Ejercicios de Números Complejos y Polinomios

Diego Parra

Ejercicio 1

Enunciado.

Dado el polinomio$P(x) = x^3 + (a+1)x^2 - ax - 2$, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $x = 1$ sea raíz doble del polinomio. Luego, encontrar las otras raíces reales o complejas.

Desarrollo. Si $x = 1$ es raíz doble, entonces:

$$P(1) = 0 \quad \text{y} \quad P'(1) = 0$$

Primero, evaluamos:

$$P(1) = 1^3 + (a+1)(1)^2 - a(1) - 2 = 1 + a + 1 - a - 2 = 0$$

Cumple la condición.

Ahora derivamos:

$$P'(x) = 3x^2 + 2(a+1)x - a$$

$$P'(1) = 3(1)^2 + 2(a+1)(1) - a = 3 + 2a + 2 - a = a + 5$$

Igualamos a cero:

$$a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5$$

Sustituimos en el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Factorizamos por raíz doble $x = 1$:

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)$$

Respuesta final. El valor de a es -5 y las raíces del polinomio son:

$$x = 1 \text{ (doble)}, \; x = 2$$

Ejercicio 2

Enunciado. Encuentre todas las raíces cúbicas de la unidad. Luego, determine un polinomio cuadrático con coeficientes reales tal que dos de sus raíces sean raíces cúbicas de la unidad.

Desarrollo. Buscamos las raíces de $w^3 = 1$. En forma polar:

$$1 = \text{cis}(0 + 2k\pi), \quad k = 0, 1, 2$$

Entonces:

$$\omega_0 = \text{cis}(0) = 1, \quad \omega_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \omega_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Las raíces son:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Queremos un polinomio cuadrático con raíces ω_1 y ω_2.

$$P(x) = (x - \omega_1)(x - \omega_2) = x^2 + x + 1$$

Respuesta final. Las raíces cúbicas de la unidad son:

$$1, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

El polinomio cuadrático con coeficientes reales es:

$$x^2 + x + 1$$

Ejercicio 3

Enunciado. Encuentre todas las raíces cúbicas de $w = -8$.

Desarrollo. Primero, llevamos $w = -8$ a forma polar. En el plano complejo:

$$|-8| = 8, \quad \arg(-8) = \pi \Rightarrow w = 8\text{cis}(\pi)$$

Aplicamos la fórmula de raíces cúbicas:

$$\sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{8}\text{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow \text{Raíces: } 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\ 2\text{cis}(\pi),\ 2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Respuesta final. Las raíces cúbicas de -8 son:

$$2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad 2\text{cis}(\pi), \quad 2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

Ejercicio 4

Enunciado. Encuentre todas las raíces cuartas de $w = 16i$

Desarrollo. Pasamos a forma polar:

$$|16i| = 16, \quad \arg(16i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w = 16\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Raíces cuartas:

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{16}\text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \text{Raíces: } 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$$

Respuesta final.

Las raíces cuartas de $16i$ son:

$$2\text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right), \quad 2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$$

Ejercicio 5

Enunciado. Usando el Teorema de De Moivre, calcula $(1+i)^8$, escribe el resultado de la forma $a + ib$.

Desarrollo:

Primero expresamos $z = 1 + i$ en forma polar.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Entonces:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicamos el Teorema de De Moivre:

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 \left[\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^4 \left[\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right] = 16(1 + i \cdot 0)$$

Respuesta final: $\boxed{16 + 0i}$

Ejercicio 6

Enunciado. Si $z = i \in \mathbb{C}$ es raíz de la ecuación

$$x^5 - x^4 - x + 1 = 0,$$

determina las otras raíces.

Desarrollo:

Sea $p(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Por el Teorema de las raíces complejas conjugadas, si i es raíz, entonces también lo es $-i$. Así, podemos factorizar:

$$p(x) = (x - i)(x + i)q(x) = (x^2 + 1)q(x)$$

Aplicamos la división sintética o algoritmo de la división para dividir $p(x)$ entre $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 - x + 1 \\ \hline x^5 - x^4 - x + 1 \\ -(x^5 + x^3) \\ \hline -x^4 - x^3 - x + 1 \\ +(x^4 + x^2) \\ \hline -x^3 + x^2 - x + 1 \\ +(x^3 - x) \\ \hline x^2 + 1 \\ -(x^2 + 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad : \quad x^2 + 1 = x^3 - x^2 - x + 1$$

Entonces, $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Buscamos las raíces racionales de $q(x)$. Por el teorema de las raíces racionales, probamos:

$$q(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \quad \text{y} \quad q(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

Por tanto, $x = 1$ y $x = -1$ son raíces. Entonces:

$$q(x) = (x - 1)(x + 1)r(x) = (x^2 - 1)r(x)$$

Dividimos $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ entre $x^2 - 1$:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 \\ \hline x^3 - x^2 - x + 1 \\ -(x^3 - x) \\ \hline -x^2 + 1 \\ +(x^2 - 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad : \quad x^2 - 1 = x - 1$$

Entonces, $r(x) = x - 1$, y podemos factorizar completamente:

$$p(x) = (x - i)(x + i)(x + 1)(x - 1)^2$$

Respuesta final: Las raíces de la ecuación son $\boxed{i, -i, -1, 1 \text{ (con multiplicidad 2)}}$