Notion de Système - Convolution

Cours de traitement du signal - Séance 3

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence Sciences Pour l'Ingénieur 2ème année

1. Qu’est ce qu’un système ?
2. Signal temporel élémentaire : fonction Dirac.
3. Réponse impulsionnelle.
4. Produit de convolution.

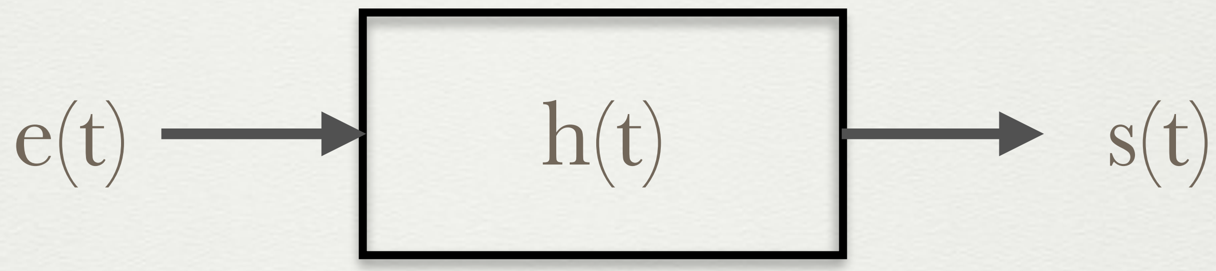
Notion de système

- Un système est un opérateur qui à tous signaux d’entrée associent des sorties bien définies. Un système est donc caractérisé par le concept d’entrées-sorties

- Les entrées représentent les actions extérieures au système. Les sorties peuvent représenter une action sur un autre système qui lui serait connecté. Cela peut être une grandeur interne caractéristique de l’état du système.

- A un instant t donné, l’état du système dépend des actions instantanées qu’il subit mais également de son histoire antérieure (effet mémoire).

Notion de système (2)

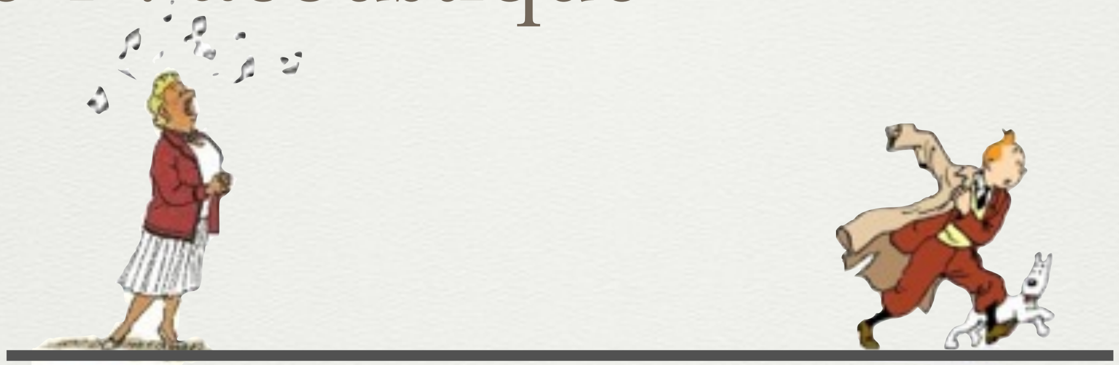


- Dans la suite, on considérera des systèmes à une entrée et une sortie.
- Les systèmes seront linéaires et invariants dans le temps (SLIT).
- Le système, caractérisé par une quantité h à définir ultérieurement, agit sur l'entrée e(t) pour produire la sortie s(t).

$$e(t) \xrightarrow{h} s(t) = h\left[e(t)\right]$$

Exemples de systèmes

- Exemple 1 : acoustique

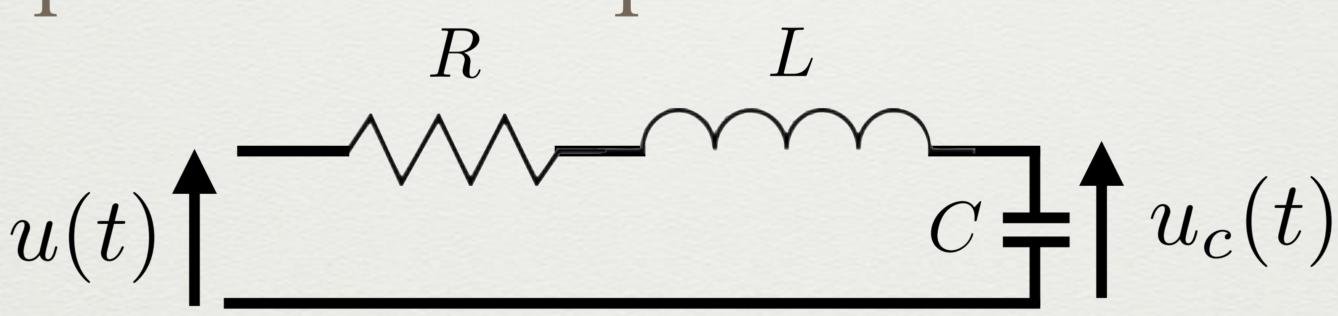


$e(t)$:

$s(t)$:

Système :

- Exemple 2 : électrique



$e(t)$:

$s(t)$:

Système :

- Exemple 3 : informatique

$e(t)$:

$s(t)$:

Système :

Propriétés des SLIT

- **Linéarité** : Un système est linéaire si et seulement si :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2) \text{ et } \forall(e_1, e_2),\ h\left[\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right] = \alpha_1 h\left[e_1\right] + \alpha_2 h\left[e_2\right] = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2$$

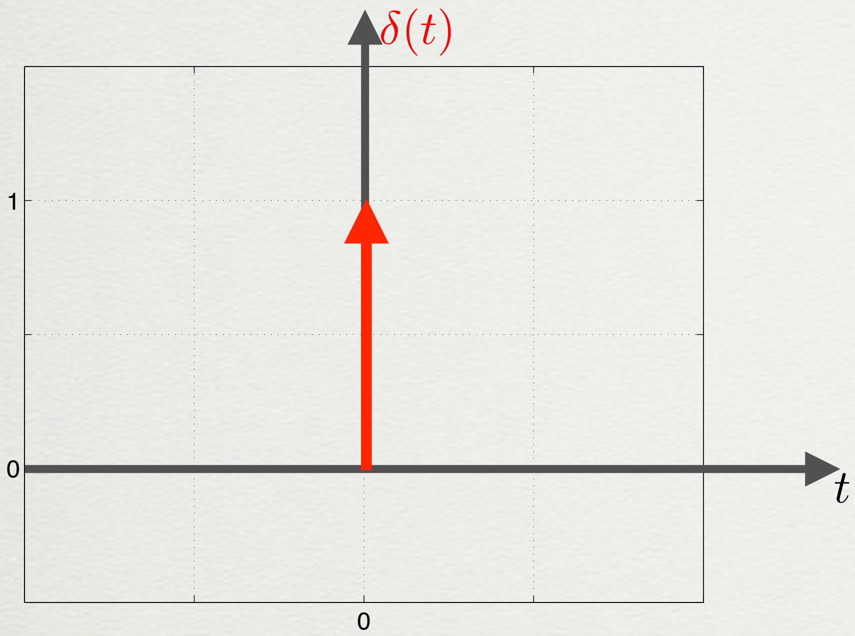
- **Invariance dans le temps** : un système est invariant dans le temps lorsqu'une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie : $\forall(t_0),\ h\left[e(t-t_0)\right] = s(t-t_0)$

- **Causalité** : l'effet ne peut précéder la cause.

$$\text{Si } e(t) = 0\ \forall(t \leq t_0), \text{ alors } s(t) = 0\ \forall(t \leq t_0)$$

2. Signal temporel élémentaire : la fonction ou impulsion de Dirac

Rappel de la définition



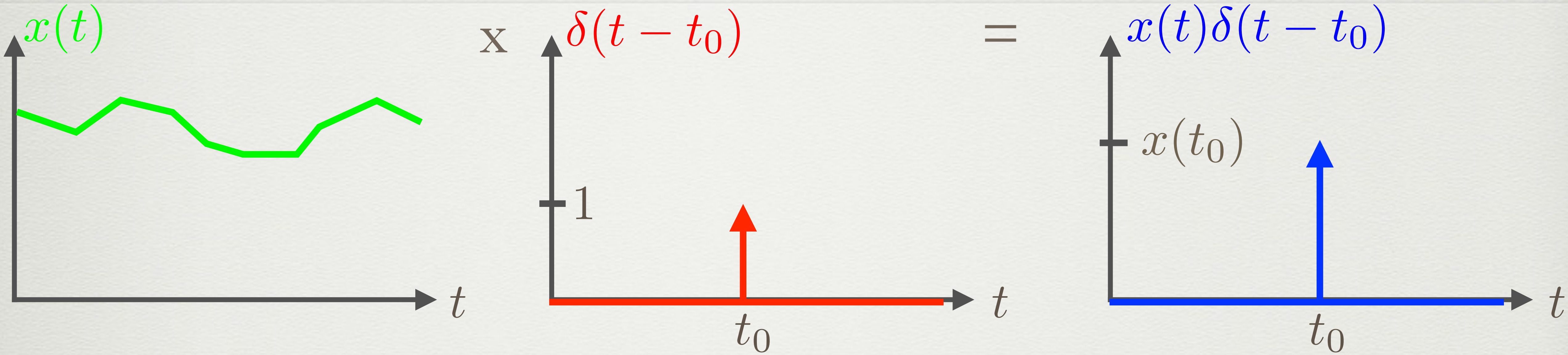
$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Une fonction Dirac est un signal de support temporel nulle, d'amplitude nulle partout sauf en t=0 telle que la « surface sous la courbe » soit unitaire.

- Une bonne approximation de la fonction de Dirac est réalisée avec la fonction $\frac{1}{T}Rect_T(t)$ lorsque T est petit.

Quelques propriétés

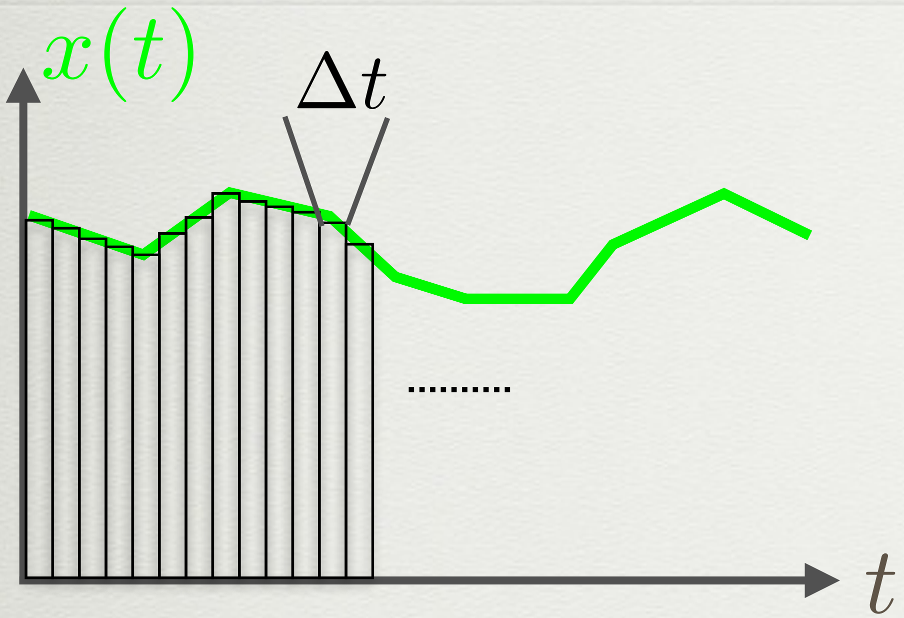


$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

Propriété intéressante dans l'optique de l'échantillonnage du signal x(t).
De plus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Autre propriété



$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t) Rect_{\Delta t}(t - k\Delta t)$$

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t) \frac{1}{\Delta t} Rect_{\Delta t}(t - k\Delta t)\Delta t$$

Passage à la limite : $\Delta t \to 0$

$\Rightarrow k\Delta t \to t'$

$\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} Rect_{\Delta t}(t - k\Delta t) \to \delta(t - t')$

$\Rightarrow \sum \Delta t \to \int dt'$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\delta(t - t')dt'}$$

Tout signal temporel peut s'écrire sous la forme d'une somme continue d'impulsion de Dirac.

3. La réponse impulsionnelle

Définition

- La réponse impulsionnelle est la réponse (signal de sortie) d'un système lorsque celui-ci est excité (signal d'entrée) par une impulsion ou fonction de Dirac.

- La réponse impulsionnelle est notée h(t) et caractérise totalement un système.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$$

4. Produit de convolution

Mise en évidence

Entrée : e(t) — Sortie s(t)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$$

$$e(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow e(\tau)h(t-\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

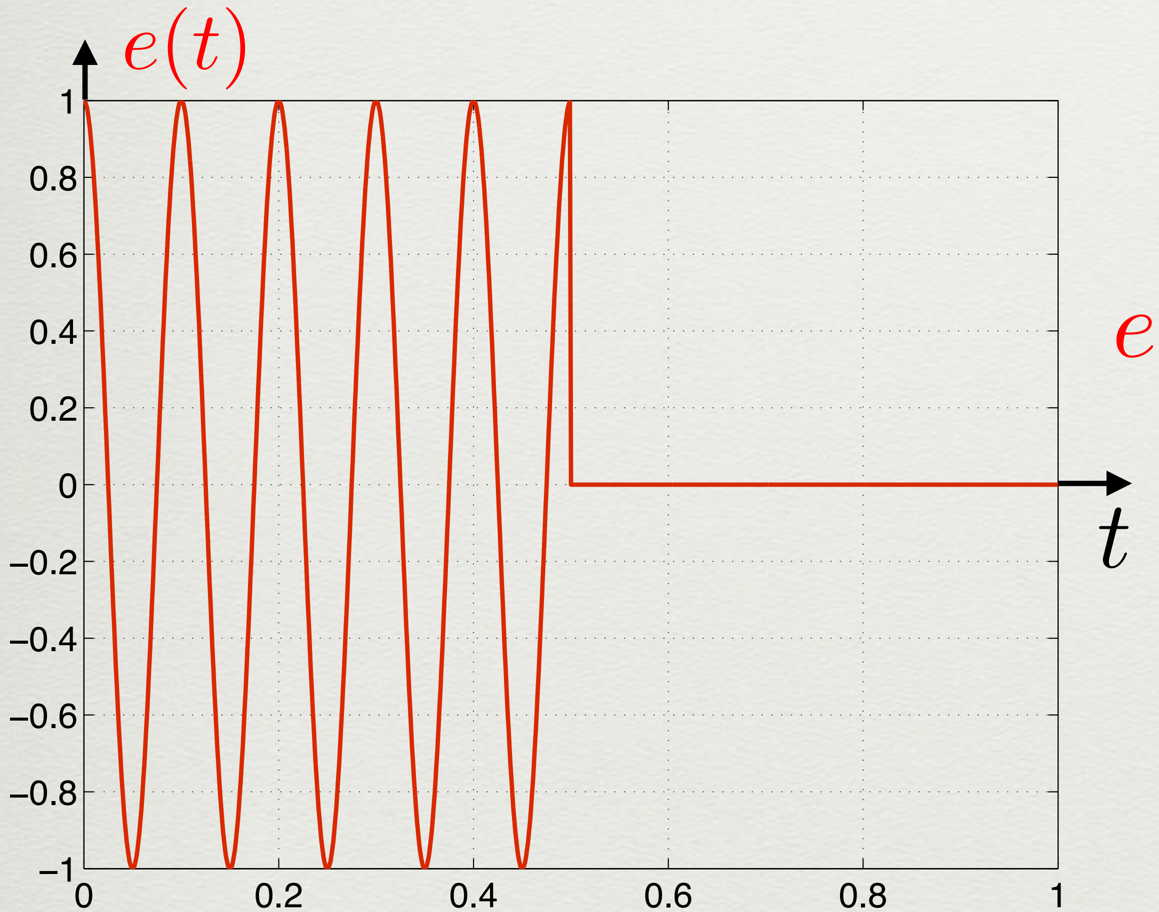
$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t) * h(t)}$$

Propriétés

- Commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
- Distributivité : $x(t) * (y_1(t) + y_2(t)) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t)$
- Élément neutre : $x(t) * \delta(t) = x(t)$
- Décalage de fonction : $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Exemples de convolution

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s(t)$$

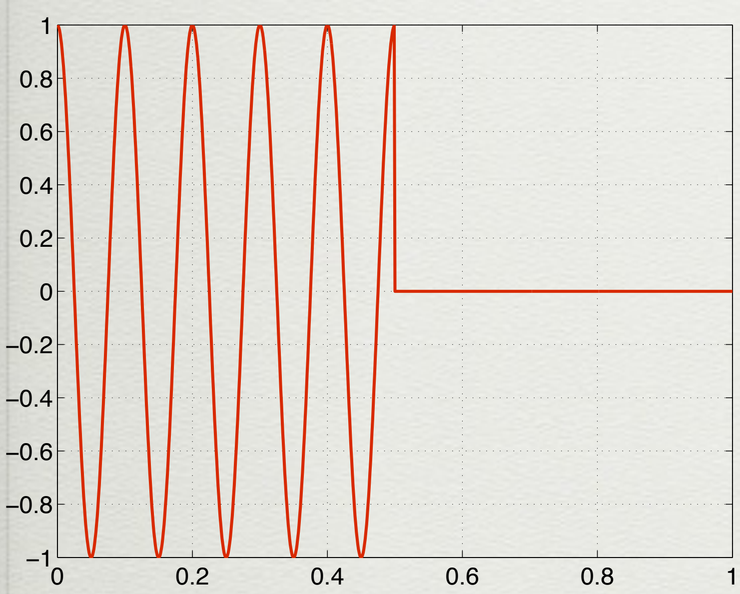


$$e(t) = \cos(2\pi F_0 t) Rect_T(t - \frac{T}{2})$$

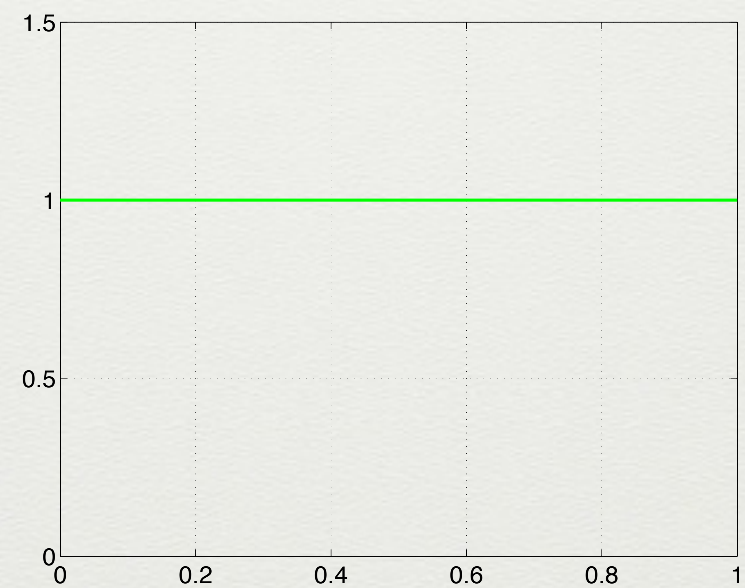
avec $F_0 = 10$ Hz et $T = 0,5$ s

Exemples de convolution (1)

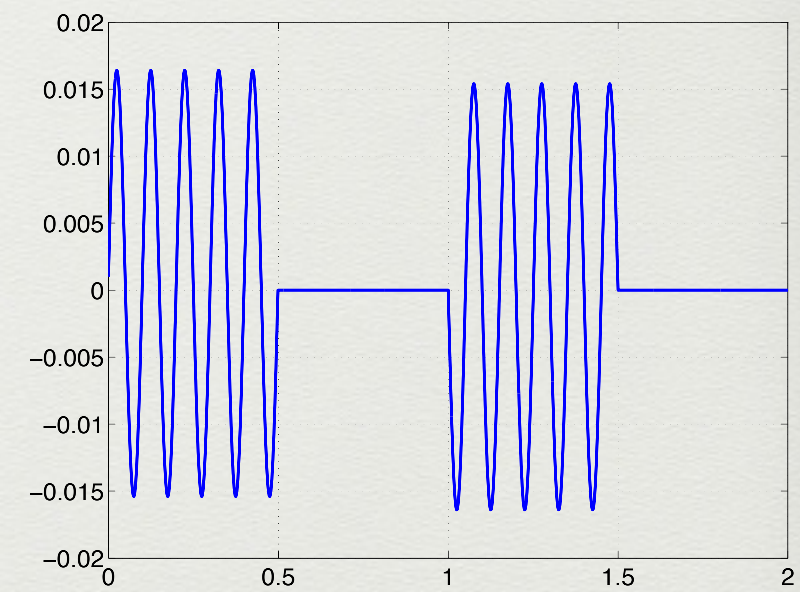
$e(t)$



$h(t)$



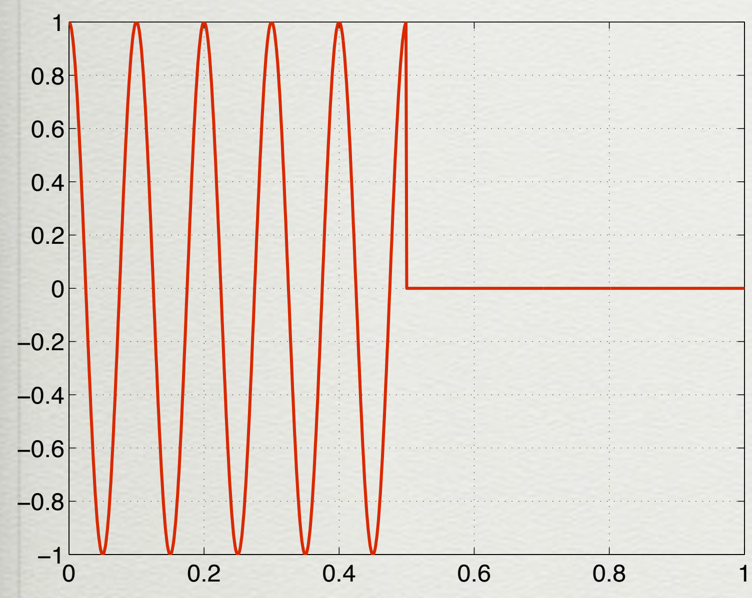
$s(t)$

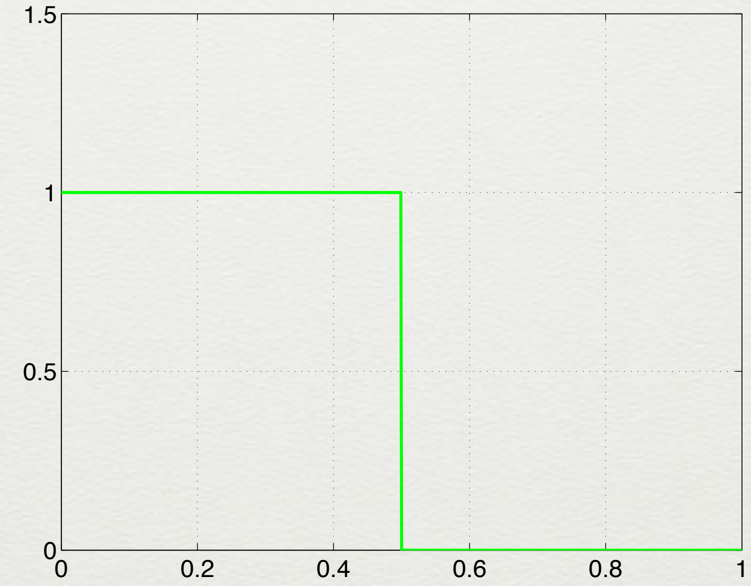


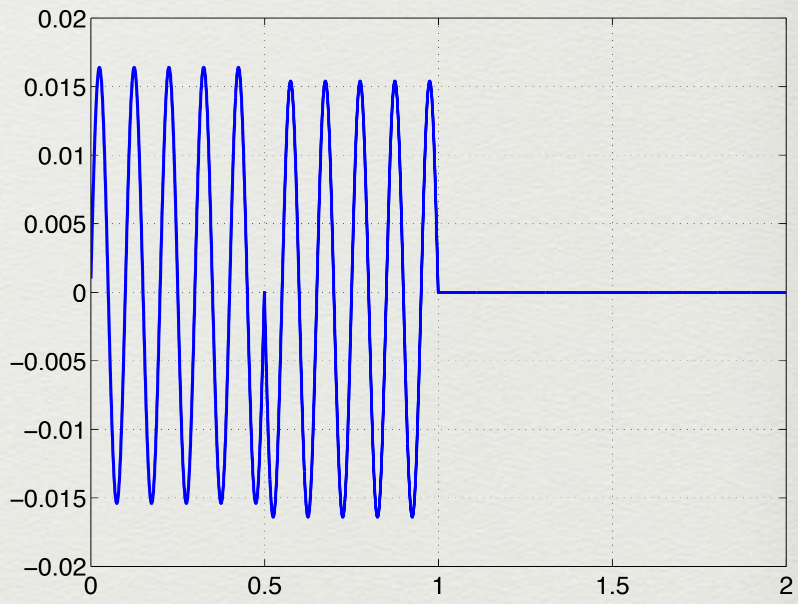
$$h(t) = Rect_{2T}(t - T)$$

Exemples de convolution (2)

$e(t)$ $h(t)$ $s(t)$



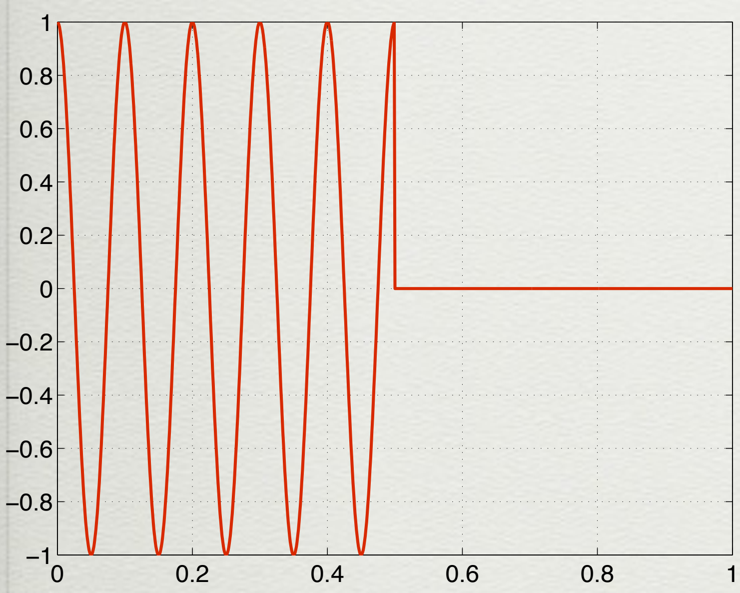


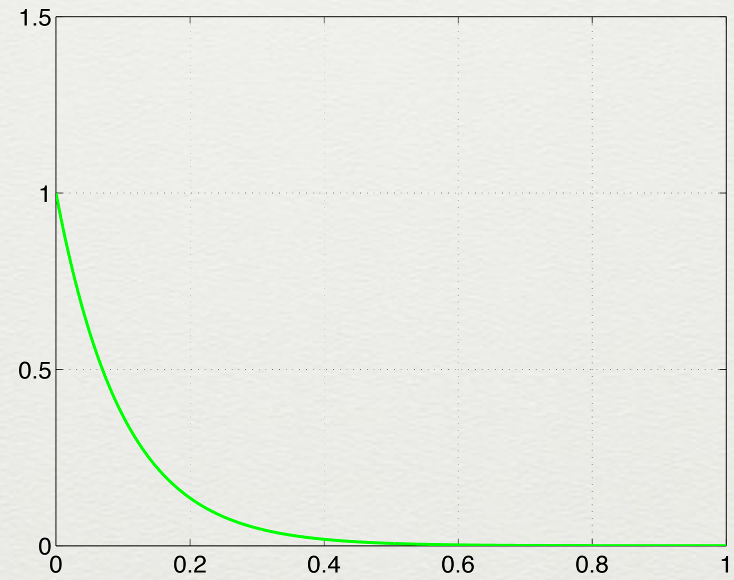


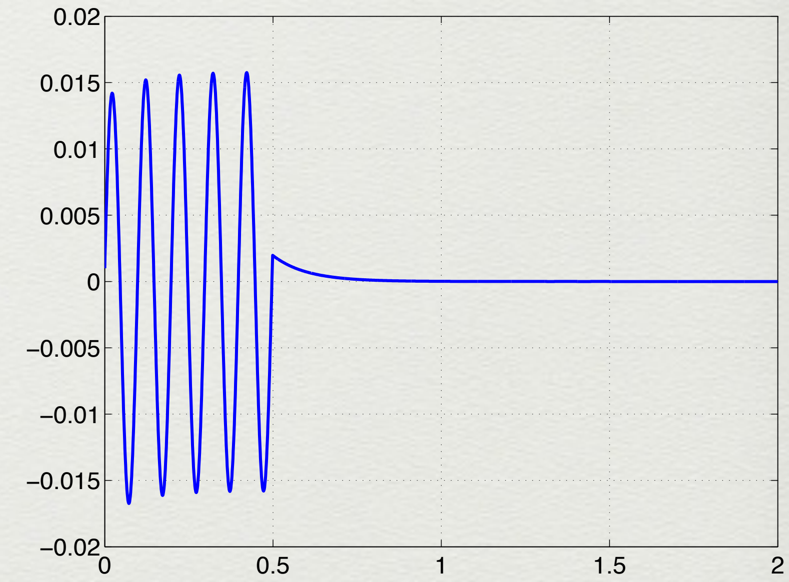
$$h(t) = Rect_T(t - \frac{T}{2})$$

Exemples de convolution (3)

$e(t)$ $h(t)$ $s(t)$



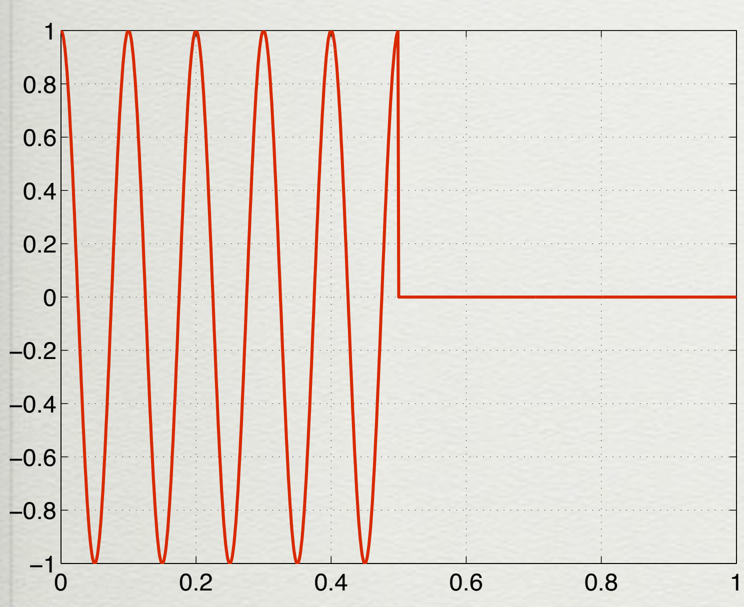


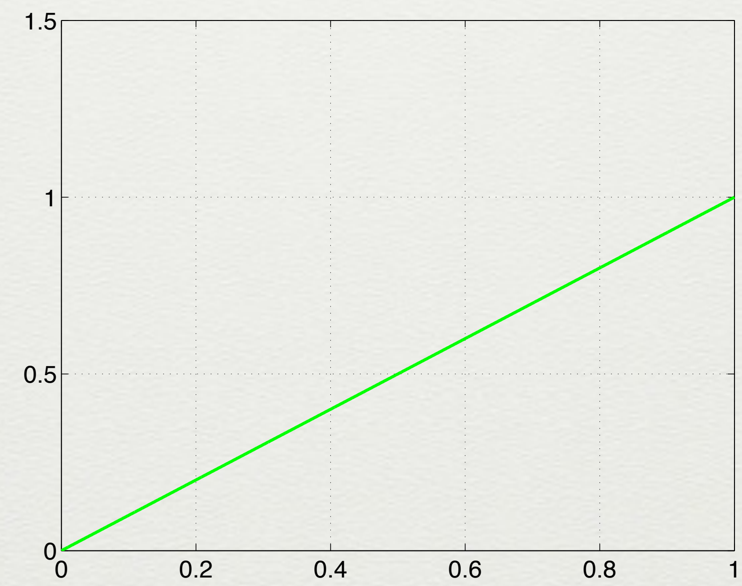


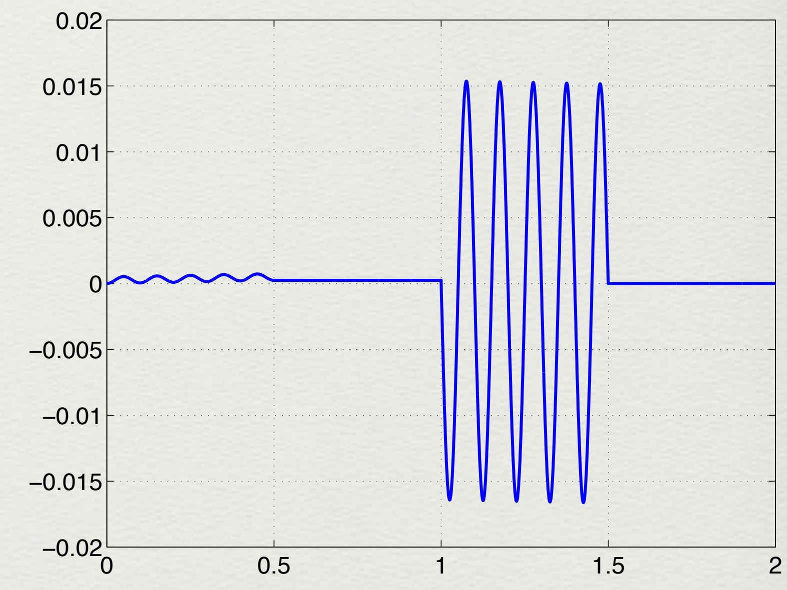
$$h(t) = e^{-\alpha t}$$

Exemples de convolution (4)

$e(t)$ $h(t)$ $s(t)$







$$h(t) = tRect_{2T}(t-T)$$

Commentaires sur la convolution

- Le produit de convolution peut s'interpréter comme une moyenne pondérée glissante et opère comme un « mélangeur » des 2 signaux.

- On retrouve dans le signal de sortie des caractéristiques du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle.

- L'allure du signal de sortie est difficile à prévoir a priori.

- Le support temporel du signal de sortie est égal à la somme des supports temporels du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle.

3 situations différentes

$$e(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow s(t)$$

- En général, on connait 2 des 3 signaux et on cherche à déterminer le 3ème. 3 situations :
- e(t) et h(t) connus, on cherche s(t) => Convolution
- e(t) et s(t) connus, on cherche h(t) => Identification
- h(t) et s(t) connus, on cherche e(t) =>Déconvolution