

Дискретная вероятность

1 Понятие дискретной вероятности

1.1. На заводе по производству бытовой химии есть специальная машина, которая рассыпает стиральный порошок по коробкам. Эта машина несовершенна и насыпает необходимое количество порошка только с вероятностью 0.99. С вероятностью 0.009 машина насыпает порошка сверх нормы. С какой вероятностью машина недосыпает стиральный порошок?

Решение. Множество Ω элементарных исходов состоит из трех элементов:

A – машина насыпает необходимое количество порошка;

B – машина насыпает порошка сверх нормы;

C – машина недосыпает порошок.

По правилу нормировки,

$$\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) = 1 \quad \implies \quad \Pr(C) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = 1 - 0.99 - 0.009 = 0.001.$$

1.2. Рассмотрим лотерею “пять из тридцати шести”, победителем которой является человек, правильно угадавший пять из тридцати шести чисел $1, 2, \dots, 36$. Определить вероятность того, что какой-то наугад выбранный набор из пяти чисел выиграет.

Решение. Событие, состоящее в том, что выпадает конкретный набор из пяти чисел, является в данном случае элементарным исходом. Каждое такое элементарное событие равновероятно, поэтому вероятность элементарного события ω равна

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|},$$

где Ω есть множество всех возможных элементарных событий. Мощность этого множества совпадает с количеством 5-элементных подмножеств 36-элементного множества, то есть равна $\binom{36}{5}$. Следовательно,

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{\binom{36}{5}} = \frac{5! \cdot 31!}{36!} = \frac{5!}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = \frac{1}{376992} = 2,65 \cdot 10^{-6}.$$

1.3. Вычислить вероятность того, что при игре в лотерею “пять из тридцати шести” в произвольно выбранном наборе из пяти чисел хотя бы одно будет правильным.

Решение. Для решения данной задачи введем два события — событие A , заключающееся в том, что человек угадывает хотя бы одно правильное число из пяти, и событие $B = \bar{A}$, состоящее в том, что он все пять чисел угадал неправильно. В этой задаче легче найти вероятность события B , а затем из формулы

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(B)$$

определить вероятность искомого события A . Действительно, вероятность того, что все пять чисел будут неправильными, определяется количеством всех пятиэлементных подмножеств $(36 - 5) = 31$ -элементного множества. Следовательно,

$$\Pr(A) = 1 - \frac{\binom{31}{5}}{\binom{36}{5}} = 0.549.$$

1.4. Вычислить вероятность угадывания ровно трех из правильных пяти номеров в лотерее “пять из тридцати шести”.

Решение. Один из возможных способов решения задачи следующий: выберем два числа из пяти выигрышных ($\binom{5}{2}$ способами) и заменим их на любые два из тридцати одного невыигрышного числа ($\binom{31}{2}$ способами). Согласно правилу произведения, эти операции можно сделать $\binom{5}{2} \cdot \binom{31}{2}$ способами, и поэтому вероятность угадать ровно три числа равна

$$\Pr(A) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{31}{2}}{\binom{36}{5}} = 0.0123.$$

1.5. Рассматривается вероятностный эксперимент, заключающийся в бросании двух игральных кубиков. Мощность множества элементарных исходов в таком эксперименте равна 36, так как исходы вида “на первом кубике выпала единица, на втором — двойка” и “на первом кубике выпала двойка, на втором — единица”, считаются различными. Какова вероятность того, что сумма значений на кубике равна семи, если известно, что сумма — нечетная?

Решение. Существует всего шесть элементарных исходов, отвечающих событию “на паре кубиков выпало семь очков”. При этом общее количество элементарных исходов, дающих нечетную сумму, составляет ровно половину от общего количества элементарных исходов. Следовательно, вероятность выпадения семи очков равна $6/18 = 1/3$.

1.6. Рассмотрим произвольную перестановку трех различных чисел вида $\sigma = (p_1 p_2 p_3)$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что $p_1 > p_2$, а через B — событие, заключающееся в том, что $p_2 > p_3$. Являются ли эти события независимыми?

Решение. Для ответа на поставленный вопрос нам нужно сосчитать вероятность $\Pr(A \cap B)$ и сравнить ее с произведением вероятностей $\Pr(A)$ и $\Pr(B)$. Последние, очевидно, равны $\Pr(A) = \Pr(B) = 1/2$, так как для любой перестановки, у которой, например, $p_1 > p_2$, существует обратная ей перестановка, у которой $p_1 < p_2$. Событие $A \cap B$ отвечает перестановке, у которой $p_1 > p_2 > p_3$, и вероятность появления такого рода перестановки равна, очевидно, $1/6$. Это число отлично от $1/4 = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$, что означает, что события A и B являются зависимыми.

1.7. Монету подбрасывают три раза. Нам не показывают результат, но говорят, что решка выпала хотя бы один раз. Какова вероятность того, что решка выпала все три раза?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что хотя бы при одном подбрасывании монеты выпала решка, а через B — событие, состоящее в том, что все три раза у нас выпала решка. Нам необходимо найти условную вероятность $\Pr(B|A)$. Воспользуемся для этого формулой (??). Заметим, что $A \cap B = B$, и потому $\Pr(A \cap B) = \Pr(B) = (1/2)^3 = 1/8$. Далее, вероятность \bar{A} того, что во всех трех подбрасываниях монеты выпали три орла, также равна $1/8$, и поэтому $\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A}) = 7/8$. Следовательно,

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(A)} = \frac{1}{7}.$$

1.8. По статистике, 30% из общего количества студентов, которым читается данный курс, сдают экзамен с первой попытки и в срок, 50% с первой попытки его не сдают, но успевают пересдать экзамен в течение основной сессии, а оставшиеся 20% либо вовсе экзамен не сдают, либо сдают его в допсессию. Известно, что среди студентов первой группы 95% успешно заканчивают свое обучение в университете, среди студентов второй группы эта величина составляет 60%, а среди тех, кто в основную сессию данный курс не сдал, доля получивших в итоге диплом составляет 20%. Определить отношение студентов, успешно защищающих диплом, к общему числу поступивших студентов.

Решение. Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что произвольно выбранный студент сдал данный курс с первого раза и в срок, через A_2 — событие, заключающееся в том, что этот студент сдал курс в основную сессию, и через A_3 — событие, состоящее в том, что студент данный курс в основную сессию не сдал. Эти события образуют полную группу несовместимых событий, причем

$$\Pr(A_1) = 0.3, \quad \Pr(A_2) = 0.5, \quad \Pr(A_3) = 0.2.$$

Через B обозначим событие, заключающееся в том, что студент успешно окончил университет. Из условия задачи имеем следующие условные вероятности $\Pr(B|A_i)$:

$$\Pr(B|A_1) = 0.95, \quad \Pr(B|A_2) = 0.6, \quad \Pr(B|A_3) = 0.2.$$

Подставляя эти значения в формулу (??) полной вероятности, получаем, что вероятность $\Pr(B)$ произвольно выбранному вновь поступившему студенту успешно закончить университет равна

$$\Pr(B) = 0.95 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.625.$$

1.9. Предположим, что тест на наркотики дает 99% истинно положительных результатов для людей, употребляющих наркотики, и 98.5% истинно отрицательных результатов для людей, наркотики не употребляющих. Предположим, что в мире существует 0,5% наркоманов, и пусть произвольно выбранный тест показал положительный результат на применение наркотиков. Какова вероятность того, что человек, сдавший тест, действительно является наркоманом?

Решение. Обозначим через A_1 гипотезу, состоящую в том, что человек наркотики употребляет, а через $A_2 = \bar{A}_1$ — гипотезу, состоящую в том, что человек наркоманом не является. Из условия задачи известно, что $\Pr(A_1) = 0.005$; следовательно, $\Pr(A_2) = 0.995$.

Предположим теперь, что у нас произошло событие B , заключающееся в том, что тест показал положительный результат. Нам нужно сосчитать вероятность $\Pr(A_1|B)$ того, что человек, для которого тест дал положительный результат, действительно употребляет наркотики. Для этого воспользуемся формулой (??).

Апостериорная вероятность $\Pr(B|A_1)$ того, что тест дает положительный результат в случае, когда человек действительно наркотики употребляет, по условию равна $\Pr(B|A) = 0.99$. Апостериорная вероятность $\Pr(B|A_2)$ того, что тест дает положительный результат, но человек наркотики не употребляет, равна 0.015. Таким образом, согласно формуле (??) имеем

$$\Pr(A_1|B) = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.015 \cdot 0.995} = 0.249.$$

Как видно, несмотря на относительную аккуратность проводимых исследований, то, что тест оказывается положительным, означает, что с высокой вероятностью человек, сдавший этот тест, наркоманом не является.

1.10. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80%, три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Решение. Обозначим через B событие, состоящее в том, что цель поражена, а через A_i — событие, заключающееся в том, что стрелял стрелок из i -й группы. Вероятности $\Pr(A_i)$ равны, по условию задачи,

$$\Pr(A_1) = 0.5, \quad \Pr(A_2) = 0.3, \quad \Pr(A_3) = 0.2.$$

Далее, апостериорные вероятности попадания в цель равны

$$\Pr(B|A_1) = 0.8, \quad \Pr(B|A_2) = 0.5, \quad \Pr(B|A_3) = 0.9.$$

Нам нужно определить, при каком i достигается максимум произведения $\Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)$. Так как

$$\Pr(B|A_1) \cdot \Pr(A_1) = 0.4, \quad \Pr(B|A_2) \cdot \Pr(A_2) = 0.15, \quad \Pr(B|A_3) \cdot \Pr(A_3) = 0.18,$$

то вероятнее всего то, что стрелок, попавший в цель, принадлежал к первой группе.

2 Случайные величины

2.1. Из колоды в 36 карт наудачу вытаскиваются любые три карты. Найти среди вытащенных карт распределение вероятностей случайной величины, равной количеству карт пиковой масти.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что мы вытащили ровно i карт пиковой масти. Вероятность $\Pr(A_i)$ такого события равна произведению биномиальных коэффициентов $\binom{9}{i}$ и $\binom{27}{3-i}$, деленному на биномиальный коэффициент $\binom{36}{3}$. Действительно, мощность $|\Omega|$ множества Ω всех элементарных событий определяется как количество способов выбрать трехэлементное подмножество из множества всех 36 карт. Далее, мы для любого i можем $\binom{9}{i}$ количеством способов выбрать i карт пиковой масти. Оставшееся количество $3 - i$ карт масти, отличной от пиковой, мы выбираем $\binom{27}{3-i}$ количеством способов. Таким образом, распределение вероятностей случайной величины $\xi = i$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pr(A_0) &= \frac{\binom{27}{3}}{\binom{36}{3}}, & \Pr(A_1) &= \frac{\binom{27}{2}\binom{9}{1}}{\binom{36}{3}}, & \Pr(A_2) &= \frac{\binom{27}{1}\binom{9}{2}}{\binom{36}{3}}, & \Pr(A_3) &= \frac{\binom{9}{3}}{\binom{36}{3}} & \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow & \Pr(A_0) = \frac{17550}{42840}, & \Pr(A_1) &= \frac{18954}{42840}, & \Pr(A_2) &= \frac{5832}{42840}, & \Pr(A_3) &= \frac{504}{42840}. \end{aligned}$$

2.2. На гранях кубика вместо меток 1, 2, 3, 4, 5 и 6 нанесены метки 1, 3, 4, 5, 6, 8. Какие метки должны быть на гранях второго кубика, чтобы распределение суммы очков при бросании двух этих кубиков было таким же, как и для случая бросания двух обычных кубиков? Кубики, а также их грани считаются различимыми.

Решение. Заметим, прежде всего, что на втором кубике метки, большей, чем 4, быть не может — в противном случае у нас появится возможность выкинуть количество очков, большее 12. Далее, двенадцать очков мы должны получить с вероятностью, равной $1/36$. Сделать мы это сможем, если на второй “неправильный” кубик нанесем метку 4. Аналогичные рассуждения подсказывают нам, что на этом кубике должна быть также и единственная метка 1.

С помощью обычных различимых кубиков мы можем выкинуть три очка двумя способами — 1, 2 и 2, 1. На первом кубике метка 2 отсутствует, но у нас также должно быть два способа выкинуть три очка. Как следствие, на втором кубике должны быть нанесены две метки с цифрой 2.

Остается аккуратно убедиться в том, что все остальные варианты у нас получатся с теми же вероятностями, что и в случае обычных кубиков, если на оставшихся двух гранях второго кубика будут нанесены метки 3.

2.3. Двенадцать людей попросили сравнить между собой качество звучания одинаковых по качеству наушников А и В. Разницы никто из них заметить не мог, поэтому они отдавали предпочтение какой-либо паре наушников случайным образом с вероятностью 0.5. Какова вероятность того, что наушники А выберут ровно три человека?

Решение. Выбор наушников представляет собой испытания Бернулли. Поэтому искомая вероятность равна

$$\Pr(\xi = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^{12-3} = \frac{55}{1024}.$$

2.4. Для сдачи норм ГТО гражданину N требуется сдать норматив по стрельбе из пневматической винтовки. Будучи человеком мирным, N стреляет плохо и попадает в цель только с вероятностью $1/2$ (либо попадает, либо нет). С какой вероятностью он сможет сдать зачет, если для этого ему нужно попасть хотя бы четыре раза из пяти?

Решение. Вероятность искомого события равна сумме вероятностей событий “гражданин попал четыре раза из пяти” и “гражданин попал пять раз из пяти”. Сам же случайный эксперимент мы можем рассматривать как испытания Бернулли. Поэтому

$$\Pr(\xi = 4) + \Pr(\xi = 5) = \binom{5}{4} \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.5^5 = \frac{3}{16}.$$

2.5. Колесо рулетки в равномерно расположенных ячейках имеет числа от 0 до 36. Ячейки с чётными номерами в диапазоне от 2 до 36 окрашены в черный цвет, ячейки с нечетными номерами в диапазоне от 1 до 36 окрашены в красный цвет. Игрок платит доллар и выбирает цвет. Если игрок выигрывает, то он получает два доллара, если проигрывает, то не получает ничего. Подсчитайте величину среднего проигрыша игрока.

Решение. Вероятность выигрыша составляет $\frac{18}{37}$, а вероятность проигрыша равна, соответственно, $\frac{19}{37}$. Пусть ξ — случайная величина, равная выигрышу в игре. Тогда

$$E(\xi) = 2 \cdot \frac{18}{37} + 0 \cdot \frac{19}{37} = \frac{36}{37} = 0.973.$$

Таким образом, в среднем за игру игрок теряет 0.027 доллара.

2.6. Восемь шаров, пронумерованных числами 0, 1, 1, 2, 2, 2, 5 и 10 соответственно, помещены в урну. Экспериментатор вытягивает три из них и подсчитывает сумму чисел на вытянутых шарах. Каково математическое ожидание получаемой в результате серии таких экспериментов суммы?

Решение. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, значения которых совпадает с числами на вытянутых шарах. Эти случайные величины принимают значения из одного и того же множества чисел, поэтому

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = E(\xi_3) = \frac{0}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{10}{8} = \frac{23}{8}$$

Теперь остается воспользоваться линейностью математического ожидания:

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + E(\xi_3) = 3 \cdot E(\xi_1) = \frac{69}{8}.$$

2.7. Предположим, что игральным картам присвоены следующие стоимости: туз имеет стоимость, равную одному доллару, двойка — 2 доллара, ..., десятка — 10 долларов, валет — 11, дама — 12, король — 13. Игрок вытягивает одну карту. В случае, если эта карта бубновой масти, игрок получает её стоимость. Если червовой, то её стоимость удваивается. Если карта чёрной масти, то игрок платит 10 долларов. Чему равно математическое ожидание выигрыша?

Решение. Пусть ξ есть случайная величина, равная выигранной сумме. По определению математического ожидания,

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{1}{52} + \frac{2}{52} + \frac{3}{52} + \cdots + \frac{13}{52} + \frac{2 \cdot 1}{52} + \frac{2 \cdot 2}{52} + \frac{2 \cdot 3}{52} + \cdots + \frac{2 \cdot 13}{52} - 10 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 3 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} \cdot \frac{1}{52} - 5 = 5.25 - 5 = 0.25. \end{aligned}$$

2.8. У игрока есть выбор из обычной игральной кости и кости с метками (1, 1, 1, 6, 6, 6). Результатом игры становится сумма очков, выпавших в результате трех бросаний. Какую из костей следует предпочесть?

Решение. Математическое ожидание случайной величины ξ , равной сумме выпавших очков после трех бросаний, в силу линейности математического ожидания равно утроенному математическому ожиданию случайной величины ξ_1 , равной сумме очков в результате одного бросания. Для обычной игральной кости $E(\xi_1)$ равно

$$E(\xi_1) = \sum_{i=1}^6 \frac{i}{6} = \frac{7}{2} = 3.5 \quad \implies \quad E(\xi) = 10.5,$$

а для модифицированной кости

$$E(\xi_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^3 \frac{6}{6} = 3.5 \quad \implies \quad E(\xi) = 10.5.$$

Как видно, математические ожидания случайной величины ξ для обоих кубиков совпадают между собой. Следовательно, нам все равно, какой кубик выбрать.

2.9. Какую из двух костей, описанных в предыдущей задаче, нам следует выбрать, если мы, рассчитывая, что нам повезет, хотим получить в результате трех бросков как можно большую сумму очков?

Решение. Так как математические ожидания случайной величины ξ , описанной в решении предыдущей задачи, одинаковы для двух костей, то для азартных игроков, уверенных в своей победе, наилучшей будет та кость, для которой у случайной величины ξ дисперсия $\text{Var}(\xi)$ будет наибольшей.

Последовательные броски кости являются независимыми испытаниями, поэтому дисперсия случайной величины ξ для первого кубика равна утроенной дисперсии $\text{Var}(\xi_1)$, а последняя, в свою очередь, равна

$$\text{Var}(\xi_1) = E(\xi_1^2) - E^2(\xi_1) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Аналогично, для второго кубика

$$\text{Var}(\xi_1) = E(\xi_1^2) - E^2(\xi_1) = \frac{111}{6} - \frac{49}{4} = \frac{75}{12}.$$

Как следствие, азартным игрокам следует предпочесть второй кубик.