



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
CENTRO ESTUDIANTIL LIC. INGENIERIA EN CIENCIA DE DATOS (CECID)
MAT1207- INTRODUCCIÓN A ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Guía Resumen

12 de junio de 2025

1º semestre 2025 - Amelie Ramirez

1. Definición

Un número complejo se escribe como:

$$z = a + bi \quad \text{donde } i^2 = -1$$

2. Operaciones algebraicas

Suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Resta

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplicación

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

División

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

3. Conjugado

$$\bar{z} = a - bi$$

Propiedades:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

4. BONUS Potencias de i (mod 4)

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

5. Forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ajuste según cuadrante:

Cuadrante	Condición	Ángulo θ
I	$a > 0, b > 0$	$\arctan(b/a)$
II	$a < 0, b > 0$	$\pi - \arctan(b/a)$
III	$a < 0, b < 0$	$\pi + \arctan(b/a)$
IV	$a > 0, b < 0$	$2\pi - \arctan(b/a)$

6. Propiedades de la forma polar

Sean $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

- **Multiplicación:**

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

- **División:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

- **Potencias (Teorema de Moivre):**

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

7. Raíces n-ésimas

Las n raíces de $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ son:

$$w_k = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

8. BONUS Fórmulas tipo $a^n \pm b^n$

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$

9. Teorema de raíces racionales (p/q)

Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, posibles raíces racionales son:

$$c = \frac{p}{q}$$

con p divisor de a_0 y q divisor de a_n

10. Teorema de raíces complejas

Si un polinomio tiene coeficientes reales, entonces:

Si $z = a + bi$ es raíz, también lo es $\bar{z} = a - bi$

11. Producto $(x - z)(x - \bar{z})$

Si $z = a + bi$, entonces:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

12. Teorema de factorización

Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n)$$

13. Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene **al menos una raíz compleja**.