Интегралы

Первообразная и неопределенный интеграл

1. С помощью линейности интеграла и таблицы основных интегралов при $x \in \mathbb{R}$ найдите первообразную функции

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + 5\sin x + 6 \cdot 7^x + \frac{8}{x^2+9},$$

обращающуюся в 0 при $x = 0$.

Ответ: $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 4x - 5\cos x + \dfrac{6 \cdot 7^x}{\ln 7} + \dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right) + 5 - \dfrac{6}{\ln 7}$.

Решение. С помощью линейности и таблицы интегралов сразу находим первообразную $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + 4x - 5\cos x + \dfrac{6 \cdot 7^x}{\ln 7} + \dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Для того чтобы сделать из нее ту, которая в нуле будет обращаться в ноль, нужно просто вычесть $F(0) = -5 + \dfrac{6}{\ln 7}$. Откуда и получим ответ.

2. Даны множества функций $A = \{x, 2x, 3x, x^2\}$ и $B = \{x+1, 2x+1, x^2\}$. Найдите множества $A + B$, $2A$ и $3B$. В ответе приведите разделенные пробелами количества элементов в этих множествах.

Ответ: 10 4 3

Решение. Перечислим элементы получившихся множеств, исключив совпадающие:

$$\begin{aligned}
A + B &= \{x + x + 1, 2x + x + 1, 3x + x + 1, x^2 + x + 1, x + 2x + 1, 2x + 2x + 1, 3x + 2x + 1,\\
&\qquad x^2 + 2x + 1, x + x^2, 2x + x^2, 3x + x^2, x^2 + x^2\} =\\
&= \{2x + 1, 3x + 1, 4x + 1, x^2 + x + 1, 5x + 1, x^2 + 2x + 1, x + x^2, 2x + x^2, 3x + x^2, 2x^2\},\\
2A &= \{2x, 4x, 6x, 2x^2\},\\
3B &= \{3x + 3, 6x + 3, 3x^2\}.
\end{aligned}$$

Действия с неопределенными интегралами

1. Сделав подходящую замену переменной, найдите интеграл $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ при $x \in (1,+\infty)$. В ответе укажите ту первообразную, которая обращается в 0 в точке e.

Ответ: $\ln(\ln x)$

Решение. Сделаем замену $y = \ln x$, тогда $dy = dx/x$.

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln y + C = \ln(\ln x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Из условия $0 = \ln(\ln e) + C$ получим $C = 0$.

2. Сделав подходящую замену переменной, найдите интеграл $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ при $x \in (0,\pi)$. В ответе укажите ту первообразную, которая обращается в 0 в точке $\pi/2$.

Ответ: $2\sqrt{\sin x} - 2$

Решение. Сделаем замену $y = \sin x$, тогда $dy = \cos x\,dx$.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2\sqrt{y} + C = 2\sqrt{\sin x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Из условия $0 = 2\sqrt{\sin(\pi/2)} + C$ получим $C = -2$.

3. С помощью линейности и подходящих замен переменных найдите интеграл $\int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\cos(\ln x)}{x}\right) dx$ $x \in (0,+\infty)$. В ответе укажите ту первообразную, которая обращается в $\sqrt{2}$ в точке 1.

Ответ: $\sqrt{x^2+1} + \sin(\ln x)$

Решение. Запишем интеграл суммы как сумму интегралов и сделаем замены переменных

$$y = x^2 + 1 \ \Rightarrow\ dy = 2x\,dx;\ z = \ln x \ \Rightarrow\ dz = \frac{dx}{x}.$$

Тогда

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\cos(\ln x)}{x}\right) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy + \int \cos z\,dz =$$
$$= \sqrt{y} + \sin z + C = \sqrt{x^2+1} + \sin(\ln x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Из условия $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} + \sin(\ln 1) + C$ получим $C = 0$.

4. С помощью формулы интегрирования по частям найдите интеграл $\int \big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big)\,dx$. В ответе укажите ту первообразную, которая обращается в 0 в точке 0.

Ответ: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x\operatorname{arctg} x - \ln(x^2+1)/2 - 1$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int (x)'\big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big)\,dx = x\big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big) - \int x\big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big)'\,dx =$$
$$= x\big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big) - \int x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx.$$

Вычислим отдельно:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2z}\,dz = \frac{\ln z}{2} + C = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\int \big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big)\, dx = x\big(\arcsin x + \operatorname{arctg} x\big) + \sqrt{1-x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Из условия $0 = 0 \cdot \big(\arcsin 0 + \operatorname{arctg} 0\big) + \sqrt{1-0^2} - \dfrac{\ln(1+0^2)}{2} + C$ получим $C = -1$.

5. С помощью формулы интегрирования по частям найдите интеграл $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$. В ответе укажите ту первообразную, которая обращается в 0 в точке 0.

Ответ: $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1)$

Решение.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x^3 (\operatorname{arctg} x)'\, dx = \\
&= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx \overset{\substack{\text{замена} \\ y=x^2+1}}{=} \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{y-1}{2y}\, dy = \\
&= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2} - \frac{\ln y}{2}\right) + C = \\
&= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2+1}{6} + \frac{\ln(x^2+1)}{6} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Из условия $0 = \dfrac{0^3}{3}\operatorname{arctg} 0 - \dfrac{0^2+1}{6} + \dfrac{\ln(0^2+1)}{6} + C$ получим $C = 1/6$.

Площади и определенный интеграл

1. С помощью определения вычислите интеграл $\int\limits_1^6 |x-3|\,dx$. Как обычно, ответ укажите в виде десятичной дроби.

Ответ: $6,5$

Решение. Построим график функции $y=|x-3|$ и заметим, что искомая величина равна сумме площадей двух прямоугольных треугольников (с вершинами в точках $(1,2),(1,0),(3,0)$ и $(3,0),(6,0),(6,3)$, соответственно). Значит,

$$\int\limits_1^6 |x-3|\,dx = 2+4,5 = 6,5.$$

2. Вычислите интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{1-x^2}\,dx$ при $0\leqslant a\leqslant 1$ с помощью определения и сведений из элементарной геометрии.

Ответ: $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{2}\arcsin a$

Решение.

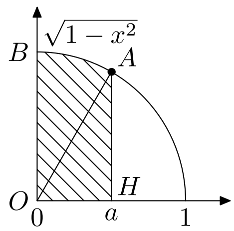

График подынтегральной функции является четвертью окружности с центром в точке $(0,0)$ и радиусом 1. Искомая величина равна площади заштрихованной области, т. е. суммы площади сектора AOB и прямоугольного треугольника AOH с гипотенузой 1 и катетом a. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$, поскольку его второй катет равен $\sqrt{1-a^2}$. Площадь сектора равна половине его угла, т. е. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos a\right)$, поскольку $\cos\angle AOH = a$. Таким образом,

$$\int\limits_0^a \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos a\right)+\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}.$$

3. При каком $c\in(a,b)$ выполняется равенство $\int\limits_a^b e^{3x}\,dx = e^{3c}(b-a)$?

Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\exp(3b)-\exp(3a)}{3(b-a)}\right)$

Решение. Вычислим интеграл

$$\int\limits_a^b e^{3x}\,dx = \frac{e^{3b}-e^{3a}}{3}.$$

Тогда

$$\frac{e^{3b}-e^{3a}}{3} = e^{3c}(b-a) \;\Rightarrow\; e^{3c} = \frac{e^{3b}-e^{3a}}{3(b-a)} \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{3}\ln\frac{e^{3b}-e^{3a}}{3(b-a)}.$$

4. Расставьте приведенные числа в порядке возрастания.

$$\int\limits_0^1 \frac{x\sin x}{2+x}\,dx < \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+2x}\,dx < \int\limits_0^1 \frac{x}{1+2x}\,dx < \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx < \frac{1}{2} < \int\limits_0^1 \frac{e^{x^{100}}}{2}\,dx$$

Решение. Представим число $1/2$ в виде интеграла:

$$\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 x\,dx.$$

По свойству монотонности интеграла нам достаточно сравнить сами подынтегральные функции на $[0,1]$:

$$\frac{x\sin x}{2+x} \leqslant \frac{x^2}{1+2x} \leqslant \frac{x}{1+2x} \leqslant \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant x.$$

Первое неравенство верно, так как на указанном промежутке $\sin x \leqslant x$ и $1+x \geqslant 2x$. Второе неравенство верно, так как на указанном промежутке $x^2 \leqslant x$. Третье неравенство верно, поскольку по неравенству Бернулли (ну или в данном случае можно обойтись простым раскрытием скобок) $(1+2x)^3 \geqslant 1+3\cdot 2x \geqslant 1+x$. Четвертое же неравенство очевидно. Причем все функции различны, поэтому при интегрировании неравенства превратятся в строгие.

Для сравнения с $1/2$ оставшегося интегрла воспользуемся другим представлением:

$$\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\,dx.$$

Но $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{e^{x^{100}}}{2}$, поэтому по свойству монотонности интеграла

$$\frac{1}{2} < \int\limits_0^1 \frac{e^{x^{100}}}{2}\,dx.$$

Теорема Барроу и формула Ньютона–Лейбница

1. Найдите производную функции $f(x) = \int\limits_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$ при $x > 1$.

Ответ: $2\sin(x^2)/x$

Решение. Функция f является композицией двух функций. Внешняя функция это интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int\limits_1^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

а внутренняя — x^2. Следовательно, по теореме Барроу

$$\left(\int\limits_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right)' = \big(F(x^2)\big)' = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x = \frac{2\sin x^2}{x}.$$

2. Найдите точки экстремума функции $F(x) = \int\limits_0^{x} \frac{\cos(\pi t)}{t^2}\,dt$ при $x \in (0,5)$ (и определите, какие из них максимумы, а какие — минимумы).

Ответ: Точки минимума $1,5$ и $3,5$; точки максимума $0,5$, $2,5$ и $4,5$.

Решение. Найдем нули производной функции F и исследуем ее знаки на интервале $(0,5)$:

$$F'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Производная неотрицательна на $(0;0,5]$, $[1,5;2,5]$, $[3,5;4,5]$, следовательно, функция возрастает на каждом из этих промежутков. Производная неположительна на $[0,5;1,5]$, $[2,5;3,5]$, $[4,5;5)$, следовательно, функция убывает на каждом из этих промежутков. Таким образом, минимумы функции в точках $1,5$ и $3,5$, а максимумы в точках $0,5$; $2,5$ и $4,5$.

3. Найдите предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x (t^5+1)^{3/5}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x (t^5+1)^{7/5}\,dt}.$$

Ответ: $0,5$

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя дважды, чтобы избавиться от неопределенности вида ∞/∞.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x (t^5+1)^{3/5}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x (t^5+1)^{7/5}\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\left(\int\limits_0^x (t^5+1)^{3/5}\,dt\right)^2\right)'}{\left(\int\limits_0^x (t^5+1)^{7/5}\,dt\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x (t^5+1)^{3/5}\,dt\cdot(x^5+1)^{3/5}}{(x^5+1)^{7/5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\int\limits_0^x (t^5+1)^{3/5}\,dt\right)'}{\left((x^5+1)^{4/5}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x^5+1)^{3/5}}{4x^4(x^5+1)^{-1/5}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5+1)^{4/5}}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^5}\right)^{4/5} = \frac{1}{2}.$$

4. С помощью формулы Ньютона–Лейбница вычислите интеграл $\int\limits_2^4 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$.

Решение. Сначала посчитаем неопределенный интеграл $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$. Для этого сделаем замену переменных $y = e^x$, тогда $dy = e^x\,dx$ и

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \int \frac{1}{y-1}\,dy = \ln|y-1| = \ln(e^x-1).$$

Следоватлеьно,

$$\int\limits_2^4 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \ln(e^x-1)\Big|_2^4 = \ln(e^4-1) - \ln(e^2-1) = \ln\left(\frac{e^4-1}{e^2-1}\right) = \ln(e^2+1).$$

Пользуясь формулой замены переменной в определенном интеграле можно было проделать те же действия еще быстрее: если сделать замену переменных $y = e^x$, то $dy = e^x\,dx$, а границы интегрирования $y \in [e^2, e^4]$. Тогда

$$\int\limits_2^4 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \int\limits_{e^2}^{e^4} \frac{1}{y-1}\,dy = \ln(y-1)\Big|_{e^2}^{e^4} = \ln\left(\frac{e^4-1}{e^2-1}\right) = \ln(e^2+1).$$

5. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{20\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Решение. Заметим, что функция $\sqrt{1-\cos 2x} = |\sin x|$ периодическая с периодом π. Тогда

$$\int\limits_0^{20\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int\limits_0^{20\pi} |\sin x|\,dx = 20\cdot\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = 20\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 40.$$

6. Касательная к графику дважды дифференцируемой функции $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ в точке с абсциссой 0 составляет с осью абсцисс (с положительным направлением) угол $\pi/6$, а в точке с абсциссой 3 — угол $\pi/4$. Вычислите $\int\limits_0^3 f''(x)\,dx$.

Решение. Поскольку угловой коэффициент касательной в точке a равен $f'(a)$, из имеем $f'(0) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1/\sqrt{3}$ и $f'(3) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Тогда

$$\int\limits_0^3 f''(x)\,dx = (f')\Big|_0^3 = f'(3) - f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. Докажите равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\,dx.$$

Указание. Сделайте подходящую замену переменной.

Решение. Сделаем в левом интеграле замену $y = 2\operatorname{arctg} x$. Тогда $x = \operatorname{tg}(y/2)$ и $dx = (\operatorname{tg}(y/2))'\,dy = \frac{1}{2\cos^2(y/2)}\,dy$. А кроме того y меняется от $2\operatorname{arctg} 0 = 0$ до $2\operatorname{arctg} 1 = \pi/2$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{y}{4\cos^2(y/2)\cdot\operatorname{tg}(y/2)}\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{y}{4\cos(y/2)\sin(y/2)}\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{y}{2\sin y}\,dy.$$

8. Функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ дифференцируема, а ее производная непрерывна. Докажите, что существует такое $\theta \in (0,1)$, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = f(0) + \frac{f'(\theta)}{2}.$$

Указание. Какое утверждение из прошлого модуля напоминает нужное равенство? А если еще и воспользоваться теоремой Барроу?

Решение. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом $F(y) = \int\limits_0^y f(x)\,dx$. Тогда $F'(y) = f(y)$ и, значит, функция $F(y)$ будет дважды дифференцируемой. Напишем для нее формулу Тейлора при $y = 0$ с остатком в форме Лагранжа: существует такое $\theta_y \in (0,1)$, что

$$F(y) = F(0) + F'(0)y + F''(\theta_y) \cdot \frac{y^2}{2} = 0 + f(0) + f(\theta_y) \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Осталось лишь подставить в получившуюся формулу $y = 1$.

Интегральные суммы

1. Отметьте функции, являющиеся равномерно непрерывными.

Решение.

☐ $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$

Возьмем, например, $x = \frac{1}{n}$ и $y = \frac{1}{n+1}$. Тогда $|x - y| = \frac{1}{n(n+1)}$, но $|f(x) - f(y)| = 1$, что противоречит условию равномерной непрерывности для $\varepsilon = 1$.

☐ $f(x) = \ln x$ на интервале $(0, 1)$

Возьмем, например, $x = \frac{1}{n}$ и $y = \frac{1}{2n}$. Тогда $|x - y| = \frac{1}{2n}$, но $|f(x) - f(y)| = \ln 2$, что противоречит условию равномерной непрерывности для $\varepsilon = \ln 2$.

☑ $f(x) = \sin^2 x$ на вещественной прямой

Поскольку $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|\cos 2y - \cos 2x|}{2} \leqslant \frac{|2y - 2y|}{2} = |x - y|,$$

поэтому в определении равномерной непрерывности можно взять $\delta = \varepsilon$.

☑ $f(x) = 1/\sqrt{x}$ на луче $(1, +\infty)$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \frac{|\sqrt{y} - \sqrt{x}|}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leqslant \frac{|x - y|}{2}.$$

Поэтому в определении равномерной непрерывности можно взять $\delta = 2\varepsilon$.

☐ $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi/2)$

Заметим, что $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$, поэтому, если $x = \frac{1}{n}$ и $y = \frac{1}{2n}$, то $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{1}{\sin(1/n)} \sim n$. С другой стороны $x - y = \frac{1}{2n}$, что противоречит условию равномерной непрерывности для $\varepsilon = 1$.

☑ $f(x) = x + \sin x$ на вещественной прямой

Ясно, что $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| + |\sin x - \sin y| \leqslant 2|x - y|$, поэтому в определении равномерной непрерывности можно взять $\delta = \varepsilon/2$.

☐ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$

Возьмем, например, $x = \frac{1}{2\pi n}$ и $y = \frac{1}{\pi(2n+1/2)}$. Тогда $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$, а значит, $f(y) - f(x) = 1$. С другой стороны $x - y = \frac{1}{\pi(8n+2)}$, что противоречит условию равномерной непрерывности для $\varepsilon = 1$.

☐ $f(x) = 2^x$ на вещественной прямой

Возьмем, например, $x = n + 1/n$ и $y = n$. Тогда $f(x) - f(y) = 2^n(2^{1/n} - 1) \sim 2^n/n \to +\infty$. С другой стороны $x - y = \frac{1}{n}$, что противоречит условию равномерной непрерывности для $\varepsilon = 1$.

2. Отметьте разбиения отрезка $[0, 1]$, ранг которых стремится к нулю при $n \to \infty$.

☑ $x_k = k/n$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Верно, так как $|x_{k+1} - x_k| = 1/n$ при всех k.

☑ $x_k = 2^{k/n} - 1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Верно, так как $x_{k+1} - x_k = 2^{(k+1)/n} - 2^{k/n} = 2^{k/n}(2^{1/n} - 1) \leqslant 2 \cdot (2^{1/n} - 1) \to 0$.

☐ $x_0 = 0$, $x_k = \dfrac{1}{n + 1 - k}$, где $k = 1, 2, \ldots, n$

Неверно, так как $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|\dfrac{1}{n + 1 - k} - \dfrac{1}{n + 1 - (k - 1)}\right| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|\dfrac{1}{(n + 1 - k)(n - k + 2)}\right| = \dfrac{1}{2}$ при $k = n$.

☑ $x_k = k/2^n$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$

Верно, так как $|x_{k+1} - x_k| = 1/2^n$ при всех k.

☐ $x_0 = 0$, $x_k = 2^{k-n}$, где $k = 1, 2, \ldots, n$

Неверно, так как $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|2^{k-n} - 2^{k-1-n}\right| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|2^{k-n}(1 - \frac{1}{2})\right| = \frac{1}{2}$ при $k = n$.

3. Для функции $f(x) = x$ напишите интегральные суммы, соответствующие разбиениям

- $x_0 = 0$ и $\xi_k = x_k = \dfrac{k}{n}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$
- $x_0 = 0$ и $\xi_k = x_k = 2^{k-n}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$

Найдите пределы получившихся интегральных сумм при $n \to \infty$. Чем объясняется получившийся результат?

Ответ: 1/2 и 2/3.

Решение. Рассмотрим первое разбиение.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} = \frac{\frac{1+n}{2} \cdot n}{n^2} = \frac{n^2 + n}{2n^2}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим второе разбиение.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(2^{k-n} - 2^{k-1-n}\right) 2^{k-n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (2-1)\, 2^{2(k-n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 4^{k-n} = \frac{1}{2 \cdot 4^n} \sum_{k=1}^{n} 4^k =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 4^n} \cdot \frac{4 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$.

Пределы получаются разными, поскольку ранг второго разбиения не стремится к нулю.

4. Запишите выражение $S_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+3k)^2}$ в виде интегральной суммы и найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ответ: 1/4

Решение. Заметим, что

$$S_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+3k)^2} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2(1 + 3 \cdot \frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 + 3 \cdot \frac{k}{n})^2}.$$

Но это интегральная сумма для функции $\frac{1}{(1+3x)^2}$ с $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$. Кроме того, $0 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+3x)^2}\, dx = -\frac{1}{3(1+3x)}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Связь между суммами и интегралами

1. С помощью интегрального признака сходимости установите сходимость или расходимость указанных рядов. Отметьте сходящиеся ряды.

☑ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

Монотонное убывание очевидно, $\Phi(x) = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \to \frac{1}{\ln 2}$.

☐ $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

Монотонное убывание очевидно, $\Phi(x) = \frac{1}{\ln\ln 5} - \frac{1}{\ln\ln x} \to \frac{1}{\ln\ln 5}$.

☐ $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$

Функция монотонно убывает, поскольку $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$, но $\Phi(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x \to +\infty$.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

Функция монотонно убывает, поскольку $\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{2-3\ln x}{2x^2\sqrt{x}} < 0$ при $x \geqslant 3$. Кроме того $\Phi(x) = 4 - \frac{2\ln x + 4}{\sqrt{x}} \to 4$.

☑ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^3 e^{-n}$

Функция монотонно убывает, поскольку $\left(x^3 e^{-x}\right)' = (3-x)x^2e^{-x} < 0$ при $x \geqslant 3$. Кроме того $\Phi(x) = 38e^{-2} - e^{-x}(6 - 6x - 3x^2 - x^3) \to 38e^{-2}$.

2. Сравнив приведенные ряды с рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c}{n^p}$ при подходящем p, установите какие из рядов сходятся, а какие расходятся. Отметьте сходящиеся ряды.

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} \geqslant \frac{1/\sqrt{2}}{n+1}.$$

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}.$$

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{(2n+1)^2}$

$$\frac{3n-1}{(2n+1)^2} \geqslant \frac{1/2}{n+1}$$

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\sin^2\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$

$$\sqrt[3]{n}\sin^2\left(\frac{1}{2n-1}\right) \leqslant \sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 \leqslant \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{5/3}}.$$

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\pi^2/2}{n^2}.$$

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2n^2-1}$

$$\frac{\operatorname{arctg} n}{2n^2-1} \leqslant \frac{\pi/2}{n^2}.$$

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{3n-1}$

$\dfrac{\ln n}{3n-1} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ при $n \geqslant 3$.

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n}-1\right)$

$e^{1/n}-1 \geqslant \frac{1}{n}$.

3. Докажите, что при $n \to \infty$

$$1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 3 + \ldots + n \cdot \ln n \sim \frac{n^2 \ln n}{2}.$$

Указание. Замените сумму на интеграл, оцените разность между суммой и интегралом, вычислите получившийся интеграл.

Решение. Пусть $f(x) = x \ln x$. Тогда по доказанному в лекциях утверждению

$$\left| \int\limits_1^n x \ln x \, dx - \sum_{k=1}^{n} k \ln k \right| = \left| \int\limits_1^n f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right| \leqslant \max\{f(1), f(n)\} = n \ln n.$$

Посчитаем интеграл

$$\int\limits_1^n x \ln x \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^n (x^2)' \ln x \, dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x \Big|_1^n - \int\limits_1^n x^2 (\ln x)' \, dx \right) = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_1^n x \, dx =$$
$$= \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^n = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2-1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2-1}{4} - n \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \ln k \leqslant \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2-1}{4} + n \ln n.$$

Поделим неравенство на $n^2 \ln n$ и получим

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{4n^2 \ln n} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2 \ln n} \sum_{k=1}^{n} k \ln k \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{4n^2 \ln n} + \frac{1}{n}.$$

Но по теореме о двух милиционерах нижняя и верхняя оценки стремятся к $\frac{1}{2}$, поэтому к $\frac{1}{2}$ стремится и $\frac{1}{n^2 \ln n} \sum_{k=1}^{n} k \ln k$.

3. Отметьте верные утверждения.

☑ Для непрерывных функций $f, g : [1,3] \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $\int\limits_1^3 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int\limits_1^3 f(x)\, dx - \int\limits_1^3 g(x)\, dx$.

Верно, поскольку интеграл линеен.

☐ Для непрерывных функций $f, g : [2,4] \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $\int\limits_2^4 f(x) g(x)\, dx = \int\limits_2^4 f(x)\, dx \int\limits_2^4 g(x)\, dx$.

Неверно. Например, при $f(x) = g(x) = x$ левая часть равна $x^3/3\big|_2^4 = 18\frac{2}{3}$, а правая часть равна $\left(x^2/2\big|_2^4\right)^2 = 36$.

☐ Для непрерывной функций $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $\int\limits_{-1}^{1} xf(x)\,dx = x\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Неверно. Слева написано число, справа функция.

☑ Для непрерывной функций $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $\int\limits_{0}^{3} 4f(x)\,dx = 4\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx$.

Верно, поскольку интеграл линеен.

☑ Если функция $f : [2,5] \to \mathbb{R}$ дифференцируема и ее производная непрерывна, то $\int\limits_{2}^{5} f'(x)\,dx = f(5) - f(2)$.

Верно по формуле Ньютона–Лейбница.

☑ Любая непрерывная функция имеют первообразную.

Верно.

☐ $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{x^3} = \frac{5}{72}$.

Неверно. Формула Ньютона–Лейбница неприменима, поскольку функция не является непрерывной. Ну и вообще интеграл в левой части неопределен.

☐ Если функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$.

Неверно. Например, для $f(x) = x - \frac{1}{2}$.

☑ Если функция $f : [3,4] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $\int\limits_{3}^{4} f(x)\,dx = f(c)$ для некоторой точки $c \in [3,4]$.

Верно по интегральной теореме о среднем.

☐ Если функция $f : [2,5] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $\left(\int\limits_{2}^{5} f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

Неверно. Слева написана производная от константы, т. е. ноль, а справа произвольная функция.