Transformée de Fourier (2)

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence Acoustique

Année universitaire 2014-2015

Sommaire

1. Rappels du précédent cours
   - Définitions
   - Exercices (suite et fin du précédent cours)
2. Autres signaux
   - Signaux périodiques
   - Dirac
3. Transformée de Fourier : propriétés
   - Linéarité
   - Décalage fréquentiel
   - Décalage temporel
   - Somme de signaux
   - Autres propriétés

Sommaire

Transformée de Fourier (TF) des signaux à temps continu

$$X(F) = \mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Ft} dt$$

$X(F)$ représente le spectre du signal temporel $x(t)$.

Transformée de Fourier (TF) des signaux à temps continu

$$X(F) = \mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Ft} dt$$

$X(F)$ représente le spectre du signal temporel $x(t)$.

Transformée de Fourier inverse (TFI) des signaux à temps continu

$$x(t) = \mathrm{TFI}\{X(F)\} = \int_{F=-\infty}^{F=+\infty} X(F) e^{+j2\pi Ft} dF$$

Transformée de Fourier (TF) des signaux à temps continu

$$X(F) = \mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi Ft}dt$$

$X(F)$ représente le spectre du signal temporel $x(t)$.

Transformée de Fourier inverse (TFI) des signaux à temps continu

$$x(t) = \mathrm{TFI}\{X(F)\} = \int_{F=-\infty}^{F=+\infty} X(F)e^{+j2\pi Ft}dF$$

2 représentations (pour le prix d'une)

1. domaine temporel : signal temporel $x(t)$, variable t
2. domaine fréquentiel : signal fréquentiel (spectre) $X(F)$, variable F
3. ☢ IL EST ABSOLUMENT INTERDIT D'ÉCRIRE $F = 1/t$!!! ☢

Sommaire

Exponentielle décroissante (1/2)

Le signal

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a une TF qui s'écrit

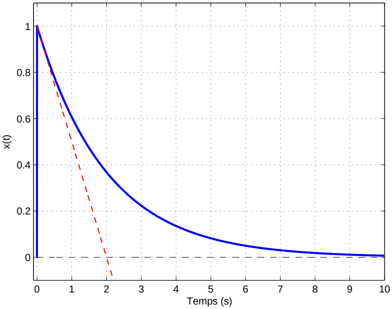
$$X(F) = \frac{1}{\alpha + j2\pi F}$$

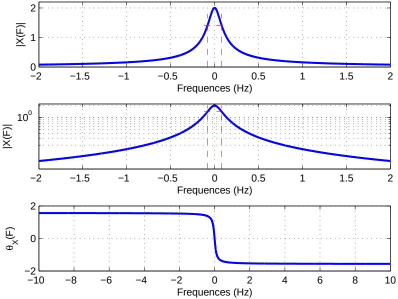
Exercice : Calculer le module et la phase de $X(F)$.

Exponentielle décroissante (2/2)

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X(F) = \frac{1}{\alpha + j2\pi F}$$





Fenêtre rectangulaire (1/2)

Le signal

$$x(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$$

a une TF qui s'écrit

Fenêtre rectangulaire (1/2)

Le signal

$$x(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$$

a une TF qui s'écrit

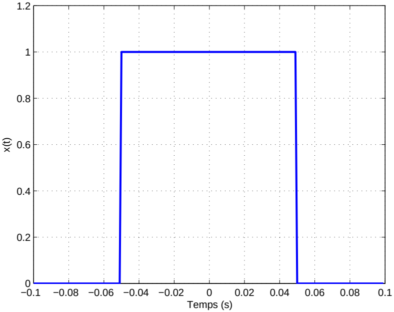
$$X(F) = T \cdot \frac{\sin(\pi F T)}{\pi F T} \equiv T \cdot \mathrm{sinc}(\pi F T)$$

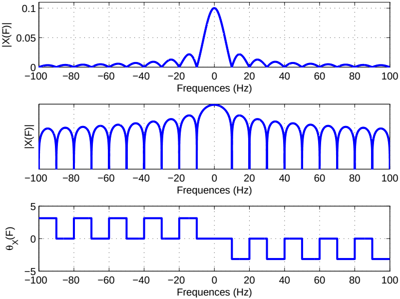
où sinc désigne le sinus cardinal, avec $\mathrm{sinc}(\alpha) \equiv \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

Exercice : Donner l'expression des fréquences F_k qui vérifient $X(F_k) = 0$.

Fenêtre rectangulaire (2/2)

$$x(t) = \mathrm{Rect}_T(t) \qquad X(F) = T \cdot \mathrm{sinc}(\pi F T)$$





Exercice : La TF $X(F)$ est constitué d'un lobe principal et de plusieurs lobes secondaires. Exprimer en dB l'écart de niveau entre le maximum du lobe principal et le maximum du premier lobe secondaire.

Exponentielle complexe, cosinus et sinus (1/4)

1. À partir de la définition de la Transformée de Fourier Inverse, calculer la TFI de

$$X(F) = \delta(F - F_0) \quad \text{où} \quad F_0 \text{ est une constante.}$$

2. En déduire la TF du signal

$$x(t) = e^{-j2\pi F_0 t} \quad \text{où} \quad F_0 \text{ est une constante.}$$

3. En déduire les TFs des signaux

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

et

$$x(t) = A_0 \sin(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

Exponentielle complexe, cosinus et sinus (2/4)

1. Le signal $x(t) = e^{+j2\pi F_0 t}$ a une TF qui vaut $X(F) = \delta(F - F_0)$.
2. Le signal $x(t) = e^{-j2\pi F_0 t}$ a une TF qui vaut $X(F) = \delta(F + F_0)$.
3. Le signal $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ a une TF qui s'écrit

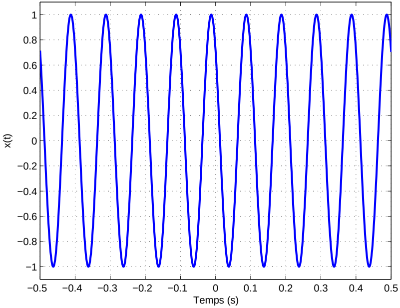
$$X(F) = \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0).$$

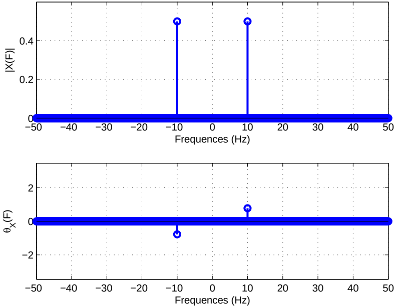
4. Le signal $x(t) = A_0 \sin(2\pi F_0 t + \phi_0)$ a une TF qui s'écrit

$$X(F) = \frac{A_0}{2j} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) - \frac{A_0}{2j} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0).$$

Exponentielle complexe, cosinus et sinus (3/4)

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \qquad\qquad X(F)$$

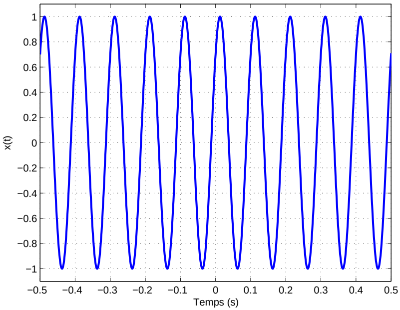


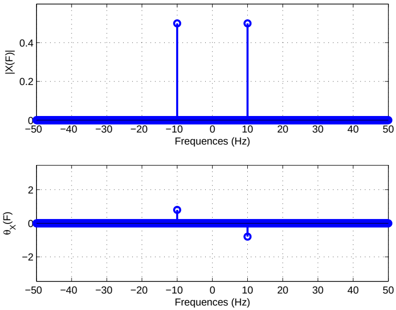


Exponentielle complexe, cosinus et sinus (4/4)

$$x(t) = A_0 \sin(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

$$X(F)$$





Sommaire

Rappel (1)

Tout signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut s'écrire suivant

$$x(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi \frac{nt}{T_0}} = \sum_n c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

où $F_0 = 1/T_0$ est la fréquence fondamentale et c_n représente le poids de l'harmonique n (voir cours sur les séries de Fourier).

Rappel (1)

Tout signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut s'écrire suivant

$$x(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi \frac{nt}{T_0}} = \sum_n c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

où $F_0 = 1/T_0$ est la fréquence fondamentale et c_n représente le poids de l'harmonique n (voir cours sur les séries de Fourier).

Rappel (2)

Le signal $e^{j2\pi n F_0 t}$ a une TF de la forme $\delta(F - nF_0)$.

Rappel (1)

Tout signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut s'écrire suivant

$$x(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi \frac{nt}{T_0}} = \sum_n c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

où $F_0 = 1/T_0$ est la fréquence fondamentale et c_n représente le poids de l'harmonique n (voir cours sur les séries de Fourier).

Rappel (2)

Le signal $e^{j2\pi n F_0 t}$ a une TF de la forme $\delta(F - nF_0)$.

Rappel (3)

La TF d'une somme est égale à la somme des TF (voir plus loin).

TF du signal périodique

Le signal $x(t)$ périodique de période T_0, tel que (développement en série de Fourier)

$$x(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi \frac{nt}{T_0}} = \sum_n c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

a donc une TF de la forme

TF du signal périodique

Le signal $x(t)$ périodique de période T_0, tel que (développement en série de Fourier)

$$x(t) = \sum_n c_n e^{j2\pi \frac{nt}{T_0}} = \sum_n c_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

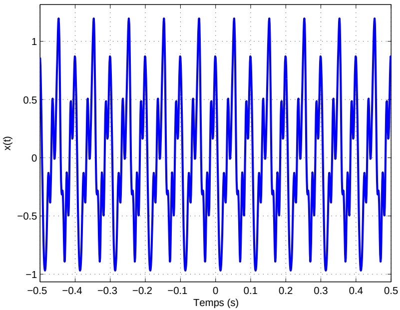
a donc une TF de la forme

$$X(F) = \sum_n c_n \delta(F - nF_0)$$

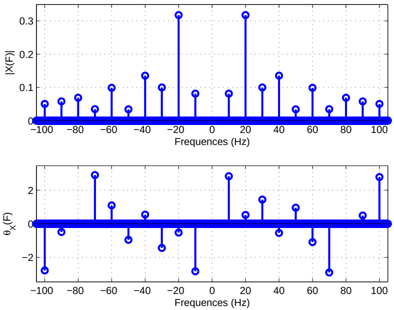
On parle alors de **spectre de raies**. L'information est disponible seulement pour les fréquences F multiples entiers de F_0 (terme nF_0).

Signaux périodiques (1)

$x(t)$



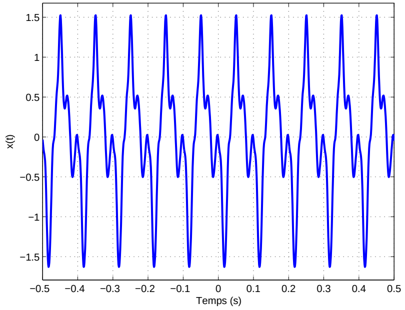
$X(F)$



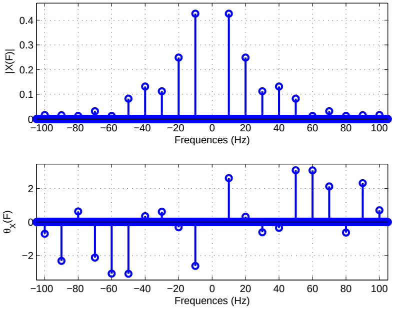
<u>Exercice</u> : Sur la figure, préciser où sont les c_n.

Signaux périodiques (2)

$x(t)$



$X(F)$



<u>Exercice</u> : Comparer les 2 signaux périodiques : quelles ressemblances, quelles dissemblances ?

Sommaire

Dirac temporel

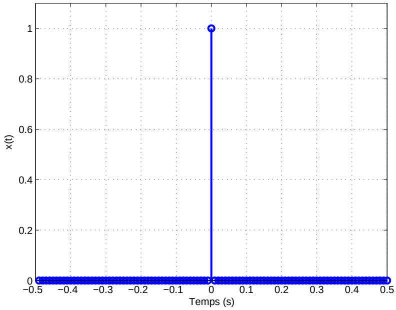
Exercice : Calculer la TF du signal $x(t) = \delta(t)$.

Dirac temporel

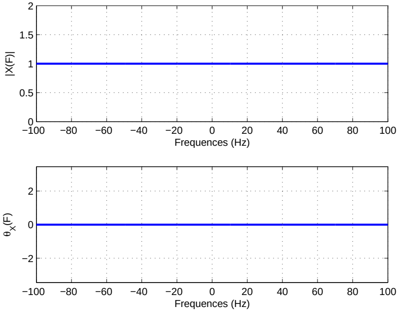
Exercice : Calculer la TF du signal $x(t) = \delta(t)$.

Solution : $X(F) = 1, \forall F \in \mathbb{R}$.

$x(t)$



$X(F)$



Dirac fréquentiel

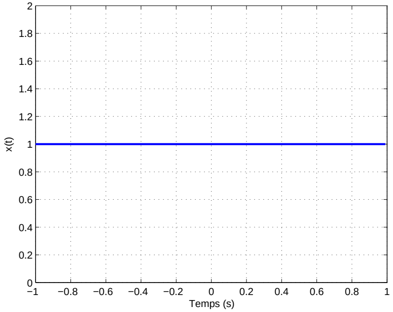
Exercice : Calculer la TFI du signal $X(F) = \delta(F)$.

Dirac fréquentiel

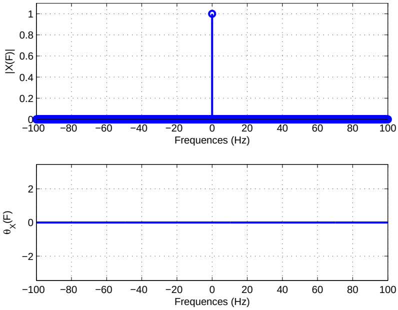
Exercice : Calculer la TFI du signal $X(F) = \delta(F)$.

Solution : $x(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

$x(t)$



$X(F)$



Sommaire

TF d'une somme pondérée

Si $X_1(F)$ est la TF de $x_1(t)$ et si $X_2(F)$ est la TF de $x_2(t)$, alors la TF de $y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ s'écrit

TF d'une somme pondérée

Si $X_1(F)$ est la TF de $x_1(t)$ et si $X_2(F)$ est la TF de $x_2(t)$, alors la TF de $y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ s'écrit

$$Y(F) = \alpha_1 X_1(F) + \alpha_2 X_2(F)$$

<u>Exercice</u> : Calculer le module et la phase de $Y(F)$ en fonction des modules et des phases de $X_1(F)$ et de $X_2(F)$.

Sommaire

Translater un contenu fréquentiel en "hautes fréquences"

Objectif : Comment passer de $X(F)$ à $X(F - F_0)$ avec $F_0 > 0$?

Exercice : calculer la TFI de $Y(F) = X(F - F_0)$.

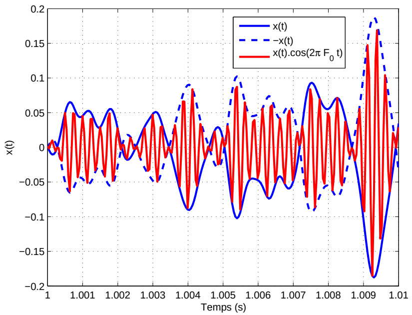
1. Si $x(t) \in \mathbb{R}$, le signal $y(t)$ est-il à valeurs réelles ?
2. Si on souhaite que $y(t) \in \mathbb{R}$, comment faut-il compléter $X(F - F_0)$?
3. Quelle conséquence a ce décalage fréquentiel sur la forme de $y(t)$?

Solution : La TFI de $X(F - F_0)$ s'écrit $x(t) \cdot e^{j2\pi F_0 t}$

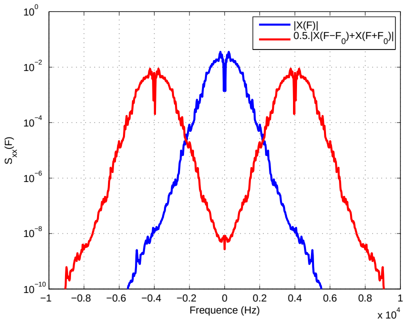
Application audio

Décalage fréquentiel

$x(t)$



$|X(F)|^2$



Sommaire

Signal décalé en temps

Exercice : Si le signal $x(t)$ a une TF $X(F)$, comment s'écrit la TF de $y(t) = \alpha x(t - t_0)$?

Signal décalé en temps

Exercice : Si le signal $x(t)$ a une TF $X(F)$, comment s'écrit la TF de $y(t) = \alpha x(t - t_0)$?

Solution : $Y(F) = X(F) \cdot e^{-j2\pi F t_0}$

Dessiner $x(t) = \mathrm{Rect}_T(t - T/2)$ et calculer sa TF.

Sommaire

Quelques exercices

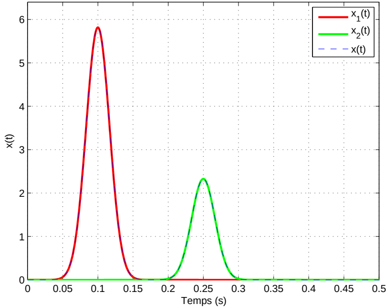
Exercice : Calculer la TF du signal $x(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$.

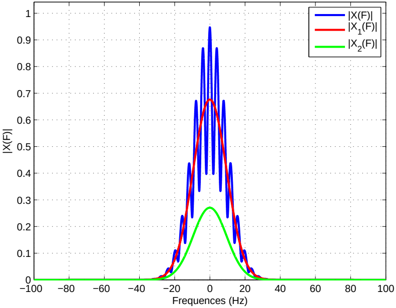
Exercice : Calculer la TF du signal $y(t) = x(t - t_1) + \alpha x(t - t_2)$ en fonction de $X(F)$.

Attention : $|X_1(F) + X_2(F)| \neq |X_1(F)| + |X_2(F)|$

TF et somme de signaux

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad |X(F)| = |X_1(F) + X_2(F)|$$





Sommaire

Dilatation et compression du temps

Si $X(F)$ est la TF de $x(t)$, alors la TF de $y(t) = x(at)$ s'écrit $Y(F) = \frac{1}{a} X\left(\frac{F}{a}\right)$, avec $a > 0$.

Si $0 < a < 1$, on dilate le signal temporel et on décale son spectre vers les basses fréquences (BF). Si $a > 1$, on compresse le signal et on décale son spectre dans les hautes fréquences (HF).

Application audio

Retournement temporel

Si $X(F)$ est la TF de $x(t) \in \mathbb{R}$, alors la TF de $y(t) = x(-t)$ s'écrit

Retournement temporel

Si $X(F)$ est la TF de $x(t) \in \mathbb{R}$, alors la TF de $y(t) = x(-t)$ s'écrit

$$Y(F) = X(-F) = X^*(F)$$

Les modules des TF $Y(F)$ et $X(F)$ sont identiques. Les phases des TF $Y(F)$ et $X(F)$ sont opposées.

Application audio

Parité et imparité (symétrie hermitienne)

Si $x(t) \in \mathbb{R}$ a une TF $X(F)$, alors $X^*(-F) = X(F)$. On en déduit donc que

1. $|X(-F)| = |X(F)| \Rightarrow$ le module de spectre est pair
2. $\theta_X(-F) = -\theta_X(F) \Rightarrow$ le spectre de phase est impair

Égalité de Bessel-Parseval

Si $X(F)$ et $Y(F)$ sont les TF de $x(t)$ et de $y(t)$, alors

$$\int_t x(t)y^*(t)dt = \int_F X(F)Y^*(F)dF$$

Dans le cas particulier où $x(t) = y(t)$

$$\int_t |x(t)|^2 dt = \int_F |X(F)|^2 dF$$

Cette quantité est notée E_x et appelée l'énergie du signal.

Dérivation

Si $X(F)$ est la TF de $x(t)$, alors

1. $\frac{dx(t)}{dt}$ a pour TF $(j2\pi F)X(F)$
2. $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ a pour TF $(j2\pi F)^2X(F)$
3. $\frac{dx^n(t)}{dt^n}$ a pour TF $(j2\pi F)^nX(F)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Application audio