Université du Maine
Licence Mention SPI, parcours Acoustique et Informatique.
L2
Année 2014-2015.
Auteurs : Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Traitement du signal
Exercices du cours "Série de Fourier"

---

1 Signal créneau (1)

Soit le signal périodique $x_1(t)$ de la figure 1.

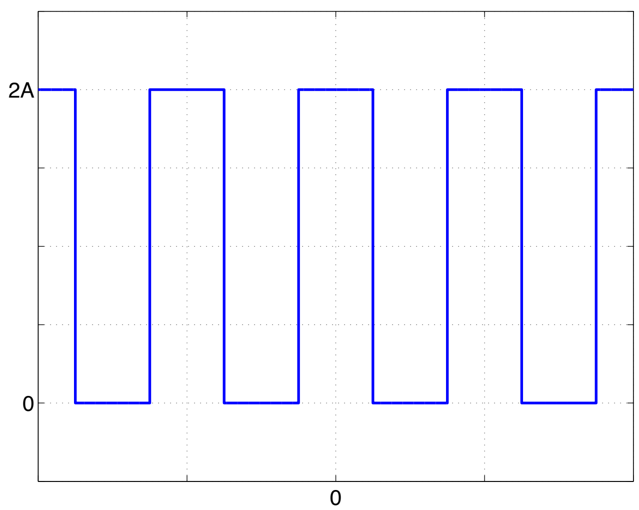

FIGURE 1 – $x_1(t)$

1. Définir le signal (un signal périodique n'a besoin d'être défini que sur une période).
$$x_1(t) = \begin{array}{ll} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{2}, \\ 2A & -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4}, \\ 0 & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}. \end{array}$$
2. Déterminer les coefficients C_n de la série de Fourier.

Par définition :

$$C_n^1 = \frac{1}{T}\int_T x_1(t)e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt. \tag{1}$$

Si $n = 0$, $C_0^1 = \frac{1}{T}\int_T x_1(t)dt = A$.

Si $n \neq 0$:

$C_n^1 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/4}^{T/4} 2Ae^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

$C_n^1 = \frac{2A}{T}\left[\frac{-T}{i2\pi n}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{iA}{\pi n}\left[e^{-i\frac{n\pi}{2}} - e^{i\frac{n\pi}{2}}\right]$.

D'où :

$$C_n^1 = \frac{2A}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}). \tag{2}$$

2 Signal créneau (2)

Soit le signal périodique $x_2(t)$ de la figure 2.

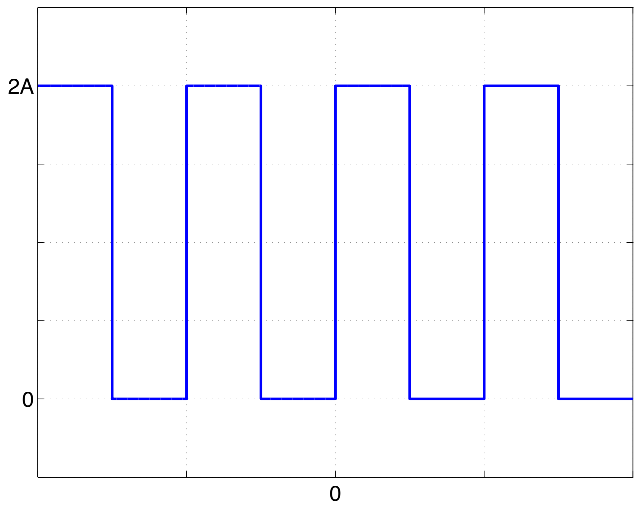

FIGURE 2 – $x_2(t)$

1. Définir le signal.
   $x_2(t) = \begin{cases} 2A & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$
2. Déterminer les coefficients C_n de la série de Fourier. Si $n = 0$, $C_0^2 = \frac{1}{T}\int_T x_2(t)dt = A$.
   Si $n \neq 0$:
   $C_n^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T/2} 2Ae^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

$C_n^2 = \frac{2A}{T}\left[\frac{-T}{i2\pi n}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_0^{T/2} = \frac{iA}{n\pi}\left[e^{-in\pi} - 1\right]$
$C_n^2 = \frac{iA}{n\pi}e^{-i\frac{n\pi}{2}}\left[e^{-i\frac{n\pi}{2}} - e^{i\frac{n\pi}{2}}\right]$
D'où :

$$C_n^2 = \frac{2A}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})e^{-i\frac{n\pi}{2}}. \qquad (3)$$

3. Exprimer le signal $x_2(t)$ en fonction de $x_1(t)$.
   Le signal $x_2(t)$ est le même que $x_1(t)$ mais décalé de $T/4$: $x_2(t) = x_1(t - T/4)$
4. Comparer les coefficients de Fourier des 2 signaux.
   Les coefficents ont les mêmes valeurs en module mais pas en phase : c'est une propriété de la série de Fourier pour les signaux décalés temporellement.

3 Signal créneau (3)

Soit le signal périodique $x_3(t)$ de la figure 3.

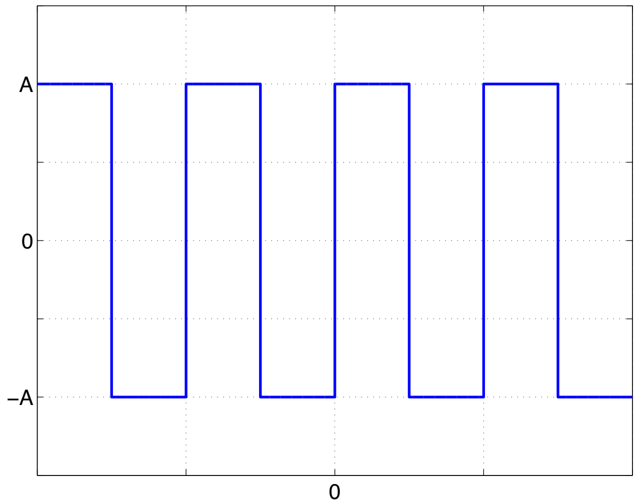

FIGURE 3 – $x_3(t)$

1. Définir le signal.
   $x_2(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ -A & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$
2. Déterminer les coefficients C_n de la série de Fourier.
   Si $n = 0$, $C_0^3 = \frac{1}{T}\int_T x_3(t)dt = 0$.
   Si $n \neq 0$:
   $C_n^3 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} Ae^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt + \int_{T/2}^{T} -Ae^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt\right)$

$C_n^3 = \frac{iA}{2n\pi}\left(\left[e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_0^{T/2} - \left[e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_{T/2}^{T}\right) = \frac{iA}{2n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1 - e^{-i2n\pi} + e^{-in\pi}\right)$.
$C_n^3 = \frac{iA}{n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right) = \frac{iA}{n\pi}e^{i\frac{n\pi}{2}}\left(e^{-i\frac{n\pi}{2}} - e^{i\frac{n\pi}{2}}\right)$. D'où :

$$C_n^3 = \frac{2A}{n\pi}e^{i\frac{n\pi}{2}} \tag{4}$$

3. Exprimer le signal $x_3(t)$ en fonction de $x_1(t)$.
   $x_3(t) = x_2(t) - A = x_1(t - T/4) - A$
4. Comparer les coefficients de Fourier des 2 signaux. Les coefficients de la série de Fourier des signaux $x_3(t)$ et $x_2(t)$ sont les mêmes hormis le premier terme ($n = 0$) qui représente la valeur moyenne (ou offset).

4 Signaux triangle et dent de scie

Soient les signaux périodiques $x_4(t)$ et $x_5(t)$ des figures 4 et 5.

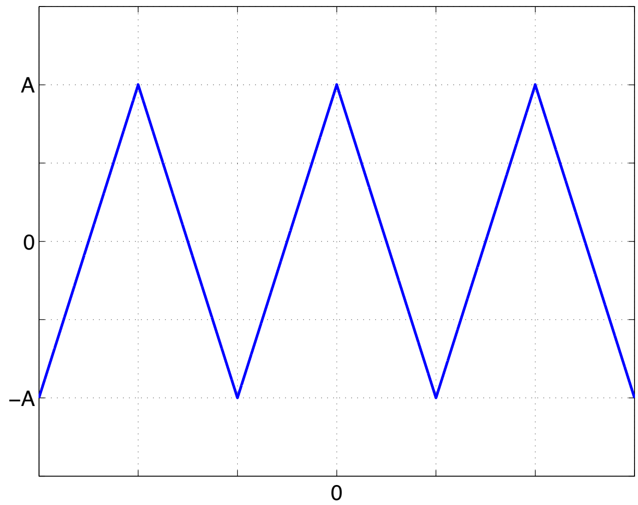

FIGURE 4 – $x_4(t)$

1. Définir les signaux.
   $$x_4(t) = \begin{cases} \frac{4At}{T} + A & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ -\frac{4At}{T} + A & 0 < t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$
   $$x_5(t) = \frac{2At}{T} - A \quad 0 < t < T,$$
2. Déterminer les coefficients C_n de leurs séries de Fourier. Pour cela, utiliser la technique d'intégration par parties.
   Intégration par parties $=>$ $\int U'V = [UV] - \int UV'$. Dans les calculs suivants, U' est l'exponentielle et V la fonction affine.

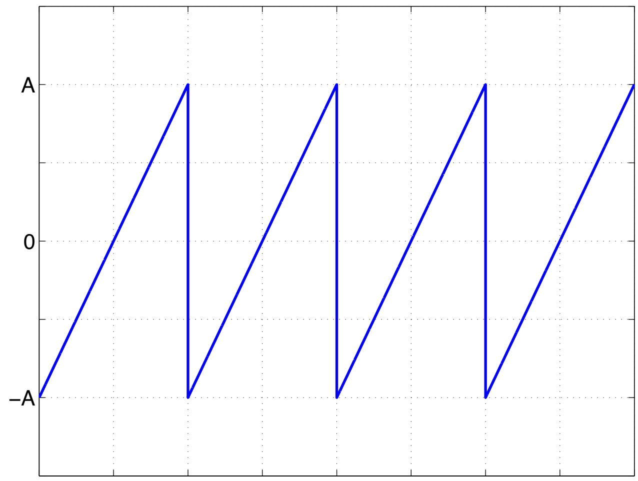

FIGURE 5 – $x_5(t)$

$C_n^4 = \frac{A}{T}\left(\int\limits_{-T/2}^{0}\left[\frac{4t}{T}+1\right]e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt + \int\limits_{0}^{T/2}\left[\frac{-4t}{T}+1\right]e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt\right).$

On pose :

$I_1 = \int\limits_{-T/2}^{0}\left[\frac{4t}{T}+1\right]e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt,$

$I_2 = \int\limits_{0}^{T/2}\left[\frac{-4t}{T}+1\right]e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

En utilisant la technique d'intégration par partie, on a :

$I_1 = \left[\left(\frac{4t}{T}+1\right)\frac{iT}{2n\pi}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_{-T/2}^{0} - \int\limits_{-T/2}^{0}\frac{2i}{n\pi}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

Après calcul sans difficulté :

$I_1 = \frac{iT}{2n\pi}\left[1+e^{in\pi}\right] + \frac{T}{n^2\pi^2}\left[1-e^{in\pi}\right].$

Avec la même technique, il vient :

$I_2 = \frac{-iT}{2n\pi}\left[1+e^{-in\pi}\right] - \frac{T}{n^2\pi^2}\left[e^{-in\pi}-1\right].$

Au final :

$$C_n^4 = \frac{2A}{n^2\pi^2}\left(1-\cos(n\pi)\right). \tag{5}$$

Pour $x_5(t)$:

$C_n^5 = \frac{A}{T}\int\limits_{0}^{T}\left(\frac{2t}{T}-1\right)e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

$C_n^5 = \frac{A}{T}\left[\left(\frac{2t}{T}-1\right)\frac{iT}{2n\pi}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}\right]_0^T - \frac{A}{T}\int\limits_{0}^{T}\frac{i}{n\pi}e^{-i2\pi\frac{nt}{T}}dt$

Après calcul (ne pas oublier que $e^{-i2n\pi} = 1, \forall n$:

$$C_n^5 = \frac{iA}{n\pi} = \frac{A}{n\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} \tag{6}$$

3. Comparer les coefficients de Fourier des signaux $x_1(t)$ à $x_5(t)$.

   On peut faire les commentaires suivants :
   - Les signaux Rectangle sont construits avec les harmoniques impaires. Leur amplitude évolue selon $1/n$.
   - Le signal Triangle est également construit avec les harmoniques impairs mais leur amplitude évolue en $1/n^2$.
   - Le signal dents de scie se construit avec toutes les harmoniques. Leur amplitude évolue selon $1/n$.
   - La reconstruction du signal Triangle sera donc satisfaisante avec un nombre limité d'harmoniques.