Ejercicio Catedra

Escribiendo $z \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$, determine todas las soluciones, $\theta \in [0, 2\pi)$ de:

$$\frac{z^5 + \overline{z^5}}{2} = -32$$

Por definición de enunciado sabemos que tenemos un número complejo en forma polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Por Teorema de Moivre podemos reescribir z^5 como:

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$
$$\implies z^5 = r^5(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta))$$

Además, sabemos que la definición de conjugado es $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$. Entonces, al aplicarle Moivre, $\overline{z^5} = r^5(\cos(5\theta) - i\sin(5\theta))$.

Reemplazamos estos valores en el numerador:

$$r^5(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)) + r^5(\cos(5\theta) - i\sin(5\theta))$$

Multiplicamos los paréntesis:

$$r^5\cos(5\theta) + r^5 i\sin(5\theta) + r^5\cos(5\theta) - r^5 i\sin(5\theta)$$

Juntamos términos iguales:

$$r^5\cos(5\theta) + r^5\cos(5\theta) + r^5 i\sin(5\theta) - r^5 i\sin(5\theta)$$

Eliminamos términos:

$$2r^5\cos(5\theta)$$

Utilizamos esta reducción de términos para trabajar la fracción:

$$\frac{2r^5\cos(5\theta)}{2} = -32$$

Simplificamos:

$$r^5\cos(5\theta) = -32$$

Por enunciado sabemos que r es positivo, ya que $r \neq 0$, entonces $\cos(5\theta)$ debe ser -1 para que nuestro resultado sea -32.

Primero, despejaremos r utilizando $\cos(5\theta) = -1$:

$$r^5(-1) = -32$$
$$-r^5 = -32$$
$$r^5 = 32$$
$$r = 2$$

Como podemos visualizar, no podemos calcular por definición nuestro θ, porque aunque sabemos su módulo, no podemos deducir con exactitud nuestro a, b para calcular $\arctan(\frac{b}{a})$. Pero si usamos el círculo unitario, podemos concluir que para que $\cos(5\theta) = -1$, entonces 5θ (podríamos aplicar el Teorema de las raíces n-ésimas pero no es formal ya que no tenemos CIS) Si sabemos que $0 \leq \theta < 2\pi$ (por definición de enunciado), entonces:

$$5\theta = \pi + 2nk$$
$$\theta = \frac{\pi + 2nk}{5}$$

Comprobaremos todos los posibles valores de k:

- $K = 0$:
$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{5} = \frac{\pi}{5}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ cumple}$$

- $K = 1$:
$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{5} = \frac{3\pi}{5}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \text{ cumple}$$

- $K = 2$:
$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$
$$\cos(\pi) = -1 \text{ cumple}$$

- $K = 3$:
$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{5} = \frac{7\pi}{5}$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) \text{ cumple}$$

- $K = 4$:
$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 4}{5} = \frac{9\pi}{5}$$
$$\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) \text{ cumple}$$

- $K = 5$:

$$\theta = \frac{\pi + 2\pi \cdot 5}{5} = \frac{11\pi}{5}$$
$$\frac{11\pi}{5} > 2\pi \text{ no cumple}$$

Las soluciones que cumplen son $r = 2$ and $\theta = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$.

Ejercicio:

Calcular la potencia $(-1 - i)^{14}$

Desarrollo:

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, su forma polar se define como:

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

donde:

- $r = |z|$ es el módulo del número complejo
- $\theta = \arg(z)$ es el argumento (ángulo) de z

En este caso, tenemos:

$$z = -1 - i$$

1. Cálculo del módulo

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

2. Determinación del argumento

Sabemos que:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1)$$

El ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$, pero como z se encuentra en el tercer cuadrante (ambas partes son negativas), el argumento es:

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

3. Forma polar de z

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

4. Aplicación del Teorema de De Moivre

Sea $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, entonces:

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Aplicando este teorema a nuestro caso:

$$(-1-i)^{14} = (\sqrt{2})^{14}\left(\cos\left(14\cdot\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(14\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

Calculamos cada parte:

$$(\sqrt{2})^{14} = 2^7 = 128$$
$$14\cdot\frac{5\pi}{4} = \frac{70\pi}{4} = \frac{35\pi}{2}$$

Reducimos el ángulo módulo 2π:

$$\frac{35\pi}{2} = 17\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{35\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} \mod 2\pi$$

Por lo tanto:

$$(-1-i)^{14} = 128\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 128(0-i) = -128i$$

Respuesta final:

$$\boxed{(-1-i)^{14} = -128i}$$

Enunciado

Factoriza el siguiente polinomio y encuentra todas sus raíces complejas:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

Paso 1: Teorema Fundamental del Álgebra

El Teorema Fundamental del Álgebra dice que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas (contando multiplicidades).

Como $P(x)$ es de grado 4, entonces tiene **exactamente 4 raíces complejas**.

Paso 2: Buscar raíces racionales

Probamos con el Teorema de las raíces racionales. Los divisores de 4 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probamos:

$$\begin{aligned} P(1) &= 1+2+5+8+4 = 20 \quad &&\Rightarrow \text{No es raíz} \\ P(-1) &= 1-2+5-8+4 = 0 \quad &&\Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es raíz}} \end{aligned}$$

Dividimos $P(x)$ entre $(x+1)$ usando división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 \\ & & -1 & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x) = (x+1)(x^3+x^2+4x+4)$$

Paso 3: Factorizar el trinomio cúbico

Probamos nuevamente $x=-1$:

$$(-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = -1+1-4+4 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es otra raíz}}$$

División sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ & & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3+x^2+4x+4 = (x+1)(x^2+4)$$

Paso 4: Factorización completa

$$P(x) = (x+1)^2(x^2+4)$$

Paso 5: Raíces del polinomio

- $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ (raíz doble)
- $x^2+4=0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$

$$\boxed{\text{Raíces: } x = -1, -1, 2i, -2i}$$

Conclusión

Este polinomio tiene 4 raíces complejas (algunas reales, otras imaginarias), lo que confirma el **Teorema Fundamental del Álgebra**.