Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 2

Решение СЛАУ точные методы

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

1 Постановка задачи

Дана СЛАУ $Ax = b$. Необходимо решить её двумя точными методами.

2 Метод LU-разложения

Для матрицы A будем искать раложение такое, что $A = LU$, L - нижнетреугольная матрица, U - верхнетреугольная матрица. Мы преполагаем, что для заданной матрицы $n \times n$ такое разложение существует. Запишем явные формулы для L и U:

Для $i = 1, \ldots, n$ поочереди выполняем следующие шаги

$$L_{j,i} = A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} U_{ki}, j = i, \ldots, n$$

$$U_{j,i} = (A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj})/L_{ii}, j = i, \ldots, n$$

Далее нужно решить 2 простые системы:

$$Ly = b,$$

Ux = y

x - есть искомое решение начальной системы

3 Метод QR-разложение

С помощью QR-разложения мы можем представить исходную матрицу в виде $A = QR$, где Q - ортогоноальная матрица, а R - треугольная матриица. Разложение найдем методом вращений.

Элементарное вращение задается матрицей $T_{i,j}$. ЭТо единичная матрица, у которой $t_{i,i} = cos(\phi_{i,j})$, $t_{j,j} = t_{i,i}$, $t_{i,j} = sin(\phi_{i,j})$, $t_{j,i} = -t_{i,j}$. В своб очередь $\phi_{i,j} = arctan\frac{-A_{i,j}^{(k)}}{A_{j,j}^{(k)}}$. Здесь $A^{(k)}$ - матрица, повернутая к раз. После поворотов получаем формулы для QR раложения.

$$Q = T_{1,2}^{-1} T_{1,3}^{-1} \dots T_{1,n}^{-1} T_{2,3}^{-1} T_{2,4}^{-1} \dots T_{2,n}^{-1} \dots T_{n-1,n}^{-1} T_{n,n-1}^{-1}$$

$$R = Q^T A$$

Далее решаем систему

$$Rx = Q^T b$$

4 Расчет

Тестировать методы будем на матрице Гильберта порядка 15, 30. Используем матрицу Гильберта, так как она плохо обусловлена.

Возьмем единичный вектор e и вычислим b=He. Далее, численно решим систему Hx=b. Точный ответ - единичный вектор. При малом порядке матрицы гильберта (6 и меньше) оба метода выдают верный точный ответ.

После нахождения x каждым из методов, сравним его по норме с e.

Затем, исследуем влияние параметра регуляризации α. То есть будем решать систему вида:

$$(A + \alpha E)x = b + \alpha x_0$$

Данная система будет лучше обусловлена засчет прибавления αE.

5 Тесты

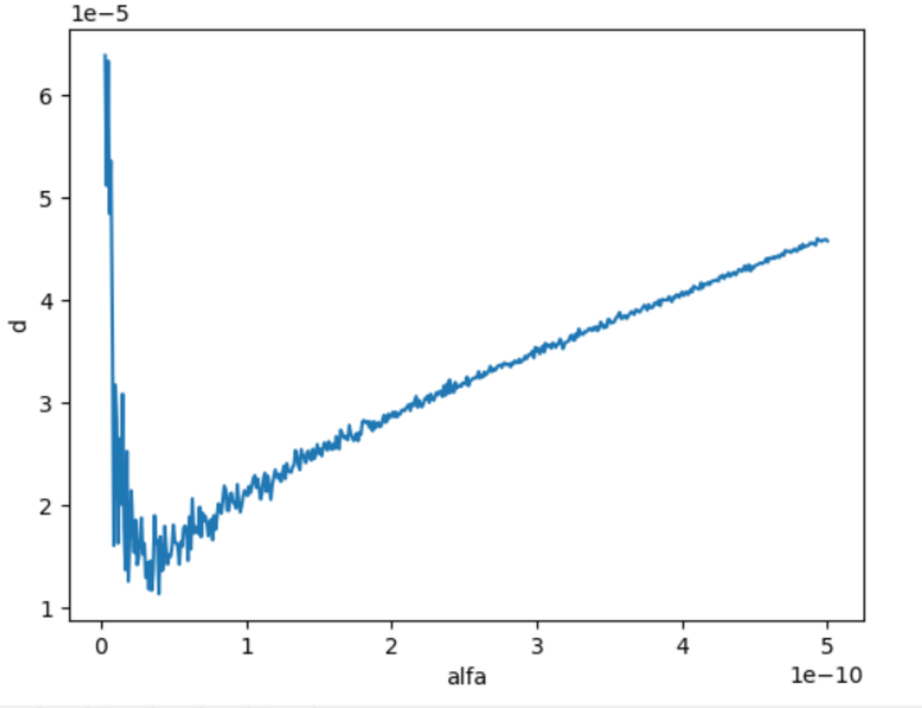
5.1 Тест 1

расчёт для матрицы Гильберта размерности 15:

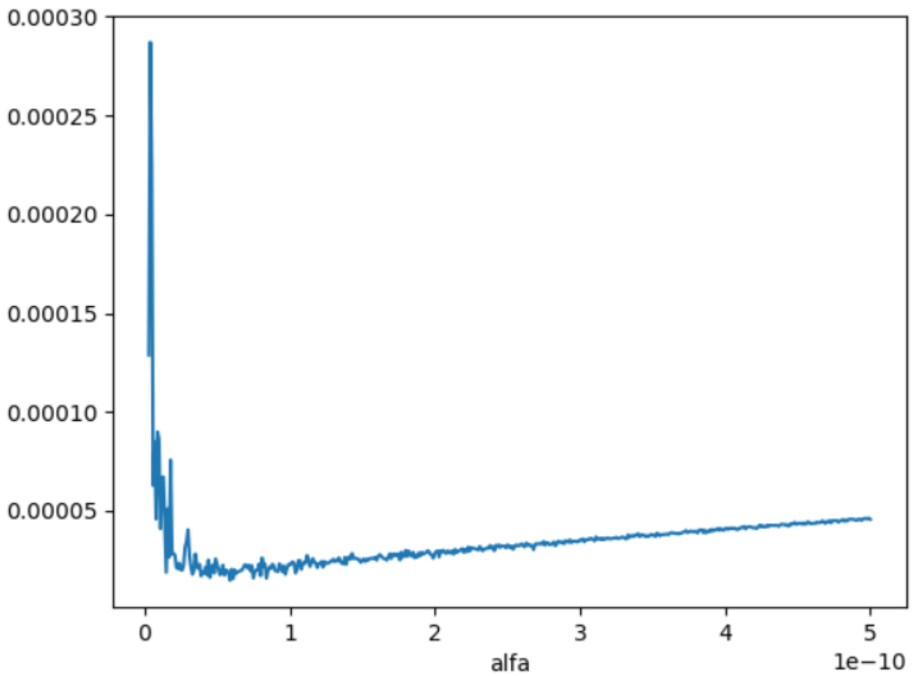
погрешность LU-solve: 33.26

наименьшая погрешность d=1.13e-05 достигается при alfa=4.0e-11

На данном графике отображена зависимость погрешности от параметра регуляризации. Нас интересует минимум погрешности. Как видно из графика, стоит подбирать достаточно малые параметры регуляризации.



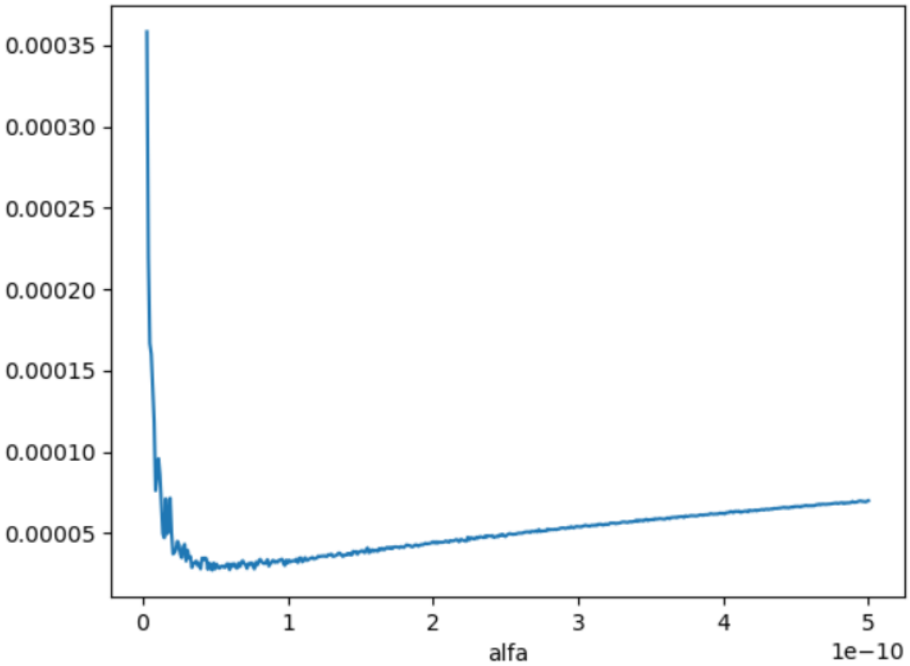
погрешность QR-solve: 13.02
наименьшая погрешность d=1.48e-05 достигается при alfa=5.9e-11



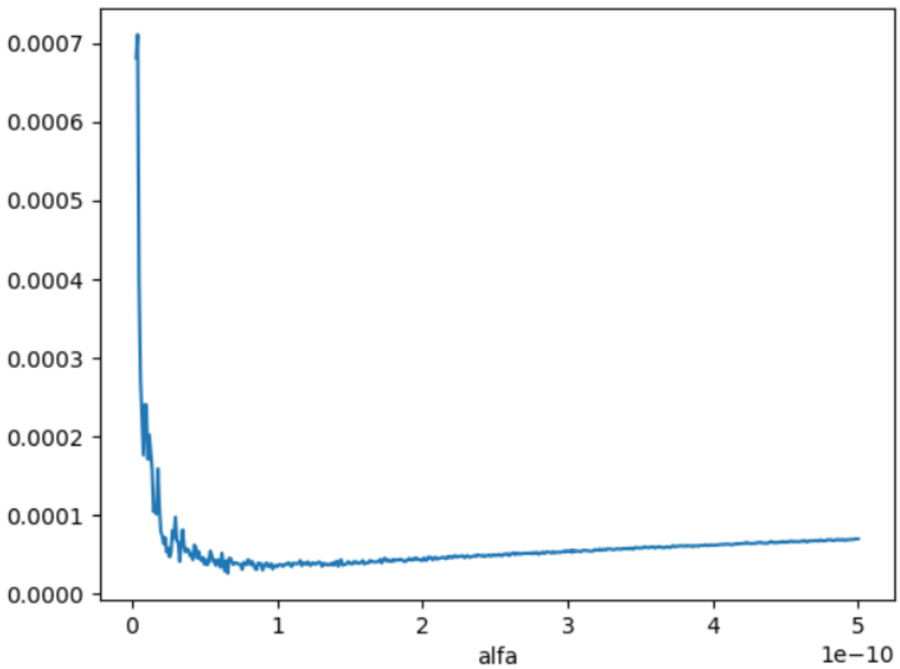
5.2 Тест 2

расчёт для матрицы Гильберта размерности 30
погрешность LU-solve: 266.04

наименьшая погрешность d=2.73e-05 достигается при alfa=4.8e-11



погрешность QR-solve: 1426.20 наименьшая погрешность d=2.65e-05 достигается при alfa=6.59e-11



6 Вывод

Как мы видим, для матриц с плохой обсуловленностью появляются очень большие погрешности в обоих методах. Но при подборе параметра регуляризации, можно добиться уменьшения погрешнотей до порядка 10^{-5}. В случае же, когда обсуловленность амтрицы изначально не самая плохая, стоит пользоваться методом QR-раложения, так как он гарантировано не может ухудшать обсуловленность