

Основы теории графов - II

1 Эйлеровы циклы

1.1. Среди графов, показанных на рисунке, выберите эйлеровы графы.

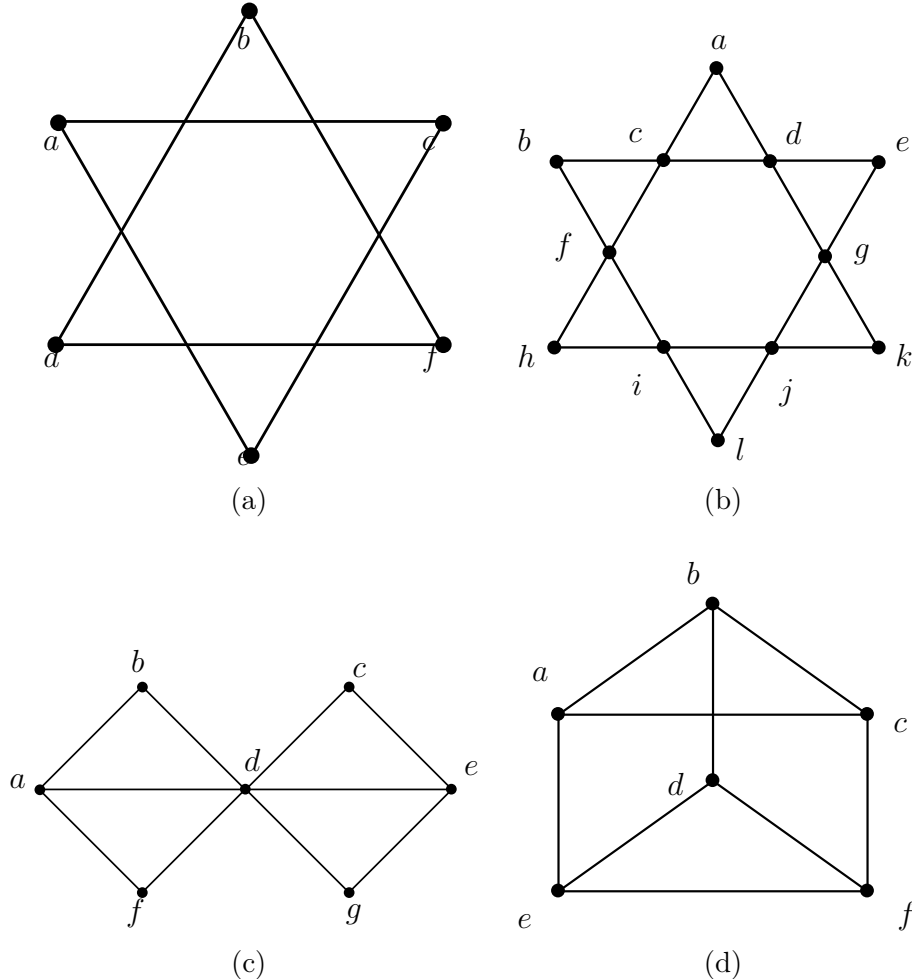


Рис. 1

Решение. Граф, показанный на рис.1,а, не является связным, поэтому эйлеровым не является. Графы, показанные на рис.1,с и рис.1,д, содержат вершины нечетной степени, и поэтому также не являются эйлеровыми. У связного графа на рис.1,б все вершины имеют четную степень, и потому он является эйлеровым графом.

1.2. Пусть в связном графе G ровно $2k$ вершин имеют нечетную степень. Доказать, что в этом графе можно построить k таких путей, что каждое ребро графа G будет принадлежать только одному из этих путей.

Решение. Соединим $2k$ вершин с нечетными номерами попарно k ребрами e_i . В результате получим граф, в котором существует эйлеров цикл. Если удалить из этого цикла добавленные ранее ребра $e_i, i = 1, \dots, k$, то цикл распадется на k непересекающихся по ребрам путей, которые нам и нужно было построить.

1.3. Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было бы изготовить каркас кубика размерами $1 \times 1 \times 1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?

Решение. Каркас куба представляет собой регулярный граф, степени всех восьми вершин которого равны трем. Так как их четное число, то, согласно упражнению 1.2, этот граф можно разбить на четыре непересекающихся по ребрам пути. Как следствие, минимальное количество кусков, на которое можно разрезать проволоку для получения кубика единичного объема, также равно четырем.

1.4. Рассмотрим связный простой регулярный граф G , степень любой вершины которого равна четырем. Доказать, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

Решение. Для данного графа G выполнены необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла в графе. Будем двигаться по любому такому циклу, окрашивая встречающиеся в порядке этого обхода ребра поочередно то в синий, то в красный цвет. При таком обходе мы входим в каждую из вершин графа G , кроме начальной вершины x_0 , два раза, и выходим из нее два раза. Поэтому все ребра, инцидентные этим вершинам, будут окрашены правильно.

В вершину x_0 мы входим и сразу из нее выходим только один раз. Кроме того, мы выходим из x_0 в начале нашего алгоритма и возвращаемся в x_0 в его конце. Для того, чтобы доказать, что начальное и конечное ребро будут в результате работы алгоритма окрашены в разные цвета, достаточно убедиться в том, что количество ребер в графе G четно. А этот факт сразу следует из первой теоремы теории графов. Действительно, для 4-регулярного графа, построенного на n вершинах, сумма степеней всех вершин равна $4n$. Поэтому количество всех ребер этого графа равно $2n$.

1.5. Задача на программирование: найти эйлеров цикл в графе G .

Решение. Прежде всего, требуется проверить граф на эйлеровость. Для этого нужно убедиться в том, что в графе нет вершин нечетной степени, а сам граф связан.

Простейший способ построения эйлерова цикла в графе G можно реализовать с помощью рекурсивного алгоритма вида

```
Euler(g, x)
    while not g[x].isEmpty()
        y = g[x][0]
        g[x].remove(y)
        g[y].remove(x)
        euler(g, y)
    print x
```

Именно, заходя в любую вершину $x \in V(G)$, мы просматриваем все исходящие из x ребра. Каждое ребро $e = \{x, y\}$ мы удаляем из графа, переходим в вершину y и рекурсивно вызываем наш алгоритм из этой вершины.

2 Двудольные графы. Раскраски графов

2.1. Доказать, что дерево является двудольным графом.

Решение. В дереве отсутствуют любые циклы, в том числе и нечётные. Таким образом, для дерева выполняется необходимое и достаточное условие двудольности.

2.2. Какое максимальное количество ребер может быть в простом двудольном графе на 11 вершинах?

Решение. Прежде всего, заметим, что для заданной пары (m, l) количество ребер в двудольном графе будет максимально в случае, когда любая вершина из первого блока X , $|X| = m$, соединена с каждой вершиной второго блока Y , $|Y| = l$. Иными словами, это должен быть полный двудольный граф $K_{m,l}$. Так как в графе $K_{m,l}$ каждая вершина блока X инцидентна l ребрам, а всего у нас в X имеется m вершин, то суммарное количество ребер в графе $K_{m,l}$ равно $l \cdot m$. Осталось заметить, что при заданном количестве $n = l + m$ вершин в графе $K_{m,l}$ максимум произведения $l \cdot m$ достигается для четного n при $k = l = n/2$, а для нечетного — при $l = (n - 1)/2$, $m = l + 1$. Следовательно, в случае $n = 11$ максимальное количество ребер равно $5 \cdot 6 = 30$.

2.3. Задача на программирование: проверить граф на двудольность.

Решение. В простейшем виде алгоритм можно описать так. Покрасим первую вершину в белый цвет. Каждую соседнюю с ней вершину красим в черный цвет. Затем каждую вершину, у которой покрашена соседняя вершина, но она сама еще не покрашена, красим в цвет, противоположный цвету окрашенной с ней соседней вершины. Так делаем до тех пор, пока не покрасим весь граф. Если после этого мы получаем конфликты, значит, граф не является двудольным.

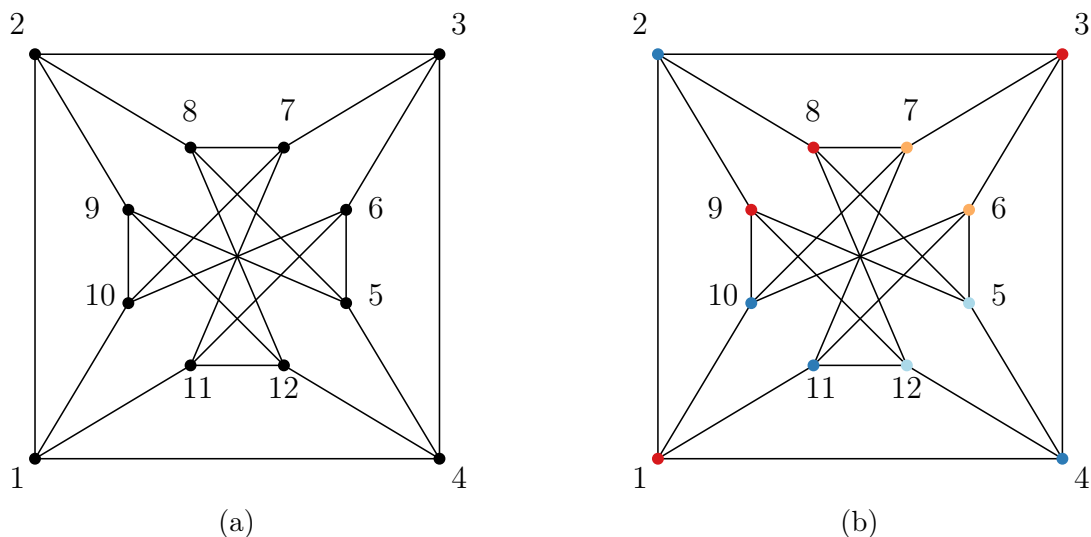


Рис. 2

2.4. Определите хроматическое число графа G , представленного на рис.2,а.

Решение. Хроматическое число графа G равно четырем. Один из способов раскраски этого графа в четыре цвета представлен на рис.2,б. То, что в два цвета вершины G окрасить невозможно, достаточно очевидно. Покажем, что мы не можем окрасить его вершины в три цвета.

Предположим, что $\chi(G) = 3$, то есть что мы все же можем покрасить вершины графа G в три цвета. Заметим, что среди любых пяти вершин графа G обязательно найдется хотя бы одна

пара смежных между собой вершин. Следовательно, в один и тот же цвет мы можем покрасить не более чем четыре вершины. Так как цветов по нашему предположению три, а всего вершин двенадцать, то мы получаем, что в случае $\chi(G) = 3$ все множество вершин разбивается при окрашивании на три блока, каждый из которых содержит по четыре вершины.

Покрасим в первый цвет вершину 1. Мы хотим найти еще три несмежные как с вершиной 1, так и между собой вершины графа G , которые мы можем окрасить в тот же цвет. Несложно убедиться, что это могут быть либо вершины 9, 8, 3, либо вершины 12, 5, 3. Теперь возьмем вершину 2 и окрасим ее во второй цвет. Из тех же соображений получаем, что в тот же цвет мы можем окрасить либо вершины 7, 6, 4, либо 10, 11, 4. Во всех случаях у нас для третьего цвета остается четверка внутренних вершин (например, вершины 7, 6, 5, 12), две из которых оказываются смежными. Таким образом, в три цвета этот граф покрасить невозможно.

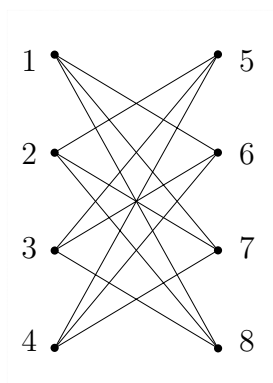


Рис. 3

2.5. Предъявите способ начального упорядочивания вершин графа, представленного на рис.3, для которого жадный алгоритм окрасит вершины в два цвета.

Решение. Например, такой последовательностью может быть последовательность вершин

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

2.6. Предъявите способ начального упорядочивания вершин графа, представленного на рис.3, для которого жадный алгоритм окрасит вершины в четыре цвета.

Решение. В качестве такой последовательности следует, например, взять последовательность вида

1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8.

3 Паросочетания. Теорема Холла

3.1. Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах.

Решение. Дерево может либо иметь лишь одно совершенное паросочетание, либо не иметь таких паросочетаний вообще. Докажем это по индукции. Дерево K_2 имеет единственное совершенное паросочетание, дерево K_1 совершенного паросочетания не имеет. Рассмотрим теперь дерево T на $n > 2$ вершинах и какой-то лист x в нём. Совершенное паросочетание должно покрывать вершину x . Следовательно, оно должно включать в себя ребро $\{x, y\}$, где y — единственная смежная с x вершина дерева T . При этом все другие рёбра, инцидентные y , в строящееся

паросочетание включать уже нельзя. Удаляя тогда вершины x и y , мы получаем в общем случае лес, состоящий из нескольких деревьев. По индукционному предположению, у каждого из этих деревьев имеется либо одно, либо ни одного совершенного паросочетания. Предположим, что в каждом из этих деревьев имеется совершенное паросочетание. В этом случае, добавляя к ребрам этих паросочетаний ребро $\{x, y\}$, мы получаем единственное паросочетание в исходном дереве T . В противном случае в дереве T совершенные паросочетания отсутствуют.

3.2. Найти количество совершенных паросочетаний в полном графе K_{2n} на $2n$ вершинах.

Решение. Таких паросочетаний в полном графе K_{2n} ровно $(2n - 1)!!$ штук. Действительно, вершину x мы можем соединить ребром с любой другой вершиной полного графа. Следовательно, имеется $2n - 1$ способ выбрать ребро, соединяющее вершину x с любой другой отличной от нее вершиной полного графа K_{2n} . В оставшемся графе возьмем любую пока еще не покрытую паросочетанием вершину y . Ее мы можем соединить ребром с любой из оставшихся $(2n - 3)$ вершин, не покрытых строящимся паросочетанием. Продолжая далее, мы получим, что количество совершенных паросочетаний равно

$$(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2n - 1)!!$$

3.3. Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11} , построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n ?

Решение. Наибольшее по включению паросочетание минимального размера содержит четыре ребра (см. рис. 4). В общем случае простого цикла C_n количество ребер в подобном паросочетании равно числу t , такому, что $n \in (3t - 3, 3t]$.

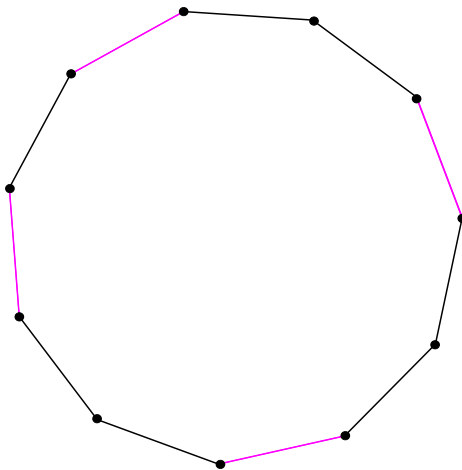


Рис. 4

Для доказательства предположим, что существует наибольшее по включению паросочетание M размером $r < t$. Заметим, что в графе C_n могут существовать максимум два подряд идущих ребра e_1 и e_2 , не принадлежащих паросочетанию M . Рассмотрим путь P в графе C_n , начинающийся и заканчивающийся на ребрах из M и содержащий все ребра M . Длина такого пути не превосходит $3r - 2$. Действительно, любой описанный выше путь наибольшей длины должен начинаться с ребра из M , затем должны идти ровно два ребра не из M , затем вновь ребро из M , и так далее. У такого пути длина в точности равна $3r - 2$, у любого другого пути она меньше или равна $3r - 2 \leq 3(t - 1) - 2 = 3t - 5$. Теперь рассмотрим дополнение P' этого пути P до всего графа C_n . Так как суммарная длина этих путей

$$|P| + |P'| = |C_n| = n, \quad \text{то} \quad |P'| = n - |P| \geq n - (3r - 2) \geq n - (3t - 5) > (-3) + 5 = 2.$$

Следовательно, паросочетание M можно увеличить, добавив по крайней мере одно ребро из P' , а это противоречит тому, что M — наибольшее по включению паросочетание

3.4. Найти количество X -насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$.

Решение. Каждое такое паросочетание можно рассматривать как n -перестановку из m элементов без повторений, поэтому общее число X -насыщенных паросочетаний в $K_{n,m}$ равно $(m)_n$.

3.5. Какие из графов, изображенных на рис.5, имеют X -насыщенное паросочетание?

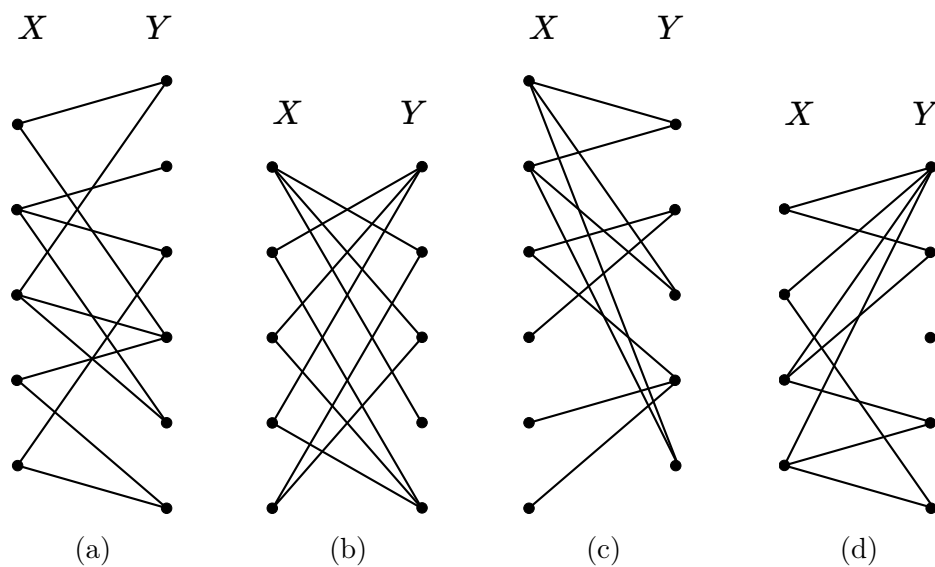


Рис. 5

Решение. Графы, показанные на рисунках (a) и (d), имеют X -насыщенное паросочетание — для них условие Холла выполняется. Для графа, показанного на рисунке (b), условие Холла нарушено на трех средних вершинах из доли X , а для графа на рисунке (c) это условие нарушено на двух нижних вершинах доли X .