Algorithmique et programmation avancée

Licence SPI 2e année

Loïc Barrault (Loic.Barrault@univ-lemans.fr)
Bruno Jacob (Bruno.Jacob@univ-lemans.fr)
Grégor Dupuy et Frédéric Blain (TP)

Organisation

- De janvier à avril
- 12 cours, 12 TD, 12 TP
- Documents
  - Polycopié « Le langage C » de L1
- Contrôle des connaissances
  - Contrôle continu -> Examen en cours et TD
  - TP notés
- Travail personnel
  - **Prendre des notes !**
  - Relire le cours
  - Refaire les exercices de TD
  - Préparer les TP

UMTICE

- Espace de cours
  - L2SPI-S4-ProgAvancee
- Slides des cours
- Version électronique des sujets de TDs/TPs

Plan du cours

Partie II

- Récursivité
- Arbres
  - Binaires, N-aires, etc.
  - Mise en œuvre par pointeurs, tableau
  - Algorithmes de parcours d’arbre

Chapitre 1

Retour rapide sur les variables et leur portée

1) Définition

- Variable = zone mémoire
  - accessible par un nom
  - lecture et écriture
  - Taille définie par le **type**
- Syntaxe déclaration :
  - <type> NOM = init_val**;**
  - <type> NOM1 {=init_val}, NOM2 [=init_val2]**;**
  - <type> TAB[10], NOM**;**
  - <type> * ptr;
    - Un pointeur est une variable pouvant contenir une adresse !

2) Notion de bloc

- Bloc : espace défini par une accolade ouvrante et une fermante
  - Structure de contrôle
    - if()**{BLOC},** while()**{BLOC}**, etc.
  - Fonctions
    - int fct(<params) **{}**
- Dans un bloc : deux variables ne peuvent avoir le même nom

3) Variable locale

- Déclarée à l'intérieur d'un bloc
- Existe à partir de la déclaration
- **Est détruite à la fin du bloc !**

4) Variables globales

- Déclarée en dehors de tout bloc
- Existe à partir de la déclaration
- Est détruite à la fin du programme

- Accessible depuis tout endroit du fichier (module)
  - Mot clé **extern** pour exploiter une variable globale d'un autre module

Variable locale vs globale

- Une variable locale peut avoir le même nom qu'une variable globale
  - Masquage de la variable globale

```
int i=0;
int main(void)
{
        int i=2;
        printf("i=%i », i);
}
```

Chapitre 1

Récursivité

Pré-requis impératifs

- Variables:
  - Création, utilisation
  - Mais surtout : portée des variables
  - Pointeurs
- Fonctions:
  - Création
  - Appel

Programmation fonctionnelle

- **Inhérente** à la programmation fonctionnelle
- Cf. Cours de P. Deléglise

- Dans ce cours:
  - mise en œuvre de la récursivité
  - création de fonctions récursives

1) Définition

Une fonction **récursive** est une fonction qui fait appel à elle-même.

Équivalent en mathématiques: la définition par récurrence

Exemple : calcul de factorielle

La factorielle de *n* est définie par

- 1! = 1
- n! = n * (n-1)! pour n > 1

1. Cas où le résultat est immédiat
2. Cas où le résultat se calcule par récursivité

Exemple : fonction factorielle

```
/* fonction qui renvoie n! */
int fact(int n) {
        if (n == 1)
                return 1;
        return n * fact(n-1);
}

Appel : printf(‘‘%i’’, fact(3));
```

Exemple

fact(3)

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2)

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2*fact(1)

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2*fact(1)

fact(1)

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2*fact(1)

fact(1) = 1

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2*fact(1)

1

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2*1

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

fact(2) = 2

Exemple

fact(3) = 3*fact(2)

2

Exemple

fact(3) = 3*2

Exemple

fact(3) = 6

Exemple

Dans cette fonction, les calculs s'effectuent *au retour* des appels récursifs

fact(3) → fact(2) → fact(1)

↓

6 ← 2 ← 1

Variante de la fonction factorielle

```
/* fonction qui renvoie n! */
int fact2(int n, int result){
        if (n == 1)
                return result;
        return fact2(n-1, n*result);
}

Appel : printf(‘‘%i’’, factorielle(3,1));
```

Variante

fact(3,1)

Variante

fact(3,1) = fact(2,3)

Variante

fact(3,1) = fact(2,3) = fact(1,6)

Variante

fact(3,1) = fact(2,3) = fact(1,6) = 6

Variante

fact(3,1) = fact(2,3) = 6

Variante

fact(3,1) = 6

Variante

Dans cette fonction, les calculs s'effectuent *au moment* des appels récursifs

fact(3,1) → fact(2,3) → fact(1,6)

↓

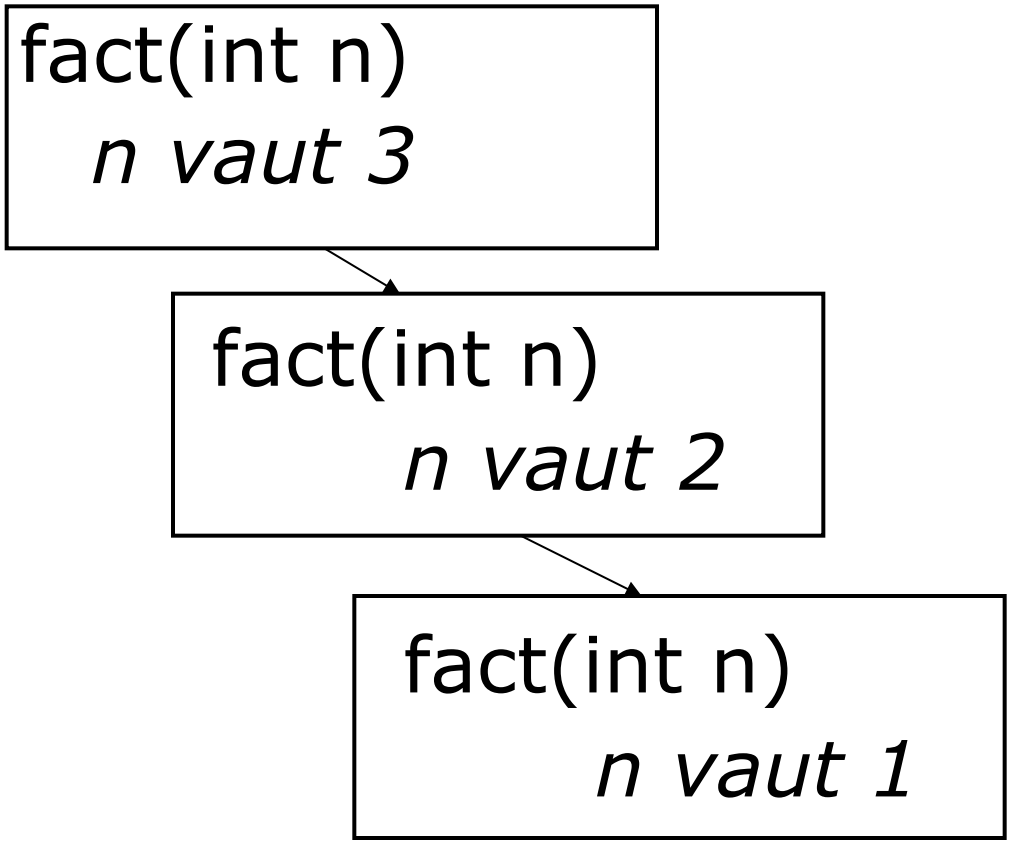
6 ← 6 ← 6

2) Objets locaux et globaux

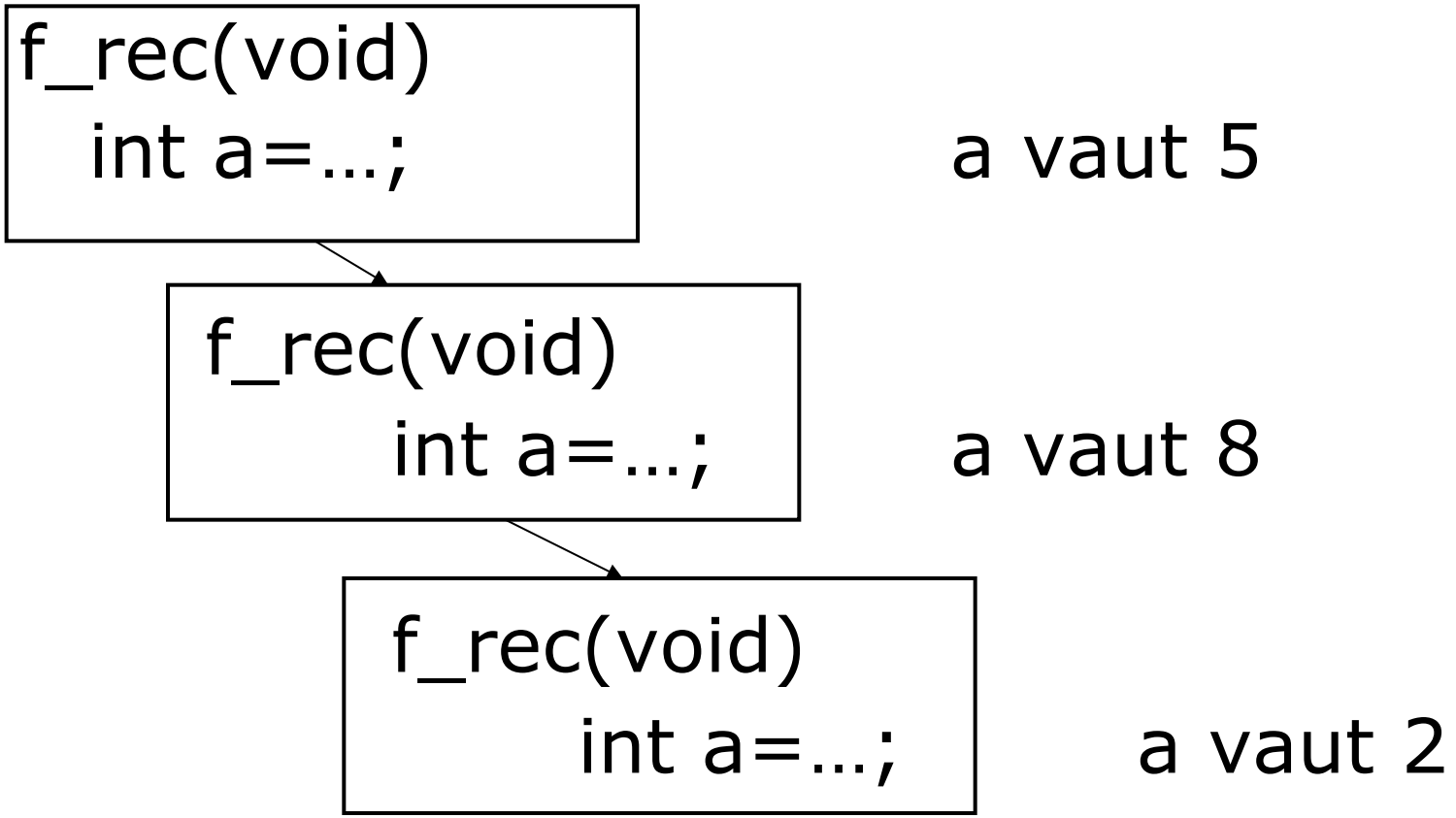
- À l'exécution, il est créé en mémoire autant **d'exemplaires différents** de la fonction qu'il y a d'appels récursifs.

- Chaque exemplaire de la fonction contient un **exemplaire différent** des **variables locales** et des **paramètres fixes**.

Ex : duplication du paramètre fixe



Ex : duplication des variables locales



Objets globaux

- En revanche, les variables globales
  - un seul exemplaire
  - partagées par tous les exemplaires de la fonction récursive

- **Cas spécifique des pointeurs**
  - Une copie d'un pointeur pointe à la même adresse !

Exemple

Problème : lire une suite d'entiers positifs terminée par un marqueur et calculer la somme ou le produit selon que le marqueur vaut -1 ou -2

5 8 2 -1 résultat 5+8+2=15

1 2 1 4 -2 résultat 1*2*1*4=8

Exemple

Problème : lire une suite d'entiers positifs terminée par un marqueur et calculer la somme ou le produit selon que le marqueur vaut -1 ou -2

Écrire un programme récursif pour traiter ce problème (sans utiliser de pile ni de tableau)

Remarques

- Calcul au fur et à mesure impossible
  - L'opérateur n'est connu qu'à la fin
  - → mémoriser chaque valeur lue dans une variable locale
- Opérateur et résultat uniques
  - → utiliser une variable globale ou un paramètre de type pointeur

Programme (1)

```
int marqueur; /* -1 ou -2 */
int resultat      /* valeur du résultat */

void calcul (int * result){
        int x;
        scanf( ‘ ‘%i’ ’ , &x);
```

Programme (2)

```
if (x == -1){
        marqueur = -1;
        *result = 0;
}
else if (x == -2){
        marqueur = -2;
        *result = 1;
}
```

Programme (3)

```
        else   /* x est un entier positif */
        {
                calcul(result);
                if (marqueur == -1)
                        *result = *result + x;
                else
                        *result = *result * x;
        }
}
```

Programme (4)

```
int main()
{
   calcul (&resultat);
   printf( ‘‘La valeur est :
   %i’’,resultat);
}
```

3) Récursivité et itération

Tout algorithme récursif peut être transformé en algorithme itératif, et réciproquement.

Factorielle récursif ↔ itératif

```
int fact(int n)
{
   if (n == 1)
        return 1;
   return n*fact(n-1);
}
```

```
int fact(int n)
{
        int res;
        res = n;
        while(n!=1){
            n = n - 1;
            res = res*n;
        }
        return res;
}
```

Choisir entre itératif et récursif

Version récursive

- Elle est plus naturelle quand on part d'une définition récursive
- Elle est plus simple en cas de récursivité multiple (ex: parcours d'arbres)
- Elle s'impose en programmation fonctionnelle (Lisp, Caml) ou déclarative (Prolog)

Choisir entre itératif et récursif

Version itérative

- Elle est beaucoup plus économique à l'exécution (pas de duplication de la fonction)

Choisir entre itératif et récursif

Bilan

- En programmation impérative, il faut établir un compromis entre simplicité des algorithmes et coût d'exécution
- On préfère en général la version itérative, pour son efficacité

4) Transformation récursif → itératif

Tout algorithme récursif peut être transformé en un algorithme itératif équivalent : c'est la *dérécursivation*.

La méthode à suivre dépend du type de récursivité de l'algorithme.

Récursivité terminale et non-terminale

Un algorithme est dit *récursif terminal* s'il ne contient aucun traitement après un appel récursif.

Exemple

La fonction fact2 est récursive terminale : elle n'effectue aucun traitement après l'appel récursif

```
/* fonction qui renvoie n! */
int fact2(int n, int result){
        if (n == 1)
                return result;
        return fact2(n-1, n*result);
}
```

Fonction récursive terminale

```
type f_rec(params)
        if (condition)
                traitement1
        else
        {
                traitement2
                f_rec(nouv_params)
        }
```

Sur l'exemple

```
type f_rec(params)
    if (condition)                      n == 1
        traitement1                     return result
    else
    {
        traitement2                     (vide)
        f_rec(nouv_params)              n-1, n*result
    }
```

Fonction itérative équivalente

```
type f_iter(params)
        while (non condition)
        {
                traitement2
                params = nouv_params
        }
        traitement1
```

Exemple

```
int fact2_iter(int n, int result)
{
        while (n!=1)
        {
                n = n - 1;
                result = result*n;
        }
        return result;
}
```

Récursivité terminale et non-terminale

Réciproquement, une fonction est *récursive non terminale* si elle effectue un traitement après un appel récursif.

Exemple

La fonction fact est récursive non terminale : elle effectue une multiplication après l'appel récursif

```
/* fonction qui renvoie n! */
int fact(int n)
{
        if (n == 1)
                return 1;
        return n * fact(n-1);
}
```

Fonction récursive **non** terminale

```
type f_rec(params)
        if (condition)
                traitement1
        else
        {
                traitement2
                f_rec(nouv_params)
                traitement3(nouv_params)
        }
```

Dé-récursivation d'une fonction récursive non terminale

Première méthode

Transformer la fonction pour obtenir une fonction récursive terminale, puis se ramener au premier cas.

En général, cela nécessite d'ajouter un paramètre.

Exemple

fact(int n) → fact(int n, int result)

Dé-récursivation d'une fonction récursive non terminale

Deuxième méthode

Quand la transformation n'est pas possible (récursivité multiple), on introduit une pile dans laquelle on stocke les paramètres de l'appel récursif.

Cette méthode est plus complexe à réaliser.

Dé-récursivation d'une fonction récursive non terminale

```
void quicksort(i,j)

int milieu;


if(i<j){
   m = partition(i,j);
   quicksort(i,m-1);
   quicksort(m+1,j);
}
```

```
void quicksort (i,j)

empiler(0,N-1);
while(!pilevide()){
   depiler(i,j);
   if(i<j){
        m = partition(i,j);
        empiler(i,m-1);
        empiler(m+1,j);
   }
}
```

5) Différents types de récursivité

- Récursivité simple
- Récursivité multiple
- Récursivité croisée
- Récursivité imbriquée

a) Récursivité multiple

La fonction effectue plusieurs appels récursifs consécutifs.

Exemple

Calcul des combinaisons C_n^p

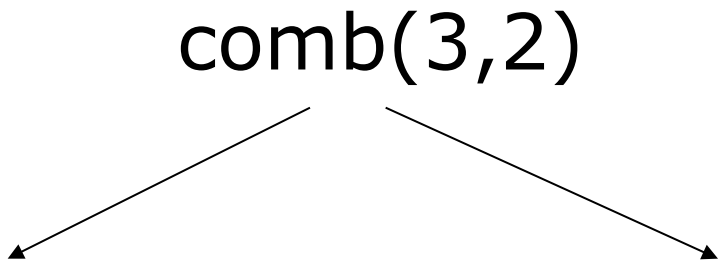
- $C_n^p = 1$ si $p = 0$ ou $p = n$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ sinon

Récursivité multiple

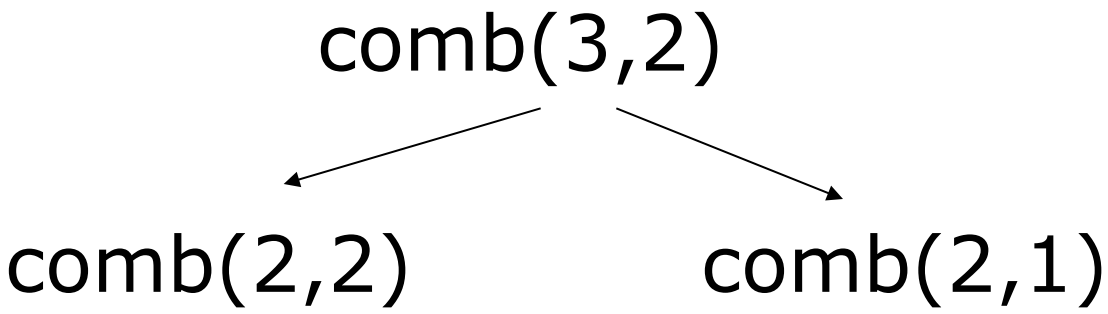
```
/* calcule récursivement C_n^p */
int comb(int n, int p)
{
   if (p == 0 || p == n)
        return 1;
   else
        return comb(n-1,p) + comb(n-1,p-1);
}
```

Application

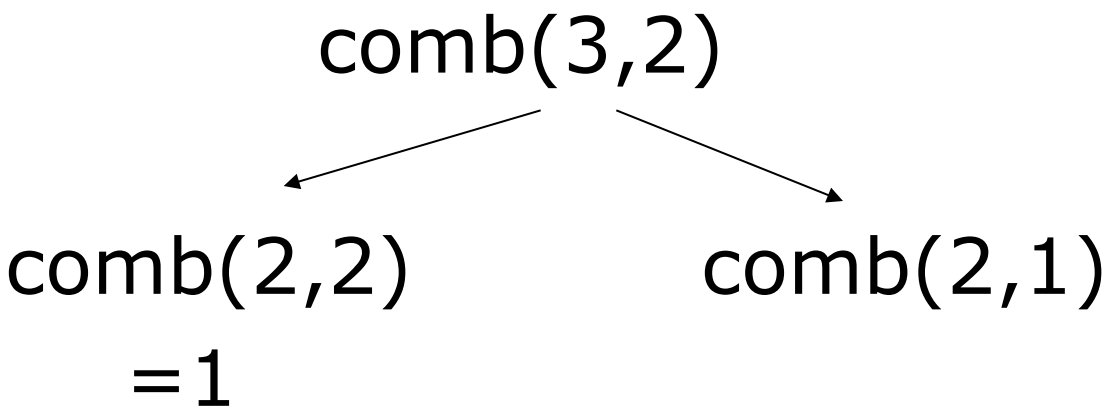
Dérouler l'exécution de comb(3,2) en faisant apparaître chaque appel récursif et donner le résultat



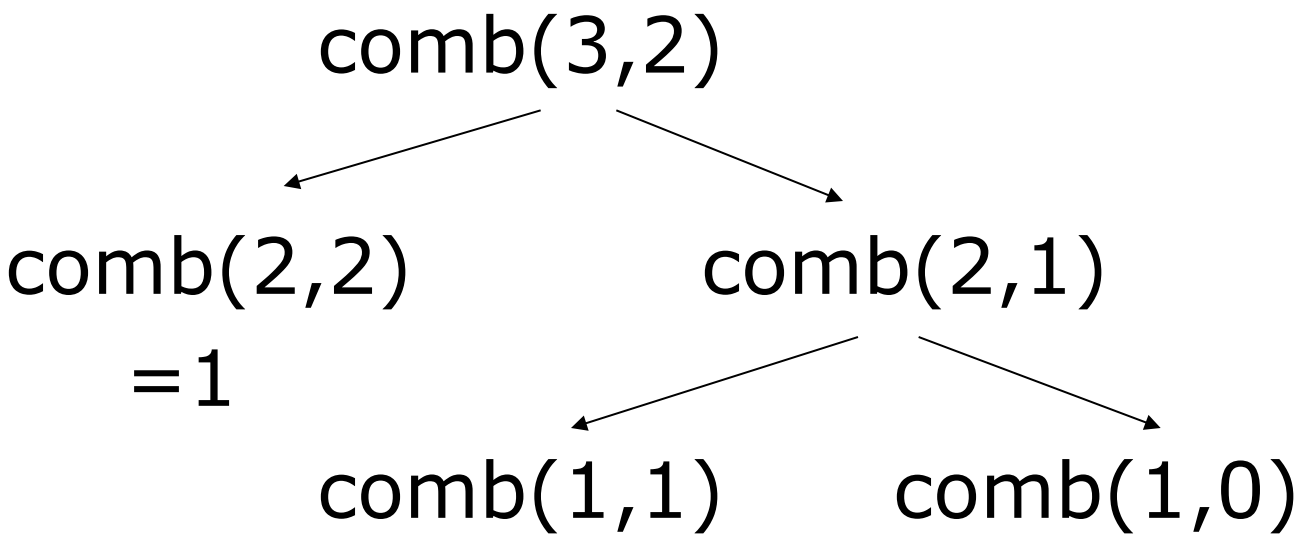
Application



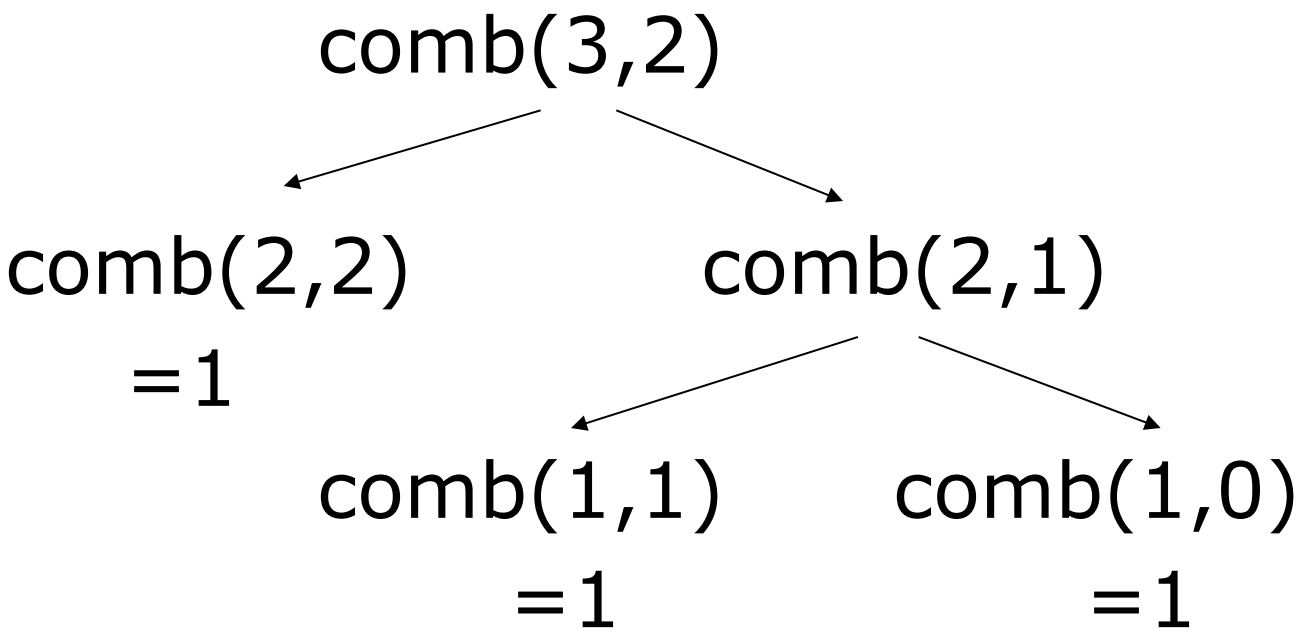
Application



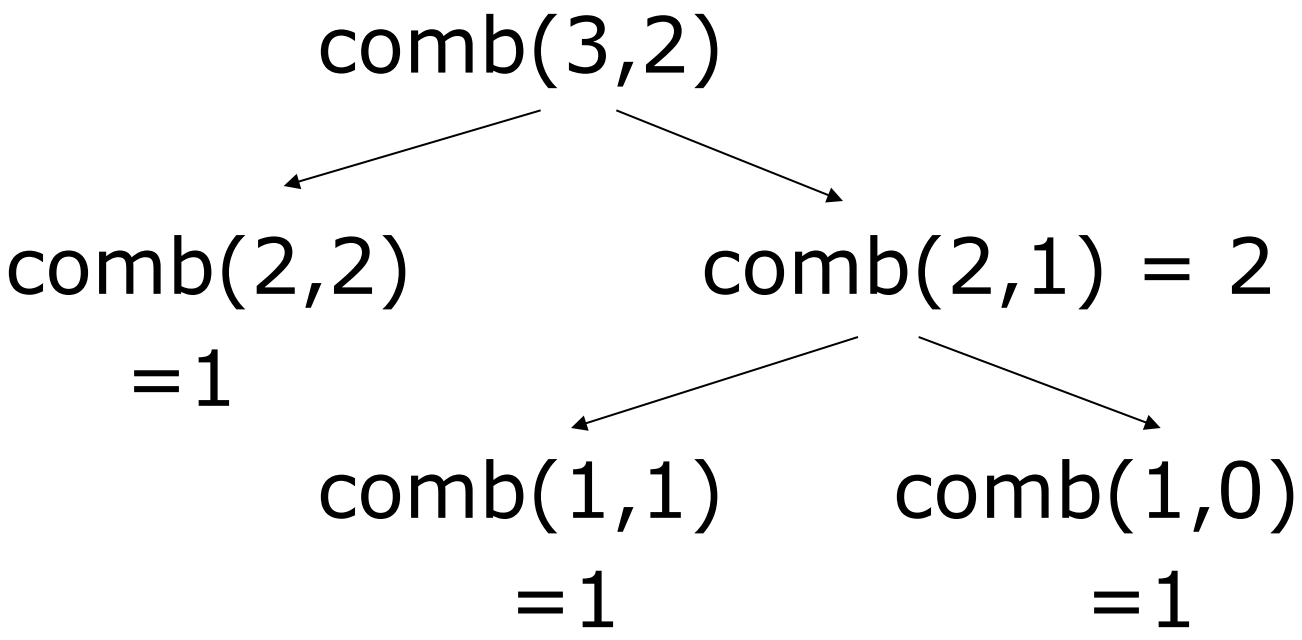
Application



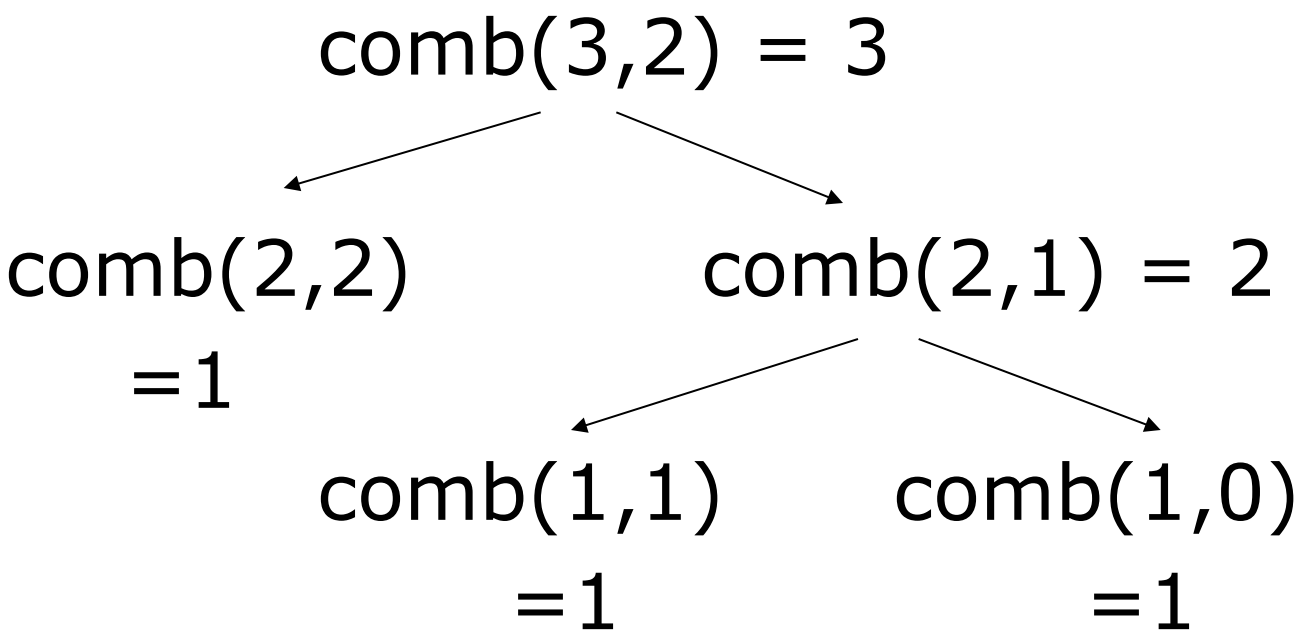
Application



Application



Application



b) Récursivité mutuelle (ou croisée)

Des définitions sont mutuellement récursives si elles dépendent l'une de l'autre.

Exemple (cas d'école !)

Définition de la parité

- n est pair si n=0 ou si (n-1) est impair
- n est impair si n=1 ou si (n-1) est pair

Récursivité mutuelle

```
int pair(int n){
        if(n==0)
                return vrai;
        else
                return impair(n-1);
}

int impair(int n){
        if(n==0)
                return faux;
        else
                return pair(n-1);
}
```

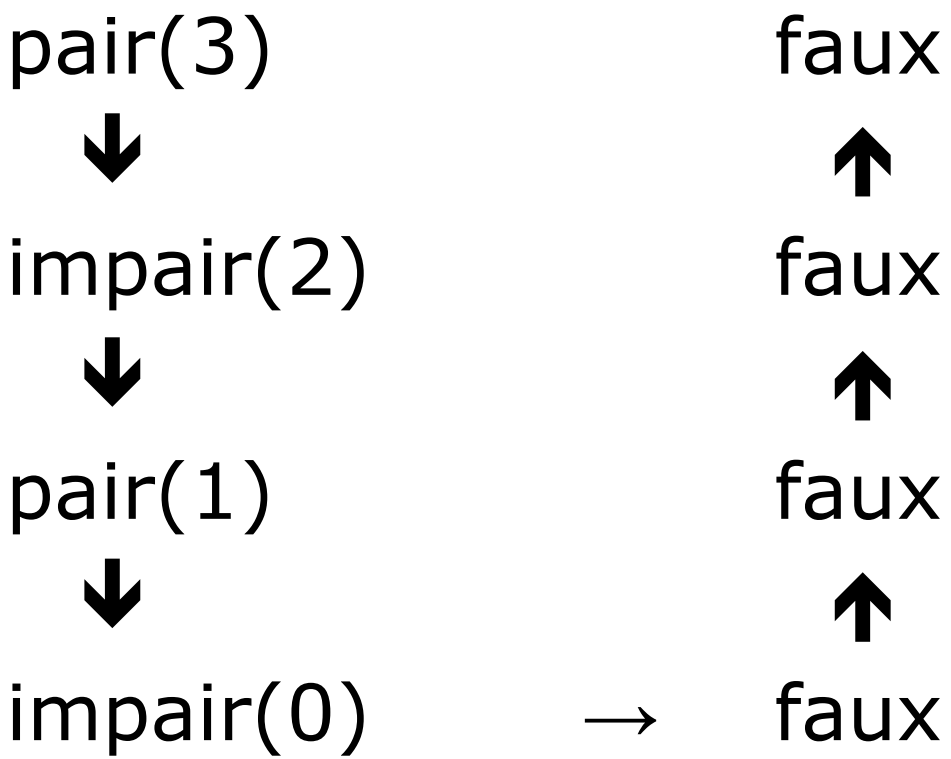
Application

Dérouler l'exécution de

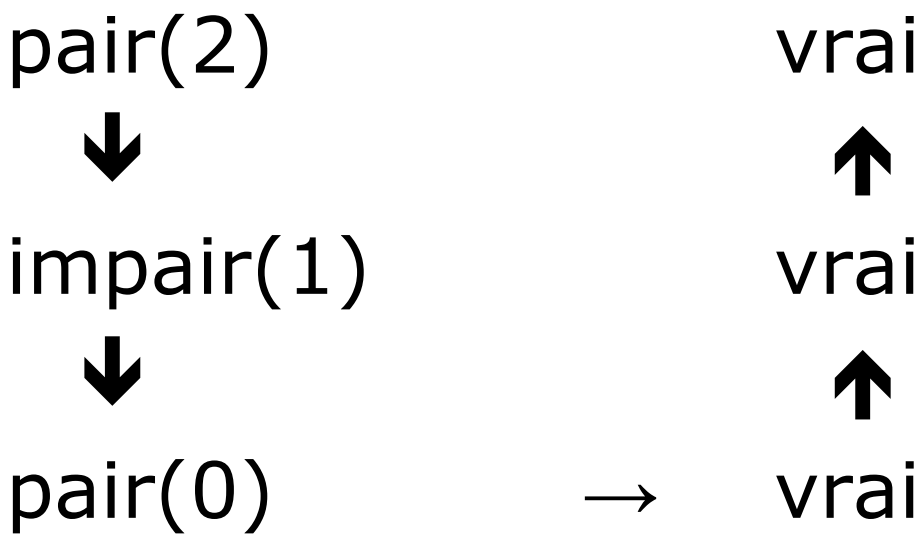
- pair(3)
- pair(2)

en faisant apparaître chaque appel récursif et donner le résultat

Application : 3 est-il pair ?



Application : 2 est-il pair ?



c) Récursivité imbriquée

Un paramètre de l'appel récursif est lui-même issu d'un appel récursif

Exemple

Calcul de la fonction d'Ackermann

- A(m,n)=n+1 si m==0
- A(m,n)=A(m-1,1) si m>0 et n==0
- A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)) sinon

Récursivité imbriquée

```
int ack(int m, int n)
{
        if (m==0)
                return n+1;
        else if (m>0 && n==0)
                return ack(m-1,1);
        else
                return ack(m-1, ack(m,n-1));
}
```

Application

Dérouler l'exécution de ack(1,1) en faisant apparaître chaque appel récursif et donner le résultat

Application

ack(1,1)

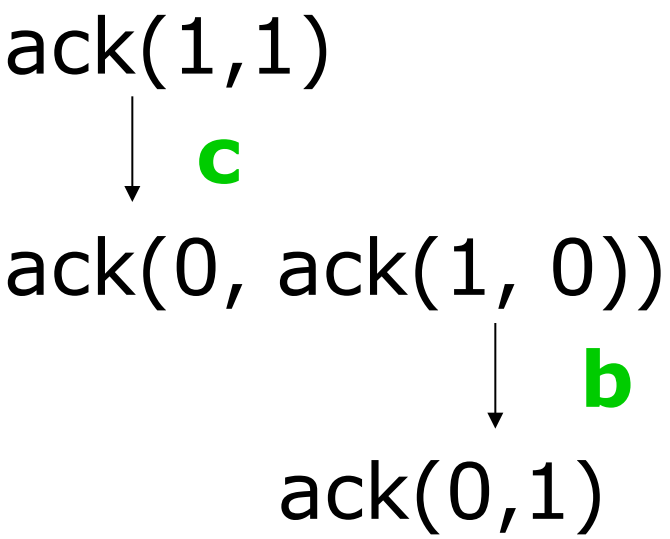
Application

ack(1,1)

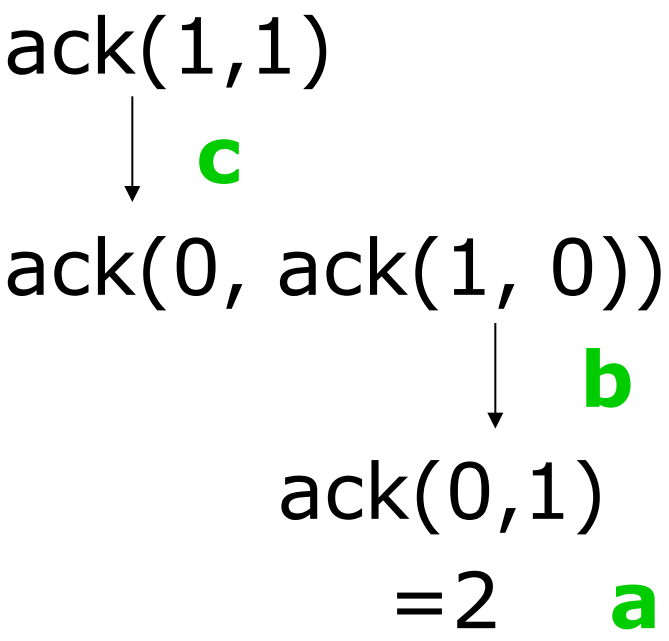
c

ack(0, ack(1, 0))

Application



Application



Application

ack(1,1)

↓ **c**

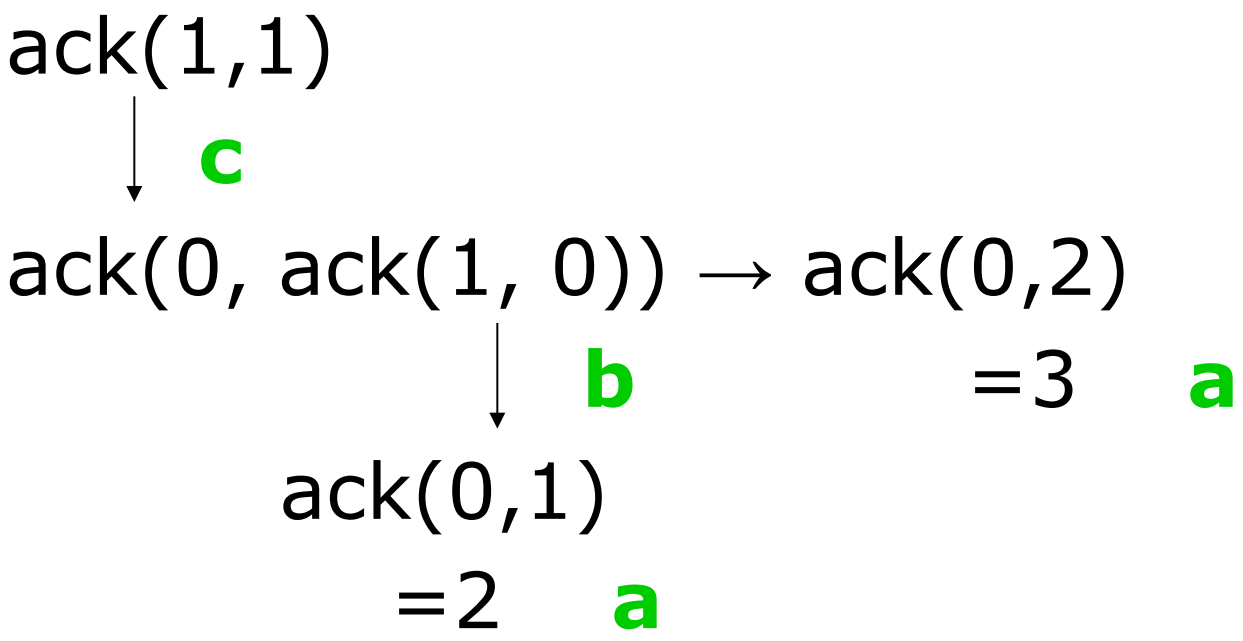
ack(0, ack(1, 0)) → ack(0,2)

↓ **b**

ack(0,1)

=2 **a**

Application



Application