Transformée de Fourier (4)

Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Licence SPI

Année universitaire 2014-2015

Sommaire

Sommaire

Principales raisons pour filtrer un signal $x(t)$

On filtre le signal $x(t)$ car

1. seule une partie du spectre de $x(t)$ nous intéresse (exemple : codage de la parole)
2. on cherche à supprimer une partie du spectre de $x(t)$ sans supprimer la partie intéressante (exemple : débruitage)
3. on cherche à séparer différentes sources présentes dans $x(t)$

Principales raisons pour filtrer un signal $x(t)$

On filtre le signal $x(t)$ car

1. seule une partie du spectre de $x(t)$ nous intéresse (exemple : codage de la parole)
2. on cherche à supprimer une partie du spectre de $x(t)$ sans supprimer la partie intéressante (exemple : débruitage)
3. on cherche à séparer différentes sources présentes dans $x(t)$

Des cas de filtrages "naturels"

Si on compare le signal source $x(t)$ avec le signal reçu $y(t)$,$y(t)$ peut être modélisé comme le filtrage de $x(t)$. Exemples :

1. communications (analogiques et numériques)
2. radar / sonar
3. spectre de lumière avant et après traversée de l'atmosphère
4. capteur
5. voix humaine modifiée par la présence d'un résonateur

Sommaire

Signal original et ses filtrées

Morceau de musique = James Brown

1. signal pleine bande
2. filtrage passe-bas ($F_c = 900$Hz)
3. filtrage passe-bande ($F_{c_1} = 1000$Hz et $F_{c_2} = 2500$Hz)
4. filtrage passe-haut ($F_c = 3000$Hz)

Rappels : SLIT dans le domaine temporel

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Figure: Système à temps continu.

Dans le domaine temporel, la relation entrée / SLIT / sortie s'écrit

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du SLIT

SLIT dans le domaine fréquentiel (1/5)

On montre que la TF de l'égalité

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

s'écrit

$$Y(F) = H(F) \cdot X(F)$$

où $H(F)$ est la TF de $h(t)$, appelée **réponse fréquentielle** du SLIT.

SLIT dans le domaine fréquentiel (2/5)

Démonstration

1. Par définition

$$Y(F) = \int_{(t)} y(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

2. En remplaçant $y(t)$ par le produit de convolution

$$Y(F) = \int_{(t)} \left(\int_{(\tau)} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi Ft} dt$$

3. En permutant les intégrales

$$Y(F) = \int_{(\tau)} h(\tau) \left(\int_{(t)} x(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt \right) d\tau$$

SLIT dans le domaine fréquentiel (3/5)

Démonstration (suite)

1. On connaît la TF de $x(t-\tau)$

$$Y(F) = \int_{(\tau)} h(\tau)\left(X(F)e^{-j2\pi F\tau}\right)d\tau$$

2. D'où

$$Y(F) = \left(\int_{(\tau)} h(\tau)e^{-j2\pi F\tau}d\tau\right)X(F)$$

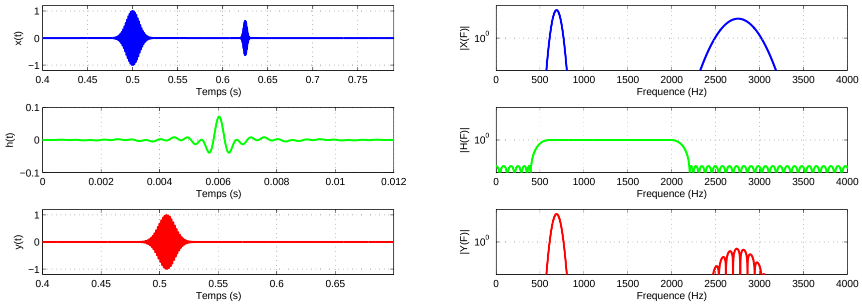
3. Soit enfin

$$Y(F) = H(F)\cdot X(F)$$

SLIT dans le domaine fréquentiel (4/5)

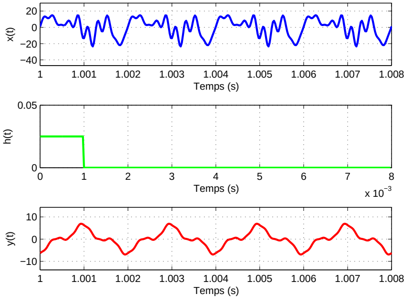
Domaine temporel

Domaine fréquentiel

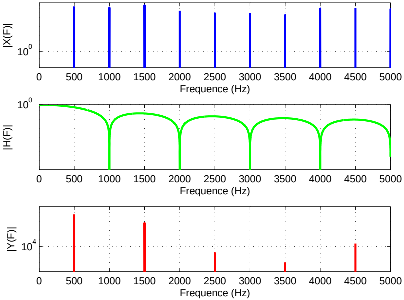


SLIT dans le domaine fréquentiel (5/5)

Domaine temporel



Domaine fréquentiel



Sommaire

Propagation suivant un seul chemin

On considère l'expérience suivante : une source émet le signal $x(t)$, le récepteur captant le signal $y(t) = \alpha_0 x(t - t_0)$. L'objectif est de calculer la réponse fréquentielle $H(F)$ du système de propagation.

Propagation suivant un seul chemin

On considère l'expérience suivante : une source émet le signal $x(t)$, le récepteur captant le signal $y(t) = \alpha_0 x(t - t_0)$. L'objectif est de calculer la réponse fréquentielle $H(F)$ du système de propagation.

On montre que

$$H(F) = \alpha_0 \cdot e^{-j2\pi F t_0}$$

Exercice : Calculer module et phase de $H(F)$.

Propagation suivant deux chemins

On considère l'expérience suivante : une source émet le signal $x(t)$, le récepteur captant le signal $y(t) = \alpha_1 x(t - t_1) + \alpha_2 x(t - t_2)$. L'objectif est de calculer la réponse fréquentielle $H(F)$ du système de propagation.

Propagation suivant deux chemins

On considère l'expérience suivante : une source émet le signal $x(t)$, le récepteur captant le signal $y(t) = \alpha_1 x(t - t_1) + \alpha_2 x(t - t_2)$. L'objectif est de calculer la réponse fréquentielle $H(F)$ du système de propagation.

On montre que

$$H(F) = \alpha_1 \cdot e^{-j2\pi F t_1} + \alpha_2 \cdot e^{-j2\pi F t_2}$$

<u>Exercice</u> : Calculer module et phase de $H(F)$.

Sommaire

Réponse impulsionnelle et réponse fréquentielle d'un filtre RC

Un filtre RC a une réponse impulsionnelle de la forme

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

pour $t \geq 0$, 0 pour $t < 0$, avec $\tau \equiv RC$ la constante de temps.

Exercice : Calculer $H(F)$.

Moyenneur par une fenêtre rectangulaire

On considère le système qui transforme le signal $x(t)$ en signal

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(t')dt'$$

<u>Exercice</u> :

1. Montrer que $y(t) = x(t) * h(t)$ avec $h(t) = \frac{1}{T}\text{Rect}_T(t - T/2)$
2. Calculer $H(F)$