Ayudantía Introducción al Cálculo

Ejercicio 1

Usando la definición de límite, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2

Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+5} - n\right).$$

Ejercicio 3

Determine el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right).$$

Ejercicio 4

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

Sugerencia: Suponga lo contrario y deduzca una contradicción.

1 Soluciones

Solución 1

Sea $\epsilon > 0$. Queremos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumpla:

$$\left| \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon.$$

Desarrollamos la expresión:

$$\left| \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2 - (2n^2 + n + 1)}{2(2n^2 + n + 1)} \right| = \left| \frac{-n - 1}{2(2n^2 + n + 1)} \right|.$$

Ahora acotamos:

La expresión original en el denominador es:

$$2(2n^2 + n + 1).$$

Notamos que:

$$2(2n^2 + n + 1) > 4n^2 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Entonces el denominador es mayor que $4n^2$, lo que hace que:

$$\left| \frac{n + 1}{2(2n^2 + n + 1)} \right| < \frac{n + 1}{4n^2}.$$

Por ende lo acotamos con esta cota superior:

$$\left| \frac{-n - 1}{2(2n^2 + n + 1)} \right| < \frac{n + 1}{4n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{4n}.$$

Como $\frac{1+\frac{1}{n}}{4n} \to 0$, existe N tal que para todo $n > N$:

$$\frac{1 + \frac{1}{n}}{4n} < \epsilon.$$

Por lo tanto, se cumple la definición de límite, y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2}.$$

Solución 2

Queremos calcular:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n \right).$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}.$$

El numerador queda:

$$n^2+3n+5-n^2 = 3n+5.$$

Entonces:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}.$$

Factorizamos n arriba y abajo:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{5}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}.$$

Cuando $n \to \infty$, los términos con $1/n$ tienden a 0, así que:

$$= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right) = \frac{3}{2}.$$

Solución 3

Notemos que $\exp(2n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que la expresión está siempre bien definida. Tenemos que

$$\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = \ln(3n) - \ln(\exp(2n)) = \ln(3) + \ln(n) - 2n.$$

Como $\ln(n) \leq n-1$, tenemos que

$$\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = \ln(3) + \ln(n) - 2n \leq \ln(3) - 1 - n.$$

El lado derecho diverge a $-\infty$, así que el lado izquierdo también lo hará. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = -\infty.$$

Solución 4.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Supongamos por contradicción que $L < 0$. Si aplicamos la definición de límite para $\varepsilon = -L > 0$, obtendremos un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
& |a_n - L| < \varepsilon = -L \\
\iff \quad & -(-L) < a_n - L < -L \\
\iff \quad & L < a_n < L + (-L) = 0 \\
\iff \quad & 2L < a_n < 0.
\end{aligned}
$$

En particular, esto nos dice que $a_n < 0$ para todo $n > N$. Pero eso es absurdo, pues por hipótesis sabemos que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por contradicción, concluimos que $L \geq 0$.

Observación: El mismo argumento funciona para cualquier $\varepsilon \in (0, -L]$.