

Основы комбинаторики - I

1 Основные понятия теории множеств

Пример 1.1. Пусть X — это множество всех автомобилей, A — множество всех красных автомобилей. Как выглядит дополнение множества A до множества X ?

Решение. Пусть X есть множество всех автомобилей, A — множество всех красных автомобилей. Тогда $A' = X \setminus A$ есть множество всех автомобилей, окрашенных в цвет, отличный от красного.

Пример 1.2. Пусть A — это дети, не играющие на кларнете, B — люди, умеющие плавать. Кто такие $A \cap B$?

Решение. Очевидно, что множество A детей, не играющих на кларнете, есть подмножество множества C всех людей. Аналогично, множество B людей, не умеющих плавать, есть подмножество множества C . Как следствие, $A \cap B$ есть множество детей, умеющих плавать и не играющих на кларнете.

Пример 1.3. Пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, C = \{2, 4, 6, 8, 10\}, U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Определите элементы множества $(A \cup B) \cap (U \setminus C)$.

Решение. Заметим, что

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad U \setminus C = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Поэтому

$$(A \cup B) \cap (U \setminus C) = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Пример 1.4. Выберите правильные утверждения:

1. Разбиение - это неупорядоченное семейство множеств.
2. Разбиение - это упорядоченное семейство множеств.
3. Разделение - это упорядоченное семейство множеств.
4. Разбиение не может содержать пустые множества.
5. Разделение не может содержать пустые множества.
6. Разбиение может содержать пустые множества.
7. Разделение может содержать пустые множества.
8. Упорядоченное разбиение не может содержать пустые множества.
9. Упорядоченное разбиение может содержать пустые множества.

Решение. Исходя из определения разбиения, упорядоченного разбиения и разделения получаем, что правильными являются варианты 1, 3, 4, 7 и 8.

Пример 1.5. Какие из множеств вида

$$A_1 := \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\},$$

$$A_2 := \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\},$$

$$A_3 := \{(5, 1), (5, 2), (3, 1), (3, 2)\},$$

$$A_4 := \{(5, 1), (5, 2), (1, 3), (2, 3)\},$$

$$A_5 := \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5)\},$$

$$A_6 := \{(1, 3), (2, 5)\}$$

являются декартовыми произведениями множеств $A = \{3, 5\}$ и $B = \{1, 2\}$?

Решение. Подсчитаем декартово произведение множеств A и B :

$$A \times B = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

Заметим также, что элементами декартова произведения являются упорядоченные пары, порядок элементов в которых зависит от порядка сомножителей. Если A и B поменять местами, то получится декартово произведение вида

$$B \times A = \{(1, 3), (2, 3), (1, 5), (2, 5)\}$$

Порядок же следования пар внутри множества $A \times B$ или $B \times A$ никакой роли не играет. Поэтому декартово произведению $A \times B$ равны множества A_1 и A_3 .

Пример 1.6. Какое из множеств

$$A_1 := \{(1, 3)\},$$

$$A_2 := \{(1, 1)\},$$

$$A_3 := \{(1, 3), (1, 1)\},$$

$$A_4 := \{(1, 3), (2, 1)\},$$

$$A_5 := \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 3)\},$$

$$A_6 := \{(1, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 1)\},$$

$$A_7 := \{(1, 2), (2, 1)\}$$

может быть результатом декартова произведения $A \times B$ каких-либо двух множеств A и B ?

Решение. Для решения подобного рода задач нам нужно восстановить исходные множества A и B . Множество A_1 есть декартово произведение множеств $A = \{1\}$ и $B = \{3\}$. Аналогично, A_2 есть декартов квадрат множества $A = \{1\}$. Кроме того, $A_3 = A \times B$, где $A = \{1\}$ и $B = \{3, 1\}$, а множество A_5 есть декартово произведение множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3\}$.

Множество A_4 декартовым произведением пары множеств быть не может. Действительно, для того, чтобы получить пары $(1, 3)$ и $(2, 1)$, нам нужно взять множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{3, 1\}$. Однако в результате произведения $A \times B$ мы получим еще две пары, а именно, $(1, 1)$ и $(2, 3)$, а они в A_4 не входят.

Аналогичная ситуация имеет место для множества A_6 — его элементы можно было бы получить, умножая множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$, но при этом $A \times B$ содержит шесть элементов, а множество A_6 — четыре. Наконец, в множестве A_7 не хватает пар $(2, 2)$ и $(1, 1)$.

2 Основные правила перечислительной комбинаторики

Пример 2.1. Имеются пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

Решение. Согласно правилу произведения, $|X| = |X_1| \cdot |X_2| = 5 \cdot 4 = 20$, где X_1 есть множество различных видов конвертов, а X_2 — множество различных видов марок.

Пример 2.2. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7?

Решение. Пусть X есть множество искомых чисел. Нам нужно сосчитать его мощность. Для этого нам нужно разбить X на блоки и подсчитать количество элементов в каждом блоке. Первый способ это сделать — это разбить X на следующие блоки:

1. X_1 — числа, состоящие из одной цифры;
2. X_2 — числа, состоящие из двух цифр;
3. X_3 — числа, состоящие из трех цифр.

Очевидно, $|X_1| = 1$. Сосчитаем мощность второго блока. Для этого разобьем его, в свою очередь, на два подблока: подблок $X_2^{(1)}$, содержащий семерку в первой позиции, и подблок $X_2^{(2)}$, содержащий ее во второй позиции. В первом подблоке содержатся следующие числа:

$$X_2^{(1)} = \{70, 71, \dots, 76, 78, 79\} \implies |X_2^{(1)}| = 9.$$

Второй подблок состоит из чисел

$$X_2^{(2)} = \{17, 27, \dots, 67, 87, 97\} \implies |X_2^{(2)}| = 8.$$

Для подсчета $|X_3|$ также разобьем блок X_3 на три подблока $X_3^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, в зависимости от того, на каком месте стоит цифра семь. В подблоке $X_3^{(1)}$ семерка должна стоять на первой позиции, а на остальных позициях могут находиться любые цифры от 0 до 9. Поэтому $|X_3^{(1)}| = 9 \cdot 9 = 81$. В подблоке $X_3^{(2)}$ цифра 7 стоит на второй позиции. При этом на первой позиции стоит любая цифра из множества $\{1, 2, \dots, 6, 8, 9\}$, а на последней — любая цифра, отличная от семи. Следовательно, $|X_3^{(2)}| = 8 \cdot 9 = 72$. Мощность подблока $X_3^{(3)}$ считается аналогично, поэтому

$$|X_3| = 81 + 72 + 72 = 225 \implies |X| = 1 + 17 + 225 = 243.$$

Однако данный способ разбиения оптимальным не является. Более разумно разбить X на три блока в зависимости от того, на какой из трех позиций может стоять цифра 7. Для каждого из этих блоков мы можем $9 \cdot 9$ способами выбрать оставшиеся две цифры в числе, поэтому всего имеется

$$|X| = 3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$$

чисел, содержащих единственную цифру 7.

Пример 2.3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

Решение. Первое поле можно выбрать 64-мя способами, а второе — 49-ю. По правилу произведения, общее количество способов равно $64 \cdot 49$, однако для получения окончательного ответа это число нужно разделить на два, так как каждая пара полей была посчитана два раза.

Ответ: $32 \cdot 49 = 1568$.

Пример 2.4. Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

Решение. Разобьем все множество X этих чисел на блоки X_i , $i = 1, \dots, 6$ в зависимости от количества цифр в данном числе. Ясно, что $|X_1| = 10$. В остальных блоках на любую позицию мы можем поставить любую из девяти цифр: на первую позицию — любую цифру от 1 до 9, а на каждую последующую — любую из цифр, не совпадающую с предыдущей. Поэтому, согласно правилу суммы и правилу произведения,

$$|X| = 10 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^6 = \sum_{i=0}^6 9^i = \frac{9^7 - 1}{9 - 1} = 597\,871.$$

Пример 2.5. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся принципом включения-исключения (??). Пусть X_2 , X_3 и X_5 — множества чисел из заданного диапазона, делящихся на двойку, тройку и пятерку. Ясно, что

$$|X_i| = \lfloor |X|/i \rfloor,$$

где $|X| = 100$, $\lfloor p \rfloor$ — целая часть числа p . Поэтому $|X_2| = 50$, $|X_3| = 33$, а $|X_5| = 20$. Далее, $X_2 \cup X_3$ — это множество чисел, делящихся на шестерку. Следовательно,

$$|X_2 \cup X_3| = \lfloor |X|/6 \rfloor = 16.$$

Аналогично,

$$|X_2 \cup X_5| = \lfloor |X|/10 \rfloor = 10, \quad |X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/15 \rfloor = 6, \quad |X_2 \cup X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/30 \rfloor = 3,$$

и поэтому

$$|X'_2 \cap X'_3 \cap X'_5| = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

Пример 2.6. Переплётчик должен переплести 12 различных книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Решение. Вычислить количество способов переплёта, в которых данные цвета присутствуют, не очень просто. Однако достаточно легко получить выражения для количества способов переплёта, в которых данный набор цветов, напротив, отсутствует. Например, если мы знаем, что красный цвет нельзя использовать, то способов переплести книги остаётся, по правилу произведения, 2^{12} . Иными словами, в данной задаче удобно воспользоваться принципом включения-исключения.

Пусть X — все способы переплести книги, A, B, C — те способы, при которых не используется красный, синий, коричневый цвет, соответственно. Искомое количество способов переплёта равно $|A' \cap B' \cap C'|$. По формуле включения-исключения, это количество равно

$$|X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 1^{12} - 0.$$

Ответ: 519156.

3 Принцип Дирихле

Пример 3.1. В ящике лежат десять белых и двенадцать черных носков. Какое минимальное количество носков нужно вытащить, чтобы на выходе гарантированно получить пару носков одинакового цвета?

Решение. В этой задаче в роли “ящиков”, фигурирующих в формулировке принципа Дирихле, выступают два цвета — белый и черный. Для того, чтобы хотя бы в одном из этих “ящиков” гарантированно оказалось двое носков, нам, согласно принципу Дирихле, достаточно вытащить трое носков.

Пример 3.2. Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску (стандартного размера, 8×8) так, чтобы эти короли не били друг друга?

Решение. Легко расставить 16 королей: например, можно в каждую белую клетку, стоящую в чётном ряду, поместить по королю. Докажем, что больше расставить нельзя. Разобьем доску на 16 квадратов 2×2 клетки. При расстановке 17-ти или большего числа королей хотя бы в одном таком квадрате будут стоять два короля. По условию такая ситуация невозможна, так как эти короли будут бить друг друга.

Пример 3.3. Сколько людей нужно выбрать из группы, состоящей из двадцати супружеских пар, чтобы в выборку гарантированно вошла хотя бы одна супружеская пара?

Решение. В данной задаче мы каждую супружескую пару можем рассматривать как один из двадцати ящиков. Нам нужно, чтобы хотя бы в одном ящике находилось два человека. Для этого нам достаточно взять количество людей, на единицу большее, чем количество ящиков, то есть нам достаточно взять 21 человека.

Пример 3.4. Сколько человек должно находиться в комнате, чтобы по крайней мере у троих из них день рождения гарантированно был в одном месяце?

Решение. В данной задаче у нас в роли ящиков выступают месяцы. Нам нужно, чтобы в одном “ящике” оказалось по крайней мере 3 “предмета”. Это возможно в случае, когда у нас 25 человек — 24 из них мы еще можем распределить так, чтобы в каждом “ящике” находилось не более двух человек, а уже 25 человек мы так распределить не сможем.

Пример 3.5. Сколько чисел нужно выбрать из последовательности

$$\{1, 2, 3, \dots, 20\},$$

чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна 21?

Решение. И в этой задаче у нас имеется 10 ящиков — а именно, 10 пар чисел, сумма которых дает 21:

$$1 + 20 = 2 + 19 = \dots = 10 + 11.$$

Для того, чтобы хотя бы в одном из ящиков гарантированно находилось хотя бы два предмета, достаточно взять 11 предметов, то есть выбрать одиннадцать чисел.

4 Подсчет k -сочетаний из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

Пример 4.1. В магазине продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить в нем восемь различных открыток?

Решение. Задача сводится к подсчету количества восьмиэлементных подмножеств десятиэлементного множества. Это количество описывается биномиальным коэффициентом

$$\binom{10}{8} = 45.$$

Пример 4.2. Сколькими способами можно расставить 15 одинаковых шашек на доске размерами 9×9 ?

Решение. Любая расстановка пятнадцати шашек по клеткам доски 9×9 выделяет в множестве $X = [9] \times [9]$, $[9] = \{1, 2, \dots, 9\}$, некоторое 15-элементное подмножество. Мощность множества X равна $|X| = 9 \cdot 9 = 81$, а количество различных подмножеств мощности 15 задается биномиальным коэффициентом

$$\binom{81}{15} = 8144022047817960.$$

Пример 4.3. Задание на программирование: сгенерировать все возможные k -сочетания из n элементов.

Решение. Опишем алгоритм генерации k -элементных подмножества n -элементного множества X . Без ограничения общности можно принять $X = \{0, \dots, n-1\}$. Тогда каждому k -элементному подмножеству взаимно однозначно соответствует возрастающая последовательность длины k с элементами из X . Например, подмножеству $\{3, 5, 1\}$ соответствует последовательность $(1, 3, 5)$. Можно легко указать алгоритм, с помощью которого генерируются все такие последовательности в лексикографическом порядке. Достаточно с этой целью заметить, что при таком порядке последовательностью, непосредственно следующей за последовательностью (a_0, \dots, a_{k-1}) , является последовательность вида

$$(b_1, \dots, b_k) = (a_0, \dots, a_{p-1}, a_p + 1, a_p + 2, \dots, a_p + k - p + 1), \quad \text{где} \quad p = \max\{i : a_i < n - k + 1\}.$$

Более того, последовательностью, непосредственно следующей за (b_1, \dots, b_k) , является последовательность

$$(c_1, \dots, c_k) = (b_1, \dots, b_{p'-1}, b_{p'} + 1, b_{p'} + 2, \dots, b_{p'} + k - p' + 1),$$

где

$$p' = \begin{cases} p - 1, & \text{если } b_k = n, \\ k, & \text{если } b_k < n \end{cases}$$

Мы предполагаем, что последовательности (a_1, \dots, a_k) и (b_1, \dots, b_k) отличаются от $n-k, \dots, n-1$ — последней последовательности в нашем порядке.

Это приводит к следующему простому алгоритму:

```
for i:=0 to k-1: A[i]:=i
p := k-1
```

```

while p >= 0:
    output(A)
    if A[k-1] == n-1:
        p := p - 1
    else:
        p := k-1
    if p >= 0:
        for i:= k-1 to p:
            A[i] = A[p] + i - p + 1

```

Пример 4.4. Доказать комбинаторно тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

Решение. Пусть у нас имеется группа, состоящая из n мужчин и m женщин. По определению, количество способов выбрать из нее команду, состоящую из k человек, равно биномиальному коэффициенту $\binom{n+m}{k}$. С другой стороны, мы можем выбирать эту команду так, чтобы в ней было ровно i мужчин и $(k-i)$ женщин. При фиксированном i количество способов подбора такой команды, согласно правилу произведения, равно $\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$. Меняя теперь i от нуля до k , мы вновь получим общее количество способов образовать требуемую команду.

Пример 4.5. В магазине продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить в нем восемь открыток?

Решение. В данной задаче открытки не обязательно различны. Следовательно, количество способов купить восемь открыток описывается коэффициентом

$$\left(\binom{10}{8}\right) = \binom{17}{8} = 24310.$$

Пример 4.6. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

Решение. Заметим, прежде всего, что вместо количества шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47, проще сосчитать количество шестизначных чисел, сумма цифр в которых больше или равна 48. Действительно, простейшее шестизначное число, сумма цифр в котором равна 48, есть число 888888. Оно получается из числа 999999 вычитанием из каждого разряда по единице. Теперь несложно понять, что и любое другое число, сумма цифр в котором равна 48, получается вычитанием шести единиц из любых разрядов числа 999999. Любое же число, сумма цифр в котором больше 48, получается вычитанием пяти или менее единиц из любых разрядов числа 999999. Количество способов вычесть i единиц из числа 999999 равно, очевидно, $\binom{6}{i}$. Общее количество шестизначных чисел равно $9 \cdot 10^5$. Следовательно, количество чисел, сумма цифр в котором строго меньше 48, равно

$$9 \cdot 10^5 - \sum_{i=0}^6 \left(\binom{6}{i}\right) = 9 \cdot 10^5 - \sum_{i=0}^6 \binom{5+i}{i} = 899076.$$

Пример 4.7. Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n , в которых никакие две единицы не стоят рядом?

Решение. Любая бинарная строка длины n задает нам некоторое подмножество множества X мощности $|X| = n$ с помощью следующего алгоритма: если на i -м месте строки у нас стоит единица, мы добавляем элемент x_i в подмножество, а если там стоит ноль, то элемент x_i в подмножество не добавляем. Ясно, что такой алгоритм задает биекцию между множеством всех бинарных строк длины n и множеством всех подмножеств n -множества X . Поэтому количество бинарных строк, содержащих k единиц, совпадает с количеством всех k -элементных подмножеств множества X и равно $\binom{n}{k}$.

Для ответа на второй вопрос рассмотрим произвольную строку из нулей и единиц требуемого вида, и после каждой из первых $(k - 1)$ -й единиц удалим стоящий справа от единицы ноль. В результате мы получим обычную строку из нулей и единиц длины $n - k + 1$. Количество таких строк равно $\binom{n-k+1}{k}$.