COURS N°6 PYTHON

L2 MATHÉMATIQUES

Calcul d'erreurs

Vue pour impression

ZÉRO D'UNE FONCTION

- Nous allons voir trois méthodes afin de trouver des approximations des solutions d'une équation du type $f(x) = 0$
- Nous verrons aussi la notion de calcul d'erreur pour chacune des 3 méthodes.

LA DICHOTOMIE

- Le principe de la dichotomie repose sur le théorème des valeurs intermédiaires :

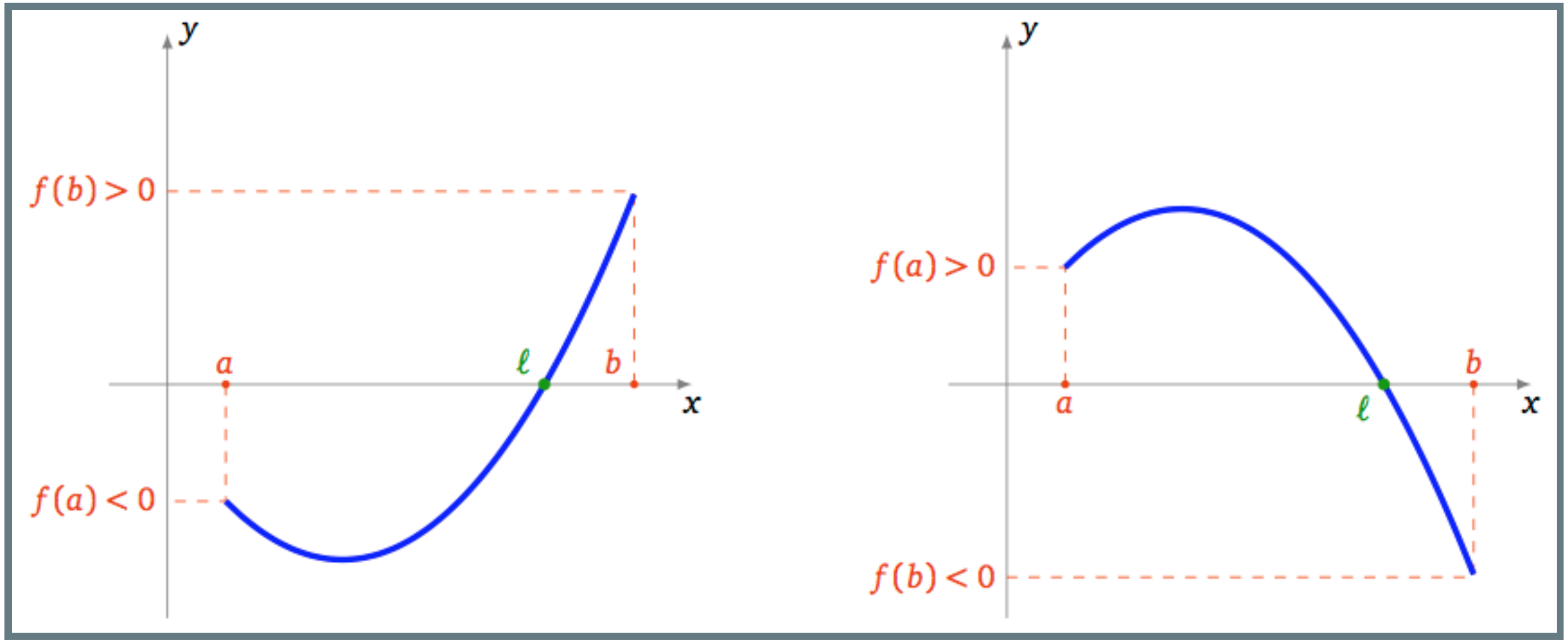
> **Théorème 1.**
> *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*
>
> $$\boxed{\text{Si } f(a) \cdot f(b) \leqslant 0, \text{ alors il existe } \ell \in [a, b] \text{ tel que } f(\ell) = 0.}$$

- $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul).
- L'hypothèse de continuité est essentiel

LA DICHOTOMIE

Théorème 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment.*

$$\boxed{\text{Si } f(a)\cdot f(b) \leqslant 0, \text{ alors il existe } \ell \in [a,b] \text{ tel que } f(\ell) = 0.}$$



LA DICHOTOMIE

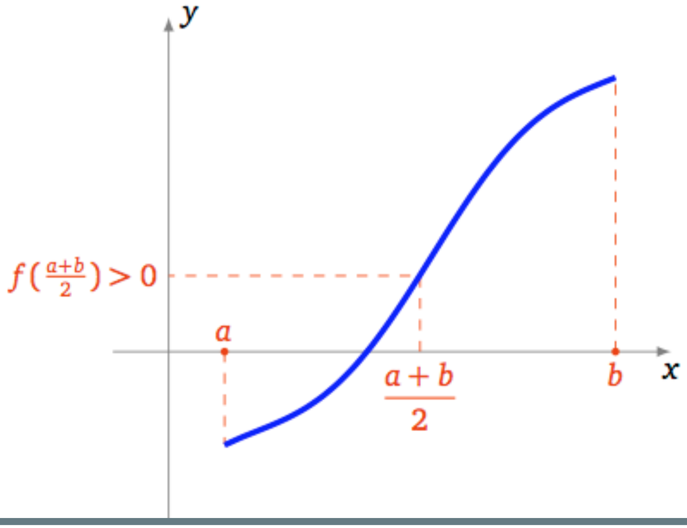
- Pour trouver une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$, il s'agit d'appliquer ce théorème sur un intervalle suffisamment petit.
- Nous verrons que cela permet d'obtenir l solution de $f(x)$ comme la limite d'une suite
- Nous allons construire une suite d'intervalles dont la longueur tend vers 0, contenant chacun une soution de l'équation $f(x) = 0$.

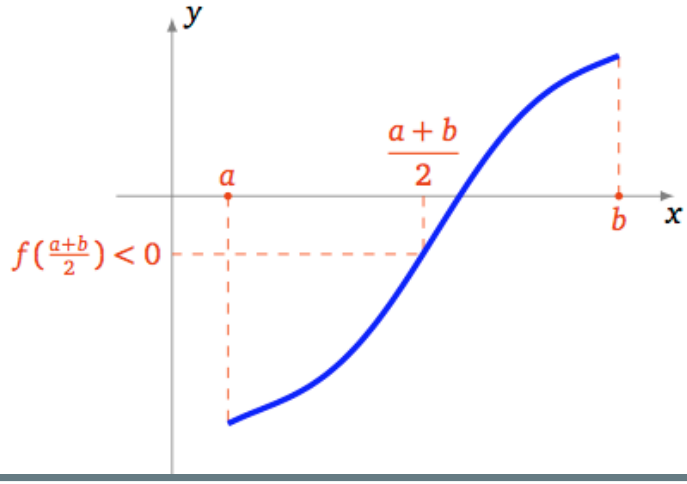
LA DICHOTOMIE

- On part de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$, et $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$
- Première étape : on regarde le signe de la valeur de la fonction f appliquée au point milieu $\frac{a+b}{2}$
  - Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = 0$
  - Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$, il existe $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$ tel que $f(c) = 0$

LA DICHOTOMIE

- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = 0$.
- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$, cela implique que $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) \leqslant 0$, et alors il existe $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$ tel que $f(c) = 0$.





LA DICHOTOMIE

- On va itérer à nouveau pour diviser l'intervalle en deux.

- **Au rang 0 :**
  On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Il existe une solution x_0 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.

- **Au rang 1 :**
  — Si $f(a_0) \cdot f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
  — sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.

- ...

- **Au rang** n **:** supposons construit un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et contenant une solution x_n de l'équation $(f(x) = 0)$. Alors :
  — Si $f(a_n) \cdot f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
  — sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_{n+1} de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

LA DICHOTOMIE

À chaque étape on a

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n.$$

On arrête le processus dès que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ est inférieur à la précision souhaitée.

- (a_n) est une suite croissante, (b_n) un suite décroissante, et $(b_n - a_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$
- Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc elles admettent une même limite. D'après le théorème des gendarmes, c'est aussi la limite l de la suite x_n
- La continuité de f montre que $f(l) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
- Donc les suites a_n et b_n tendent toutes les deux vers l, qui est une solution de l'équation $f(x) = 0$

LA DICHOTOMIE : CALCUL DE L'ERREUR

La méthode de dichotomie a l'énorme avantage de fournir un encadrement d'une solution ℓ de l'équation $(f(x)=0)$. Il est donc facile d'avoir une majoration de l'erreur. En effet, à chaque étape, la taille l'intervalle contenant ℓ est divisée par 2. Au départ, on sait que $\ell \in [a,b]$ (de longueur $b-a$) ; puis $\ell \in [a_1,b_1]$ (de longueur $\frac{b-a}{2}$) ; puis $\ell \in [a_2,b_2]$ (de longueur $\frac{b-a}{4}$) ; ... ; $[a_n,b_n]$ étant de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.
Si, par exemple, on souhaite obtenir une approximation de ℓ à 10^{-N} près, comme on sait que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, on obtient $|\ell - a_n| \leqslant |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$. Donc pour avoir $|\ell - a_n| \leqslant 10^{-N}$, il suffit de choisir n tel que $\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N}$.
Nous allons utiliser le logarithme décimal :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N} &\iff (b-a)10^N \leqslant 2^n \\
&\iff \log(b-a) + \log(10^N) \leqslant \log(2^n) \\
&\iff \log(b-a) + N \leqslant n \log 2 \\
&\iff n \geqslant \frac{N + \log(b-a)}{\log 2}
\end{aligned}$$

LA DICHOTOMIE : CALCUL DE L'ERREUR

Sachant $\log 2 = 0,301\dots$, si par exemple $b - a \leqslant 1$, voici le nombre d'itérations suffisantes pour avoir une précision de 10^{-N} (ce qui correspond, à peu près, à N chiffres exacts après la virgule).

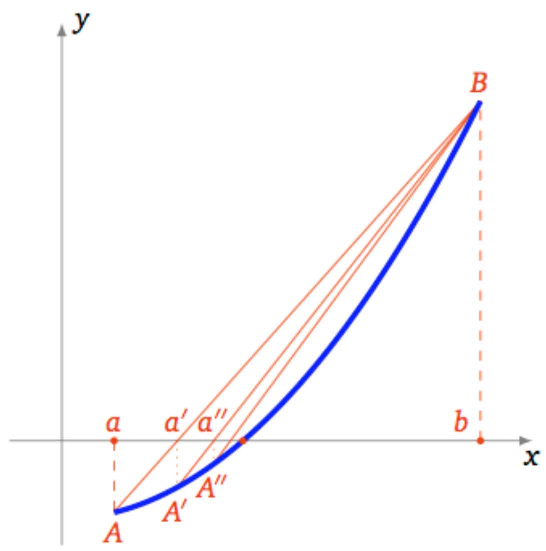
10^{-10} ($\sim$ 10 décimales)	34 itérations
10^{-100} ($\sim$ 100 décimales)	333 itérations
10^{-1000} ($\sim$ 1000 décimales)	3322 itérations

Il faut entre 3 et 4 itérations supplémentaires pour obtenir une nouvelle décimale.

Remarque.
En toute rigueur il ne faut pas confondre précision et nombre de décimales exactes, par exemple $0,999$ est une approximation de $1,000$ à 10^{-3} près, mais aucune décimale après la virgule n'est exacte. En pratique, c'est la précision qui est la plus importante, mais il est plus frappant de parler du nombre de décimales exactes.

LA MÉTHODE DE LA SÉCANTE

L'idée de la méthode de la sécante est très simple : pour une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$, et vérifiant $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Si le segment reste au-dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la ***sécante***. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a', b]$ pour obtenir une valeur a''.



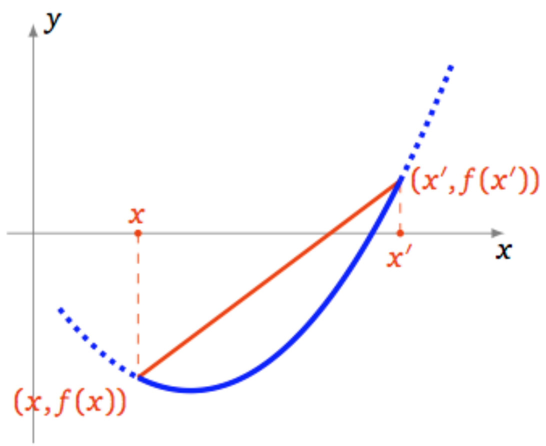
LA MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Proposition 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$. Alors la suite définie par

$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de $(f(x) = 0)$.

L'hypothèse f *convexe* signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a,b]$ la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f.



LA MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Démonstration. 1. Justifions d'abord la construction de la suite récurrente.

L'équation de la droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$$

Cette droite intersecte l'axe des abscisses en $(a', 0)$ qui vérifie donc $0 = (a'-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$, donc $a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$.

2. Croissance de (a_n).

Montrons par récurrence que $f(a_n) \leqslant 0$. C'est vrai au rang 0 car $f(a_0) = f(a) \leqslant 0$ par hypothèse. Supposons vraie l'hypothèse au rang n. Si $a_{n+1} < a_n$ (un cas qui s'avérera *a posteriori* jamais réalisé), alors comme f est strictement croissante, on a $f(a_{n+1}) < f(a_n)$, et en particulier $f(a_{n+1}) \leqslant 0$. Sinon $a_{n+1} \geqslant a_n$. Comme f est convexe : la sécante entre $(a_n, f(a_n))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus du graphe de f. En particulier le point $(a_{n+1}, 0)$ (qui est sur cette sécante par définition a_{n+1}) est au-dessus du point $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$, et donc $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ aussi dans ce cas, ce qui conclut la récurrence.

Comme $f(a_n) \leqslant 0$ et f est croissante, alors par la formule $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$, on obtient que $a_{n+1} \geqslant a_n$.

LA MÉTHODE DE LA SÉCANTE

3. Convergence de (a_n).

La suite (a_n) est croissante et majorée par b, donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité $f(a_n) \to f(\ell)$. Comme pour tout n, $f(a_n) \leqslant 0$, on en déduit que $f(\ell) \leqslant 0$. En particulier, comme on suppose $f(b) > 0$, on a $\ell < b$. Comme $a_n \to \ell$, $a_{n+1} \to \ell$, $f(a_n) \to f(\ell)$, l'égalité $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = \ell - \frac{b-\ell}{f(b)-f(\ell)} f(\ell)$, ce qui implique $f(\ell) = 0$.

Conclusion : (a_n) converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

CALCUL DE L'ERREUR

La méthode de la sécante fournit l'encadrement $a_n \leqslant l \leqslant b$. Mais comme b est fixe cela ne donne pas d'information exploitable pour $|l - a_n|$. Voici une façon générale d'estimer l'erreur, à l'aide du théorème des accroissements finis.

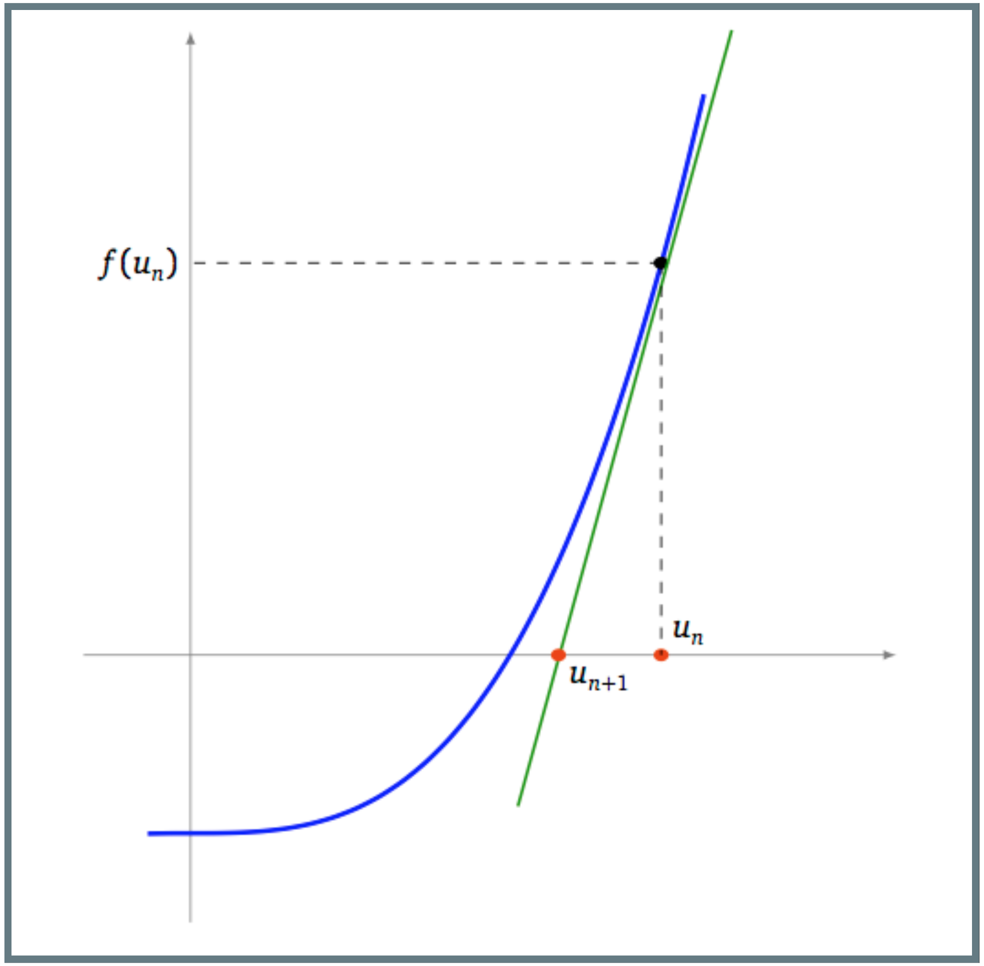
Proposition 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ tel que $f(\ell) = 0$. S'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \geqslant m$ alors

$$|x - \ell| \leqslant \frac{|f(x)|}{m} \qquad \text{pour tout } x \in I.$$

Démonstration. Par l'inégalité des accroissement finis entre x et ℓ : $|f(x) - f(\ell)| \geqslant m|x - \ell|$ mais $f(\ell) = 0$, d'où la majoration. □

LA MÉTHODE DE NEWTON

- Il s'agit de remplacer la sécante de la méthode précédente par la tangente.



LA MÉTHODE DE NEWTON

Partons d'une fonction dérivable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et d'un point $u_0 \in [a,b]$. On appelle $(u_1, 0)$ l'intersection de la tangente au graphe de f en $(u_0, f(u_0))$ avec l'axe des abscisses. Si $u_1 \in [a,b]$ alors on recommence l'opération avec la tangente au point d'abscisse u_1. Ce processus conduit à la définition d'une suite récurrente :

$$u_0 \in [a,b] \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Démonstration. En effet la tangente au point d'abscisse u_n a pour équation : $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. Donc le point $(x, 0)$ appartenant à la tangente (et à l'axe des abscisses) vérifie $0 = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. D'où $x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. □

CALCUL DE L'ERREUR

- Erreur pour $\sqrt{10}$

Proposition 4. *1. Soit k tel que $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$. Alors pour tout $n \geqslant 1$:*

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

2. Pour $a = 10$, $u_0 = 4$, on a :

$$u_n - \sqrt{10} \leqslant 8\left(\frac{1}{24}\right)^{2^{n-1}}$$

Admirez la puissance de la méthode de Newton : 11 itérations donnent déjà 1000 décimales exactes après la virgule. Cette rapidité de convergence se justifie grâce au calcul de l'erreur : la précision est multipliée par 2 à chaque étape, donc à chaque itération le nombre de décimales exactes double !

10^{-10} ($\sim$ 10 décimales)	4 itérations
10^{-100} ($\sim$ 100 décimales)	8 itérations
10^{-1000} ($\sim$ 1000 décimales)	11 itérations

DÉMONSTRATION

Démonstration. 1. Dans la preuve de la proposition 3, nous avons vu l'égalité :

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \text{ donc } (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

Ainsi comme $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n - \sqrt{a})^2 \times \frac{1}{u_{n+1} + \sqrt{a}} \times \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leqslant (u_n - \sqrt{a})^2 \times \frac{1}{2\sqrt{a}} \times \frac{1}{4} \cdot (1+1)^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$$

Si k vérifie $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$, nous allons en déduire par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, la formule

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

C'est vrai pour $n = 1$. Supposons la formule vraie au rang n, alors :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 = 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

La formule est donc vrai au rang suivant.

2. Pour $a = 10$ avec $u_0 = 4$ on a $u_1 = 3,25$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$ alors $u_1 - \sqrt{10} \leqslant u_1 - 3 \leqslant \frac{1}{4}$. On fixe donc $k = \frac{1}{4}$. Toujours par l'encadrement $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$, la formule obtenue précédemment devient

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2 \cdot 4\left(\frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot 3}\right)^{2^{n-1}} = 8\left(\frac{1}{24}\right)^{2^{n-1}}.$$

ALGORITHME

- Calculer $\sqrt{a}$, avec n le nombre d'itérations.

```
def racine_carre(a,n):
    u=4 # N'importe qu'elle valeur > 0
    for i in range(n):
        u = 0.5*(u+a/u)
    return u
```

RÉSULTAT

En utilisant le module `decimal` le calcul de u_n pour $n = 11$ donne 1000 décimales de $\sqrt{10}$:

3,

1622776601683793319988935444327185337195551393252 1 6826857504852792594438639238221344248108379300295 1
8734728415284005514854885603045388001469051959670 0 1539033449216571792599406591501534741133394841240 8
5316929577090471576461044369257879062037808609941 8 2837171154840632855299911859682456420332696160469 1
3143361289497918902665295436126761787813500613881 8 6278580463683134952478031143769334671973819513185 6
7840323124179540221830804587284461460025357757970 2 8286440290244079778960345439891633492226526120677 9
2651676031048436697793756926155720500369894909469 4 2185000735834884464388273110928910904234805423565 3
4039072740197865437259396417260013069900009557844 6 3109626790694418336130181302894541703315807731626 3
8639519379370465476522063206368658719782204931242 6 0534541116093569798281324522970007988835237595853 2
8579251362964686511497675217123459559238039375625 1 2536985519495532509994703884399033646616547064723 4
9997961323434030218570521878366763457895107329828 7 5157945215771652139626324438399018484560935762602 0