IMT2210 — Ayudantía tipo prueba

Resumen conceptual

- **Sistemas lineales.** Resolver $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ equivale a buscar combinaciones lineales de las columnas de A que produzcan $\boldsymbol{b}$. Si A es cuadrada e invertible, el sistema tiene solución única $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- **Matrices elementales e inversa.** Una matriz es invertible si existe otra matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Las operaciones elementales sobre filas pueden representarse como multiplicaciones por matrices elementales. Si una secuencia de operaciones transforma A en I, entonces el producto de esas matrices elementales es A^{-1}.
- **Factorización LU.** Permite escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior unitaria y U triangular superior. Facilita resolver sistemas mediante sustitución progresiva y regresiva.
- **Subespacios vectoriales.** Un conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es subespacio si está cerrado bajo suma y multiplicación por escalares. Ejemplos: $\mathrm{Col}(A)$ (espacio columna) y $\mathrm{Null}(A)$ (espacio nulo).
- **Independencia lineal y bases.** Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si ninguna combinación lineal no trivial da el vector cero. Una base de un subespacio es un conjunto independiente que lo genera. La cantidad de vectores en una base es su **dimensión**.
- **Intersección y suma de subespacios.** Para subespacios W_1, W_2 de $\mathbb{R}^n$, se cumple

  $$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

  Geométricamente, la intersección corresponde al conjunto de vectores comunes a ambos espacios.
- **Teorema rango–nulidad.** Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

  $$\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Null}(A)) = n.$$

  Este resultado vincula el número de variables libres con el rango de la matriz.
- **Transformación lineal.** Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Una *transformación lineal* es una función

  $$T : V \to W$$

  que satisface, para todos los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$,

  $$\begin{aligned} T(0) &= 0 \\ T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}), \\ T(\lambda\boldsymbol{u}) &= \lambda T(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

  En otras palabras, T preserva la suma vectorial y la multiplicación por escalares.

- **Espacio columna (Columna de A):** Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El *espacio columna* de A, denotado por $\mathrm{Col}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A:

$$\mathrm{Col}(A) = \{\, A\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\} = \mathrm{span}\{\text{columnas de } A\}.$$

  Equivale a la imagen de la transformación lineal $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

  $dim(\mathrm{Col}(A)) = rank(A)$

- **Espacio fila (Fila de A):** El *espacio fila* de A, denotado por $\mathrm{Row}(A)$, es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A:

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\{\text{filas de } A\}.$$

  Representa todas las combinaciones lineales de las filas y tiene la misma dimensión que $\mathrm{Col}(A)$ (es decir, $\mathrm{rank}(A)$).

- **Espacio nulo (Núcleo de A):** El *espacio nulo* o *kernel* de A, denotado por $\mathrm{Null}(A)$, es el conjunto de vectores que son enviados al vector cero por A:

$$\mathrm{Null}(A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

  Su dimensión se llama *nulidad* y cumple el teorema de rango–nulidad:

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Null}(A)) = n.$$

Ejercicio 1 — Transformaciones lineales e imagen

Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y,\ y + 3z,\ x - z)$.

1. Verifique si T es lineal.

2. Encuentre la matriz representante A de T.

3. Determine bases para $\mathrm{Null}(A)$ y $\mathrm{Col}(A)$ y sus dimensiones.

4. Clasifique (inyectiva/sobreyectiva).

Solución paso a paso.

1. Linealidad. Cada componente es combinación lineal de (x, y, z) sin término constante. Para todos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y λ:

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}), \qquad T(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T(\boldsymbol{u}).$$

2. Matriz. Imagen de los vectores canónicos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 1),\ \ T(0, 1, 0) = (2, 1, 0),\ \ T(0, 0, 1) = (0, 3, -1).$$

Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Núcleo e imagen. Calculemos $\det(A)$ (expansión por la 3ª columna):

Opción 1

$$\det(A) = 3\cdot(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3\cdot(-(-2)) - 1\cdot(1) = 3\cdot 2 - 1 = 5 \neq 0.$$

Como $\det(A) \neq 0$, A es invertible:

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(\mathrm{Null}(A)) = 0.$$

Opcion 2

$$\text{Resolvemos } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ con } \mathbf{x} = (x, y, z)^T$$

:

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ y + 3z = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación: x=z.

De la segunda: y=-3z.

Sustituyendo en la primera: $x + 2y = z + 2(-3z) = z - 6z = -5z = 0 \Rightarrow z = 0.$

Entonces x=0 y y=0.

Por tanto,

$$\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}, \qquad \dim(\mathrm{Null}(A)) = 0.$$

Las columnas de A son l.i., así que forman una base de $\mathrm{Col}(A)$:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (0, 3, -1)\}, \quad \dim(\mathrm{Col}(A)) = 3.$$

4. **Clasificación (inyectiva y sobreyectiva).** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con A invertible.

   Inyectiva: Si $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$ entonces $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Como A es invertible, $\mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}$, luego $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

   Sobreyectiva: Dado cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, tome $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Entonces $T(\mathbf{x}) = A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$, por lo que toda $\mathbf{b}$ tiene preimagen.

   Concluye que T es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) en $\mathbb{R}^3$.

□

Ejercicio 2 — Sistemas lineales (Gauss/Gauss–Jordan)

Considere el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

1. **RREF de $[A \,|\, \boldsymbol{b}]$.** Aplicamos Gauss–Jordan a la aumentada:

$$[A \,|\, \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

   Por lo tanto, la RREF es $[I_3 \,|\, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T]$.

2. **Rango y clasificación.** La RREF de A es I_3, por lo que

$$\mathrm{rank}(A) = 3.$$

   Como A es 3×3 y tiene rango 3, el sistema tiene **solución única** para todo $\boldsymbol{b}$.

3. **Solución general.** De la RREF se obtiene directamente

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4. **Bases de $\mathrm{Col}(A)$ y $\mathrm{Row}(A)$.**

   - Los *pivot columns* en la RREF son las columnas 1, 2 y 3; por el teorema de las columnas pivote, una base de $\mathrm{Col}(A)$ está dada por las **columnas originales** correspondientes:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \dim(\mathrm{Col}(A)) = 3.$$

     (Equivalentemente, al ser $\mathrm{rank}(A) = 3$, $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^3$.)

   - Una base de $\mathrm{Row}(A)$ se obtiene con las **filas no nulas** de la RREF (estándar):

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\{(1,0,0),\, (0,1,0),\, (0,0,1)\}, \qquad \dim(\mathrm{Row}(A)) = 3.$$

     (También podrías usar las tres filas originales, que son l.i. al tener rango 3.)

□

Ejercicio 3 — Subespacios y combinaciones lineales

En $\mathbb{R}^3$, considere

$$v_1 = (1,1,0), \quad v_2 = (0,1,1), \quad v_3 = (1,2,1).$$

1. ¿$\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.?

2. Base y dimensión de $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

3. ¿$(1,1,1) \in W$?

Solución paso a paso.

1. Note que

$$v_1 + v_2 = (1,1,0) + (0,1,1) = (1,2,1) = v_3.$$

Luego hay una combinación no trivial que da v_3, por lo tanto el conjunto es **dependiente**.

2. Como $v_3 = v_1 + v_2$, entonces

$$W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_1, v_2\}.$$

$\{v_1, v_2\}$ es l.i. (ningún múltiplo de v_1 da v_2), así que es una base. Conclusión: $\dim(W) = 2$ y una base es $\{v_1, v_2\}$.

3. Para ver si $(1,1,1) \in W$, resolvemos $av_1 + bv_2 = (1,1,1)$:

$$a(1,1,0) + b(0,1,1) = (a,\ a+b,\ b) = (1,1,1).$$

Sistema:

$$a = 1, \quad a + b = 1 \Rightarrow b = 0, \quad b = 1.$$

Contradicción (b no puede ser 0 y 1 a la vez). Luego $\boxed{(1,1,1) \notin W}$. $\square$

Ejercicio 4 — Propiedades de matrices invertibles

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Si $AB = AC$, demuestre que $B = C$.

2. Pruebe $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Si A es invertible, pruebe que $\text{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

4. Muestre que $\text{Row}(A) = \mathbb{R}^n$.

Solución paso a paso.

1. Multiplique a izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \ \Rightarrow\ (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \ \Rightarrow\ B = C.$$

2. Verificación directa:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I, \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I.$$

3. Si $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\text{Null}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

4. Como A es fila-equivalente a I_n (existen elementales E con $EA = I$), las filas de A son l.i. y, por ende, generan $\mathbb{R}^n$:

$$\dim(\text{Row}(A)) = \text{rank}(A) = n \ \Rightarrow\ \text{Row}(A) = \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Ejercicio 5 — Intersección y suma de subespacios

Sea $W_1 = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $W_2 = \text{span}\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

1. Encuentre una base para $W_1 \cap W_2$ (resolviendo por parámetros).

2. Calcule $\dim(W_1 + W_2)$ usando la fórmula de dimensiones.

3. Descripción geométrica de W_1 y W_2.

Solución paso a paso.

1. Sea $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$. Entonces existen a, b, c, d tales que:

$$\boldsymbol{x} = a(1,0,1) + b(0,1,1) = (a, b, a+b),$$

$$\boldsymbol{x} = c(1,1,0) + d(1,-1,0) = (c+d,\ c-d,\ 0).$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} a = c + d, \\ b = c - d, \\ a + b = 0. \end{cases}$$

De $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$. Sustituyendo en las dos primeras:

$$\begin{cases} a = c + d, \\ -a = c - d \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{(a)+(-a)}{2} = 0, \\ d = \frac{(a)-(-a)}{2} = a. \end{cases}$$

Así, $\boldsymbol{x} = (a, -a, 0) = a(1,-1,0)$. Entonces

$$W_1 \cap W_2 = \text{span}\{(1,-1,0)\}, \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1.$$

2. Como $\dim(W_1) = 2$ y $\dim(W_2) = 2$,

$$\dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

3. Ambos son planos en $\mathbb{R}^3$ que se cortan en la recta $\text{span}\{(1,-1,0)\}$. Su suma es todo $\mathbb{R}^3$. $\square$

Ejercicio Largo: Gauss Completo

$$[A\,|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 4R_2]{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{8}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[I_3 \,\middle|\, (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\right].$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$