Линейная алгебра - II

1 Евклидово пространство

Пример 1.1. Вычислить скалярное произведение векторов $(2, 3, 0, 2)$ и $(1, -4, 2, 5)$.

Решение. По умолчанию, в пространстве $\mathbb{R}^4$ четырехмерных векторов скалярное произведение рассчитывается как сумма произведений координат этих векторов. Как следствие, для заданной пары векторов имеем

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 2 - 12 + 0 + 10 = 0.$$

Пример 1.2. Найти периметр треугольника с вершинами в точках $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$.

Решение. По определению, периметр есть сумма длин сторон треугольника. Каждую сторону можно рассматривать как вектор, равный разности между векторами, координаты которых совпадают с координатами вершин треугольника. Поэтому вектор $\boldsymbol{v}_{AB}$, описывающий сторону AB треугольника, равен

$$\boldsymbol{v}_{AB} = (2-6, 4-4, 2-4, 4-4, 2-6) = (-4, 0, -2, 0, -4),$$

а его длина вычисляется через скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{v}_{AB}, \boldsymbol{v}_{AB}) = (-4)\cdot(-4)+0+(-2)\cdot(-2)+0+(-4)\cdot(-4) = 36 \qquad \Longrightarrow \qquad |\boldsymbol{v}_{AB}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}_{AB}, \boldsymbol{v}_{AB})} = 6.$$

Аналогично, координаты векторов $\boldsymbol{v}_{AC}$ и $\boldsymbol{v}_{CB}$ имеют вид

$$\boldsymbol{v}_{AC} = (2-5, 4-7, 2-5, 4-7, 2-2) = (-3, -3, -3, -3, 0),$$

$$\boldsymbol{v}_{CB} = (5-6, 7-4, 5-4, 7-4, 2-6) = (-1, 3, 1, 3, -4),$$

а их длины рассчитываются по формулам

$$|\boldsymbol{v}_{AC}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}_{AC}, \boldsymbol{v}_{AC})} = \sqrt{4(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{36} = 6,$$

$$|\boldsymbol{v}_{CB}| = \sqrt{(\boldsymbol{v}_{CB}, \boldsymbol{v}_{CB})} = \sqrt{(-1)\cdot(-1) + 3\cdot 3 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 + (-4)\cdot(-4)} = \sqrt{36} = 6.$$

Итак, треугольник оказался равносторонним, а его периметр равен 18.

Пример 1.3. Найдите угол между векторами $\boldsymbol{a} = (2, -2, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (1, 2, 2)$.

Решение. По определению угла α между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$\alpha = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 2}{3 \cdot 3} = \arccos(0) = 90^\circ.$$

Пример 1.4. Молекула метана CH4 расположена в пространстве в виде пирамиды, в центре которой находится атом углерода, а в вершинах — атомы водорода. Если вершины разместить в точках с координатами $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$, то получится правильный тетраэдр, длины всех ребер которого равны $\sqrt{2}$. Каким будет косинус угла между любыми двумя лучами, идущими из центра тетраэдра, расположенного в точке $(1/2, 1/2, 1/2)$, к вершинам этого тетраэдра?

Решение. Возьмем любые две вершины тетраэдра, например, $(1, 1, 0)$ и $(1, 0, 1)$. Векторы, идущие из центра тетраэдра к этим вершинам, равны, соответственно, $(1/2, 1/2, -1/2)$ и $(1/2, -1/2, 1/2)$. Косинус угла между этими векторами рассчитывается так:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{3} = -0.333.$$

Пример 1.5. В каких случаях неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство?

Решение. Как следует из доказательства неравенства Коши-Буняковского, равенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

означает равенство нулю дискриминанта D квадратного уравнения

$$t^2 \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - 2t \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Равенство $D = 0$, в свою очередь, означает, что у этого квадратного уравнения существует единственный корень, то есть такое значение t_* параметра t, при котором

$$t_*^2 \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - 2t_* \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{x} - t_*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - t_*\boldsymbol{y}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} - t_*\boldsymbol{y} = \mathbf{0}.$$

Иными словами, нашлись такие коэффициенты, при которых линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ обращается в ноль. Следовательно, неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти два вектора линейно зависимы. С геометрической точки зрения это означает, что концы этих двух векторов лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

2 Базис в евклидовом пространстве

Пример 2.1. Какие из этих утверждений являются верными? Два вектора могут быть одновременно

- линейно зависимыми и ортогональными;
- линейно зависимыми и неортогональными;
- линейно независимыми и ортогональными;
- линейно независимыми и неортогональными.

Решение. Два вектора одновременно линейно зависимыми и ортогональными быть не могут — любая пара линейно зависимых векторов параллельна друг другу, и потому их скалярное произведение отлично от нуля в случае, если оба вектора отличны от $\mathbf{0}$. Если же хотя бы один из векторов равен $\mathbf{0}$, то, хотя скалярное произведение при этом и равняется нулю, но ортогональными они также не будут — по определению, ортогональными являются два ненулевых вектора, скалярное произведение которых равно нулю.

Все остальные варианты, конечно же, возможны. Например, ортогональные векторы линейно независимы, а линейно зависимые неортогональны. Наконец, далеко не всегда линейно независимые векторы являются одновременно ортогональными.

Пример 2.2. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$?

- $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;
- $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{4}, \sqrt{5}/\sqrt{12})$, $(2/\sqrt{17}, -1/\sqrt{3}, 4/\sqrt{27})$, $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$;
- $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;
- $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(0,0,1)$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Решение. Первая и четвертая тройка векторов ортонормированный базис образуют — в каждой из этих троек векторы попарно ортогональны, а длины этих векторов равны единице. Во второй тройке векторы попарно не ортогональны друг другу. Третий вариант также не годится — в нем указано два вектора, а в базисе их должно быть три.

Пример 2.3. Дополните векторы $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ и $(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$ до ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Решение. Условие ортогональности вектора $\boldsymbol{e}_3 = (x, y, z)$ двум ортонормированным векторам $\boldsymbol{e}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ и $\boldsymbol{e}_2 = (1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$ дает нам следующую систему уравнений для определения неизвестных x, y, z:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x/\sqrt{3} & + & y/\sqrt{3} & + & z/\sqrt{3} & = & 0 \\ x/\sqrt{14} & + & 2y/\sqrt{14} & - & 3z/\sqrt{14} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

Заметим, что эта система переопределена — количество уравнений в ней на единицу меньше количества неизвестных. Связано это с тем, что вектор, ортогональный плоскости, определен с точностью до константы. Нас интересует вектор единичной длины. Иными словами, мы должны, по идее, к полученной системе добавить уравнение вида

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Однако это уравнение нелинейно, а решать нелинейную систему уравнений достаточно тяжело. Вместо этого мы в системе двух линейных уравнений положим вначале для определенности $z = 1$, получим вектор $\boldsymbol{v}$, ортогональный векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ длины, отличной от единицы, а затем отнормируем его.

Итак, полагая $z = 1$, мы получим систему вида

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & -1 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & -1 \\ & & y & = & 4 \end{array}\right.,$$

решение которой имеет вид $x = -5$, $y = 4$. Теперь отнормируем вектор $\boldsymbol{v} = (-5, 4, 1)$. Для этого поделим каждую его компоненту на длину этого вектора, равную $\sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$. В результате получим вектор $\boldsymbol{e}_3 = (-\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}})$ единичной длины.

Пример 2.4. С использованием процедуры Грама-Шмидта получите ортонормированный базис из базиса вида

$$\boldsymbol{f}_1 = (0,0,1), \qquad \boldsymbol{f}_2 = (0,1,1), \qquad \boldsymbol{f}_3 = (1,1,1).$$

Решение. Согласно процедуре Грамма-Шмидта, на первом шаге в качестве вектора e_1 мы берем вектор f_1:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (0,0,1).$$

Вектор $\boldsymbol{e}_2$ мы находим, подправляя вектор $\boldsymbol{f}_2$ до ортогонального к $\boldsymbol{e}_1$:

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = (0,1,1) - \frac{1}{1}(0,0,1) = (0,1,0).$$

Наконец, на третьем шаге процедуры мы находим вектор $\boldsymbol{e}_3$ по формуле

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_3)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 - \frac{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_3)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}\boldsymbol{e}_2 = (1,1,1) - \frac{1}{1}(0,1,0) - \frac{1}{1}(0,0,1) = (1,0,0).$$

Мы получили ортогональный базис, который одновременно оказался и ортонормированным.

Пример 2.5. С использованием процедуры Грама-Шмидта получите ортонормированный базис из базиса вида

$$\boldsymbol{f}_1 = (1,2,2), \qquad \boldsymbol{f}_2 = (1,3,1), \qquad \boldsymbol{f}_3 = (2,1,1).$$

Решение. Действуем согласно все той же процедуре ортогонализации Грамма-Шмидта. Вектор $\boldsymbol{e}_1$ полагаем равным вектору $\boldsymbol{f}_1$, вектор $\boldsymbol{e}_2$ находим по формуле

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{1+6+2}{1+4+4}\boldsymbol{e}_1 = (1,3,1) - \frac{9}{9}(1,2,2) = (0,1,-1).$$

Наконец, вектор $\boldsymbol{e}_3$ равен

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}\boldsymbol{e}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{0+1-1}{1+1}\boldsymbol{e}_2 - \frac{2+2+2}{1+4+4}\boldsymbol{e}_1 =$$

$$= (2,1,1) - \frac{2}{3}(1,2,2) = (4/3, -1/3, -1/3).$$

Мы получили ортогональный базис. Превратим этот базис в ортонормированный, поделив каждый вектор на его длину:

$$\widetilde{e_1} = \frac{\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}} = \frac{(1,2,2)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{(1,2,2)}{3} = (1/3, 2/3, 2/3),$$

$$\widetilde{e_2} = \frac{\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),$$

$$\widetilde{e_3} = \frac{\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)}} = \frac{(4/3, -1/3, -1/3)}{\sqrt{(16+1+1)/9}} = \frac{(4/3, -1/3, -1/3)}{\sqrt{2}} = (4/3\sqrt{2}, -1/3\sqrt{2}, -1/3\sqrt{2}).$$

Пример 2.6. Найдите значение α, при котором расстояние от (α, α, α) до $(2,4,1)$ минимально. Ответ округлите до третьего знака после запятой.

Решение. По сути, в данной задаче требуется найти проекцию $\boldsymbol{x}_0$ вектора $\boldsymbol{x} = (2,4,1)$ на одномерное линейное подпространство V_0, натянутое на вектор $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ (рис 1). Напомним еще раз, как решается данная задача.

Одномерное подпространство V_0, натянутое на вектор $\boldsymbol{v}$, состоит из векторов вида $\xi \cdot \boldsymbol{v}$. Так как вектор $\boldsymbol{x}_0 \in V$, то он также представляется в виде $\xi \cdot \boldsymbol{v}$, так что задача определения проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство состоит, собственно, в нахождении коэффициента ξ. А этот коэффициент найти довольно легко — как мы выяснили в основной части данного параграфа, вектор $\boldsymbol{x}_0 = \xi \cdot \boldsymbol{v}$ определяется из условия ортогональности векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$:

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{v}, \xi \cdot \boldsymbol{v}) = \xi \cdot (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

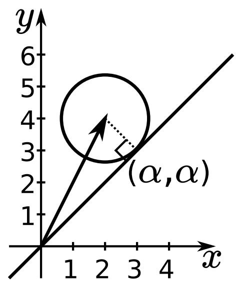

Рис. 1

Из последнего равенства получается явная формула для определения коэффициента ξ:

$$\xi = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}.$$

Сама же проекция $\boldsymbol{x}_0$ вектора $\boldsymbol{x}$ описывается формулой вида

$$\boldsymbol{x}_0 = \xi\cdot\boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{1}$$

В рассматриваемой задаче мы имеем

$$\xi = \frac{2+4+1}{1+1+1} = \frac{7}{3}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \xi\cdot\boldsymbol{v} = (7/3, 7/3, 7/3).$$

Все, что осталось теперь заметить — это то, что найденное ξ и является искомым ответом к нашей задаче.

Пример 2.7. Вычислите длину проекции вектора $(1,2,7)$ на подпространство, базисом которого являются векторы $(1,1,-2)$ и $(1,-1,4)$.

Решение. Система уравнений для определения проекции $\boldsymbol{x}_0$ вектора $\boldsymbol{x} = (1,2,7)$ на подпространство V_0, базис которого образуют векторы $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,-2)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (1,-1,4)$, имеет следующий вид (2):

$$\begin{cases} \xi^1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) + \xi^2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1) \\ \xi^1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + \xi^2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 6\,\xi^1 - 8\,\xi^2 = -11 \\ -8\,\xi^1 + 18\,\xi^2 = 27 \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид $\xi_1 = 9/22$, $\xi_2 = 37/22$. Как следствие, проекция $\boldsymbol{x}_0$ вектора $\boldsymbol{x}$ на рассматриваемое в задаче подпространство равна

$$\boldsymbol{x}_0 = \xi^1\boldsymbol{e}_1 + \xi^2\boldsymbol{e}_2 = 9/22\cdot(1,1,-2) + 37/22\cdot(1,-1,4) = (23/11, -14/11, 65/11).$$

Пример 2.8. При помощи метода наименьших квадратов найдите наилучшее решение системы уравнений:

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 4 \\ x & & & = & 5 \\ x & + & y & = & 9 \end{array}$$

В качестве ответа укажите значение суммы квадратов отклонений.

Решение. Запишем нашу систему уравнений в векторном виде:

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}.$$

Домножая эту систему скалярно вначале на вектор $\boldsymbol{e}_1$, а затем на вектор $\boldsymbol{e}_2$, получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} x\cdot(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) + y\cdot(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_1) \\ x\cdot(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + y\cdot(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = 18 \\ 2y = 5 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 2.5 \end{cases}$$

Осталось найти сумму квадратов отклонений:

$$E = (\boldsymbol{f} - x\boldsymbol{e}_1 - y\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f} - x\boldsymbol{e}_1 - y\boldsymbol{e}_2) = 1.5$$

Пример 2.9. Задание на программирование. Напишите программу, которая находит наилучшее решение системы линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов.

Решение. Задача сводится к решению системы уравнений (2) методом Гаусса.

3 Линейные операторы

Пример 3.1. Какие из следующих отображений являются линейными операторами в соответствующих векторных пространствах?

1. $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.
2. $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.
3. $\boldsymbol{x} \to \alpha\cdot\boldsymbol{x}$, где α — фиксированный скаляр.
4. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$.
5. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.
6. $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

Решение. Разберем каждое из приведенных в задании отображений.

1. Отображение $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор, линейным оператором не является. Действительно, с одной стороны, $A(\alpha\cdot\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ по определению оператора A. С другой же стороны, согласно первой аксиоме, линейный оператор, примененный к вектору $\alpha\cdot\boldsymbol{x}$, должен быть равен $\alpha\cdot A(\boldsymbol{x}) = \alpha\cdot\boldsymbol{a}$. Получили противоречие.
2. Отображение $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор, также не является линейным оператором. Действительно,
$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \qquad A(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}, \qquad A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{a} = A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y}).$$
3. Отображение $A(\boldsymbol{x}) = \alpha\cdot\boldsymbol{x}$, где α — фиксированный скаляр, является линейным оператором — оператором растяжения. Действительно,
$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\cdot\boldsymbol{x} + \alpha\cdot\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y}),$$
$$A(\beta\cdot\boldsymbol{x}) = \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{x}) = \beta\cdot(\alpha\cdot\boldsymbol{x}) = \beta\cdot A(\boldsymbol{x}).$$

4. Отображение, сопоставляющее вектору с координатами (x_1, x_2, x_3) вектор (x_1+2, x_2+5, x_3), оператором не является по тем же соображениям, что и оператор, представленный в п.2 этого задания. Действительно,

$$A(\boldsymbol{x}) = A(\xi^1\boldsymbol{e}_1 + \xi^2\boldsymbol{e}_2 + \xi^3\boldsymbol{e}_3) = (\xi^1 + 2)\boldsymbol{e}_1 + (\xi^2 + 5)\boldsymbol{e}_2 + \xi^3\boldsymbol{e}_3,$$

$$A(\boldsymbol{y}) = A(\eta^1\boldsymbol{e}_1 + \eta^2\boldsymbol{e}_2 + \eta^3\boldsymbol{e}_3) = (\eta^1 + 2)\boldsymbol{e}_1 + (\eta^2 + 5)\boldsymbol{e}_2 + \eta^3\boldsymbol{e}_3,$$

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A((\xi^1+\eta^1)\boldsymbol{e}_1+(\xi^2+\eta^2)\boldsymbol{e}_2+(\xi^3+\eta^3)\boldsymbol{e}_3) = (\xi^1+\eta^1+2)\boldsymbol{e}_1+(\xi^2+\eta^2+5)\boldsymbol{e}_2+(\xi^3+\eta^3)\boldsymbol{e}_3.$$

Видно, что равенство $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y})$ для такого оператора в общем случае не выполняется.

5. Отображение, сопоставляющее вектору с координатами (x_1, x_2, x_3) вектор $(x_1+3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$, также не является линейным оператором. Для доказательства рассмотрим операторы

$$A(\boldsymbol{x}) = A(\xi^1\boldsymbol{e}_1 + \xi^2\boldsymbol{e}_2 + \xi^3\boldsymbol{e}_3) = (\xi^1 + 3\xi^3)\boldsymbol{e}_1 + (\xi^2)^3\boldsymbol{e}_2 + (\xi^1 + \xi^3)\boldsymbol{e}_3$$

и

$$A(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = A(\alpha\xi^1\boldsymbol{e}_1 + \alpha\xi^2\boldsymbol{e}_2 + \alpha\xi^3\boldsymbol{e}_3) = (\alpha\xi^1 + 3\alpha\xi^3)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha\xi^2)^3\boldsymbol{e}_2 + (\alpha\xi^1 + \alpha\xi^3)\boldsymbol{e}_3$$

Видно, что последнее выражение отлично от

$$\alpha \cdot A(\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot (\xi^1 + 3\xi^3)\boldsymbol{e}_1 + \alpha \cdot (\xi^2)^3\boldsymbol{e}_2 + \alpha \cdot (\xi^1 + \xi^3)\boldsymbol{e}_3.$$

6. Отображение, сопоставляющее вектору с координатами (x_1, x_2, x_3) вектор $(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$, линейным оператором является: справедливость каждой из двух аксиом для этого оператора проверяются элементарно.

Пример 3.2. Найдите матрицу оператора A проекции на линию, проходящую через точку $(3, 1)$ и начало координат.

Решение. Для построения матрицы $\mathcal{A}$ оператора A проектирования нам достаточно определить действие этого оператора на двух базисных векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$: если

$$A\boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2,$$

то матрица $\mathcal{A}$ оператора A записывается в виде

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, все, что нам осталось — это определить действие оператора A на базисные векторы.

Так как оператор A есть оператор проектирования на одномерное подпространство, натянутое на вектор $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, то задача сводится к определению проекций двух базисных векторов на это подпространство. В ответе к задаче **??** мы подробно разобрали, как решается данная задача. В частности, там была приведена следующая явная формула (1) для вычисления проекции вектора на одномерное подпространство:

$$\boldsymbol{x}_0 = \xi \cdot \boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Используя эту формулу, вычислим проекцию вектора $\boldsymbol{e}_1$ на вектор $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{e}_{10} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{3}{10}\boldsymbol{v} = 0.9 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0.3 \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Аналогично, проекция вектора $\boldsymbol{e}_2$ на вектор $\boldsymbol{v}$ равна

$$\boldsymbol{e}_{20} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{10}\boldsymbol{v} = 0.3 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0.1 \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Как следствие, матрица $\mathcal{A}$ оператора проектирования A имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.3. Найдите матрицу оператора A отражения относительно прямой $x - 2y = 0$.

Решение. Легче всего свести данную задачу к предыдущей, то есть к задаче поиска проекции вектора на одномерное подпространство. Действительно, пусть $\boldsymbol{x}_0$ есть проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор $\boldsymbol{v}$. Тогда оператор A отражения — это оператор, переводящий вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор

$$\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 2\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}.$$

(см.рис.2). Координаты же вектора $\boldsymbol{x}_0$ мы находить уже умеем (см. решение предыдущей задачи).

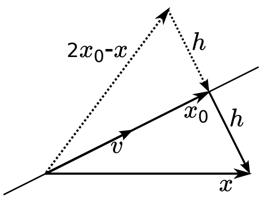

Рис. 2

Итак, для решения данной задачи найдем, прежде всего, проекции базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор $\boldsymbol{v} = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{e}_{10} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{2}{5}\boldsymbol{v} = 0.8 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0.4 \cdot \boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_{20} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\boldsymbol{v} = 0.4 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0.2 \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Тогда образы $A\boldsymbol{e}_1$ и $A\boldsymbol{e}_2$ базисных векторов под действием оператора A отражения рассчитываются по формулам

$$A\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{e}_{10} - \boldsymbol{e}_1 = 0.6 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0.8 \cdot \boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_{20} - \boldsymbol{e}_2 = 0.8 \cdot \boldsymbol{e}_1 - 0.6 \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

Матрица $\mathcal{A}$ оператора A, как следствие, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.4. Найдите матрицу $\mathcal{A}$ оператора, который сначала растягивает вектор вдоль оси Ox в два раза, а затем поворачивает его против часовой стрелки на 45 градусов.

Решение. Матрица $\mathcal{A}$ описанного в задаче оператора A представляет собой произведение матриц $\mathcal{A}_2$ поворота на угол в $45°$ и $\mathcal{A}_1$ оператора A_1 растяжения в два раза вдоль оси абсцисс (сначала растягиваем, потом вращаем). Так как

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \text{то} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Пример 3.5. Выберите для каждого нижеследующего оператора его ядро и образ:

1. $T(x, y) = (y, x)$;
2. $T(x, y) = (0, 0)$;
3. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$;
4. $T(x, y, z) = (x, y, x)$.

Решение. Рассмотрим каждый из приведенных в задании операторов.

1. Оператор $T(x, y) = (y, x)$ просто меняет компоненты двумерного вектора. Ядро такого оператора состоит из единственного вектора $\mathbf{0}$, а образ совпадает со всем пространством двумерных векторов.

2. Оператор $T(x, y) = (0, 0)$ переводит любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ в нулевой вектор $\mathbf{0}$. Поэтому здесь ситуация обратная с предыдущим примером: ядро этого оператора совпадает со всем пространством векторов, а образ — это вектор $\mathbf{0}$.

3. Оператор $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ обнуляет третью компоненту любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Как и в разобранном в основном тексте параграфа двумерном случае, образ этого оператора совпадает с плоскостью Oxy, а ядро составляют векторы, принадлежащие одномерному линейному подпространству, натянутому на вектор с координатами $(0, 0, 1)$.

4. Оператор $T(x, y, z) = (x, y, x)$ проектирует любой вектор трехмерного пространства на плоскость, задаваемую уравнением $x = z$. Эта плоскость является, таким образом, образом оператора T. Ядром оператора являются все такие векторы, для которых $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Иными словами, это все векторы, у которых $x = y = 0$, то есть векторы, проходящие через точку с координатами $(0, 0, 1)$.