

Непараметрические критерии однородности

Грауэр Л.В.

Непараметрические критерии однородности

$$\xi, F(x), X_{[n]} = (X_1, \dots, X_n)$$

$$\eta, G(x), Y_{[m]} = (Y_1, \dots, Y_m)$$

$$H_0 : F(x) = G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

$$H_1 : F(x) \geq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

$$H'_1 : F(x) \leq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

$$H''_1 : F(x) \neq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Критерий однородности Вилкоксона

Пусть $m \leq n$

$$Z_{[n+m]} = (X_{[n]}, Y_{[m]})$$

$$z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(m+n)}$$

$$\text{rank}(Y_1) = s_1, \text{rank}(Y_2) = s_2, \dots, \text{rank}(Y_m) = s_m.$$

Критическая область

$$W = \sum_{i=1}^m s_i$$

H_1	V_k
$F(x) \geq G(x)$	
$F(x) \leq G(x)$	
$F(x) \neq G(x)$	

Аппроксимация

$$\tilde{W} = \frac{W - \frac{m(m+n+1)}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}$$

$$\left\{ \frac{mn(n+m+1)}{12} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^k t_i(t_i^2 - 1)}{(n+m)(n+m-1)(n+m+1)} \right] \right\}^{1/2}$$

Критерий Манна-Уитни

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I\{X_i < Y_j\},$$

где

$$I\{X_i < Y_j\} = \begin{cases} 1, & X_i < Y_j; \\ 0, & X_i > Y_j. \end{cases}$$

Взаимосвязь критериев Вилкоксона и Манна-Уитни

$$W = U + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Непараметрические критерии для парных выборок

$$(\eta, \xi), (X, Y)_{[n]}$$

$$H_0 : F(x) = G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$$H_1 : F(x) \geq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$$H'_1 : F(x) \leq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$$H''_1 : F(x) \neq G(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta = \eta - \xi$$

$$z_i = X_i - Y_i$$

$$H_0 : P\{z_i < 0\} = P\{z_i > 0\} = 1/2.$$

$$H_1 : P\{z_i < 0\} > P\{z_i > 0\}.$$

$$H'_1 : P\{z_i < 0\} < P\{z_i > 0\}.$$

$$H''_1 : P\{z_i < 0\} \neq P\{z_i > 0\}.$$

Критерий знаков

Пусть $A = \{z_i < 0\}$

$$L = \sum_{i=1}^n I\{z_i < 0\}$$

H_1	V_k
$F(x) \geq G(x)$	
$F(x) \leq G(x)$	
$F(x) \neq G(x)$	

Критерий знаковых ранговых сумм Вилкоксона

$$|z_1| < \dots < |z_n|.$$

$$s_1 = \text{rank}(|z_1|), \dots, s_n = \text{rank}(|z_n|)$$

$$U = \sum_{i=1}^n \psi_i s_i, \text{ где } \psi_i = \begin{cases} 1, & z_i < 0; \\ 0, & z_i > 0. \end{cases}$$

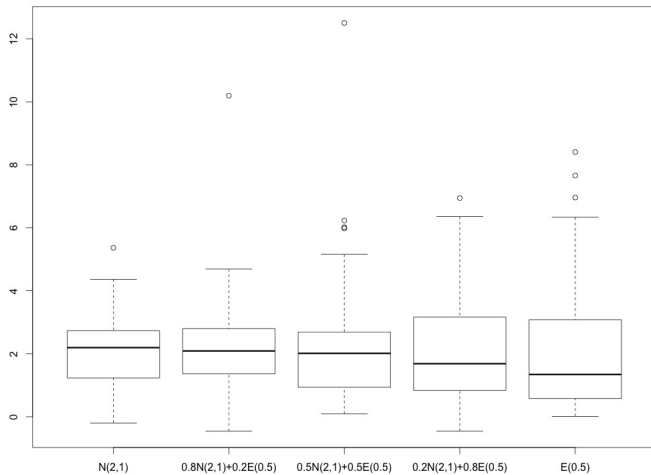
Пример

на уровне	1.65	1.0	2.04	1.25	1.05	1.02	1.67	1.86	1.56	1.73
выше	1.73	1.06	2.03	1.4	0.95	1.13	1.41	1.73	1.63	1.56
z_i	-0.08	-0.06	0.01	-0.15	0.10	-0.11	0.26	0.13	-0.07	0.17

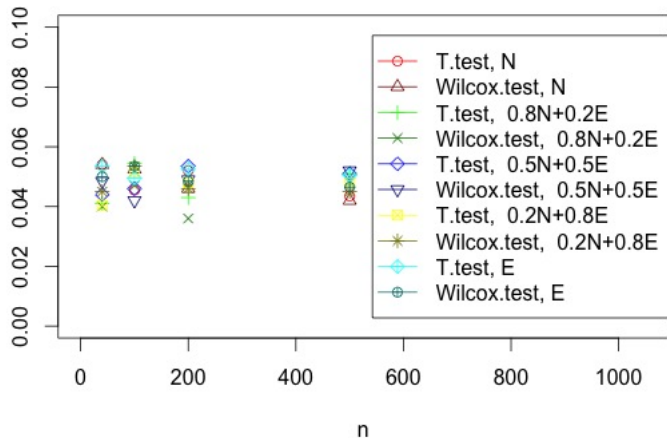
$H_0 : F(x) = G(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

$H_1 : F(x) \leq G(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

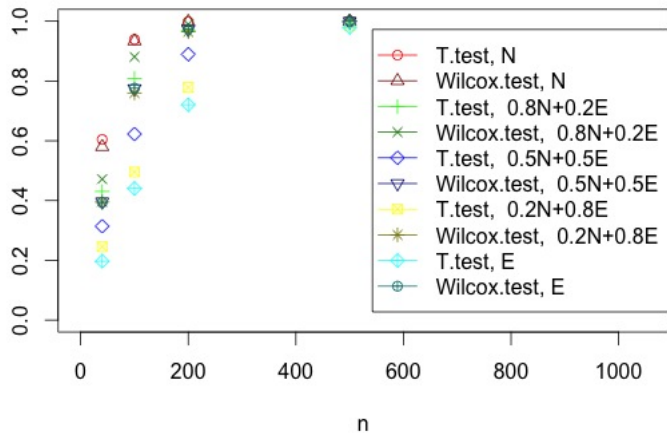
T.test vs Wilcox.test



T.test vs Wilcox.test: ошибка 1 рода



T.test vs Wilcox.test: мощность



Проверка гипотез и доверительные интервалы

$$\xi, F(x, \theta), X_{[n]}, \alpha$$

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

$$(S_1, S_2): P\{\theta \in (S_1, S_2)\} = 1 - \alpha$$