Série de Fourier

Cours de traitement du signal - Séance 5

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence Sciences Pour l'Ingénieur 2ème année

Au menu

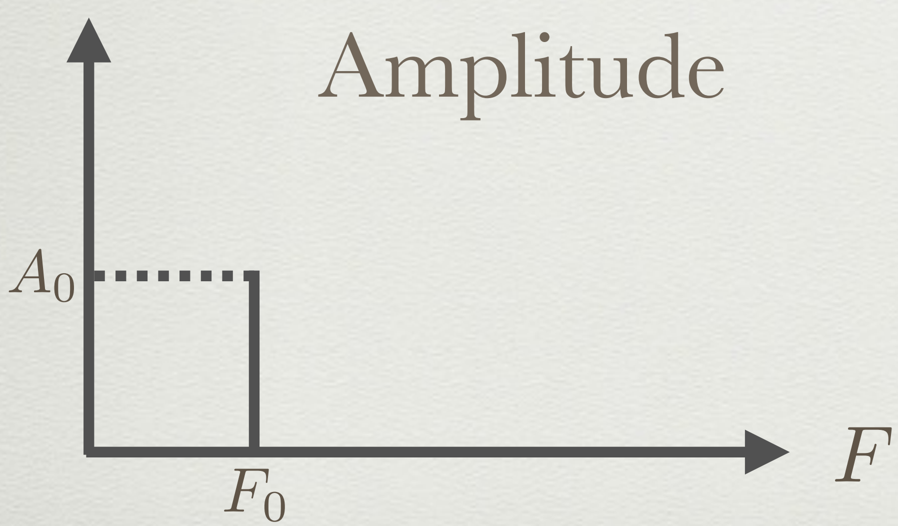
1. Comment coder des signaux sinusoïdaux ?
2. La série de Fourier
3. Propriétés de la série de Fourier
4. Applications des séries de Fourier

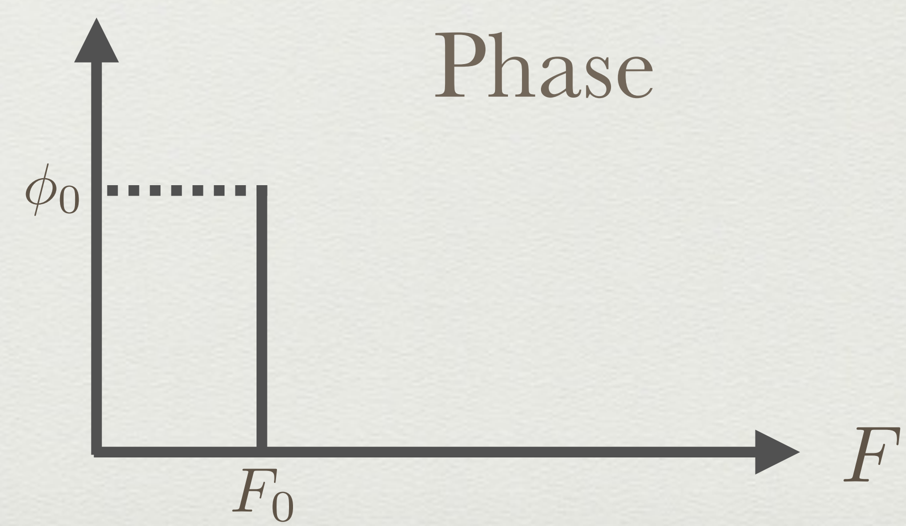
Codage d'une fonction sinusoïdale

- Choix 1 : coder l'ensemble du signal, c'est à dire transmettre l'amplitude en fonction du temps $\forall t \;\; => \infty$ informations

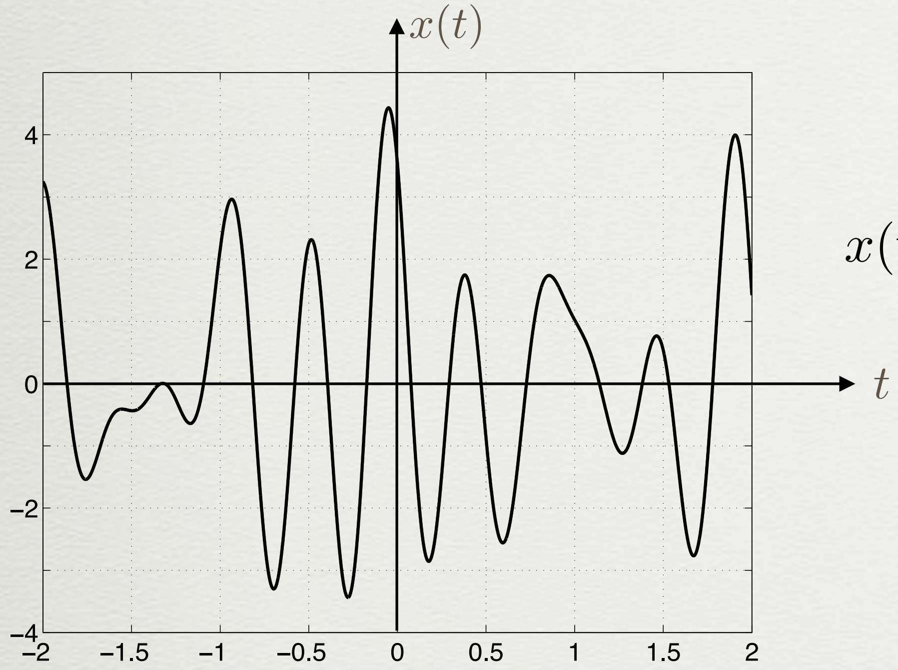
- Choix 2 : Ne transmettre que les paramètres de la fonction : 3 informations.

$$\boxed{\text{Autre représentation du signal}}$$



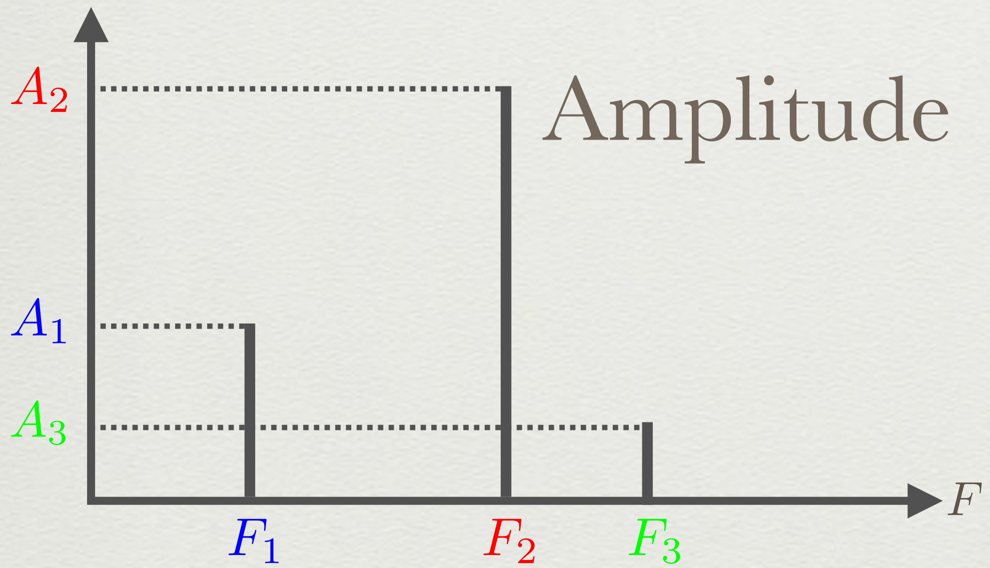


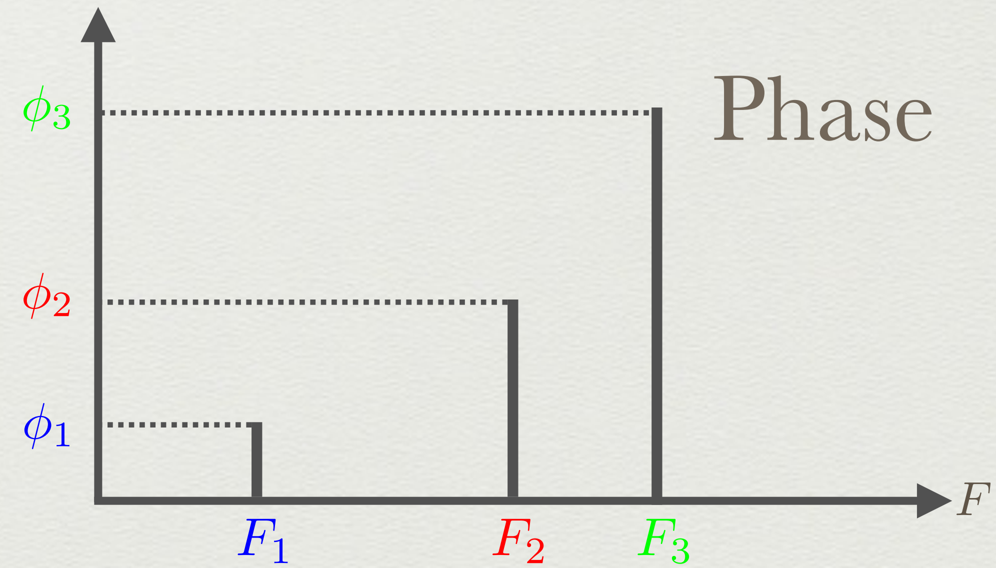
Sommes de cosinus



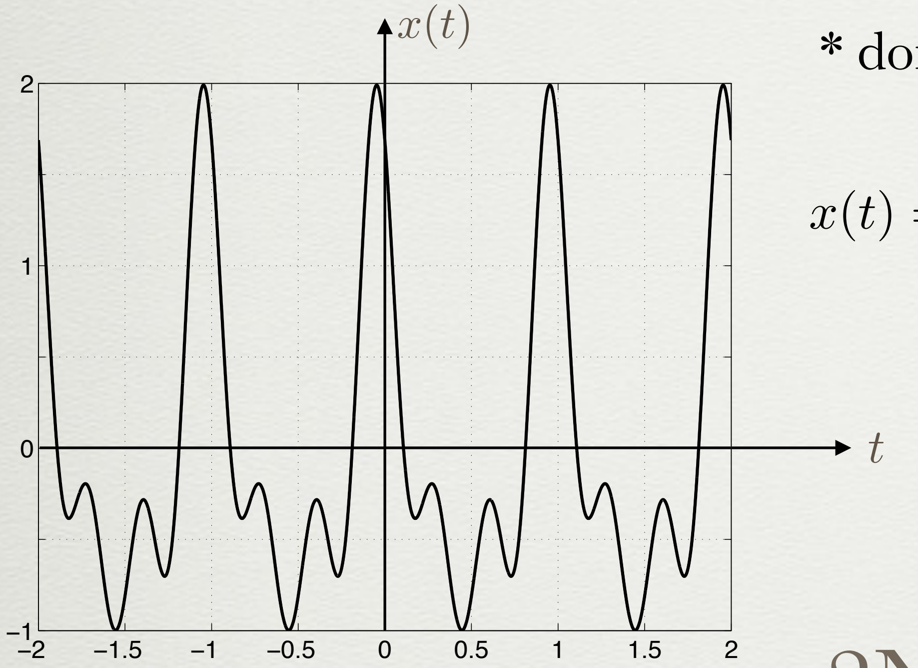
$$x(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi F_2 t + \phi_2) + A_3 \cos(2\pi F_3 t + \phi_3)$$

3N informations à transmettre





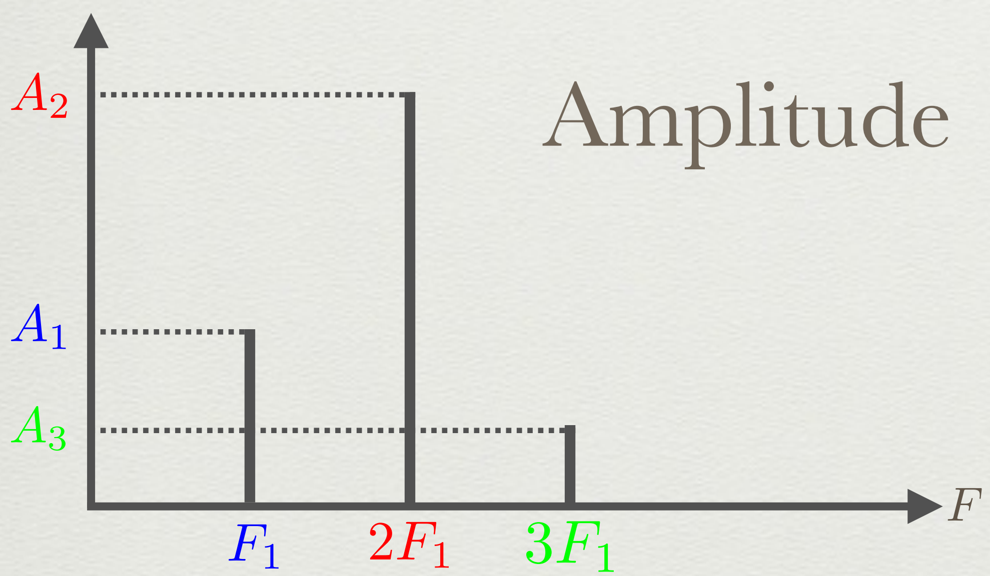
Sommes de cosinus harmoniques*

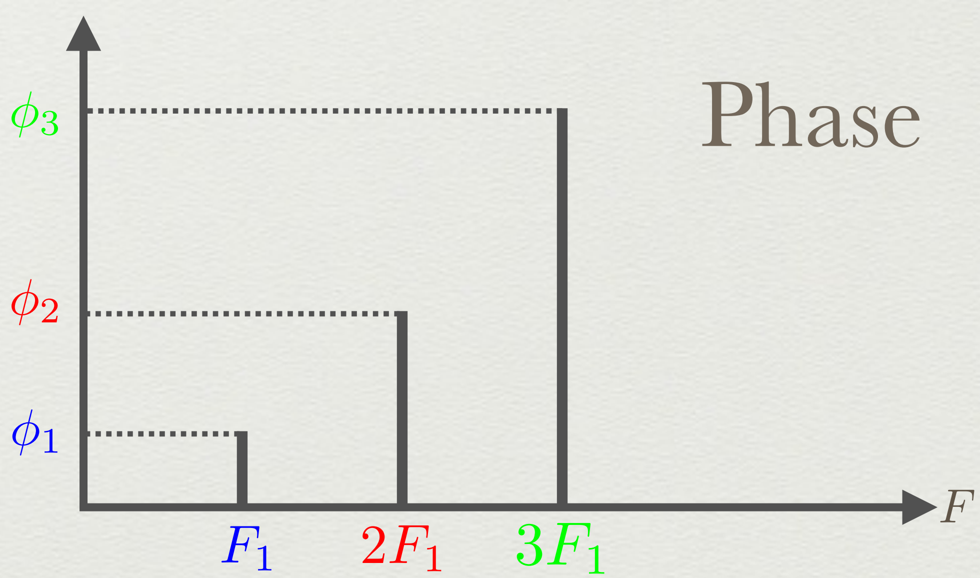


* dont les fréquences sont multiples d'une fréquence dite fondamentale

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi 2 F_1 t + \phi_2) + A_3 \cos(2\pi 3 F_1 t + \phi_3)$$

2N+1 informations à transmettre





Propriétés des sommes de cosinus harmoniques

- Une somme de cosinus de fréquences harmoniques garde la même périodicité que le cosinus de fréquence fondamentale.
- Une fonction est périodique si $x(t+T)=x(t)$. La période est le plus petit T vérifiant la propriété.
- Une fonction périodique est donc de support temporel infini.
- La fréquence fondamentale est notée F_0 ou F_1 …

2. La série de Fourier

La série de Fourier

- Toute fonction **périodique** de période T_0 peut s'écrire comme la somme de fonctions sinusoïdales de fréquences harmoniques :

$$\boxed{x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{T_0} t}} \qquad \text{avec } C_n = |C_n| e^{i\phi_n}$$

- C_n est un nombre complexe qui contient l'amplitude est la phase de la fonction sinusoïdale n. Il représente le « poids » de la fonction sinusoïdale n dans le signal x(t).

- Exemples avec l'applet Java disponible sur : http://www.falstad.com/fourier/

La série de Fourier (2)

- La question à se poser lorsque l'on décompose une fonction périodique en série de Fourier est : quelles sont les valeurs des C_n ?

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T_0}t}dt}$$

$\int_{T_0}$ signifie que l'on doit intégrer sur une période

$$\int_{T_0} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \text{ ou } \int_0^{T_0} \text{ ou } \int_{-T_0/4}^{3T_0/2} \text{ ou ...}$$

Exemple de calcul de C_n

- Soit le signal à 2 composantes :

$$x(t) = A_1 \cos(\frac{2\pi}{T}t + \phi_1) + A_2 \cos(\frac{2\pi}{T}2t + \phi_2)$$

- On cherche à calculer C_1, C_2, C_{-1} et C_{-2}.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt = \frac{A_1}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{t}{T} + \phi_1)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt + \frac{A_2}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{2}{T}t + \phi_2)e^{-i2\pi\frac{n}{T}t}dt$$

avec $e^{-i2\pi\frac{n}{T}t} = \cos(2\pi\frac{n}{T}t) - i\sin(2\pi\frac{n}{T}t)$

Exemple de calculs de C_n (suite)

D'où :

$$C_n = \frac{A_1}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{t}{T}+\phi_1)\cos(2\pi\frac{n}{T}t)dt - \frac{iA_1}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{t}{T}+\phi_1)\sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt$$
$$+\frac{A_2}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{2}{T}t+\phi_2)\cos(2\pi\frac{n}{T}t)dt - \frac{iA_2}{T}\int_T \cos(2\pi\frac{2}{T}t+\phi_2)\sin(2\pi\frac{n}{T}t)dt$$

Remarques :

1. $\frac{1}{T}\int_T toto(t)dt$ est la valeur moyenne de la fonction toto sur l'intervalle T.
2. $\cos(a)\cos(b) = \frac{cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$ et $\cos(a)\sin(b) = \frac{sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$.
3. La valeur moyenne de $\cos(\frac{2\pi nt}{T}+\phi)$ et $\sin(\frac{2\pi nt}{T}+\phi)$ sur une période T est nulle.

Au final :

$$C_1 = \frac{A_1}{2}\cos(\phi_1) + i\frac{A_1}{2}\sin(\phi_1) = \frac{A_1}{2}e^{i\phi_1} \qquad C_{-1} = \frac{A_1}{2}\cos(\phi_1) - i\frac{A_1}{2}\sin(\phi_1) = \frac{A_1}{2}e^{-i\phi_1}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{2}\cos(\phi_2) + i\frac{A_2}{2}\sin(\phi_2) = \frac{A_2}{2}e^{i\phi_2} \qquad C_{-2} = \frac{A_2}{2}\cos(\phi_2) - i\frac{A_2}{2}\sin(\phi_2) = \frac{A_2}{2}e^{-i\phi_2}$$

Reconstruction du signal

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$$

On remplace les C_n :

$$x(t) = \frac{A_1}{2} e^{i\phi_1} e^{i\frac{2\pi t}{T}} + \frac{A_1}{2} e^{-i\phi_1} e^{-i\frac{2\pi t}{T}} + \frac{A_2}{2} e^{i\phi_2} e^{i\frac{2\pi 2t}{T}} + \frac{A_2}{2} e^{-i\phi_2} e^{-i\frac{2\pi 2t}{T}}$$

D'où :

$$x(t) = A_1 (\frac{e^{i(\frac{2\pi t}{T} + \phi_1)} + e^{-i(\frac{2\pi t}{T} + \phi_1)}}{2}) + A_2 (\frac{e^{i(\frac{2\pi 2t}{T} + \phi_2)} + e^{-i(\frac{2\pi 2t}{T} + \phi_2)}}{2})$$

$$x(t) = A_1 \cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi_1) + A_2 \cos(\frac{2\pi 2t}{T} + \phi_2)$$

3. Propriétés de la série de Fourier

Propriétés

- C_0 est la valeur moyenne de $x(t)$.
- Si $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ alors $|C_{n,2}| = |C_{n,1}|$.
- Pour un signal x(t) réel, $|C_{-n}| = |C_n|$ et $\phi_{-n} = -\phi_n$.
- Les fréquences négatives (n négatifs) viennent de la décomposition sur les exponentielles complexes.
- Si la fonction x(t) a des variations rapides, les termes d'ordres élevés (n grands) ont de grandes amplitudes.

4. Applications de la série de Fourier

A quoi ça sert ?

- La série de Fourier permet d'accéder à de l'information sur le signal plus simplement.
- La série de Fourier permet de résoudre des équations différentielles linéaires avec excitation périodique non sinusoïdale.
- La synthèse sonore est basée sur le principe des séries de Fourier.