Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 4

Поиск всех собственных значений

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Применение

Собственные числа матрицы требуются во многих задачах: приведение линеных операторов к диагональному виду, оценка норм матриц, различные критерии устойчивости систем дифференциальных уравнени другие.

2 Постановка задачи

Нам дана матрица A. Требуется найти все её собственные значения. Если матрица A - эрмитова, то для нахождения всех собственных значений можно использовать метод вращений якоби.

3 Метод вращений

Мы рассмотрим один основной метод, но с некоторыми модификациями - метод вращений. Он очень просто в реализации и дает неплохие результаты для эрмитовых матриц.

Введём понятие преобразование подобия. Преобразование подобия - есть преобразование следующего вида:

$$B = TAT^{-1}$$

Где матрица T - унитарная матрица. Преобразование подобия не меняет спектра матрицы, следовательно, с помощью таких преобразований можем привести исходную матрицу к диагональному виду.

Посокльку нельзя привести матрицу к диагональной за конечное число итераций, будем приводить её к "почти"диагональной. Основа метода: построение такой последовательности A_k, чтобы последовательно обнулять недиагонльные элементы матрицы, тем самым максимально приблизив её к диагональному виду.

Итерационная формула выглядит следующим образом:

$$A_{k+1} = V_{ij}(\phi_k) A_k V_{ij}(\phi_k)$$

Где матрица $V_{ij}(\phi_k)$ - матрица поворота, ϕ - угол поворота:

$$\phi = \begin{cases} tg(2\phi) = \dfrac{-2A_{ij}}{A_{jj} - A_{ii}}, A_{ii} \neq A_{jj} \\ \phi = \frac{\pi}{4}, A_{ii} = A_{jj} \end{cases}$$

Обнуляемый элемент можно выбирать разными способами. В программе разобраны две стратегии. Первая - обнуление максимального элемента матрицы A. Такая стратегия приходит к нужной точности за меньшее число итераций в целом, но необходимо дополнительное действие - нахождение максимума, что не всегда можно сделать быстро.

Вторая стратегия - элементы зануляются по очереди. Данная стратегия проще реализуема, но общее число итераций в среднем вдвоем больше.

4 Расчет

Применим вышеописанные алгоритмы на различных матрицах для поиска собственных чисел λ_i Гильбертовой матрицы большого порядка. Выбранная точность - $\varepsilon = 1e^{-12}$. Сравним число итераций, а также рассмотрим норму разницы.

5 Тесты

5.1 Тест 1.

Рассмотрим игрушечный пример: матрица 50 на 50. Каждый элемент равен 100.

λ_i Якоби с max элементом:
iterations: 49
λ_i Якоби с циклическим выбором:
iterations: 1225

5.2 Тест 2.

Протестируем на обычной матрице 3 на 3

$$\begin{pmatrix} -0.81417 & -0.1937 & 0.41372 \\ -0.01937 & 0.54414 & 0.00590 \\ 0.41372 & 0.00590 & -0.81445 \end{pmatrix}$$

λ_i Якоби с max элементом:
iterations: 9
λ_i Якоби с циклическим выбором:

iterations: 12

5.3 матрица Гильберта 6×6.

λ_i Якоби с max элементом:

iterations: 50

λ_i Якоби с циклическим выбором:

iterations: 60

Вычисленные значения близки между собой и близки к ответу. Число итераций также незначительно отличается

5.4 матрица Гильберта 25×25.

Рассмотрим на данной матрице, так как она имеет плохую обусловленность.

λ_i Якоби с max элементом:

iterations: 804

λ_i Якоби с циклическим выбором:

iterations: 1500

В данном случае значения довольно сильно отличаются особенно для очень малых по модулю собственных значений. Реализация с обнулением максимального элемента сошлась к заданной точности за вдвое меньшее число итераций.

6 Вывод

Алгоритм со стратегией обнуления максимального жлемента сходится быстрее. При очень малых искомых собственных могут появлятся ошибки. Сложно выбрать более предпочтительную стратегию. Стоит исходить из конкретной задачи.