Guía de Práctica: Límites de Sucesiones

Resumen Teórico y Tips

1. **Dividir por la mayor potencia de n**: Ideal para fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{3n^2+1}{2n^2-n} = \frac{3+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{3}{2}$$

2. **Racionalización**: Si aparece una raíz en una resta, multiplicar por el conjugado. Ejemplo:

$$\sqrt{n^2+2n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

3. **Factorización dentro de la raíz**:

$$\sqrt{n^2+an} = n\sqrt{1+\frac{a}{n}}$$

4. **Crecimiento comparativo (jerarquía)**:

$$\text{Constantes} < \ln n < n^a < a^n < n!$$

5. **Límites conocidos**:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e, \quad \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$$

6. **Operaciones válidas**: Si $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, entonces:

$$\lim(a_n+b_n) = A+B, \quad \lim(a_n b_n) = AB, \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

7. **Límites que tienden a 0**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \to 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \to 0$$

8. **Logaritmos y exponenciales**:

$$\ln(n) \to \infty \quad \text{más lento que } n, \quad e^n \to \infty \quad \text{más rápido que } n^k$$

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1

Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{6n^2-2n+1} = \frac{1}{2}$$

Solución: Dividimos numerador y denominador por n^2, esto también se conoce como multiplicar por un 1 conveniente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n^2}}{6-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2

Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+7n} - 2n\right)$$

Solución: Primero factorizamos dentro de la raíz usando que $\sqrt{n^2(\cdots)} = n\sqrt{\cdots}$:

$$\sqrt{4n^2+7n} = n\sqrt{4+\frac{7}{n}}$$

Entonces, el límite original se puede reescribir como:

$$\lim_{n\to\infty} \left(n\sqrt{4+\frac{7}{n}} - 2n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{7}{n}} - 2\right)$$

Para poder resolver este límite, multiplicamos y dividimos por un 1 conveniente:

$$\frac{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}$$

Obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{7}{n}} - 2\right)\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}$$

Multiplicando numerador y denominador:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[(\sqrt{4+\frac{7}{n}}-2)(\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2)\right]}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}$$

Aplicamos la identidad $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[(4+\frac{7}{n})-4\right]}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}$$

Simplificamos el numerador:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{4+\frac{7}{n}}+2}$$

Ahora evaluamos el límite:

$$\frac{7}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{7}{2+2} = \frac{7}{4}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+7n}-2n\right) = \frac{7}{4}$$

Ejercicio 3

Sea $a_n = \frac{3n+2}{n+5}$. Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Solución: Dividimos numerador y denominador por n:

$$\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}} \to \frac{3}{1} = 3$$

Ejercicio 4

Sea $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$. Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

Solución: Multiplicamos por el conjugado:

$$\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

Factorizamos la raíz:

$$\sqrt{n^2+2n} = n\sqrt{1+\frac{2}{n}}$$

Entonces:

$$\lim = \frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \to \frac{2}{2} = 1$$

Ejercicio 5

Sean $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Calcule el límite de $a_n + b_n$ cuando $n \to \infty$.

Solución:

$$a_n + b_n = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n}$$

Para calcular el límite, analizamos cada término por separado:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n} \right) = 1 + 0 = 1$$

Respuesta: $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1$

Ejercicio 6

Considere la sucesión dada por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \geq 1.$$

(a) Demuestre que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

(b) Demuestre que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 2$.

(c) Demuestre que $a_n \leq 2$ para todo $n \geq 1$.

Solución:

(a) La afirmación es verdadera para $n = 1$. Si $a_n > 0$, entonces el lado derecho en la definición de a_{n+1} es claramente positivo.

(b) Sea $n \geq 2$. Como $a_{n-1} > 0$, podemos usar la desigualdad Promedio Aritmético - Promedio Geométrico:

$$2a_n = a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \geq 2\sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{2}{a_{n-1}}} = 2\sqrt{2}.$$

Esto demuestra lo pedido.

(c) La afirmación es evidentemente verdadera para $n = 1$ y $n = 2$.

Supongamos que $a_k \leq 2$ para algún $k \geq 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) &\leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{a_k}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

gracias a la parte (b). Luego,

$$a_{k+1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2.$$

La afirmación queda demostrada por inducción.

Ejercicio 7

Usando la definición de límite, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} = 3.$$

Solución: Dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar N tal que si $n > N$, entonces

$$|a_n - L| = \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1}$$

debe ser menor que ε. Notemos que

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{3n+2n}{n^2+n+1} = \frac{5n}{n^2+n+1} < \frac{5n}{n^2+n} = \frac{5}{n+1}$$

Imponiendo la condición a este último valor, vemos que

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{5}{\varepsilon} < n+1 \iff \frac{5}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Dado $a = \frac{5}{\varepsilon} - 1$, por el principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < N$. Entonces, si $n > N$, implica que

$$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n \iff \frac{5}{n+1} < \varepsilon.$$

Se sigue que

$$|a_n - L| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} < \frac{5}{n+1} < \varepsilon,$$

como queríamos probar.