# Transformée de Fourier (3)

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence Acoustique

Année universitaire 2014-2015

# Sommaire

# Sommaire

## Principales raisons pour fenêtrer un signal $x(t)$

On fenêtre le signal $x(t)$ car

1. l'information de l'intégralité de $x(t)$ ne nous intéresse pas (exemple : countdown)
2. les appareils qu'on utilise impose une durée limitée du signal à analyser (exemple : gong)

### Principales raisons pour fenêtrer un signal $x(t)$

On fenêtre le signal $x(t)$ car

1. l'information de l'intégralité de $x(t)$ ne nous intéresse pas (exemple : countdown)
2. les appareils qu'on utilise impose une durée limitée du signal à analyser (exemple : gong)

### Le choix des fenêtres

En catalogue, on dispose

1. de la fenêtre rectangulaire
2. des fenêtres à bords doux (Hann, Blackmann, Hamming, Kaiser...)

Chaque type de fenêtre a ses avantages et ses inconvénients. Il convient donc de choisir la "bonne" fenêtre par rapport à un problème donné.

# Sommaire

### Fenêtre rectangulaire (1/2)

Le signal (la fenêtre)

$$w(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$$

vaut 1 pour $t \in [-T/2, T/2]$ et 0 en dehors de cet intervalle.

La TF de $w(t)$ s'écrit

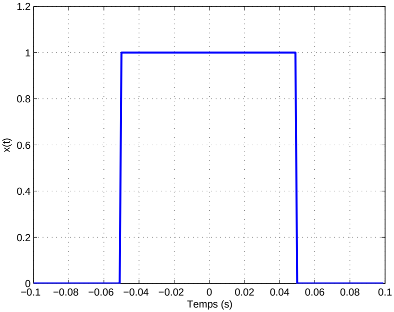
$$W(F) = T \cdot \frac{\sin(\pi F T)}{\pi F T} \equiv T \cdot \mathrm{sinc}(\pi F T)$$

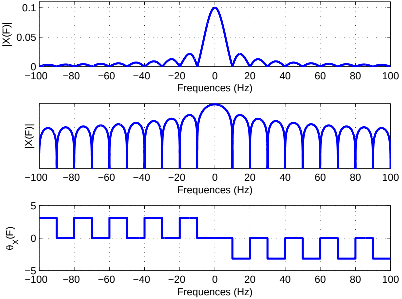
où sinc désigne le sinus cardinal.

# Fenêtre rectangulaire (2/2)

$$w(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$$

$$W(F) = T \cdot \mathrm{sinc}(\pi F T)$$



# Sommaire

## Fenêtre de Hann (1/2)

Le signal (la fenêtre)

$$w(t) = 0.5 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$$

pour $t \in [-T/2, T/2]$ ,et égale à 0 en dehors de cet intervalle, est appelée fenêtre de Hann[a] et fait partie de la famille des fenêtres à bords doux.

La TF de $w(t)$ s'écrit

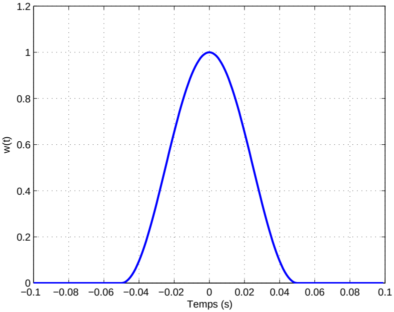
$$W(F) = \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(\pi FT)}{\pi FT} \cdot \frac{1}{1-(FT)^2} \equiv \frac{T}{2} \cdot \mathrm{sinc}(\pi FT) \cdot \frac{1}{1-(FT)^2}$$

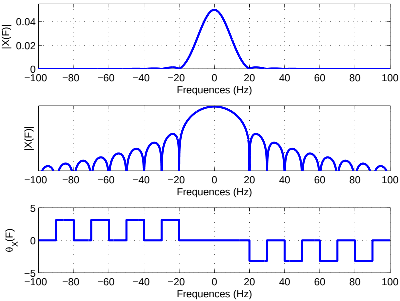
[a] du nom du météorologiste autrichien Julius von Hann (1839-1921)

## Fenêtre de Hann (2/2)

$$w(t) = 0.5 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$$

$$W(F) = \frac{T}{2} \cdot \mathrm{sinc}(\pi F T) \cdot \frac{1}{1-(FT)^2}$$

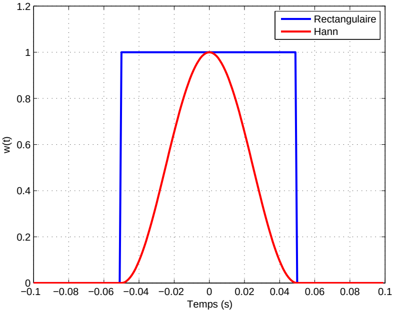


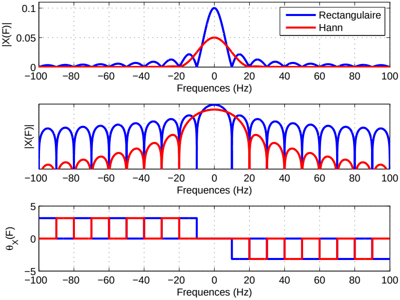
# Sommaire

## Visualisation

$w(t)$




$W(F)$



### Lobe principal et lobes secondaires

On retient que

1. le lobe principal de la fenêtre rectangulaire est 2 fois plus étroit que celui de la fenêtre de Hann
2. le niveau du lobe secondaire de la fenêtre de Hann ($-32$dB) est plus bas que celui de la fenêtre rectangulaire.

## TF d'un signal fenêtré : la démonstration (1/2)

Partant de (définition de la convolution)

$$X_w(F) = X(F) * W(F) = \int_{F'} X(F') \cdot W(F - F') dF'$$

1. on cherche à calculer la TFI de $X_w(F)$

$$x_w(t) = \int_F X_w(F) e^{+j2\pi Ft} dF$$

2. on remplace $X_w(F)$ par son expression

$$x_w(t) = \int_F \left( \int_{F'} X(F') \cdot W(F - F') dF' \right) e^{+j2\pi Ft} dF$$

## TF d'un signal fenêtré : la démonstration (2/2)

1. on ré-organise le membre de droite de l'égalité

$$x_w(t) = \int_{F'} X(F') \left( \int_F W(F - F') e^{+j2\pi F t} dF \right) dF'$$

2. on calcule l'intégrale sur $F$ ($\int_F$)

$$x_w(t) = \int_{F'} X(F') \left( w(t) e^{j2\pi F' t} \right) dF'$$

3. on ré-organise le membre de droite de l'égalité

$$x_w(t) = \left( \int_{F'} X(F') e^{j2\pi F' t} dF' \right) \cdot w(t)$$

4. on en déduit

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$$

### TF d'un signal fenêtré : à retenir

Soit $x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$ le signal fenêtré, $x(t)$ et $w(t)$ étant le signal à fenêtrer et la fenêtre. On a alors

$$X_w(F) = X(F) * W(F)$$

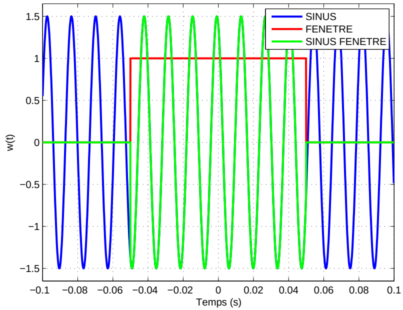
Dans le domaine fréquentiel (ou de Fourier), les TFs $X(F)$ et $W(F)$ sont donc mélangées par une opération de convolution.

# Sommaire

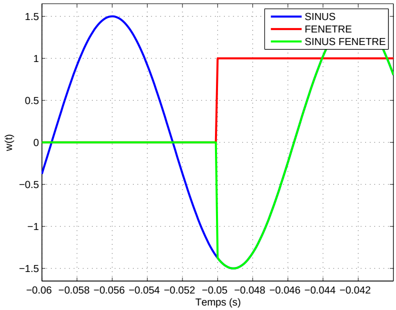
## Analyse temporelle

Le signal $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ est fenêtré par $w(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$

$x_w(t)$




ZOOM de $x_w(t)$



## Analyse fréquentielle

1. La TF de $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ s'écrit

$$X(F) = \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0).$$

2. La TF de $w(t) = \text{Rect}_T(t)$ s'écrit

$$W(F) = T \cdot \text{sinc}(\pi F T)$$

3. La TF de $x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$ s'écrit donc

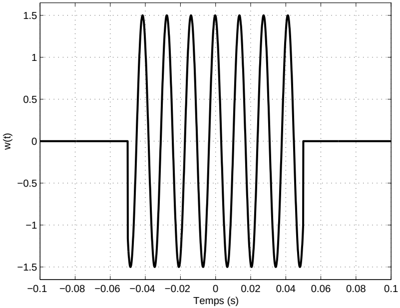
$$X_w(F) = \left( \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0) \right) * W(F)$$

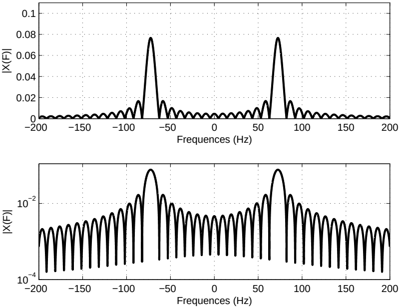
4. On obtient donc

$$X_w(F) = \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} W(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} W(F + F_0)$$

# Représentations (1/2)

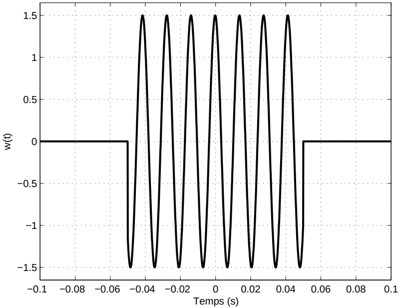
$x_w(t)$ $|X_w(F)|$



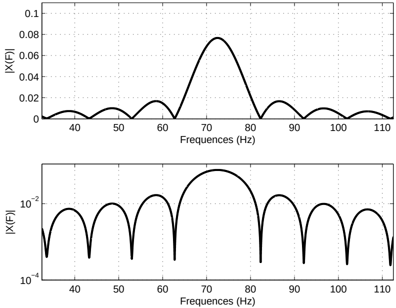



## Représentations (2/2)

$x_w(t)$



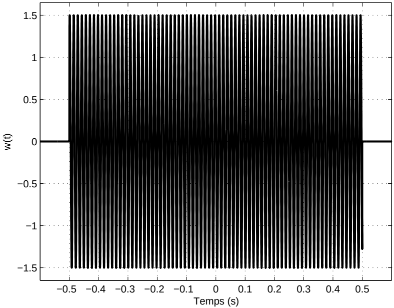

ZOOM de $|X_w(F)|$



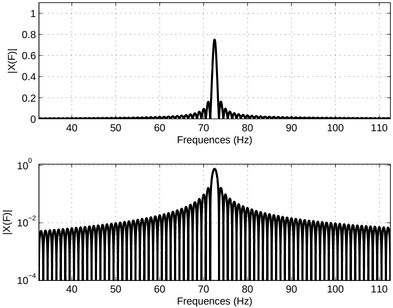

<u>Exercice</u> : Donner l'expression des fréquences entourant $F_0$, qui vérifient $X_w(F) = 0$.

## Si on augmente $T$ (d'un facteur 10)

$x_w(t)$




ZOOM de $|X_w(F)|$



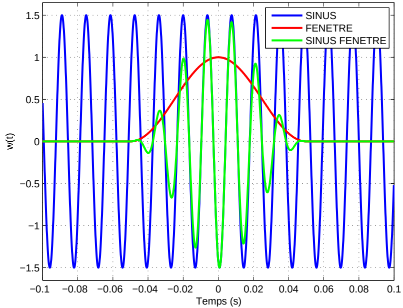

La fréquence $F_0$ est beaucoup mieux localisée.

# Sommaire

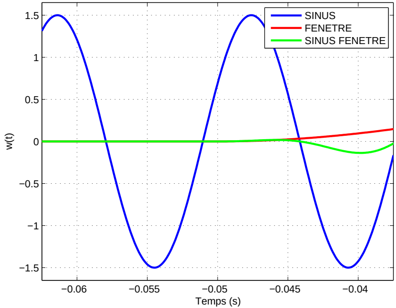
## Analyse temporelle

$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ est fenêtré par $w(t) = 0.5\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$

$x_w(t)$




ZOOM de $x_w(t)$



## Analyse fréquentielle

1. La TF de $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$ s'écrit

$$X(F) = \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0).$$

2. La TF de $w(t) = 0.5\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$ s'écrit

$$W(F) = \frac{T}{2} \cdot \text{sinc}(\pi F T) \cdot \frac{1}{1 - (FT)^2}$$

3. La TF de $x_w(t) = x(t) \cdot w(t)$ s'écrit donc

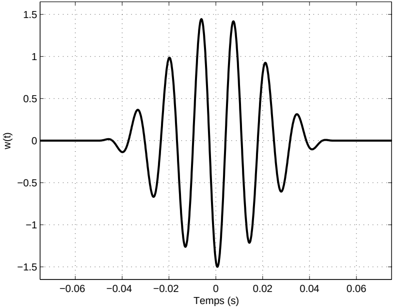
$$X_w(F) = \left( \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} \delta(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} \delta(F + F_0) \right) * W(F)$$

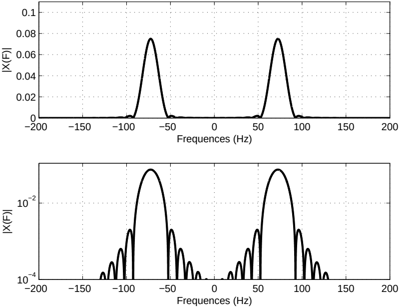
4. On obtient donc

$$X_w(F) = \frac{A_0}{2} e^{j\phi_0} W(F - F_0) + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} W(F + F_0)$$

## Représentations (1/2)

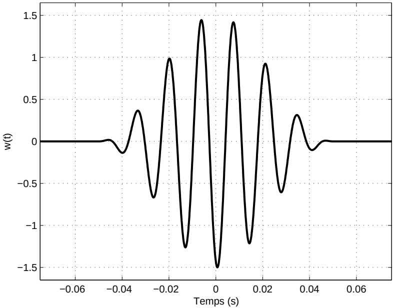
$x_w(t)$ $\qquad$ $|X_w(F)|$



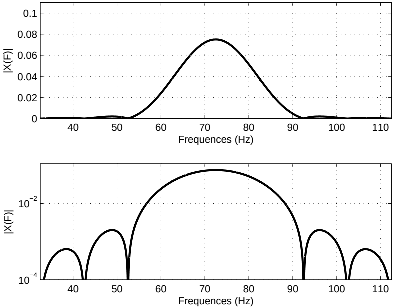



## Représentations (2/2)

$x_w(t)$



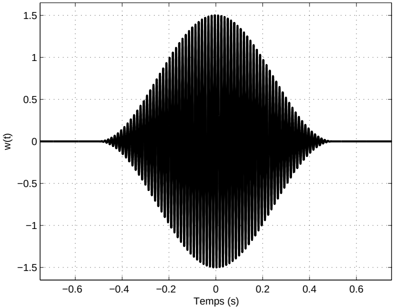

ZOOM de $|X_w(F)|$



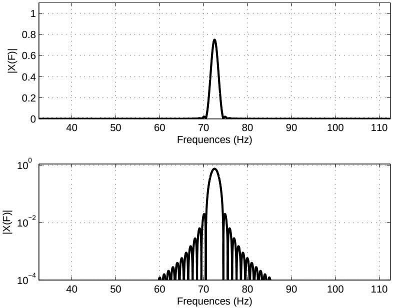

<u>Exercice</u> : Donner l'expression des fréquences entourant $F_0$, qui vérifient $X_w(F) = 0$.

## Si on augmente $T$ (d'un facteur 10)

$x_w(t)$




ZOOM de $|X_w(F)|$

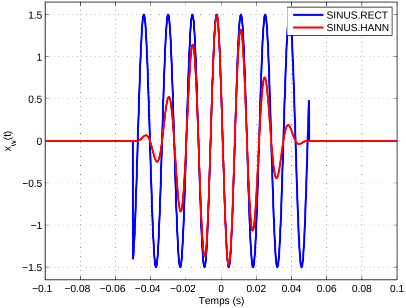



La fréquence $F_0$ est beaucoup mieux localisée (mais moins bien qu'avec la fenêtre rectangulaire).

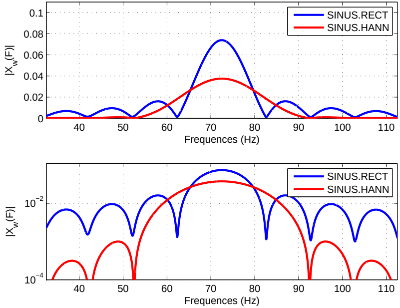
# Sommaire

## Représentation

$x_w(t)$




ZOOM de $|X_w(F)|$

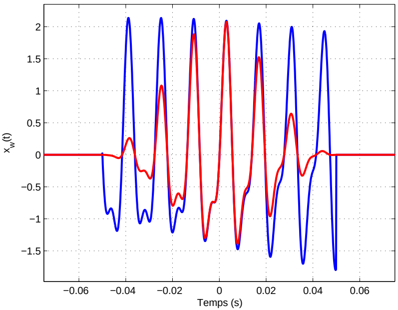


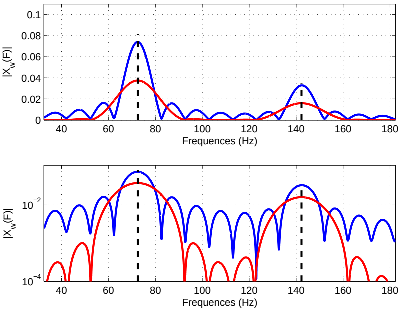
# Sommaire

## Représentation

$$x_w(t) = \left(\sum_{k=1}^{2} A_k \cos(2\pi F_k t + \phi_k)\right) \cdot w(t)$$

ZOOM de $|X_w(F)|$



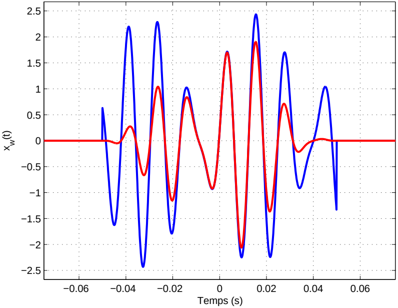



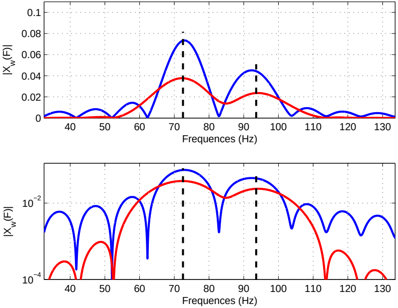
# Sommaire

## Représentation

$$x_w(t) = (\sum_{k=1}^{2} A_k \cos(2\pi F_k t + \phi_k)) \cdot w(t)$$

ZOOM de $|X_w(F)|$

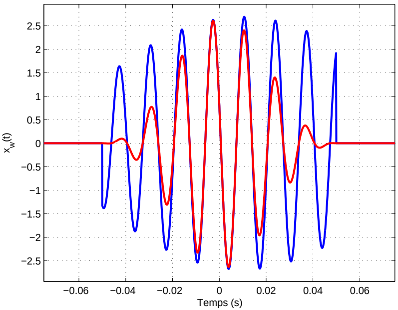


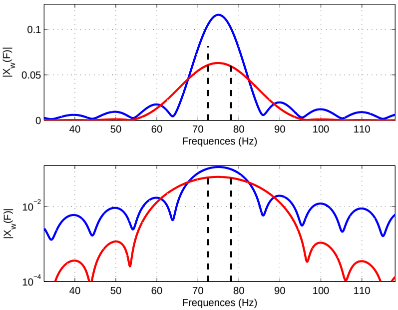



# Sommaire

## Représentation

$x_w(t) = (\sum_{k=1}^{2} A_k \cos(2\pi F_k t + \phi_k)) \cdot w(t)$ ZOOM de $|X_w(F)|$



# Sommaire

## Règle à retenir

1. Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire, pour pouvoir séparer les 2 fréquences $F_0$ et $F_1$ d'un signal $x_w(t)$, il faut que la durée $T$ de la fenêtre $w(t)$ vérifie
$$|F_1 - F_0| > \frac{1}{T}$$
2. Dans le cas d'une fenêtre de Hann, pour pouvoir séparer les 2 fréquences $F_0$ et $F_1$ d'un signal $x_w(t)$, il faut que la durée $T$ de la fenêtre $w(t)$ vérifie
$$|F_1 - F_0| > \frac{2}{T}$$
3. Dans le cas où ses règles ne sont pas respectées, les 2 fréquences seront noyées dans un même lobe central (cas 3).
4. La quantité $1/T$ est appelée résolution de l'analyse de Fourier.