2-я неделя. Функции и непрерывность

2.1. Предел функции

1. Для множества X точек на прямой обозначим через X' множество всех предельных точек множества X. Отметьте утверждения, справедливые для любых множеств $A, B, A_1, A_2, \ldots$.

Решение. Для пунктов, не являющихся верными приведем контрпримеры, для верных – доказательства.

☑ $(A \cup B)' = A' \cup B'$
Верно.

☐ $(A \cap B)' = A' \cap B'$
Неверно. Например, $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$. Тогда $(A \cap B)' = \varnothing$, а $A' \cap B' = \{1\}$.

☐ $(A \setminus B)' = A' \setminus B'$
Неверно. Например, $A = (0, 2)$, $B = (1, 3)$. Тогда $(A \setminus B)' = [0, 1]$, а $A' \cap B' = [0, 1)$.

☐ $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n'$
Неверно. Например, $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Тогда $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \{0\}$, а $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n' = \varnothing$.

☐ $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n'$
Неверно. Например, $A_n = (0, \frac{1}{n})$. Тогда $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \varnothing$, а $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n' = \{0\}$.

☐ $(A')' = \emptyset$
Неверно. Например, $A = (0, 1)$. Тогда $A' = [0, 1]$ и $(A')' = [0, 1]$.

☐ $(A')' = A'$
Неверно. Например, $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Тогда $A' = \{0\}$, а $(A')' = \varnothing$.

2. Для функции $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{|x|}}$ докажите с помощью ε–δ определения, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Укажите подходящие δ для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ и $\varepsilon = \frac{1}{100}$. В ответе приведите разделенные пробелами три найденные δ, представленные в виде десятичных дробей.

Ответ: $1,5625$ $0,0441$ $0,00040401$

Решение. Рассмотрим неравенство из определения предела:

$$\left|\sqrt{1 + \sqrt{|x|}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Модуль можно раскрыть, пользуясь тем, что подкоренное выражение всегда не меньше единицы. Проведем цепочку преобразований:

$$\left|\sqrt{1 + \sqrt{|x|}} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{|x|}} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{|x|}} < \varepsilon + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{|x|} < (\varepsilon + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} < \varepsilon^2 + 2\varepsilon \Leftrightarrow |x| < \left(\varepsilon^2 + 2\varepsilon\right)^2.$$

Каждый раз при возведении квадрат мы пользовались неотрицательностью обеих частей неравенства.

Таким образом, $\delta = (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)^2$. Подставляя заданные значения ε, найдем нужные значения δ.

Замечание: Указанный способ позволяет найти наибольшие возможные δ. В задаче это не требовалось.

3. Даны положительные числа a и b. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right]$. Запись $[t]$ обозначает целую часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t.

Ответ: b/a

Решение. По определению целой части числа для любого t верно $t - 1 \leqslant [t] \leqslant t$. Тогда

$$\frac{x}{a} \cdot \left(\frac{b}{x} - 1\right) \leqslant \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x}.$$

То есть

$$\frac{1}{a}(b - x) \leqslant \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{b}{a}.$$

Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\frac{b}{a} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] \leqslant \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$.

4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\right)$ Запись $[t]$ обозначает целую часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t.

Ответ: $0,5$

Решение. Вычислим сумму арифметической прогрессии с разностью 1, количеством членов $\left[\frac{1}{x}\right]$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{1 + \left[\frac{1}{x}\right]}{2} \left[\frac{1}{x}\right].$$

По определению целой части числа для любого t верно $t - 1 \leqslant [t] \leqslant t$. Тогда

$$\frac{1 + \frac{1}{x} - 1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{1 + \frac{1}{x}}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Поэтому

$$\frac{1 - x}{2x^2} \leqslant S_n \leqslant \frac{1 + x}{2x^2}.$$

И, значит,

$$\frac{1 - x}{2} \leqslant x^2 S_n \leqslant \frac{1 + x}{2}.$$

Перейдем к пределу при $x \to 0$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{x\to 0} \left(x^2\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \left[\frac{1}{|x|}\right]\right)\right) = \frac{1}{2}$.

5. Найдите пределы $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$ и $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$. В ответе запишите полученные результаты (в виде десятичных дробей, округленных до третьего знака после запятой), разделенные пробелами.

Ответ: $0,4$ $0,5$ 1

Решение. В первой задаче знаменатель не обращается в ноль в точке $x = 1$, значит, неопределенности нет.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}=\frac{1^2-1-2}{1^2+2-8}=\frac{-2}{-5}=0,4.$$

Во второй задаче числитель и знаменатель обращаются в ноль в точке $x = 2$, значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от нее сокращением на $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{2+1}{2+4}=0,5$$

В третьей задаче имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Избавимся от нее, разделив числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}=1.$$

2.2. Непрерывность функции

1. Установите, существуют ли такие числа a и b, для которых функция $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{при } x \leqslant 0, \\ ax+b, & \text{при } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{при } x \geqslant 1 \end{cases}$ непрерывна при всех x. В ответе напишите либо числа a и b, разделенные пробелом, либо «не существуют» (без кавычек).

Ответ: 2 −1

Решение. На каждом из трех промежутков функция непрерывна, разрывы могут возникнуть лишь в точках $x = 0$ и $x = 1$. Для непрерывности в этих точках необходимы условия

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Напишем условия на a и b, необходимые для непрерывности функции f:

$$\lim_{x \to 0+} (ax+b) = \lim_{x \to 0-} (x-1)^3 = -1,$$
$$\lim_{x \to 1-} (ax+b) = \lim_{x \to 1+} \sqrt{x} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = -1 \\ a \cdot 1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2. \end{cases}$$

2. В каких точках функция $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — рационально} \end{cases}$ непрерывна? В ответе приведите все точки непрерывности, разделенные пробелами.

Ответ: −1 1

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = 0 = f(1),$$
$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = 0 = f(-1).$$

Для доказательства первой цепочки равенств рассмотрим последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n \to 1$. Разобьем последовательность на две подпоследовательности — состоящую из рациональных точек $\{q_n\}$ и состоящую из иррациональных точек $\{p_n\}$. Тогда последовательность $f(q_n)$ состоит из нулей, а $\lim\limits_{n \to \infty} f(p_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (p_n^2 - 1) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0 = f(1)$.

Вторая цепочка доказывается аналогично. Очевидно, что других точек непрерывности быть не может.

3. Даны функции $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 + 1$ и $h(x) = x(1 - x^2)$. Отметьте функции, которые будут непрерывны при всех x.

Решение. Напишем явные формулы для композиций в случаях, где непрерывность неочевидна.

☑ $f(g(x))$

Верно. Заметим, что $g(x) > 0$ при всех x, поэтому $f(g(x)) = 1$.

☐ $g(f(x))$

Неверно, так как $g(f(x)) = \begin{cases} 1^2 + 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 + 1 & \text{при } x = 0 \\ (-1)^2 + 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

☑ $h(f(x))$

Верно, так как $h(f(x)) = \begin{cases} 1\cdot(1-1^2) & \text{при } x>0 \\ 0\cdot(1-0^2) & \text{при } x=0 \\ -1\cdot(1-(-1)^2) & \text{при } x<0 \end{cases}$, то есть $h(f(x)) = 0$ при всех x.

☑ $g(h(x))$

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

☑ $h(g(x))$

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

4. Дана произвольная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная во всех точках. Отметьте верные утверждения.

Решение. Приведем контрпримеры для разрывных функций, непрерывность докажем.

☑ Функция $|f(x)|$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$.

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

☑ Функция $f(|x|)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$.

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

☐ Функция $\{f(x)\}$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, где $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t.

Неверно. Например, $f(x) = x$. Тогда функция $\{f(x)\} = \{x\}$ имеет разрыв в каждой целой точке.

☐ Функция $f(\{x\})$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, где $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t.

Неверно. Например, $f(x) = x$. Тогда функция $f(\{x\}) = \{x\}$ имеет разрыв в каждой целой точке.

☑ Функция $d(f(x))$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Здесь $d(t)$ обозначает расстояние от t до ближайшего целого числа.

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

☑ Функция $f(d(x))$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Здесь $d(t)$ обозначает расстояние от t до ближайшего целого числа.

Верно, так как композиция непрерывных функций непрерывна.

☑ Функция $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) > 0 \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$.

Верно, поскольку $f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$.

☑ Функция $f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0 \\ f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$.

Верно, поскольку $f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$.

2.3. Теорема Вейерштрасса

1. Отметьте верные утверждения.

Решение. Докажем верные утверждения, остальные опровергнем контрпримерами.

☐ Функция $f : (a, b) \to (0, +\infty)$ непрерывна на (a, b), тогда существует такое положительное число c, что $f(x) \geqslant c$ при всех $x \in (a, b)$.

Неверно. Например, $f(x) = x$ на $(0, 1)$. Очевидно, что функция принимает сколь угодно малые положительные значения, поэтому требуемого c не существует.

☑ Функция $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда существует такое положительное число c, что $f(x) \geqslant c$ при всех $x \in [a, b]$.

Верно. Непрерывная на отрезке достигает минимума на нем. Обозначим $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Так как $m > 0$, то в качестве c можно взять любое число из $(0, m]$.

☐ Функция $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, тогда существует такое положительное число c, что $f(x) \geqslant c$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Неверно. Например, $f(x) = e^x$. Очевидно, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Значит, $\forall c > 0 \;\; \exists A : \;\; x < A \Rightarrow 0 < f(x) < c$.

☑ Функция $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, тогда существует такая последовательность положительных чисел c_n, что для любого натурального n неравенство $f(x) \geqslant c_n$ верно при всех $x \in [n - 1, n]$.

Верно. На каждом из отрезков $[n - 1, n]$ функция непрерывна, и, значит, достигает минимума. Обозначим $m_n = \min\limits_{x \in [n-1,n]} f(x)$. Так как $m_n > 0$, то в качестве c_n можно взять любое число из $(0, m_n]$.

2. Функция называется T-периодической, если $f(x + T) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Функция называется периодической, если она T-периодическая для некоторого $T > 0$.

Отметьте верные утверждения.

Решение. Докажем верные утверждения, остальные опровергнем контрпримерами.

☐ Функция $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $(0, 1)$, тогда f ограничена.

Неверно. Например, $f(x) = 1/x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но неограничена на нем.

☑ Функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[0, 1]$, тогда f ограничена.

Верно. Непрерывная на отрезке функция достигает наибольшего и наименьшего значений на нем, и следовательно, ограничена на нем.

☐ Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, тогда f ограничена.

Неверно. Например, $f(x) = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и неограничена на нем.

☑ Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, тогда f ограничена.

Верно. Поскольку предел $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ существует и конечен, функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $-\infty$ (т.е. на луче вида $(-\infty, A)$). Аналогично поскольку предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует и конечен, функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $+\infty$ (т.е. на луче вида $(B, +\infty)$. А на отрезке $[A, B]$ функция ограничена, так как непрерывна на нем.

☑ Периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, тогда f ограничена.

Верно. Пусть период функции равен T. На любом отрезке длины T функция принимает все свои возможные значения в силу периодичности. На отрезке $[0, T]$ функция ограничена, так как непрерывна на нем, значит, функция ограничена.

3. Функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, +\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Докажите, что функция f ограничена на $[a, +\infty)$.

Решение. Поскольку предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует и конечен, функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $+\infty$ (т.е. на луче вида $(B, +\infty)$). На отрезке $[a, B]$ функция так же ограничена, так как непрерывна на нем.

4. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Докажите, что функции $m(x) = \min\limits_{t \in [a,x]} f(t)$ и $M(x) = \max\limits_{t \in [a,x]} f(t)$ также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Решение. Докажем непрерывность минимума. Поскольку если $x < y$, то $[a, x] \subset [a, y]$ и, следовательно, $m(x) = \min\limits_{t \in [a,x]} f(t) \geqslant \min\limits_{t \in [a,y]} f(t) = m(y)$. Проверим теперь непрерывность функции $m(x)$ с помощью определения по Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и точку x_0. Рассмотрим значения функции в точке $x_0 + h$. По определению непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$. Покажем, что при $|h| < \delta$ будет верно и неравенство

$$|m(x_0 + h) - m(x_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Действительно, пусть $h > 0$. Тогда $m(x_0) \geqslant m(x_0 + h)$. Если $m(x_0) = m(x_0 + h)$, то для такого h неравенство $(*)$ автоматически выполнено. Если же $m(x_0) > m(x_0 + h)$, то минимум из определения $m(x_0 + h)$ достигается в некоторой точке $c_h \in (x_0, x_0 + h)$. Но мы знаем, что $|f(c_h) - f(x_0)| < \varepsilon$, поэтому $m(x_0 + h) = f(c_h) > f(x_0) - \varepsilon \geqslant m(x_0) - \varepsilon$. Стало быть, $0 \leqslant m(x_0) - m(x_0 + h) < \varepsilon$. Случай $h < 0$ разбирается аналогично, только точки x_0 и $x_0 + h$ поменяются местами.

Непрерывность максимума доказывается аналогично.

2.4. Теорема Больцано–Коши

1. Отметьте верные утверждения. Для ответов на поставленные вопросы полезно понять, что они означают с геометрической точки зрения.

Решение. Докажем верные утверждения, остальные опровергнем контрпримером.

☐ Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, тогда существует такая точка $c\in\mathbb{R}$, что $f(c)=c$.
Неверно. Например $f(x)=x-1$.

☑ Функция $f:[0,1]\to[0,1]$ непрерывна на $[0,1]$, тогда существует такая точка $c\in[0,1]$, что $f(c)=c$.

Верно. Функция $g(x)=f(x)-x$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано–Коши: она непрерывна, $f(0)\geqslant 0$ и $f(1)\leqslant 0$. Поэтому найдется такая точка $c\in[0,1]$, что $g(c)=0$.

☐ Функция $f:(0,1)\to(0,1)$ непрерывна на $(0,1)$, тогда существует такая точка $c\in(0,1)$, что $f(c)=c$.

Неверно. Например, $f(x)=x^2$ на $(0,1)$

2. Отметьте верные утверждения. Для ответов на поставленные вопросы полезно понять, что они означают с геометрической точки зрения.

Решение. Докажем верные утверждения, остальные опровергнем примером.

☑ Функции f и g определены и непрерывны на $[a,b]$, $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Тогда найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $f(c)=g(c)$.

Верно. Рассмотрим функцию $h(x)=f(x)-g(x)$. Она непрерывна и имеет на отрезке хотя бы одну перемену знака, так как $h(a)<0$ и $h(b)>0$. Следовательно, у h на интервале (a,b) найдется корень, то есть $h(c)=0$ для некоторого $c\in(a,b)$. Но тогда $f(c)=g(c)$.

☐ Функции f и g определены и непрерывны на $[a,b]$, $f(a)=g(a)$ и $f(b)=g(b)$. Тогда найдется такая точка $c\in(a,b)$, что $f(c)=g(c)$.

Неверно. Например $f(x)=x^2$ и $g(x)=x$ на $[0,1]$. Тогда $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, но $f(x)<g(x)$ при всех $x\in(0,1)$.

☑ Функция f определена и непрерывна на $[a,b]$ и $f(x)^2=1$ при всех $x\in[a,b]$. Тогда либо $f(x)=1$ при всех $x\in[a,b]$, либо $f(x)=-1$ при всех $x\in[a,b]$.

Верно. Если бы нашлись такие точки α и β, что $f(\alpha)=-1$ и $f(\beta)=1$, то по теореме Больцано–Коши на промежутке (α,β) (или (β,α)) нашлась бы точка, значение функции в которой равнялось бы нулю. Но по условию такая точка не может существовать.

☑ Функция f определена и непрерывна на $[a,b]$ и уравнение $f(x)=0$ имеет на $[a,b]$ конечное число корней: $x_1<x_2<x_3<\dots<x_n$. Тогда на каждом из промежутков (a,x_1), (x_1,x_2), (x_2,x_3), …, (x_n,b) функция f сохраняет постоянный знак.

Верно. Перемена знака на (x_i,x_{i+1}) может возникнуть только в двух случаях — или график функции пересекает ось абсцисс на этом интервале, или имеется «скачок» с положительного значения на отрицательное (или наоборот). Первое невозможно, так как на интервале (x_i,x_{i+1}) не может быть корней функции, второе невозможно в силу непрерывности функции.

☐ Функция f определена и непрерывна на множестве $E=[a,b]\cap\mathbb{Q}$, $f(a)=-1$ и $f(b)=1$. Тогда найдется такая точка $c\in E$, что $f(c)=0$.

Неверно. Например, $f(x)=2x^2-1$ при $a=0$ и $b=1$. Единственная точка из отрезка $[0,1]$, в которой функция обращается в ноль равна $1/\sqrt{2}$, не является рациональной.

3. Докажите, что многочлен нечетной степени всегда имеет корень.

Указание. Представьте многочлен $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ в виде $p(x)=x^n\Big(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_{n-2}}{x^2}+\dots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\Big)$ и покажите, что при x, больших по модулю, он принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Решение. Пусть $a_n>0$. Тогда

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\dots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}=a_n>0$$

и по теореме о стабилизации знака найдется такая окрестность $-\infty$ (т.е. луч $(-\infty, A)$), в которой это выражение не меньше, чем $a_n/2$. Если требуется уменьшим луч так, чтобы A стало отрицательным. Тогда на этом луче $p(x) < a_n x^n/2 < 0$. Аналогично найдется такой луч $(B, +\infty)$, на котором $p(x) > a_n x^n/2 > 0$. Тогда $p(A-1) < 0$ и $P(B+1) > 0$. Так как многочлен — непрерывная функция, по теореме Больцано–Вейерштрасса на $(A-1, B+1)$ такая точка c, что $p(c) = 0$, т. е. c — корень многочлена.

В случае $a_n < 0$ доказательство аналогично.

2.5. Замечательные пределы

1. Вычислите пределы $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$ и $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{x}$. Запишите ответы в виде разделенных пробелом десятичных дробей, округленных до трех знаков после запятой.

Ответ: $\ln 3-\ln 2$ 2

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1-(2^x-1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 3-\ln 2,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-1-\big(e^{\sin x}-1\big)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3-\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\\&=3\cdot\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}-\lim_{w\to0}\frac{e^w-1}{w}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=3\cdot1\cdot1-1\cdot1=2.\end{aligned}$$

2. Вычислите пределы $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$ и $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)^{1/x}$. Запишите ответы в виде разделенных пробелом десятичных дробей, округленных до трех знаков после запятой.

Ответ: $9/4$ $1/e$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos 3x-1))}{\cos 3x-1}\cdot\frac{\cos 2x-1}{\ln(1+(\cos 2x-1))}\cdot\frac{\cos 3x-1}{\cos 2x-1}=\\&=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{z\to0}\frac{z}{\ln(1+z)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{\cos 2x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{\cos 2x-1}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{\frac{(3x)^2}{2}}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{\cos 2x-1}\cdot\frac{\frac{(3x)^2}{2}}{\frac{(2x)^2}{2}}=\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{\frac{(y)^2}{2}}\lim_{z\to0}\frac{\frac{(z)^2}{2}}{\cos z-1}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{4},\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)}=e^{-1},\ \text{так как}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\frac{x^2}{2}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\\&=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\frac{x^2}{2}}\lim_{x\to0}\frac{x}{2}-\lim_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot1\cdot0-1\cdot1=-1.\end{aligned}$$

3. Вычислите $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3^x}{x-3}$. Ответ приведите в виде десятичной дроби, округленной до трех знаков после запятой.

Указание. Поскольку все обсуждавшиеся ранее пределы были при $x\to0$, для их использования удобно сделать замену, чтобы рассматриваемая переменная стала стремиться к нулю.

Ответ: $27(1-\ln 3)$

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^x}{x-3}=\lim_{y\to 0}\frac{(y+3)^3-3^{y+3}}{y}=3^3\cdot\lim_{y\to 0}\frac{(\frac{y}{3}+1)^3-3^y}{y}=27\cdot\lim_{y\to 0}\frac{(\frac{y}{3}+1)^3-1-(3^y-1)}{y}=$$

$$=27\cdot\left(\lim_{y\to 0}\frac{(\frac{y}{3}+1)^3-1}{\frac{y}{3}\cdot 3}-\lim_{y\to 0}\frac{3^y-1}{y}\right)=27\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^3-1}{z}-\lim_{y\to 0}\frac{3^y-1}{y}\right)=$$

$$=27\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 3-\ln 3\right)=27(1-\ln 3).$$

4. Для положительных чисел a и b найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}=e^{\frac{\ln ab}{2}}=(ab)^{1/2},\ \text{так как}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}.$$

5. Вычислите пределы $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ и $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}{x^2-1}$. Запишите ответы в виде разделенных пробелом десятичных дробей, округленных до трех знаков после запятой.

Ответ: $-1/\sqrt{2}$ $1/40$

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\sqrt{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{-\sin(2y)}=$$

$$=-\sqrt{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{2\cos y}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[20]{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[20]{x}-1}{x^2-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[20]{y+1}-1}{(y+1)^2-1}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[20]{y+1}-1}{y}\cdot\frac{y}{y^2+2y}=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{40}.$$

2.6. Эквивалентные функции

1. Отметьте функции, которые при $x \to 0$ будут эквивалентны cx для некоторого $c \neq 0$.

Решение.

☑ $1 - \cos\sqrt{x}$

Верно, так как $1 - \cos\sqrt{x} \sim (\sqrt{x})^2/2 = x/2$.

☐ $\sin x^2$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{cx} = 0$.

☐ $\ln(1+2x) + \ln(1-2x)$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{cx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{cx} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{cx} = \frac{2}{c} - \frac{2}{c} = 0$.

☑ $3^x - 1$

Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-1}{cx} = \frac{\ln 3}{c} = 1$ при $c = \frac{1}{\ln 3}$.

☐ $\sin x - \operatorname{tg} x$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{cx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{cx} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{cx} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} = 0$.

☑ $\sqrt[3]{1+2x} - 1$

Верно, так как $\sqrt[3]{1+2x} - 1 = (1+2x)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot (2x) = \frac{3}{2} \cdot x$.

☐ $e^{x^2} - 1$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{cx} = 0$.

☑ $\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1} - 1)$

Верно, так как $\sqrt{x+1} - 1 \to 0$ при $x \to 0$ и, значит,

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1} - 1) \sim \sqrt{x+1} - 1.$$

☑ $\sin(\operatorname{arctg}(\arcsin x))$

Верно, так как $\arcsin x \to 0$ и $\operatorname{arctg}(\arcsin x) \to 0$ при $x \to 0$ и, значит,

$$\sin(\operatorname{arctg}(\arcsin x)) \sim \operatorname{arctg}(\arcsin x) \sim \arcsin x \sim x.$$

☐ $\cos x - 1$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{cx} = 0$.

2. Отметьте функции, которые при $x \to 0$ будут бесконечно малыми по сравнению с x.

Решение.

☐ $\sqrt{x+4} - 2$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$.

☑ $1 - \cos x$

Верно, так как $1 - \cos x \sim x^2/2 = o(x)$.

☑ $\dfrac{\operatorname{tg} x^2}{\sqrt[3]{x}}$

Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x^2}{\sqrt[3]{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}} = 0$.

☐ $\sqrt[3]{\sin x}$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}\,\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty$.

☐ $2^x - 1$

Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \ln 2$.

☑ $\ln(1+x) + \ln(1-x)$

Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x} = 1 - 1 = 0$.

☑ $2^{x^2} - 3^{x^3}$
Верно. Поскольку $2^{x^2} = 1 + x^2 \ln 2 + o(x^2)$ и $3^{x^3} = 1 + x^3 \ln 2 + o(x^3)$, имеем

$$2^{x^2} - 3^{x^3} = 1 + x^2 \ln 2 + o(x^2) - \big(1 + x^3 \ln 2 + o(x^3)\big) = o(x).$$

☑ $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$
Верно, так как $\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot x^2 = o(x)$.

☑ $x - \sin x$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$.

3. Отметьте все соотношения, верные при $x \to 0$.

Решение.

☑ $x = o(1)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1} = 0$.

☑ $x^2 = o(1)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1} = 0$.

☑ $x^2 = o(x)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

☐ $x = o(x^2)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

☐ $x^2 \sim x$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

☑ $x^2 + x = o(x)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = 0$.

☐ $x^2 + x = o(x^2)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2} = \infty$.

☑ $x^2 + x \sim x$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = 1$.

☐ $x^2 + x \sim x^2$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2} = \infty$.

4. Отметьте все соотношения, верные при $x \to +\infty$.

Решение.

☐ $x = o(1)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{1} = +\infty$.

☐ $x^2 = o(1)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1} = +\infty$.

☐ $x^2 = o(x)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$.

☑ $x = o(x^2)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$.

☐ $x^2 \sim x$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$.

☐ $x^2 + x = o(x)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{x} = +\infty$.

☐ $x^2+x=o(x^2)$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2}=1$.

☐ $x^2+x\sim x$
Неверно, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x}=+\infty$.

☑ $x^2+x\sim x^2$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2}=1$.

5. Отметьте все утверждения, верные для любых положительных монотонно возрастающих функций $f,g:[1,\infty)\to[1,\infty)$, стремящихся к $+\infty$ при $x\to+\infty$. Во всех утверждениях считается, что $x\to+\infty$.

Решение.

☑ Если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$
Верно, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

☐ Если $f(x)=o(g(x))$, то $g(x)=o\big(f(x)\big)$
Неверно, так как если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$.

☑ Если $f(x)\sim g(x)$, то $(f(x))^2\sim(g(x))^2$
Верно, так как если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

☑ Если $f(x)=o(g(x))$, то $(f(x))^2=o\big((g(x))^2\big)$
Верно, так как если $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

☐ Если $f(x)=o(g(x))$, то $\ln(f(x))=o\big(\ln(g(x))\big)$
Неверно, например, $f(x)=x$ и $g(x)=x^2$. Тогда $\ln g(x)=\ln(x^2)=2\ln x=2\ln f(x)$.

☐ Если $f(x)\sim g(x)$, то $2^{f(x)}\sim 2^{g(x)}$
Неверно, например, $f(x)=x$ и $g(x)=x+1$. Тогда $2^{g(x)}=2^{x+1}=2\cdot2^{f(x)}$.

☑ Если $f(x)=o(g(x))$, то $2^{f(x)}=o\big(2^{g(x)}\big)$
Верно. Поскольку $f(x)=o(g(x))$, начиная с некоторого места $f(x)\leqslant g(x)/2$. Тогда $2^{f(x)}\leqslant 2^{g(x)/2}=o\big(2^{g(x)}\big)$, так как $g(x)\to+\infty$.

6. Найдите такие числа c и n, что $\dfrac{x^3\operatorname{arctg}x}{x^4+\sin x+2}\sim cx^n$ при $x\to x_0$ для $x_0=0$ и $x_0=+\infty$. В качестве ответа приведите разделенную пробелами четверку чисел (округленных до третьего знака после запятой) в следующем порядке: сначала c и n для $x_0=0$, затем c и n для $x_0=+\infty$.

Ответ: $0{,}5$ 4 $\pi/2$ -1

Решение. Рассмотрим сначала точку $x_0=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3\operatorname{arctg}x}{x^4+\sin x+2}}{cx^n}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\operatorname{arctg}x}{cx^n(x^4+\sin x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\cdot\frac{x^4}{cx^n(x^4+\sin x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{4-n}}{c(x^4+\sin x+2)}.$$

Знаменатель стремится к $2c$, значит, неопределенности не возникнет. При $n>4$ предел бесконечен, при $n<4$ он равен нулю. При $n=4$ предел равен константе $1/2c$. Следовательно, для того, чтобы этот предел равнялся единице, нужно, чтобы $n=4$ и $c=0{,}5$.

Рассмотрим точку $x_0=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3\operatorname{arctg}x}{x^4+\sin x+2}}{cx^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\operatorname{arctg}x}{cx^n(x^4+\sin x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3-n}\cdot\frac{\pi}{2}}{c(x^4+\sin x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3-n-4}\cdot\frac{\pi}{2}}{c(1+\frac{\sin x}{x^4}+\frac{2}{x^4})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2c}\cdot x^{-1-n}.$$

Знаменатель стремится к $2c$, значит, неопределенности не возникнет. При $(-1-n)>0$ предел бесконечен, при $(-1-n)<0$ он равен нулю. При $(-1-n)=0$ предел равен константе $\pi/2c$. Следовательно, для того, чтобы этот предел равнялся единице, нужно, чтобы $n=-1$ и $c=\pi/2$.

7. Отметьте верные утверждения.

Решение. Обоснуем верные утверждения, остальные опровергнем контрпримером.

☑ Функция f удовлетворяет условию $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$. Тогда найдется такое $\delta>0$, что если $0<|x|<\delta$, то $f(x)\in(2,4)$.

Верно. В определении предела функции положим $\varepsilon=1$.

☑ Если p многочлен, то $\lim\limits_{x\to 5} p(x)=p(5)$.

Верно, так как многочлен непрерывная функция.

☐ Если $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big)=0$.

Неверно. Например, $f(x)=\frac{1}{|x-1|}$ и $g(x)=\frac{1}{|x^2-1|}$, то $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 1}\big(\frac{1}{|x-1|}-\frac{1}{|x^2-1|}\big)=\lim\limits_{x\to 1}\big(\frac{|x+1|-1}{|x^2-1|}\big)=\lim\limits_{x\to 1}\big(\frac{x}{|x^2-1|}\big)=+\infty$. Предпоследнее равенство верно в окрестности единицы.

☑ Если f непрерывна в точке 6 и $f(6)=2$, то $\lim\limits_{x\to -1} 2f(2x^2+4)=4$.

Верно. Сделаем замену переменной в пределе: $\lim\limits_{x\to -1} 2f(2x^2+4)=2\cdot\lim\limits_{y\to 6} f(y)=4$.

☐ Если предел $\lim\limits_{x\to 2} f(x)g(x)$ существует, то он равен $f(2)g(2)$.

Неверно. Например, $f(x)=x-2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$.

☑ Если функция f непрерывна на $[-1,1]$, $f(-1)=4$ и $f(1)=2$, то для найдется такое y, что $|y|<1$ и $f(y)=\pi$.

Верно. Так как функция непрерывна на отрезке, то она принимает все значения из $[\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x), \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)]$. Так как $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x)\leqslant 2<\pi<4\leqslant \max\limits_{x\in[-1,1]} f(x)$, то на отрезке найдется точка, значение в которой равно π.

☐ Если $f(x)<3$ при всех положительных x и существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)<3$.

Неверно. Например, $f(x)=3-x$.

☐ Если оба предела $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ не существуют, то не существует и предел $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)+g(x)\big)$.

Неверно. Например, $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{при } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{при } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

☐ Если функция $|f|$ непрерывна в точке a, то функция f также непрерывна в точке a.

Неверно. Например, $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{при } x\geqslant 0\\ -x-1 & \text{при } x<0\end{cases}$, терпит разрыв в нуле, тогда как $|f(x)|=|x+1|$ непрерывна во всех точках.

☑ Если функция $|f|$ непрерывна в точке a и $f(a)=0$, то функция f также непрерывна в точке a.

Верно, так как $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)=0=f(a)$.