

Основы теории графов - I

1 Основные понятия теории графов

1.1. Какие из представленных ниже числовых последовательностей могут быть последовательностью степеней вершин какого-нибудь графа?

- (1) 5 2 2 1
- (2) 2 2 1 1
- (3) 2 2 2 1
- (4) 8 6 5 4 4 4 4 4 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1
- (5) 8 6 5 4 4 4 4 4 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1
- (6) 5 4 3 3
- (7) 3
- (8) 2

Решение. Для каждой из этих последовательностей нужно проверить, является ли сумма членов этой последовательности четным числом. Если является, то соответствующая последовательность обязательно будет последовательностью степеней вершин некоторого графа. Действительно, то, что сумма членов последовательности степеней вершин является четным числом, следует из основной теоремы теории графов. Доказательство в обратную сторону тоже довольно простое. Соединим попарно все вершины нечетной степени. Так как их четное число, то мы всегда сможем это сделать. Затем добавим к каждой вершине петли в количестве, равном $\deg(x)/2$ для четных вершин и $(\deg(x) - 1)/2$ для нечетных. В результате получим некоторый мультиграф с заданной последовательностью степеней вершин.

Как следствие, нам годятся последовательности (1), (2), (5), (8) — сумма членов последовательностей этих вершин четна. Остальные последовательности никаким графам не соответствуют.

1.2. Какие из представленных ниже числовых последовательностей могут быть последовательностями степеней вершин простого графа?

- (1) 5 2 2 1
- (2) 2 2 1 1
- (3) 1
- (4) 2
- (5) 1 1
- (6) 6 5 4 3

Решение. Как и в случае мультиграфа, сумма чисел в любой такой последовательности должна быть четным числом. Это условие исключает последовательность (3). Кроме того, в простом графе любая вершина может быть как максимум по одному разу соединена с каждой из оставшихся вершин в графе. Как следствие, степень любой вершины не может превосходить $n - 1$, где n — общее количество вершин в графе. Это условие исключает из рассмотрения последовательности (1), (4) и (6). Оставшиеся последовательности могут быть степенями вершин простого графа — последовательность (2) отвечает простому пути на четырех вершинах, а последовательность (5) соответствует двум изолированным вершинам.

1.3. Найдите матрицу смежности следующего ориентированного графа рис. 1

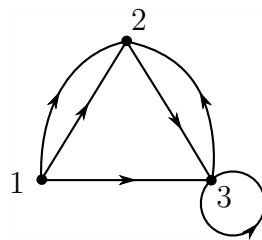


Рис. 1

Решение. Матрица смежности данного графа равна

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4. Турниром называется орграф, полученный из неориентированного полного графа K_n путем назначения направления каждому ребру. Найдите список смежности турнира, изображенного на рис. 2

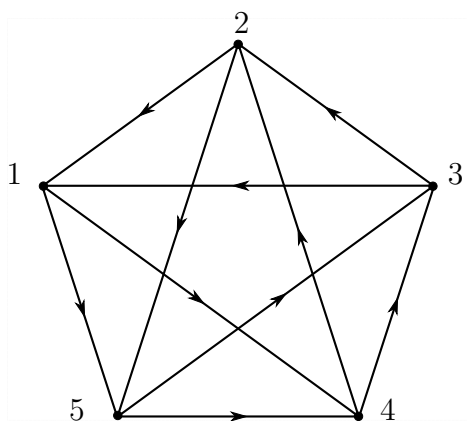


Рис. 2

Решение. Соответствующий этому турниру список смежности записывается в виде

- 1 : смежными с вершиной 1 являются вершины 4, 5;
- 2 : смежными с вершиной 2 являются вершины 1, 5;
- 3 : смежными с вершиной 3 являются вершины 1, 2;
- 4 : смежными с вершиной 4 являются вершины 2, 3;
- 5 : смежными с вершиной 5 являются вершины 3, 4.

1.5. Получите формулу для подсчета количества турниров на n вершинах.

Решение. Каждое из $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер полного графа K_n , из которого мы делаем турнир, может быть направлено в любую из двух сторон вне зависимости от того, как будут ориентированы другие ребра полного графа K_n . Следовательно, по правилу произведения, количество всевозможных турниров равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1.6. Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 3. Какие из представленных ниже графов являются остовными подграфами графа G ?

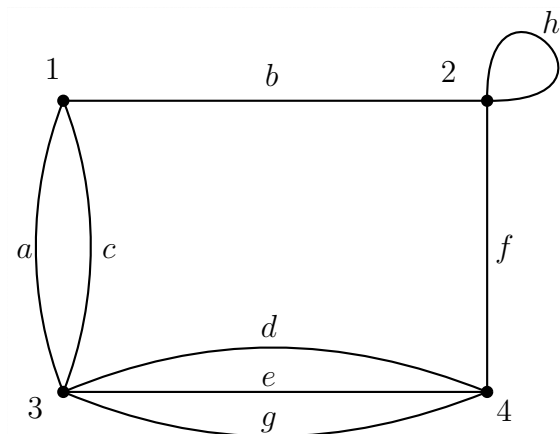


Рис. 3

Решение. Графы, изображенные на рис. 4,а и рис. 4,д, являются остовными подграфами, а графы, изображенные на рис. 4,б и рис. 4,с, таковыми не являются. Действительно, граф, показанный на рис. 4,а, получен из графа G удалением всех его ребер. Так как множество вершин этого графа совпадает с множеством V вершин графа G , то это есть остовный подграф графа G . Граф, показанный на рис. 4,д, полностью совпадает с графом G . Такой граф мы можем рассматривать как остовный подграф графа G , полученный из G удалением пустого подмножества множества E ребер исходного графа G .

Граф, изображенный на рис. 4,б, имеет меньшее количество вершин по сравнению с исходным графом G , и потому остовным подграфом графа G быть не может. Наконец, у графа, показанного на рис. 4,с, ребро d соединяет вершины 1 и 2, тогда как у графа G ребро d соединяет вершины 3 и 4. Следовательно, такой граф подграфом графа G не является.

1.7. Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 3. Какие из представленных ниже графов являются индуцированными подграфами графа G ?

Решение. Граф, показанный на рис. 5,д, полностью совпадает с графом G и может, таким образом, рассматриваться как индуцированный подграф графа G . Граф, показанный на рис. 5,б, получается из графа G удалением вершины 2, и потому также есть индуцированный подграф графа G . Граф, показанный на рис. 5,а, получается из графа G всех вершин кроме вершины 1, и также является индуцированным подграфом графа G . А граф 5,с вообще не является подграфом графа G , так как ребро d в этом графе соединяет вершины 1 и 2, а не 3 и 4, как в графе G .

2 Связность в графах

2.1. Рассмотрим простой граф G , показанный на рис. 6. Какие из нижеперечисленных последовательностей вершин задают простой путь в этом графе?

- (1) a, e, b, f, c, d
- (2) a, e, b, e, c, f, b, d
- (3) a, e, c, d, a, e, c
- (4) $a, e, c, f, b, d, a, f, c$
- (5) a, e, c, b, d

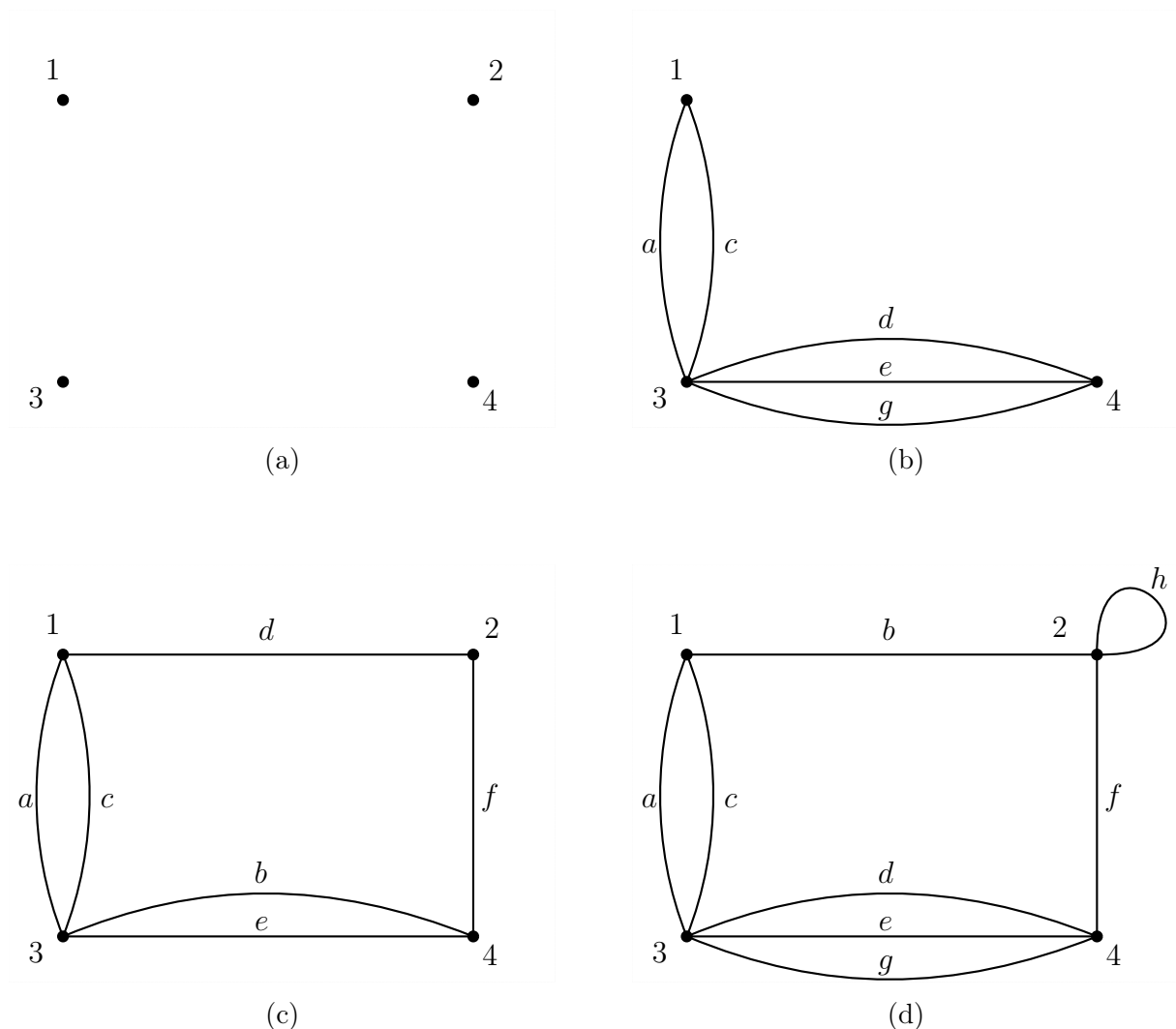


Рис. 4

Решение. Только последовательность (1) задает простой путь в графе G . Последовательности (2) и (4) содержат повторяющиеся ребра и вершины, последовательность (3) — повторяющуюся вершину, а последовательность (5) вообще маршрутом в графе G не является.

2.2. Рассмотрим простой граф G , показанный на рис. 7. Какие из нижеперечисленных последовательностей вершин задают простой цикл в этом графе?

- (1) d,a,b,e,f,b,e,d
- (2) a,b,c,f,e,b,f,c,a
- (3) b,f,c,e,d,b,f,c,b
- (4) a,e,c,f,b,d,a

Решение. Только последовательность (4) задает простой цикл в графе G . Последовательность (2) маршрутом в графе не являются, в маршрутах (1) и (3) повторяются ребра и вершины.

2.3. Для графа G , построенного на восьми вершинах, известно, что все его вершины имеют степень, меньшую или равную k . Известно также, что между любой парой вершин графа существует путь длины один или два. При каком минимальном значении k это возможно?

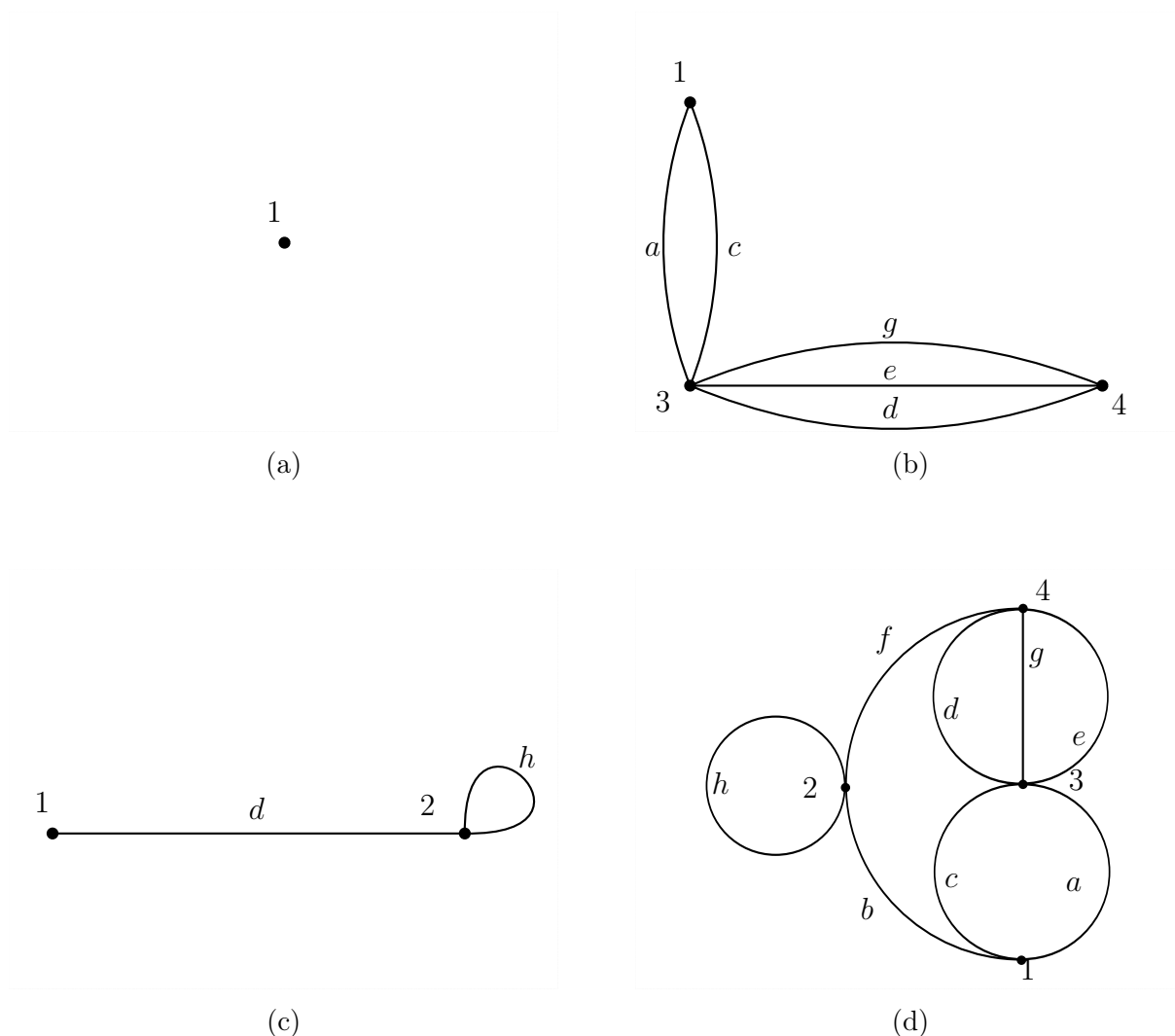


Рис. 5

Решение. В случае $k = 0$ все вершины графа будут изолированными, пути в таком графе между различными вершинами отсутствуют. Вариант $k = 1$ также невозможен — в этом случае граф будет состоять из четырех компонент связности — четырех ребер, соединяющих пары вершин. Наконец, в случае $k = 2$ мы получаем циклический граф C_8 , расстояние между диаметрально противоположными вершинами в котором равно четырем. Добавляя же к этому графу четыре ребра, соединяющие диаметрально противоположные вершины, мы получаем граф с $k = 3$, удовлетворяющий поставленным в задании условиям.

2.4. Доказать, что в связном простом неориентированном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.

Решение. Предположим обратное. Так как граф связный, то существует простой путь P , соединяющий одну из вершин x первого пути P_1 с одной из вершин y второго пути P_2 , и не имеющий с P_1 и P_2 никаких других общих вершин. Пусть теперь Q_1 есть наибольший из двух подпутей, на которые делит путь P_1 вершина x , а Q_2 — наибольший из двух подпутей, на которые вершина y делит путь P_2 . Тогда объединение $Q_1 \cup P \cup Q_2$ является простым путем, длина которого больше длины любого из двух путей P_1 и P_2 , что невозможно.

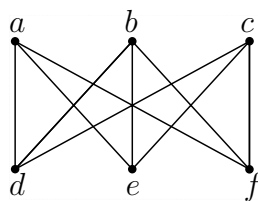


Рис. 6

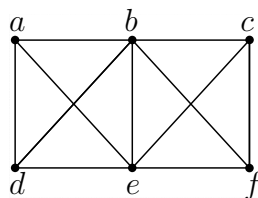


Рис. 7

2.5. Какое максимальное количество ребер может быть в простом слабо связном ориентированном графе на 10 вершинах, не являющемся сильно связным?

Решение. Максимальное количество ребер в простом орграфе равно $n(n - 1)$. В случае графа на 10 вершинах получаем, что это количество равно 90. Уберем теперь девять ребер, приходящих в какую-то вершину x этого орграфа. Полученный в результате орграф D на 81-ом ребре перестанет быть сильно связным — мы никогда не сможем в эту вершину x попасть из других вершин орграфа. Ясно, что добавление в орграф D любого ребра, приходящего в вершину x , превратит такой граф в сильно связный. Осталось доказать, что количество ребер в любом связном графе, не являющемся сильно связным, меньше или равно 81.

Предположим, что из какой-то вершины x в какую-то вершину y путь отсутствует. Рассмотрим оставшиеся восемь вершин z_i этого графа, а также ребра, идущие из вершины x в эти вершины, и ребра, исходящие из этих вершин и приходящие в вершину y . Так как путь из x в y отсутствует, то для любой из этих вершин отсутствует либо ребро из x в вершину z_i , либо ребро из z_i в y . Следовательно, как минимум восемь ребер из 90 возможных в таком графе отсутствуют. Кроме того, отсутствует и ребро, идущее из x в y . Таким образом, количество ребер в таком графе меньше или равно 81, что и требовалось доказать.

2.6. Какие из приведенных ниже утверждений являются правильными?

1. В графе компонент сильной связности столько же компонент слабой связности, сколько и в исходном графе.
2. В графе компонент сильной связности столько же компонент сильной связности, сколько и в исходном графе.
3. Граф компонент сильной связности всегда слабо связан.
4. Граф компонент сильной связности может быть сильно связным.
5. По данному графу компонент сильной связности можно определить число вершин в исходном графе.
6. По данному графу компонент сильной связности можно определить число ребер в исходном графе.

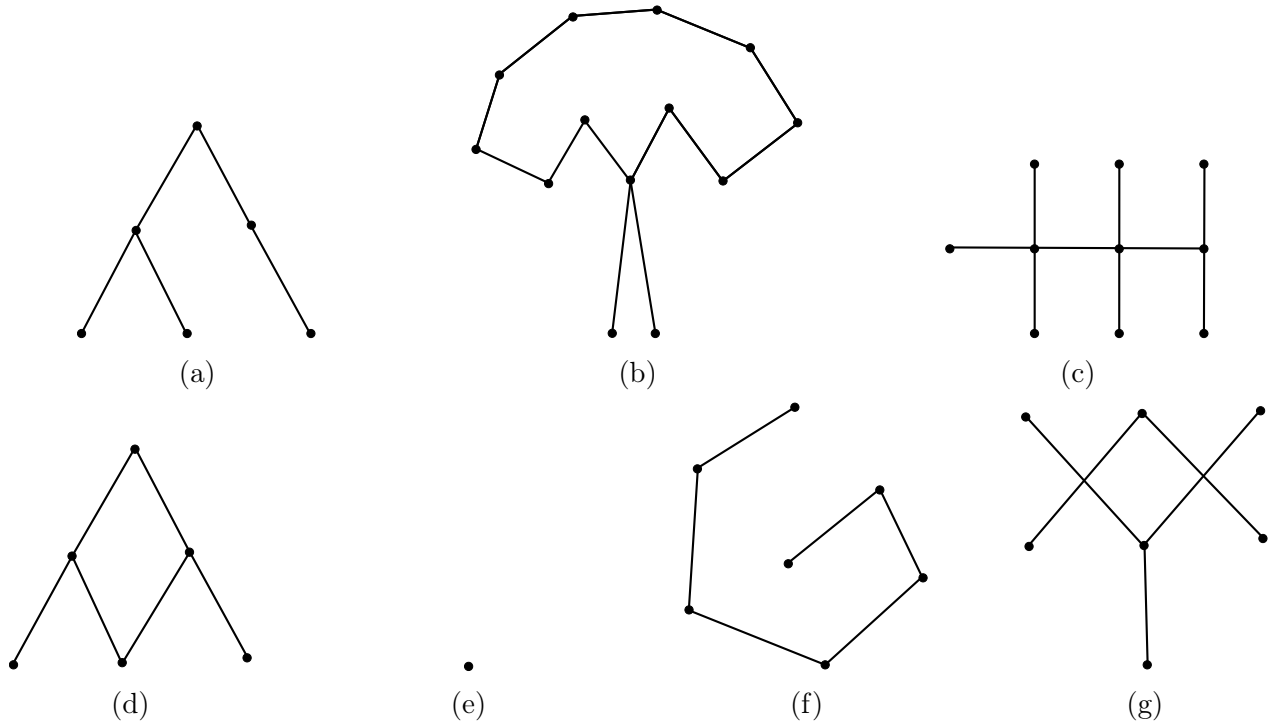
7. В графе компонент сильной связности обязательно найдется вершина с нулевой исходящей степенью и ненулевой входящей.
8. В графе компонент сильной связности обязательно найдется вершина с нулевой входящей степенью и ненулевой исходящей.
9. Если граф компонент сильной связности слабо связан, то в нем обязательно найдется вершина, в которую можно попасть из любой другой вершины.
10. Если граф компонент сильной связности слабо связан, то в нем обязательно найдется вершина, из которой можно попасть в любую другую вершину.

Решение. Разберем каждое из этих утверждений.

1. Это утверждение верное: граф компонент сильной связности любого слабо связанного графа остается слабо связным графом.
2. Это утверждение верное: в графе компонент сильной связности любая вершина, с одной стороны, является компонентой сильной связности, а с другой стороны, отвечает некоторой компоненте сильной связности исходного графа.
3. Это утверждение неверное: граф компонент сильной связности у любого графа, не являющегося изначально слабо связным, слабо связным являться не будет, он будет содержать ровно столько компонент слабой связности, сколько и исходный граф.
4. Это утверждение верное: в качестве примера можно взять граф компонент сильной связности, состоящий из единственной вершины.
5. Это утверждение, очевидно, неверное: одной и той же вершине графа компонент сильной связности может соответствовать любое, сколь угодно большое количество вершин исходного графа.
6. Это утверждение также неверное — при построении графа компонент сильной связности у нас может исчезнуть совершенно произвольное количество ребер исходного графа.
7. Это утверждение неверное: в качестве примера можно взять граф компонент сильной связности, состоящий из единственной вершины.
8. Это утверждение неверное: в качестве примера можно взять граф компонент сильной связности, состоящий из единственной вершины.
9. Это утверждение неверное: как правило, в любом графе компонент сильной связности имеется хотя бы один так называемый сток, то есть вершина, из которой выйти уже никуда невозможно; если он один, то в него можно попасть из любой другой вершины этого графа; однако в общем случае стоков может быть несколько, и из одного стока в другой попасть уже будет невозможно.
10. Это утверждение неверное: как правило, в любом графе компонент сильной связности имеется хотя бы один так называемый источник, то есть вершина, в которую не входит ни одно ребро; если он единственен, то из него можно попасть в любую другую вершину графа; однако в общем случае источников может быть несколько, и поэтому, например, из одного источника в другой попасть будет нельзя.

3 Деревья и их основные свойства

3.1. Какие из представленных на приведенном ниже рисунке графов являются деревьями?



Решение. Деревьями являются графы, приведенные на рисунках (a), (c), (e), (f). Графы, показанные на рисунках (b) и (d), деревьями не являются, так как содержат циклы. Граф на рисунке (g) не является связным.

3.2. Пусть F есть лес, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Подсчитать количество ребер в графе F .

Решение. Любая компонента связности графа F представляет собой дерево. Количество ребер в этой компоненте на единицу меньше количества вершин. Следовательно, в графе F количество ребер на k единиц меньше количества вершин:

$$|E(F)| = |V(F)| - k = n - k.$$

3.3. Дано дерево на семи вершинах. Известно, что в этом дереве по меньшей мере три вершины имеют степень 1, и как минимум две вершины имеют степень 3. Найдите последовательность степеней вершин этого графа.

Решение. Искомая последовательность степеней вершин имеет вид

$$3, 3, 2, 1, 1, 1, 1.$$

Действительно, в дереве количество ребер на единицу меньше количества вершин, то есть равно шести. По первой теореме теории графов, сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер. У нас остаются неизвестными степени двух вершин. Обозначим эти степени через x и y . Тогда, согласно первой теореме теории графов,

$$3 + 3 + 1 + 1 + 1 + x + y = 2 \cdot 6 = 12 \quad \implies \quad x + y = 3.$$

Последнее уравнение имеет в положительных целых числах единственное с точностью до переобозначений решение $x = 1, y = 2$.

3.4. Пусть у нас имеется некоторая невозрастающая последовательность

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 1, \quad n \geq 2,$$

натуральных чисел a_i . Каким условиям должны удовлетворять члены этой последовательности для того, чтобы существовало дерево T , степени вершин которого совпадали бы с числами a_i ?

Решение. Согласно первой теореме теории графов, сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребер. В дереве это количество равно $(n - 1)$. Следовательно, равенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n - 2$$

является необходимым условием существования дерева, степень любой вершины x_i которого равна a_i , $i = 1, \dots, n$.

Далее, в дереве имеются по крайней мере два листа. Это означает, что как минимум два последних члена этой последовательности должны быть равны единице:

$$a_{n-1} = a_n = 1.$$

Покажем теперь, что эти условия являются и достаточными условиями существования дерева, степени вершин которых совпадают с числами a_i . Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в дереве. Случай $n = 2$ тривиален: дереву T_2 , построенному на двух вершинах, отвечает единственная удовлетворяющая сформулированным нами условиям последовательность чисел $(1, 1)$. Предположим теперь, что утверждение доказано для значения $n \geq 2$ и покажем, что оно остается верным и для случая $n + 1$.

Для этого рассмотрим произвольную невозрастающую последовательность вида

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq 1 : \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 2n, \quad a_n = a_{n+1} = 1. \quad (1)$$

Пусть теперь $i < n$ есть наибольший индекс, такой, что $a_i > 1$. Очевидно, что такое i существует: в противном случае получили бы последовательность, состоящую из одних единиц, сумма которых равна $n + 1 < 2n$ для любого $n \geq 2$. По индукционному предположению, для последовательности чисел

$$a_1 \geq a_2 \geq a_{i-1} \geq (a_i - 1) \geq a_{i+1} \geq \dots \geq a_n,$$

таких, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + (a_i - 1) + a_{i+1} + \dots + a_n = 2n, \quad a_{i+1} = \dots = a_n = 1,$$

существует дерево T_n , степени вершин которого равны членам данной последовательности. Добавим теперь к графу T_n вершину x_{n+1} , и соединим ее ребром с вершиной x_i . В результате получим дерево T_{n+1} , степени вершин которого совпадают с членами числовой последовательности (1).

3.5. Задача на программирование: найти количество компонент связности неориентированного графа при помощи поиска в глубину.

Решение. Пометим вначале все вершины каким-нибудь флагом (например, false), говорящим нам о том, что мы эти вершины еще не обходили. Выбираем любую вершину x графа, переводим флаг для нее в true и запускаем из нее алгоритм поиска в глубину. Для всех вершин, до которых

мы дойдем в процессе поиска в глубину из вершины x , меняем флаг на true. В результате мы обойдем всю компоненту связности, которой принадлежит выбранная в начале алгоритма вершина x . Если у нас остались еще не обойденные вершины (то есть вершины с флагом false), то выбираем любую из них и вновь запускаем из нее поиск в глубину. Будем действовать так до тех пор, пока не обойдем все вершины. Если мы теперь подсчитаем, сколько раз мы запускали поиск в глубину, то мы и получим количество компонент связности в нашем графе.

3.6. Любой граф на n вершинах, имеющий меньше $(n - 1)$ -го ребра, обязательно является несвязным. В случае, когда $|E(G)| \geq (n - 1)$, граф G может быть как связным, так и несвязным. Сколько ребер должен иметь простой граф на n вершинах, чтобы он гарантированно был связным?

Решение. Заметим, прежде всего, что если хотя бы одна вершина графа G является изолированной, то граф G является несвязным даже в том случае, если на оставшейся $(n - 1)$ -й вершине построен полный подграф K_{n-1} . Следовательно, граф G может иметь $\binom{n-1}{2}$ ребер и оставаться при этом несвязным. Оказывается, что это и есть максимальное количество ребер, при котором G все еще остается несвязным. Иными словами, любой простой граф на n вершинах, имеющий как минимум $\binom{n-1}{2} + 1$ ребро, уже является связным. Докажем это утверждение.

Для этого рассмотрим произвольный простой несвязный граф G . В таком графе обязательно существуют две несвязанные между собой вершины x и y . Возьмем тогда все смежные с x вершины, удалим соединяющие их с вершиной x ребра, и соединим эти вершины ребрами с вершиной y . В результате получим граф G' с изолированной вершиной x , количество ребер в котором совпадает с количеством ребер в исходном графе G . Это количество, очевидно, не превосходит количества $\binom{n-1}{2}$ ребер в графе, состоящем из изолированной вершины x и полного подграфа K_{n-1} , построенного на оставшихся вершинах. Следовательно, и количество ребер в исходном связном графе не может превосходить эту величину.