第十一章 平稳过程

- 1.平稳过程的概念
- 2.各态历经性
- 3.平稳过程的功率谱密度

第一节 平稳随机过程的概念

一、严平稳过程

定义1　若随机过程{X(t)，t∈T}，若若对任意的正整数n,任意时刻$t_1, t_2 \ldots t_n \in T$和任意的h

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)) \qquad (X(t_1+h), X(t_2+h), \cdots, X(t_n+h))$$

具有相同的分布函数, 即

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+h, t_2+h, \cdots, t_n+h)$$

则称随机过程X(t)为严平稳过程.

严平稳过程的含义是它的n维分布或有穷维分布不随自变量的公共时间平移而改变.

性质1 设{X(t)，t∈T}是严平稳过程且是二阶矩过程

(1) 均值函数、均方值函数、方差函数都是常数

$$\mu_X = E[X(t)] \qquad \Psi_X^2 = E[X^2(t)] \qquad D_X = D[X(t)]$$

(2)相关函数和协方差函数是时间差的函数

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1) \qquad C_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2$$

证明:(1) 因为X(t)与X(t+h)同分布, 令h=-t, 得

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[X(0)] = \mu_X$$

$$\Psi_{\mathbf{X}}^2(\mathbf{t}) = \mathbf{E}[\mathbf{X}^2(\mathbf{t})] = \mathbf{E}[\mathbf{X}^2(0)] = \Psi_{\mathbf{X}}^2$$

$$D_X(t) = D[X(t)] = D[X(0)] = D_X$$

(2) $(X(t_1), X(t_2))$ 与 $(X(t_1+h), X(t_2+h))$ 同分布,

令 $h = -t_1$, 得 $(X(t_1), X(t_2))$ 与 $(X(0), X(t_2-t_1))$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(0)X(t_2-t_1)] = R_X(t_2-t_1)$$

二、（宽）平稳过程

定义2 设{X(t)，t∈T}是一个二阶矩过程，若对任意 t,t+τ∈T

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \mu_X \qquad \text{(常数)},$$

$$R_X(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) \qquad \text{(仅仅是时间差函数)},$$

则称X(t)是一个宽平稳过程,简称**平稳过程.**

严平稳过程与宽平稳过程有如下的关系:

(1) 若严平稳过程还是二阶矩过程, 则严平稳过程必为宽平稳过程, 即二阶矩存在的严平稳过程是宽平稳过程;

(2) 宽平稳过程不一定是严平稳过程, 严平稳过程也不一定是宽平稳过程;

(3) 对于正态过程而言, 宽平稳过程和严平稳过程是等价的.

性质2 设{X(t)，t∈T}是平稳过程,则

(1) 均值函数、均方值函数、方差函数都是常数

$$\mu_X = E[X(t)] \qquad \Psi_X^2 = R_X(0) \qquad D_X = R_X(0) - \mu_X^2$$

(2)相关函数和协方差函数是时间差的函数

$$R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) \qquad C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2$$

性质3 设$R_X(\tau)$是平稳过程$\{X(t), t\in T\}$的相关函数，则

(1)非负性 $$R_X(0)=\Psi_X^2\geq 0$$

(2)对称性 $$R_X(-\tau)=R_X(\tau)$$

(3)上界性 $$|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$$

(4) $R_X(\tau)$是非负定的，即对任意$t_1, t_2 \dots t_n\in T$和任意实值函数$g(t)$都有

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)\geq 0$$

证

(2) $$R_X(-\tau)=R_X(t+\tau,t)=E[X(t+\tau)X(t)]$$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$$

(3) $$[R_X(\tau)]^2=|E[X(t)X(t+\tau)]|^2$$

$$\le E[X^2(t)]E[X^2(t+\tau)]=R_X^2(0)$$

(4) $$\sum_{i,j=1}^{n}R_X(t_i-t_j)g(t_i)g(t_j)=\sum_{i,j=1}^{n}E[X(t_j)X(t_i)]g(t_i)g(t_j)$$

$$=E[\sum_{i,j=1}^{n}X(t_i)X(t_j)g(t_i)g(t_j)] \quad =E[\sum_{i=1}^{n}X(t_i)g(t_i)]^2\ge 0$$

定义3 设{X(t)，t∈T}和{Y(t)，t∈T}是两个平稳过程,若对任意t,t+ τ ∈T，都有,

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau)$$

成立，则称X(t)与Y(t)是平稳相关的,
或称这两个过程是联合平稳的.

平稳过程的判定

例1 考察随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(bt+\Theta)$

的平稳性。其中a和b是常数, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(bt+\Theta)] \quad =\int_0^{2\pi} a\cos(bt+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)] \quad =E\{[a\cos(bt+\Theta)][a\cos(b\left(t+\tau\right)+\Theta)]\}$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(bt+\theta)\cdot\cos\left[b\left(t+\tau\right)+\theta\right]\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

X(t)是平稳过程.

$$=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2bt+b\tau+2\theta)+\cos b\tau}{2}d\theta \quad =\frac{a^2}{2}\cos b\tau$$

例2 设s(t)是一周期为T的函数, $\Theta \sim U(0,T)$, 称 X(t)=s(t+Θ)为随机相位周期过程. 试讨论它的平稳性.

解 由s(t)的周期性,得

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[s(t+\Theta)] = \int_0^T \frac{1}{T} s(t+\theta)d\theta \quad = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(u)du = \frac{1}{T}\int_0^T s(u)du$$ 常数

$$R_X(t,t+\tau) = E[s(t+\Theta)s(t+\tau+\Theta)] = \int_0^T s(t+\theta)s(t+\tau+\theta)\frac{1}{T}d\theta$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(u)s(u+\tau)du = \frac{1}{T}\int_0^T s(u)s(\tau+u)du$$ 是τ的函数

故随机相位周期过程是平稳过程.

例3　设{X_k, k=0, $\pm$1, $\pm$2, ...}是一互不相关的随机变量序列, 且

$$E(X_k)=0\,,D(X_k)=\sigma^2$$

讨论{X_k, k=0, $\pm$1, $\pm$2, ...}的平稳性

解: $$E(X_k^2)=D(X_k)+\left[\mathrm{E}(X_k)\right]^2=\sigma^2$$

$$E[X_kX_{k+\tau}]=\begin{cases}\sigma^2 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases}=R_X(\tau)$$

又 $$E(X_k)=0$$

{X_k, k=0, $\pm$1, $\pm$2, ...}是平稳过程.

此例中的{X_k, k=0, $\pm$1, $\pm$2, ...}也称为白噪声序列.

例4　设X(t)是一个平稳过程，且 Y(t)=bX(t)+c 其中b与c均为常数,，判断X(t)和Y(t)是否联合平稳.

解：易证Y(t)也是平稳过程. 且

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)(bX(t+\tau)+c)]$$

$$=E[bX(t)X(t+\tau)+cX(t)]$$

$$=bR_X(\tau)+c\mu_X=R_{XY}(\tau)$$

所以X(t)和Y(t)是联合平稳的.

第二节 各态历经性

如何根据平稳过程的观察值估计过程的数字特征？

定义1：设X(t)是一个平稳过程,称

$$\hat{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

为X(t)在[-T,T]上的历时平均值.

$$\hat{R}_{XT}(\tau) \triangleq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt$$

为X(t)在[-T,T]上的历时相关函数.

上式中的“积分”是什么概念?

当 $T \to \infty$ 时如何取“极限”?

一、均方极限与均方积分

定义2 设X_n, n=1, 2, …是由二阶矩存在的随机变量序列, X是一个随机变量, 若

$$\lim_{n\to+\infty} E|X_n - X|^2 = 0$$

则称X_n, n=1, 2, …均方收敛于X, 记为

$$\underset{n\to+\infty}{l.i.m.} X_n = X$$

均方极限的性质

1.如果 $\underset{n\to+\infty}{l.i.m.} X_n = X$ **,那么**

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X) = E(\underset{n\to+\infty}{l.i.m} X_n)$$

证明:由柯西-许瓦兹不等式:

$$E|XY| \le \left[E(|X|^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E(|Y|^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

在上式中,取X=|X$_n$-X|,Y=1,则有

$$E|X_n - X| \le \left[E(|X_n - X|^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

由 $\underset{n\to+\infty}{l.i.m.} X_n = X \Rightarrow E|X_n - X|^2 \to 0$

$$\therefore |E(X_n) - E(X)|$$

$$= |E(X_n - X)|$$

$$\le E|X_n - X| \to 0$$

即

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(X)$$

2.若l.i.m.X_n=X， l.i.mY_n =Y,则:

$$E(XY)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} E(X_n Y_m)$$

证略

3.若l.i.m.X_n=X， l.i.mY_n =Y ,则对任意常数a,b,

$$l.i.m.(aX_n+bY_n)=aX+bY$$

证略

由1. 2. 3不难推出:当l.i..m.X_n=X， l.i.mY_n =Y时,有

$$\lim_{n\to+\infty} D(X_n)=D(X)=D(\underset{n\to+\infty}{l.i.m}\, X_n)$$

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}} \operatorname{cov}(X_n, Y_m)=\operatorname{cov}(X, Y)$$

定义3 设X(t)是一个二阶矩过程, 对区间[a,b]作分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

.若 $\Delta=\max\limits_{0\le i\le n-1}\{(t_{i+1}-t_i)\}\to 0$,和式

$$\sum_{i=0}^{n-1}X(\xi_i)(t_{i+1}-t_i),\xi_i\in[t_i,t_{i+1}),i=0,1,\cdots,n-1$$

均方极限存在,则称X(t)在[a,b]上均方可积,

此极限称为X(t)的**均方积分**,且记为 $\int_a^b X(t)dt$,即

$$\int_a^b X(t)dt=\underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\sum_{i=0}^{n-1}X(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$

若均方极限 $\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{l.i.m.}\int_a^b X(t)dt$ 存在,则称X(t) 在

(-∞, +∞) 上均方可积, 记为 $\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)dt$,

即 $$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)dt = \underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{l.i.m}\int_a^b X(t)dt$$

均方积分的性质

设{X(t)，t∈（-∞，+∞）}是一个二阶矩过程，且在[a,b],[c,d] 上均方可积，则

（1） $E\int_a^b X(t)dt = \int_a^b E(X(t))dt$

（2） $E[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)dt] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X(t))dt$

（3） $E[\int_a^b X(t)dt \int_c^d X(s)ds] = \int_a^b \int_c^d E[X(s)X(t)]dsdt = \int_a^b \int_c^d R_X(s,t)dsdt$

此性质说明求期望号与求积分号可交换次序.

$$E\int_a^b X(t)dt = \int_a^b E(X(t))dt$$

时间平均

证明: $\int_a^b X(t)dt$ 存在.即

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum_{i=0}^{n-1} X(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$ 存在.

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(\underset{n\to+\infty}{l.i.m}\, X_n)$ 得

$$E\int_a^b X(t)dt = E[\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum_{i=0}^{n-1} X(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E[X(\xi_i)](t_{i+1}-t_i) = \int_a^b E(X(t))dt$$

二、时间平均

定义3 设{X(t)，t∈T} 是一个平稳过程,称

$$< X(t) >= \underset{T\to+\infty}{l.i.m.} \hat{X}_T = \underset{T\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$$

为X(t)的时间均值,

$$< X(t)X(t+\tau) > = \underset{T\to+\infty}{l.i.m.} \hat{R}_{XT}(\tau)$$

$$= \underset{T\to+\infty}{l.i.m.} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt$$

为X(t)的时间相关函数.

定理1 设{X(t)，t∈T}是平稳过程,则

(1) $E[<X(t)>]=\mu_X=E(\hat{X}_T)$

证明: $E(\hat{X}_T)=\dfrac{1}{2T}E\int_{-T}^{T}X(t)dt$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt \qquad =\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu_X dt=\mu_X$$

$$E[<X(t)>]=E[\underset{T\to+\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu_X dt=\mu_X$$

（2）$E[< X(t)X(t+\tau) >] = R_X(\tau) = E(\hat{R}_{XT}(\tau))$

（3）$D(\hat{X}_T) = \frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})C_X(\tau)d\tau$

三、 各态历经性(Ergodic)

定义4 设X(t)是一个平稳过程,若

$$< X(t) >= E[X(t)] = \mu_X$$

以概率1成立,则称X(t)的均值具有各态历经性.

若 $< X(t)X(t+\tau) >= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

以概率1成立,则称X(t)的自相关函数具有各态历经性.

若X(t)的均值和自相关函数都具有各态历经性,则称X(t)是(宽)各态历经过程,或者说X(t)具有遍历性.

定理2 **(均值各态历经定理) 平稳过程X(t)的均值具有各态历经性的充要条件是**

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

其中 $C_X(\tau)=R_X(\tau)-\mu_X^2$

定理3　(自相关函数各态历经定理) **平稳过程X(t)的自相关函数具有各态历经性的充要条件是**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau_1}{2T})[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]d\tau_1=0$$

其中

$$B(\tau_1)=E[X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)]$$

例1 考察随机相位正弦波均值的各态历经性。

解： $X(t)=a\cos(bt+\Theta)$, $\mu_X(t)=0,\ R_X(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos b\tau$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{a^2}{2}\cos b\tau d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left[\int_0^{2T}\cos b\tau d\tau-\int_0^{2T}\frac{\tau}{2T}\cos b\tau d\tau\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{\sin 2bT}{b}-\frac{\sin 2bT}{b}+\int_0^{2T}\frac{1}{2Tb}\sin b\tau d\tau\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\frac{1-\cos 2bT}{2Tb^2}=0$$

故X(t)的均值具有各态历经性

例2 设A，B是均值为0, 方差为σ^2的独立正态随机变量， X(t)=Asint+Bcost的相关函数为$R_X(\tau)=\sigma^2\cos\tau$,验证X(t)的均值具有各态历经性.

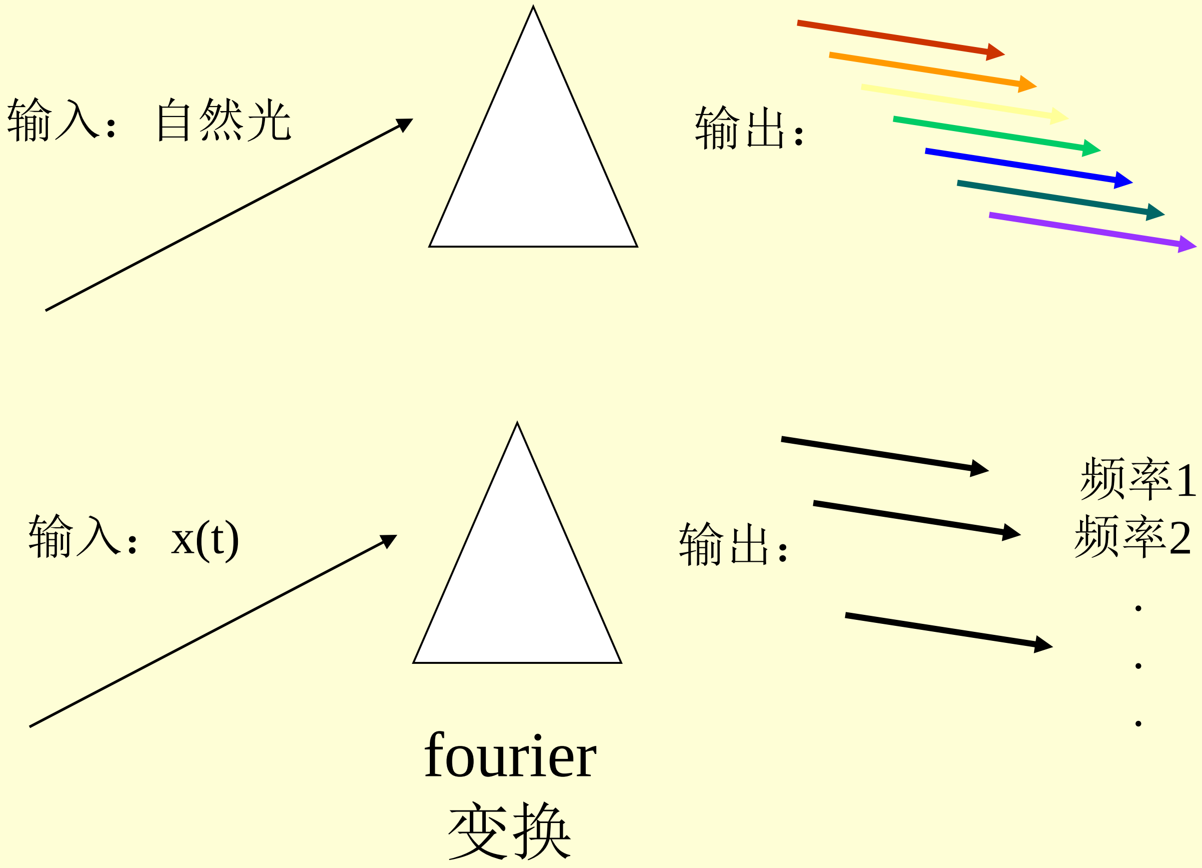
解:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\sigma^2\cos\tau d\tau=0$$

故X(t)的均值具有各态历经性.

第三节 平稳过程的功率谱密度



一、傅里叶变换

fourier变换

设x(t)是周期为T的函数,若x(t)在[-T/2,T/2]上满足Dirichlet条件,

即在区间内只有有限个第一类间断点和极值点.

则在[-T/2,T/2] 上（x(t)的连续点上）x(t)可表示为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}$$

其中，$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j\omega_n t}dt \quad ,\omega_n=\frac{2\pi n}{T}$

对于非周期的函数x(t),可以看成是以T为周期的函数当T→∞时的近似.于是

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-j\omega_n t}dte^{j\omega_n t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega_n t}dte^{j\omega_n t}\Delta\omega_n$$

其中，
$$\Delta\omega_n=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{2\pi(n+1)}{T}-\frac{2\pi n}{T}=\frac{2\pi}{T}$$

若上述极限存在,则

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt]e^{j\omega t}d\omega$$

综上所述，设x(t)是时间的函数，若x(t)满足Dirichlet条件，且绝对收敛，则（在x(t)的连续点上）x(t)可表示为

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

其中，

$$\boxed{F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

称为x(t)的fourier变换或频谱。

二、功率谱密度

由**Parseval**等式 $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega$$

等式左边表示x(t)在（-∞，+∞）的总能量.

称 $S_x(\omega) = \left|F_x(\omega)\right|^2$ 为**x(t)**的能谱密度。

积分结果表示能量谱密度在全部频域上的积分，即总能量. 因此右边又可理解为总能量的谱表示式.

巴塞伐尔等式表明：函数 在时域内的能量积分与频域内的能量积分相等.

设x(t)是一个普通函数,记

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le T \\ 0, & |t|>T \end{cases}$$

则 $$F_x(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T}^{+T} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

由Parseval等式

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega \qquad *$$

*式两边同除以2T, 并**T→∞,得**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

称 $\boxed{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt}$ 为x(t)在（-∞，+∞）的平均功率

$$\boxed{S_x(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2}$$

为函数(信号)x(t)的平均功率谱密度,简称功率谱密度

三、 平稳过程的功率谱密度

设{X(t),t∈（-∞，+∞）}是一个平稳过程,

构造皆为函数 $X_T(t)=\begin{cases} X(t), & |t|\le T \\ 0, & |t|>T \end{cases}$

其傅里叶变换 $F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t}dt$

由Parseval等式 $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\,d\omega$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\int_{-T}^{T} X^2(t)dt]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2]d\omega$$

定义1 设{X(t), t∈（-∞，+∞）}是一个平稳过程,称

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E[\int_{-T}^{T}X^2(t)dt]$$ 为平稳过程X(t) 的平均功率;

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E|F_X(\omega,T)|^2$$

为平稳过程 X(t)的功率谱密度，简称谱密度.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega$$ 为平稳过程X(t)的平均功率的谱表示式

谱密度的性质

平稳过程**X(t),t∈R**的功率谱密度有下列性质:

(1) $S_X(\omega)$是 ω的实的、非负的偶函数,即

$S_X(\omega)\geq 0$,且$S_X(-\omega)=S_X(\omega)$.

(2) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|d\tau<+\infty$,$S_X(\omega)$和自相关函数 $R_X(\tau)$是一傅里叶变换对,即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

统称为维纳—辛钦公式.

(3) 对**(**实**)**平稳过程,维纳—辛钦公式又可表示为

$$S_X(\omega)=2\int_{0}^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

证明(1): $$S_X(-\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E|F_X(-\omega,T)|^2$$ **例1**

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[\int_{-T}^{+T}X(t)e^{j\omega t}dt\int_{-T}^{+T}X(t)e^{-j\omega t}dt] \qquad =S_X(\omega)$$

证明(2): $$S_X(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E|F_X(\omega,T)|^2$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\{\int_{-T}^{T}X(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1\int_{-T}^{T}X(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2\}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)X(t_2)]e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} R_X(t_1 - t_2) e^{-j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2$$

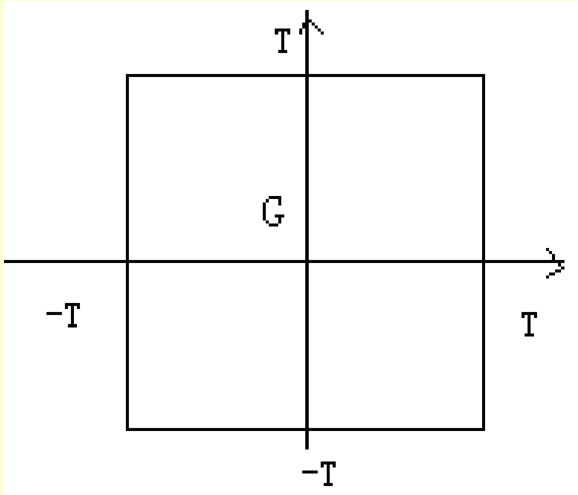
令 $\tau_1 = t_1 + t_2, \tau_2 = t_1 - t_2 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2}, t_2 = \dfrac{\tau_1 - \tau_2}{2}$

此变换的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial t_1}{\partial \tau_2} \\ \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial t_2}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

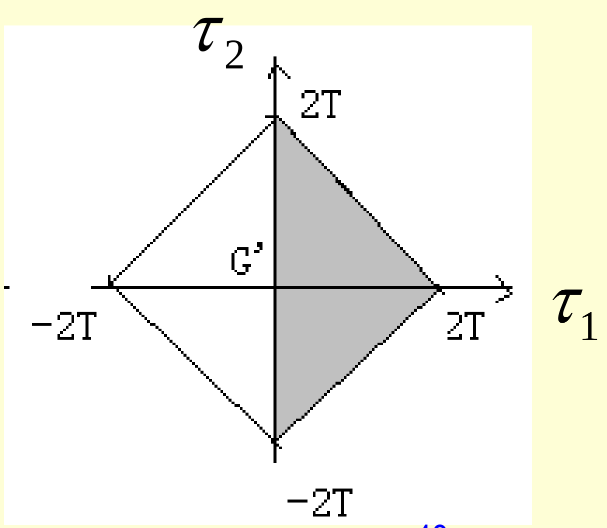
由二重积分换元公式

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G'} f[x(u,v),y(u,v)]|J|dudv$$



$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_X(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$=\iint_{G'} R_X(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2}\frac{1}{2}d\tau_1 d\tau_2$$



$$=\int_{-2T}^{2T} d\tau_2 \int_{0}^{2T-|\tau_2|} R_X(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2}d\tau_1$$

$$=\int_{-2T}^{2T}(2T-|\tau_2|)R_X(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2}d\tau_2$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_1-t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau_2|}{2T})R_X(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2}d\tau_2 \qquad *$$

$$\text{记}R_X^T(\tau)=\begin{cases}(1-\dfrac{|\tau|}{2T})R_X(\tau) & |\tau|\le 2T\\ 0 & |\tau|>2T\end{cases}$$

$$*=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X^T(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\therefore S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

即$S_X(\omega)$是$R_X(\tau)$的Fourier变换.

利用逆Fourier变换可得

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

例1 双向噪声X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-|\tau|/\tau_0) & |\tau|\le\tau_0\\ 0 & |\tau|>\tau_0\end{cases}$$

求X(t)的谱密度$S_X(\omega)$.

解：

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$=2\int_0^{\tau_0}\sigma^2(1-\frac{\tau}{\tau_0})\cos\omega\tau d\tau$$

$$=2\sigma^2\int_0^{\tau_0}\cos\omega\tau d\tau-\frac{2\sigma^2}{\tau_0}\int_0^{\tau_0}\tau\cos\omega\tau d\tau$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\tau_0\omega^2}(1-\cos\omega\tau_0)$$

例2 设平稳过程X(t)的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}$，a>0，求X(t)的谱密度$S_X(\omega)$。

解

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\omega)\tau}d\tau+\int_{0}^{+\infty}e^{(-a-i\omega)\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-a-i\omega}e^{(-a-i\omega)\tau}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{-1}{-a-i\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

例3 设平稳过程X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$$

求X(t)的谱密度$S_X(\omega)$.

解：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}\frac{e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}}{2}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau$$

由例2结论(或查表)知.

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2}[\frac{2a}{(\omega-\omega_0)^2+a^2} + \frac{2a}{(\omega+\omega_0)^2+a^2}]$$

$$= a[\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+a^2} + \frac{1}{(\omega+\omega_0)^2+a^2}]$$

例4 设平稳过程X(t)的谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求X(t)的自相关函数和平均功率.

解：

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\frac{3}{16}\frac{2}{\omega^2+1}+\frac{5}{48}\frac{2\times3}{\omega^2+9}$$

由例2结论知, X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{3}{16}e^{-|\tau|}+\frac{5}{48}e^{-3|\tau|}$$

平均功率

$$W=\Psi_X^2=R_X(0)=\frac{3}{16}+\frac{5}{48}=\frac{7}{24}$$

δ (Dirac) 函数又称脉冲函数，它有多种定义.
其中常见的四种定义方式如下.

(1) 由下列方程定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \quad , \quad \delta(x)=0, x\neq 0$$

满足上式的δ (x) 在 x=0处的值是不存在的，理解为 δ (0)= ∞ .

(2)由下列极限定义 $\delta(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

其中$f_n(x)$满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx=1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0, x\neq 0$

(3)由下列导数定义

$$u(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad \delta(x)=\frac{du(x)}{dx}$$

直观理解为δ函数在原点是一个无限窄又无限高的脉冲.

(4)由下列性质定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0)$$

其中f(x)为连续函数.

性质5

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0)$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x+x_0)dx=f(x_0)$$

推论 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=1 \qquad \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\times e^{it\omega}d\omega$$

推论 2

$$\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega t}dt \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

例5 已知随机相位正弦波X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

求X(t)的谱密度$S_X(\omega)$.

解：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}\right)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right]$$

$$=\frac{a^2}{4}\times2\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\frac{a^2\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

五、 互谱密度及其性质

定义4 设X(t)和Y(t)是两个平稳相关的随机过程，称

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E[F_X(-\omega,T)\cdot F_Y(\omega,T)]$$

为平稳过程X(t)和Y(t)的互谱密度.

性质6 (1) $S_{XY}(\omega)=\overline{S_{YX}(\omega)}=S_{YX}(-\omega)$

(2) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<+\infty$ **，则维纳—辛钦公式成立**

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

(3) $|S_{XY}(\omega)|^2\le S_X(\omega)S_Y(\omega)$

例6 设平稳过程X(t)和Y(t)的互谱密度为

$$S_{XY}(\omega)=\begin{cases} a+ib\omega/c & |\omega|\le c \\ 0 & |\omega|>c \end{cases}$$

其中c>0,a,b 为实常数. 求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$.

解：

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad =\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}(a+\frac{ib\omega}{c})e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{a}{2\pi\tau i}(e^{ic\tau}-e^{-ic\tau})+\frac{b}{2\pi c\tau}[c(e^{ic\tau}+e^{-ic\tau})-\frac{1}{\tau i}(e^{ic\tau}-e^{-ic\tau})]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\frac{2a}{\tau}\sin c\tau+\frac{2b}{\tau}\cos c\tau-\frac{2b}{c\tau^2}\sin c\tau)]$$

$$=\frac{1}{\pi c\tau^2}[(ac\tau-b)\sin c\tau+bc\tau\cos c\tau]$$