

Основы комбинаторики - II

1 k -перестановки из n элементов

1.1. Перейдем теперь к подсчету количества k -перестановок из n элементов, т.е. к подсчету различных *упорядоченных* наборов (a_1, a_2, \dots, a_k) , в которых все a_i принадлежат одному и тому же n -элементному множеству X .

1.1.1. Заметим, прежде всего, что в различной литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор (a_1, a_2, \dots, a_k) , $a_i \in X$, также иногда называется

- k -размещением из n элементов;
- кортежем из k элементов множества X ;
- упорядоченной k -выборкой из n элементов;
- k -мерным вектором над множеством X ;
- k -элементным словом над n -элементным алфавитом.

Элементы a_i в наборе (a_1, a_2, \dots, a_k) могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k -перестановках с повторениями, во втором — о k -перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример k -перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \dots, 9\}$. Классическим примером 3-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

1.1.2. Сосчитаем вначале количество k -перестановок с повторениями.

Утверждение 1.1. *Количество k -перестановок с повторениями из n элементов равно n^k .*

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть (a_1, a_2, \dots, a_k) , $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове мы можем поставить любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же получаем n^k вариантов записать данное слово.

1.1.3. В качестве важного приложения доказанного выше результата сосчитаем еще раз, на этот раз комбинаторно, количество подмножеств данного множества X . Для этого воспользуемся принципом биекции. Именно, закодируем любое подмножество A множества X бинарной строкой $f(A)$ длины n , то есть строкой над алфавитом $\{0, 1\}$. Единицу на i -м месте поставим в случае, если элемент $x_i \in A$. В противном случае на i -е место поставим ноль.

Например, пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_4\}$. Тогда соответствующая подмножеству A строка длины 4 записывается следующим образом:

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n -множества X совпадает с количеством бинарных строк длины n , которое, согласно доказанному выше утверждению 1.1, равно 2^n .

1.1.4. Перейдем теперь к подсчету количества перестановок без повторений.

Утверждение 1.2. *Количество $P(n, k)$ k -перестановок из n элементов без повторений равно*

$$P(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n - 1)$ элементов и так далее.

1.1.5. В частном случае $k = n$ k -перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n -элементного множества X . Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \quad P(0) = 0! = 1.$$

1.1.6. Любую k -перестановку из n элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное k -подмножество n -множества. Мы знаем, что количество всех k -подмножеств n -множества равно $\binom{n}{k}$, а количество способов упорядочить k -подмножество равно количеству перестановок этих k элементов, т.е. $k!$. Следовательно, числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \quad \implies \quad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $k \in \mathbb{Z}$, а n принадлежит \mathbb{Z} , \mathbb{R} или даже \mathbb{C} . Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \frac{q(q-1) \dots (q-k+1)}{k!} =: \frac{(q)_k}{k!}, & \text{если } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \end{cases} \quad \forall q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -1.$$

1.1.7. Функцию $(q)_k$ часто также обозначают через $q^{\bar{k}}$ и называют *убывающей факториальной степенью*. Наряду с убывающей можно ввести и так называемую *возрастающую факториальную степень*

$$q^{(k)} \equiv q^{\bar{k}} := q \cdot (q + 1) \cdot \dots \cdot (q + k - 1).$$

В частности, с ее помощью получается удобное для вычислений выражение для количества $\binom{n}{k}$ сочетаний с повторениями:

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!}.$$

2 Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам

2.1. Итак, мы получили простые соотношения для подсчета количества четырех основных объектов элементарной комбинаторики — k -сочетаний и k -перестановок из n элементов с повторениями и без повторений. Эти объекты встречаются в огромном количестве внешне не очень похожих друг на друга задач элементарной комбинаторики. Оказывается, однако, что большинство этих задач можно свести к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

2.1.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся n различных предметов. Из урны последовательно вытаскивается k предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных k -элементных выборок из n предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования k -элементной выборки. Прежде всего, мы можем возвращать или не возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В первом случае говорят о *выборке с повторениями*, во втором — о *выборке без повторений*. Далее, в некоторых задачах нам важен порядок вытаскиваемых предметов. В этом случае имеем так называемые *упорядоченные* выборки. В противном случае выборки называются *неупорядоченными*.

Нетрудно понять, что задачи о подсчете k -элементных выборок представляют собой, по сути, те же самые задачи о подсчете k -перестановок или k -сочетаний из n элементов. Действительно, любая неупорядоченная k -элементная выборка представляет собой либо k -элементное подмножество n -множества, либо k -мультимножество над n -элементным множеством в зависимости от того, возвращаем мы вытаскиваемые предметы обратно в урну или не возвращаем. Следовательно, количество таких неупорядоченных выборок совпадает с коэффициентами $\binom{n}{k}$ или $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$. Очевидно также, что любая упорядоченная k -элементная выборка есть просто некоторая k -перестановка n -элементного множества. Поэтому количество таких выборок равно n^k или $(n)_k$ в зависимости от того, говорим ли мы о выборке с повторениями или без повторений.

В результате получаем следующую таблицу решений задач, связанных с урновыми схемами:

Предметы на выходе	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$	$\binom{n}{k}$

2.1.2. Приведем несколько характерных примеров, достаточно естественно сводящихся к одной из описанных выше урновых схем.

Пример 2.1. Предположим, что у нас имеется некоторое общество, состоящее из двадцати членов. Сколькими способами можно выбрать президента, вице-президента, секретаря и казначея этого общества?

Решение. Очевидно, что любой способ выбора представляет собой упорядоченное 4-элементное подмножество 20-элементного множества. Следовательно, существует ровно $(20)_4$ различных способов выбора членов общества на эти должности.

Пример 2.2. Для того, чтобы открыть сейф, нужно набрать код из пяти символов с помощью вращающихся дисков. На каждом из этих дисков нанесено 12 символов, одинаковых для каждого из дисков. Сколько вариантов различных кодов существует?

Решение. Любой код представляет собой упорядоченную 5-элементную выборку с повторениями или, иначе, строку из пяти символов над алфавитом из 12 букв. Следовательно, имеется 12^5 вариантов различных кодов.

Пример 2.3. На почте продаются открытки десяти различных видов. Сколькими способами можно купить восемь открыток? А восемь открыток разных видов?

Решение. Понятно, что в первом случае любой набор из восьми открыток представляет собой неупорядоченную выборку с повторениями, а во втором — выборку без повторений из 10 элементов. Следовательно, в первом случае имеем $\binom{10}{8}$, а во втором — $\binom{10}{8}$ способов покупки восьми открыток.

2.1.3. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества k -перестановок и k -сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется n различных ящиков, по которым нужно разложить k различных или неразличимых предметов. При этом мы можем накладывать определенные ограничения на количество предметов в каждом ящике.

Рассмотрим, к примеру, задачу о подсчете количества способов раскладки k различных предметов по n различным ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов. Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, n^k . Действительно, любой предмет мы можем положить в любой из n ящиков вне зависимости от того, куда мы положили оставшиеся предметы. Поэтому, согласно правилу произведения, это количество равно n^k . Иными словами, данная задача представляет собой переформулировку задачи о подсчете количества k -перестановок из n элементов с повторениями.

Теперь предположим, что в той же схеме мы не имеем права класть более одного предмета в один ящик. Тогда первый предмет мы можем поместить в любой из n ящиков, второй — в любой из оставшихся свободными $(n - 1)$ ящиков и так далее. Всего же получаем $(n)_k$ способов раскладки. Следовательно, данная схема соответствует подсчету k -перестановок без повторений.

2.1.4. Пусть теперь у нас имеются n различных ящиков и k неразличимых предметов. Тогда подсчет количества различных способов раскладки этих предметов по ящикам сводится к задаче о подсчете количества k -сочетаний из n элементов.

Действительно, в данной схеме в качестве n -элементного множества выступает множество, состоящее из n различных ящиков. В случае, когда в каждый ящик можно класть не более одного предмета, мы, раскладывая предметы по ящикам, выделяем в этом множестве некоторое k -элементное подмножество. Следовательно, количество таких раскладок совпадает с количеством различных k -элементных подмножеств n -множества и равно $\binom{n}{k}$.

В случае же, когда никаких ограничений на количество предметов в ящике не накладывается, мы, раскладывая по ящикам k неразличимых предметов, задаем тем самым некоторое k -мультимножество n -множества X . Поэтому количество различных способов такой раскладки равно количеству $\binom{n}{k}$ k -сочетаний из n элементов с повторениями.

Подводя итоги, построим таблицу рассмотренных схем раскладок n предметов по k ящикам:

Предметы	Ящики	Произвольное количество предметов в ящике	Не более одного предмета в ящике
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$	$\binom{n}{k}$

2.1.5. Проиллюстрируем некоторые характерные примеры задач, которые довольно естественно сводятся к схеме схем раскладки предметов по ящикам.

Пример 2.4. Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Решение. Рассматриваемый пример является типичной задачей, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. Действительно, в роли ящиков здесь выступают левый и правый карман, а в роли предметов — девять различных монет. Поэтому ответ в этой задаче — 2^9 способов.

Замечание 2.5. Рассмотренная задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают 9^2 способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены 9 различных предметов, а также 2 различные позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы. Во-первых, в схеме раскладки предметов по ящикам предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике. Во-вторых, в этой схеме в любой ящик можно класть любое количество предметов. В аналогичной урновой схеме на любую позицию помещается ровно один предмет.

Приведем теперь два характерных примера, связанных с раскладкой неразличимых предметов по различимым ящикам.

Пример 2.6. У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$. Если же он раздает их по каким-то заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов, то количество способов это сделать равно $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = \binom{12}{5}$.

Пример 2.7. В физике встречаются задачи, в которых имеются n различных уровней энергии и k неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений k фермионов по n энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$. Наряду с фермионами существуют и частицы иного сорта — бозоны, для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$.

2.1.6. К задачам раскладки неразличимых предметов по различным ящикам, связанным с подсчетом количества k -сочетаний, сводятся также задачи о так называемом *разбиении* натурального числа k на n слагаемых. Данная задача формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число k в виде суммы n слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, то есть при условии, что разбиения вида

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10 \quad \text{и} \quad 3 + 1 + 3 + 3 = 10$$

считаются различными?

Если на числа a_i накладывается единственное условие вида $a_i \geq 0$, то количество разбиений равно количеству $\binom{n}{k}$ k -мультимножеств над n -элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ любой индекс i слагаемого a_i можно рассматривать как i -й ящик, в который мы складываем a_i единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке k “неразличимых” единиц по n различным ящикам.

Пример 2.8. Подсчитать количество разбиений числа $k = 4$ на два слагаемых:

$$a_1 + a_2 = 4, \quad a_1, a_2 \geq 0.$$

Ответ: $\binom{2}{4} = \binom{5}{4} = 5$ разбиений: $0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0 = 4$.

К подсчету числа k -сочетаний из n элементов без повторений задача о разбиении числа k сводится в случае, когда на числа a_i накладываются следующие условия:

$$a_i = 0 \quad \text{или} \quad a_i = 1.$$

В этом случае индекс i также можно трактовать как i -й ящик; его можно выбрать (положив $a_i = 1$) или не выбрать (положив $a_i = 0$). Всего же нужно выбрать k таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Пример 2.9. Подсчитать количество разбиений числа 2 на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения 0 или 1.

Ответ: $\binom{3}{2} = 3$ разбиения: $1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$.

2.1.7. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

Пример 2.10. В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных?

Решение. Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\binom{3}{7} = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различным ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой 7-мультимножество над 3-элементным множеством различных видов пирожных.

3 Подсчет количества отображений конечных множеств

3.1. Оказывается, задачи о раскладке различных предметов по различным же ящикам имеют и еще одну, чрезвычайно важную комбинаторную интерпретацию — они эквивалентны задачам о подсчете количества отображений конечных множеств.

3.1.1. Напомним определение произвольного отображения $f: X \rightarrow Y$.

Определение 3.1. Пусть X, Y — пара конечных множеств. Отображением f из X в Y называется правило, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y: \quad y = f(x).$$

С комбинаторной точки зрения любое отображение f из n -элементного множества X в k -элементное множество Y можно рассматривать как некоторый вариант раскладки n различных предметов по k различным ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике.

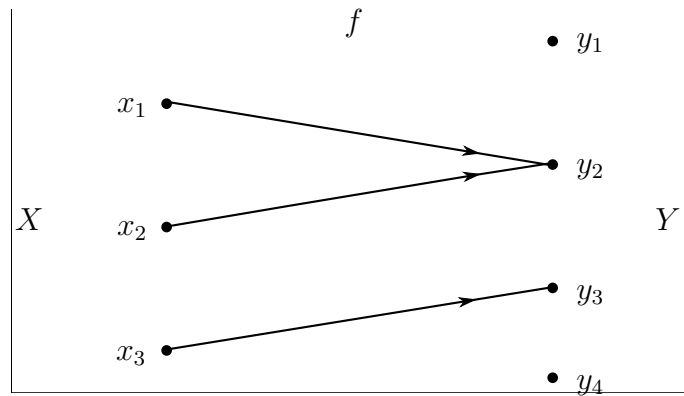


Рис. 1

Пример 3.2. Рассмотрим отображение f из трехэлементного множества X в четырехэлементное множество Y вида

$$f(x_1) = y_2, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_4$$

(смотри рис.1). Этому отображению отвечает раскладка трех различных предметов по четырем различным ящикам, при которой первые два предмета размещаются во втором ящике, а третий предмет — в четвертом ящике.

Как следствие, общее количество всех отображений n -элементного множества X в k -элементное множество Y равно k^n .

3.1.2. Напомним теперь определение *инъективного* отображения.

Определение 3.3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется инъективным, если из условия

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \implies \quad x_1 = x_2.$$

Иными словами, отображение называется инъективным, если у любого образа (элемента $y \in Y$) имеется не более одного прообраза, т.е. элемента $x \in X$, такого, что $y = f(x)$.

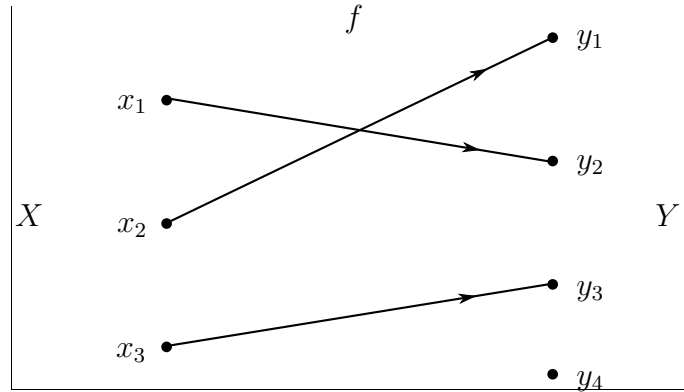


Рис. 2: Инъективное отображение

Понятно, что любому инъективному отображению $f: X \rightarrow Y$ отвечает такая раскладка n элементов множества X , при которой в каждом из k ящиков находится не более одного элемента. Как следствие, количество всевозможных инъективных отображений равно $(k)_n$.

3.1.3. Наконец, рассмотрим случай биективного и сюръективного отображений.

Определение 3.4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *биективным*, если

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X: \quad y = f(x).$$

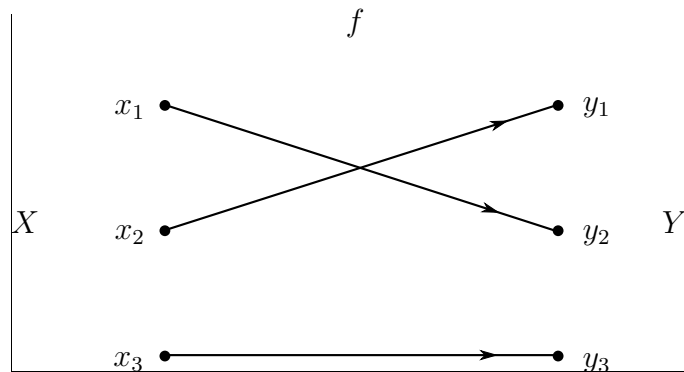


Рис. 3: Биективное отображение

Количество таких отображений равно, очевидно, $n!$, где $n = |X| = |Y|$.

Определение 3.5. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным*, если

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X: \quad y = f(x).$$

Другими словами, отображение сюръективно, если каждый образ $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз $x \in X$.

Комбинаторная интерпретация сюръективного отображения такова: это есть некоторая раскладка n различных предметов по k различным ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Количество таких раскладок при $k > n$ равно, очевидно, нулю. Задача следующего пункта данного параграфа — сосчитать количество этих раскладок для случая $0 \leq k \leq n$.

3.2. Обозначим через $\widehat{S}(n, k)$ количество всех сюръективных отображений n -элементного множества X в k -элементное множество Y . Сосчитаем $\widehat{S}(n, k)$ для случая $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$.

3.2.1. Рассмотрим множество *всех* отображений из n -множества X в k -множество Y . Как мы знаем, количество таких отображений равно k^n . Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать это количество по-другому, выразив k^n через числа $\widehat{S}(n, k)$.

3.2.2. Заметим, что *любое* отображение $f: X \rightarrow Y$ можно рассматривать как *сюръективное* отображение множества X на множество

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x: y = f(x)\},$$

являющееся образом множества X при отображении f .

Так, для отображения f из примера 3.2 образ $\text{Im}(f) = \{y_2, y_4\}$, а отображение $f: X \rightarrow Y$ является сюръективным отображением множества X на подмножество $\text{Im}(f) \subset Y$.

3.2.3. Разобьем теперь все множество отображений $f: X \rightarrow Y$ на блоки, включив в i -й блок все отображения, образ $\text{Im}(f)$ которых содержит ровно i элементов: $|\text{Im}(f)| = i, i = 1, \dots, k$. Все, что нам остается — это сосчитать количество элементов в каждом блоке, а затем воспользоваться правилом суммы для того, чтобы получить общее количество k^n всех отображений.

3.2.4. Заметим, что существует $\binom{k}{i}$ способов выбрать i -элементное подмножество k -множества Y . Для каждого из этих подмножеств имеется $\widehat{S}(n, i)$ различных сюръективных отображений из n -элементного множества X в выбранное i -элементное подмножество множества Y . Таким образом, по правилу произведения, общее количество элементов в i -м блоке равно

$$\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i).$$

Тогда по правилу суммы можем записать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i). \quad (1)$$

При этом мы суммируем не от 1 до k , а от 0 до k , учитывая, что $\widehat{S}(n, 0) = 0$ для всех $n > 0$.

Замечание 3.6. Формулу (1) полезно иногда записывать в виде

$$k^n = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i). \quad (2)$$

Несложно убедиться в том, что эта формула непосредственно следует из (1), а также в том, что она оказывается справедливой как для случая $n \geq k$, так и для случая $n < k$.

3.2.5. Мы выразили количество всех отображений n -элементного множества X в k -элементное множество Y через количество $\widehat{S}(n, i)$ сюръективных отображений. Нам же нужна обратная формула, выражающая количество $\widehat{S}(n, k)$ сюръективных отображений через число i^n всех отображений. Для ее получения воспользуемся так называемыми *формулами обращения*.

Утверждение 3.7. Пусть (f_0, f_1, f_2, \dots) и (g_0, g_1, g_2, \dots) — две числовые последовательности, и пусть одна из них выражается через вторую по формулам

$$f_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g_i, \quad k \geq 0. \quad (3)$$

Тогда справедлива следующая формула обращения:

$$g_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \quad k \geq 0. \quad (4)$$

С учетом этих формул обращения можно, считая n параметром, из соотношения (1) получить следующую явную формулу для вычисления чисел $\hat{S}(n, k)$:

$$\hat{S}(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n.$$

3.3. Задачи подсчета количества отображений n -элементного множества X в k -элементное множество Y имеют еще одну важную комбинаторную интерпретацию.

3.3.1. Начнем с простого примера.

Пример 3.8. Для трехэлементного множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двухэлементного множества $Y = \{y_1, y_2\}$ имеется, как мы знаем, $2^3 = 8$ различных отображений множества X в множество Y . Запишем все эти отображения как упорядоченные пары подмножеств множества X :

$$\begin{aligned} &(\{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset), \quad (\{x_1, x_2\}, \{x_3\}), \quad (\{x_1, x_3\}, \{x_2\}), \quad (\{x_2, x_3\}, \{x_1\}), \\ &(\{x_1\}, \{x_2, x_3\}), \quad (\{x_2\}, \{x_1, x_3\}), \quad (\{x_3\}, \{x_1, x_2\}), \quad (\emptyset, \{x_1, x_2, x_3\}). \end{aligned}$$

Видно, что записанное в таком виде решение представляет собой не что иное, как список всех возможных *разделений* множества X , то есть упорядоченных разбиений X на два блока, один из которых может быть и пустым.

3.3.2. Очевидно, что данный результат справедлив и в общем случае. Именно, любое отображение $f: X \rightarrow Y$ задает нам некоторое разделение множества X , то есть разбиение этого множества на k упорядоченных блоков, часть из которых могут быть пустыми. Как следствие, количество таких разделений совпадает с количеством всех отображений f и равно k^n .

Аналогичные рассуждения показывают, что любое сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ задает нам некоторое *упорядоченное разбиение* множества X на блоки. Поэтому количество всех упорядоченных разбиений n -элементного множества X на k блоков равно числу $\hat{S}(n, k)$.

3.3.3. Рассмотрим теперь некоторый специальный вид k -разделений множества X , а именно, такие k -разделения, в которых в первом блоке содержится a_1 элемент, во втором блоке — a_2 элемента, в k -м блоке — a_k элементов. Очевидно, что при этом общая сумма всех элементов должна быть равна мощности $|X| = n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n, \quad a_i \geq 0.$$

Утверждение 3.9. *Количество всех таких k -разделений n -множества X равно*

$$P(n; a_1, a_2, \dots, a_k) := \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \dots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}. \quad (5)$$

Доказательство. Действительно, из любого n -элементного множества X мы $\binom{n}{a_1}$ способами можем выбрать a_1 элементов и положить их в первый ящик (отнести к первому блоку разбиения). Затем для каждого такого выбора мы $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами можем из оставшегося $(n-a_1)$ -элементного множества выбрать a_2 элементов и положить их во второй ящик (отнести ко второму блоку разбиения), и так далее. Формула (5), описывающая общее количество способов совершить все эти действия, следует теперь из правила произведения. \square

Следствие 3.10. *Общее количество k^n всех k -разделений n -множества X выражается через числа $P(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$ по формуле*

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_i \geq 0}} P(n; a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_i \geq 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}. \quad (6)$$

Замечание 3.11. Если в условии рассматриваемой задачи заменить нестрогие неравенства $a_i \geq 0$ на строгие, то есть на неравенства $a_i > 0$, то вместо деления мы получим упорядоченное разбиение специального вида. Количество таких упорядоченных разбиений также описывается формулой (5), а вместо формулы (6) получается не менее полезное соотношение вида

$$\hat{S}(n, k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\dots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}. \quad (7)$$

3.4. Числа $P(n; a_1, a_2, \dots, a_k)$ имеют и еще один важный комбинаторный смысл. Именно, они перечисляют так называемые *перестановки n -множества X с повторениями*.

3.4.1. Рассмотрим в качестве элементарного примера следующую задачу: на полке имеются 15 различных книг по математике, 16 по информатике и 12 по физике; каково количество способов перестановки этих книг на полке? Ответ очевиден: $(15 + 16 + 12)! = 43!$ способов.

Предположим теперь, что мы перестали различать книги, посвященные одному и тому же предмету. В этом случае количество различных способов перестановки таких книг уменьшится. Обозначим это количество через λ_n . Так как существует $15!$ способов упорядочить книги по математике, $16!$ – по информатике и $12!$ – по физике, то по правилу произведения мы можем записать, что

$$43! = \lambda_n \cdot 16! \cdot 15! \cdot 12! \quad \implies \quad \lambda_n = \frac{43!}{16! \cdot 15! \cdot 12!} = P(43; 15, 16, 12).$$

3.4.2. Аналогичные рассуждения справедливы и в общем случае. Именно, пусть среди n переставляемых предметов имеется a_1 неразличимых предметов первого сорта, a_2 неразличимых предметов второго сорта и так далее, причем $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$. Тогда для количества перестановок таких предметов с повторениями получаем уже знакомую нам формулу

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!} = P(n; a_1, a_2, \dots, a_k).$$

3.4.3. В частном случае перестановки n предметов двух различных сортов получаем

$$P(n; k, n - k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} = \binom{n}{k}.$$

Иными словами, количество таких перестановок совпадает с количеством различных k -элементных подмножеств n -элементного множества. Для комбинаторного доказательства данного факта можно воспользоваться рассуждениями, которые мы проводили при подсчете количества всех подмножеств данного множества. Напомним, что там мы любое подмножество кодировали упорядоченной битовой строкой длины n , состоящей из k единиц и $(n - k)$ нулей. Осталось заметить, что любая такая строка представляет собой некоторую перестановку k элементов первого сорта (единиц) и $(n - k)$ элементов второго сорта (нулей).

3.4.4. В заключение отметим еще одну полезную биекцию, позволяющую несколько по-другому сосчитать количество k -мультимножеств n -элементного множества. Мы знаем, что любому k -мультимножеству над n -множеством отвечает некоторая раскладка k неразличимых предметов по n различным ящикам. В свою очередь, любую такую раскладку можно рассматривать как упорядоченный набор, состоящий из k неразличимых предметов одного сорта (например, k неразличимых шаров), и $(n - 1)$ -го предмета второго сорта ($(n - 1)$ -й неразличимой перегородки между этими шарами). Как следствие, количество всех k -мультимножеств

$$\left(\binom{n}{k} \right) = P(k + n - 1; k, n - 1) = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! \cdot k!} = \binom{n + k - 1}{k}.$$

4 Рекуррентные соотношения

4.1. Мы уже несколько раз получали решения комбинаторных задач, записанные в виде тех или иных рекуррентных соотношений. Настало время поговорить о них немного поподробнее.

4.1.1. Начнем с простого примера.

Пример 4.1. Популяция лягушек в озере увеличивается в четыре раза каждый год. В последний день каждого года 100 лягушек отлавливают и переправляют на другие озера. Предполагая, что в начале первого года в озере было 50 лягушек, найти количество лягушек в начале любого последующего года.

Решение. Обозначим через a_n количество лягушек в начале $(n + 1)$ -го года. По условию задачи, $a_0 = 50$. Тогда, очевидно,

$$a_1 = 4 \cdot 50 - 100 = 100, \quad a_2 = 4 \cdot 100 - 100 = 300,$$

а в общем случае

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 100, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Полученное равенство является простейшим примером *рекуррентного соотношения*.

4.1.2. Перейдем теперь к формальным определениям.

Определение 4.2. Пусть a_0, a_1, a_2, \dots — произвольная числовая последовательность. Если для любого $n \geq m$ число a_{n+m} является некоторой функцией от m предыдущих членов последовательности, т.е.

$$a_{n+m} = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}), \quad (8)$$

то такая последовательность называется рекуррентной последовательностью, а соотношение (8) — рекуррентным соотношением m -го порядка.

В частном случае линейной функции f имеем так называемое *линейное рекуррентное соотношение*

$$a_{n+m} = b_1(n) a_{n+m-1} + b_2(n) a_{n+m-2} + \dots + b_{m-1}(n) a_{n+1} + b_m(n) a_n + u_n. \quad (9)$$

В случае $u_n = 0$ оно называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Самый простой случай рекуррентного соотношения (9) — это *линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами*

$$a_{n+m} = b_1 a_{n+m-1} + b_2 a_{n+m-2} + \dots + b_{m-1} a_{n+1} + b_m a_n. \quad (10)$$

Очевидно, что для однозначного определения всех a_n необходимо наряду с самим рекуррентным соотношением (8) задать и первые m членов a_0, a_1, \dots, a_{m-1} данной последовательности, то есть, как говорят, *задать начальные условия* для рекуррентного соотношения.

4.1.3. Итак, наличие рекуррентного соотношения и начальных условий позволяет нам последовательно, шаг за шагом, определить любое наперед заданное количество n членов рекуррентной числовой последовательности. Зачастую это все, что нам требуется от задачи. Иными словами, получение рекуррентного соотношения для искомой числовой последовательности a_n является вполне приемлемым, а зачастую — и наиболее удобным с вычислительной точки зрения ответом для поставленной комбинаторной задачи.

Однако иногда нам хочется получить явное аналитическое выражение для общего члена a_n этой последовательности, или, как говорят, *решить* данное рекуррентное соотношение. Мы в данном параграфе покажем, как построить такое решение в случае линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами (10).

4.2. Прежде чем рассматривать общий случай уравнения (10), рассмотрим наиболее простой его вариант — линейное однородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$a_{n+1} = b_1 \cdot a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad a_0 — \text{заданное число}. \quad (11)$$

4.2.1. Решение этого уравнения построить легко. Действительно,

$$a_1 = b_1 \cdot a_0; \quad a_2 = b_1 \cdot a_1 = b_1^2 \cdot a_0; \quad \dots \quad a_n = b_1^n \cdot a_0.$$

4.2.2. Предположим теперь, что нам кто-то сразу подсказал вид решения, а именно, что решение нашего уравнения (11) степенным образом зависит от n :

$$a_n = r^n \quad \text{для некоторого } r.$$

Воспользовавшись этой подсказкой, подставим это выражение в исходное рекуррентное соотношение (11). В результате получается равенство вида

$$r^{n+1} = b_1 \cdot r^n,$$

из которого сразу же следует, что $r = b_1$; при этом a_n оказывается равным b_1^n . Это означает, что при $n = 0$ число $a_0 = b_1^0 = 1$. Иными словами, $a_n = b_1^n$ есть решение исходной задачи (11) в частном случае $a_0 = 1$. Поэтому такое решение называется *частным решением* уравнения (11).

4.2.3. Теперь попытаемся, зная частное решение, построить общее решение задачи (11). Для этого заметим, что в силу однородности уравнения (11) любое его частное решение, умноженное на произвольную постоянную c , по-прежнему этому уравнению удовлетворяет:

$$c \cdot b_1^{n+1} \equiv c \cdot b_1 \cdot b_1^n.$$

Решение же вида $c \cdot b_1^n$ позволяет удовлетворить любому начальному условию. Действительно, подставляя его в начальное условие для уравнения (11), получим:

$$c \cdot b_1^0 = a_0 \quad \Longrightarrow \quad c = a_0 \quad \Longrightarrow \quad a_n = a_0 \cdot b_1^n.$$

По этой причине решение вида $c \cdot b_1^n$ называется *общим решением* уравнения (11).

4.3. Подведем предварительные итоги. Так как исходное уравнение (11) было очень простым, то нам удалось сразу построить его решение и выяснить, что оно степенным образом зависит от параметра n . Затем мы заметили, что если бы нам кто-то заранее подсказал степенной характер решения уравнения (11), то нам хватило бы этой информации для построения как общего, так и частного решения нашего рекуррентного уравнения.

Возникает вопрос: зачем же нам нужен для столь простого уравнения столь сложный алгоритм построения его решения? Оказывается, что этот алгоритм практически без изменений работает и для построения решения линейного однородного уравнения произвольного порядка.

4.3.1. Рассмотрим в качестве примера линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_{n+2} = b_1 \cdot a_{n+1} + b_2 \cdot a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad a_0, a_1 — \text{заданные числа}, \quad (12)$$

и попытаемся применить к этому уравнению алгоритм, описанный в конце предыдущего пункта.

Для этого предположим, что частное решение уравнения (12) по-прежнему степенным образом зависит от параметра n , то есть предположим, что существуют такие значения параметров a_0 и a_1 , при которых $a_n = r^n$. Подставляя это выражение в рекуррентное соотношение, получим

$$r^{n+2} = b_1 \cdot r^{n+1} + b_2 \cdot r^n \quad \Longrightarrow \quad r^2 - b_1 r - b_2 = 0,$$

т.е. квадратное уравнение на r . Любое его решение r_0 дает нам некоторое частное решение уравнения (12). По этой причине данное уравнение называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (12).

4.3.2. Предположим, что характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня r_1 и r_2 . Покажем, что в таком случае выражение

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \quad (13)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, является *общим решением* соотношения (12) в том смысле, что любое решение (12) с заданными начальными условиями в нем содержится.

Действительно, покажем вначале, что выражение (13) действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению (12):

$$\begin{aligned} c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2} &= b_1 c_1 r_1^{n+1} + b_1 c_2 r_2^{n+1} + b_2 c_1 r_1^n + b_2 c_2 r_2^n = \\ &= c_1 (r_1^2 - b_1 r_1 - b_2) + c_2 (r_2^2 - b_1 r_2 - b_2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что это — действительно общее решение, т.е. что мы всегда можем подобрать константы c_1 и c_2 так, чтобы решение вида (13) удовлетворяло любым заданным начальным условиям. Для этого рассмотрим это выражение при $n = 0$ и $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 = c_1 + c_2, \\ a_1 &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 = c_1 r_1 + c_2 r_2. \end{aligned}$$

Эти выражения следует рассматривать как систему линейных уравнений для определения неизвестных постоянных c_1 и c_2 . Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

поэтому система всегда имеет единственное решение.

4.3.3. Пожалуй, самым известным и важным примером рекуррентного соотношения (12) является соотношение вида

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

определяющие так называемые числа Фибоначчи F_n . Характеристическое уравнение для этого рекуррентного уравнения имеет вид

$$r^2 = r + 1 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Константы c_1 и c_2 определим из начальных условий:

$$\begin{aligned} F_0 = 0 &= c_1 + c_2 \\ F_1 = 1 &= c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = c_1 \left[\frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \right] = c_1 \sqrt{5} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad c_1 = +\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем следующее явное выражение для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (14)$$

4.3.4. Предположим теперь, что характеристическое уравнение (??) имеет ровно один кратный корень $r_1 = r_2 =: \rho$. Покажем, что в этом случае общее решение уравнения (12) имеет вид

$$a_n = c_1 \rho^n + c_2 n \rho^n.$$

Мы уже показали, что частное решение вида ρ^n удовлетворяет уравнению (12). С учетом линейности и однородности этого уравнения нам осталось показать, что этому уравнению удовлетворяет и частное решение вида $n \rho^n$. Подставляя в уравнение (12) выражение $n \rho^n$, получим

$$(n + 2) \rho^{n+2} = b_1 (n + 1) \rho^{n+1} + b_2 n \rho^n \quad \Rightarrow \quad n (\rho^2 - b_1 \rho - b_2) + \rho (2 \rho - b_1) = 0.$$

Первое слагаемое в левой части этого выражения равно нулю в силу характеристического уравнения. Для того, чтобы понять, что равно нулю и последнее слагаемое, заметим, что в случае совпадающих корней $r_1 = r_2 = \rho$ имеем

$$\rho = \frac{b_1 \pm 0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\rho - b_1 = 0.$$

Осталось показать, что такой вид решения может удовлетворить любым начальным условиям. Подставив начальные условия в выражение для a_n , получим следующую систему двух линейных алгебраических уравнений относительно параметров c_1 и c_2 :

$$c_1 = a_0,$$

$$\rho(c_1 + c_2) = a_1.$$

Понятно, что такая система имеет решение при любых a_0 , a_1 и $\rho \neq 0$. Случай же $\rho = 0$ тривиален — в этом случае $b_1 = b_2 = 0$, и потому $a_n = 0$ для любых n .

4.3.5. Наконец, давайте рассмотрим случай, когда уравнение (??) имеет два комплексно сопряжённых корня

$$r_1 = x + iy = \rho e^{-i\vartheta}, \quad r_2 = x - iy = \rho e^{i\vartheta}, \quad \rho, \vartheta \neq 0.$$

Покажем, что в таком случае общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка (12) можно записать так:

$$a_n = \tilde{c}_1 \rho^n \cos(n\vartheta) + \tilde{c}_2 \rho^n \sin(n\vartheta).$$

Действительно, рассуждения, аналогичные проведенным для случая двух различных вещественных корней, показывают, что выражение вида

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (12) при любых c_1 и c_2 . Рассмотрим теперь систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 + c_2, \\ a_1 &= c_1 \rho e^{-i\vartheta} + c_2 \rho e^{i\vartheta} = \rho(c_2 + c_1) \cos \vartheta + \rho i(c_2 - c_1) \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{15}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \rho e^{-i\vartheta} & \rho e^{i\vartheta} \end{vmatrix} = 2\rho \cdot i \cdot \sin(\vartheta) \neq 0,$$

поэтому мы с помощью общего решения действительно сможем удовлетворить любым начальным условиям.

Перепишем теперь выражение для a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1 \rho^n e^{-i\vartheta n} + c_2 \rho^n e^{i\vartheta n} = \\ &= (c_2 + c_1) \rho^n \cos(n\vartheta) + i(c_2 - c_1) \rho^n \sin(n\vartheta). \end{aligned}$$

Из (15) следует, что коэффициенты $\tilde{c}_1 = c_2 + c_1$ и $\tilde{c}_2 = i(c_2 - c_1)$ являются вещественными числами. Следовательно, общее решение в данном случае действительно можно записать в виде

$$a_n = \tilde{c}_1 \rho^n \cos(n\vartheta) + \tilde{c}_2 \rho^n \sin(n\vartheta).$$