Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Отчет по заданию 8

# Сеточные методы для задачи теплопроводности.

Выполнил:
студент 4 курса Курлов Д. Н.

Санкт-Петербург 2020

# 1 Применение

Сеточные методы являются очень важными в вопрсе численного решения уравнений в частных производных. С помощью них решаются уравнения колебаний, теплопроводности, переноса и другие. Ниже будут рассмотрены 2 схемы: явная и неявная

# 2 Постановка задачи

Дано уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)u_{xx} + f(x,t)$$
$$0 \le x \le 1, 0 \le t \le T, f(x,t) \in C_{[0,1]\times[0,T]}$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = \phi(x), \phi(x) \in C_{[0,1]}$$

Краевые условия:

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \alpha(t)$$
$$\alpha_1\alpha_2 \ge 0, |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$$
$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = \beta(t)$$
$$\beta_1\beta_2 \ge 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

# 3 Явная разностная схема

Явная разностная схема является условно устойчивой. Это значит, что устойчивость схемы зависит от отношения дробления сетки по времени и по координате. Но при этом, явная схема обсчитывается быстрее.

Перейдем к описанию самой схемы.

Далее $\tau = \frac{1}{M}, h = \frac{1}{N}$

Апроксимируем уравнение в узле $(x_i, t_{k-1})$:

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = a(x_i, t_{k-1})\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h^2} + f(x_i, t_k), i = 1, \dots, N-1; k = 1, \dots, M$$

При такой апроксимации уравнение содержит данные из 4 точек.

Также апроксимируем граничные условия с порядком $O(h^2)$:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k + \alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k + 4u_1^k - 2u_2^k}{2h} = \alpha(t_k)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{-3u_N^k + 4u_{N-1}^k - 2u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k)$$
$$k = 1, \dots, M$$

Условие устойчивости схемы: $A\tau \leq \frac{h^2}{2}$, $A = max[a(x,t)]$

# 4 Неявная разностная схема с весами

Данная схема является безусловно устойчивой в отличии явной схемы. Пусть вес $\sigma = 1$. Запишем расчетные формулы:

$$a(x_i, t_k)\frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h^2} - \frac{1}{\tau}u_i^k = -\frac{1}{\tau}u_i^{k-1} - f(x_i, t_k), i = 1, \dots, N-1; k = 1, \dots, M$$

Граничные условия:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k + \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_N^k}{h} = \beta(t_k)$$

Данные расчетные формулы можно записать в виде системы с трехдиагональной матрцей коэффициентов:

$$-B_0u_0^k + C_0u_1^k = G_0^k$$

$$A_iu_{i-1}^k = B_0u_i^k + C_0u_{i+1}^k = G_i^k$$
$$A_nu_{N-1}^k - B_Nu_N^k = G_N^k$$

Для решении такой системы воспользуемся методом прогонки.

# 5 Расчет

Применим описанные схемы для решения ряда тестовых задач. Будем брать известную функция $u(x,t)$, подставлять её в исходное уравнение для получения необходимых функций: f, начальых и краевых условий. В качестве результата будем рассматривать максимальное отклонение от искомого решения

# 6 Тесты

В тестах $= 1, = 0.5, h = 0.01$

## 6.1 Тест 1.

$u(x,t) = x^2 + t^2$ подставим в начальные в уравнения и начально-краевые условия и получим:

$$f(x,t) = 2t - 2, \phi(x) = x^2, \alpha(t) = t^2, \beta(t) = 1 + t^2$$

Шаг берём$\tau = \frac{h^2}{2k}$. Явная схема в такой ситуации имеет отклонение равное 8.24e-6. Неявная схема имеет отклонение 7.32e-5.

## 6.2 Тест 1.2

При несоблюдении условия устойчивости явной схемы(при $\tau = 10^-3$) решение, полученное с её помощью расходится. Неявная же схема имеет отклонение 6.24e-4.

## 6.3 Тест 2

$u(x,t) = cos(2x)sin(2t+\frac{\pi}{2})$ подставим в начальные в уравнения и начально-краевые условия и получим:

$$f(x,t) = 2cos(2x)(cos(2t + \frac{\pi}{2}) + 2sin(2t + \frac{\pi}{2})), \phi(x) = cos(2x),$$

$$\alpha(t) = sin(2t + \frac{\pi}{2}), \beta(t) = cos(2)sin(2t + \frac{\pi}{2})$$

Шаг берём$\tau = \frac{h^2}{2k}$. Явная схема в такой ситуации имеет отклонение равное 7,24e-6. Неявная схема имеет отклонение 6.34e-5.

## 6.4 Тест 1.2

При несоблюдении условия устойчивости явной схемы(при $\tau = 10^-3$) решение, полученное с её помощью расходится. Неявная же схема имеет отклонение 1.03e-4.

# 7 Вывод

Численный эксперимент подтверждает теорию: при несоблюдении условия устойчивости явная схема расходится. Решение с помощью неявной схемы имеет меньшую точность. Это происходит из-за ненулевых начальных условий. В связи с этим, предпочтительнее использовать явную схему при ненулевых краевых условиях.