1、玻璃杯成箱出售，每箱 20 只。已知任取一箱，箱中仅可能有 0、1、2 只残次品，其概率相应为 0.8、0.1 和 0.1，某顾客欲购买一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：(1) 顾客买下该箱的概率 α；(2) 在顾客买下的该箱中，没有残次品的概率 β。

1、解：设事件 A 表示“顾客买下该箱”，B_i 表示“箱中恰好有 i 件次品”，$i=1,2$，则

$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$，$P(A|B_0)=1$，

$P(A|B_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5}$，$\qquad P(A|B_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$。

(1)由全概率公式得

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$$

(2)由贝叶斯公式

$$\beta=(B_0\mid A)=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times 1}{0.94}=0.85\text{。}$$

2、设二维随机变量(X,Y)在区

$$G=\{(x,y)\mid y<x, y>x^2\}$$

上服从均匀分布。(1) 求(X,Y)的联合概率密度；

(2) 求(X,Y)关于X、Y的边缘概率密度；

(3)判断X与Y的独立性。

2、解：(1) 区域G的面积为

$$\iint_G dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\int_0^1 (x-x^2)dx=\frac{1}{6}$$

(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}6\,,\ 0<x<1\,,\ x^2<y<x\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ,\quad \text{其它}\end{cases}$$

(2) X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy, & 0<x<1\\ 0 & ,\quad 其它\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1\\ 0 & ,\quad 其它\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx, & 0<y<1\\ 0 & ,\quad 其它\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1\\ 0 & ,\quad 其它\end{cases}$$

（3）显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ **，所以 X 与 Y 不独立。**

3、已知(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

(1) 求X与Y的相关系数ρ_{XY}；

(2) 试判断X与Y的独立性。

3、**（1）** $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy=\frac{7}{12}$$

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^1 y(x+y)dxdy=\frac{7}{12}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^1 x^2(x+y)dxdy=\frac{5}{12}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^1 y^2(x+y)dxdy=\frac{5}{12}$$

$$\therefore D(X)=D(Y)=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144}$$

故 $\rho_{XY}=-\frac{1}{11}$

（2） $\because \rho_{XY}\neq 0$ $\therefore X$ **与** Y **不独立。**

4. 一大批鸡蛋中有 15%是莱克亨品种，单枚重量 X（克）服从正态分布 $N\left(60,5^2\right)$，其余 85%是当地品种，单枚重量 Y（克）服从正态分布 $N\left(50,6^2\right)$.（1）从这批鸡蛋中任取 1 枚，其重量小于 60 克的概率是多少？（2）从这批鸡蛋中抽取 500 枚，试用中心极限定理近似计算单枚重量大于 60 克的鸡蛋数不低于 80 枚的概率是多少？

4.解：（1）设 A 从这批鸡蛋中任取 1 枚，其重量小于 60 克，B—取到莱克亨品种的鸡蛋

由全概率公式，

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$=P(X<60|B)P(B)+P(Y<60|\bar{B})P(\bar{B})$$

$$=\Phi\left(\frac{60-60}{5}\right)\times 0.15+\Phi\left(\frac{60-50}{6}\right)\times 0.85$$

$$=0.5\times 0.15+\Phi(1.67)\times 0.85\approx 0.88$$

（2）设 Z 为从这批鸡蛋中抽取 500 枚，其中单枚重量大于 60 克的鸡蛋数，则 $Z\sim B(500,0.12)$，由中心极限定理，

$$P\{Y\geq 80\}=1-\Phi\left(\frac{80-500\times 0.12}{\sqrt{500\times 0.12\times 0.88}}\right)\approx 1-\Phi(2.75)\approx 0.003$$

5.（15） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 已知，$\sigma^2>0$ 为待估参数，求（1）σ^2 的极大似然估计量；（2）$E(\sigma^2)$；（3）$1/\sigma^2$ 的极大似然估计.

5.解：（1）数

$$\mathbf{L}(\sigma^2)=\prod_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathbf{exp}\left[-\frac{(\mathbf{x_i}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{\mathbf{n}}{2}}\mathbf{exp}\left[-\frac{\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

则

$$\mathbf{InL}(\sigma^2)=-\frac{\mathbf{n}}{2}\mathbf{ln}(2\pi)-\frac{\mathbf{n}}{2}\mathbf{ln}(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i}-\mu)^2$$

令

$$\frac{\partial\mathbf{InL}(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{\mathbf{n}}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i}-\mu)^2=0$$

得 σ^2 的极大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

（2）$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\sigma^2$ ，具有无偏性

（3）由不变原则，$1/\sigma^2$ 的极大似然估计为 $1\Big/\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

6. 某厂用自动包装机装箱，在正常情况下，每箱重量服从正态分布 N（100，σ^2）。某日开工后，随机抽查 10 箱,重量如下（单位：斤）：99.3，98.9，100.5，100.1，99.9，99.7，100.0，100.2，99.5，100.9。问该日每箱重量的数学期望是否显著降低？
（α =0.05）

解：H_0：$\mu=\mu_0=100$， H_1：$\mu<\mu_0$

检验统计量为 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ ， H_0 的拒绝域为 $W=\{t\le -t_\alpha(n-1)\}$

计算得 $\bar{x}=99.9$， $s=0.583$， $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{99.9-100}{0.583/\sqrt{10}}=-0.542$

对 a =0.05，查得 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.8331$. 因为 $t=-0.542>-t_{0.025}(9)$，所以不拒绝 H_0，即可以认为该日每箱重量的数学期望与 100 无显著差异包装机工作正常。

7.求随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, Θ~U(0,2π)的均值函数、相关函数和协方差函数，并判断 $X(t)$ 是否为一个平稳过程.

7. **解** Θ 的概率密度为

$$f(\theta)=1/2\pi,\ \ 0<\theta<2\pi$$

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=E\{[a\cos(\omega t_1+\Theta)][a\cos(\omega t_2+\Theta)]\}$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\theta)\cdot\cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\omega t_1+\omega t_2+2\theta)+\cos\omega(t_1-t_2)}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)$$

$X(t)$是一个平稳过程

.

8. 设 $X(t)=U\cos t+V\sin t$，其中随机变量 U 和 V 相互独立，都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，判断（1）$X(t)$ 是否为平稳过程，（2）$X(t)$ 的均值是否具有各态历经性.（3）$X(t)$ 是一个正态过程.

解 （1）$\mu_X(t)=E[X(t)]=E(U\cos t+V\sin t)$

$$=\cos tE(U)+\sin tE(V)=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[(U\cos t+V\sin t)(U\cos(t+\tau)+V\sin(t+\tau))]$$

$$=E(U^2)\cos t\cos(t+\tau)+E(V^2)\sin t\sin(t+\tau)$$

$$=\sigma^2[\cos t\cos(t+\tau)+\sin t\sin(t+\tau)]=\sigma^2\cos\tau$$

故 $\mu_X(t)$ 为常数，$R_X(t,t+\tau)$ 是 τ 的函数，因而 $X(t)$ 是平稳过程.

（2） $\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\sigma^2\cos\tau d\tau=0$$

故 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

（3） 设 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 是随机过程 $X(t)$ 的任意 n 个状态，对于任意不全为零

的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,令

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (U \cos t_i + V \sin t_i)$$

$$= U \sum_{i=1}^{n} a_i \cos t_i + V \sum_{i=1}^{n} a_i \sin t_i$$

由 U 、V 相互独立且都服从正态分布知，Z 服从正态分布，所以 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 服从 n 维正态分布，故随机过程 $X(t)$ 是一个正态过程.