1-я неделя. Последовательности

1.2. Предел последовательности

1. Найдите число членов последовательности $x_n = \dfrac{2n-1}{4n+5}$, лежащих вне интервала $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1000}\right)$.

Ответ: 873

Решение. Найдем наибольшее натуральное n, не попадающее в заданную окрестность точки $\frac{1}{2}$, то есть удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{1000}.$$

Заметим, что

$$\frac{2n-1}{4n+5} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{7}{2}}{4n+5}.$$

Тогда

$$\left|\frac{2n-1}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{\frac{7}{2}}{4n+5}\right| = \frac{\frac{7}{2}}{4n+5}.$$

Последнее равенство верно, так как нас интересуют только натуральные n. Подставив получившееся выражение в неравенство, получим $n \leqslant 873,5$.

2. Для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,001$ найдите соответствующие номера n, начиная с которых будет выполняться неравенство $\dfrac{5}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Ответ: 26 2501 25 000 001

Решение. Преобразуем неравенство с учетом положительности чисел n и ε:

$$\frac{5}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{25}{\varepsilon^2} < n.$$

Подставляя значения $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,001$, получим $n > 25$, $n > 2500$ и $n > 25000000$ соответственно. В каждом случае выберем наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству.

3. Для каждого данного ε найдите соответствующие номера N, что при всех $n \geqslant N$ верно неравенство $\left|\dfrac{2n-1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$. В ответе приведите числа, разделенные пробелами, $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ответ: 49 4999 4 999 999

Решение. Преобразуем неравенство аналогично тому, как было сделано в первом задании:

$$\left|\frac{2n-1}{n+2} - 2\right| = \left|2 - \frac{5}{n+2}\right| = \frac{5}{n+2} < \varepsilon.$$

Подставив заданные значения ε, получим $n > 48$, $n > 4998$ и $n > 4999998$ соответственно. Нам подойдут любые n, удовлетворяющие неравенствам. В ответ выпишем, например, наименьшие значения n.

1.3. Арифметические операции с пределами

1. Последовательность x_n имеет предел, а последовательность y_n не имеет предела. Отметьте утверждения, которые могут оказаться верными. (Т.е. существуют такие имеющая конечный предел последовательность x_n и не имеющая предела последовательность y_n, что...)

Решение. Для утверждений, являющихся верными, приведем примеры, остальные опровергнем доказательством.

☐ Последовательность $x_n + y_n$ имеет предел
Неверно. Предположим, что последовательность $z_n = x_n + y_n$ имеет предел. Тогда $y_n = z_n - x_n$. По свойствам арифметических действий с пределами $\lim(z_n - x_n)$ существует и равен $\lim z_n - \lim x_n$. Это противоречит тому, что последовательность y_n не имеет предела.

☑ Последовательность $x_n + y_n$ не имеет предела
Верно. Например, $x_n = 1$, $y_n = (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n y_n$ имеет предел
Верно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n y_n$ не имеет предела
Верно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = (-1)^n n$.

☐ Последовательность y_n/x_n имеет предел
Неверно. Предположим, что последовательность $z_n = y_n/x_n$ имеет предел. Тогда $y_n = z_n x_n$. По свойствам арифметических действий с пределами $\lim z_n x_n$ существует и равен $\lim z_n \lim x_n$. Это противоречит тому, что последовательность y_n не имеет предела.

☑ Последовательность y_n/x_n не имеет предела
Верно. Например, $x_n = 1$, $y_n = (-1)^n$.

2. Последовательности x_n и y_n не имеют предела. Отметьте утверждения, которые могут оказаться верными. (Т.е. существуют такие не имеющие предела последовательности x_n и y_n, что...)

Решение. Для утверждений, являющихся верными, приведем примеры, остальные опровергнем доказательством от противного.

☑ Последовательность $x_n + y_n$ имеет предел
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☑ Последовательность $x_n + y_n$ не имеет предела
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n y_n$ имеет предел
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n y_n$ не имеет предела
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = 1 + (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n - y_n$ имеет предел
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n$.

☑ Последовательность $x_n - y_n$ не имеет предела
Верно. Например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Отметьте утверждения, которые из этого следуют.

Решение. Для утверждений, не являющихся верными, приведем контрпримеры, остальные докажем.

☐ Хотя бы один из пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует и равен нулю
Неверно. Например, $x_n = (1 - (-1)^n) + \frac{1}{n}$, $y_n = (1 + (-1)^n) + \frac{1}{n}$.

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$
Неверно. Например, $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$.

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{x_n, y_n\} = 0$

Неверно. Например, $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -2$.

☑ $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{|x_n|, |y_n|\} = 0$

Верно. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{|x_n|, |y_n|\} \neq 0$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \ \exists n \geqslant N : \ |\min\{|x_n|, |y_n|\} - 0| > \varepsilon.$$

То есть $\min\{|x_n|, |y_n|\} > \varepsilon$. Отсюда следует, что одновременно $|x_n| > \varepsilon$ и $|y_n| > \varepsilon$, и, следовательно, $|x_n y_n| > \varepsilon^2$, что противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

4. Найдите предел последовательности $x_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}}$.

Ответ: $0,75$

Решение. Заметим, что числитель и знаменатель дроби являются частичными суммами геометрических прогрессий с единичным первым членом и со знаменателями $1/3$ и $1/2$ соответственно. Воспользуемся известной формулой для вычисления этих сумм:

$$x_n = \frac{\dfrac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}}}{\dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}}.$$

Перейдем к пределу

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}}}{\dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}.$$

5. Являются ли приведенные ниже последовательности бесконечно большими или неограниченными? Отметьте верные утверждения.

Решение. Поясним неочевидные пункты.

☑ Последовательность $x_n = (-1)^n n^2$ неограничена

Верно. Четные члены возрастают к $+\infty$, нечетные убывают к $-\infty$. Последовательность является неограниченной и бесконечно большой.

☑ Последовательность $x_n = (-1)^n n^2$ бесконечно большая

Верно.

☑ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ неограничена

Четные члены возрастают к $+\infty$, нечетные убывают к нулю. Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой, так как существует подпоследовательность, идущая к нулю.

☐ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ бесконечно большая

Неверно.

☑ Последовательность $x_n = 2^{\sqrt[3]{n}}$ неограничена

Верно.

☑ Последовательность $x_n = 2^{\sqrt[3]{n}}$ бесконечно большая

Верно.

☐ Последовательность $x_n = \frac{100n}{n^2+10}$ неограничена

Неверно. Предел последовательности равен нулю, значит, она ограничена, и, следовательно, не является бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = \frac{100n}{n^2+10}$ бесконечно большая
Неверно.

☑ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n n}$ неограничена
Верно. Четная подпоследовательность возрастает к $+\infty$, нечетная убывает к нулю. Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = n^{(-1)^n n}$ бесконечно большая
Неверно.

☑ Последовательность $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{((-1)^n-1)n}$ неограничена
Верно. Четные члены равны $1/2$, нечетные возрастают к ∞. Последовательность является неограниченной, но не бесконечно большой.

☐ Последовательность $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{((-1)^n-1)n}$ бесконечно большая
Неверно.

6. Найдите предел последовательности $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+5} - \dfrac{2n^2}{2n-1}$.

Ответ: $-0,5$

Решение. Приведем разность к общему знаменателю:

$$x_n = \frac{n^3}{n^2+5} - \frac{2n^2}{2n-1} = -\frac{n^3+10n^2}{(n^2+5)(2n-1)} - \frac{1+\frac{10}{n}}{(1+\frac{5}{n^2})(2-\frac{1}{n})} = -\frac{1}{2}.$$

7. Найдите предел последовательности $x_n = \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}$. Параметры a, b, c и d положительны.

Ответ: $(a-c)/2$

Решение. Избавимся от неопределенности вида $+\infty - \infty$, домножив на сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}\right)\left(\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}\right)}{\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}} = \\ &= \frac{n^2+an+b-(n^2+cn+d)}{\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}} = \frac{an+b-cn-d}{\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{an+b-cn-d}{\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{b}{n}-c-\frac{d}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}}} = \frac{a-c}{2}. \end{aligned}$$

1.4. Вещественные числа. Супремум и инфимум

1. Найдите инфимум и супремум для множества $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Ответ: $-0,75$ $1,75$

Решение. Заметим, что при четном n последовательность убывает, при $n \geqslant 4$ неотрицательна и стремится к $\frac{1}{4}$. Значит, ее инфимум равен 0, а супремум $\frac{1}{4}$. При нечетных $n \geqslant 5$ последовательность отрицательна, возрастает и стремится в $-\frac{1}{4}$. Значит, ее инфимум равен $-\frac{1}{4}$, а супремум 0. Наконец, осталось посмотреть на значения при $n = 1$, 2 и 3: это $1,75$, $-0,75$ и $5/12$. Откуда и получаем ответ.

2. Найдите инфимум и супремум для множества $\left\{\dfrac{n}{m+n} \;:\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Ответ: 0 1

Решение. Ясно, что $0 < \frac{n}{m+n} < 1$. Поэтому 0 является нижней границей, а 1 — верхней.

С другой стороны никакое число, большее нуля, не может быть нижней границей, поскольку $\frac{1}{1+m}$ при больших m сколь угодно близко приближается к нулю. А никакое число, меньшее единицы, не может быть верхней границей, поскольку $\frac{n}{n+1}$ при больших n сколь угодно близко приближается к единице.

3. Отметьте утверждения, справедливые для любых ограниченных последовательностей x_n и y_n.

☑ $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$
Верно. Сумма верхних границ заведомо будет верхней границей суммы.

☐ $\sup\{x_n + y_n\} \geqslant \sup\{x_n\} + \sup\{y_n\}$
Неверно, например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☐ $\sup\{x_n - y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$
Неверно, например, $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

☐ $\sup\{x_n - y_n\} \geqslant \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$
Верно. Если $\sup\{y_n\} = c$, то

$$\sup\{x_n - y_n\} \geqslant \sup\{x_n - c\} = \sup\{x_n\} - c = \sup\{x_n\} - \sup\{y_n\}$$

☐ $\sup\{x_n + y_n\} \leqslant \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$
Неверно, например, $x_n = y_n = (-1)^n$.

☑ $\sup\{x_n + y_n\} \geqslant \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$
Верно. Если $\inf\{y_n\} = c$, то

$$\sup\{x_n + y_n\} \geqslant \sup\{x_n + c\} = \sup\{x_n\} + c = \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$$

☑ $\sup\{x_n + c\} = c + \sup\{x_n\}$
Верно. Сдвиг последовательности сдвигает на то же число и все верхние границы.

☑ $\sup\{-x_n\} = -\inf\{x_n\}$

4. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям: $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ и $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ при всех натуральных n.

Докажите, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ монотонны.

Выведите отсюда, что они имеют предел и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (их общий предел называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b).

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leqslant \frac{x_n + y_n}{2} = x_{n+1},$$

поэтому, начиная с $n = 2$ имеем $y_n \leqslant x_n$. Следовательно,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant \frac{x_n + x_n}{2} = x_n$$

и

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{y_n \cdot y_n} = y_n.$$

Таким образом, последовательности монотонны при $n \geqslant 2$. Кроме того

$$y_2 \leqslant y_3 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} \leqslant y_n \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x_3 \leqslant x_2,$$

поэтому монотонно возрастающая последовательность y_n ограничена сверху числом x_2, а монотонно убывающая последовательность x_n ограничена снизу числом y_2. Следовательно, они имеют пределы. Обозначим их через x_* и y_* и перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$. В результате получим, что $x_* = \frac{1}{2}(x_* + y_*)$, откуда и следует, что $x_* = y_*$.

1.5. Определение числа e

1. Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Для этого рассмотрите последовательность $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ и с помощью неравенства Бернулли и теоремы о двух милиционерах докажите, что x_n стремится к нулю. Выведите отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при любом $a > 0$.

Решение. Заметим, что $a = (1+x_n)^n \geqslant 1 + nx_n$. Следовательно,

$$0 < x_n \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

Поскольку $\frac{a-1}{n}$ стремится к нулю, x_n также стремится к нулю. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1+x_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

2. Найдите предел последовательностей $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$, $b_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$ и $c_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

Ответ: $e^2 \approx 7,389$, $\sqrt{e} \approx 1,649$, $1/e \approx 0,368$

Решение. Рассмотрим a_n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2 = e^2.$$

Рассмотрим b_n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим c_n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = e^{-1}.$$

1.6. Теорема Больцано–Вейерштрасса

1. Последовательность $\{x_n\}$ определяется рекуррентным соотношением $x_{n+2} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$ при $n \geqslant 1$ и начальными условиями $x_1 = a$ и $x_2 = b$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ответ: $(a+2b)/3$

Первое решение. Несложно заметить, что все члены последовательности x_n устроены так: это сумма чисел a и b с некоторыми неотрицательными коэффициентами, причем сумма коэффициентов равна единице. Это верно для первых двух членов последовательности и сохраняется при переходе от x_n и x_{n+1} к x_{n+2}. Таким образом, достаточно проследить за коэффициентом при a. Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \frac{a+3b}{4},\ \frac{3a+5b}{8},\ \frac{5a+11b}{16},\ \frac{11a+21b}{32},\ \frac{21a+43b}{64},\ \frac{43a+85b}{128},\ \ldots$$

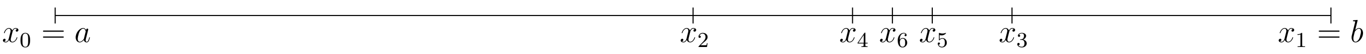
Отсюда можно заметить, что коэффициент при a примерно равен $1/3$, а точнее он равен $\frac{2^n-(-1)^n}{3\cdot 2^n}$. Проверим это по индукции. База $n=0$ и $n=1$ очевидна. Установим переход от n и $n+1$ к $n+2$. Следующий коэффициент при a получается как полусумма двух предыдущих, поэтому для x_{n+2} он равен

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3\cdot 2^n}+\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}\right)=\frac{2\cdot(2^n-(-1)^n)+(2^{n+1}-(-1)^{n+1})}{3\cdot 2^{n+2}}=\frac{2^{n+2}-(-1)^{n+2}}{3\cdot 2^{n+2}}.$$

Предел же этих коэффициентов найти совсем легко:

$$\frac{2^n-(-1)^n}{3\cdot 2^n}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^n}\to\frac{1}{3}.$$

Второе решение. Будем решать задачу геометрически. Нарисуем отрезок $[a,b]$ и будем последовательно ставить на нем точки x_n. Каждая следующая точка должна быть расположена посредине между двух предыдущих.



Таким образом, на каждом шаге мы то прибавляем, то вычитаем половину длины отрезка между соседними точками. А эта длина равна $\frac{b-a}{2^n}$. В итоге получаем формулу

$$x_n=a+\frac{b-a}{1}-\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{2^2}-\frac{b-a}{2^3}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{b-a}{2^{n-1}}=$$
$$=a+(b-a)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right).$$

Но это геометрическая прогрессия с основанияем $-\frac{1}{2}$, поэтому

$$x_n=a+(b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}},$$

что стремится к $a+(b-a)\frac{1}{1+1/2}=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{a+2b}{3}$.

2. Пределы всевозможных сходящихся подпоследовательностей данной последовательности называются ее предельными точками. Найдите предельные точки последовательности $x_n=(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}+\sin^2\dfrac{3\pi n}{4}$. Ответ приведите в виде разделенных пробелами десятичных дробей (округленных до первых трех знаков после запятой).

Ответ: $-0,5$ 1 2

Решение. Разделим натуральные числа по остатку от деления на 4.

Случай $n=4k, k\in\mathbb{N}$.

$$x_{4k}=(-1)^{4k}\frac{4k-1}{4k+1}+\sin^2\frac{3\pi 4k}{4}=\frac{4k-1}{4k+1}+\sin^2 3\pi\longrightarrow 1+0=1.$$

Случай $n=4k+1, k\in\mathbb{N}$.

$$x_{4k+1}=(-1)^{4k+1}\frac{4k}{4k+2}+\sin^2\frac{3\pi(4k+1)}{4}=-\frac{4k}{4k+2}+\sin^2\left(3\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\longrightarrow -1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Случай $n=4k+2, k\in\mathbb{N}$.

$$x_{4k+2}=(-1)^{4k+2}\frac{4k+1}{4k+3}+\sin^2\frac{3\pi(4k+2)}{4}=\frac{4k}{4k+2}+\sin^2(3\pi+\frac{\pi}{2}\longrightarrow 1+1=2.$$

Случай $n=4k+3, k\in\mathbb{N}$.

$$x_{4k+3}=(-1)^{4k+3}\frac{4k+2}{4k+4}+\sin^2\frac{3\pi(4k+3)}{4}=-\frac{4k+2}{4k+4}+\sin^2\left(3\pi+\frac{9\pi}{4}\right)\longrightarrow -1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Сходимость рядов

1. Найдите частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$. В ответе должна быть формула для S_n.

Ответ: $1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$.

Решение. Разобьем сумму на две и перенумеруем одну из получившихся

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) - \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) + \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) - \sqrt{2}+1 = \\
&= 1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}.
\end{aligned}$$

2. Отметьте ряды, которые расходятся, поскольку для них не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Решение.

☑ $\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\dots+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+\dots$

Расходится, так как $\lim(-1)^{n-1}\sqrt{n}\neq 0$ (четные убывают к $-\infty$, нечетные возрастают к $+\infty$).

☑ $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\dots+\frac{2n-1}{2n+1}+\dots$

Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$.

☑ $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{4}{7}}+\dots+\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}+\dots$

Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\dots$

Необходимое условие сходимости выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}=0$.

☐ $\frac{3}{2}+\frac{6}{4}+\frac{9}{8}+\dots+\frac{3n}{2^n}+\dots$

Необходимое условие сходимости выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2^n}=0$.

☑ $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\frac{3}{3001}+\dots+\frac{n}{1000n+1}+\dots$

Расходится, так как $\lim\frac{n}{1000n+1}=\frac{1}{1000}$.

☑ $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\dots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n+\dots$

Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$.

3. Найдите частичную сумму ряда $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{n-1} + \dots$ при $x \neq 1$. А чему равна сумма ряда, если $|x| < 1$? В ответе приведите формулу для S_n.

Ответ: $(1 - x^n)(1 - x)^{-2} - nx^n(1 - x)^{-1}$.

Решение. Будем много раз использовать формулу для суммы геометрической прогрессии из k членов с единичным первым членом и знаменателем x:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}.$$

Пусть $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
S_n &= (1 + x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + (x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + (x^2 + x^3 + \dots + x_{n-1}) + \dots + x^{n-1} = \\
&= (1 + x + x^2 + \dots + x_{n-1}) + x(1 + x + x^2 + \dots + x_{n-2}) + x^2(1 + x + \dots + x_{n-3}) + \dots + x^{n-1} = \\
&= \frac{1 - x^n}{1 - x} + x \cdot \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} + x^2 \cdot \frac{1 - x^{n-2}}{1 - x} + \dots + x^{n-1} \cdot \frac{1 - x}{1 - x} = \\
&= \frac{1}{1 - x}\big(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n\big) = \frac{1}{1 - x}\left(\frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n\right) = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}.
\end{aligned}$$

При $|x| < 1$ ряд сходится к $(1 - x)^{-2}$.

1.7. Признаки сходимости рядов

1. С помощью признака сравнения установите сходимость (расходимость) рядов. Отметьте сходящиеся ряды.

Решение.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n(n+1)}$

Сходится, так как $\dfrac{\sin^2 n}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$

Сходится, так как $\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1} < \dfrac{\pi/2}{n^2}$.

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1000n+1}$

Расходится, так как $\dfrac{1}{1000n+1} > \dfrac{1}{1001n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1001n} = \dfrac{1}{1001}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+4}$

Расходится, так как $\dfrac{n}{n^2+4} > \dfrac{1}{n+5}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+5}$ расходится (гармонический ряд с точностью до пяти первых слагаемых).

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$

Сходится, так как $\dfrac{3+(-1)^n}{2^n} < \dfrac{4}{2^n}$.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n(n+1)^2}$

Сходится, так как $\dfrac{2n+1}{n(n+1)^2} < \dfrac{3}{n^2}$.

2. а) С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(5n-1)!}{((3n+1)!)^2}$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово сходится или расходится.

Ответ: $5^5/3^6 \approx 4,286$ расходится

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!(5n+4)!}{((3n+4)!)^2}}{\dfrac{n!(5n-1)!}{((3n+1)!)^2}} = \frac{(n+1)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)5n}{(3n+4)^2(3n+3)^2(3n+2)} \longrightarrow \frac{5^5}{3^6} \approx 4,286.$$

По признаку Даламбера ряд расходится.

б) С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n)!(4n+1)!}{(2n)!(5n-1)!}$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово "сходится"или "расходится"(без кавычек).

Ответ: $\frac{3^3 \cdot 4^4}{2^2 \cdot 5^5} \approx 0,552$ сходится

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(3n+3)!(4n+5)!}{(2n+2)!(5n+4)!}}{\dfrac{(3n)!(4n+1)!}{(2n)!(5n-1)!}} =$$
$$= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(4n+2)(4n+3)(4n+4)(4n+5)}{(2n+1)(2n+2)5n(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)} \longrightarrow \frac{3^3 \cdot 4^4}{2^2 \cdot 5^5} \approx 0,552.$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

3. С помощью признака Даламбера или Коши установите сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$. В ответе укажите получившийся предел в виде десятичной дроби (с точностью до трех знаков после запятой) и через пробел слово "сходится"или "расходится"(без кавычек).

Ответ: $0,5$ сходится

Решение. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

По признаку Коши ряд сходится.

4. Отметьте ряды, к которым применим признак Лейбница.

Решение. Все варианты являются знакочередующимися рядами. Выясним, у каких есть монотонное убывание слагаемых по модулю.

☑ $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \dots + \dfrac{1}{4k-3} - \dfrac{1}{4k-1} + \dots$

Признак применим, так как $\frac{1}{4k-3} < \frac{1}{4k-1}$ при всех k.

☐ $\dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{9} + \dots + \dfrac{1}{4k-1} - \dfrac{1}{4k-3} + \dots$

Признак неприменим, так как $\frac{1}{4k-1} > \frac{1}{4k-3}$ при всех k.

☐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{k}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{k}+1} + \dots$

Признак неприменим. Рассмотрим тройку последовательных слагаемых: $\frac{1}{\sqrt{k-1}+1}$, $\frac{1}{\sqrt{k}-1}$, $\frac{1}{\sqrt{k}+1}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{k-1}+1} < \frac{1}{\sqrt{k}-1}$, то монотонного убывания нет.

☐ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{27} + \dots + \dfrac{1}{2^{2k-1}} - \dfrac{1}{3^k} + \dots.$

Признак неприменим. Рассмотрим четверку последовательных слагаемых: $\frac{1}{2^{2k-3}}$, $\frac{1}{3^{k-1}}$, $\frac{1}{2^{2k-1}}$, $\frac{1}{3^k}$. Заметим, что при всех $k > 2$ выполнено $\frac{1}{2^{2k-1}} > \frac{1}{3^k}$, то есть монотонного убывания нет.

☐ $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{5} - \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{5}}{7} - \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{\sqrt{2k-1}}{2k+1} - \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)} + \dots$

Признак неприменим. Рассмотрим тройку последовательных слагаемых: $\frac{\sqrt{2k-1}}{2k+1}$, $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)}$, $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+3}$, $\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{2}(k+2)}$. Заметим, что при всех $k > 2$ выполнено $\frac{\sqrt{2k-1}}{2k+1} > \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}(k+1)}$, то есть монотонного убывания нет.

5. Отметьте сходящиеся ряды

☑ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $1/\sqrt[3]{n}$ монотонно стремится к нулю.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ монотонно стремится к нулю. Стремление к нулю очевидно, монотонность нуждается в проверке:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+2}\geqslant\frac{\sqrt{n+1}}{n+3}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{n}{(n+2)^2}\geqslant\frac{n+1}{(n+3)^2}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad n^3+6n^2+9n=n(n+3)^2\geqslant(n+1)(n+2)^2=n^3+5n^2+8n+4,$$

что верно при $n\geqslant 2$.

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{3n+5}$

Расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+5}=\dfrac{1}{3}\neq 0$.

☑ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$

Сходится по признаку Лейбница. Последовательность $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ монотонно стремится к нулю. Стремление к нулю очевидно, монотонность нуждается в проверке:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}\geqslant\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{2n+1}{n}\geqslant\frac{2n+3}{n+1}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2n^2+3n+1=(n+1)(2n+1)\geqslant(2n+3)n=2n^2+3n.$$

☐ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n-1)}{n+2}$

Расходится. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1\neq 0$.

6. Докажите, что если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

Решение. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ абсолютно сходится. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел имеем

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому по признаку сравнения достаточно доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$ сходится. Но он есть сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, сходящегося по условию и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, про который мы также знаем, что он сходится.

7. Отметьте верные утверждения.

☑ Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

☐ Если последовательность ограничена, то она имеет предел.
Неверно. Например, последовательность $(-1)^n$ ограничена, но предела не имеет.

☐ Если последовательность не имеет предела, то она неограничена.
Неверно. Например, последовательность $(-1)^n$ ограничена, но предела не имеет.

☑ Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.

☐ Если последовательность $\{|a_n|\}$ имеет предел, то последовательность $\{a_n\}$ также имеет предел.

Неверно. Например, последовательность $(-1)^n$ предела не имеет, но $|(-1)^n| = 1$.

☑ Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Верно. Любая подпоследовательность имеет тот же предел, что и исходная последовательность.

☐ Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ существует и конечнен, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Неверно. Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\big((-1)^n + (-1)^{n-1}\big) = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

☑ Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел.

Верно. Для ограниченной последовательности это теорема Больцано–Вейерштрасса, а из неограниченной последовательности всегда можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или $-\infty$.

☑ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ расходится.

☐ Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ также расходится.

Неверно. Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ расходятся, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-1)$ сходится.

☑ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Верно. Это необходимое условие сходимости ряда.

☐ Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Неверно. Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, но $\dfrac{1}{n}$ стремится к нулю.

☐ Если $a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Неверно. Например, $-1 \leqslant 0$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ расходится.

☑ Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Верно. Это признак сравнения.