Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 5

Частичная проблема собственных значений.

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Постановка задачи

Нам дана матрица A. Требуется найти максимальное по модулю собственное значение матрицы A.

2 Степенной метод

Пусть матрица A имеет полную систему ортонормированных собственных векторов $e_i, i = 1, \ldots, n : Ae_i = \lambda_i e_i$ причём $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$ упорядочены. Тогда любой вектор $x^{(0)}$ можем разложить по базису из собственных векторов:

$$x^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$$

Строим последовательность приближений:

$$x^{k+1} = Ax^k$$

Тогда следующее приближенное значение λ_1 на k-ой итерации выражается следующим образом:

$$\frac{||A^{k+1}x^{(0)}||}{||A^k x^{(0)}||} = \lambda_1 + O((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{k+1})$$

3 Метод скалярных произведений

Помимо матрицы A рассматриваем матрицу A^T с следующей системой ортонормированной собственных векторов: $v_i, i = 1, \ldots, n$. Для

$$y^{(0)} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots + d_n v_n$$

Строим следующую последовательность приближений:

$$y^{(k+1)} = A^T y^{(k)}$$

Оценка скорости сходомости:

$$\frac{(Ax^{(k)}, A^T y^{(k)})}{(x^{(k)}, A^T y^{(k)})} = \lambda_1 + O((\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{2k})$$

Следовательно, метод скалярных произведений должен сходится в 2 раза быстрее, чем степенной метод

4 Расчет

Применим вышеописанные алгоритмы для поиска максимального λ. Выбранная точность - $\varepsilon = 1e^{-12}$. Затем сравнем результаты с результатами метода вращений якоби.

5 Тесты

5.1 матрица Гильберта 5×5.

max λ степенной метод: 1.567050691098299; iterations: 16
max λ метод скалярных: 1.5670506910982231; iterations: 7
max λ метод вращений якоби: 1.5670506910982311; iterations: 32
max λ numpy: 1.56705069109823;

5.2 матрица Гильберта 10×10.

max λ степенной метод: 1.7519196702652629; iterations: 19
max λ метод скалярных: 1.7519196702651414; iterations: 9
max λ метод вращений якоби: 1.7519196702651765; iterations: 152
max λ numpy: 1.7519196702651776;

6 Вывод

Практические результаты сходятся с теоретическими расчетами: метод скалярных произведений сходится примерно в 2 раза быстрее степенного метода. Оба метода дают достаточно точные результаты за небольшое число итераций. Метод Якоби для данной задачи сходится сильно дольше, но все всё ещё дает хорошие результаты в плане точности.