

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 3  
Решение СЛАУ итерационные методы

Выполнил:  
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

## 1 Постановка задачи

Дана СЛАУ  $Ax = b$ . Необходимо решить её двумя итерационными методами.

## 2 Метод простой итерации

Итерационная формула для приближений имеет следующий вид:

$$X_{k+1} = BX_k + \beta$$

где  $B$  и  $\beta$  следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdot & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdot & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{a_{11}} \\ -\frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ -\frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

В качестве начального приближения  $X_0$  можем взять равным  $\beta$ . Для сходимости данного метода достаточно, чтобы норма матрицы  $B$  была меньше единицы.

## 3 Метод Зайделя

Представим матрицу  $B$  в виде  $B = B_L + B_U$  - где  $B_L$  и  $B_U$  - нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно. Тогда итерационную формулу можно представить в виде:

$$X_{k+1} = (E - B_L)^{-1} B_U X_k + (E - B_L)^{-1} \beta$$

## 4 Расчет

Точность была выбрана  $1e-10$ . Оба алгоритмы были протестированы на 2 различных примерах.

## 5 Тесты

### 5.1 Тест 1

Матрица  $A$  и вектор  $b$  следующего вида:

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Для достижения заданной точности потребовалось 38 итераций методом простых итераций, а метод Зейделя сошелся за 22 итерации.

### 5.2 Тест 2

В качестве второго примера была рассмотрена разреженная симметричная матрица размерности 50 на 50. Диагональные элементы - случайные числа от 0.7 до 0.9. Случайные 100 позиций в матрице занимают случайные числа от 0.1 до 0.3. В качестве  $b$  взять единичный вектор. В данном тесте метод простой итерации сошелся за 123 итерации, а метод Зейделя за 34.

## 6 Вывод

Оба алгоритма в одинаковых задачах сходятся к ответу. Но метод Зейделя сходится сильно быстрее метода простой итерации.