IMT2210 — Ayudantía tipo prueba

Resumen conceptual

- **Sistemas lineales.** Resolver $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ equivale a buscar combinaciones lineales de las columnas de A que produzcan $\boldsymbol{b}$. Si A es cuadrada e invertible, el sistema tiene solución única $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- **Matrices elementales e inversa.** Una matriz es invertible si existe otra matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Las operaciones elementales sobre filas pueden representarse como multiplicaciones por matrices elementales. Si una secuencia de operaciones transforma A en I, entonces el producto de esas matrices elementales es A^{-1}.
- **Factorización LU.** Permite escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior unitaria y U triangular superior. Facilita resolver sistemas mediante sustitución progresiva y regresiva.
- **Subespacios vectoriales.** Un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es subespacio si está cerrado bajo suma y multiplicación por escalares. Ejemplos: $\mathrm{Col}(A)$ (espacio columna) y $\mathrm{Null}(A)$ (espacio nulo).
- **Independencia lineal y bases.** Un conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente si ninguna combinación lineal no trivial da el vector cero. Una base de un subespacio es un conjunto independiente que lo genera. La cantidad de vectores en una base es su **dimensión**.
- **Intersección y suma de subespacios.** Para subespacios W_1, W_2 de $\mathbb{R}^n$, se cumple

  $$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

  Geométricamente, la intersección corresponde al conjunto de vectores comunes a ambos espacios.
- **Teorema rango–nulidad.** Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

  $$\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Null}(A)) = n.$$

  Este resultado vincula el número de variables libres con el rango de la matriz.
- **Transformación lineal.** Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Una *transformación lineal* es una función

  $$T : V \to W$$

  que satisface, para todos los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

  $$\begin{aligned} T(0) &= 0 \\ T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}), \\ T(\lambda \boldsymbol{u}) &= \lambda T(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

  En otras palabras, T preserva la suma vectorial y la multiplicación por escalares.

- **Espacio columna (Columna de A):** Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El *espacio columna* de A, denotado por $\mathrm{Col}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A:

  $$\mathrm{Col}(A) = \{\, A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\} = \mathrm{span}\{\text{columnas de } A\}.$$

  Equivale a la imagen de la transformación lineal $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

  $dim(\mathrm{Col}(A)) = rank(A)$

- **Espacio fila (Fila de A):** El *espacio fila* de A, denotado por $\mathrm{Row}(A)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A:

  $$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\{\text{filas de } A\}.$$

  Representa todas las combinaciones lineales de las filas y tiene la misma dimensión que $\mathrm{Col}(A)$ (es decir, $\mathrm{rank}(A)$).

- **Espacio nulo (Núcleo de A):** El *espacio nulo* o *kernel* de A, denotado por $\mathrm{Null}(A)$, es el conjunto de vectores que son enviados al vector cero por A:

  $$\mathrm{Null}(A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

  Su dimensión se llama *nulidad* y cumple el teorema de rango–nulidad:

  $$\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Null}(A)) = n.$$

Ejercicio 1 — Transformaciones lineales e imagen

Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y,\ y + 3z,\ x - z).$$

1. Verifique si T es lineal.

2. Encuentre la matriz representante A de T en la base canónica.

3. Determine bases para $\mathrm{Null}(A)$ y $\mathrm{Col}(A)$, y calcule sus dimensiones.

4. Interprete geométricamente el efecto de T en $\mathbb{R}^3$ (inyectiva, sobreyectiva o ninguna).

Ejercicio 2 — Sistemas lineales (Gauss/Gauss–Jordan)

Considere el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Obtenga la **forma escalonada reducida por filas** (RREF) de la matriz aumentada $[A \mid \boldsymbol{b}]$.

2. Indique el **rango** de A y **clasifique** el sistema (solución única, infinitas o ninguna).

3. Escriba la **solución general** (en forma vectorial o paramétrica, según corresponda).

4. Determine explícitamente una base de $\mathrm{Col}(A)$ y de $\mathrm{Row}(A)$ a partir de la RREF e indique sus dimensiones.

Ejercicio 3 — Subespacios y combinaciones lineales

Considere los vectores en $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 2, 1).$$

1. Determine si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.

2. Encuentre una base de $W = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ y su dimensión.

3. Determine si $(1, 1, 1) \in W$.

Ejercicio 4 — Propiedades de matrices invertibles

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. Si $AB = AC$, entonces $B = C$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Si A es invertible, entonces $\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

4. Si A es invertible, entonces $\mathrm{Row}(A) = \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 5 — Intersección y suma de subespacios

Sea $W_1 = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $W_2 = \text{span}\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$, ambos subespacios de $\mathbb{R}^3$.

1. Determine una base para $W_1 \cap W_2$ (puede plantearlo igualando representaciones con parámetros).

2. Calcule $\dim(W_1 + W_2)$ usando la fórmula de dimensiones:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

3. Interprete geométricamente W_1 y W_2 (recta/plano), y describa su suma.