Производные

3.1. Дифференцируемость и производная

1. а) Найдите производную функции $\dfrac{1-x+x^2}{1+x^2+x^4}$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной частного

$$\left(\frac{1-x+x^2}{1+x^2+x^4}\right)' = \frac{(1-x+x^2)'(1+x^2+x^4)-(1-x+x^2)(1+x^2+x^4)'}{(1+x^2+x^4)^2} =$$

$$= \frac{(-1+2x)(1+x^2+x^4)-(1-x+x^2)(2x+4x^3)}{(1+x^2+x^4)^2} = \frac{-1+x^2-4x^3+3x^4-2x^5}{(1+x^2+x^4)^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}.$$

б) Найдите производную функции $\dfrac{1+x^2+x^3}{1-x+x^4}$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной частного

$$\left(\frac{1+x^2+x^3}{1-x+x^4}\right)' = \frac{(1+x^2+x^3)'(1-x+x^4)-(1+x^2+x^3)(1-x+x^4)'}{(1-x+x^4)^2} =$$

$$= \frac{(2x+3x^2)(1-x+x^4)-(1+x^2+x^3)(-1+4x^3)}{(1-x+x^4)^2} = -\frac{-2x-2x^2+2x^5+6x^3+x^6-1}{(1-x+x^4)^2}.$$

в) Найдите производную функции $\dfrac{1-x^2+x^4}{1-x+x^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной частного

$$\left(\frac{1-x^2+x^4}{1-x+x^2}\right)' = \frac{(1-x^2+x^4)'(1-x+x^2)-(1-x^2+x^4)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(-2x+4x^3)(1-x+x^2)-(1-x^2+x^4)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{-4x+x^2+4x^3-3x^4+2x^5+1}{(1-x+x^2)^2}.$$

2. а) Найдите производную функции $e^{x^2}\cdot\sin\left(\dfrac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

Решение.

$$\left(e^{x^2}\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)\right)' = \left(e^{x^2}\right)'\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right) + e^{x^2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)\right)' =$$

$$= e^{x^2}\left(x^2\right)'\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right) + e^{x^2}\cdot\cos\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)\cdot\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)' =$$

$$= 2xe^{x^2}\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right) + e^{x^2}\cdot\cos\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)\cdot\frac{(\ln x)'\cdot\operatorname{arctg} x-\ln x\cdot(\operatorname{arctg} x)'}{(\operatorname{arctg} x)^2} =$$

$$= 2xe^{x^2}\cdot\sin\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right) + e^{x^2}\cdot\cos\left(\frac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}\right)\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg} x-\ln x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg} x)^2}.$$

б) Найдите производную функции $e^{x^3}\cdot\cos\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)$.

Решение.

$$\left(e^{x^3}\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)\right)' = \left(e^{x^3}\right)'\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right) + e^{x^3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)\right)' =$$

$$= e^{x^3}\left(x^3\right)'\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right) - e^{x^3}\cdot\sin\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)' =$$

$$= 3x^2e^{x^3}\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right) - e^{x^3}\cdot\sin\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)\cdot\frac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot\ln x-\operatorname{arctg} x\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$

$$= 3x^2e^{x^3}\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right) - e^{x^3}\cdot\sin\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}\right)\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x-\operatorname{arctg} x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}.$$

в) Найдите производную функции $e^{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln x}{\cos x}\right)$.

Решение.

$$\left(e^{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)\right)' = (e^{\sqrt{x}})'\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right) + e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)\right)' =$$

$$= e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right) + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\ln x}{\cos x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right) + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\ln x}{\cos x}\right)^2}\cdot\frac{(\ln x)'\cdot\cos x - \ln x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\cos x}\right) + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\ln x}{\cos x}\right)^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos x + \ln x\cdot\sin x}{(\cos x)^2}.$$

3. а) Найдите производную функции $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

Решение. Для вычисления производной функции $f(x) = (a(x))^{b(x)}$ (с естественными ограничениями на функции a и b) воспользуемся преобразованием:

$$f(x) = a(x)^{b(x)} = e^{\ln(a(x)^{b(x)})} = e^{b(x)\ln a(x)}.$$

Тогда

$$f'(x) = \left(e^{b(x)\ln a(x)}\right)' = e^{b(x)\ln(a(x))}\big(b(x)\ln a(x)\big)' = (a(x))^{b(x)}\big(b(x)\ln a(x)\big)'.$$

Вычислим производную заданной функции

$$\left((\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}\right)' = (\sin x)^{\cos x}(\cos x\ln(\sin x))' + (\cos x)^{\sin x}(\sin x\ln(\cos x))' =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \cos x\frac{\cos x}{\sin x}\right) + +(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x - \sin x\frac{\sin x}{\cos x}\right).$$

б) Найдите производную функции $(\arcsin x)^{\arccos x} + (\arccos x)^{\arcsin x}$.

$$\left((\arcsin x)^{\arccos x} + (\arccos x)^{\arcsin x}\right)' =$$

$$= (\arcsin x)^{\arccos x}(\arccos x\ln(\arcsin x))' + (\arccos x)^{\arcsin x}(\arcsin x\ln(\arccos x))' =$$

$$= (\arcsin x)^{\arccos x}\left(-\frac{\ln(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$$

$$+ (\arccos x)^{\arcsin x}\left(\frac{\ln(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right).$$

в) Найдите производную функции $(\ln x)^{\operatorname{arctg} x} + (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$.

$$\left((\ln x)^{\operatorname{arctg} x} + (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}\right)' =$$

$$= (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x\ln(\ln x))' + (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}(\ln x\ln(\operatorname{arctg} x))' =$$

$$= (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln(\ln x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x\ln x}\right) + (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{x} + \frac{\ln x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right).$$

3.2. Теоремы о среднем

1. Докажите, что уравнение $x^2 = \cos x$ имеет ровно два решения.

Решение. Положим $f(x) = x^2 - \cos x$ и продифференцируем функцию f

$$f'(x) = 2x + \sin x,$$
$$f''(x) = 2 + \cos x.$$

Если бы решений уравнения $f(x) = 0$ было бы три: $x_1 < x_2 < x_3$, то по теореме Ролля уравнение $f'(x) = 0$ умело бы решения на интервалах (x_1, x_2) и (x_2, x_3). Обозначим их $y_1 < y_2$. Вновь применяя теорему Ролля, получим, что тогда уравнение $f''(x) = 0$ имело бы решение на интеравле (y_1, y_2), что невозможно, поскольку $f''(x) = 2 + \cos x > 0$.

Так как $f(-\pi/2) = f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} > 0$ и $f(0) = -1 < 0$, а функция непрерывна, то на каждом из интервалов $(-\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$ по теореме Больцано–Коши найдется корень функции.

2. На интервале $(0, 1)$ найдите такую точку c, что касательная к графику функции $f(x) = x^3$ в точке (c, c^3) будет параллельна хорде графика, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Ответ: $c = 1/\sqrt{3}$.

Решение. Напишем уравнение касательной к функции f в точке c:

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = 3c^2(x - c) + c^3 = 3c^2 x - 2c^3.$$

Хорда графика, соединяющая точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, имеет уравнение $y = x$. По условию параллельности получаем

$$3c^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1/\sqrt{3}.$$

3. Про функцию f известно, что $f(2) = 4$ и $f'(x) \leqslant 3$ при $2 \leqslant x \leqslant 5$. Про какое наименьшее число A можно утверждать, что $f(5) \leqslant A$?

Ответ: 13.

Решение. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию задачи, то по следствию тероемы Лагранжа $f(5)-f(2) \leqslant (5-2) \max\limits_{x\in(2,5)} f'(x) \leqslant (5-2)\cdot 3 = 9$. Следовательно, $f(5) \leqslant f(2)+9 = 13$. Поэтому $A = 13$ подходит.

С другой стороны, число A не меньше 13, поскольку функция $f(x) = 3x-2$ удовлетворяет условию и $f(5) = 13$.

4. Удовлетворяют ли функции условиям теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Отметьте верные утверждения.

Решение. Поясним пункты, не являющиеся верными.

☐ Функция $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^4}$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$.

Неверно. Функция терпит разрыв в точке $x = 0$.

☐ Функция $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ e^x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1, 1]$.

Неверно, поскольку $f(-1) = 0 \neq e = f(1)$. Нарушается лишь это условие, поскольку функция дифференцируема на $[-1, 1]$.

☑ Функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ x^2 - 2x + 2 & \text{если } x \geqslant 1 \end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[-2, 2]$.

Верно. Непрерывность и дифференцируемость функции в точках ± 1 проверяется с помощью вычисления левого и правого пределов и левой и правой производных в этих точках.

☑ Функция $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[-1,1]$.
Верно.

☐ Функция $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x<1,\\ 1/x, & \text{если } x\geqslant 1\end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[0,3]$.
Неверно. Функция не дифференцируема в точке $x=1$.

☐ Функция $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.
Неверно. Функция не дифференцируема в точке $x=0$.

☑ Функция $f(x)=\sqrt[3]{x^4(x+1)}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$.
Верно.

☑ Функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 4x-x^2-2, & \text{если } x>1\end{cases}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[0,4]$.
Верно.

☐ Функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^3$ удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке $[-1,1]$.
Неверно, так как $g'(0)=0$.

☐ Функции $f(x)=e^x$ и $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке $[-2,2]$.
Неверно, так как $g'(0)=0$.

☑ Функции $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ и $g(x)=e^x$ удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке $[-2,2]$.
Верно.

☑ Функции $f(x)=x^3$ и $g(x)=\cos x$ удовлетворяет условиям теоремы Коши на отрезке $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.
Верно.

5. Докажите, что при положительных x справедливо равенство $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, где $\frac{1}{4}<\theta(x)<\frac{1}{2}$. Найдите $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)=1/4$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=1/2$.

Решение. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)=\sqrt{x}$ при $a=x$ и $b=x+1$:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\Rightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{c}}(x+1-x),\quad c\in(x,x+1).$$

Для вычисления пределов найдем явную формулу для $\theta(x)$. Домножим левую часть на сопряженное и перевернем дроби, получим равенство

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}.$$

Следовательно,

$$x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x=4(x+\theta(x)).$$

Таким образом,

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x(x+1)}-x}{2}.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0+}\theta(x)=1/4$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x(x+1)}-x}{2}\right)=\frac{1}{4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)-x^2}{2(\sqrt{x(x+1)}+x)}=$$
$$=\frac{1}{4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(\sqrt{x(x+1)}+x)}=\frac{1}{4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

6. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[a,b]$ при $a,b>0$. Найдите точку $c\in(a,b)$, для которой выполнено утверждение теоремы Лагранжа. (Не забудьте проверить, что найденная точка действительно принадлежит интервалу (a,b).)

Ответ: $\left(\frac{a^{2/3}+(ab)^{1/3}+b^{2/3}}{3}\right)^{3/2}$.

Решение. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\Rightarrow\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}(b-a),\quad c\in(a,b).$$

Выразим из равенства c:

$$c=\left(\frac{b-a}{3\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right)^{3/2}=\left(\frac{a^{2/3}+(ab)^{1/3}+b^{2/3}}{3}\right)^{3/2}.$$

Поскольку $a<b$,

$$a=\left(\frac{a^{2/3}+(a\cdot a)^{1/3}+a^{2/3}}{3}\right)^{3/2}<\left(\frac{a^{2/3}+(ab)^{1/3}+b^{2/3}}{3}\right)^{3/2}<\left(\frac{b^{2/3}+(b\cdot b)^{1/3}+b^{2/3}}{3}\right)^{3/2}=b.$$

7. Докажите тождество

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}-\pi-2\operatorname{arctg}x, & \text{если } x\leqslant-1,\\ 2\operatorname{arctg}x, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \pi-2\operatorname{arctg}x, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Указание. Для этого докажите, что производные левой и правой частей совпадают на лучах (без концевых точек) и на интервале, а также проверьте, что сами функции на указанных лучах и отрезке равны хотя бы в одной точке.

Контрольный вопрос. А на какую теорему нужно дальше сослаться в такой схеме рассуждения?

Решение. Обозначим через f и g функции, стоящие в левой и правой частях. Заметим, что функция g непрерывна, поскольку $\operatorname{arctg}(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}$. Также она дифференцируема на $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ и $(1,+\infty)$, поскольку arctg дифференцируем во всех точках. Кроме того функция f дифференцируема при $x\neq\pm1$, поскольку тогда $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|<1$, а arcsin дифференцируем, когда значения аргумента по модулю меньше 1.

Посчитаем производные левой и правой частей:

$$f'(x)=\frac{\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{1+x^2}{|1-x^2|}=\frac{2\operatorname{sign}(1-x^2)}{1+x^2},$$

где через $\operatorname{sign}t$ обозначен знак числа t. Ровно тот же результат получается, если продифференцировать функцию g. Таким образом, $f'(x)=g'(x)$ при $x\neq\pm1$. Осталось заметить, что $f(-1)=-\pi/2=g(-1)$ и $f(1)=\pi/2=g(1)$. Поэтому функции f и g совпадают по следствию теоремы Лагранжа.

3.3. Производная и монотонность

1. Отметьте функции, которые (строго или нестрого) монотонно возрастают на всей прямой.

Решение. При необходимости вычислим производные.

☐ $\sin^2 x$

Неверно. Периодическая функция, отличная от константы, не может быть монотонной на всей прямой.

☑ $x - \sin x$

Верно, так как $(x - \sin x)' = 1 - \cos x \geqslant 0$ при всех x.

☑ $x + \cos x - 2$

Верно, так как $(x + \cos x - 2)' = 1 - \sin x \geqslant 0$ при всех x.

☐ $x + 2\sin x$

Неверно, так как $(x + 2\sin x)' = 1 + 2\cos x$ меняет знак.

☐ $\operatorname{arctg}(2 - x)$

Неверно, так как $\operatorname{arctg}(2 - x)$ монотонно убывает.

☑ $x - \operatorname{arctg} x$

Верно, так как $(x - \operatorname{arctg} x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geqslant 0$ при всех x.

☐ $e^x - x$

Неверно, так как $(e^x - x)' = e^x - 1$ меняет знак.

☑ $e^x + 3x$

Верно. Сумма возрастающих функций возрастает.

2. При каком наименьшем значении параметра a функция $ax^3 - 12x^2 + 6x + 1$ монотонно возрастает?

Ответ: 8.

Решение. Найдем наименьшее a, при котором производная функции неотрицательна для всех x.

$$(ax^3 - 12x^2 + 6x + 1)' = 3ax^2 - 24x + 6 \geqslant 0 \iff ax^2 - 8x + 2 \geqslant 0.$$

При $a = 0$ это неверно. Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим дискриминант получившегося квадратного трехчлена:

$$\mathcal{D} = 64 - 8a = 8(8 - a) \leqslant 0 \iff a \geqslant 8.$$

Наименьшее подходящее $a = 8$.

3. При $0 < x \leqslant 1$ докажите неравенство $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{arctg} x$ и найдем ее производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2 + 2x^2 - x^2(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2 - x^4}{2(1+x^2)} = \frac{x^2(1-x^2)}{2(1+x^2)}.$$

Таким образом, $f'(x) > 0$ при $0 < x \leqslant 1$. Следовательно, при $0 < x \leqslant 1$ функция f строго возрастает и, в частности, $0 = f(0) < f(x)$. То есть

$$\operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{6}.$$

Левое неравенство доказывается аналогично.

3.4. Правило Лопиталя

1. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{\ln(x-2)}\right)$.

Ответ: $-0,5$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя, чтобы избавиться от неопределенности вида $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\ln(x-2)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)-(x-3)}{(x-3)\ln(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x-2}-1}{\ln(x-2)+\frac{x-3}{x-2}}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1-(x-2)}{(x-2)\ln(x-2)+x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{\ln(x-2)+\frac{x-2}{x-2}+1}=-\frac{1}{2}.$$

2. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}$.

Ответ: -2.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя, чтобы избавиться от неопределенности вида $0/0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-\cos x}{\cos^2 x}=-2.$$

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$.

Ответ: 0.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя, чтобы избавиться от неопределенности вида $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{1/x}$.

Ответ: 1.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя, чтобы избавиться от неопределенности вида ∞^0:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1,\quad \text{так как}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

5. Упорядочите функции по скорости роста при $x\to+\infty$. Т.е. функция f должна быть выше функции g, если $f=o(g)$ при $x\to+\infty$. При необходимости воспользуйтесь правилом Лопиталя.

Ответ: $\ln\ln x\ll\ln^{100}x\ll\sqrt[100]{x}\ll x^{100}\ll e^{\ln^2 x}\ll e^{\sqrt{x}}\ll e^x$ (здесь запись $f\ll g$ означает, что $f=o(g)$)

Решение. Поскольку $\ln x=o(x^p)$ при любом $p>0$ и $x^p=o(e^x)$ при любом p (это обсуждалось на лекции), сразу понятно, что $\ln^{100}x=o(\sqrt[100]{x})$ и $x^{100}=o(e^x)$. Кроме того, очевидно и, что $\sqrt[100]{x}=o(x^{100})$.

Для того чтобы сравнить $e^{f(x)}$ и $e^{g(x)}$ нужно найти предел $e^{f(x)}/e^{g(x)}=e^{f(x)-g(x)}$. Таким образом, соотношение $e^{f(x)}=o(e^{g(x)})$ равносильно тому, что $f(x)-g(x)\to-\infty$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к $+\infty$ для этого достаточно чтобы было выполнено соотношение $f(x)=o(g(x))$. Действительно, $f(x)-g(x)=o(g(x))-g(x)\sim -g(x)\to-\infty$.

Поэтому соотношения $\sqrt{x}=o(x)$ и $\ln^2 x=o(\sqrt{x})$ дают нам соотношения $e^{\sqrt{x}}=o(e^x)$ и $e^{\ln^2 x}=o(e^{\sqrt{x}})$. С помощью похожих соображений можно сравнить и функции $x^{100}=e^{100\ln x}$ и $e^{\ln^2 x}$, поскольку $100\ln x=o(\ln^2 x)$ Стало быть, $x^{100}=o(e^{\ln^2 x})$.

Наконец, с помощью правила Лопиталя сравним функции $\ln\ln x$ и $\ln^{100} x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln^{100} x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}\cdot 100\cdot\ln^{99} x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{100\ln^{100} x}=0.$$

Следовательно, $\ln\ln x=o((\ln x)^{100})$.

6. Упорядочите функции по скорости роста при $x\to+\infty$. Т.е. функция f должна быть выше функции g, если $f=o(g)$ при $x\to+\infty$. При необходимости воспользуйтесь правилом Лопиталя. Не забывайте про то, что нужно делать, если одна функция возводится в степень другой функции.

Ответ: $x^{100}\ll(\ln x)^{\ln x}\ll x^{\ln x}\ll e^x\ll(\ln x)^x\ll x^x\ll e^{x^2}$ (здесь запись $f\ll g$ означает, что $f=o(g)$)

Как и в решении предыдущей задачи будем сранивать логарифмы интересующих нас функций:

$$100\ln x,\quad \ln x\ln\ln x,\quad \ln^2 x,\quad x,\quad x\ln\ln x,\quad x\ln x,\quad x^2.$$

Мы уже знаем, что $x\ln x=o(x^2)$ и $\ln^2 x=o(x)$. Кроме того поскольку $\ln\ln x\to+\infty$, есть два очевидных соотношения $100\ln x=o(\ln x\ln\ln x)$ и $x=o(x\ln\ln x)$. Оставшиеся выражения выстраиваются в нужном порядке, если сравнить $\ln\ln x$ и $\ln x$, что мы сделаем с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0.$$

Поэтому $\ln x\ln\ln x=o(\ln^2 x)$ и $x\ln\ln x=o(x\ln x)$.

3.5. Формула Тейлора

1. Найдите сотую производную функции $\sin x + 2^x + x^3 + \dfrac{1}{x}$.

Ответ: $\sin x + (\ln 2)^{100} 2^x + 100! x^{-101}$

Решение. Заметим, что

$$\begin{array}{cccc}
(\sin x)' = \cos x, & (\cos x)' = -\sin x, & (-\sin x)' = -\cos x, & (-\cos x)' = \sin x; \\
(2^x)' = 2^x \ln 2, & (2^x \ln 2)' = 2^x \ln^2 2, & (2^x \ln^2 2)' = 2^x \ln^3 2, & (2^x \ln^3 2)' = 2^x \ln^4 2; \\
(x^3)' = 3x^2, & (3x^2)' = 6x, & (6x)' = 6, & (6)' = 0; \\
(x^{-1})' = -x^{-2}, & (-x^{-2})' = (-1)\cdot(-2)x^{-3}, & (2x^{-3})' = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)x^{-4} &
\end{array}$$

Пользуясь замеченными закономерностями, получим

$$\left(\sin x + 2^x + x^3 + \frac{1}{x}\right)^{(100)} = \sin x + (\ln 2)^{100} 2^x + 100! x^{-101}.$$

2. Оцените погрешность в формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$ в точке $x_0 = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{1+2x} = 1 + \frac{2x}{3} - \frac{4x^2}{9} + r(x).$$

В ответе укажите разделенные пробелом левый и правый концы отрезка, в котором может меняться $r(x)$.

Ответ: 0, $\frac{5}{81}$

Решение. Вычислим $r(x)$ и исследуем его на монотонность на $[0, \frac{1}{2}]$.

$$f'''(x) = \left((1+2x)^{\frac{1}{3}}\right)''' = \left(\frac{2}{3}(1+2x)^{\frac{-2}{3}}\right)'' = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot 2\cdot(1+2x)^{\frac{-5}{3}}\right)' =$$
$$= \frac{-8}{9}\cdot\frac{-5}{3}\cdot 2\cdot(1+2x)^{\frac{-8}{3}} = \frac{80}{27}\cdot(1+2x)^{\frac{-8}{3}}.$$

Тогда остаток в форме Лагранжа имеет вид

$$r(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-0)^3 = \frac{40}{81}\frac{x^3}{(1+2c)^{8/3}}$$

для некоторой точки $c \in (0, \frac{1}{2})$. Отсюда видно, что

$$0 \leqslant r(x) \leqslant \frac{5}{81}.$$

Замечание. Если сравнивать $\sqrt[3]{1+2x}$ с многочленом Тейлора $1 + \dfrac{2x}{3} - \dfrac{4x^2}{9}$, то можно понять, что их разность монотонно возрастает и достигает в точке $\frac{1}{2}$ своего наибольшего значения $\sqrt[3]{2} - \frac{11}{9} \approx 0,0376$. Это значение гораздо меньше, чем полученная оценка остатка в форме Лагранжа $\frac{5}{81} \approx 0,0617$.

3. Напишите формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ при $n = 3$. Чтобы система поняла ответ, он должен быть в тех же обозначениях, что и в лекции: x — переменная, c — точка в остаточном члене.

Ответ: $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4/(c-1)^5$

Решение. Вычислим производные функции f до порядка $n = 4$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \frac{1}{x-1},\\
f'(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2},\\
f''(x) &= \frac{2}{(x-1)^3},\\
f'''(x) &= -\frac{6}{(x-1)^4},\\
f^{IV}(x) &= \frac{24}{(x-1)^5}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-2)^4 =\\
&= 2 + \frac{-1}{1!}(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \frac{-6}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!(c-1)^5}(x-2)^4 =\\
&= 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(c-1)^5}.
\end{aligned}$$

4. С помощью формулы Тейлора с остатком в форме Пеано найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x - 3x\cos x - x^3}{x^5}$.

Ответ: $-1/10$

Решение. Напишем формулы Тейлора в окрестности нуля.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \qquad \text{и} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Тогда

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) \qquad \text{и}$$

$$3\sin x - 3x\cos x - x^3 = 3x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{40} + o(x^5) - 3x + \frac{3x^3}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5) - x^3 = \frac{-x^5}{10} + o(x^5).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - 3x\cos x - x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^5}{10} + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{10}.$$

3.6. Экстремумы функций

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $3 \cdot |x^2 - 1| - x^3$ на отрезке $[-2, 2]$.
Ответ: наименьшее значение -1, наибольшее значение 17.

Решение. Раскроем модуль

$$3 \cdot |x^2 - 1| - x^3 = \begin{cases} 3 - 3x^2 - x^3, & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ 3x^2 - 3 - x^3, & \text{если } 1 < |x| \leqslant 2 \end{cases}.$$

Исследуем на монотонность с помощью производной.

$$(3 - 3x^2 - x^3)' = -6x - 3x^2 = -3x(2 + x),$$
$$(3x^2 - 3 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x).$$

Исследовав знаки производной на каждом из промежутков, получим:

$$f \searrow \text{ на } [-2, -1], \quad f \nearrow \text{ на } [-1, 0], \quad f \searrow \text{ на } [0, 1], \quad f \nearrow \text{ на } [1, 2].$$

Таким образом,

$$\min_{x \in [-2,2]} = \min\{f(-1), f(1)\} = \min\{1, -1\} = -1,$$
$$\max_{x \in [-2,2]} = \max\{f(-2), f(0), f(2)\} = \max\{17, 3, 1\} = 17.$$

2. Найдите точки локальных минимумов и точки локальных максимумов функции $\dfrac{1}{x^4 - 8x^2 + 3}$.
Ответ: точка минимума 0; точки максимума -2 и 2.

Решение. Исследуем функцию на монотонность.

$$\left(\frac{1}{x^4 - 8x^2 + 3}\right)' = -\frac{4x^3 - 16x}{(x^4 - 8x^2 + 3)^2} = -\frac{4x(x-2)(x+2)}{(x^2 - 4 + \sqrt{13})^2 (x^2 - 4 - \sqrt{13})^2}.$$

Производная меняет знак в точках $-2, 0, 2$. Рассмотрев знаки производной, получим, что в нуле производная меняет знак с $-$ на $+$, в $x = \pm 2$ с $+$ на $-$. Значит, $x = 0$ точка локального минимума, $x = \pm 2$ точки локальных максимумов.

3. Найдите инфимум и супремум функции $x^2 e^{-x}$ на луче $[1, +\infty)$. Ответ дайте в виде разделенных пробелом десятичных дробей, округленных до трех знаков после запятой.
Ответ: инфимум 0, супремум $4e^{-2}$.

Решение. Исследуем функцию на монотонность на луче $[1, +\infty)$.

$$\left(x^2 e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x).$$

Критическими точками являются $x = 0$ и $x = 2$. Рассмотрев знаки производной, получим

$$f \nearrow \text{ на } [1, 2], \quad f \searrow \text{ на } [2, +\infty).$$

Супремум равен $f(2) = 4e^{-2}$. Для нахождения инфимума выберем меньшее из $f(1)$ и $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$, про который мы уже знаем, что он равен 0. Следовательно, инфимум равен нулю.

4. Даны положительные числа a, b, c и d. Установите, при каком положительном x функция $f(x) = \dfrac{a+b+c+d+x}{\sqrt[5]{abcdx}}$ принимает наименьшее значение.

Ответ: $(a+b+c+d)/4$.

Решение. Исследуем функцию на монотонность на положительной полуоси.

$$\left(\frac{a+b+c+d+x}{\sqrt[5]{abcdx}}\right)' = \left(\frac{a+b+c+d}{\sqrt[5]{abcd}}x^{-1/5} + \frac{1}{\sqrt[5]{abcd}}x^{4/5}\right)' =$$
$$= -\frac{a+b+c+d}{5\sqrt[5]{abcd}}x^{-6/5} + \frac{4}{5\sqrt[5]{abcd}}x^{-1/5} = \frac{4x-(a+b+c+d)}{5\sqrt[5]{abcd}\cdot x^{6/5}}.$$

Критическими точками являются $x = 0$ и $x = (a+b+c+d)/4$. Рассмотрев знаки производной, получим

$$f \searrow \text{ на } (0, (a+b+c+d)/4], \quad f \nearrow \text{ на } [(a+b+c+d)/4, +\infty).$$

Следовательно, минимум достигается при $x = (a+b+c+d)/4$.

5. Отметьте верные утверждения.

Решение. Поясним неочевидные пункты.

☐ $\big(|x^3+2x^2|\big)' = |3x^2+4x|$.

Неверно, так как производная имеет разрыв в точке перемены знака функции x^3+2x^2 $(x=-2)$.

☑ $\big(\sqrt[3]{f(x)}\big)' = \dfrac{f'(x)}{3\sqrt[3]{(f(x))^2}}$.

Верно по формуле производной композиции.

☐ $\big(f(\sqrt[3]{x})\big)' = \dfrac{f'(x)}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Неверно, так как по формуле производной композиции $\big(f(\sqrt[3]{x})\big)' = \dfrac{f'(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

☑ Если существует $f'(5)$, то $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$.

Верно, так как существование производной в точке влечет непрерывность в этой точке.

☑ Если $f(x) = x^4$, то $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = 108$.

Верно, так как $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = 4\cdot 3^3 = 108$.

☐ Если $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$ и $f'(1) = 0$, то функция f имеет в точке $x = 1$ либо локальный минимум, либо локальный максимум.

Неверно. Например, $f(x) = (x-1)^3$.

☐ Если $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ имеет в точке $c \in [1,2]$ абсолютный минимум, то $f'(c) = 0$.

Неверно. Функция может быть недифференцируемой в точке c. Также точка c может оказаться концом отрезка и тогда для нее вывод неверен даже при наличии дифференцируемости.

☑ Если $f'(x) > 0$ при $x \in (2,5)$, то функция f строго монотонно возрастает на $(2,5)$.

Верно.

☐ Если дифференцируемая функция $f : (1,6) \to \mathbb{R}$ строго монотонно убывает на $(1,6)$, то $f'(x) < 0$ при $x \in (1,6)$.

Неверно. Например, $f(x) = -(x-3)^3$.

☑ Если $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируемые функции, $f(2) < g(2)$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ при всех $x \in (2,4)$, то $f(x) < g(x)$ при всех $x \in (2,4)$.

Верно.