Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 1

Решение жестких систем.

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д.Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Примение

Многие процессы описываются системами дифференциальных уравнений, которые невозможно решить аналитически. Нижеописанные методы помогут решить данную задачу численно.

2 Постановка задачи

Задана задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$X` = AX, X(t_0) = X_0$$

A - матрица коэффициентов, X - вектор функций $x_i(t)$

Мы будем работать с жесткими системами. Система называется жесткой, если все λ_i имеют отрицательные дейтвительные части. А также отношение $\dfrac{min(Re_i)}{max(Re_i)} \gg 1$

3 Метод Рунге-Кутты

Будем рассматривать четырехстадийный метод Рунге-Кутты. Для его реализации необходимо расчитать 4 коэффициента:

$$k_1 = hAX_i, k_2 = hA(X_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hA(X_i + \frac{k_2}{2}), k_4 = hA(X_i + k_3)$$

Расчетная формула для X_i:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Данный метод является методом 4 порядка, тогда общая ошибка имеет порядок $O(h^4)$. Функция устойчивости данного метода $R(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{6} + \dfrac{z^4}{24}$. Данный метод является А устойчивым (смотри презентации).

4 Неявный метод Адамса третьего порядка

Данный метод имеет теоритический порядок точности $O(h^3)$, а также он А устойчивый. Вспомогательная формула - явный метод Адамса:

$$X* = X_{i+1} = X_i + \frac{hA}{12}(23X_i - 16X_{i-1} + 5X_{i-2})$$

Запишем итоговую формулу для неявного метода Адамса:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{hA}{12}(5X * -8X_i - 5X_{i-1})$$

5 Метод CROS1

Основная расчетная формула

$$X_{i+1} = X_i + hRe(\omega)$$

ω - находится как решение следующей системы:

$$(E - \frac{1+i}{2}hA)\omega = AX_i$$

Данный метод А и L устойчивый, а также t-монотонный. Теоретическая точность: $O(h^2)$

6 Конртоль точности

Способ контроля точности основан на методе Ричардсона. Строим последовательность сеток, уменьшая шаги вдвое. Затем рассматриваем решения на соседних сетках. Оценка точности по Ричардсону: $\Delta(t) = \dfrac{v_2 - v_1}{2^p - 1}$. Здесь v_1 и v_2 решения на соседних сетках. В качестве погрешностей будем рассматривать результаты не в каждой точке, а общую норму - максимум погрешности по всем точкам сетки.

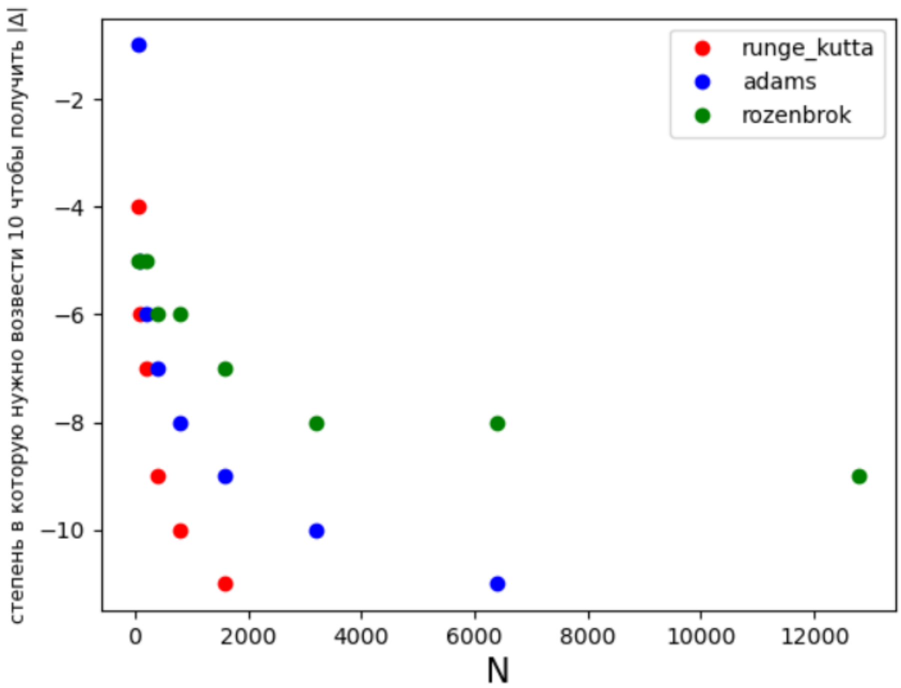
7 Тесты

7.1 Тест 1.

Начнем с простенькой системы:

$$= \begin{pmatrix} -145 & 123.1 \\ 123.1 & -133 \end{pmatrix}$$

Начальные условия $X_0 = (1, 1)$



На данном графике изображена зависимость точности $|\Delta|$ от числа узлов в сетке. Чем точка ниже, тем результат лучше (выше точность)

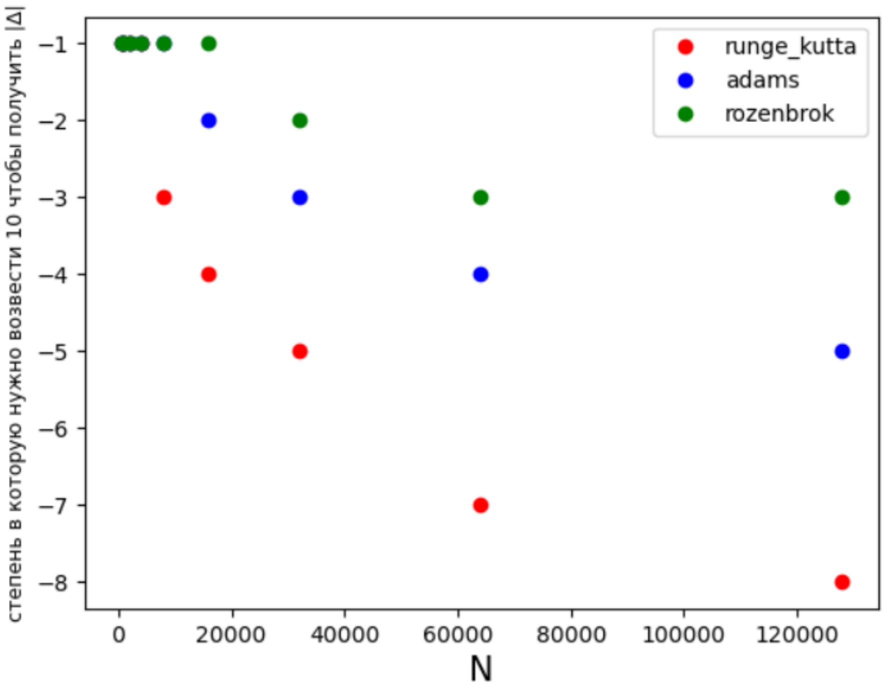
Все методы довольно быстро начинают показывать высокую точность.

7.2 Тест 2.

В двух двльнейших примерах рассмотрим матрицы из учебника Калиткина

$$A = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 & \mu_1 + \nu_1 & -\nu_1 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 & 0 & 0 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 - \nu_2 & \mu_2 + \nu_2 & -\nu_2 \\ \mu_0 - \mu_1 - \nu_1 & 2\nu_1 & \mu_1 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_2 & 2\nu_2 & \mu_2 - \nu_2 \end{pmatrix}$$

$\mu_0 = -110$, $\mu_1 = -10$, $nu_1 = 10$, $\mu_2 = -10000$, $\nu_2 = 10$, начальные условия $X_0 = (10, 11, 111, 11, 111)$



В данном случае все методы (кроме Рунге-Кутты) требуют сетку из 40000 узлов для точности 1e-3.

8 Вывод

На примерах было проверено, что метод CROS1 является самым неточным, однако, самым быстрым. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка оказывается самым точным, но одновременно с этим и самым трудозатратным. В случае, когда нужно быстро промоделировать и грубо представить поведение какого-либо решения, можно воспользоваться CROS1. В случае большой важности точности следуюет воспользоваться методм Рунге-Кутты.