

1-Я НЕДЕЛЯ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Найдите число членов последовательности $x_n = \frac{2n-1}{4n+5}$, лежащих вне интервала $(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1000})$.

Ответ: 873

Решение. Найдем наибольшее натуральное n , не попадающее в заданную окрестность точки $\frac{1}{2}$, то есть удовлетворяющие неравенству

$$\left| \frac{2n-1}{4n+5} - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{1000}.$$

Заметим, что

$$\frac{2n-1}{4n+5} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{7}{2}}{4n+5}.$$

Тогда

$$\left| \frac{2n-1}{4n+5} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{\frac{7}{2}}{4n+5} \right| = \frac{\frac{7}{2}}{4n+5}.$$

Последнее равенство верно, так как нас интересуют только натуральные n . Подставив получившееся выражение в неравенство, получим $n \leq 873,5$.

2. Для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,001$ найдите соответствующие номера n , начиная с которых будет выполняться неравенство $\frac{5}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Ответ: 26 2501 25 000 001

Решение. Преобразуем неравенство с учетом положительности чисел n и ε :

$$\frac{5}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{25}{\varepsilon^2} < n.$$

Подставляя значения $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,001$, получим $n > 25$, $n > 2500$ и $n > 25000000$ соответственно. В каждом случае выберем наименьшее натуральное n , удовлетворяющее неравенству.

3. Для каждого данного ε найдите соответствующие номера N , что при всех $n \geq N$ верно неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon$. В ответе приведите числа, разделенные пробелами, $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ответ: 49 4999 4 999 999

Решение. Преобразуем неравенство аналогично тому, как было сделано в первом задании:

$$\left| \frac{2n-1}{n+2} - 2 \right| = \left| 2 - \frac{5}{n+2} \right| = \frac{5}{n+2} < \varepsilon.$$

Подставив заданные значения ε , получим $n > 48$, $n > 4998$ и $n > 4999998$ соответственно. Нам подойдут любые n , удовлетворяющие неравенствам. В ответ выпишем, например, наименьшие значения n .

1.3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С ПРЕДЕЛАМИ

1. Последовательность x_n имеет предел, а последовательность y_n не имеет предела. Отметьте утверждения, которые могут оказаться верными. (Т.е. существуют такие имеющие конечный предел последовательность x_n и не имеющая предела последовательность y_n , что...)

Решение. Для утверждений, являющихся верными, приведем примеры, остальные опровергнем доказательством.

☐ Последовательность $x_n + y_n$ имеет предел

Неверно. Предположим, что последовательность $z_n = x_n + y_n$ имеет предел. Тогда $y_n = z_n - x_n$. По свойствам арифметических действий с пределами $\lim(z_n - x_n)$ существует и равен $\lim z_n - \lim x_n$. Это противоречит тому, что последовательность y_n не имеет предела.

☒ Последовательность $x_n + y_n$ не имеет предела

Верно. Например, $x_n = 1$, $y_n = (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n y_n$ имеет предел

Верно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n y_n$ не имеет предела

Верно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n n$.

☐ Последовательность y_n/x_n имеет предел

Неверно. Предположим, что последовательность $z_n = y_n/x_n$ имеет предел. Тогда $y_n = z_n x_n$. По свойствам арифметических действий с пределами $\lim z_n x_n$ существует и равен $\lim z_n \lim x_n$. Это противоречит тому, что последовательность y_n не имеет предела.

☒ Последовательность y_n/x_n не имеет предела

Верно. Например, $x_n = 1$, $y_n = (-1)^n$.

2. Последовательности x_n и y_n не имеют предела. Отметьте утверждения, которые могут оказаться верными. (Т.е. существуют такие не имеющие предела последовательности x_n и y_n , что...)

Решение. Для утверждений, являющихся верными, приведем примеры, остальные опровергнем доказательством от противного.

☒ Последовательность $x_n + y_n$ имеет предел

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☒ Последовательность $x_n + y_n$ не имеет предела

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n y_n$ имеет предел

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n y_n$ не имеет предела

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = 1 + (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n - y_n$ имеет предел

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☒ Последовательность $x_n - y_n$ не имеет предела

Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

3. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Отметьте утверждения, которые из этого следуют.

Решение. Для утверждений, не являющихся верными, приведем контрпримеры, остальные докажем.

☐ Хотя бы один из пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существует и равен нулю

Неверно. Например, $x_n = (1 - (-1)^n) + \frac{1}{n}$, $y_n = (1 + (-1)^n) + \frac{1}{n}$.

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$

Неверно. Например, $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$.

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_n, y_n\} = 0$

Неверно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -2$.

☒ $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{|x_n|, |y_n|\} = 0$

Верно. Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{|x_n|, |y_n|\} \neq 0$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N : |\min\{|x_n|, |y_n|\} - 0| > \varepsilon.$$

То есть $\min\{|x_n|, |y_n|\} > \varepsilon$. Отсюда следует, что одновременно $|x_n| > \varepsilon$ и $|y_n| > \varepsilon$, и, следовательно, $|x_n y_n| > \varepsilon^2$, что противоречит тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

4. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}}$.

Ответ: 0,75

Решение. Заметим, что числитель и знаменатель дроби являются частичными суммами геометрических прогрессий с единичным первым членом и со знаменателями $1/3$ и $1/2$ соответственно. Воспользуемся известной формулой для вычисления этих сумм:

$$x_n = \frac{\frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}}}{\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}}.$$

Перейдем к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}}}{\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}.$$

5. Являются ли приведенные ниже последовательности бесконечно большими или неограниченными? Отметьте верные утверждения.

Решение. Поясним неочевидные пункты.

☒ Последовательность $x_n = (-1)^n n^2$ неограничена

Верно. Четные члены возрастают к $+\infty$, нечетные убывают к $-\infty$. Последовательность является неограниченной и бесконечно большой.

☒ Последовательность $x_n = (-1)^n n^2$ бесконечно большая

Верно.

☒ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена

Четные члены возрастают к $+\infty$, нечетные убывают к нулю. Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой, так как существует подпоследовательность, идущая к нулю.

☐ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ бесконечно большая

Неверно.

☒ Последовательность $x_n = 2^{\sqrt[n]{n}}$ неограничена

Верно.

☒ Последовательность $x_n = 2^{\sqrt[n]{n}}$ бесконечно большая

Верно.

☐ Последовательность $x_n = \frac{100n}{n^2 + 10}$ неограничена

Неверно. Предел последовательности равен нулю, значит, она ограничена, и, следовательно, не является бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = \frac{100n}{n^2+10}$ бесконечно большая
Неверно.

☒ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n n}$ неограничена

Верно. Четная подпоследовательность возрастает к $+\infty$, нечетная убывает к нулю. Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n n}$ бесконечно большая
Неверно.

☒ Последовательность $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{((-1)^n - 1)n}$ неограничена

Верно. Четные члены равны $1/2$, нечетные возрастают к ∞ . Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{((-1)^n - 1)n}$ бесконечно большая
Неверно.

6. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{n^3}{n^2 + 5} - \frac{2n^2}{2n - 1}$.

Ответ: $-0,5$

Решение. Приведем разность к общему знаменателю:

$$x_n = \frac{n^3}{n^2 + 5} - \frac{2n^2}{2n - 1} = -\frac{n^3 + 10n^2}{(n^2 + 5)(2n - 1)} - \frac{1 + \frac{10}{n}}{(1 + \frac{5}{n^2})(2 - \frac{1}{n})} = -\frac{1}{2}.$$

7. Найдите предел последовательности $x_n = \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d}$. Параметры a , b , c и d положительны.

Ответ: $(a - c)/2$

Решение. Избавимся от неопределенности вида $+\infty - \infty$, домножив на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d} = \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d})(\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d})}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} = \\ &= \frac{n^2 + an + b - (n^2 + cn + d)}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} = \frac{an + b - cn - d}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b - cn - d}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n} - c - \frac{d}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2}}} = \frac{a - c}{2}. \end{aligned}$$

1.4. Вещественные числа. Супремум и инфимум

1. Найдите инфимум и супремум для множества $\left\{(-1)^n \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Ответ: $-0,75$ $1,75$

Решение. Заметим, что при четном n последовательность убывает, при $n \geq 4$ неотрицательна и стремится к $\frac{1}{4}$. Значит, ее инфимум равен 0 , а супремум $\frac{1}{4}$. При нечетных $n \geq 5$ последовательность отрицательна, возрастает и стремится к $-\frac{1}{4}$. Значит, ее инфимум равен $-\frac{1}{4}$, а супремум 0 . Наконец, осталось посмотреть на значения при $n = 1, 2$ и 3 : это $1,75$, $-0,75$ и $5/12$. Откуда и получаем ответ.

2. Найдите инфимум и супремум для множества $\left\{\frac{n}{m+n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Ответ: 0 1

Решение. Ясно, что $0 < \frac{n}{m+n} < 1$. Поэтому 0 является нижней границей, а 1 — верхней.

С другой стороны никакое число, большее нуля, не может быть нижней границей, поскольку $\frac{1}{1+m}$ при больших m сколь угодно близко приближается к нулю. А никакое число, меньшее единицы, не может быть верхней границей, поскольку $\frac{n}{n+1}$ при больших n сколь угодно близко приближается к единице.

3. Отметьте утверждения, справедливые для любых ограниченных последовательностей x_n и y_n .

☒ $\sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$

Верно. Сумма верхних границ заведомо будет верхней границей суммы.

☐ $\sup\{x_n + y_n\} \geq \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$

Неверно, например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☐ $\sup\{x_n - y_n\} \leq \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$

Неверно, например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☐ $\sup\{x_n - y_n\} \geq \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$

Верно. Если $\sup\{y_n\} = c$, то

$$\sup\{x_n - y_n\} \geq \sup\{x_n - c\} = \sup\{x_n\} - c = \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$$

☐ $\sup\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$

Неверно, например, $x_n = y_n = (-1)^n$.

☒ $\sup\{x_n + y_n\} \geq \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$

Верно. Если $\inf\{y_n\} = c$, то

$$\sup\{x_n + y_n\} \geq \sup\{x_n + c\} = \sup\{x_n\} + c = \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$$

☒ $\sup\{x_n + c\} = c + \sup\{x_n\}$

Верно. Сдвиг последовательности сдвигает на то же число и все верхние границы.

☒ $\sup\{-x_n\} = -\inf\{x_n\}$

4. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям: $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ и $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ при всех натуральных n .

Докажите, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ монотонны.

Выведите отсюда, что они имеют предел и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (их общий предел называется арифметико-геометрическим средним чисел a и b).

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = x_{n+1},$$

поэтому, начиная с $n = 2$ имеем $y_n \leq x_n$. Следовательно,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$$

и

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{y_n \cdot y_n} = y_n.$$

Таким образом, последовательности монотонны при $n \geq 2$. Кроме того

$$y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{n-1} \leq y_n \leq x_n \leq x_{n-1} \leq x_3 \leq x_2,$$

поэтому монотонно возрастающая последовательность y_n ограничена сверху числом x_2 , а монотонно убывающая последовательность x_n ограничена снизу числом y_2 . Следовательно, они имеют пределы. Обозначим их через x_* и y_* и перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$. В результате получим, что $x_* = \frac{1}{2}(x_* + y_*)$, откуда и следует, что $x_* = y_*$.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА e

1. Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Для этого рассмотрите последовательность $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ и с помощью неравенства Бернулли и теоремы о двух милиционерах докажите, что x_n стремится к нулю. Выведите отсюда, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при любом $a > 0$.

Решение. Заметим, что $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$. Следовательно,

$$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Поскольку $\frac{a-1}{n}$ стремится к нулю, x_n также стремится к нулю. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

2. Найдите предел последовательностей $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ и $c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Ответ: $e^2 \approx 7,389$, $\sqrt{e} \approx 1,649$, $1/e \approx 0,368$

Решение. Рассмотрим a_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$$

Рассмотрим b_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим c_n :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

3. Найдите предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n/2}$.

Ответ: $e^{3/2} \approx 4,482$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{3/2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^{3/2} = e^{3/2}.$$

1.6. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО–ВЕЙЕРШТРАССА

1. Последовательность $\{x_n\}$ определяется рекуррентным соотношением $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ при $n \geq 1$ и начальными условиями $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Ответ: $(a + 2b)/3$

Первое решение. Несложно заметить, что все члены последовательности x_n устроены так: это сумма чисел a и b с некоторыми неотрицательными коэффициентами, причем сумма коэффициентов равна единице. Это верно для первых двух членов последовательности и сохраняется при переходе от x_n и x_{n+1} к x_{n+2} . Таким образом, достаточно проследить за коэффициентом при a . Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$a, b, \frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}, \frac{3a+5b}{8}, \frac{5a+11b}{16}, \frac{11a+21b}{32}, \frac{21a+43b}{64}, \frac{43a+85b}{128}, \dots$$

Отсюда можно заметить, что коэффициент при a примерно равен $1/3$, а точнее он равен $\frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$. Проверим это по индукции. База $n = 0$ и $n = 1$ очевидна. Установим переход от n и $n + 1$ к $n + 2$. Следующий коэффициент при a получается как полусумма двух предыдущих, поэтому для x_{n+2} он равен

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n} + \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1}} \right) = \frac{2 \cdot (2^n - (-1)^n) + (2^{n+1} - (-1)^{n+1})}{3 \cdot 2^{n+2}} = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3 \cdot 2^{n+2}}.$$

Предел же этих коэффициентов найти совсем легко:

$$\frac{2^n - (-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Второе решение. Будем решать задачу геометрически. Нарисуем отрезок $[a, b]$ и будем последовательно ставить на нем точки x_n . Каждая следующая точка должна быть расположена посередине между двух предыдущих.

$$x_0 \stackrel{!}{=} a \qquad \qquad \qquad x_2 \qquad \qquad \qquad x_4 \quad x_6 \quad x_5 \quad x_3 \qquad \qquad \qquad x_1 \stackrel{!}{=} b$$

Таким образом, на каждом шаге мы то прибавляем, то вычитаем половину длины отрезка между соседними точками. А эта длина равна $\frac{b-a}{2^n}$. В итоге получаем формулу

$$\begin{aligned} x_n &= a + \frac{b-a}{1} - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^2} - \frac{b-a}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{2^{n-1}} = \\ &= a + (b-a) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Но это геометрическая прогрессия с основанием $-\frac{1}{2}$, поэтому

$$x_n = a + (b-a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}},$$

что стремится к $a + (b-a) \frac{1}{1+1/2} = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}$.

2. Пределы всевозможных сходящихся подпоследовательностей данной последовательности называются ее предельными точками. Найдите предельные точки последовательности $x_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} + \sin^2 \frac{3\pi n}{4}$. Ответ приведите в виде разделенных пробелами десятичных дробей (округленных до первых трех знаков после запятой).

Ответ: $-0,5 \ 1 \ 2$

Решение. Разделим натуральные числа по остатку от деления на 4.

Случай $n = 4k, k \in \mathbb{N}$.

$$x_{4k} = (-1)^{4k} \frac{4k-1}{4k+1} + \sin^2 \frac{3\pi 4k}{4} = \frac{4k-1}{4k+1} + \sin^2 3\pi \longrightarrow 1 + 0 = 1.$$

Случай $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$.

$$x_{4k+1} = (-1)^{4k+1} \frac{4k}{4k+2} + \sin^2 \frac{3\pi(4k+1)}{4} = -\frac{4k}{4k+2} + \sin^2 \left(3\pi + \frac{3\pi}{4} \right) \longrightarrow -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Случай $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

$$x_{4k+2} = (-1)^{4k+2} \frac{4k+1}{4k+3} + \sin^2 \frac{3\pi(4k+2)}{4} = \frac{4k}{4k+2} + \sin^2 \left(3\pi + \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow 1 + 1 = 2.$$

Случай $n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$.

$$x_{4k+3} = (-1)^{4k+3} \frac{4k+2}{4k+4} + \sin^2 \frac{3\pi(4k+3)}{4} = -\frac{4k+2}{4k+4} + \sin^2 \left(3\pi + \frac{9\pi}{4} \right) \longrightarrow -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

1. Найдите частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$. В ответе должна быть формула для S_n .

Ответ: $1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Решение. Разобьем сумму на две и перенумеруем одну из получившихся

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sqrt{2} + 1 = \\ &= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}. \end{aligned}$$

2. Отметьте ряды, которые расходятся, поскольку для них не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Решение.

☒ $\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \dots + (-1)^{n-1} \sqrt{n} + \dots$

Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \sqrt{n} \neq 0$ (четные убывают к $-\infty$, нечетные возрастают к $+\infty$).

☒ $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \dots + \frac{2n-1}{2n+1} + \dots$

Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$.

☒ $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{4}{7}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} + \dots$

Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots$

Необходимое условие сходимости выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$.

☐ $\frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{9}{8} + \dots + \frac{3n}{2^n} + \dots$

Необходимое условие сходимости выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2^n} = 0$.

☒ $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots + \frac{n}{1000n+1} + \dots$

Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000}$.

☒ $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \dots$

Расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$.

3. Найдите частичную сумму ряда $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{n-1} + \dots$ при $x \neq 1$.
А чему равна сумма ряда, если $|x| < 1$? В ответе приведите формулу для S_n .

Ответ: $(1 - x^n)(1 - x)^{-2} - nx^n(1 - x)^{-1}$.

Решение. Будем много раз использовать формулу для суммы геометрической прогрессии из k членов с единичным первым членом и знаменателем x :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}.$$

Пусть $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + (x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + (x^2 + x^3 + \dots + x_{n-1}) + \dots + x^{n-1} = \\ &= (1 + x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + x(1 + x + x^2 + \dots + x_{n-2}) + x^2(1 + x + \dots + x_{n-3}) + \dots + x^{n-1} = \\ &= \frac{1 - x^n}{1 - x} + x \cdot \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} + x^2 \cdot \frac{1 - x^{n-2}}{1 - x} + \dots + x^{n-1} \cdot \frac{1 - x}{1 - x} = \\ &= \frac{1}{1 - x} (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n) = \frac{1}{1 - x} \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n \right) = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}. \end{aligned}$$

При $|x| < 1$ ряд сходится к $(1 - x)^{-2}$.

1.7. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

1. С помощью признака сравнения установите сходимость (расходимость) рядов. Отметьте сходящиеся ряды.

Решение.

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$

Сходится, так как $\frac{\sin^2 n}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$.

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1}$

Сходится, так как $\frac{\arctg n}{n^2 + 1} < \frac{\pi/2}{n^2}$.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n + 1}$

Расходится, так как $\frac{1}{1000n + 1} > \frac{1}{1001n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001n} = \frac{1}{1001} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$

Расходится, так как $\frac{n}{n^2 + 4} > \frac{1}{n + 5}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5}$ расходится (гармонический ряд с точностью до пяти первых слагаемых).

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$

Сходится, так как $\frac{3 + (-1)^n}{2^n} < \frac{4}{2^n}$.

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n(n+1)^2}$

Сходится, так как $\frac{2n + 1}{n(n+1)^2} < \frac{3}{n^2}$.

2. а) С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(5n-1)!}{((3n+1)!)^2}$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово сходится или расходится.

Ответ: $5^5/3^6 \approx 4,286$ расходится

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!(5n+4)!}{((3n+4)!)^2}}{\frac{n!(5n-1)!}{((3n+1)!)^2}} = \frac{(n+1)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)5n}{(3n+4)^2(3n+3)^2(3n+2)} \longrightarrow \frac{5^5}{3^6} \approx 4,286.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

б) С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!(4n+1)!}{(2n)!(5n-1)!}$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово "сходится" или "расходится" (без кавычек).

Ответ: $\frac{3^3 \cdot 4^4}{2^2 \cdot 5^5} \approx 0,552$ сходится

Решение. Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3n+3)!(4n+5)!}{(2n+2)!(5n+4)!} = \\ &= \frac{(3n)!(4n+1)!}{(2n)!(5n-1)!} = \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(4n+2)(4n+3)(4n+4)(4n+5)}{(2n+1)(2n+2)5n(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)} \longrightarrow \frac{3^3 \cdot 4^4}{2^2 \cdot 5^5} \approx 0,552.\end{aligned}$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

3. С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово "сходится" или "расходится" (без кавычек).

Ответ: 0,5 сходится

Решение. Рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

По признаку Коши ряд сходится.

4. Отметьте ряды, к которым применим признак Лейбница.

Решение. Все варианты являются знакопеременными рядами. Выясним, у каких есть монотонное убывание слагаемых по модулю.

☒ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1} + \dots$

Признак применим, так как $\frac{1}{4k-3} < \frac{1}{4k-1}$ при всех k .

☐ $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + \dots$

Признак неприменим, так как $\frac{1}{4k-1} > \frac{1}{4k-3}$ при всех k .

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} + \dots$

Признак неприменим. Рассмотрим тройку последовательных слагаемых: $\frac{1}{\sqrt{k-1}+1}, \frac{1}{\sqrt{k}-1}, \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{k-1}+1} < \frac{1}{\sqrt{k}-1}$, то монотонного убывания нет.

☐ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{32} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2^{2k-1}} - \frac{1}{3^k} + \dots$

Признак неприменим. Рассмотрим четверку последовательных слагаемых: $\frac{1}{2^{2k-3}}, \frac{1}{3^{k-1}}, \frac{1}{2^{2k-1}}, \frac{1}{3^k}$. Заметим, что при всех $k > 2$ выполнено $\frac{1}{2^{2k-1}} > \frac{1}{3^k}$, то есть монотонного убывания нет.

☐ $\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{7} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \dots + \frac{\sqrt{2k-1}}{2k+1} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)} + \dots$

Признак неприменим. Рассмотрим тройку последовательных слагаемых: $\frac{\sqrt{2k-1}}{2k+1}, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)}, \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+3}$. Заметим, что при всех $k > 2$ выполнено $\frac{\sqrt{2k-1}}{2k+1} > \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)}$, то есть монотонного убывания нет.

5. Отметьте сходящиеся ряды

☒ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $1/\sqrt[3]{n}$ монотонно стремится к нулю.

$$\checkmark \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+2}$$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ монотонно стремится к нулю. Стремление к нулю очевидно, монотонность нуждается в проверке:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{n+2} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} &\Leftrightarrow \frac{n}{(n+2)^2} \geq \frac{n+1}{(n+3)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 9n = n(n+3)^2 \geq (n+1)(n+2)^2 = n^3 + 5n^2 + 8n + 4, \end{aligned}$$

что верно при $n \geq 2$.

$$\square \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+5}$$

Расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+5} = \frac{1}{3} \neq 0$.

$$\checkmark \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}$$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ монотонно стремится к нулю. Стремление к нулю очевидно, монотонность нуждается в проверке:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n(n+1)} \geq \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{n} \geq \frac{2n+3}{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1) \geq (2n+3)n = 2n^2 + 3n. \end{aligned}$$

$$\square \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n+2}$$

Расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1 \neq 0$.

6. Докажите, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Решение. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ абсолютно сходится. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел имеем

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Поэтому по признаку сравнения достаточно доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$ сходится. Но он есть сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, сходящегося по условию и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, про который мы также знаем, что он сходится.