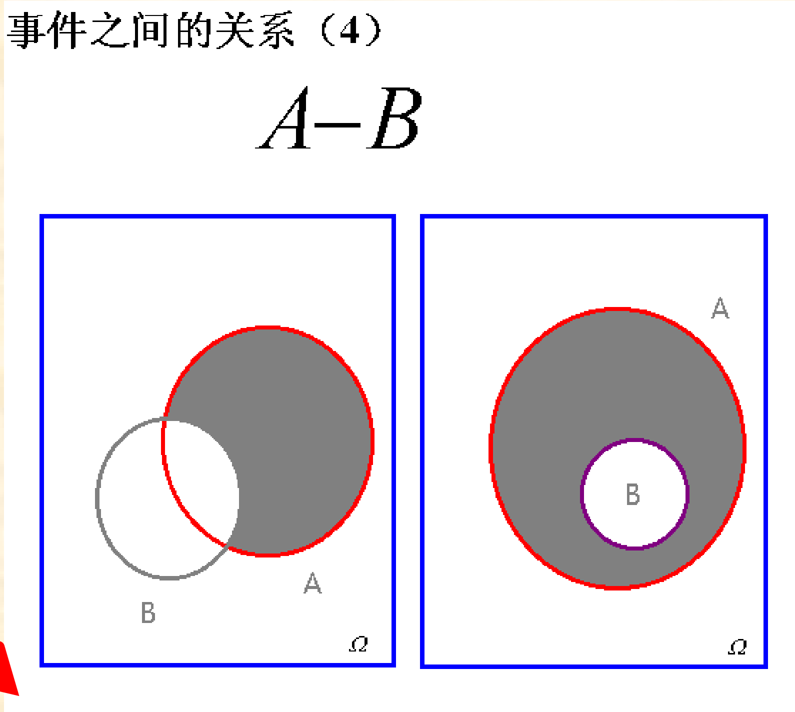
n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$至少有一个发生$\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 发生

4. 积（交）事件:A与B同时发生⇔ $A\cap B=AB$发生



n个事件$A_1, A_2,\ldots, A_n$同时发生⇔ $A_1A_2\ldots A_n$发生

5.差事件：A－B称为A与B的差事件。A－B发生 ⇔事件A发生而B不发生



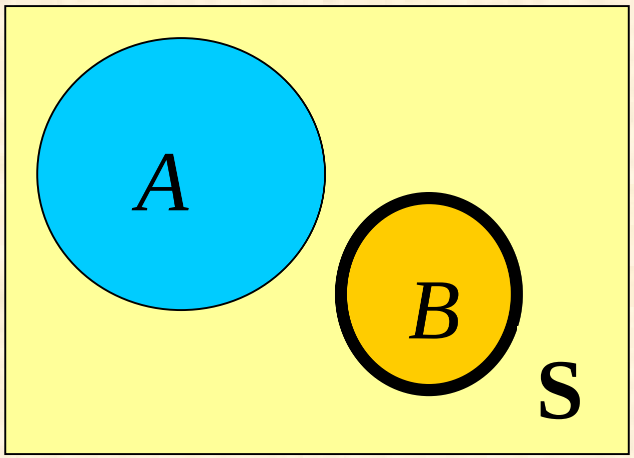
$A\subset B$

$AB=\varnothing$

何时A-B=∅？ 何时A-B=A？

6 互不相容（互斥）

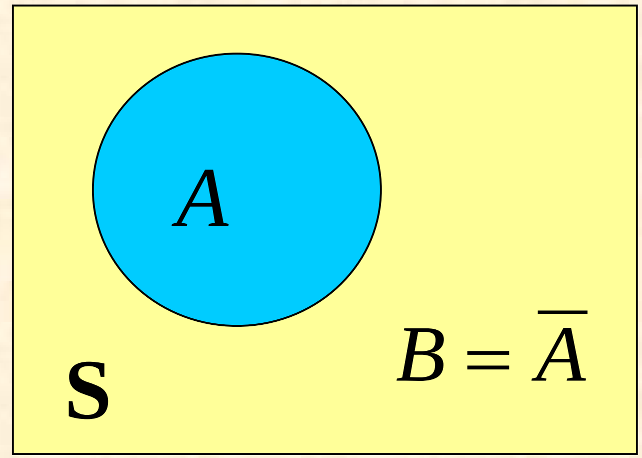
$$A \cap B = \varnothing$$



7 对立事件 （逆事件）

$$A \cap B = \varnothing$$

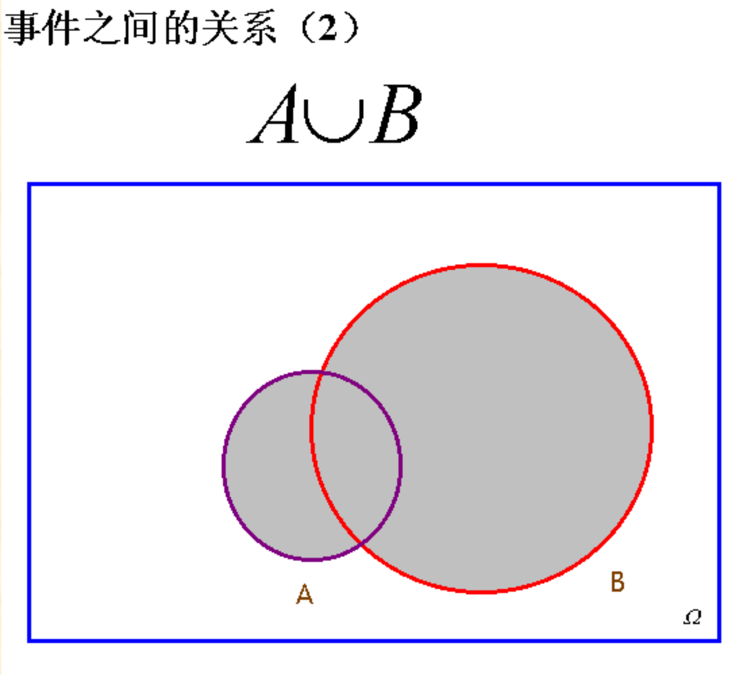
$$A \cup B = S$$



A与B互斥表示事件**A**与**B**不可能同时发生。

A与**B**互为逆事件. 表示**A,B**不可能同时发生，但必有一个发生。

练习（作业1.4 ）

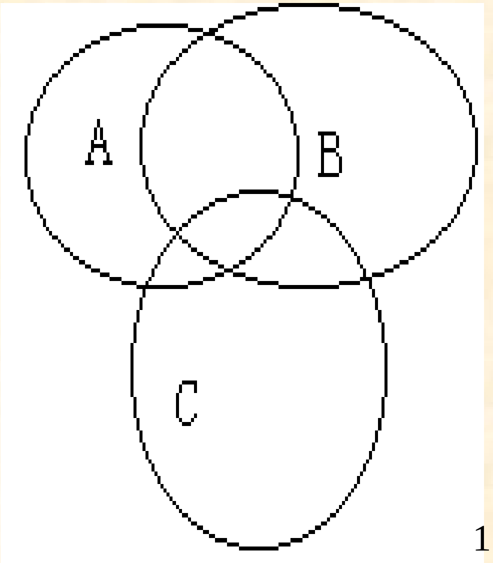


把事件A∪B与A∪B∪C分别写成互不相容事件和的形式

$A \cup B=(A-B) \cup (AB) \cup (B-A)$

A∪B∪C划分为7个互不相容事件之和

换个思路



$A \cup B=A \cup (B-A)$

$A \cup B \cup C= A \cup (B-A) \cup (C-B-A)$

概率论与集合论对应关系类比

概率论	集合论
样本空间	全集
样本点	元素
事件	子集
事件A发生	$e\in A$
事件A不发生	$e\notin A$
必然事件	全集
不可能事件	空集
事件A发生导致事件B发生	$A\subset B$

五、事件的运算律

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

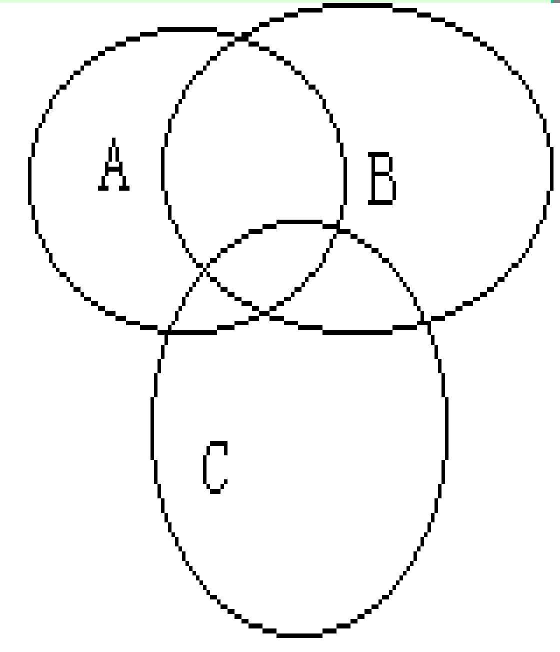
2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$

3、分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

4、德.摩根(De Morgan)律：



$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A_k}$.

并变交，交变并，最后加补

例2　　甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C的运算关系表示下列事件：

A_1：“至少有一人命中目标”：　$A \cup B \cup C$

A_2：“恰有一人命中目标”：　$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$

A_3：“恰有两人命中目标”：　$AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$

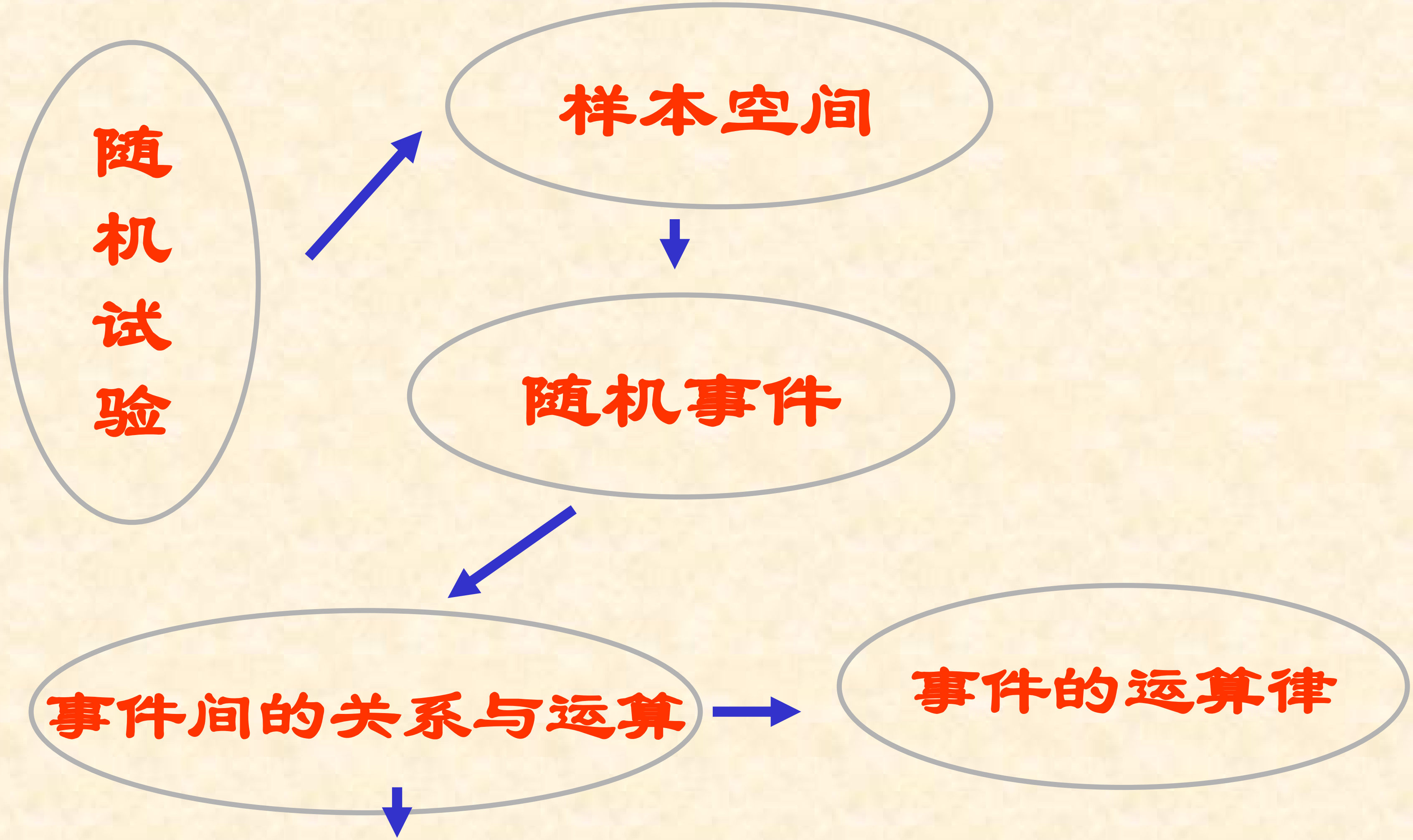
A_4：“最多有一人命中目标”：　$\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}$

A_5：“三人均命中目标”：　ABC

A_6：“三人均未命中目标”：　$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

作业1.2可参照此例题.　1-A, A+B, {A, B, C}, 求概率

随机事件知识点示意图



$\subset, \cup, \cap, -$,互不相容，互逆

第一节小结

知识点：

1、随机现象、随机试验、样本空间、样本点、随机事件等概念；

2、事件间的关系与运算。

考点：

1、掌握事件的运算；

2、会用集合论与概率论的语言描述事件。

1.2 古典概型

从直观上来看，事件A的概率是指事件A发生的可能性。

P（A）应具有何种性质？

抛一枚硬币，币值面向上的概率为多少？

掷一颗骰子，出现6点的概率为多少？出现单数点的概率为多少？

1.2.1.古典概型与概率

定义：若某试验E满足

1.有限性：样本空间S＝$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$;

2.等可能性：（公认）

$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\ldots=P(\{e_n\})$.

则称E为古典概型也叫等可能概型。

古典概型中的概率 ：

设事件A中所含样本点个数为N(A) ， 以N(**S**)
记样本空间**S**中样本点总数，则有

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}$$

P(A)具有如下性质：

(1) **0**≤ P(A) ≤1； 非负性

(2) P(**S**)＝1；P(ϕ)=0 归一性

(3) AB＝ϕ，则P(A∪ B)＝P(A)＋P(B) 有限可加性

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(S)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(S)}=P(A)+P(B)$$

有限可加性：设A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，即$A_iA_j = \phi$，$(i \neq j)$，$i, j = 1, 2, \cdots, n$，则有

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$；

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

互补性 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

例　有三个子女的家庭, 设每个孩子是男是女的概率相等, 则至少有一个男孩的概率是多少?

解: 设A—至少有一个男孩, 以H表示某个孩子是男孩,

以T表示某个孩子是女孩，则

N(S)= N{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT}=8

N(A)= N{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT}=7

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{7}{8}$$

思考：若变成有n个孩子的社区，则至少有一个男孩的概率是多少?仍然用枚举法就很难计算样本点个数！

1.2.2 古典概型的几类基本问题

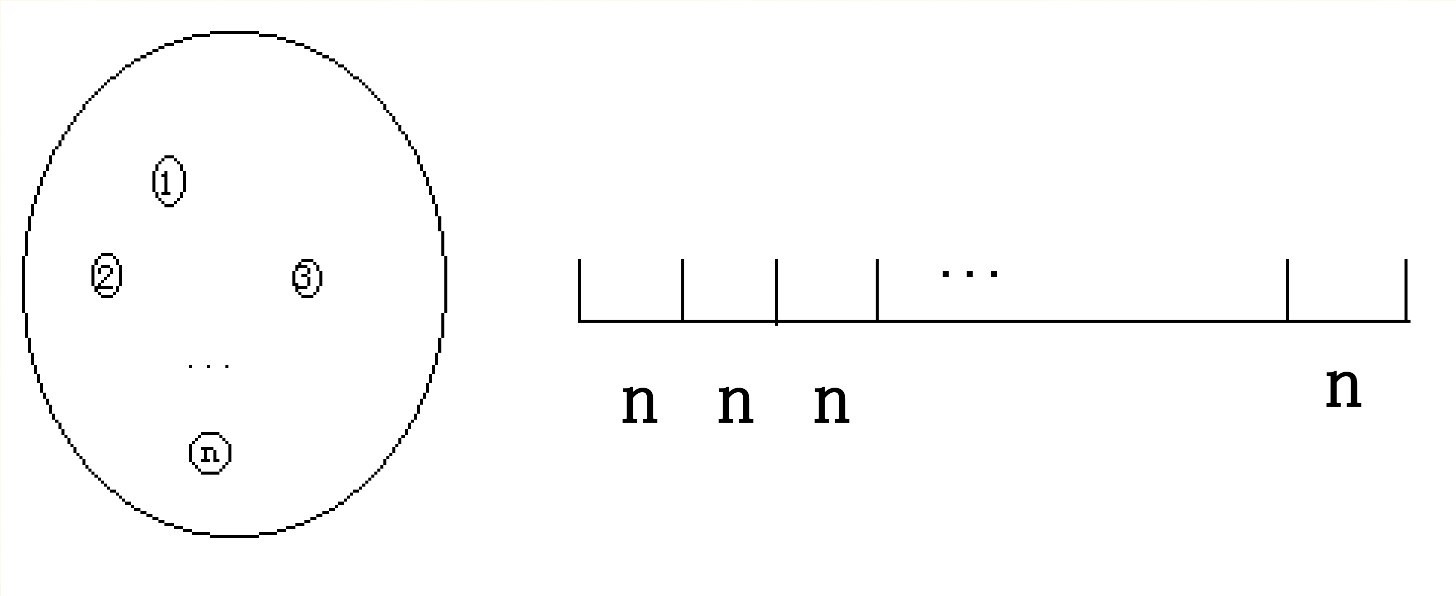
两个原理与排列与组合

乘法原理：设完成一件事需分两步，第一步有n_1种方法, 第二步有n_2种方法，则完成这件事共有n_1n_2种方法

加法原理：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。

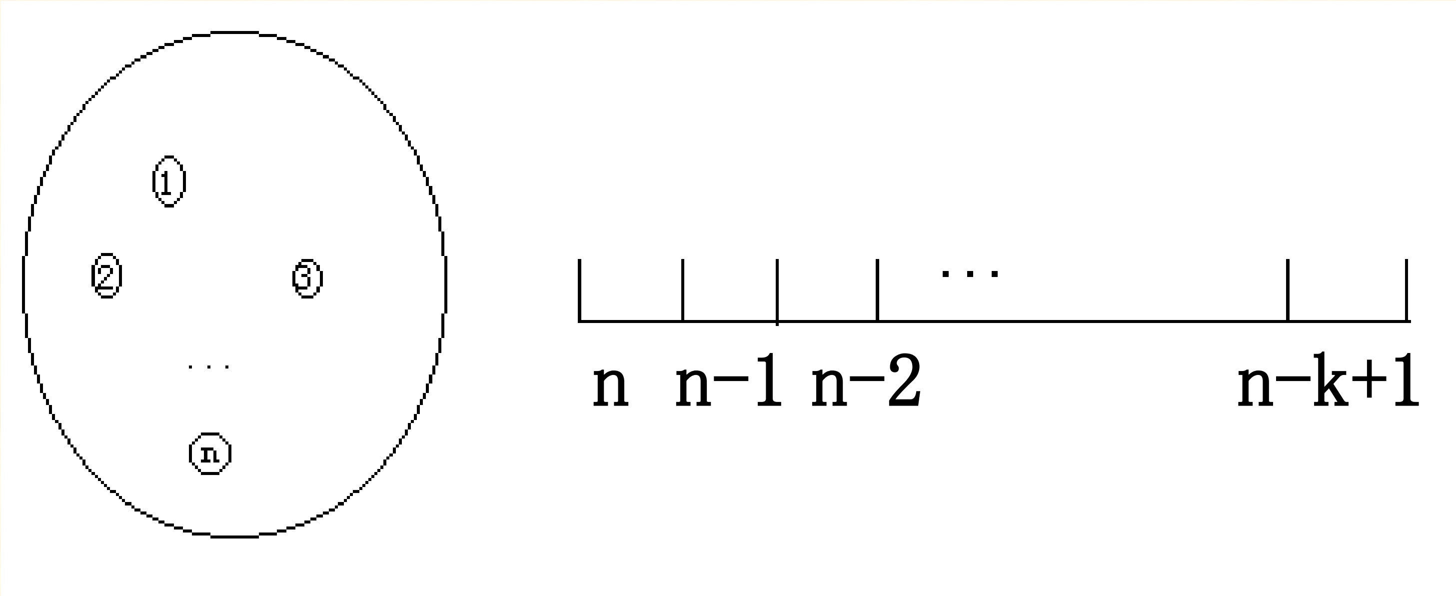
有放回排列：从含有n个元素的集合中

随机抽取k 次，每次取一个，记录其结果后放回，将记录结果排成一列，



共有n^k种排列方式.

无放回排列：从含有n个元素的集合中随机抽取k 次，每次取一个，取后不放回，将所取元素排成一列，



共有 $A_n^k = P_n^k = \mathbf{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$

组合一：从含有n个元素的集合中随机抽取k 个，

共有

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ 种取法.

常用组合公式：

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},$$

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}, \quad \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

组合二 ：把n个球随机地分成m组(n ⩾ m)，要求同时满足第 i 组恰有n_i个球，i=1,…m，共有

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\times\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\times$$

$$\cdots\times\frac{(n-n_1-\cdots-n_{m-2})!}{n_{m-1}!(n-n_1-\cdots-n_{m-1})!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}$$

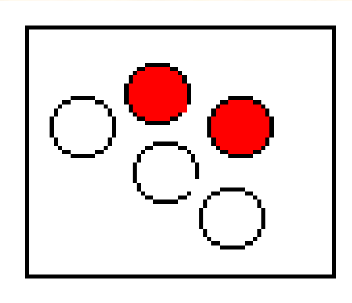
种取法.

1、抽球问题

例1:设盒中有3个白球，2个红球，现从盒中任抽2个球，求取到一红一白的概率。

解:设事件A为取到一红一白

$$N(S)=C_5^2 \qquad N(A)=C_2^1C_3^1$$



$$\therefore \qquad P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

答:取到一红一白的概率为3/5

一般地，设盒中有N个球，其中有M个白球，现从中任抽n个球，则这n个球中恰有k个白球的概率是

$$p=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

超几何分布

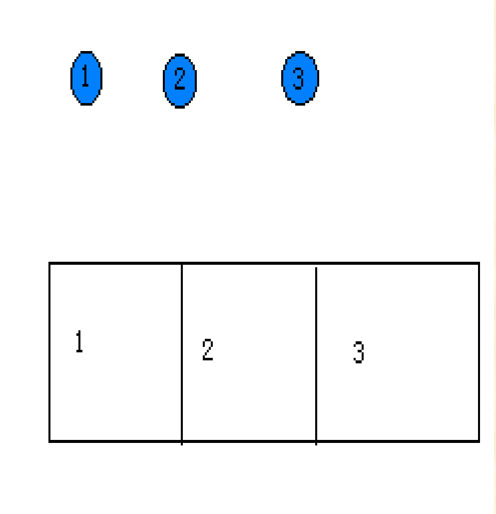
2、分球入盒问题

作业2.5可参照此例题

例2：将3个球随机的放入3个盒子中去，每盒装球数目不限，问：

（1）每盒恰有一球的概率是多少？

（2）只空一盒的概率是多少？



解:设A="每盒恰有一球"，

B="只空一盒"

$$N(S)=3^3 \qquad N(A)=3! \qquad P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{2}{9}$$

$$N(\mathbf{B})=C_3^1C_2^1C_3^1 \quad P(B)=\frac{N(\mathrm{B})}{N(S)}=\frac{C_3^1C_2^1C_3^1}{3^3}=\frac{2}{3}$$

$$P(B)=1-P\{空两盒\}-P\{全有球\} \quad =1-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

一般地，把n个球随机地分配到m个盒子中去(n≤m)，则每盒至多有一球的概率是：

$$p=\frac{A_m^n}{m^n}$$

有八人，问至少有两个人的出生月份相同的概率有多大?

$$P=1-\frac{A_{12}^8}{12^8}$$

$$\approx 0.95$$

某班级有**n** 个人(**n≤365**)，问至少有两个人的生日在同一天的概率有多大（每年按**365**天算）？

3、分组问题

作业2.6可参照此例题

例3：30名学生中有3名运动员，将这30名学生平均分成3组，求：

（1）每组有一名运动员的概率；

（2）3名运动员集中在一个组的概率。

解:设A:每组有一名运动员;B: 3名运动员集中在一组

$$N(S)=\frac{30!}{10!\ \ 10!\ \ 10!}$$

$$P(B)=\frac{N(\mathrm{B})}{N(S)}=\frac{3\times\dfrac{27!}{7!10!10!}}{N(S)}=\frac{18}{203}$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(S)}=\frac{3!\dfrac{27!}{9!\ \ 9!\ \ 9!}}{N(S)}=\frac{50}{203}$$

4、 随机取数问题

例4：从1，2，3，4，5诸数中，任取3个排成自左向右的次序，

求：（1）A_1 “所得三位数是偶数”的概率？

（2）A_2 “所得三位数不小于200”的概率？

解： $N(S) = A_5^3 = 60$

(1) $N(A_1) = C_2^1 \cdot A_4^2 = 24$

$$\therefore P(A_1) = 24/60 = 2/5$$

(2) $N(A_2) = C_4^1 \cdot A_4^2 = 48$

$$\therefore P(A_2) = 48/60 = 4/5$$

例5 从1到200这200个自然数中任取一个，

(1)求取到的数能被6整除的概率

(2)求取到的数能被8整除的概率

(3)求取到的数既能被6整除也能被8整除的概率

解：设（1）（2）（3）所求的事件分别为A、B、C

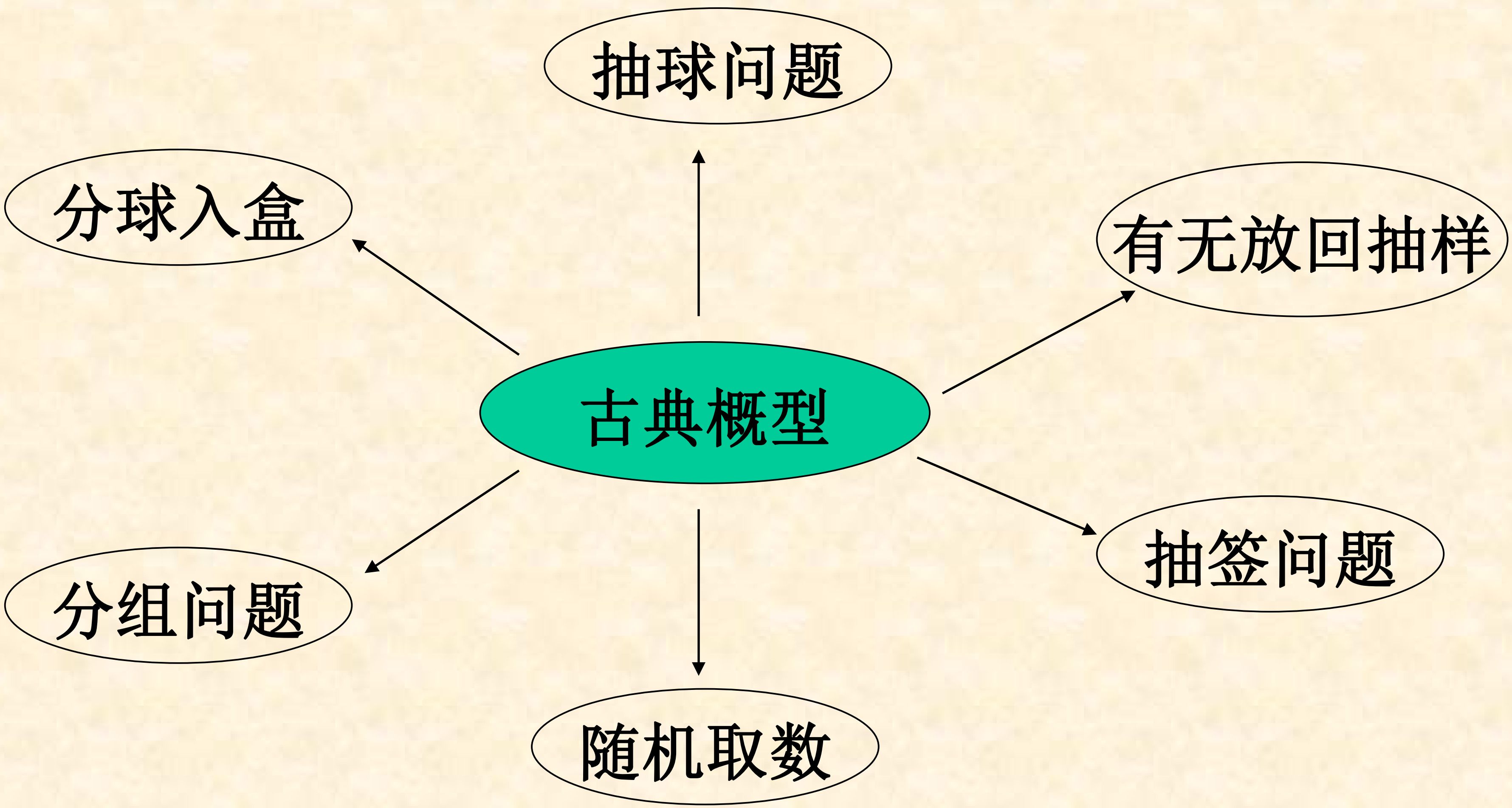
N(S)=200　　N(A)=[200/6]=33

N(B)=[200/8]=25　　N(C)=[200/24]=8

P（A）= 33/200　　P（B）= 1/8　　P（C）=1/25

(1),(2),(3)的概率分别为:33/200,1/8,1/25

古典概型知识点示意图



第二节小结

1.3 频率与公理化概率

知识点

1、古典概型的概念；

2、两个原理、两个排列、两个组合。

考点

1、掌握各种样本点个数的计算方法；

2、常规古典概型中概率的计算。

5、 抽签问题

例6：袋中有 a 只红球，b 只白球，依次将球一只只摸出，不放回，求第 k 次摸出红球的概率？

令 A=“第 k 次摸到红球”

解法一： $N(S) = (a+b)!$

$N(A) = C_a^1 (a+b-1)!$

解法二： $N(S) = P_{a+b}^k$

$N(A) = C_a^1 P_{a+b-1}^{k-1}$

解法三：

$N(S) = a+b$ $N(A) = a$

所以 $P(A) = a/(a+b)$

抽取的结果与第几次抽取无关。

6.有无放回抽样

例7　设有 N 件产品，其中有 M 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 k（$k \le D$）件次品的概率是多少?

1）不放回抽样

解：在 N 件产品中抽取 n 件，取法共有 C_N^n 种，

又在M 件次品中取k件，所有可能的取法有 C_M^k 种，

在$N-M$ 件正品中取 $n-k$ 件，所有可能的取法有 C_{N-M}^{n-k}种，

知识点示意图

由乘法原理知：在 N 件产品中取 n 件，其中恰有 k件次品的取法共有

$$C_M^k C_{N-M}^{n-k}$$ 种，

于是所求的概率为：

$$p = \frac{C_M^k \; C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

此式即为超几何分布的概率公式。

2） 有放回抽样

从 N 件产品中有放回地抽取n 件产品进行排列，可能的排列数为 N^n 个，将每一排列看作基本事件，总数为 N^n。设N 件产品中有M件次品，则

在 N 件产品 中取 n 件，其中恰有 k 件次品的取法共有

$$C_n^k M^k (N-M)^{n-k}$$

于是所求的概率为：

$$P=\frac{C_n^k M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}=C_n^k(\frac{M}{N})^k(1-\frac{M}{N})^{n-k}$$

此式即为二项分布的概率公式。

练习题1

1 把一套4卷本的书随机地摆放在书架上，问：恰好排成序（从左至右或从右至左）的概率是多少？

解：将书随机地摆放在书架上，每一种放法就是一个基本事件，共有放法4！种。

把书恰好排成序有两种放法。

所以，所求概率为$p=2/4!=1/12$

1.3 频率与公理化概率

练习题2

2　某厂家称一批数量为1000件的产品的次品率为5%。现从该批产品中有放回地抽取了30件，经检验发现有次品5件，问该厂家是否谎报了次品率？

解：假设这批产品的次品率为5%，那么1000件产品中有次品为50件。这时有放回地抽取30件次品有3件的概率为

$$p = C_{30}^{5}\left(\frac{50}{1000}\right)^{5}\left(1-\frac{50}{1000}\right)^{25} \approx 0.014$$

小概率事件的实际推断原理

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次实验中几乎是不发生的”（称之为实际推断原理）。现在概率很小的事件在一次实验中竟然发生了，从而推断该厂家谎报了次品率。

练习题3

3　将 n个男生和m个女生(m<n) 随机地排成一列, 问: 任意两个女生都不相邻的概率是多少?

解:　n+m个学生随机地排成一列共有排法(n+m)!种

任意两个女生都不相邻时, 首先n个男生的排法有n!种,

每两个相邻男生之间有一个位置可以站女生, 还有队列两侧各有一个位置可以站女生, 这样m个女生共有n+1个位置可以站,

所以, 任意两个女生都不相邻这一事件的概率为

$$p=\frac{n!m!C_{n+1}^{m}}{(n+m)!}=\frac{C_{n+1}^{m}}{C_{n+m}^{m}}$$

1.3 频率与公理化概率

某人向目标射击，以A表示事件“命中目标”，P（A）=?

定义:事件A在n次重复试验中出现n_A(频数）次，则比值n_A/n称为事件A在n次重复试验中出现的频率，记为$f_n(A)$. 即

$$f_n(A) = n_A/n$$

频率的性质

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

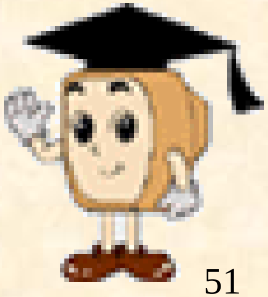
(2) $f_n(S)=1$； $f_n(\phi)=0$

(3) 可加性：若$A_1, A_2, \cdots\cdots; A_k$两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + \cdots + f_n(A_k).$$

(4) 随机波动性。

(5) 当n充分大时，具有稳定性。



历史上曾有人做过试验，试图证明抛掷匀质硬币时，出现正反面的机会均等。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan（德•摩根）	2048	1061	0.5181
Buffon（蒲 丰）	4040	2048	0.5069
K. Pearson（K •皮尔逊）	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

实践证明：当试验次数n增大时， $f_n(A)$ 逐渐趋向一个稳定值。可将此稳定值记作P(A)，作为事件A的概率. 此为概率的统计定义.

两者的关系

※概率是频率的稳定值;

※频率是概率的反映, 用频率去解释概率.

例如：P(A)=0.8, 则应理解为在观察A而做的2000次试验中, 事件A的出现次数应在1600次左右.

卡尔.皮尔逊（**Karl Pearson，1857—1936**）

英国数学家、哲学家、现代统计学的创始人之一、生物统计学家、应用数学家，又是名副其实的历史学家、科学哲学家、伦理学家、民俗学家、人类学家、宗教学家、优生学家、弹性和工程问题专家、头骨测量学家，也是精力充沛的社会活动家、律师、自由思想者、教育改革家、社会主义者、妇女解放的鼓吹者、婚姻和性问题的研究者，亦是受欢迎的教师、编辑、文学作品和人物传记的作者。一句话，他是19和20世纪之交的活跃的哲人科学家和百科全书式的学者。1857年3月27日生于伦敦，1936年4月27日卒于金港湾。

1879年毕业于剑桥大学，并获优等生称号。在校期间，他除了主修数学外，还学习法律，1881年，他取得了法庭律师资格和法学学士学位，随后，他去德国海登堡大学和柏林大学留学，1882年获文学硕士学位。接着又获博士学位。历任伦敦大学应用数学系主任、优生学教授、哥尔登实验室主任，并长期兼任《生物统计学杂志》和《优生学年刊》的编辑，英国皇家学会会员。建立皮尔逊曲线族，用数学方法描述自然现象，对发展数理统计理论及其应用有重要贡献。他是生物统计学的奠基人。在哲学上，宣扬“人是自然规律的创造者”，科学规律是人的认识能力的产物，主要著作有《科学的基本原理》、《进化论的数学研讨》等。

皮尔逊在数学上的主要贡献是在数理统计学方面。1894年，他提出了矩估计方法，其核心思想就是用样本矩去估计总体矩，用样本矩的函数估计总体矩的同一函数.他首先提出了频率曲线的理论。1895年，他有由经验得出了频率分布的一般性质，选定常微分方程来描述频率曲线。通过解这个微分方程可导出13种曲线形式。 1900年皮尔逊提出了拟合优度检验。这是一种很有用的方法，在现代数理统计理论中占有重要地位。他还进一步发展了回归与相关的理论，成功的创建了生物统计学，提出了样本总体概念。皮尔逊对个体变异性、统计量的概率误差进行了深入的研究。特别应当指出的事，皮尔逊于1900年创办的《生物计量学杂志》，对推动数理统计学科的发展，产生了十分深远的影响。

皮尔逊建立了世界上第一个数理统计学的实验室，吸引了一大批训练有素的数理统计学家来到这个中心实验室研究工作，培养了一大批数理统计学家，推动了这个学科的发展。 皮尔逊在伦敦大学学院应用数学和力学哥德斯米德教席教授时，显示出坚忍不拔的工作劲头和异乎寻常的多产性。他的专业职责是讲授静力学、动力学、力学、近代几何、画法几何和投影几何，他用直观的作图法深入浅出地讲解力学问题，很受初学者欢迎。皮尔逊还在为学科学技术的学生讲应用数学，为学工程的学生讲制图，他也讲过天文学，并用得到的资助在学院的草坪上建立了两个小天文台，以训练学生观察天象。

概率的公理化定义

1. 定义：若对随机试验E所对应的样本空间S中的每一事件A，均赋予一实数P(A)，集合函数

P(A)满足条件：

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

(1)非负性：P(A) ≥0；

(2)归一性：P(S)＝1；（规范性）

(3) 可列可加性：设A_1，A_2，..., 是一列两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，($i\neq j$), i , j＝1, 2, ..., 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

则称P(A)为事件A的概率。

概率的性质

(1) $P(\phi)=0$

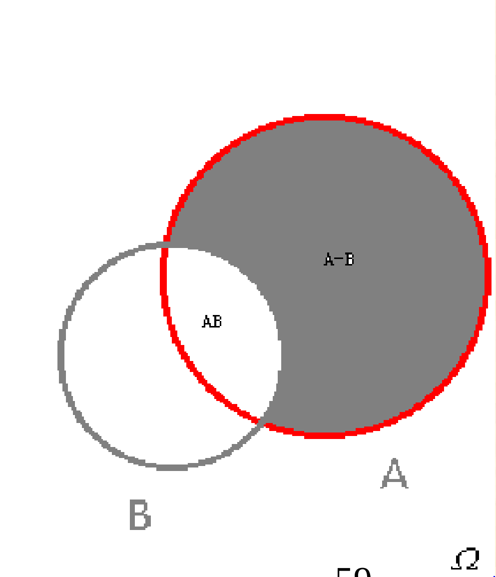
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(2) 有限可加性：设A_1，A_2，…，A_n，是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$, i , j＝1, 2, …, n ,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n);$$

(3) 单调不减性：若事件A⊃B，则

$P(A)\geqslant P(B)$ $\Rightarrow \phi\subset A\subset S, 0\le P(A)\le 1$



(4) 事件差：A、B是两个事件，则

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(5) 加法公式：对任意两事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

三个事件的加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

(6) 互补性 $P(A)=1\text{-}P(\bar{A})$

例1 已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$

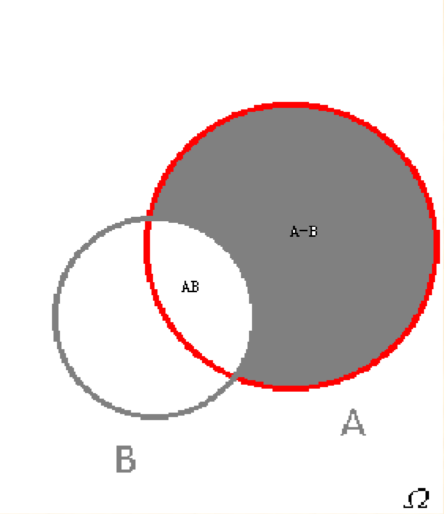
解:

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]$$

$$=0.4-(0.4+0.3-0.6)=0.3$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}})=\mathrm{P}\left(A\cup B\right)-P\left(B\right)=0.3$$



例2 某市有甲,乙,丙三种报纸，订每种报纸的人数分别占全体市民人数的30%，其中有10%的人同时定甲、乙两种报纸. 没有人同时订甲丙或乙丙报纸. 求从该市任选一人，他至少订有一种报纸的概率.

解：设A,B,C分别表示选到的人订了甲,乙,丙报

$$P(A)=30\%\quad,\quad P(B)=30\%\quad,\quad P(C)=30\%$$

$$P(AB)=10\%\ ,P(AC)=0\ ,\ P(BC)=0,\ P(ABC)=0$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=30\%\times 3-10\%-0-0+0=80\%$$

例3 在1~10这10个自然数中任取一数，求

（1）取到的数能被2或3整除的概率，

（2）取到的数既不能被2也不能被3整除的概率，

（3）取到的数能被2整除而不能被3整除的概率。

解:设A—取到的数能被2整除； B--取到的数能被3整除

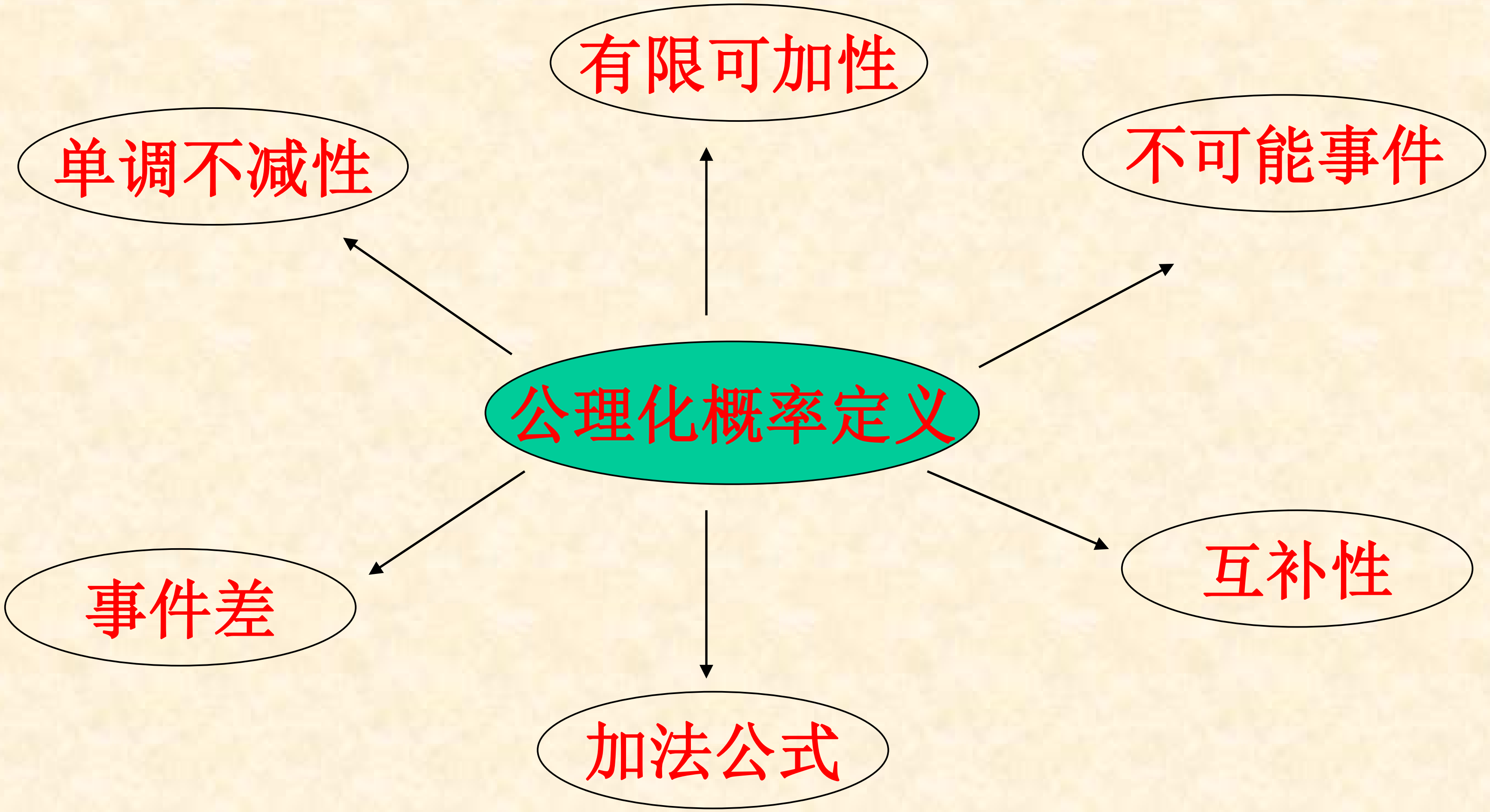
$$P(A)=\frac{5}{10}\quad P(B)=\frac{3}{10}\quad P(AB)=\frac{1}{10}$$

$$(1)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{7}{10}$$

$$(2)P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=\frac{3}{10}$$

$$(3)P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{2}{5}$$

知识点示意图



第三节小结

知识点

1、概率的频率解释；

2、概率的公理化定义；

3、公理化定义概率的性质。

考点

1、利用概率的性质求相应事件的概率。

1.4 条件概率

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球(不放回)，问

第一个人取得红球的概率是多少？

第二 个人取得红球的概率是多少？

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球(不放回)，问

若已知第一个人取到的是白球，则第二个人取到红球的概率是多少？

若已知第一个人取到的是红球，则第二个人取到红球的概率又是多少？

已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率称为A条件下B的条件概率，记作P(B|A)

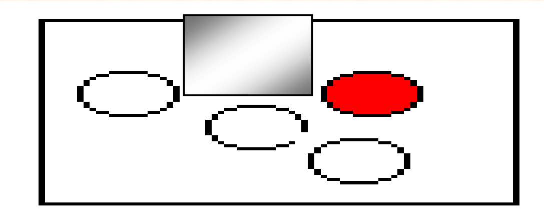
一、条件概率

例1 设袋中有3个白球，2个红球，现从袋中任意抽取两次，每次取一个，取后不放回，

（1）已知第一次取到红球，求第二次也取到红球的概率;

（2）求第二次取到红球的概率

（3）求两次均取到红球的概率



解：设A——第一次取到红球,B——第二次取到红球

$(1)P(B|A)=1/4$ 这就是利用缩减的样本空间来做的

$$(2)P(B)=\frac{2\times1+3\times2}{P_5^2}=\frac{2}{5}$$

$$(3)P(AB)=\frac{2\times1}{P_5^2}=\frac{1}{10}$$

若事件A、B是古典概型的样本空间S中的两个事件，其中A含有N_A个样本点,AB含有N_{AB}个样本点，则

$$P(B|A)=\frac{N_{AB}}{N_A}=\frac{N_{AB}/N(S)}{N_A/N(S)}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

一般地，设A、B是S中的两个事件，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为事件A发生的条件下事件B发生的条件概率

“条件概率”是“概率”吗?

条件概率的性质:(P(A) $\neq 0$)

(1) $P(B|A) \geqslant 0$

(2) $P(S|A)=1$

(3) 对一列两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$,有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots |A) = P(A_1|A) + P(A_2|A) + \cdots$$

例2 条件加法公式

设A, B, C是样本空间S中的三个事件, 且$P(C)\neq 0$, 试用概率的运算性质证明:

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$$

证:

$$P(A\cup B|C)=\frac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)}=\frac{P(AC\cup BC)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)}=\frac{P(AC)}{P(C)}+\frac{P(BC)}{P(C)}-\frac{P(ABC)}{P(C)}$$

$$=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C) \qquad \#$$

例3　用公式法求条件概率

已知某家庭有3个小孩，且至少有一个是女孩，求该家庭至少有一个男孩的概率.

解：设　A={ 3个小孩至少有一个女孩 }

B={ 3个小孩至少有一个男孩 }

所求概率为　$$\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A})=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{AB})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})=1-\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \qquad P(AB)=\frac{6}{8}$$

所以　$$\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A})=\frac{6/8}{7/8}=\frac{6}{7}$$

例4 缩减的样本空间法求概率

一盒中混有100只新 ，旧乒乓球，各有红、白两色，分 类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是一只红球，试求该红球是新球的概率。

	红	白
新	40	30
旧	20	10

解：设A——从盒中随机取到一只红球. B——从盒中随机取到一只新球.

$$N_A = 60 \qquad N_{AB} = 40$$

$$P(B \mid A) = \frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{2}{3}$$

这就是利用缩减的样本空间来做的

二、乘法公式

设A、B $\subset$ S，P（A）>0,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

上式就称为事件A、B的概率乘法公式。

上式还可推广到三个事件的情形：

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

一般地，有下列公式：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

例5 盒中有3个红球，2个白球，每次从盒中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从盒中连续取球4次，试求第1、2次取得白球、第3、4次取得红球的概率。

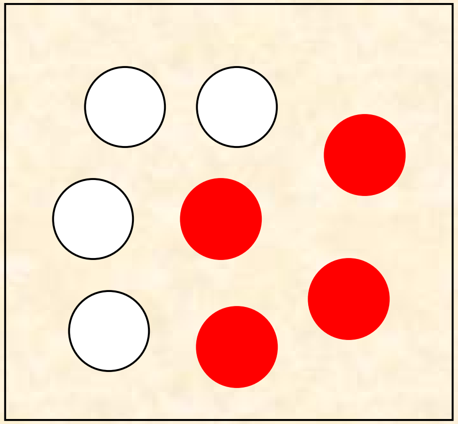
作业4.4可参照此例题

解：设A_i为第i次取球时取到白球，i=1, 2, 3, 4, 则

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\bar{A}_3\mid A_1A_2)P(\bar{A}_4\mid A_1A_2\bar{A}_3)$$

$$P(A_1)=\frac{2}{5}$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{6}$$



$$P(\bar{A}_3\mid A_1A_2)=\frac{3}{7}$$

$$P(\bar{A}_4\mid A_1A_2\bar{A}_3)=\frac{4}{8}$$

$$P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)=\frac{3}{70}$$

例5 利用乘法公式求交集的概率

例6 利用乘法公式求交集的概率

例6 一批零件共100个，其中有10个次品，依次做不放回的抽取三次，求第三次才抽到合格品的概率？

解：令 A_i = “第 i次抽到合格品.” i = 1, 2, 3

则所求的事件为： $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

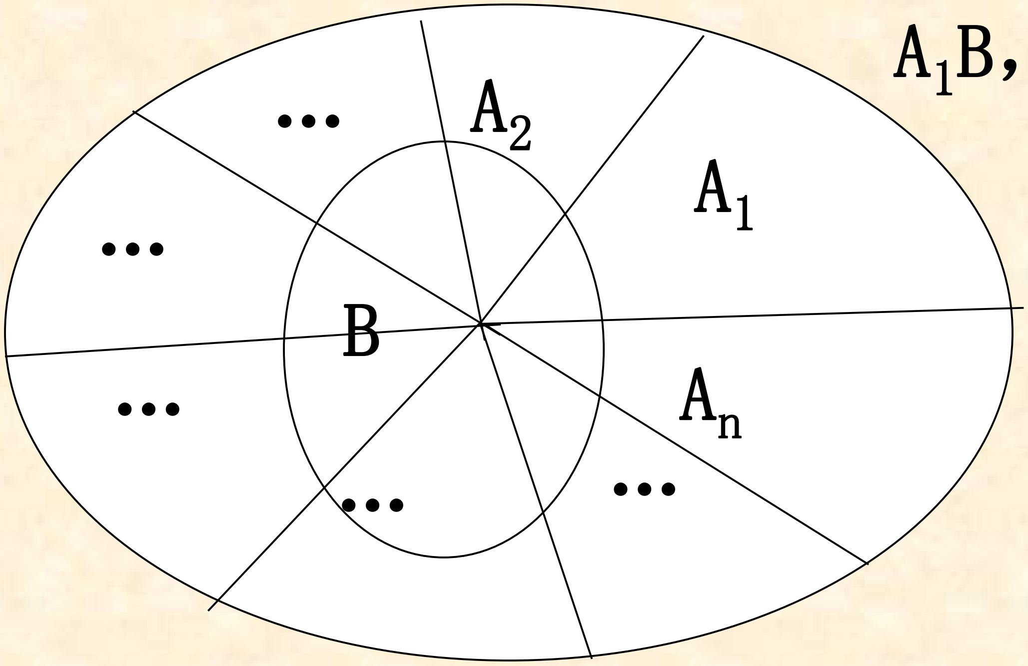
$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} \approx 0.0083$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

定义： 事件组A_1，A_2，…，A_n (n可为∞)，称为样本空间S的一个划分，若满足：

$$(i)\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S;$$

$$(ii)\ A_i A_j = \phi, (i \neq j), i, j = 1,2,\ldots,n.$$



A_1B， A_2B，…，A_nB

是B 的一个划分。

概率论意义：若A_1，A_2，…，A_n是S的一个划分，则，A_1，A_2，…，A_n任意两个不可能同时发生但必有一个发生。

例：$\forall A \subset S, A$与$\overline{A}$组成样本空间一个划分.

例：S={南理工全体本科生}

A_i="南理工本科i年级学生" i=1,2,3,4

"南理工本科生中男学生"

"南理工本科生中女学生"

定理1、设A_1，…，A_n是S的一个划分，且$P(A_i)>0$，$(i=1，…，n)$，则对任何事件$B \subset S$有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

上式称为 全概率公式 。

例子

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

全概率公式的证明：

由于A_1，A_2，…，A_n两两互不相容

$$(A_iB)\cap(A_jB)=(A_iA_j)\cap B=\phi$$

得 A_1B, A_2B, $\cdots$, A_nB 也两两互不相容

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_iB)$$

所以由概率的有限可加性，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

全概率公式的说明

例子7

我们把事件B 看作某种结果，

把A_1，A_2，$\cdots$，A_n 看作对结果有影响的n个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

（即 $P(A_k)$已知）

而且每一原因对结果的影响程度已知，

（即 $P(B|A_k)$已知）

则我们可用全概率公式计算结果发生的概率.

（即求 $P(B)$）

例7-9 利用全概率公式求一般概率

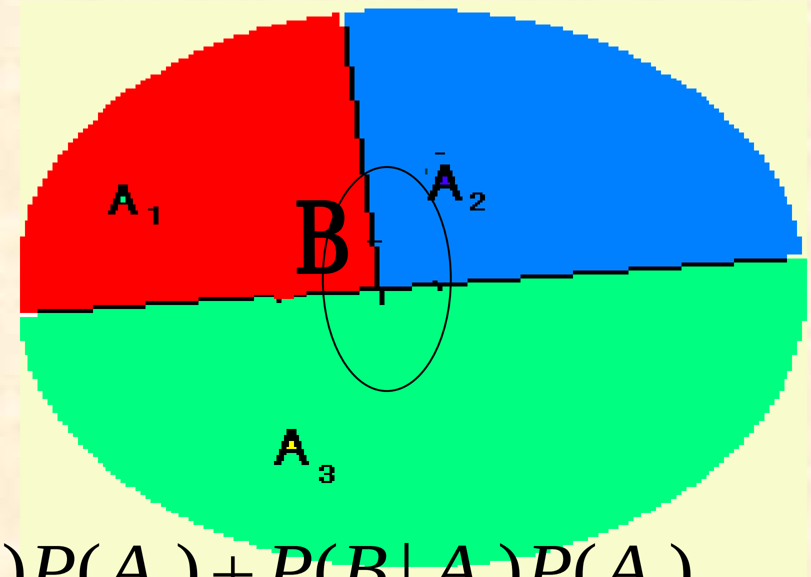
例7. 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌产品的次品率。

设：B：买到一件次品

A_1 : 买到一件甲厂的产品

A_2 : 买到一件乙厂的产品

A_3 : 买到一件丙厂的产品



$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=0.02\times\frac{1}{4}+0.01\times\frac{1}{4}+0.03\times\frac{1}{2}\approx 0.0225$$

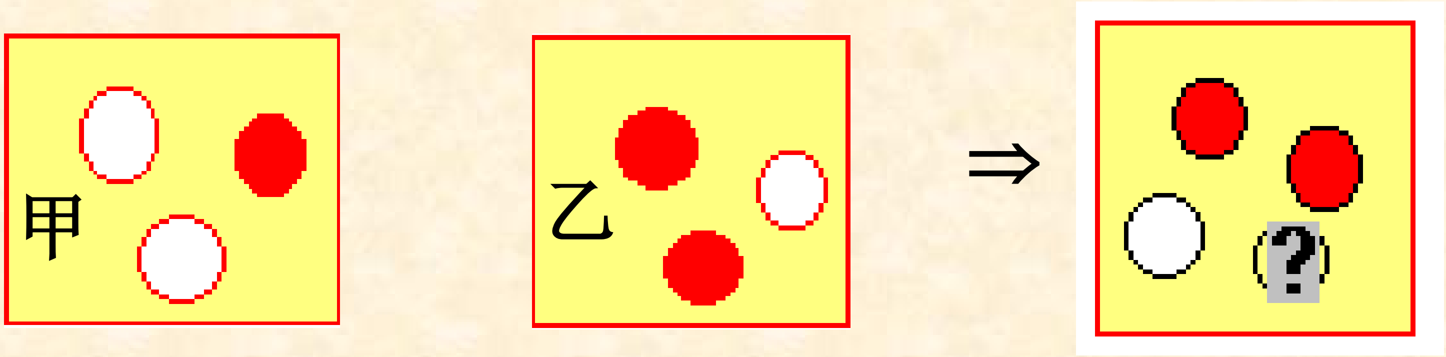
作业4.5可参照此例题

例8 有甲乙两个袋子，甲袋中有两个白球，1个红球，乙袋中有两个红球，一个白球．这六个球手感上不可区别．今从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，问此球是红球的概率？

解：设A——从甲袋放入乙袋的是白球；

B——从乙袋中任取一球是红球；

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$$



例9　在某次世界女排锦标赛中，中、日、美、古巴4个队争夺决赛权，半决赛方式是中国对古巴，日本对美国，并且中国队已经战胜古巴队，现根据以往的战绩，假定中国队战胜日本队和美国队的概率分别为0.9与0.4，而日本队战胜美国队的概率为0.5，试问中国队取得冠军的可能性有多大?

解：设A_1——日本队胜美国队；

A_2——美国队胜日本队；

B ——中国队取得冠军；

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=0.5\times0.9+0.5\times0.4=0.65$$

若已知中国队获得了冠军，问中国队是与美国队决赛而获胜的概率是多少？

解：

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{0.65}=\frac{0.5\times 0.4}{0.65}\approx 0.308$$

解：设A_1——日本队胜美国队；

A_2——美国队胜日本队；

B ——中国队取得冠军；

定理2 设A_1，…，A_n是S的一个划分，且$P(A_i)>0$，

$(i=1，…，n)$，则对任何事件B，$P(B)>0$，有

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)},(j=1,\ldots,n)$$

上式称为 **贝叶斯公式** 。

贝叶斯公式的说明

托马斯 贝叶斯

我们把事件B 看作某种结果，

把A_1， A_2， $\cdots$， A_n 看作对结果有影响的n个原因，

根据历史资料，每一原因发生的概率已知，

（即 $P(A_k)$已知）

而且每一原因对结果的影响程度已知，

（即 $P(B|A_k)$已知）

已知事件B已经发生，要求此时B发生是由第 i 个原因引起的概率，则用Bayes公式

（ $P(A_i|B)$ ）

托马斯 贝叶斯 (Thomas Bayes，1702-1761)

- 英国数学家. 1702年出生于伦敦，1761年4月7日逝世.
- 1742年成为英国皇家学会会员. 后来成为了一名Presbyterian minister(长老会牧师). 和他的同事们不同：他认为上帝的存在可以通过方程式证明.
- 贝叶斯在数学方面主要研究概率论. 他首先将归纳推理法用于概率论基础理论，并创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献. 1763年发表了这方面的论著，对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用.

- 他对统计推理的主要贡献是使用了"逆概率"这个概念，并把它作为一种普遍的推理方法提出来. 贝叶斯的另一著作《机会的学说概论》发表于1758年. 贝叶斯所采用的许多术语被沿用至今. 虽然他看到了自己的两篇论文被发表了，但是于1763年发表在伦敦皇家学会哲学学报上的那一篇提出著名的贝叶斯公式的论文《论有关机遇问题的求解》(《Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances》)却是在他死后的第三年才被发表. 200多年后，经过多年的发展与完善，贝叶斯公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经成为概率统计中的一个冠以“贝叶斯”名字的学派，他的这一理论照亮了今天的计算领域，成了21世纪计算机软件的理论基础，尤其是在数据管理软件领域.

贝叶斯理论是非常令人着迷的、强大的工具，当我们需要处理多个变量系统的时候尤其有用.正因为如此，它在自然科学及国民经济的众多领域中有着广泛应用.

例10-11 利用贝叶斯公式求条件概率

商店论箱出售玻璃杯，每箱20只。其中每箱仅可能含0，1，2只次品，其相应的概率分别为0.8, 0.1，0.1。某顾客选中一箱，从中任选4只检查，结果都是好的，便买下了这一箱. 若已知顾客买下了一箱，则这一箱含有一个次品的概率是多少？

解:设B:从一箱中任取4只检查, 结果都是好的.

A_0，A_1，A_2分别表示事件每箱含0，1，2只次品

已知:$P(A_0)=0.8$，$P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.1$ $\quad P(B|A_0)=1$

$$P(B|A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5} \qquad P(B|A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

由贝叶斯公式:

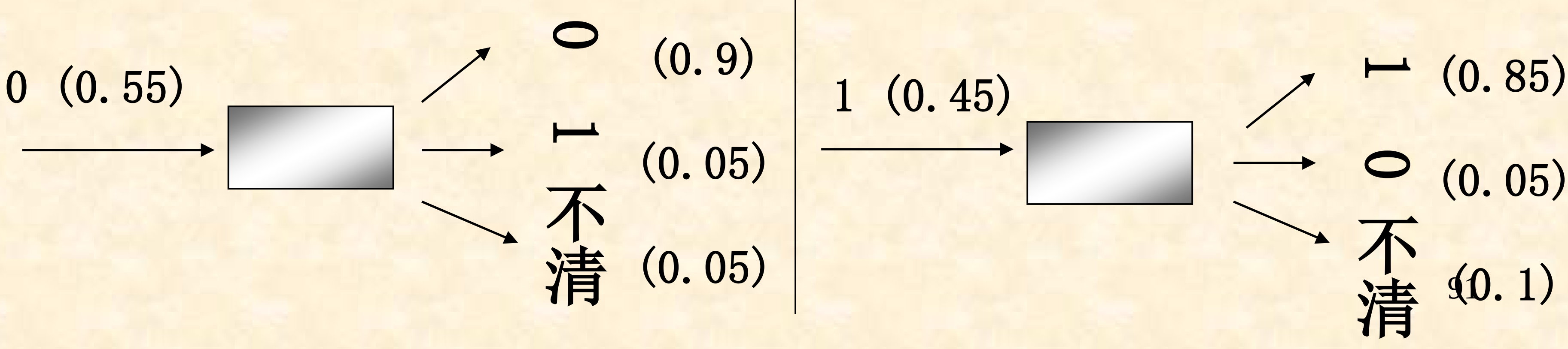
$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.1\times 4/5}{0.8\times 1+0.1\times 4/5+0.1\times 12/19}\approx 0.0848$$

例11　数字通讯过程中，信源发射0、1两种状态信号，其中发0的概率为0.55，发1的概率为0.45。由于信道中存在干扰，在发0的时候，接收端分别以概率0.9、0.05和0.05接收为0、1和“不清”。在发1的时候，接收端分别以概率0.85、0.05和0.1接收为1、0和“不清”。现接收端接收到一个“1”的信号，则发端发的是0的概率是多少?

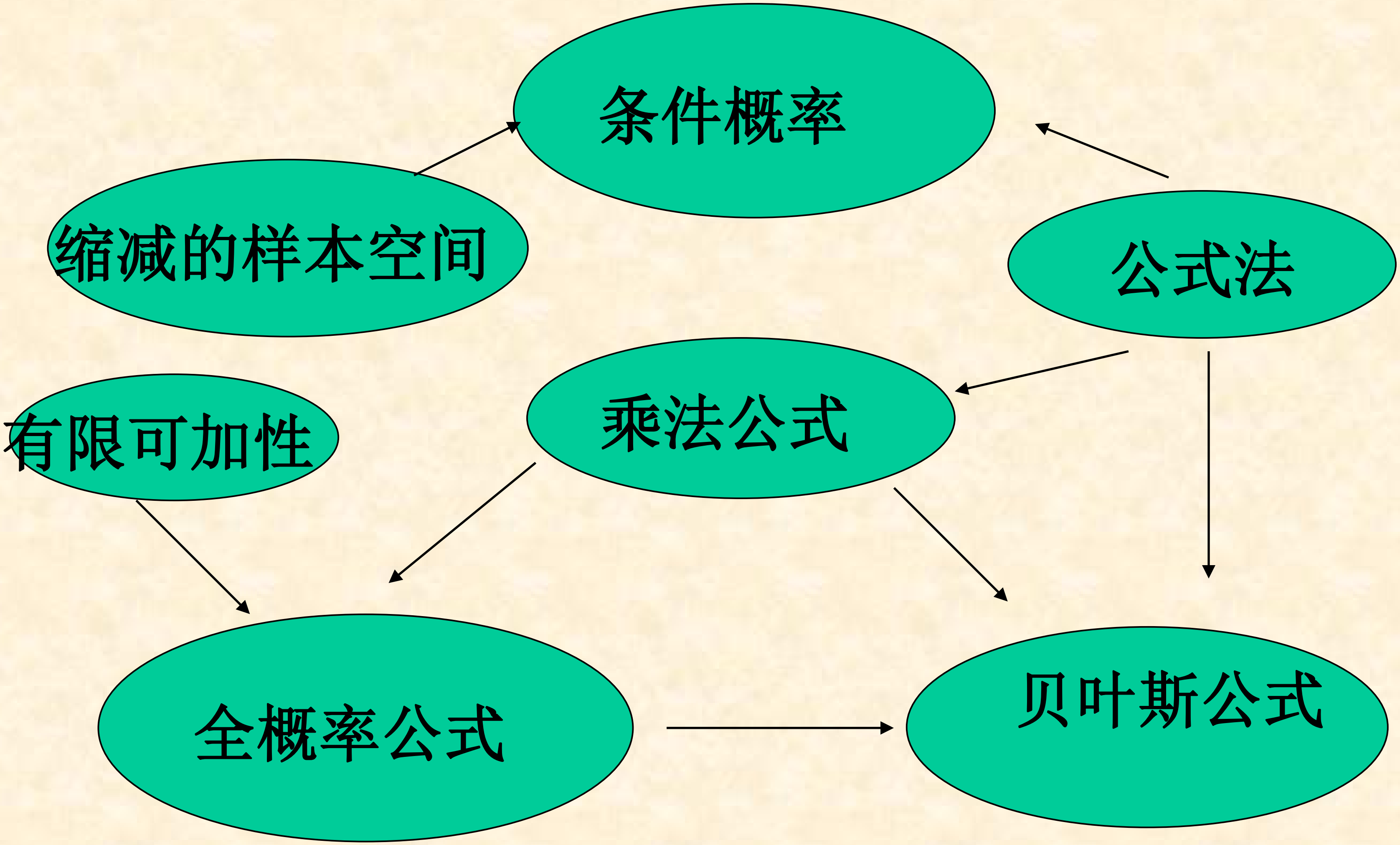
解：设A—发射端发射0，B—接收端接收到一个“1”的信号.

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B})=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{A})}{\mathbf{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A})\mathbf{P}(\mathbf{A})+\mathbf{P}(\mathbf{B}|\overline{\mathbf{A}})\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}})}=\frac{0.05\times0.55}{0.05\times0.55+0.85\times0.45}$$

=0.067



条件概率示意图



第四节小结

1.5 事件的独立性

知识点

1、条件概率与乘法公式；

2、全概率公式与贝叶斯公式。

考点

1、会用公式法和缩减的样本空间法求条件概率；

2、会用乘法公式计算交集的概率；

3、会用全概率公式与贝叶斯公式计算一般概率与条件概率。

练习题1

1　袋中有一个白球与一个黑球，现每次从中取出一球，若取出白球，则除把白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止．求取了n次都未取出黑球的概率．

解：　设 $B=\{$取了n次都未取出黑球$\}$

$A_i=\{$第 i 次取出白球$\}$　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

则　$B=A_1A_2\cdots A_n$

由乘法公式，我们有

$$P(B) = P\left(A_1 A_2 \cdots A_n\right)$$

$$= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+1} \qquad = \frac{1}{n+1}$$

练习题2

2　设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 1/2 ，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 7/10 ，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 9/10 。求透镜落下三次而未打破的概率。

解：以 A_i（ i=1, 2, 3 ）表示事件“透镜第 i 次落下打破”，以 B 表示事件“透镜落下三次而未打破”，

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{9}{10})=\frac{3}{200}.$$

1.5 事件的独立性

袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球，

令 A_k = “第k个人摸到红球”，K=1, 2

若摸后不放回：$P(A_2 \mid A_1) = 0 \neq P(A_2)$, $P(A_2 \mid \bar{A}_1) = 1/9 \neq P(A_2)$

若摸后放回：$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{10}$,

$$P(A_2 \mid \bar{A}_1) = P(A_2) = \frac{1}{10}$$

结论：若摸后放回，A_1发生与否对A_2不产生影响。

一、两事件独立

设A、B是两事件，若

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A与B相互独立，　简称独立。

若P(A) ≠0，上式等价于：

$$P(B|A)=P(B)$$

必然事件S与任意随机事件A相互独立；

不可能事件Φ与任意随机事件A相互独立.

例1 、从一副52张的扑克牌中任意抽取一张，以A表示抽出一张A，以B表示抽出一张黑桃，问A与B是否独立？

解： $P(A)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$， $P(B)=\dfrac{1}{4}$

$$P(AB)=\frac{1}{52}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$\therefore A$与B独立

定理：以下四种情形等价：

(1)事件A、B相互独立；(2)事件$\overline{A}$、B相互独立；

(3)事件A、$\overline{B}$相互独立；(4)事件$\overline{A}$、$\overline{B}$相互独立。

证明:(1)⇒(2) 因为事件A、B相互独立,故

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(A\overline{B})=P(B)-P(AB) \quad =P(B)-P(A)P(B)$$

$$=P(B)[1-P(A)]=P(B)P(\overline{A})$$

故$\overline{A}$与B相互独立.

二、多个事件的独立

定义2、若三个事件A、B、C满足：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，

$$P(BC)=P(B)P(C),$$

则称事件A、B、C**两两相互独立**；

若在此基础上还满足：

(2) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，

则称事件A、B、C相互独立。

两两独立未必相互独立

例:从分别标有1,2,3,4四个数字的4张卡片中随机抽取一张,以事件A表示“取到1或2号卡片”;事件B表示“取到1或3号卡片”;事件C表示“取到1或4号卡片”.则事件A,B,C两两独立但不相互独立.

事实上， $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{4}$$

一般地，设A_1，A_2，…，A_n是n个事件，如果对任意k　(1<k≤n), 任意的$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$，具有等式

$$P(A_{i1} A_{i2} \ldots A_{ik}) = P(A_{i1}) P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

则称n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立。其中k=2等式成立时称n个事件A_1，A_2，…，A_n两两独立。

k = 2 时有C_n^2个等式，k = 3 时有C_n^3个等式,……,

k = n 时有C_n^n个等式

因此共有

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - 1 - n$$

个等式成立。

推论1 若事件A1，A2，…，An 相互独立，则其中任意k ($1<k<n$)个事件也相互独立.

推论2 若事件A1，A2，…，An相互独立，则将这n个事件中任意多个事件换成它们的对立事件，所得新的n个事件仍相互独立.

思考：

1. 设事件A、B、C、D相互独立，则

$A\cup B$与CD独立吗？

$$P\left(\left(A\cup B\right)CD\right)=P\left(ACD\cup BCD\right)$$

$$=P\left(ACD\right)+P\left(BCD\right)-P\left(ABCD\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)P\left(CD\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)P\left(CD\right)-P\left(AB\right)P\left(CD\right)$$

$$=\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)+\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)-P\left(AB\right)\right)P\left(CD\right)=P\left(A\cup B\right)P\left(CD\right)$$

例２：电路由元件A与两个并联的元件B,C串联而成，若A,B,C损坏与否是相互独立的，且它们损坏的概率依次为０．３，０．２，０．１，则电路断路的概率是多少？

解：设A,B,C分别表元件A,B,C损坏。因A,B,C独立，则

$$P\{A \cup (BC)\} = P(A) + P(BC) - P(ABC)$$

$$= P(A) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$= 0.3 + 0.2 \times 0.1 - 0.3 \times 0.2 \times 0.1$$

$$= 0.314$$

三、事件独立性的应用

第五节小结

1、简化的加法公式

若事件A_1，A_2，…，A_n相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \ldots. P(\overline{A_n})$$

思考题：一颗骰子掷4次至少得一个六点与两颗骰子掷24次至少得一个双六，这两件事，哪一个有更多的机会遇到？

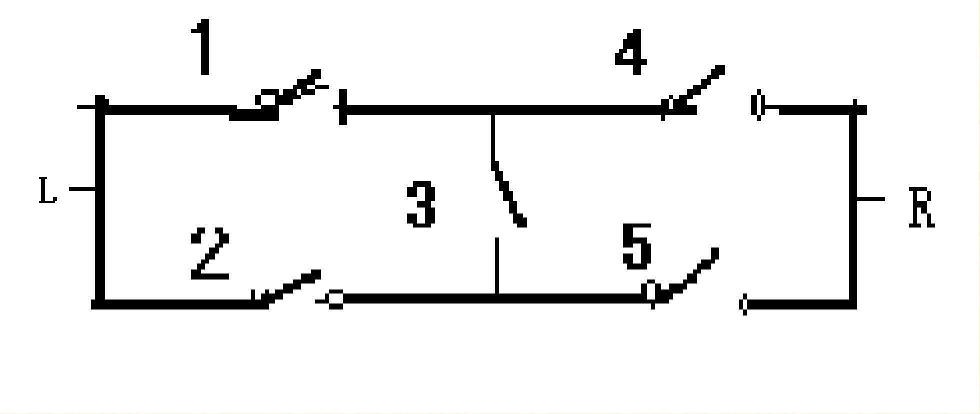
答:1-（5/6)^4= 0.518,

1-(35/36)^{24}= 0.491

作业4.7(1)可参照此例题

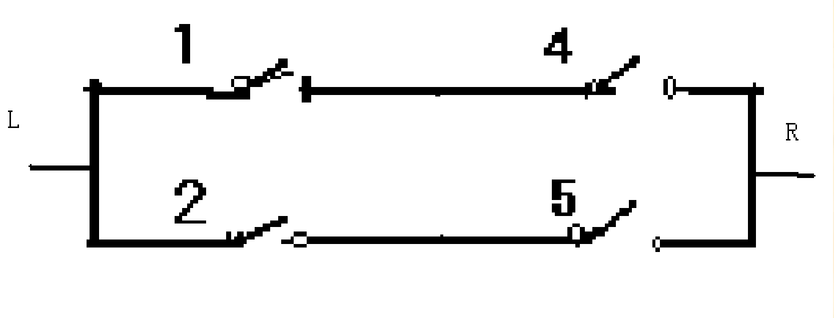
2、在可靠性理论上的应用(*)

练习：如图，1、2、3、4、5表示继电器触点,假设每个触点闭合的概率为*p*,且各继电器触点闭合与否相互独立，求L至R是通路的概率。



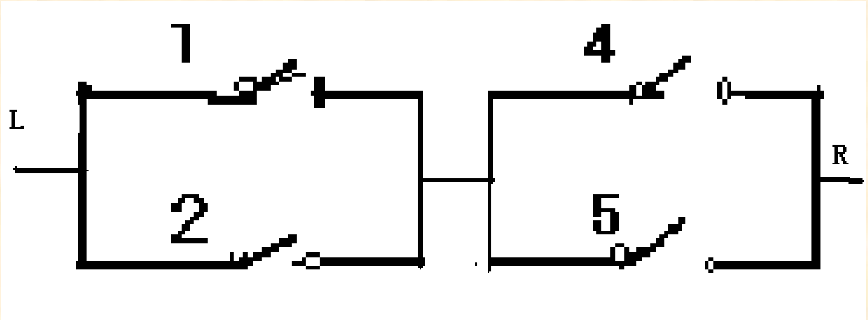
小结

设A---L至R为通路,A_i---第i个继电器通,i=1,2,…5



$$P(A|\overline{A}_3) = P(A_1A_4 \cup A_2A_5)$$

$$= 2p^2 - p^4$$



$$P(A|A_3)=P\{(A_1\cup A_2)\cap(A_4\cup A_5)\}$$

$$=\mathbf{P}(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{A}_2)\mathbf{P}(\mathbf{A}_4\cup\mathbf{A}_5)=(2\mathbf{p}-\mathbf{p}^2)^2$$

由全概率公式

$$P(A)=P(A|\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)+P(A|A_3)P(A_3)$$

$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$$

第五节小结

知识点

1、两个事件的独立性；

2、多个事件的独立性。

考点

1、两个事件独立性的判定与应用；

2、简化的加法公式的应用；

3、多个事件独立性的应用。

第一章 小结

本章由六个概念（随机现象、样本空间、随机事件、概率、条件概率、独立性）、两个性质（有限可加性和互补性）、四个公式（加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式）和一个概型（古典概型）与独立性组成。另外还有两个原理、两个排列、两个组合公式。

思考题

1、50只铆钉随机地取来用于10个部件上，其中有3个铆钉为次品.若每个部件用3只铆钉，问3个次品铆钉恰好用于同一部件的概率是多少？

解：设A_i表示事件“3个次品铆钉全装在了第i个部件上”，i=1,2, …,10。设A表示事件“3个次品铆钉全装在了同一部件上”。

$$\mathbf{P}(\mathbf{A_i}) = 1/\mathbf{C}_{50}^{3} = 1/19600 \qquad \mathbf{i} = 1,2,\cdots,10$$

因为$A_1, A_2, \cdots, A_{10}$两两互不相容，因此

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{10}) = 1/1960$$

2、有N个人抽签决定其中一人获奖．问每个人中奖的概率是多少？

解：设A_k是第k个人中奖，k=1,2, …,n

$$P(A_k)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$