Licence Mention L2 SPI, parcours Acoustique et Informatique.
Année 2015-2016.
Auteurs : Bruno Brouard, Bertrand Lihoreau, Laurent Simon

Traitement du signal
Exercices du cours "Signaux de base"

---

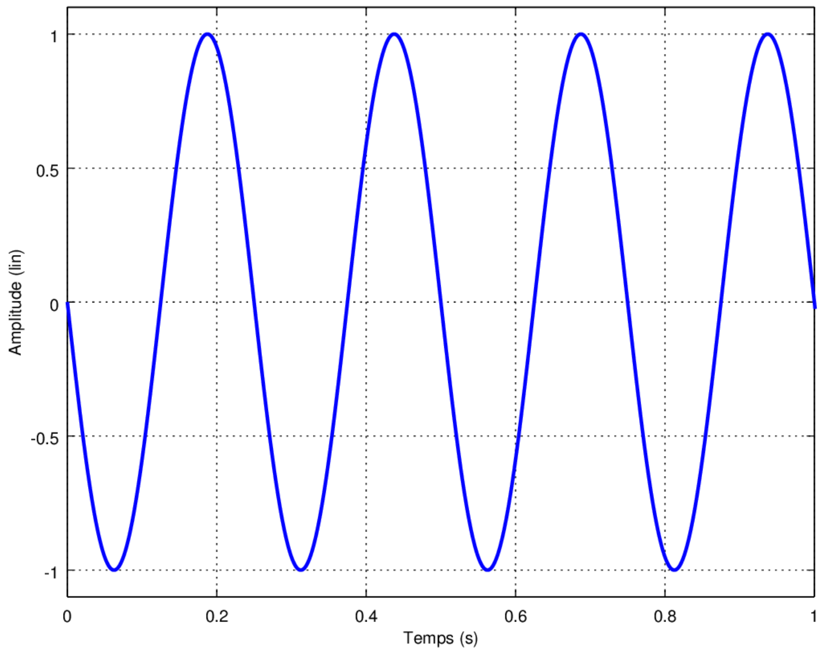
1 Sinus, cosinus

QCM : À partir de $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t)$, on génère $y(t) = x(t - t_0)$, où t_0 est un décalage temporel. En écrivant $y(t)$ sous la forme $y(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$, quelle relation mathématique existe entre t_0, F_0 et ϕ_0.

1. $\phi_0 = -\frac{t_0}{2\pi F_0}$
2. $\phi_0 = -t_0$
3. $\phi_0 = +t_0$
4. $\phi_0 = -2\pi F_0 t_0$
5. $\phi_0 = +2\pi F_0 t_0$
6. $\phi_0 = -\frac{2\pi F_0}{t_0}$
7. $\phi_0 = -\frac{\pi}{F_0 t_0}$

QCM : Un signal temporel $x(t)$ retardé de $t_0 = 0.5$ s s'écrit

1. $x(t + 0.5)$
2. $x(t + \delta(t_0))$
3. $x(t - 0.5)$
4. $\delta(t - 0.5)$



QCM : sur la figure précédente, le signal observé $x(t)$ s'écrit (il y a **3** réponses correctes)

a. $x(t) = \cos(8\pi t - \pi/2)$

b. $x(t) = \cos(8\pi t + \pi/2)$

c. $x(t) = \cos(2\pi t + \pi/2)$

d. $x(t) = \cos(2\pi t/4 + \pi/2)$

e. $x(t) = \cos(2\pi t/4 - \pi/2)$

f. $x(t) = -\sin(8\pi t)$

g. $x(t) = \sin(8\pi t + \pi/2)$

h. $x(t) = \sin(8\pi t - \pi)$

QCM : Un signal de la forme $x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$, d'amplitude $A_0 = 1$, de période fondamentale $T_0 = 10$ ms et de phase $\phi_0 = -\pi/5$ est maximal pour la valeur suivante de t_0

1. $t_0 = -10$ ms
2. $t_0 = 10$ ms
3. $t_0 = 1$ ms
4. $t_0 = 11$ ms
5. $t_0 = -1$ ms

2 Fonction de Heaviside

FIGURE A

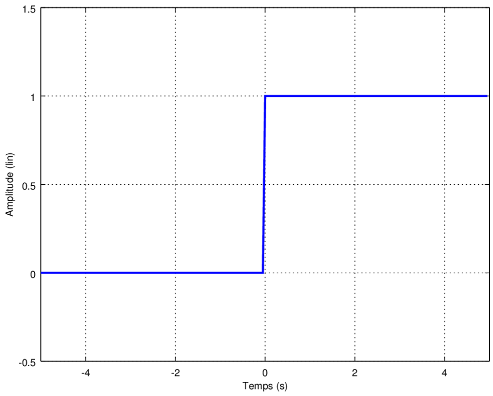


FIGURE B

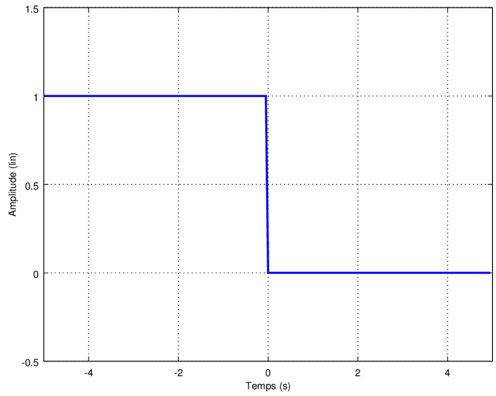


FIGURE C

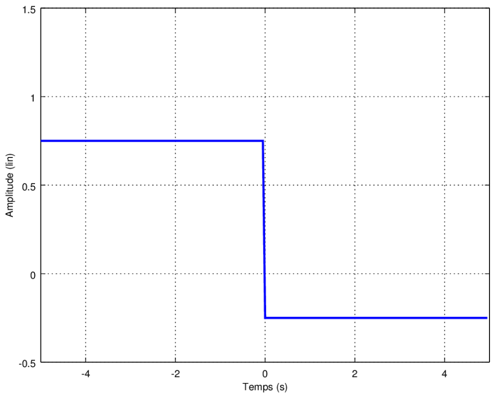


FIGURE D

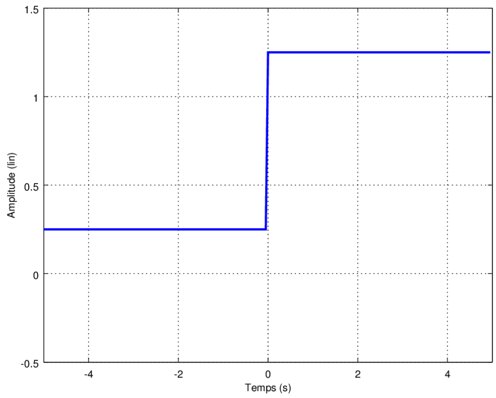


FIGURE E

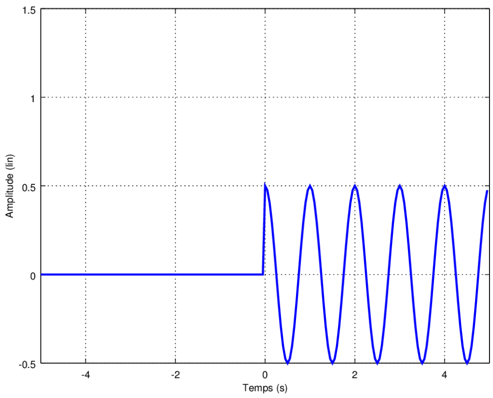


FIGURE F

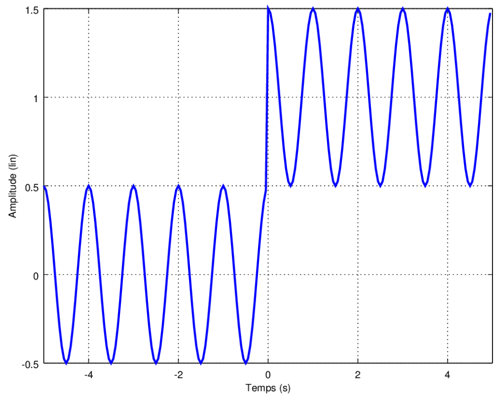


FIGURE G

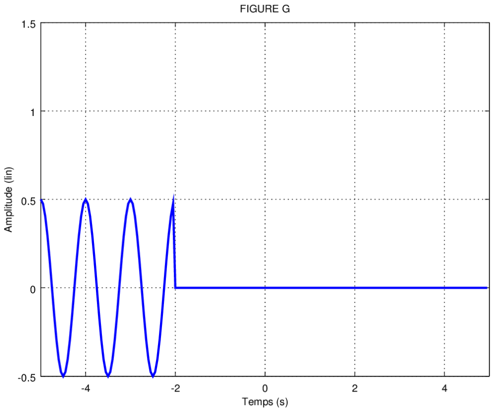
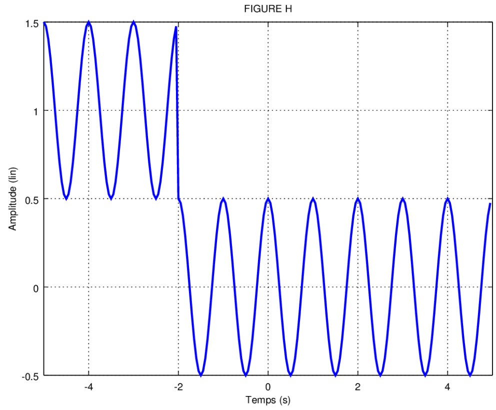


FIGURE H



QCM : sur les figures précédentes, identifiez chaque signal observé aux propositions suivantes

1. $y = \mathcal{H}(t) + 0.25$
2. $y = \mathcal{H}(-t)$
3. $y = \mathcal{H}(t)$
4. $y = 0.5\cos(2\pi t) + \mathcal{H}(t)$
5. $y = 0.5\cos(2\pi t) + \mathcal{H}(-t-2)$
6. $y = 0.5\cos(2\pi t)\ \mathcal{H}(t)$
7. $y = \mathcal{H}(-t) - 0.25$
8. $y = 0.5\cos(2\pi t)\ \mathcal{H}(-t-2)$

3 Fenêtre rectangle

EXO : Exprimer la fenêtre Rectangle (allumage pendant une durée T puis extinction) en fonction de la fonction de Heaviside manipulée à l'exercice précédent.

EXO :Pour chacune des figures suivantes, donnez l'expression mathématique du signal observé à l'aide (entre autre) de la fonction Rectangle.

FIGURE A

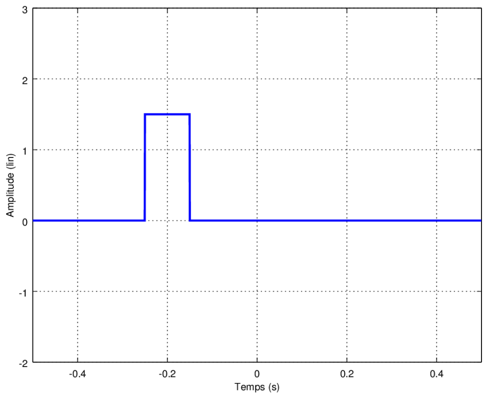


FIGURE B

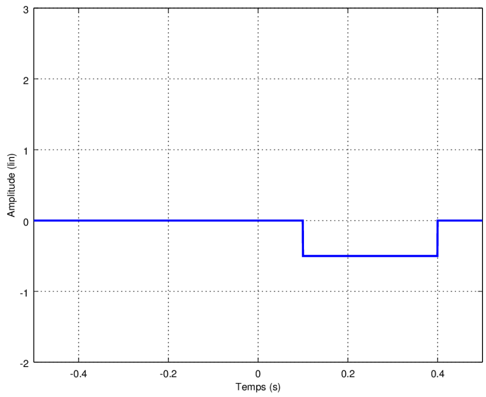


FIGURE C

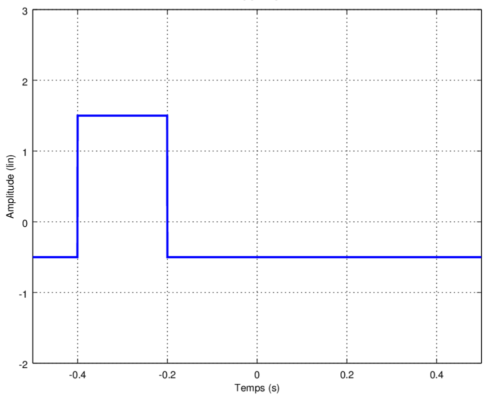
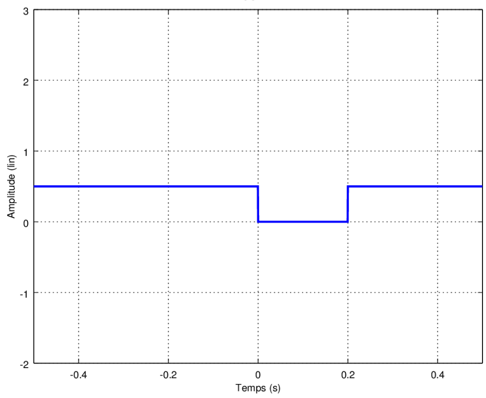
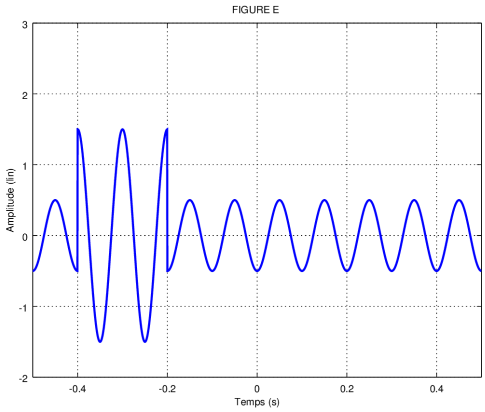
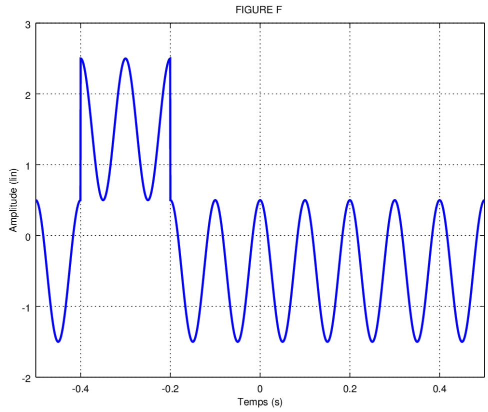
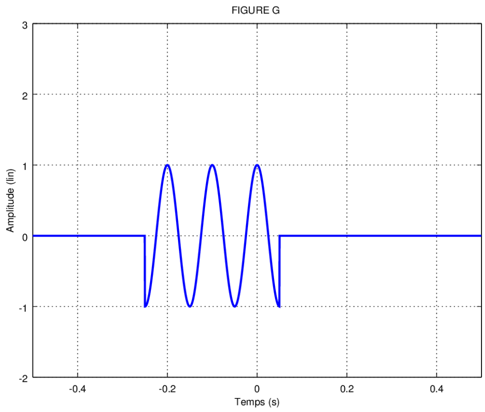


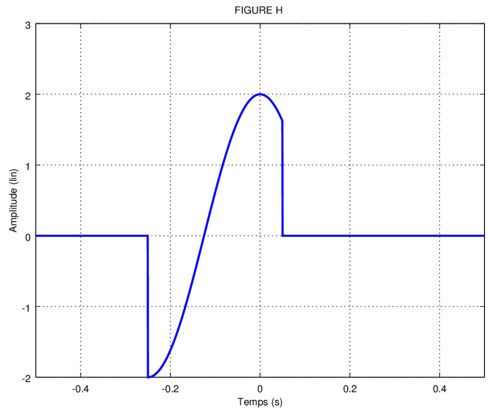
FIGURE D











QCM : On souhaite utiliser la fenêtre rectangulaire $w(t)$ pour fenêtrer 4 périodes d'un cosinus (de période T_0), à partir du temps t_d. Donner l'expression de $w(t)$ qui satisfait ces conditions.

1. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t - (t_d - 2T_0))$
2. $w(t) = \mathrm{Rect}_T(t)$
3. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t)$
4. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t - t_d)$
5. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t_d)$
6. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t - 4T_0)$
7. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t - (t_d + 2T_0))$
8. $w(t) = \mathrm{Rect}_{4T_0}(t - (t_d + 4T_0))$

4 « Fonction » de Dirac

Tracez les fonctions suivantes

1. $f_1(t) = \delta(t - 2.5)$
2. $f_2(t) = \delta(t + 4)$
3. $f_3(t) = -10\ \delta(t)$
4. $f_4(t) = \delta(-2 - t)$
5. $f_5(t) = 5\ \delta(3 - t)$
6. $f_6(t) = -2\ \delta(t - 2) \times \cos(2\pi t)$

5 Fonction exponentielle

CALCUL PRÉLIMINAIRE : Calculer l'équation de la droite tangente à $x(t) = \exp(-\alpha t)$ (exponentielle décroissante causale) en $t = 0$. Montrer que cette droite coupe l'axe des abscisses en $t_0 = 1/\alpha$.
Difficulté : $*(*)$.
Indications. La droite Δ tangente à $x(t)$ en $t = 0$ est d'équation $y(t) = at + b$, où a et b sont à déterminer. Pour déterminer ces paramètres,

1. Écrire la dérivée $\dot{x}(t)$ en $t = 0$.
2. En déduire $a = -\alpha$.
3. Considérer que le point $(0, 1)$ appartient à Δ et en déduire b.
4. En déduire $t_0 = 1/\alpha$.

QCM : On fenêtre un signal $x(t) = \exp(-\alpha t)$ de type exponentielle décroissante causale par une fenêtre rectangulaire de 1 s débutant en $t = 0.5$ s. Le résultat s'écrit

1. $\exp(-\alpha(t - 0.5))\ \mathrm{Rect}_1(t - 0.5)$
2. $\exp(-\alpha(t - 0.5))\ \mathrm{Rect}_1(t)$
3. $\exp(-\alpha t)\ \mathrm{Rect}_1(t - 0.5)$
4. $\exp(-\alpha t)\ \mathrm{Rect}_{0.5}(t - 0.5)$

— Dessinez ensuite cette fonction en choisissant $\alpha = 2$.
— On multiplie maintenant cette fonction par la fonction $\sin(10\pi t)$. Dessinez maintenant la fonction obtenue.

6 Sinus, cosinus et exponentielle complexe

CALCULS PRÉLIMINAIRES :
Montrer que

$$A_0 \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) = \frac{A_0}{2} e^{+j\phi_0} e^{j2\pi F_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j\phi_0} e^{-j2\pi F_0 t}$$

et que

$$A_0 \sin(2\pi F_0 t + \phi_0) = \frac{A_0}{2j} e^{+j\phi_0} e^{j2\pi F_0 t} - \frac{A_0}{2j} e^{-j\phi_0} e^{-j2\pi F_0 t}.$$

Difficulté : $*$
Indications. À partir de

$$e^{j\theta_0} = \cos(\theta_0) + j \sin(\theta_0),$$

1. écrire $e^{-j\theta_0}$.
2. En déduire $\cos(\theta_0)$ et de $\sin(\theta_0)$, en fonction de $e^{+j\theta_0}$ et de $e^{-j\theta_0}$.
3. Multiplier le résultat par A_0.
4. Remplacer θ_0 par $(2\pi F_0 t + \phi_0)$.

7 QCM : VRAI / FAUX

1. Si le signal temporel $x(t)$ est périodique, de période T_0, sa fréquence fondamentale est $F_0 = 1/T_0$.
2. On considère un signal $x(t)$ constitué de 10 périodes d'un cosinus de fréquence fondamentale $F_0 = 10$ Hz et nul en dehors de ces 10 périodes. Le signal $x(t)$ est périodique.
3. On considère un signal $x(t)$ constitué de 10 périodes d'un cosinus de fréquence fondamentale $F_0 = 10$ Hz et nul en dehors de ces 10 périodes. Le signal $x(t)$ a un support temporel de 1 s.
4. Un signal temporel $x(t)$ retardé de $t_0 = 0.5$ s s'écrit $x(t + 0.5)$:

8 Exercices sur les complexes

1. Soit le nombre complexe $z_1 = 3 + 2i$. Calculer le module et l'argument de z_1.
2. Soit le nombre complexe $z_2 = 4 - 3i$. Calculer le module et l'argument de $z_1 z_2$.
3. Soit le nombre complexe $z_3 = -1$. Calculer le module et l'argument de z_3.
4. Soit le nombre complexe $z_4 = -4 - 3i$. Dessiner z_4 dans le plan complexe. Calculer module et l'argument de z_4. L'argument calculé est-il cohérent avec celui du dessin ? Pourquoi ?
5. Soit la somme de deux nombres complexes $z = z_1 + z_2$. Les propriétés suivantes sont elles vraies ou fausses ?
   (a) $\Re(z) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$.
   (b) $\Im(z) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$.
   (c) $|z| = |z_1| + |z_2|$.
   (d) $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
6. Soit le produit de deux nombres complexes $z = z_1 z_2$. Les propriétés suivantes sont elles vraies ou fausses ?
   (a) $\Re(z) = \Re(z_1)\Re(z_2)$.
   (b) $\Im(z) = \Im(z_1)\Im(z_2)$.
   (c) $|z| = |z_1||z_2|$.
   (d) $\arg(z) = \arg(z_1)\arg(z_2)$.