Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 7

Проекционные методы для краевой задачи ОДУ второго порядка

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д.Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Примение

Проекционные методы широко применяются для решения краевых задач. Одним из их преимуществ является нахождение значений функций не просто в определенных точках области, а сразу непрерывно на всей области.

2 Постановка задачи

Общий вид решаемой задачи

$$Lu = f(x)$$

Заданы краевые условия:

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \alpha(t)$$

$$\alpha_1\alpha_2 \geq 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$$

$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = \beta(t)$$

$$\beta_1\beta_2 \geq 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

Суть проекционных методов заключается в выборе определенной линейно-независимой координатной систеы функций: $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$. По данным функциям строится приближенное решение:

$$u^n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i(x)$$

Коэффициенты рахложения c_i являются решением следующей системы:

$$\sum_{1=1}^{n} a_{ij}c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

Компоненты a_{ij} матрицы А и f_i задаются кокртеным используемым проекционным методом

3 Метод Ритца

Координатные функции $\omega_i(x)$ берем из энергетического пространства H_L.

Коэффициенты разложения находим из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

Где $a_{ij} = [\omega_i, \omega_j]$, $f_i = (f, \omega_i)$ - скалярное произведение в L_2.

$[\omega_i, \omega_j] = (L\omega_i, \omega_j)$

4 Метод коллокаций

Суть метода - невязка $L(u) - f(x)$ должна обращаться в ноль в некотором наборе точек промежутка $[a, b]$. Также накладывается требование на координатные функции - они должны удовлетворять заданным краевым условиям.

После выбора узлов коллокаций система принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} L(\omega_j)|_{x=t_i} c_j = f_i, i = 1, \ldots, n$$

В качестве узлов коллокации можем взять узлы многочлена Чебышева первого рода.

5 Расчет

В качестве примеров возьмем краевую задачу для ОДУ второго порядка. Исследуем поведение решений при разный значениях n. Будем рассматривать максимальные отклонения от точного решения на некоторой сетке.

6 Тесты

6.1 Тест 1.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\left(\frac{1}{x^2+1} u`\right)` + sin(x) u = x - 1$$

$$u(-1) = 0, u(1) = 0$$

В качестве координатных функций берём многочлены Якоби умноженные на $(1 - x^2)$.

Вычисленные максимальные отклонения (Ритц, Коллокаций) для n=3, 5, 7 ,9: (0.54;0.73), (1.8e-4; 1.0e-3), (1.12e-5; 4.25e-5), (3.91e-7; 1.33e-6). Получаются очень хорошие результаты при небольшом разложении.

6.2 Тест 2.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\left(\frac{x-5}{x+4}u`\right)` + sin(x)u = 1 + x^2$$

$$u`(-1) = 0, u`(1) + u(1) = 0$$

Поменяем набор координатных функций.

В качестве координатных функций для метода Ритца берём многочлены Якоби умноженные на $(1 - x^2)$, но $\omega_0 = 1, \omega_1 = x$

Для метода коллокаций: многочлены Якоби, умноженные на $(x-a)^2(x-b)^2$, кроме $\omega_0 = \frac{7}{2}x^3 + x^2 - \frac{17}{2}x$, $\omega_1 = -\frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{7}x + 1$

Вычисленные максимальные отклонения (Ритц, Коллокаций) для n=3, 5, 7 ,9: (0.09;0.028), (2.9e-3; 1.1e-3), (4.89e-5; 6.01e-5), (8.21e-6; 5e-6)

7 Вывод

Данные алгоритмы дают хорошее приближение уже при небольшом числе координатных функций. Реализация проекционных методов довольно сложная (пришлось разибраться с матлабом), но они дают хорошую точность. Точность в целом зависит от выбора координатных функций. Проекционные методы довольно быстро обсчитываются, что тоже можно причислить к их достоинствам.