Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 3

Решение СЛАУ итерационные методы

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Применение

Итерационные методы в отличие от точных методов позволяют решать системы с заданной наперёд точностью.

2 Постановка задачи

Дана СЛАУ $Ax = b$. Необходимо решить её двумя итерационными методами.

3 Метод простой итерации

Основная идея - берём некоторое начальное приближение и начинаем линейный итерационный процесс.

Итерационная формула для приближений имеет следующий вид:

$$X_{k+1} = BX_k + \beta$$

где B и β следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdot & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdot & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{a_{11}} \\ -\frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ -\frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

В качестве начального приближения X_0 можем взять β. Для сходимости данного метода достаточно, чтобы норма матрицы B была меньше единицы.

4 Метод Зайделя

Метод Зейделя относится к линейным одношаговым методам первого порядке Матрица A представляется в виде $A = L + D + R$ - D - диагональная, L - нижнетрекгольная с нулями на диагонали, R - верхнетреугольная матрица. Берем параметр $\omega \neq 0$ и строим следующий процесс:

$$(\omega^{-1}D + L)x^{(k+1)} + [(1 - \omega^{-1})D + R]x^{(k)} = b$$

При $\omega = 1$ можем представить матрицу B в виде $B = B_L + B_U$ - где B_L и B_U - нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы соответственно. Тогда итерационную формулу можно представить в виде:

$$X_{k+1} = (E - B_L)^{-1} B_U X_k + (E - B_L)^{-1} \beta$$

5 Расчет

Тоечть была выбрана 1e-10. Оба алгоритмы были протестированы на различных примерах.

6 Тесты

6.1 Тест 1

Матрица A и вектор b следующего вида:

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Для достижения заданной точности потребовалось 38 итераций методом простых итераций, а метод Зейделя сошелся за 22 итерации.

6.2 Тест 2

В качестве второго примера была рассмотрена разреженная симметричная матрица размерности 50 на 50. Диагональные элементы - случайные числа от 0.7 до 0.9. Случайные 100 позиций в матрице занимают случайные числа от 0.1 до 0.3. В качестве b взять единичный вектор. В данном тесте метод простой итерации сошелся за 123 итерации, а метод Зейделя за 34.

6.3 Тест 3

$$= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & -1.1 & 0.5 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для данной системы оба алгоритма расходятся

7 Вывод

Оба алгоритма в одинаковых задачах сходятся к ответу. Важное преимущество итерационных методов в отличии от точных методов - решение можно получить с заданной наперёд точностью. Важным минусом является то, что методы могут разойтись.