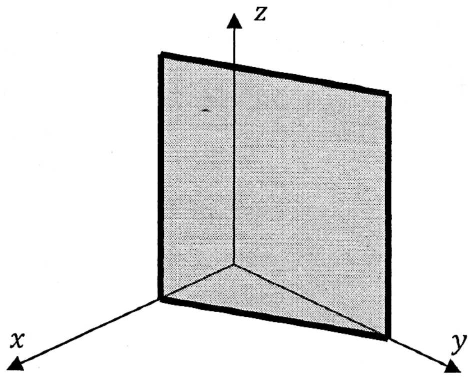
NOTA: Esta clase no tiene tarea para la semana que viene.

Mario

PLANOS PROYECTANTES
sobre los planos coordenados

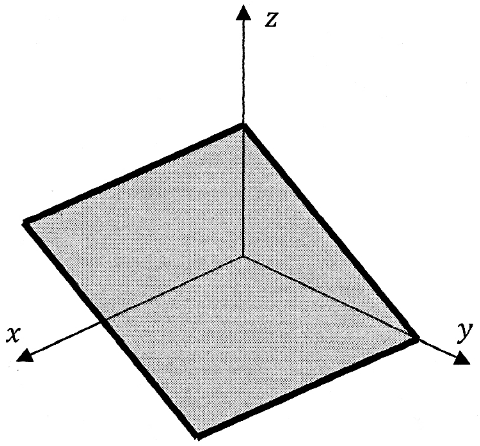
La ecuación de un plano PROYECTANTE sobre el plano $\boldsymbol{xy}$ es : $\boldsymbol{ax + by + d = 0}$ $\quad \forall z \in \mathbb{R}$

por ej: $\pi_1)$ $\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{24} = \mathbf{0}$



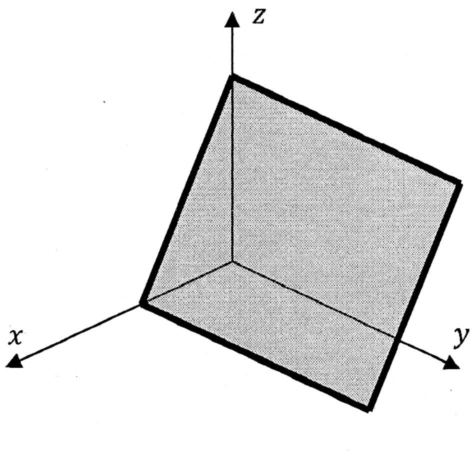
La ecuación de un plano PROYECTANTE sobre el plano $\boldsymbol{yz}$ es : $\boldsymbol{by + cz + d = 0}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

por ej: $\pi_2)$ $\mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{5}\boldsymbol{z} - \mathbf{30} = \mathbf{0}$



La ecuación de un plano PROYECTANTE sobre el plano $\boldsymbol{xz}$ es : $\boldsymbol{ax + cz + d = 0}$ $\quad \forall \Upsilon \in \mathbb{R}$

por ej: $\pi_3)$ $\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} - \mathbf{20} = \mathbf{0}$



1 Dada la recta $r) \begin{cases} \mathbf{2x+3y+z+12=0} \\ \mathbf{5x-2y+3z-15=0} \end{cases}$

obtener la ecuación del plano que la proyecta sobre el plano coordenado $\boldsymbol{xy}$ y las ecuaciones de dicha proyección.

---

debo eliminar z despejando de una ecuación y reemplazando en la otra

$\pi_1)\ 2x + 3y + z - 12 = 0$

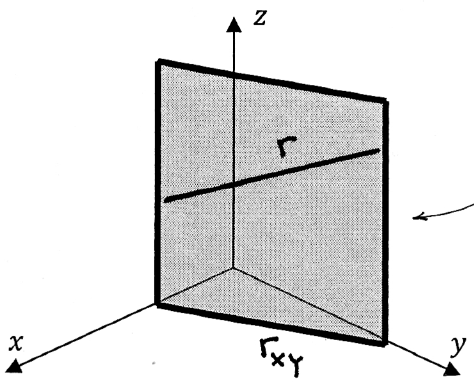
$z = -2x - 3y + 12$

$\pi_2)\ 5x - 2y + 3z - 15 = 0$

$5x - 2y + 3.(-2x - 3y + 12) - 15 = 0$

$5x - 2y - 6x - y + 36 - 15 = 0$

$-x - y + 21 = 0$



el plano proyectante es

$\pi_{xy})\ -x - y + 21 = 0$

la recta proyección es $r_{xy} \begin{cases} -x - y + 21 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

2 Dada la recta $s) \begin{cases} 4x + 3y + 5z - 1 = 0 \\ 2x - 4y + z - 5 = 0 \end{cases}$

obtener la ecuación del plano que la proyecta sobre el plano coordenado yz y las ecuaciones de dicha proyección.

---

debo eliminar X despejando de una ecuación y reemplazando en la otra

$\pi_1)\ 4X + 3Y + 5Z - 1 = 0$

$$4X = -3Y - 5Z + 1$$

$$X = \frac{-3Y - 5Z + 1}{4}$$

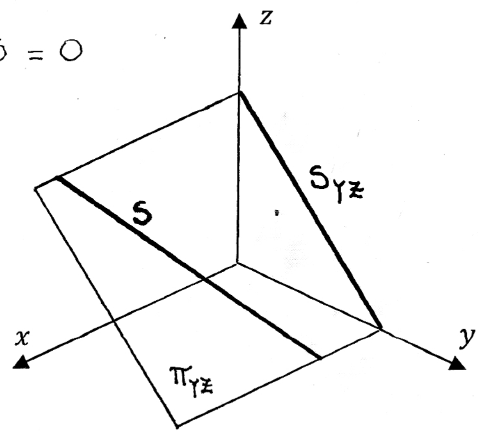
$$X = -\frac{3}{4}Y - \frac{5}{4}Z + \frac{1}{4}$$

$\pi_2)\ 2X - 4Y + Z - 5 = 0$

$$2 \cdot \left(-\frac{3}{4}Y - \frac{5}{4}Z + \frac{1}{4}\right) - 4Y + Z - 5 = 0$$

$$-\frac{3}{2}Y - \frac{5}{2}Z + \frac{1}{2} - 4Y + Z - 5 = 0$$

$$-\frac{11}{2}Y - \frac{3}{2}Z - \frac{9}{2} = 0$$



el plano proyectante es

$\pi_{YZ})\ -\frac{11}{2}Y - \frac{3}{2}Z - \frac{9}{2} = 0$

la recta proyección es

$$S_{YZ} \begin{cases} -\frac{11}{2}Y - \frac{3}{2}Z - \frac{9}{2} = 0 \\ X = 0 \end{cases}$$

✓

ALGEBRA Y GEOMETRÍA I

2DO EXAMEN PARCIAL

1. Encontrar, si es posible, los valores de k para que los planos

$\pi_1)\quad \mathbf{2x - y + 3z - 6 = 0}$ $\qquad\qquad$ $\pi_2)\quad \mathbf{-4x + 2y + kz - 2 = 0}$

a) Sean paralelos.

b) Sean perpendiculares.

$\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$ $\qquad\qquad$ $\vec{n}_2 = (-4, 2, k)$

a) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{3}{k}$

$-1 . k = 3 . 2$

$-k = 6$

$\mathbf{k = -6}$ ✓

b) $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$

$2 . (-4) + (-1) . 2 + 3 . k = 0$

$-8 - 2 + 3k = 0$

$3k = 10$

$\mathbf{k = \dfrac{10}{3}}$ ✓

ALGEBRA Y GEOMETRÍA I

2DO EXAMEN PARCIAL

2. Dadas las rectas

$$r_1)\begin{cases} x = k + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad r_2)\begin{cases} x = \ \ 1 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$$

a) Determinar k de modo que resulten coplanares.

b) Para dicho valor de k hallar la ecuación del plano que las contiene.

c) Obtener para dicho valor de k las coordenadas del punto de intersección entre ambas.

---

a) $P_1(k, 0, 2)$ $\qquad P_2(1, -1, 0)$ $\qquad \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

$\vec{u}_1 = (2, 1, -1)$ $\qquad \vec{u}_2 = (1, 2, -1)$ $\qquad = (1-k, -1, -2)$

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 3) = \vec{n}$$

condición de coplanaridad $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} = 0}$

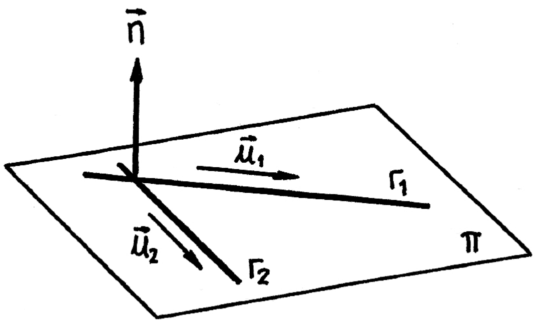
$$(1,1,3) \times (1-k, -1, -2) = 0$$

$$1.(1-k) + 1.(-1) + 3.(-2) = 0$$

$$1 - k - 1 - 6 = 0$$

$$k = -6 \checkmark$$

b)



ec gral de π : $ax + by + cz + d = 0$

$$1.x + 1.y + 3.z + d = 0$$

$P_2 \in \pi \longrightarrow 1.1 + 1.(-1) + 3.0 + d = 0$

$$d = 0$$

$$\pi)\quad x + y + 3z = 0 \quad \checkmark$$

c) igualo las $x \longrightarrow -6 + 2t = 1 + s \quad \text{I}$

igualo las $y \longrightarrow t = -1 + 2s \quad \text{II}$

igualo las $z \longrightarrow 2 - t = -s \quad \text{III}$

de I y II $\begin{cases} 2t - s = 7 \\ t - 2s = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} t = 5 \\ s = 3 \end{matrix}$

$$\downarrow$$

$\text{III})\quad 2 - 5 = -3$

$-3 = -3 \quad \checkmark$

$x = 1 + 3 = 4$

$y = -1 + 2.3 = 5$

$z = -3 = -3$

RTA : $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ donde $P(4,5,-3)$ $\checkmark$

3 . Dadas las rectas

$$r_1)\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad r_2)\begin{cases} x - 2y = -9 & \text{(I)} \\ 10x+7y-9z=0 & \text{(II)} \end{cases}$$

a) Verifica que son coplanares.

b) Determina la ecuación del plano que las contiene.

c) Identifica el lugar geométrico que representan cada una de las ecuaciones (I) y (II), y describe sus particularidades.

d) Halla la ecuación del plano que proyecta a $r_2)$ sobre el plano coordenado YZ (paralelamente al eje x), y las ecuaciones de dicha proyección.

e) Halla la proyección ortogonal del punto $P(-2\,,0\,,2\,)$ sobre el plano obtenido en b).

---

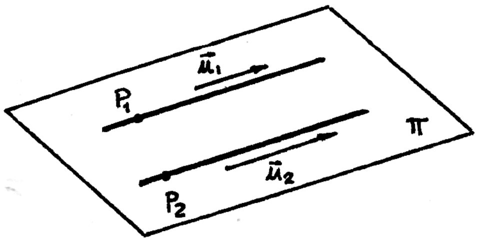
a) $P_1(1,1,-1)$

$\vec{u}_1 = (2,1,3)$

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 10 & 7 & -9 \end{vmatrix} = (18,9,27) = \vec{u}_2$$

$$\frac{18}{2} = \frac{9}{1} = \frac{27}{3} \Rightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2 \Rightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ son coplanares } \checkmark$$

b)



adopto $z=0 \rightarrow \begin{cases} x-2y=-9 \\ 10x+7y=0 \end{cases} \rightarrow P_2\left(-\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$

$$r_2 \begin{cases} x = -\frac{7}{3} + 18\lambda \\ y = \frac{10}{3} + 9\lambda \\ z = 0 + 27\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$= \left(-\frac{7}{3}-1\,,\ \frac{10}{3}-1\,,\ 0-(-1)\right) = \left(-\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$$

$$\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ -\frac{10}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} = (-6,-12,8) = \vec{n}$$

ec. gral de π : $ax + by + cz + d = 0$

$$-6x - 12y + 8z + d = 0$$

$P_1 \in \pi \longrightarrow -6.1 - 12.1 + 8.(-1) + d = 0$

$$d = 26$$

$$\pi)\ \mathbf{-6x - 12y + 8z + 26 = 0} \quad ✓$$

c) (I) $\mathbf{x - 2y = -9}$ $(\forall z \in \mathbb{R})$ es la ecuación de un plano // al eje z

(II) $\mathbf{10x + 7y - 9z = 0}$ es la ecuación de un plano que contiene al origen

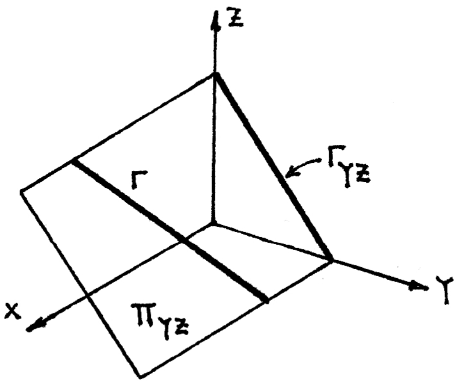
d) (I) $\rightarrow x = -9 + 2y$

(II) $\rightarrow 10(-9 + 2y) + 7y - 9z = 0$

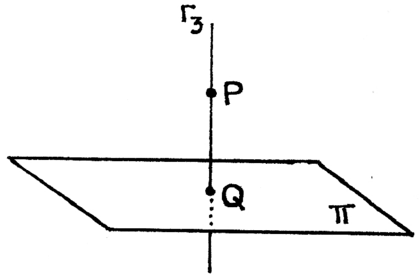
$$-90 + 20y + 7y - 9z = 0$$

$$\pi_{yz})\ \mathbf{27y - 9z - 90 = 0} \quad ✓$$

$$r_{yz} \begin{cases} 27y - 9z - 90 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad ✓$$



e) $r_3 \perp \pi \rightarrow r_3 \begin{cases} x = -2 - 6.s \\ y = 0 - 12.s \\ z = 2 + 8.s \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$



$r_3 \cap \pi = \{Q\} \longrightarrow -6.(-2-6s) - 12.(-12s) + 8.(2+8s) + 26 = 0$

$$12 + 36s + 144s + 16 + 64s + 26 = 0$$

$$244s + 54 = 0$$

$$s = -\frac{27}{122}$$

$$x = -2 - 6.\left(-\frac{27}{122}\right) = -\frac{82}{122}$$

$$y = 0 - 12.\left(-\frac{27}{122}\right) = \frac{324}{122}$$

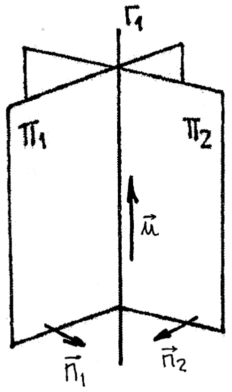
$$z = 2 + 8.\left(-\frac{27}{122}\right) = \frac{28}{122}$$

$$\therefore\ \mathbf{Q\left(-\frac{82}{122}, \frac{324}{122}, \frac{28}{122}\right)} \quad ✓$$

4. Dados los planos $\pi_1)\ -\mathbf{x}+\mathbf{2y}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$; $\pi_2)\ \mathbf{3x}-\mathbf{y}+\mathbf{2z}-\mathbf{1}=\mathbf{0}$

calcular la distancia desde la recta $\mathbf{r_1}$ que resulta de la intersección de π_1 y π_2

hasta el punto $\mathbf{A}(x_A\,,-5\,,\ z_A)$ perteneciente a la recta $r)\begin{cases}\mathbf{x}=\mathbf{2t}\\ \mathbf{y}=-\mathbf{3}+\mathbf{t}\\ \mathbf{z}=\mathbf{1}-\mathbf{3t}\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$



$$\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=(4\,,2\,,-5)=\vec{u}$$

adopto $z=0 \Rightarrow \begin{cases}-x+2y=-3\\ 3x-y=1\end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=-1/5\\ y=-8/5\end{matrix}$

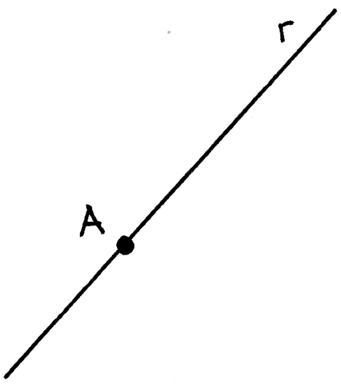
$$P_0\left(-\tfrac{1}{5},-\tfrac{8}{5},0\right)$$

$$\boxed{r_1\begin{cases}x=-\frac{1}{5}+4\lambda\\ y=-\frac{8}{5}+2\lambda\\ z=0-5\lambda\end{cases}}\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$A(x_A\,,-5\,,z_A)\in r \longrightarrow \boxed{r\begin{cases}x=2t\\ y=-3+t\\ z=1-3t\end{cases}} \longrightarrow -5=-3+t$

$-5+3=t$

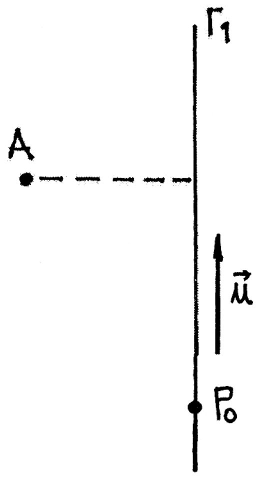
$-2=t$



$x=2.(-2)=-4$

$z=1-3.(-2)=7$

$$A(-4,-5,7)$$



$$\overrightarrow{P_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP_0}$$

$$= (-4, -5, 7) - \left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right)$$

$$= \left(-\frac{19}{5}, -\frac{17}{5}, 7\right)$$

$$\overrightarrow{P_0A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{19}{5} & -\frac{17}{5} & 7 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (3, 9, 6)$$

$$|\overrightarrow{P_0A} \wedge \vec{u}| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{126}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{45}$$

$$\boxed{\delta(A, r) = \frac{|\overrightarrow{P_0A} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}} = \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{45}} = \boxed{\frac{\sqrt{70}}{5}} \cong 1{,}673 \checkmark$$

5 . Determine las ecuaciones de la recta que contiene al punto $A(2,-1,5)$,

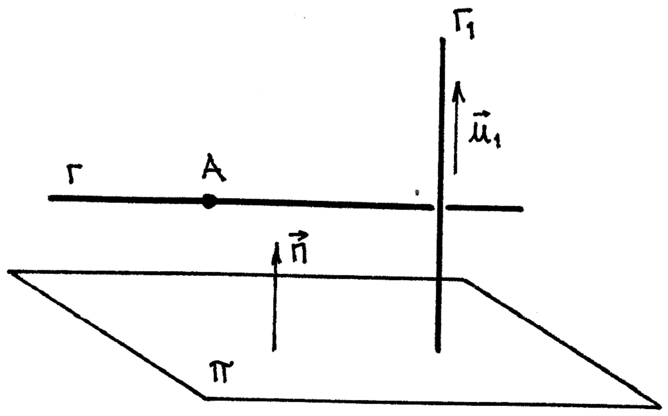
es paralela al plano $\mathbf{3x + y - 2z = 5}$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{\frac{x+8}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-1}}$

$\vec{n} = (3,1,-2)$ $\qquad\qquad$ $\vec{u}_1 = (2,3,-1)$

$\vec{r} \parallel \pi \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$ $\qquad\qquad$ $r \perp r_1 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}_1$

$$\vec{n} \wedge \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5,-1,7) = \vec{u}$$

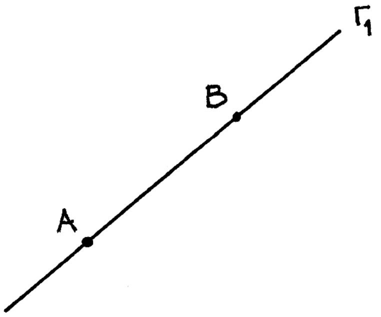
$$r \begin{cases} x = 2 + 5t \\ Y = -1 - t \\ z = 5 + 7t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ✓$$



ALGEBRA Y GEOMETRÍA I **03 / 11 / 2011**

2DO EXAMEN PARCIAL

1. Hallar el ángulo que forma la recta determinada por los puntos $A(0,2,0)$ y $B(2,1,-2)$ con el vector normal del plano determinado por el punto $P(-1, 2, 0)$ y la recta $r)$ de ecuación $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= (2,1,-2) - (0,2,0) = (2,-1,-2) = \vec{u}_1$$

$$r_1 \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 0 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

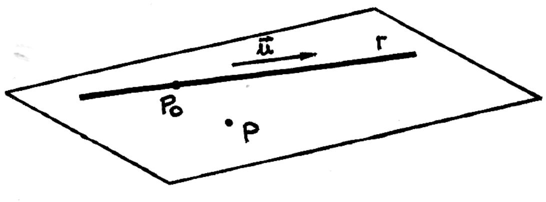
$$\vec{n}_1 = (1,1,1)$$

$$\vec{n}_2 = (1,-1,-1)$$

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0,2,-2) = \vec{u}$$

adopto $z=0 \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 1/2 \\ y = -3/2 \end{matrix} \rightarrow P_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$

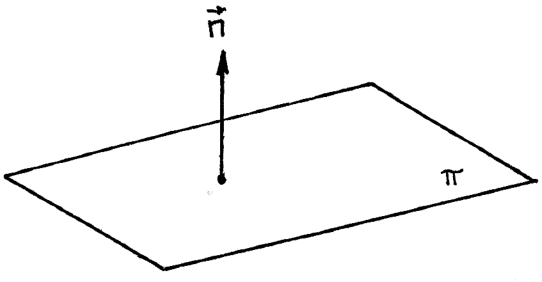
$$r \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} + 2\lambda \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases}$$

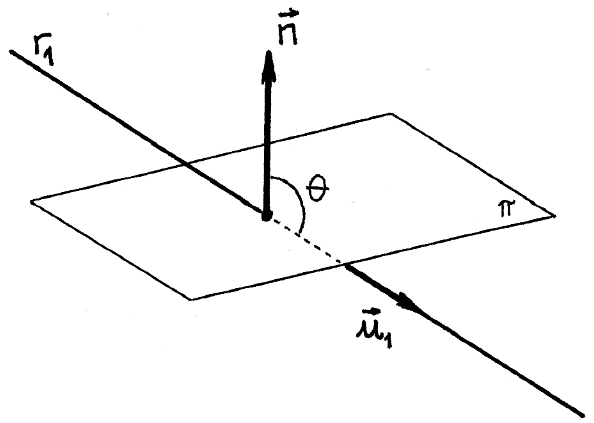


$$\vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0}$$

$$= (-1,2,0) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\vec{P_0P} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-7,-3,-3) = \vec{n}$$





vector // a la recta : $\vec{u}_1 = (2,-1,-2)$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

vector ⊥ al plano : $\vec{n} = (-7,-3,-3)$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{67}$

$$\vec{u} \times \vec{n} = 2\cdot(-7)+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-3) = -5$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{n}}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{n}|} = \frac{-5}{3\cdot\sqrt{67}} = -0{,}203$$

SH COS
° ' ''

$$\theta = 101^\circ 44'$$ ✓