第五章 大数定律及中心极限定理

5.1 大数定律

一.依概率收敛

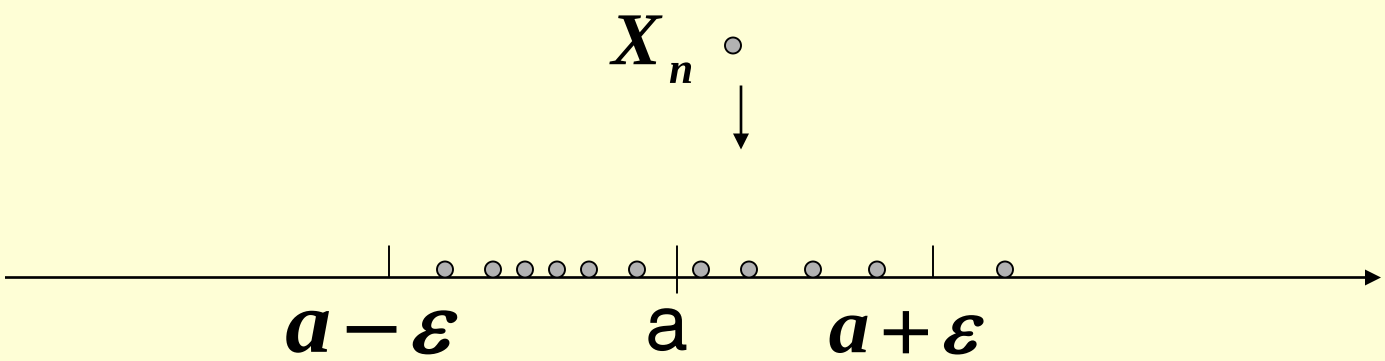
设$\{X_n\}$为随机变量序列，X为随机变量，若任给$\varepsilon>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

则称$\{X_n\}$依概率收敛于X. 可记为

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

例如: $X_n \xrightarrow{P} a$ 意思是: 当 $n \to \infty$ 时, X_n 落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内的概率越来越大. $\exists n_0, n > n_0$



而 $x_n \to a$ 意思是: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, 当 $n > n_0$

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

二.三个常用的大数定律

1.切比雪夫大数定律

设$\{X_k, k=1,2,\ldots\}$为独立的随机变量序列，且有相同的数学期望μ，及方差σ^2，则

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$$

即若任给ε>0, 使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

证明:由切比雪夫不等式

$$P\{|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

这里

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu$$

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}$$

故

$$1 \geq P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

2、伯努利大数定律

设进行n次独立重复试验，每次试验中事件A发生的概率为p，记f_n为n次试验中事件A发生的频率，则

$$f_n \xrightarrow{p} p \qquad n \to \infty$$

证明:设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第i次试验事件A发生} \\ 0 & \text{第i次试验事件A不发生} \end{cases}$$

则 $E(X_i) = p \qquad D(X_i) = p(1-p)$

由切比雪夫大数定理 $f_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p$

该定理给出了频率的稳定性的严格的数学意义。

3. 辛钦大数定律

若$\{X_k,k=1.2,...\}$为独立同分布随机变量序列,

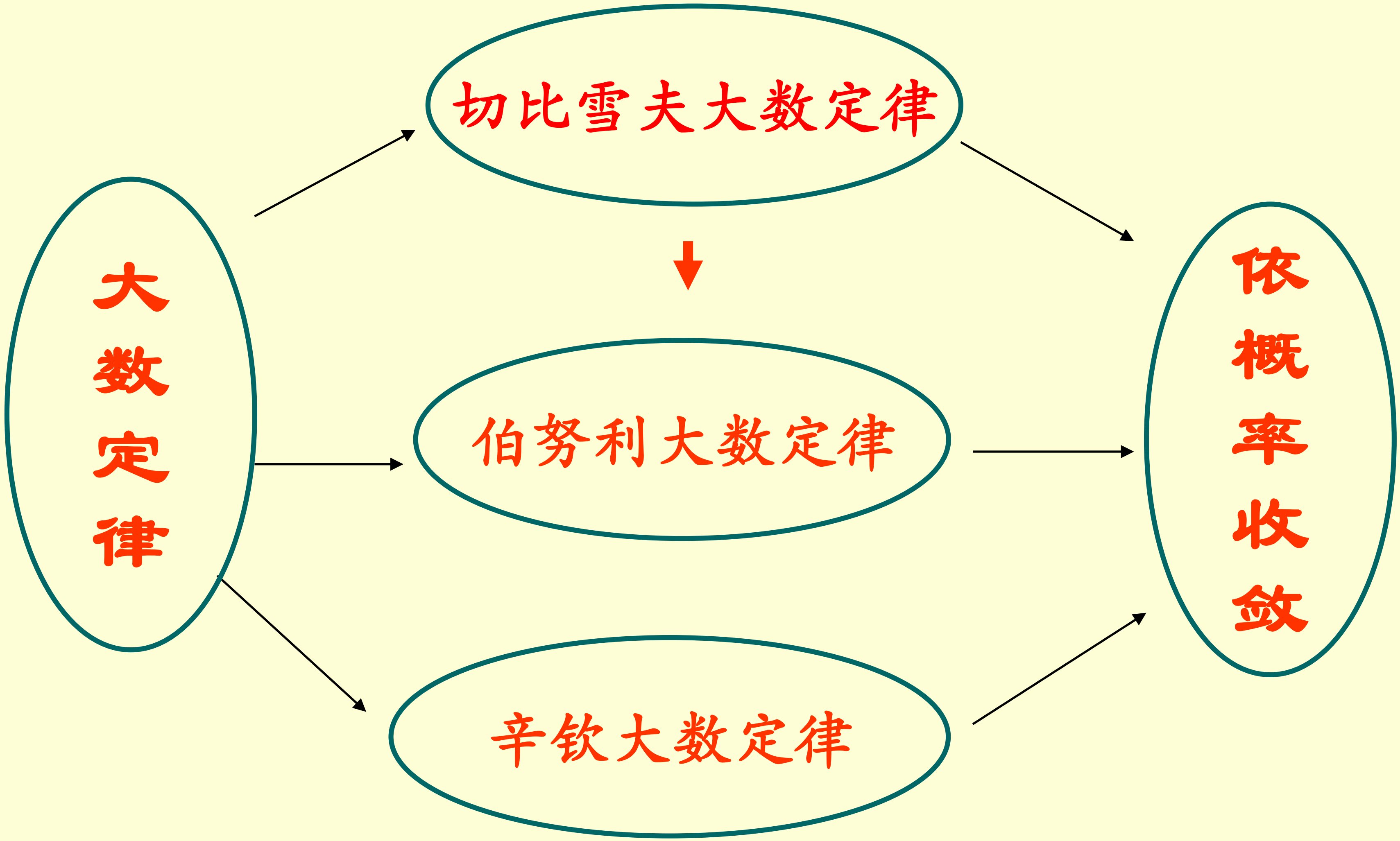
$EX_k=\mu<\infty$, k=1, 2, … 则

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$$

推论: 若$\{X_i,i=1.2,...\}$为独立同分布随机变量序列,
$E(X_1^k)<\infty$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X_1^k)$$

知识点示意图



第一节 大数定律小结

知识点

1、大数定律：

满足一定条件的独立随机变量序列，前n项平均值依概率收敛到前n项平均值的期望。

切比雪夫大数定律

伯努利大数定律

辛钦大数定律

考点：无

5.2. 中心极限定理

一.依分布收敛

设$\{X_n\}$为随机变量序列，X为随机变量，其对应的分布函数分别为$F_n(x)$, $F(x)$. 若在$F(x)$的连续点，有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称$\{X_n\}$依分布收敛于X. 可记为

$$X_n \xrightarrow{w} X$$

现令$Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, 若Y_n的标准化$r.v.\ Y_n^* \xrightarrow{w} \xi \sim N(0,1)$,

则称$\{X_n\}$满足中心极限定理.

二.两个常用的中心极限定理

1、独立同分布中心极限定理

(Levy-Lindeberg) 设$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，若$EX_k=\mu<\infty$，$DX_k=\sigma^2>0$，$k=1, 2, \ldots,$ 则$\{X_n\}$满足中心极限定理。

根据上述定理，当n充分大时

$$P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le x\} \approx \Phi(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$$

中心极限定理说明了正态分布的重要地位，它也是统计学中处理大样本时的重要工具。

例1 将一颗骰子连掷100次，则点数之和大于300的概率是多少？

解:设 X_k为第k 次掷出的点数,k=1,2,…,100,则

$X_1,\ldots,X_{100}$独立同分布.

$$\Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$E(X_1)=\frac{7}{2},D(X_1)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k^2-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

由中心极限定理

$$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>300\}\approx 1-\Phi\left(\frac{300-100\times\frac{7}{2}}{10\sqrt{\frac{35}{12}}}\right)=1-\Phi(-2.93)=0.9983$$

2.德莫佛-拉普拉斯中心极限定理

(De Moivre-Laplace)

设随机变量 η_n (n=1, 2, ...)服从参数为n , p(0<p<1)的二项分布，则

$$\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{w} \xi \sim N(0,1)$$

证明:设

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第i次试验事件A发生} \\ 0 & \text{第i次试验事件A不发生} \end{cases}$$

则

$$E(X_i) = p, D(X_i) = p(1-p), \eta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

由中心极限定理，结论得证

根据上述定理，当n充分大时

$$P\{\eta_n \le x\} \approx \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

例2 在一家保险公司里有10000个人参加寿命保险，每人每年付12元保险费。在一年内一个人死亡的概率为0.6%，死亡时其家属可向保险公司领得1000元赔偿金，问：

(1)保险公司亏本的概率有多大?

(2)其他条件不变，为使保险公司一年的利润不少于60000的概率不小于90%，赔偿金至多可设为多少？

解 设X表示一年内死亡的人数，则X~B(n, p),

其中 n= 10000，p=0.6%，

设Y表示保险公司一年的利润，

Y=120000-1000X

$$\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

于是由中心极限定理

(1)P{Y<0}=P{10000×12-1000X<0}

=1–P{X≤120}

≈1 – Φ(7.75)=0

(2)其他条件不变，为使保险公司一年的利润不少于60000的概率不小于90%，赔偿金至多可设为多少?

（2）设赔偿金为a元，则令

$$P\{Y \geq 60000\} \geq 0.9$$

P{Y>60000}=P{120000-aX>60000}

=P{X≤60000/a}≥0.9;

由中心极限定理,上式等价于

$$\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{\frac{60000}{a}-10000\times 0.006}{\sqrt{10000\times 0.006\times 0.994}}\right)\geq 0.9 \qquad \Rightarrow a \leq 3017$$

例3　一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重50千克，标准差为5千克。若用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于0.977。

解：设最多可装 n 箱，保障不超载的概率大于0.977。

第i箱重量为X_i千克，$i=1,\cdots,n.$

则　$EX_i=50,\quad DX_i=25,\quad i=1,\cdots,n$

且　$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 5000\}>0.977$

由中心极限定理有

知识点示意图

$$P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\} \approx \Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}) > 0.977$$

则 $$\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2,$$

$$100n^2 - 20000n + 1000^2 > 4n,$$

解得 $n > 102.02$ 或 $n < 98.02$, 由题意知 $n = 98.$

因此最多可装 98 箱，保障不超载的概率大于0.977。

例4 检验员逐个检查某种产品，每查一件花10秒时间，有的产品可能要复查一次而再花10秒时间. 假定每一件产品需复查的概率为1/2，求在8小时内检验员能够至少检查1900件的概率.

解法一：设X_i 为检查第i件产品所花时间,则

$$X_i=\begin{cases}10 & \text{此件不需复查}\\ 20 & \text{此件需复查}\end{cases}\Rightarrow E(X_i)=15, D(X_i)=25$$

于是, 检查1900件所花时间为 $\sum_{i=1}^{1900} X_i$ ，则在8小时内检验员能够至少检查1900件的概率为

$$P\{\sum_{i=1}^{1900} X_i<8\times3600\}\approx\Phi\left(\frac{28800-1900\times15}{\sqrt{1900\times25}}\right)\approx0.916$$

解法二：设*X*为1900件产品中需复查的件数,Y为检查1900件产品所花时间,则 $X \sim B(1900, \frac{1}{2})$.

$$Y = 1900 \times 10 + 10X$$

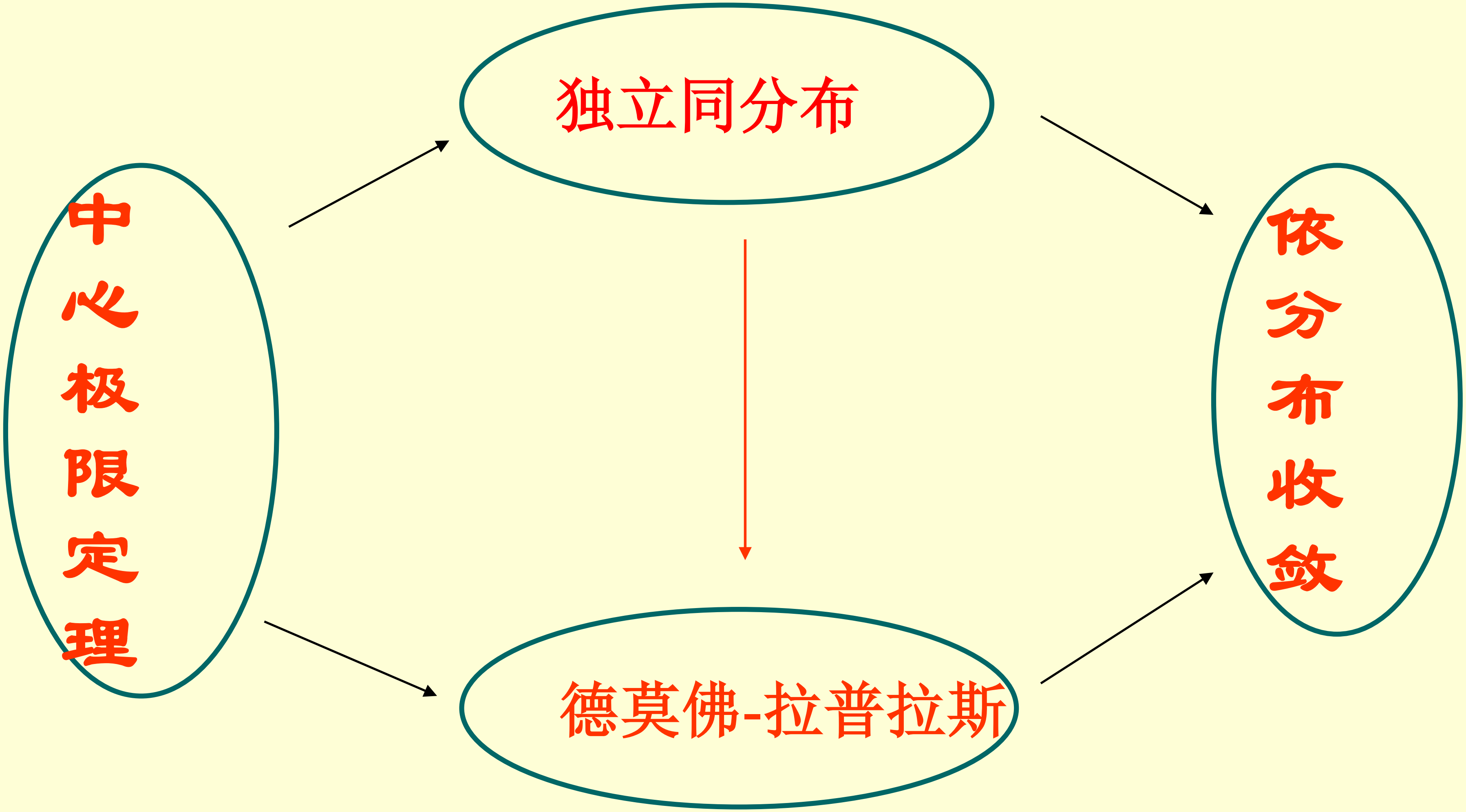
在8小时内检验员能够至少检查1900件的概率为

$$P\{Y < 8 \times 3600\} = P\left\{19000 + 10X < 28800\right\}$$

$$= P\left\{X < 980\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{980 - 1900 \times 0.5}{\sqrt{1900 \times 0.25}}\right) \approx 0.916$$

知识点示意图



第二节 中心极限定理小结

知识点

中心极限定理：

满足一定条件的独立随机变量序列，前n项之和标准化后依分布收敛到标准正态分布。

独立同分布中心极限定理

德莫佛-拉普拉斯中心极限定理

考点

用中心极限定理做前n项和的近似计算。