Transformées de Fourier

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence Acoustique

Année universitaire 2014-2015

Sommaire

Sommaire

Série ou transformée de Fourier ?

Série de Fourier $\Longleftrightarrow$ Toutes fonctions périodiques

coefficients c_n pour tout n entier

Transformée de Fourier $\Longleftrightarrow$ N'importe quelle fonction $x(t)$

spectre $X(F)$ du signal : fonction de la fréquence F

Sommaire

Transformée de Fourier des signaux à temps continu

$$X(F) = \mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi Ft} dt,$$

$X(F)$ représente le spectre du signal $x(t)$.

Passage du « domaine » temporel au « domaine » fréquentiel

Module et phase du spectre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |X(F)| & = & \sqrt{X(F)X^*(F)} \\ \theta_x(F) & = & \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(F))}{\mathrm{Re}(X(F))}\right) \end{array} \right. ,$$

et

$$X(F) = |X(F)|e^{j\theta_x(F)}.$$

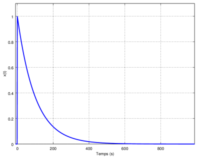
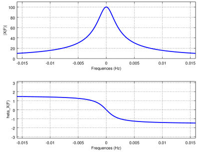
Propriétés

- Module du spectre PAIR
- Phase du spectre IMPAIRE

Transformée de Fourier des signaux à temps continu

$$X(F) = \mathrm{TF}\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi Ft} dt,$$

$X(F)$ représente le spectre du signal $x(t)$.

« Domaine » temporel	« Domaine » fréquentiel
x(t)	X(F)
	
UNE fonction du temps	DEUX fonctions de la fréquence

Transformée de Fourier INVERSE des signaux à temps continu

(Synthèse de signaux)

$$x(t) = \text{TFI}\{X(F)\} = \int_{F=-\infty}^{F=+\infty} X(F)e^{+j2\pi Ft}dF.$$

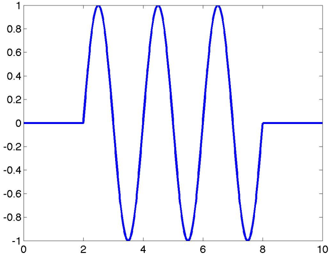
Passage du « domaine » fréquentiel au « domaine » temporel

Explication graphique de la formule Transformée de Fourier

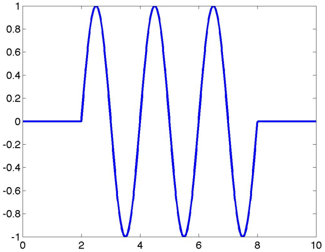
$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt,$$

Soit le signal $x(t)$ à analyser :

$$\begin{aligned} x(t) &= sin(2\pi F_0 t) \text{ pour } 2 < t < 4, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

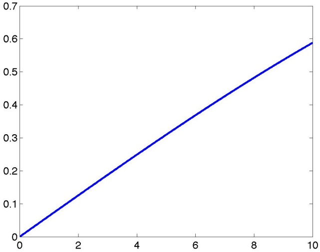


Analyse à la fréquence $F_1 \ll F_0$



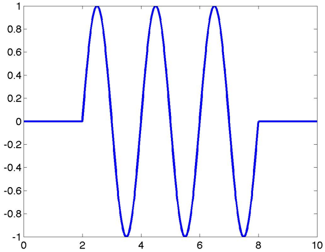
$x(t)$

x



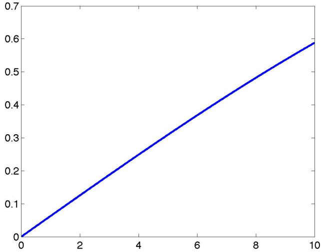
$e^{-i2\pi F_1 t}$

Analyse à la fréquence $F_1 \ll F_0$



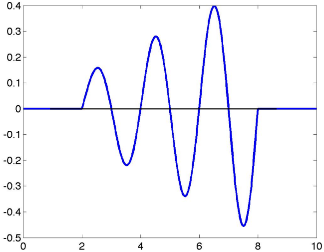
$x(t)$

×

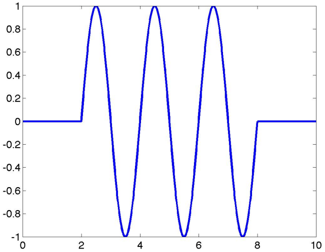


$e^{-i2\pi F_1 t}$

$=$

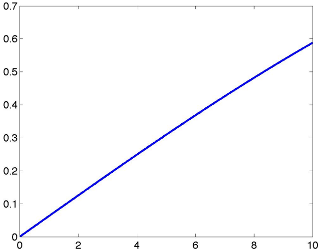


Analyse à la fréquence $F_1 \ll F_0$



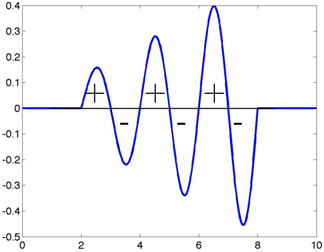
$x(t)$

x

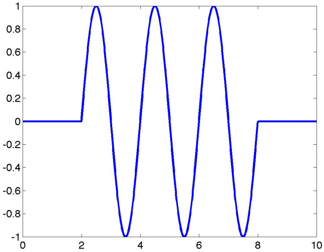


$e^{-i2\pi F_1 t}$

$=$

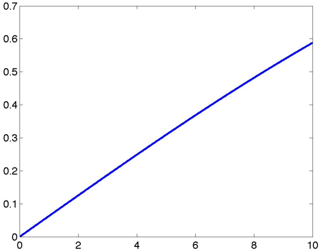


Analyse à la fréquence $F_1 \ll F_0$



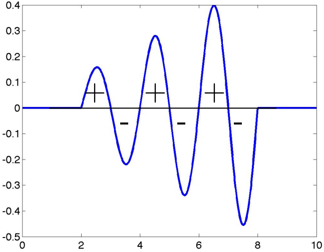
$x(t)$

x



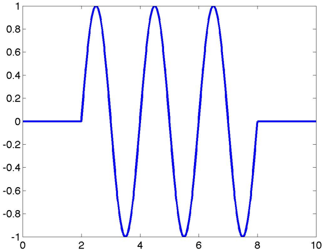
$e^{-i2\pi F_1 t}$

$=$



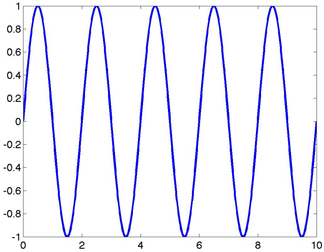
$=> X(f_1) \approx 0$

Analyse à la fréquence $F_2 = F_0$



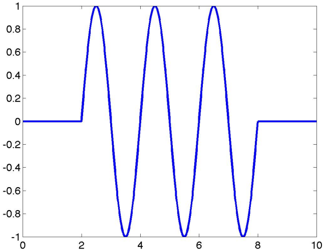
$x(t)$

x



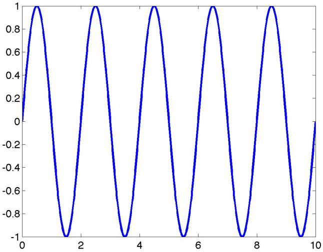
$e^{-i2\pi F_2 t}$

Analyse à la fréquence $F_2 = F_0$



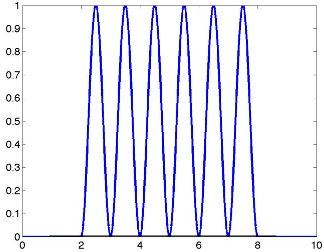
$x(t)$

x

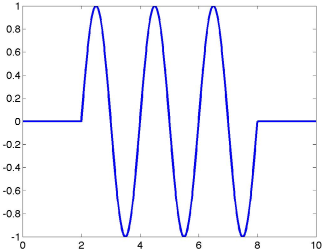


$e^{-i2\pi F_2 t}$

$=$

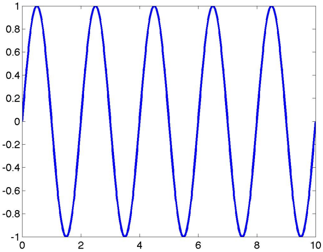


Analyse à la fréquence $F_2 = F_0$



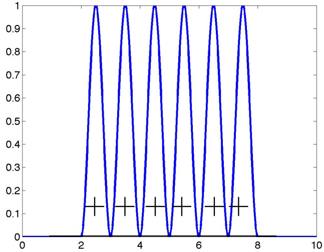
$x(t)$

×

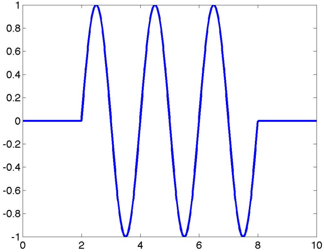


$e^{-i2\pi F_2 t}$

$=$

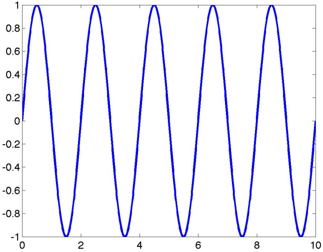


Analyse à la fréquence $F_2 = F_0$



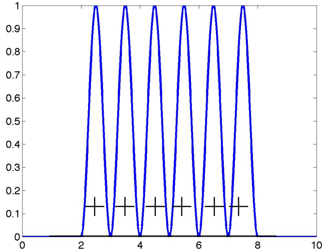
$x(t)$

x



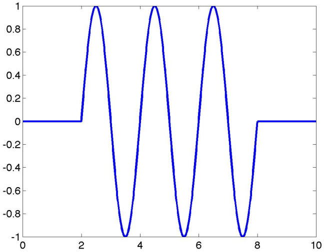
$e^{-i2\pi F_2 t}$

$=$



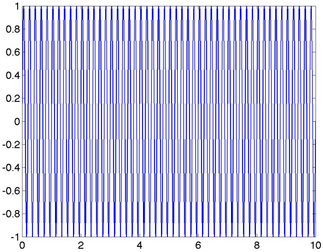
$=> |X(F_2)| > 0$

Analyse à la fréquence $F_3 \gg F_0$



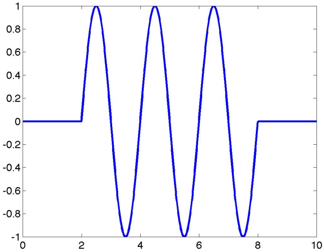
$x(t)$

x



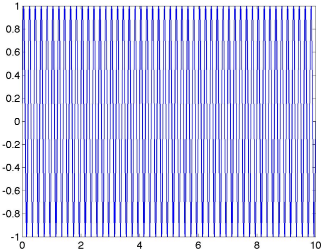
$e^{-i2\pi F_3 t}$

Analyse à la fréquence $F_3 \gg F_0$



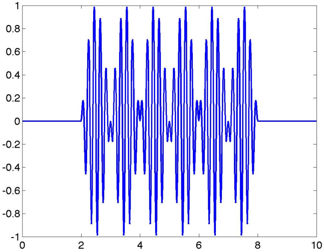
$x(t)$

x

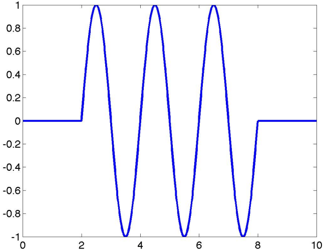


$e^{-i2\pi F_3 t}$

$=$

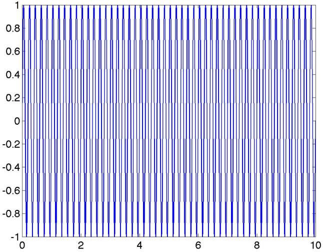


Analyse à la fréquence $F_3 \gg F_0$



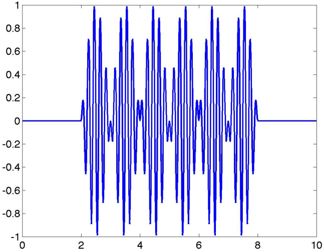
$x(t)$

x



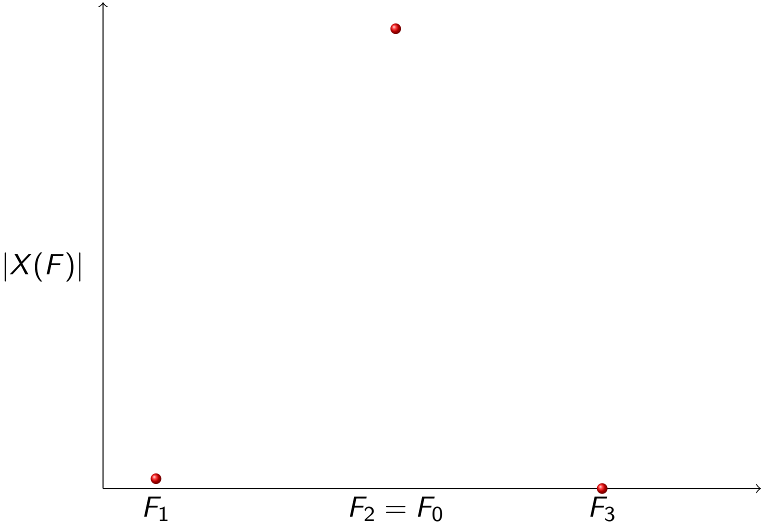
$e^{-i2\pi F_3 t}$

$=$

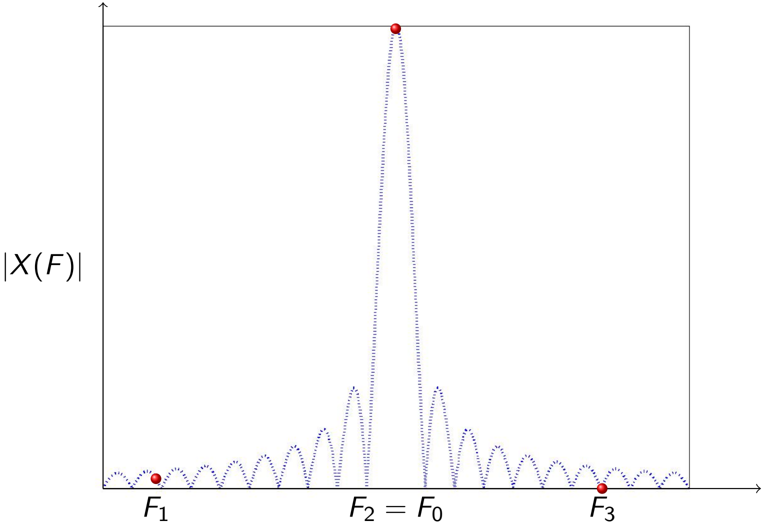


$=> X(F_3) \approx 0$

Résultat pour le module de $|X(F)|$



Résultat pour le module de $|X(F)|$



Exercices :

1. Dessiner les deux fonctions suivantes :

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et

$$x_2(t) = \text{Rect}_T(t) \quad \text{avec} \quad T = \frac{1}{10}$$

2. Calculer les transformées de Fourier des deux fonctions.
3. Dessiner les spectres respectifs.

Exercices (suite):

1. En utilisant la définition de la Transformée de Fourier Inverse, essayer de deviner le spectre de la fonction :

$$x_3(t) = e^{j2\pi F_0 t} \quad \text{où} \quad F_0 \text{ est une constante.}$$

2. En déduire le spectre de la fonction

$$x_4(t) = e^{-j2\pi F_0 t} \quad \text{où} \quad F_0 \text{ est une constante.}$$

3. En déduire les spectres des fonctions

$$x_5(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t)$$

et

$$x_6(t) = A_0 \sin(2\pi F_0 t)$$