

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 4
Поиск всех собственных значений

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Постановка задачи

Нам дана матрица A . Требуется найти все её собственные значения. Если матрица A - эрмитова, то для нахождения всех собственных значений можно использовать метод вращений якоби.

2 Метод вращений

Преобразование подобия - есть преобразование следующего вида:

$$B = TAT^{-1}$$

Где матрица T - унитарная матрица. Преобразование подобия не меняет спектра матрицы, следовательно, с помощью таких преобразований можем привести исходную матрицу к диагональному виду.

Поскольку нельзя привести матрицу к диагональной за конечное число итераций, будем приводить её к "почти" диагональной. Основа метода: построение такой последовательности A_k , чтобы последовательно обнулять недиагональные элементы матрицы, тем самым максимально приблизив её к диагональному виду.

Итерационная формула выглядит следующим образом:

$$A_{k+1} = V_{ij}(\phi_k)A_kV_{ij}(\phi_k)$$

Где матрица $V_{ij}(\phi_k)$ - матрица поворота, ϕ - угол поворота:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{tg}(2\phi) = \frac{-2A_{ij}}{A_{jj} - A_{ii}}, A_{ii} \neq A_{jj} \\ \phi = \frac{\pi}{4}, A_{ii} = A_{jj} \end{cases}$$

Обнуляемый элемент можно выбирать разными способами. В программе разобраны две стратегии. Первая - обнуление максимального элемента матрицы A . Вторая стратегия - элементы зануляются по очереди.

3 Расчет

Применим вышеописанные алгоритмы для поиска собственных чисел λ_i Гильбертовой матрицы. Выбранная точность - $\varepsilon = 1e^{-12}$. Сравним число итераций, а также рассмотрим норму разницы.

4 Тесты

4.1 матрица Гильберта 6×6 .

λ_i Якоби с max элементом:

iterations: 50

λ_i Якоби с циклическим выбором:

iterations: 60

Вычисленные значения близки между собой и близки к ответу. Число итераций также незначительно отличается

4.2 матрица Гильберта 25×25 .

λ_i Якоби с max элементом:

iterations: 804

λ_i Якоби с циклическим выбором:

iterations: 1500

В данном случае значения довольно сильно отличаются особенно для очень малых по модулю собственных значений. Реализация с обнулением максимального элемента сошла к заданной точности почти вдвое быстрее.

5 Вывод

Алгоритм со стратегией обнуления максимального элемента сходится быстрее. При очень малых искомым собственным могут появляться ошибки.