第八章 假设检验

- 8.1 假设检验的基本概念和思想
- 8.2 单正态总体的假设检验
- 8.3 双正态总体均值差与方差比的假设检验

8.1假设检验的基本概念和思想

一、基本概念

(一) 两类问题

1、参数假设检验

$X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i·i·d}}{\sim} f(x;\theta),\theta\in\Theta$ 总体分布已知, 参数未知, 由样本观察值$x_1,\cdots,x_n$检验假设

H_0：$\theta=\theta_0$；H_1：$\theta\neq\theta_0$ （双边假设检验）

2、非参数假设检验

$X_1,\cdots,X_n \overset{\text{i·i·d}}{\sim} X$, 总体分布未知, 由观察值$x_1,\cdots,x_n$检验假设$H_0$：$F(x)=F_0(x;\theta)$；$H_1$：$F(x)\neq F_0(x;\theta)$

(二) 检验法则与拒绝域

以样本$(X_1, \ldots, X_n)$出发制定一个法则, 一旦观测值$(x_1, \ldots, x_n)$确定后, 我们由这个法则就可作出判断是拒绝H_0还是接受H_0, 这种法则称为H_0对H_1的一个检验法则, 简称检验法。

样本观察值的全体组成样本空间S, 把S分成两个互不相交的子集W和W*, 即$S=W\cup W^*$, $W\cap W^*=\phi$

假设当$(x_1, \cdots, x_n)\in W$时, 我们就拒绝H_0; 当$(x_1, \cdots, x_n)\in W^*$时, 我们就接受$H_0$。子集$W\subset S$就称为检验的拒绝域(或临界域)。

(三) 检验的两类错误

称 H_0真而被拒绝的错误为第一类错误或弃真错误；

称 H_0假而被接受的错误为第二类错误或取伪错误。

记 p(I) =P{拒绝H_0| H_0真}; P(II) =P {接受H_0| H_0假}

对于给定的一对H_0和H_1, 总可找出许多拒绝域, 人们自然希望找到这种拒绝域W, 使得犯两类错误的概率都很小。但在样本容量一定时，不能同时保证犯两类错误的概率都最小。于是奈曼—皮尔逊提出了这样的一个 原则：“在控制犯第一类错误的概率不超过指定值α的条件下，使犯第二类错误的概率 尽量小” 按这种法则做出的检验称为“显著性检验”, α称为显著性水平或检验水平。

怎样构造的拒绝域方可满足上述法则?

如:对总体X~N(μ , 1), 要检验

H_0: μ=0; H_1: μ=1

拒绝域可取 $\overline{X} > k \quad \Rightarrow k = ?$

根据奈曼—皮尔逊 原则：应选取k使“犯第一类错误的概率不超过指定值α的条件下, 使犯第二类错误概率尽量小” 这里 $\mu = 0$时 $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

$$P(I) = P\{\overline{X} > k \mid \mu = 0\} = 1 - P\{\overline{X} \le k \mid \mu = 0\} = 1 - \Phi(\sqrt{n}k)$$

$$\le \alpha \quad \Rightarrow \Phi(\sqrt{n}k) \ge 1 - \alpha \Rightarrow k \ge \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{\alpha}$$

而 $P(II)=P\{\overline{X}<k\mid\mu=1\}$ $\quad\mu=1$时$\overline{X}\sim N(1,\frac{1}{n})$

$=\Phi(\sqrt{n}(k-1))$

P(II)关于k单增.所以为使P(II)小,k要尽可能小.

对比 $P(I)=1-\Phi(\sqrt{n}k)\le\alpha\quad\Rightarrow k\ge\frac{1}{\sqrt{n}}Z_\alpha$

说明k最小只能取到 $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_\alpha$,得水平为α的拒绝域为

$$\left\{\overline{X}>\frac{1}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right\}$$

可见,使P(I) ≤ α又使P(II)尽可能小的k值恰好P(I) = α.

一般地,符合奈曼—皮尔逊 原则的拒绝域满足P(I)= α.

二、显著性检验的思想和步骤

(1)根据实际问题作出假设H_0与H_1;

(2)构造检验统计量, 在H_0真时其分布已知;

(3)给定显著性水平α的值, 参考$H_{1,}$ 令

$$P\{拒绝H_0 | H_0真\} = \alpha$$, 求出拒绝域W;

(4) 计算检验统计值, 若检验统计值$\in$W,

则拒绝H_0, 否则接受H_0

单总体的抽样分布定理

正态总体的抽样分布定理是置信区间与假设检验的理论基础

$$1.\text{若} X_1,\cdots,X_n \overset{i\cdot i\cdot d}{\sim} N(\mu,\sigma^2),\text{则}$$

$$(1)\ \mathbf{Z}=\frac{\overline{\mathbf{X}}-\mu}{\sigma/\sqrt{\mathbf{n}}}\sim \mathbf{N(0,1)} \qquad (2)\ t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$(3)\ \chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1) \qquad (4)\ \overline{X}\text{与}S^2\text{相互独立}$$

8.2 单个正态总体的假设检验

一、单个正态总体均值的假设检验

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$,给定检验水平$\alpha$，由观察值$x_1,\cdots,x_n$检验假设　H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$。

1、σ^2已知的情形---Z检验

构造

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0}{=}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

由$P\{|Z|\geq Z_{\alpha/2}\,|\,\mu=\mu_0\}=\alpha$可得拒绝域：$W=\{|Z|\geq Z_{\alpha/2}\}$

查表, 计算, 比较大小, 得出结论

说明：(1) H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$称为双边**HT**问题；而 H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$(或$\mu<\mu_0$), 则称为单边问题；

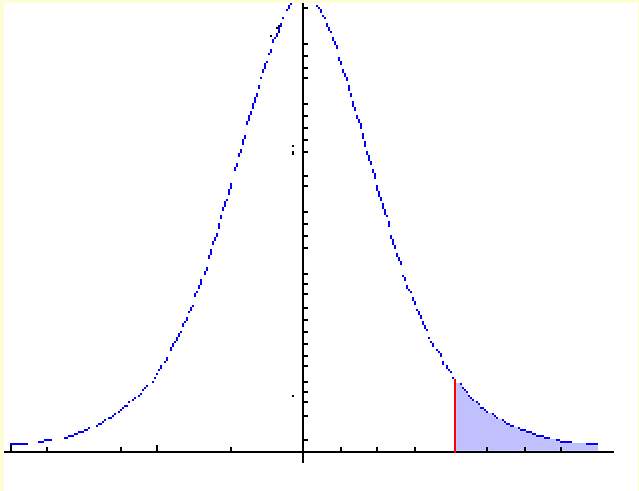
(2) H_0：$\mu\le\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$ 或H_0：$\mu\ge\mu_0$；H_1：$u<u_0$ 也称为单边**HT**问题, 不过这是一个完备的**HT**问题。

(3)可证:完备的**HT**问题与不完备的**HT**问题有相同的拒绝域, 从而检验法一致。

·先考虑不完备的右边**HT**问题的解

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$,

$$H_0\text{下}\quad Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$



例子

由$\mathbf{P\{Z \geq Z_{\alpha}\} = \alpha}$可得拒绝域：$\mathbf{W = \{Z \geq Z_{\alpha}\}}$

现考虑完备的右边HT问题

H_0：$\mu \leq \mu_0$；H_1：$\mu > \mu_0$，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

取拒绝域为 $\mathbf{W = \{Z \geq Z_{\alpha}\}}$ 则犯第一类错误的概率为

$$\mathbf{P\{Z \geq Z_{\alpha} \mid \mu \leq \mu_0\} = P_{\mu \leq \mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq Z_{\alpha}\}}$$

$$P_{\mu\le\mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_\alpha\}=P_{\mu\le\mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_\alpha+\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\le P_{\mu\le\mu_0}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_\alpha\}=1-\Phi(Z_\alpha)=\alpha$$

于是奈曼—皮尔逊提出了这样的一个 原则：

“在控制犯第一类错误的概率不超过指定值α的条件下，使犯第二类错误的概率 尽量小”

于是 $$\sup_{\mu\le\mu_0} P\{Z\ge Z_\alpha \mid \mu\le\mu_0\}=\alpha$$

故 $W=\{Z\ge Z_\alpha\}$ 是H_0：$\mu\le\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$，的水平为α的拒绝域

- 左边HT问题

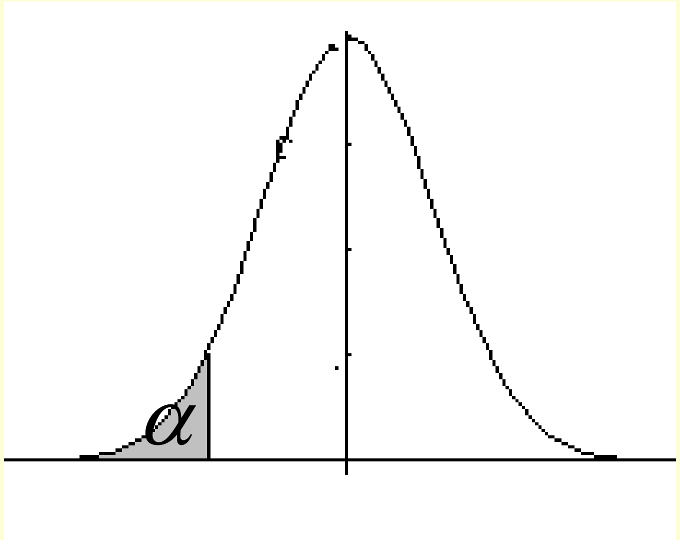
H_0：μ=μ_0；H_1：μ<μ_0，或H_0：μ≥μ_0；H_1：μ<μ_0，

$$\mu=\mu_0\text{时}\quad \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$$

由$\mathbf{P\{Z\le -Z_{\alpha}\}=\alpha}$

可得显著性水平为α的拒绝域为

$$\mathbf{\{Z\le -Z_{\alpha}\}}$$



例1设某厂生产一种灯管，其寿命$X\sim N(\mu,200^2)$，由经验知平均寿命$\mu=1500$小时，现采用新工艺后，在所生产的灯管中抽取25只，测得平均寿命1675小时，问采用新工艺后，灯管寿命是否有显著提高。($\alpha=0.05$)

解: $H_0:\mu=\mu_0=1500 \quad H_1:\mu>\mu_0$

检验统计量为 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $W=\{Z\geq Z_\alpha\}$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{1675-1500}{200/\sqrt{25}}=4.375 \qquad z_{0.05}=1.645$$

因为 $z=4.375>1.645$ 拒绝H_0，即灯管寿命有显著提高

例2已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布N(4.55,0.11²).某日测得5炉铁水含碳量如下: 4.28, 4.40, 4.42, 4.35, 4.37. 如果标准差不变,该日铁水的平均含碳量是否显著偏低? (取 $\alpha=0.05$)

解: $H_0: \mu=\mu_0=4.55 \quad H_1: \mu<\mu_0$

检验统计量为 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $W=\{Z\le -Z_\alpha\}$

计算得 $\bar{x}=4.364$ $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{4.364-4.55}{0.11/\sqrt{5}}=-3.78$

$z_\alpha=1.645$ 因为 $z=-3.78<-1.645$

拒绝H_0, 即该日铁水的平均含碳量显著偏低

注:上题中,用双边检验或右边检验都是错误的.

若用双边检验, H_0: $\mu=4.55$; H_1: $\mu\neq4.55$,则拒绝域为

$$\{|Z|\geq Z_{\alpha/2}\}=1.96$$

由 $|Z|=3.78>1.96$,故拒绝 H_0,说明可以认为该日铁水的平均含碳量显著异于4.55.但无法说明是显著高于还是低于4.55.不合题意

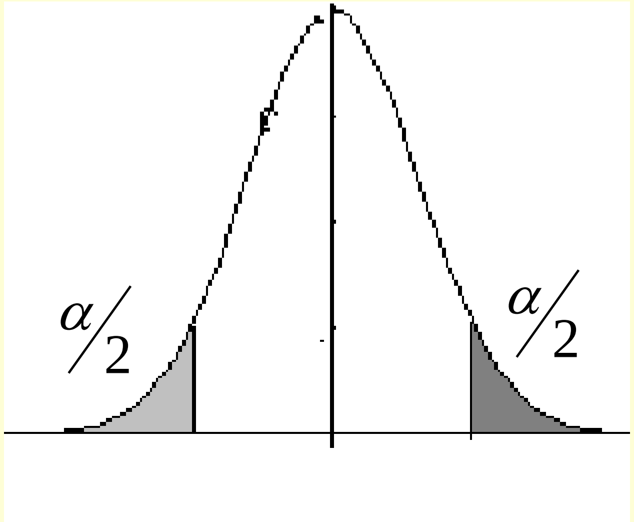
若用右边检验, H_0: $\mu\leq4.55$; H_1: $\mu>4.55$,则拒绝域为

$$Z\geq Z_{0.05\alpha}=1.645$$

由 $Z=-3.78<1.645$,故接受 H_0,说明不能认为该日铁水的平均含碳量显著高于4.55.但无法区分是等于还是低于4.55.不合题意.

类型2

2、σ^2未知的情形---t检验



双边检验:对于假设

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$

$$H_0\text{为真时}: t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

由$P\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$,

得水平为α的拒绝域为

$$\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

·右边HT问题

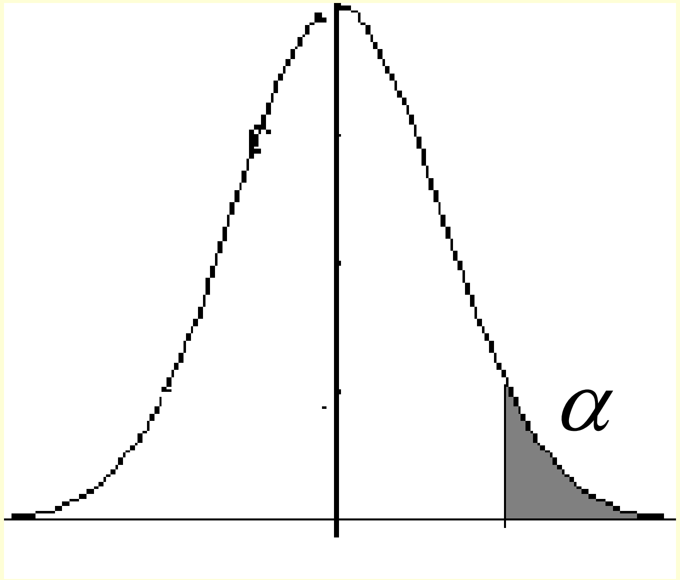
H_0: $\mu=\mu_0$; H_1: $\mu>\mu_0$, 或 H_0: $\mu\le\mu_0$; H_1: $\mu>\mu_0$,

$$\mu=\mu_0: t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

由**$P\{t\ge t_\alpha(n-1)\}=\alpha$,**

得水平为α的拒绝域为

$\{t\ge t_\alpha(n-1)\}$,



·左边**HT**问题

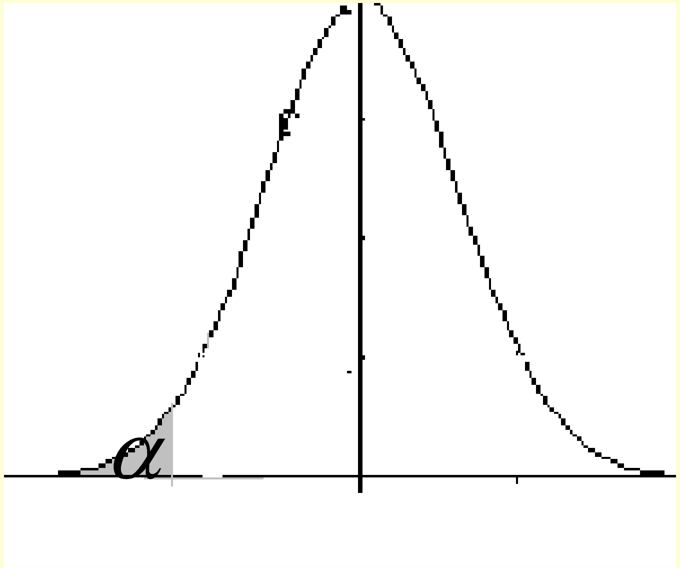
H_0： $\mu=\mu_0$ ； H_1： $\mu<\mu_0$, 或 H_0： $\mu\geq\mu_0$ ； H_1： $\mu<\mu_0$,

$$\mu=\mu_0: t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

由**$P\{t\leq -t_\alpha(n-1)\}=\alpha$,**

得水平为α的拒绝域为

$\{t\leq -t_\alpha(n-1)\}$



例3 用热敏电阻测温仪间接温量地热勘探井底温度X，重复测量7次，测得温度(℃)： 112.0 113.4 111.2 112.0 114.5 112.9 113.6 而用某种精确办法测得温度为112.6(可看作真值)，试问用热敏电阻测温仪间接测温有无系统偏差(设X服从正态分布，取α=0.05)？

解: $H_0: \mu = \mu_0 = 112.6 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

检验统计量为 $\mathbf{t} = \dfrac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{\mathbf{S}/\sqrt{\mathbf{n}}}$ 拒绝域 $\mathbf{W} = \{|\mathbf{t}| \geq \mathbf{t}_{\alpha/2}(\mathbf{n}-1)\}$

计算得 $\bar{x} = 112.8 \quad s = 1.135$ $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{112.8 - 112.6}{1.135/\sqrt{7}} = 0.466$

$t_{0.025}(6) = 2.4469$ 因为 $|t| = 0.466 < 2.4469$

接受$\mathbf{H_0}$，热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差

例4 某厂生产镍合金线，其抗拉强度的均值为10620（kg/mm^2）今改进工艺后生产一批镍合金线，抽取10根，测得抗拉强度(kg/mm2)为： 10512， 10623， 10668， 10554， 10776， 10707， 10557， 10581， 10666， 10670. 认为抗拉强度服从正态分布，取α=0.05，问新生产的镍合金线的抗拉强度是否比过去生产的镍合金线抗拉强度要高?

解: $H_0: \mu = \mu_0 = 10620 \quad H_1: \mu > \mu_0$

检验统计量为 $\mathbf{t} = \dfrac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{\mathbf{S}/\sqrt{\mathbf{n}}}$ 拒绝域 $\mathbf{W} = \{\mathbf{t} \geq \mathbf{t}_\alpha(\mathbf{n}-1)\}$

计算得 $\bar{x} = 10631.4 \quad s = 81$ $\quad t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{10631.4 - 10620}{81/\sqrt{10}} = 0.45$

$\mathbf{t}_{0.05}(9) = 1.8330$ 因为 $t = 0.45 < 1.8330$

接受$\mathbf{H_0}$，新生产比过去生产的抗拉强度一样高.

EX 设正品镍合金线的抗拉强度服从均值不低于10620 (kg/mm^2)的正态分布，今从某厂生产的镍合金线中抽取10根，测得平均抗拉强度10600 (kg/mm^2)，样本标准差为80.，问该厂的镍合金线的抗拉强度是否不合格? ($\alpha=0.1$)

解: $H_0: \mu \geq \mu_0 = 10620 \quad H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 拒绝域 $W = \{t \leq -T_\alpha(n-1)\}$

计算得 $\bar{x} = 10631.4 \quad s = 81 \quad t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{10600 - 10620}{80/\sqrt{10}} = -0.79$

$t_{0.1}(9) = 1.3830$ 因为 $t = -0.79 > -1.3830$

接受H_0，新生产不低于过去生产的抗拉强度

二、单个正态总体方差的假设检验

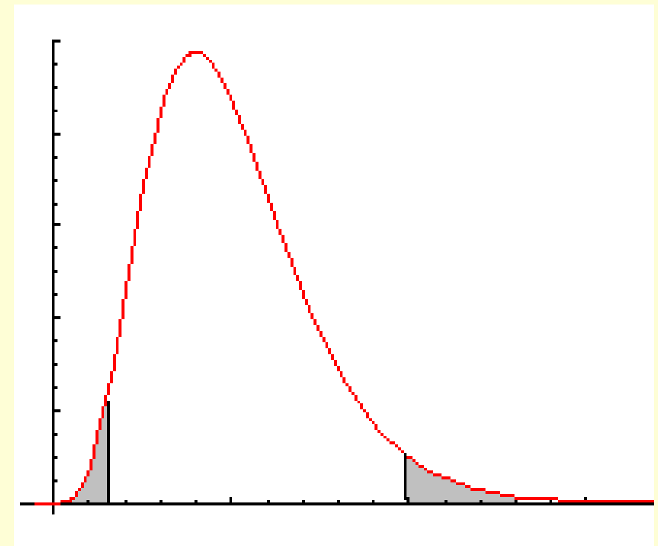
设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\ \sigma^2)$，给定检验水平$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_n$检验假设

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\ H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2。$$

假定μ未知，双边检验: 对于假设

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\ H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$$

$$H_0\text{下}\quad \chi^2=\frac{(n\text{-}1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$



$\chi^2_{1-\alpha/2}$ $\chi^2_{\alpha/2}$

$$由\mathbf{P}\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{n}-1)\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{n}-1)\} = \boldsymbol{\alpha}$$

得水平为α的拒绝域为

$$\left\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(\boldsymbol{n}-1)或\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(\boldsymbol{n}-1)\right\}$$

对于单边问题$\boldsymbol{H}_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; $\boldsymbol{H}_1$: $\sigma^2 < \sigma_0^2$,

可解得拒绝域: $\left\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(\boldsymbol{n}-1)\right\}$;

而对单边问题$\boldsymbol{H}_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; $\boldsymbol{H}_1$: $\sigma^2 > \sigma_0^2$,

可解得拒绝域: $\left\{\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(\boldsymbol{n}-1)\right\}$。

例5 电工器材厂生产一批保险丝，取10根测得其熔化时间（min）为42，65，75，78，59，57，68，54，55，71. 问是否可以认为整批保险丝的熔化时间的方差小于等于80?(α=0.05，熔化时间为正态变量.)

解: $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 80 \quad H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2$

检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 拒绝域 $W = \{\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)\}$

计算得 $s^2 = 121.8$ $\chi^2 = \dfrac{9 \times 121.8}{80} = 13.7$

$\chi_{0.05}^2(9) = 16.919$ 因为 $\chi^2 = 13.7 < 16.919$

接受H_0，认为整批保险丝的熔化时间的方差小于等于80

EX

设保险丝的融化时间服从正态分布，取9根测得其熔化时间（min）的样本均值为62,标准差为10.

(1)是否可以认为整批保险丝的熔化时间服从$N(60, 9^2)$？($\alpha=0.05$)

(2)是否可以认为整批保险丝的熔化时间的方差显著大于70?($\alpha=0.05$)

双正态

答:(1) $|t|=0.6<2.306$,接受60;$2.18<X^2=9.877<17.535$,接受 10

(2) $X^2=11.42<15.507$, 认为方差不显著大于70

双正态总体的抽样分布定理

2.若$X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{i\cdot i\cdot d}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2), Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{i\cdot i\cdot d}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

且两样本独立. 则

$$(1) F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

(2)进一步, 假定$\sigma_1^2=\sigma_2^2$, 就有,

$$\mathbf{t}=\frac{\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}-(\mu_1-\mu_2)}{\mathbf{S_w}\sqrt{1/\mathbf{n}_1+1/\mathbf{n}_2}} \sim \mathbf{t}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2).$$ **其中**

$$\mathbf{S}_\mathbf{w}^2=\frac{(\mathbf{n}_1-1)\mathbf{S}_1^2+(\mathbf{n}_2-1)\mathbf{S}_2^2}{\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2}$$ **称为混合样本方差.**

8.3 双正态总体均值差与方差比的假设检验

一、均值差的假设检验

设$\mathbf{X_1,\cdots,X_{n_1}} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N(u_1,\ \sigma_1^2)}$; $\mathbf{Y_1,\cdots,Y_{n_2}} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N(u_2,\ \sigma_2^2)}$,

两样本独立，给定检验水平α，由观察值$x_1,\cdots,x_{n_1}$;

$y_1,\cdots,y_{n_2}$检验假设 H_0: $\mu_1=\mu_2$; H_1: $\mu_1\neq\mu_2$

假定$\boldsymbol{\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2}$

$$\mathbf{H_0}\text{下，}\quad \mathbf{t}=\frac{\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}}{\mathbf{S_w}\sqrt{1/\mathbf{n}_1+1/\mathbf{n}_2}}\sim \mathbf{t(n_1+n_2-2)}$$

由$\mathbf{P}\{|\mathbf{t}| \geq \mathbf{t}_{\alpha/2}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2)\}=\alpha$，即得拒绝域

$$\{|\mathbf{t}| \geq \mathbf{t}_{\alpha/2}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2)\}$$

而对应的单边问题

$$H_0:\mu_1=\mu_2;H_1:\mu_1>\mu_2\text{或}H_0:\mu_1\leq\mu_2;H_1:\mu_1>\mu_2$$

拒绝域为 $\{\mathbf{t} \geq \mathbf{t}_{\alpha}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2)\}$

$$\boldsymbol{H_0:\mu_1=\mu_2;H_1:\mu_1<\mu_2}\textbf{或}\boldsymbol{H_0:\mu_1\geq\mu_2;H_1:\mu_1<\mu_2}$$

拒绝域为 $\{\mathbf{t} \leq -\mathbf{t}_{\alpha}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2-2)\}$

例6 比较甲,乙两种安眠药的疗效。将20名患者分成两组,每组10人.其中10人服用甲药后延长睡眠的时数分别为1.9, 0.8, 1.1, 0.1, -0.1, 4.4, 5.5, 1.6, 4.6, 3.4;另10人服用乙药后延长睡眠的时数分别为0.7, -1.6, -0.2, -1.2, -0.1, 3.4, 3.7, 0.8, 0.0, 2.0.若服用两种安眠药后增加的睡眠时数服从方差相同的正态分布.试问两种安眠药的疗效有无显著性差异?(α=0.10)

解: $H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

检验统计量为 $$t = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}}{\mathbf{S}_w \sqrt{1/\mathbf{n}_1 + 1/\mathbf{n}_2}}$$

拒绝域为 $$W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$$

这里: $\bar{x}=2.33, s_1=2.002 \quad \bar{y}=0.75, s_2=1.789$

$$s_w=\sqrt{\frac{9s_1^2+9s_2^2}{18}}=1.898 \quad t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{1/10+1/10}}=1.86$$

对于α=0. 10， $n_1=10, n_2=10 \quad t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=1.7341$

因为 $|t|=1.86>1.7341$

拒绝H_0, 认为两种安眠药的疗效有显著性差异

EX1

上题中,试检验是否甲安眠药比乙安眠药疗效显著?

$$H_0:\mu_1\le\mu_2;H_1:\mu_1>\mu_2$$

$$\mathbf{H_0下,}\quad \mathbf{t}=\frac{\overline{\mathbf{X}}-\overline{\mathbf{Y}}}{\mathbf{S_w}\sqrt{1/10+1/10}}\sim \mathbf{t}(18)$$

由$\mathbf{P\{t\ge t_{0.1}(18)\}}=0.1$,即得拒绝域

$$\left\{\mathbf{t}\ge\mathbf{t}_{0.1}(18)=1.3304\right\}$$

这里:t=1.86>1.3304,故拒绝H_0,认为甲安眠药比乙安眠药疗效显著

EX2

上题中,试检验是否乙安眠药比甲安眠药疗效显著?

二、方差比的假设检验

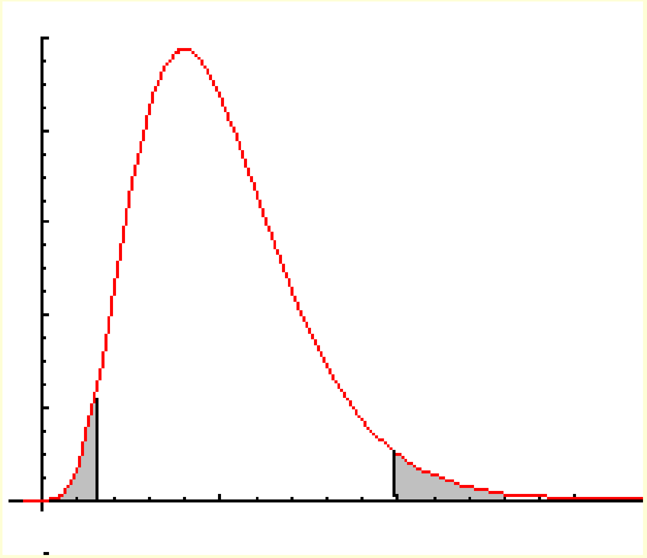
$$设X_1,\cdots,X_{n_1}\overset{iid}{\sim}N(\mu_1,\sigma_1^2);\ Y_1,\cdots,Y_{n_2}\overset{iid}{\sim}N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

两样本独立, 给定检验水平 α, 由观察值

$$\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{\mathbf{n}_1};\qquad \mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_{\mathbf{n}_2}$$

检验假设 $\mathbf{H_0}$: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; $\mathbf{H_1}$: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

$$H_0真时,F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$$



$F_{1-\alpha/2}$　　　　$F_{\alpha/2}$

由 $p\{F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = \alpha$

得拒绝域

$\{F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$

而对应的单边问题

$$H_0:\sigma_1=\sigma_2;H_1:\sigma_1>\sigma_2\text{或}H_0:\sigma_1\le\sigma_2;H_1:\sigma_1>\sigma_2$$

拒绝域为 $\{F\ge F_\alpha(n_1-1,\ n_2-1)\}$

$$H_0:\sigma_1=\sigma_2;H_1:\sigma_1<\sigma_2\text{或}H_0:\sigma_1\ge\sigma_2;H_1:\sigma_1<\sigma_2$$

拒绝域为 $\{F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,\ n_2-1)\}$

例7有甲乙两种机床,加工同样产品,从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干产品,测得产品直径为(单位:mm):

甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.9, 19.6, 19.9.

乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2.

假定甲,乙两台机床的产品直径都服从正态分布,试比较甲,乙两台机床加工的精度有无显著差异?(α=0.05)

解: H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$　检验统计量　$F=S_1^2/S_2^2$

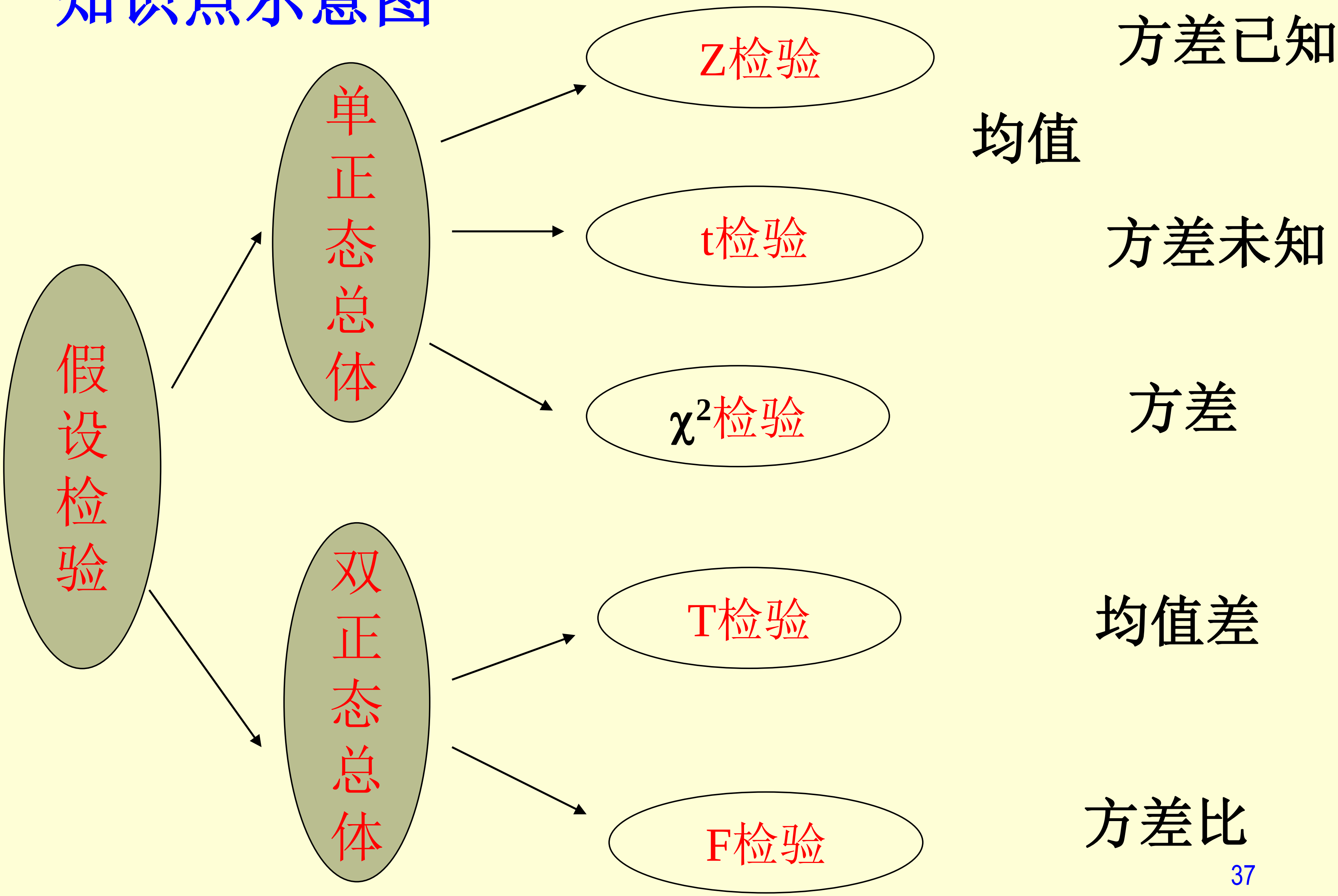
拒绝域　$\{F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$

计算得: $\mathbf{S}_1^2=0.204$ $\mathbf{S}_2^2=0.397$ $\mathbf{f}=0.51$

$F_{1-0.025}(7, 6)=1/5.12=0.1953$　　$F_{0.025}(7, 6)=5.7$

0.1957<f<5.7,接受H_0, 甲,乙两台机床加工的精度无显著差异

知识点示意图



假设检验
单正态总体
双正态总体
Z检验
t检验
χ^2检验
T检验
F检验
方差已知
均值
方差未知
方差
均值差
方差比

本章 假设检验小结

知识点

1、正态总体的假设检验;

2、犯两类错误的概率.

考点

1、掌握正态总体的单双边假设检验;

2、计算犯两类错误的概率.