Université du Maine
Licence SPI 2è année
POLYCOPIÉ de TRAVAUX PRATIQUES

TRAVAUX PRATIQUES de TRAITEMENT du SIGNAL

Frédéric ABLITZER, Bruno BROUARD, Bertrand LIHOREAU, Balbine MAILLOU, Laurent SIMON

Le Mans, année 2014-2015

TP 3

Transformée de Fourier partie 1

Tous les modules de transformée de Fourier proposés dans ce TP sont représentés en échelle `lin-lin`. Cependant il peut être très intéressant dans certain cas de visualiser ces modules également en échelle lin-log (voir en `log-log`) en utilisant par exemple le menu `Edit` des figures Matlab. Le fait de modifier l'apparence d'une courbe peut permettre de faciliter la lecture d'un certain nombre de paramètres caractéristiques de cette courbe. Pensez à le faire systématiquement !

3.1 Transformée de Fourier et signaux de base

Objectif : Observer et interpréter la transformée de Fourier de signaux temporels réels connus.

3.1.1 La Transformée de Fourier et sa représentation

Cette première partie ne nécessite pas de lancer un programme. Il s'agit d'un préambule à la séance où vous devez démontrer quelques propriétés de base de la transformée de Fourier.

Q1. Pourquoi la Transformée de Fourier d'un signal réel est-elle complexe ? Exprimer le lien mathématique entre parties réelle et imaginaire et le module et la phase.

Q2. Quelle propriété de parité ou d'imparité vérifient les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier d'un signal réel ? Exploiter cette propriété pour établir les relations de parité et d'imparité du module et de la phase de la Transformée de Fourier.

3.1.2 Transformée de Fourier de l'exponentielle décroissante

Dans cette section, nous allons tracer la Transformée de Fourier du signal temporel suivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(-\alpha_1 t) \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Utiliser maintenant le programme **ex3_1.m** pour visualiser la Transformée de Fourier .

Q3. Observer les courbes obtenues pour $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = 100$ et $\alpha_1 = 10000$.

Q4. Comment fait-on pour retrouver le paramètre α_1 sur l'axe des abscisses dans le domaine temporel ?

Q5. Afficher le module du spectre en échelle `log-log`. Que constatez-vous ?

Q6. Après avoir calculé $|X(F)|$, comment peut-on retrouver le paramètre α_1 dans le domaine fréquentiel sur l'axe des ordonnées ?

Q7. Afficher le module en dB. En estimant la bande passante à -3 dB du spectre, comment peut-on retrouver le paramètre α_1 dans le domaine fréquentiel sur l'axe des abscisses ?

Q8. Qualitativement, quelle relation existe t-il entre le support temporel et le support fréquentiel d'un signal ?

3.1.3 Transformée de Fourier, décalage temporel et atténuation

Soit le signal $x(t) = \cos(2\pi F_0 t)$ retardé de Δt tel que

$$x_1(t) = \cos(2\pi F_0(t - \Delta t))$$

Q9. Exprimer la variation de phase en fonction de ce décalage temporel. Cette variation de phase dépend-elle de la fréquence F_0 ?

À partir du signal temporel

$$x(t) = \exp(-\alpha_1 t) \text{ pour } t \geq 0,$$

le programme **ex3_2.m** génère le signal $x_1(t) = A\ x(t - \Delta t)$ où $A \leq 1$ et $\Delta t \geq 0$ et affiche sa Transformée de Fourier. Les paramètres Δt et A sont modifiables.

Par commodité de représentation des données, en traitement du signal, le tracé de la phase est souvent *enroulé*, c'est-à-dire borné entre les valeurs [-π,+π]. Le programme permet d'observer les 2 types de représentation : *phase enroulée* et *phase déroulée*. La représentation *déroulée* est fidèle à l'expression mathématique.

Q10. Observer l'influence des paramètres A et Δt sur le module de la transformée de Fourier du signal ?

Q11. Exprimer $\Phi_{x_1}(F)$ en fonction de $\Phi_x(F)$. Quelle est l'influence des paramètres A et Δt sur la phase de la transformée de Fourier du signal ?

Q12. À partir du tracé *déroulé* de la phase, déduire la valeur de Δt.

3.1.4 Transformée de Fourier d'une somme de 2 signaux

Objectif : À partir du programme **ex3_3.m**, observer et interpréter la transformée de Fourier de la somme de 2 signaux temporels réels connus.

Le signal étudié $x_2(t)$ se compose d'une exponentielle décroissante d'amplitude unité et d'une seconde exponentielle décroissante, d'amplitude A, décalée de Δt et de même facteur de décroissance α.

Q13. Donner l'expression du signal.

Q14. Donner un exemple d'interprétation physique d'un tel signal ?

Q15. En vous basant sur le module de la TF de l'exponentielle décroissante (3.1.2) et celui de la TF de l'exponentielle décroissante retardée (3.1.3), le module de la TF du signal $x_2(t)$ est-il la somme des modules. Pourquoi ?

Q16. Vous pouvez constater sur le module de la TF du signal $x_2(t)$ la présence régulière de « creux ». Modifier les valeurs des paramètres A et Δt pour estimer l'effet de chacun de ces paramètres sur ces creux (leur profondeur, leurs positions absolues, leur écart fréquentiel). Finalement à quoi sont dû ces creux ?

3.1.5 Transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire

Objectif : A partir du programme **ex3_4.m**, observer et interpréter la transformée de Fourier du signal rectangle $x_3(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$.

Q17. Donner l'expression de $X_3(F)$.

Q18. Commenter l'allure de la phase de $X_3(F)$.

Q19. Estimer la largeur du lobe principal présenté par le module de la transformée de Fourier, en fonction de la durée T du signal rectangle.

Q20. Estimer la largeur des autres lobes présentés par le module de la transformée de Fourier, en fonction de la durée T du signal rectangle.

Q21. Vers quelle fonction tend $|X_3(F)|$ lorsque T tend vers 0 ?

Q22. Vers quelle fonction tend $|X_3(F)|$ lorsque T tend vers ∞ ?

Q23. Estimer la bande-passante à -3 dB du spectre en amplitude.

Q24. Estimer l'atténuation en dB entre le lobe principal et les lobes latéraux.

3.1.6 Transformée de Fourier du cosinus fenêtré

Objectif : À partir du programme **ex3_5.m**, observer et interpréter la transformée de Fourier d'un cosinus fenêtré par un signal rectangle. Le signal se nomme $x_4(t)$ dans la suite.

Préambule :

Q25.	À l'aide de la transformée de Fourier inverse, déterminer le signal temporel ayant $\delta(F-F_0)$ comme spectre.
Q26.	Même question si le spectre est $\delta(F+F_0)$.
Q27.	Même question si le spectre est $\delta(F+F_0)+\delta(F-F_0)$.
Q28.	En déduire la transformée de Fourier de $\cos(2\pi F_0 t)$.

Un des paramètres d'entrée du programme est la durée du signal Rectangle exprimée en multiple de la période du cosinus ($T = nT_0$).

Questions :

Q29.	Donner l'expression mathématique de $x_4(t)$.
Q30.	Fixer $F_0 = 50$ Hz et $n = 5$. Observer l'allure du module du spectre $\lvert X_4(F)\rvert$.
Q31.	Exprimer sans calcul $X_4(F)$ en fonction de $X_3(F)$ et de la TF de $\cos(2\pi F_0 t)$.
Q32.	Quelle valeur de n choisir pour que $\lvert X_4(F)\rvert$ se rapproche du spectre de $\cos(2\pi F_0 t)$?
Q33.	Fixer $F_0 = 50$ Hz et $n = 1$ puis $n = 1.5$. Où est positionné le maximum de $\lvert X_4(F)\rvert$ dans les deux cas ? Donner une explication à ce phénomène.

3.2 Transformée de Fourier et opérations de base

3.2.1 Filtrage passe-bas

Objectif : À partir du programme **ex3_6.m**, observer l'impact du filtrage passe-bas dans le domaine fréquentiel.

L'utilisateur sélectionne un fichier audio $x_5(t)$ qui est appliqué à l'entrée d'un système caractérisé par une réponse impulsionnelle $h(t)$. La réponse impulsionnelle est le signal $x(t)$ de la partie 3.1.2. L'utilisateur fixe le paramètre α. La réponse (ou sortie) du système est notée $y_5(t)$.

Q34.	Donner la relation qui relie $x_5(t)$, $h(t)$ et $y_5(t)$.
Q35.	Charger un signal audio et fixer une valeur pour α. Observer l'allure de $\lvert Y_5(F)\rvert$. Expliquer l'impact du filtrage sur le signal de sortie.
Q36.	Écouter le signal de sortie. La perception du signal est-elle cohérente avec l'allure de $\lvert Y_5(F)\rvert$.
Q37.	Refaire la même étude en faisant varier la valeur de α.
Q38.	Exprimer $Y_5(F)$ en fonction de $X_5(F)$ et de $H(F)$ (où $H(F)$ est la TF de $h(t)$).

3.2.2 Filtrage passe-bande

Objectif : À partir du programme **ex3_7.m**, observer l'impact du filtrage passe-bande dans le domaine fréquentiel.

L'utilisateur sélectionne un fichier audio $x_6(t)$ qui est appliqué à l'entrée d'un système caractérisé par une réponse impulsionnelle $h_2(t)$. L'utilisateur fixe le paramètre α et la fréquence centrale F_0 du filtre. La réponse (ou sortie) du système est notée $y_6(t)$.

Q39. En vous basant sur les résultats du paragraphe 3.1.6, comment modifier la réponse impulsionnelle du système du paragraphe 3.2.1 pour que le nouveau système opère un filtrage passe-bande ?

Q40. Charger un signal audio et fixer une valeur pour α et F_0. Observer l'allure de $|Y_6(F)|$. Expliquer l'impact du filtrage sur le signal de sortie.

Q41. Écouter le signal de sortie. La perception du signal est-elle cohérente avec l'allure de $|Y_6(F)|$.

Q42. Refaire la même étude en faisant varier la valeur de α.

Q43. Exprimer $Y_6(F)$ en fonction de $X_6(F)$ et de $H_2(F)$ (où $H_2(F)$ est la TF de $h_2(t)$).