Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 5

Частичная проблема собственных значений.

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Применение

Нахождение наибольшего собственного числа может быть полезно для оценки матричных норм. Также, существуют различные критерии для оценки сходимости и скорости сходимости различных численных методов, которые используют модуль наибольшего собственного числа.

2 Постановка задачи

Нам дана матрица A. Требуется найти максимальное по модулю собственное значение матрицы A.

3 Степенной метод

Для поставленной задачи данный метод является базовым и довольно простым в реализации. Поэтому начнем рассмотрение с него.

Пусть матрица A имеет полную систему ортонормированных собственных векторов $e_i, i = 1, \dots, n : Ae_i = \lambda_i e_i$ причём $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$ упорядочены. Тогда любой вектор $x^{(0)}$ можем разложить по базису из собственных векторов:

$$x^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$$

Строим последовательность приближений:

$$x^{k+1} = Ax^k$$

Тогда следующее приближенное значение λ_1 на k-ой итерации выражается следующим образом:

$$\frac{||A^{k+1}x^{(0)}||}{||A^k x^{(0)}||} = \lambda_1 + O((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})$$

4 Метод скалярных произведений

Метод скалярных произведений является модификацией степенного метода. По сравнению со степенным методом, теоретически этот сходится в 2 раза быстрее.

Помимо матрицы A рассматриваем матрицу A^T с следующей системой ортонормированной собственных векторов: $v_i, i = 1, \dots, n$. Для

$$y^{(0)} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots + d_n v_n$$

Строим следующую последовательность приближений:

$$y^{(k+1)} = A^T y^{(k)}$$

Оценка скорости сходомости:

$$\frac{(Ax^{(k)}, A^T y^{(k)})}{(x^{(k)}, A^T y^{(k)})} = \lambda_1 + O((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{2k})$$

Следовательно, метод скалярных произведений должен сходится в 2 раза быстрее, чем степенной метод

5 Расчет

Применим вышеописанные алгоритмы для поиска максимального λ. Выбранная точность - $\varepsilon = 1e^{-12}$. Затем сравнем результаты с результатами метода вращений якоби.

6 Тесты

6.1 Тест 1.

Рассмотрим игрушечный пример: матрица 200 на 200. Каждый элемент равен 100.

max λ степенной метод: 20000.0000000001; iterations: 4

max λ метод скалярных: 20000.0; iterations: 2

max λ метод вращений якоби: 20000.000000000025; iterations: 222

max λ numpy: (19999.99999999992+0j);

6.2 Тест 2.

Протестируем на обычной матрице 3 на 3

$$\begin{pmatrix} -0.81417 & -0.1937 & 41372 \\ -0.01937 & 54414 & 00590 \\ 0.41372 & 0.00590 & -0.81445 \end{pmatrix}$$

Уже для такой матрицы метод якоби делает сильно больше итераций, чем алгоритмы рассотренные выше

max λ степенной метод: 1.7519196702652444; iterations: 20

max λ метод скалярных: 1.7519196702651758; iterations: 10

max λ метод вращений якоби: 1.7519196702651765; iterations: 152

max λ numpy: 1.7519196702651776;

6.3 матрица Гильберта 5×5.

max λ степенной метод: 1.567050691098299; iterations: 16

max λ метод скалярных: 1.5670506910982231; iterations: 7

max λ метод вращений якоби: 1.5670506910982311; iterations: 32

max λ numpy: 1.56705069109823;

6.4 матрица Гильберта 25×25.

max λ степенной метод: 1.9517565168702522; iterations: 24

max λ метод скалярных: 1.9517565168700661; iterations: 12

max λ метод вращений якоби: 1.951756516870083; iterations: 804

max λ numpy: (1.9517565168700837+0j);

На плохо обсуловленных матрицах получаем хороший результат, при этом быстро.

7 Вывод

Практические результаты сходятся с теоретическими расчетами: метод скалярных произведений сходится примерно в 2 раза быстрее степенного метода. Оба метода дают достаточно точные результаты за небольшое число итераций. Метод Якоби для данной задачи сходится сильно дольше, но все всё ещё дает хорошие результаты в плане точности.

Метод скалярных произзведений является более предпочтительным для нахождения наибольшего собственного числа, так как он сходится быстрее, особенно при больших размерностях матриц.