3.2 容斥原理

将 3.1 节讨论的原理进一步推广，总结成一般性规律，就得到定理 3.2.1 所描述的容斥原理。

定理 3.2.1　　设 S 是有限集合，$P_1, P_2 \cdots P_m$ 是同集合 S 有关的 m 个性质，设 A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的集合 $(1 \le i \le m)$，$\overline{A_i}$ 是 S 中不具有性质 P_i 的元素构成的集合 $(1 \le i \le m)$，则 S 中不具有性质 $P_1, P_2 \cdots P_m$ 的元素个数为

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cdots \cap \overline{A_m}\right| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{\{1,2,\cdots m\} 2} \left|A_i \cap A_j\right| \\
&- \sum_{\{1,2,\cdots m\} 2} \left|A_i \cap A_{ji} \cap A_k\right| + \cdots \\
&+ (-1)^m \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cdots \cap \overline{A_m}\right|
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

证明　可以利用等式（3.1.1)，通过对 m 作归纳进行证明。下面通过其组合意义来证明。

等式（3.2.1）的左端表示的是 S 中不具有性质 $P_1, P_2 \cdots P_m$ 的元素的个数。下面我们来证明：对于 S 中每个元素 x，若 x 不具有性质 $P_1, P_2 \cdots P_m$，则对等式（3.2.1）的右端贡献 1；否则，若 x 具有某个性质 $P_i (1 \le i \le m)$，则对等式（3.2.1）的右端贡献 0，从而证（3.2.1）式。

任给 $x \in S$，则

（1）若 x 不具有性质 $P_1, P_2 \cdots P_m$，即 $x \notin A_1, x \notin A_2, \cdots x \notin A_m$，则 x 在集合 S 中，但不在（3.2.1）式右端的任一其他集合中。所以，x 对（3.2.1）式右端的贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 \cdots + (-1)^m \times 0 = 1$$

（2）若 x 恰具有 $P_1, P_2 \cdots P_m$ 中的 $n(n \ge 1)$ 个性质 $P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_n}$，则 x 对 $|S|$ 的贡献为

$$1 = \binom{n}{0}$$

因 x 恰具有 n 个性质 $P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_n}$，所以 x 恰属于集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots A_{i_n}$，共 n 个。于是，x 对 $\sum |A_i|$ 的贡献为

$$n = \binom{n}{1}$$

从 $P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_n}$ 中选出两个性质，共有 $\binom{n}{2}$ 种，所以 x 恰在 $\binom{n}{2}$ 个形如 $A_{i_k} \cap A_{i_l} (k \ne l)$ 的集合中，x 对

$\sum\left|A_i \cap A_j\right|$的贡献为$\binom{n}{2}$；……；同理，x 对$\sum\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}\right|$的贡献为$\binom{n}{n}$。而当$k>n$时，

$\binom{n}{k}=0$。所以 x 对（3.2.1）式右端的贡献为

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m} \\
&=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} \\
&=\left.(1-x)^n\right|_{x=1} \\
&=0
\end{aligned}
$$

综上所述，（3.2.1）式的右端是集合 S 中不具有性质$P_1, P_2 \cdots P_m$的元素的个数。证毕。

若$m=3$，则（3.2.1）式变成

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| \\
&=|S|-\left(\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|\right) \\
&+\left(\left|A_1 \cap A_2\right|+\left|A_1 \cap A_3\right|+\left|A_2 \cap A_3\right|\right)-\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right|
\end{aligned}
$$

上面等式的右端共有

$$1+3+3+1=8$$

项。

若$m=4$，则（3.2.1）式变成

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right| \\
&=|S|-\left(\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|+\left|A_4\right|\right) \\
&+\left(\left|A_1 \cap A_2\right|+\left|A_1 \cap A_3\right|+\left|A_1 \cap A_4\right|\right) \\
&+\left(\left|A_1 \cap A_2\right|+\left|A_1 \cap A_3\right|+\left|A_2 \cap A_3\right|\right) \\
&-\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| \\
&=1000-(200+166+125) \\
&+(33+25+41)-8 \\
&=600
\end{aligned}
$$

例 2　求由a, b, c, d四个字符构成的 n 位符号串中，a, b, c, d至少出现一次的符号串的数目。

解　　　设A_1, A_2, A_3, A_4分别为不出现a, b, c, d的 n 位符号串的集合。由于 n 位符号串的每一位都可取a, b, c, d四个符号中的任一个，所以共有4^n个。其中，不出现a的符号串的每一位都可取b, c, d中的任一个，共有3^n个。类似地，有

$$
\begin{aligned}
&\left|A_i\right| = 3^n\left(i=1,2,3,4\right)\\
&\left|A_i \cap A_j\right| = 2^n\left(i\neq j, i, j=1,2,3,4\right)\\
&\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = 1\left(i, j, k\square\square\square\square \qquad ; i, j, k=1,2,3,4\right)\\
&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right| = 0
\end{aligned}
$$

而 a,b,c,d 至少出现一次的符号串集合即为 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$，于是

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right|\\
&=4^n-\left(\left|A_1\right|+\left|A_2\right|+\left|A_3\right|+\left|A_4\right|\right)\\
&+\left(\left|A_1\cap A_2\right|+\left|A_1\cap A_3\right|+\left|A_1\cap A_4\right|\right)\\
&+\left(\left|A_2\cap A_3\right|+\left|A_2\cap A_4\right|+\left|A_3\cap A_4\right|\right)\\
&-\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right|+\left|A_1\cap A_2\cap A_4\right|\\
&+\left|A_1\cap A_3\cap A_4\right|+\left|A_2\cap A_3\cap A_4\right.\\
&+\left|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\right|\\
&=4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4
\end{aligned}
$$

例 3　欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的整数的个数。求 $\varphi(n)$。

解　将 n 分解成素因子的乘积形式：$n=p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_q^{i_q}$

设 A_i 为不大于 n 且为 p_i 的倍数的自然数的集合 $\left(1\le i\le q\right)$，则：$\left|A_i\right|=\dfrac{n}{p_i}\left(i=1,2,\cdots q\right)$

因 p_i 与 p_j 互素 $\left(i\neq j\right)$，所以 p_i 与 p_j 的最小公倍数为 p_ip_j，所以

$$\left|A_i\cap A_j\right|=\frac{n}{p_ip_j}\left(i\neq j; i,j=1,2,\cdots,q\right)$$

……。小于 n 并与 n 互素的自然数是集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 中那些不属任何一个集合 $A_i=\{i=1,2,\cdots,q\}$ 的数，由容斥原理知

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) &= \left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_4\right| \\
&= n - \sum_{i=1}^{q}\left|A_i\right| + \sum_{1\le i\le j\le q}\left|A_i \cap A_j\right| \\
&\quad - \sum_{1\le i\le j\le q}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots \\
&\quad + (-1)^q\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_q\right| \\
&= n - \sum_{i=1}^{q}\frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i\le j\le q}\frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1\le i\le j\le q}\frac{n}{p_i p_j p_k} \\
&\quad + \cdots + (-1)^q\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_q}
\end{aligned}
$$

上面的和式正好是下列乘积的展开式：$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_q}\right)$

欧拉函数常用于数论中。例如，若 $n = 12 = 2^2 \cdot 3$，则

$$\varphi(12) = 12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4$$

小于 12 并与 12 互素的正整数为 1，5，7 和 11

例 4　若图 G 有 n 个顶点，且不含有完全 k 子图 $(k \ge 2)$，则它的顶点的次数 $d(x)$ 满足不等式

$$\min_{x\in X} d(x) \le \left\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \right\rfloor \tag{3.2.3}$$

其中，X 为图 G 的顶点集。

证明　设

$$(k-2)n = p(k-1) + r\,(0 \le r \le k-2)$$

若不等式（3.2.3）不成立，则对任意的 $x \in X$，均有 $d(x) \ge p+1$。

在图 G 中任取一个顶点 $x_1 \in X$，用 A_1 和相应的集合 A_2，由容斥原理得到

$$
\begin{aligned}
\left|A_1 \cap A_2\right| &= \left|A_1\right| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right| \\
&\ge 2p + 2 - n > 0
\end{aligned}
$$

这是因为集合 A_1 和 A_2 中的每一个至少包含 $p+1$ 个元素，而 $A_1 \cup A_2$ 中至多只有 n 个元素（G 中全部顶点）

。再任取一个顶点 $x_3 \in A_1 \cap A_2$，同上，由容斥原理可得

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| \ge 3(p+1) - 2n > 0$$

等等。这样，我们可由归纳法得到对于 $x_{k-1}\in\bigcap_{j=1}^{k-2}A_j$，取 G 中与 x_{k-1} 相邻的顶点集 A_{k-1}，有

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right| &= \left|\left(\bigcap_{j=1}^{k-2}A_j\right)\cap A_{k-1}\right| \\ &= \left|A_{k-1}\right| + \left|\bigcap_{j=1}^{k-2}A_j\right| - \left|A_{k-1}\cup\bigcap_{j=1}^{k-2}A_j\right| \\ &\geq (p+1)+(k-2)(p+1)-(k-3)n-n \\ &= (k-1)(p+1)-(k-2)n \\ &= k-1-r>0\end{aligned}$$

因此，至少有一个顶点 $x_{k-1}\in\bigcap_{j=1}^{k-2}A_j$。由 A_j 的定义知 $x_1,x_2,\cdots x_k$ 之间相互相邻，所以顶点集合 $\{x_1,x_2,\cdots x_k\}$ 构成的导出子图是图 G 的完全 k 子图，这与题设矛盾。故不等式（3.2.3）成立。

利用定理 3.2.1 和推论 3.2.1，我们可以算出 S 中不具有性质 $P_1,P_2\cdots P_m$ 的元素个数和 S 中具有 $P_1,P_2\cdots P_m$ 中某个性质的元素个数。下面我们将其推广到更一般的情形。

设 S 是一有限集合，$P=\{P_1,P_2\cdots P_m\}$ 是 S 上的性质集合。现在的问题是要求出集合 S 中恰好具有 P 中 r 个性质的元素个数 $N(r)(1\leq r\leq m)$。

现用 $N(P_{i_1},P_{i_2}\cdots P_{i_k})$ 表示 S 中具有性质 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots P_{i_k}$ 的元素个数，规定 $w(0)=|S|$，令

$$w(k)=\sum_{1\leq i_1\leq i_2<\cdots<i_k\leq m}N(P_{i_1},P_{i_2},\cdots P_{i_k})$$

若 S 中某元素 x 恰好具有 P 中 $k+r(r\geq 0)$ 个性质 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots P_{i_{k+r}}$，则从 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots P_{i_{k+r}}$ 中取出 k 个性质的方法数为 $\binom{k+r}{k}$，因而 x 在 $w(k)$ 中计算了 $\binom{k+r}{k}$ 次。而对于 SK　具有 P 中少于 k 个性质的元素，则不计算在内。

例如，在本节的例 1 中，有

$$\begin{aligned}&N(P_1)=200,\\ &N(P_2)=166,\\ &N(P_3)=125,\\ &N(P_1,P_2)=33,\\ &N(P_1,P_3)=25,\\ &N(P_2,P_3)=41,\\ &N(P_1,P_2,P_3)=8,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&w(0)=1000,\\
&w(1)=200+166+125=491,\\
&w(2)=33+25+41=99,\\
&w(3)=8.
\end{aligned}$$

在$w(2)$中，对具有3个性质P_1,P_2,P_3的元素，在$N(P_1,P_2),N(P_1,P_3)$和$N(P_2,P_3)$中各计算了一次，共3次。例如，120能被5，6，8整除，所以，$120\in A_1\bigcap A_2,120\in A_1\bigcap A_3,120\in A_2\bigcap A_3$，即120在$w(2)$中共计算了3次。

定理3.2.2　设集合S中具有性质集合$P=\{P_1,P_2\cdots P_m\}$恰好r个性质的元素个数为$N(r)$，则

$$\begin{aligned}
N(r)=w(r)-\binom{r+1}{r}w(r+1)+\binom{r+2}{r}w(2)\\
-\cdots+(-1)^{m-r}\binom{m}{r}w(m).
\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

证明　设x是集合S的一个元素，则

（1）若x具有少于r个性质，则x对$w(r),w(r+1),\cdots w(m)$的贡献均为0，从而对（3.2.4）式右端的贡献为0。

（2）若x恰好具有r个性质，则x对$w(r)$的贡献为1，而对$w(r+1),w(r+2),\cdots w(m)$的贡献均为0，从而对（3.2.4）式右端的贡献为1。

（3）若x恰好具有$k(k>r)$个性质，则它对$w(r)$的贡献为$\binom{k}{r}$，对$w(r+1)$的贡献为$\binom{k}{r+1},\cdots,$对$w(k)$的贡献为$\binom{k}{k}$；当$k\le l\le m$时，它对$w(l)$的贡献为0。从而，它对（3.2.4）式右端的贡献为

$$
\begin{aligned}
&\binom{k}{r}-\binom{r+1}{r}\binom{k}{r+1}+\binom{r+2}{r}\binom{k}{r+2}\\
&-\cdots+(-1)^{l-r}\binom{k}{r}\binom{k}{k}\\
&=\sum_{l=r}^{k}(-1)^{l-r}\binom{k}{l}\binom{l}{r}\\
&=\sum_{l=r}^{k}(-1)^{l-r}\binom{k}{l}\binom{k-r}{l-r}\\
&=\binom{k}{r}\sum_{l=r}^{k}(-1)^{l}\binom{k-r}{l}\\
&=\binom{k}{r}(1-x)^{k-l}\Big|_{x=1}=0
\end{aligned}
$$

综上所述，（3.2.4）式的右端是 S 中恰好具有 r 个性质的元素个数。

在例 1 中，有

$$
\begin{aligned}
N(0)&=w(0)-w(1)+w(2)-w(3)\\
&=600
\end{aligned}
$$

它是 S 中不能被 5，6，8 整除的整数个数，这正是容斥原理所反映的事实。

$$
\begin{aligned}
N(1)&=w(1)-\binom{2}{1}w(2)+\binom{3}{1}w(3)\\
&=317
\end{aligned}
$$

它是 S 中只能被 5，6，8 之一整除的整数个数。

$$
\begin{aligned}
N(2)&=w(2)-\binom{3}{2}w(3)\\
&=75
\end{aligned}
$$

它是 S 中只能被 5，6，8 中的两个整数的整数个数。

$$
N(3)=w(3)=8
$$

由此可见了，定理 3.2.2 是定理 3.2.1 的推广。

例 5　某学校有 12 位教师，已知教数学课的教师有 8 位，教物理课的教师有 6 位，教化学课的教师有 5 位。其中，有 5 位教师既教数学又教物理，有 4 位教师兼教数学和化学，兼教物理和化学的有 3 位教师，还有 3 位教师兼教这三门课。试问：

（1）教数、理、化以外的课的教师有几位？

（2）只教数、理、化中一门课的教师有几位？

（3）正好教数、理、化中两门课的教师有几位？

解　令 12 位教师中教数学课的教师属于集合 A_1，教物理课的教师属于集合 A_2，教化学的教师属于集合 A_3，则有

$$|A_1| = 8,$$
$$|A_2| = 6,$$
$$|A_3| = 5,$$
$$|A_1 \cap A_2| = 5,$$
$$|A_1 \cap A_3| = 4,$$
$$|A_2 \cap A_3| = 3,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3,$$

（1）不教数学、物理、化学课的教师数目为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= 12 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 12 - (8+6+5) + (5+4+3) - 3 \\ &= 2\end{aligned}$$

（2）只教数、理、化中一门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(1) &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad -2(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad +3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= (8+6+5) - 2(5+4+3) + 3 \times 3 \\ &= 4.\end{aligned}$$

（3）正好教数、理、化中两门课的教师数目为

$$\begin{aligned}N(2) &= (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad -3|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 5+4+3-3\times 3 \\ &= 3.\end{aligned}$$

3.3　容斥原理的应用：

3.3.1　具有有限重复数的多重集合的 r 组合数

在第 2 章里，我们介绍了 n 元集合 $\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ 的 r 组合数为 $\binom{n}{r}$，多重集合 $M = \{\infty \cdot x_1, \infty \cdot x_2, \cdots, \infty \cdot x_n\}$ 的 r 组合数为 $\binom{n+r-1}{r}$。在本节中，我们将应用容斥原理来计算重复数为任意给定的正整数的多重集合的 r 组合数。

下面通过一下例子来看看怎样用容斥原理解决上述问题，然而例子中所用的方法却适用于一般的情况。

例 1　求 $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 10 组合数。

解　令 $S_\infty=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$，则 S_∞ 的 10 组合数为：$\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{2}=66$

设集合 A 是 S_∞ 的 10 组合全体，则 $|A|=66$，现在要求在 10 组合中 a 的个数小于等于 3，b 的个数小于等于 4，c 的个数小于等于 5 的组合数。定义性质集合

$$P=\{P_1,P_2,P_3\}$$

其中：P_1:10 组合中的 a 的个数大于等于 4；P_2:10 组合中 b 的个数大于等于 5；P_3:10 组合中 c 的个数大于等于 6。将满足性质 P_i 的 10 组合体记为 $A_i\ (1\le i\le 3)$。那么，A_1 的元素可以看作是由 S_∞ 的 $10-4=6$ 组合再拼上 4 个 a 构成的，所以

$$|A_2|=\binom{10-5+3-1}{10-5}$$
$$=\binom{7}{5}=21$$

类似地，有

$$|A_1|=\binom{10-4+3-1}{10-4}$$
$$=\binom{8}{6}=28$$
$$|A_3|=\binom{10-6+3-1}{10-6}$$
$$=\binom{6}{4}=15$$
$$|A_1\cap A_2|=\binom{10-4-5+3-1}{10-4-5}$$
$$=\binom{3}{1}=3$$
$$|A_1\cap A_3|=\binom{10-4-6+3-1}{10-4-6}$$
$$=\binom{2}{0}=1$$
$$|A_2\cap A_3|=0,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0,$$

而 a 的个数小于等于 3，b 的个数小于等于 4，c 的个数小于等于 5 的 10 组合全体为

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right| &= |A|-\left(|A_1|+|A_2|+|A_3|\right) \\
&\quad +\left(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|\right) \\
&\quad +|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \\
&= 66-(28+21+15)+(3+1+0)-0 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

3.3.2　错排问题：集合$\{1,2\cdots n\}$的一个错排是该集合的一个满足条件：$i_j\neq j(1\leq j\leq n)$

的全排列。即集合$\{1,2\cdots n\}$的一个没有一个数字在它的自然顺序位置上的全排列。

$n=1$时，$\{1\}$没有错排。

$n=2$时，$\{1,2\}$有唯一一个错排，为 21。

$n=3$时$\{1,2,3\}$有两个错排，分别为 231 和 312

$n=4$时，$\{1,2,3,4\}$共有下面所列的 9 个错排：

$$
\begin{aligned}
&2143,3142,4123,2341,3412,\\
&4321,2413,3421,4312
\end{aligned}
$$

用D_n记$\{1,2\cdots n\}$的全部错排个数，则$D_1=0,D_2=1,D_3=2,D_4=9$

定理 3.3.1　对任意正整数 n，有：$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$

证明　令 S 是$\{1,2\cdots n\}$的全排的全体，则$|S|=n!$。定义 S 上的性质集合：$P=\{P_1,P_2,\cdots P_n\}$

其中，P_i表示排列中 i 在左数第 i 个位置上，即在其自然顺序的位置上$(1\leq i\leq n)$。令A_i为 S 中满足性质

P_i的全排列的全体。

因A_i中的每一个全排列形如：$j_1\cdots j_{i-1}ij_{i+1}\cdots j_n$

而$j_1\cdots j_{i-1}ij_{i+1}\cdots j_n$是$\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$的全排列，所以有：$|A_i|=(n-1)!(1\leq i\leq n)$

同理，有：$|A_i\cap A_j|=(n-2)!(1\leq i\neq j\leq n)$

一般地，有：$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(n-k)!$

其中，$1\leq i_1,i_2,\cdots i_k\leq n$且$i_1,i_2,\cdots i_k$互不相等。

而D_n为 S 中不满足性质$P_1,P_2,\cdots P_n$的元素个数，由容斥原理，有

$$
\begin{aligned}
D_n &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_n}\right| \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! \\
&\quad - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n3!}\right)
\end{aligned}
$$

我们还可以从另外一个角度来计算 D_n。设：$i_1, i_2, \cdots i_n$

是 $\{1, 2 \cdots n\}$ 的一个错排，我们将 $\{1, 2 \cdots n\}$ 的所有错排按照 i_1 的取值分成 $n-1$ 类，记 A_j 为 $i_1 = j$ 的错排

的全体 $(j = 2, 3, \cdots, n)$，则显然有：$|A_2| = |A_3| = \cdots |A_n|$

令 $|A_2| = d_n$，则：$D_n = (n-1) d_n$

而集合 A_2 中的错排又可以分为两类：

（i）$B_1 : i_2 = 1$，则 $i_1, i_2, \cdots i_n$ 是 $\{3, 4 \cdots n\}$ 的一个错排，所以 $|B_1| = D_{n-2}$；

（ii）$B_2 : i_2 \neq 1$，则 $i_2, i_3, \cdots i_n$ 相当于 $\{1, 3 \cdots n\}$ 的一个错排，所以 $|B_2| = D_{n-1}$。

从而：$d_n = D_{n-2} + D_{n-1}$

并且有递推关系：$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\ D_1 = 0, D_2 = 1 \end{cases}$

对此递推关系稍加变形，得

$$
\begin{aligned}
D_n - nD_{n-1} &= -\left(D_{n-1} - (n-1) D_{n-2}\right) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n-2} (D_2 - 2D_1) \\
&= (-1)^{n-2}
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n \\
&= n(n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n \\
&= \cdots \\
&= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

再次得到前面用容斥原理推导出的 D_n 公式。

在第 4 章中，我们还将专门讨论递推关系在组合问题中的应用。

3.3.3　有禁止模式的排列问题

在 3.3.2 小节中我们讨论了禁止位置的排列问题，即 i 不在第 i 个位置上的排列问题。本小节我们来讨论有禁止模式的排列问题，在此类问题中，要讨论某些元素之间的某种相对位置不能出现的一些排列。先看下面的问题：

设某班有 8 位学生排成一队出去散步，第二天再列队时，同学们都不希望他前面的同学与前一天的相同，问有多少种排法？

一种可能的方法就是将这 8 位学生排的队掉个头，也就是让最后一名学生变为第一名，倒数第二名变为第二名，如此等等，但这只是很多种可能中的一种。若我们分别用 1，2，……8 代表第一天列队时的第一、第二、……第八位同学，则第一天的排队顺序为 12345678，如上掉头后的排列为 87654321。我们的问题是求第二次列队时不出现 12，23，……78 这些模式的排列的个数。例如，31542876 就是一个符合要求的排列，而 25834761 则不是，因为其中出现了 34。

用 Q_n 表示 $\{1,2,\cdots n\}$ 的不出现 12，23，……，$(n-1)n$ 这些模式的全排列的个数，并规定 $Q_n=1$

$n=2$ 时，21 是唯一的一个满足要求的排列，$Q_2=1$

$n=3$ 时，213，321，132 是 3 个可能的排列，$Q_3=3$

$n=4$ 时，有如下 11 种可能的排列，$Q_4=11$

$$\begin{gathered}4132,3142,2143,1324,4213,3214,\\2413,1432,4321,3241,2431\end{gathered}$$

定理 3.3.2　对任意正整数 n，有

$$\begin{aligned}Q_n=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!\\-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!\end{aligned}$$

证明　令 S 为 $\{1,2,\cdots n\}$ 的所有全排列，则 $|S|=n!$。定义性质集合

$$P=\{P_1,P_2,\cdots P_{n-1}\}$$

其中，P_i 表示全排列中出现 $i(i+1)$ 模式 $(1\le i\le n-1)$，设 A_i 为 S 中满足性质 P_i 的全排列在全体

$(1\le i\le n-1)$，则 A_i 中的每一个排列都可看作 $n-1$ 元集合 $\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ 的一个全排列，所以

$$|A_i|=(n-1)!(i=1,2,\cdots n-1)$$

同理

$$\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!(1 \le i \ne j \le n-1)$$

一般地，有

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = (n-k)!$$

其中$i_1, i_2, \cdots i_k$互不相等，且$1 \le i_1, i_2, \cdots i_k \le n-1$

而Q_n为 S 中不满足性质$P_1, P_2, \cdots P_{n-1}$的元素个数，由容斥原理，有

$$\begin{aligned}
Q_n &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_{n-1}}\right| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{n-1}|A_i| + \sum_{1 \le i \le j \le n-1}\left|A_i \cap A_j\right| \\
&\quad - \cdots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right| \\
&= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! \\
&\quad - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!
\end{aligned}$$

从D_n和Q_n的显式表达式可以看出：

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

例 2　多重集合$M = \{4 \cdot x, 3 \cdot y, 2 \cdot z\}$的全排列中不出现$xxxx, yyy, zz$模式的排列有多少种？

解　令 S 为 M 的全排列全体，则有

$$|S| = \frac{9!}{4!3!2!}$$

定义性质集合

$$P = \{P_1, P_2, P_3\}$$

其中：

P_1:全排列中出现$xxxx$模式；

P_2:全排列中出现yyy模式；

P_3:全排列中出现zz模式

用A_i分别表示 S 中具有性质P_i的全排列全体$(1 \le i \le 3)$。A_1中的全排列出现模式$xxxx$，我们将$xxxx$看作一个字符，则A_1中的全排列就是多重集合$\{xxxx, 3 \cdot y, 2 \cdot z\}$的全排列，所以

$$|A_1| = \frac{6!}{1!3!2!}$$

同理，有

$$|A_2| = \frac{7!}{4!1!2!}$$

$$|A_3| = \frac{8!}{4!3!1!}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{1!1!2!}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \frac{5!}{1!3!1!}$$

$$|A_2 \cap A_3| = \frac{6!}{4!1!1!}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{3!}{1!1!1!}$$

由容斥原理知，满足条件的排列个数为

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| \\
&= |S| - \left(|A_1| + |A_2| + |A_3|\right) \\
&\quad + \left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\right) \\
&= \frac{9!}{4!3!2!} - \left(\frac{6!}{3!2!} + \frac{7!}{4!2!} + \frac{8!}{4!3!}\right) \\
&\quad + \left(\frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{6!}{4!}\right) - 3! \\
&= 871
\end{aligned}$$

例 3（menage 问题） n 对夫妇参加宴会围桌就座，要坟男女相间并且每对夫妇两人不得相邻，问有多少种就座方式？

解 易知$n<3$时这样的坐法是不存在的，今设$n \ge 3$。设想先让 n 位女士围桌入座，其方法有$(n-1)!$种。选定 n 位女士的一种入座方法，从某一位开始对这 n 位女士按环形顺序编号为 1，2，……，n，并将编号的 i 的女士的丈夫也编号为 i。第 i 位女士与第$i+1$位女士之间的位置称为第 i 号位置$(1 \le i \le n-1)$，第 n 位女士与第 1 位女士之间的位置称为 n。那么，第 1 位男士除第 n 号和第 1 位位置外，可以在其他$n-2$个座位中的任何一个就座；第 i 位男士除了第$i-1$号和第 i 号位置外，可以在其他$n-2$个座位中的任何一个就座$(2 \le i \le n)$。

假定 n 位男士已全部入座，在第 i 号位置就座的男士编号为$a_i\ (1 \le i \le n)$，则$a_1, a_2, \cdots a_n$为$\{1, 2 \cdots n\}$的一个全排列。根据题意，a_i必须满足$a_i \ne i, i+1 (1 \le i \le n-1); a_n \ne n, 1$。因而，符合题意的坐法对应的排列$a_1, a_2, \cdots a_n$应当使得

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{array} \tag{3.3.1}$$

中的任一列都无相同的数。我们称$a_1, a_2, \cdots a_n$为$\{1, 2\cdots n\}$的一个二重错排。$\{1, 2\cdots n\}$的二重错排的个数称为 ménage 数。记为U_n，求 ménage 数的问题称为既化的 ménage 问题。这样，原问题就变成求 ménage 数的U_n，而围桌入座的方法数等于$(n-1)!U_n$

为求U_n，定义 n 个性质如下： $P_i: a_i = i$或$i+1(1 \le i \le n-1)$

$$P_n: a_n = n \text{ 或 } 1$$

则U_n是不具有性质$P_1, P_2, \cdots, P_n$的全排列的数目，由定理 3.2.2 知

$$U_n = w(0) - w(1) + w(2) - \cdots + (-1)^n w(n)$$

令 S 是$\{1, 2\cdots n\}$的全排列全体，由$w(k)$的定义，有：$w(0) = |S| = n!$

而：$w(1) = \sum_{i=1}^{n} N(P_i)$

我们先求$N(P_i)(i \ne n, i = n)$设排列：$j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n$

满足性质P_i，则$j_i = i$或$i+1$，而：$j_1 \cdots j_{i-1} j_i j_{i+1} \cdots j_n$

为集合$\{1, 2\cdots n\} - \{j_i\}$的全排列，所以：$N(P_i) = 2 \times (n-1)!(i = 1, 2, \cdots n)$

从而：$w(1) = \sum_{i=1}^{n} N(P_i) = 2n \cdot (n-1)!$

一般地，有：$w(k) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 < \cdots < i_k \le n} N(P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k},)$

但由于计算$N(P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k})$有困难，这里我们直接计算$w(k)$，假定$\{1, 2\cdots n\}$的一个排列$a_1, a_2, \cdots, a_n$中有 k 个数$a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k}$分别满足性质$P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k}$，即

$$a_{i_j} = \begin{cases} i_j 或\ i_j + 1(i_j \ne n) \\ n 或\ 1(i_j = n) \end{cases}$$

再将$\{1, 2\cdots n\} - \{a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k}\}$这$n-k$个元素补上，就构成$\{1, 2\cdots n\}$的一个满足性质$P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k}$的全排列。因而，对于一组$a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k}$，能构造出$(n-k)!$个满足性质$P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k}$的全排列。

下面的问题是有多少个 k 元组满足 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 中的 k 个性质。满足 k 个性质 $P_{i_1}, P_{i_2} \cdots P_{i_k}$ 的 k 序列 $(a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k})$ 也就是在序列（3.3.1）中 $a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ 分别为第 i_1 列，第 i_2 列，……第 i_k 列的前两行中取出 k 个不同的数，换个说法 $a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ 也就是从：$(1,2),(2,3),(3,4),\cdots,(n-1,n),(n,1)$, （3.3.2）

的第 i_1 个，第 i_2 个，……第 i_k 个括号中取出 k 个彼此不同的数。将序列（3.3.2）中的括号去掉，变成

$$1,2,2,3,3,4,\cdots,n-1,n,n,1 \tag{3.3.3}$$

则从序列（3.3.2）的 k 个不同的括号中取出 k 个彼此不同的数等价于从序列（3.3.3）中取出满足下列条件的 k 序列：

（i）任何两数皆不相邻；

（ii）头尾两数不能同时为 1。

序列（3.3.3）中满足条件（i）的 k 序列的个数就是从 2n 个位置中取出 k 个不相邻的位置的方法数，由 2.3 节例 5 知，它等于 $\binom{2n-k+1}{k}$。满足条件（i）但不满足条件（ii）的 k 序列恰好就是从中取 $k-2$ 个不相邻的数，再将两端补上 1，其方法数为

$$\binom{(2n-4)-(k-2)+1}{k-2} = \binom{2n-k-1}{k-2}$$

综合以上分析知

$$\begin{aligned} w(k) &= \left(\binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}\right)(n-k)! \\ &= \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)! \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} U_n &= w(0) - w(1) + w(2) - \cdots + (-1)^n w(n) \\ &= n! - 2n(n-1)! + \cdots \\ &\quad + (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)! \\ &\quad + \cdots + (-1)^n 2 \end{aligned}$$

当 $n=3$ 时，$U_3 = 1$；当 $n=4$ 时，$U_4 = 2$。其入座方式分别如图 3.3.1 所示。

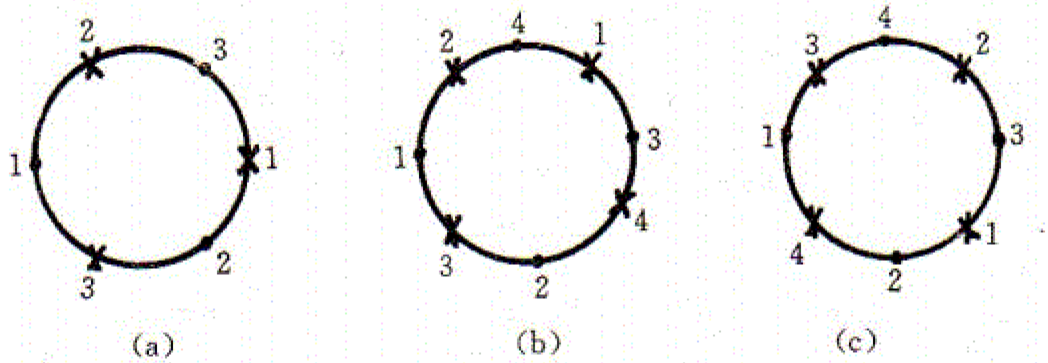

图 3.3.1

3.3.4 实际依赖于所有变量的函数个数的确定

设函数

$$g: E^k \to F$$

其中，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\},F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$。即$g(x_1,x_2,\cdots x_k)$是包含 k 个自变量（在集合 E 中），且在集合 F 中取值的函数，所有这样的函数的个数为$|F|^{|E^k|}=m^{n^k}$。如果函数g不随某个变量x_1变化，就称 g 实际上不依赖于变量x_i，也就是对每一组值$(x_1',x_2',\cdots x_{i-1}',x_{i+1}')\in E^{k-1}$和任何$\alpha,\beta\in E$，有关系式

$$\begin{aligned} & g(x_1',\cdots x_{i-1}',\alpha,x_{i+1}'\cdots x_n') \\ & =g(x_1',\cdots x_{i-1}',\beta,x_{i+1}'\cdots x_n') \end{aligned}$$

实际上不依赖于某$q(q\le k)$个变量的函数的个数，等于函数$g:E^{k-q}\to F$的个数，即为$m^{n^{k-q}}$。这里因为在 q 个自变量上保持不变的函数，等价于在集合 E 中的$k-q$个自变量到值域 F 上的函数。

设

$A_i=\{g:E^k\to F\,|\,g$ 实际上不依赖于变量 $x_i\}$ $(1\le i\le k)$，用$E(n,m,k)$记函数$g:E^k\to F$中实际依赖于所有变量的函数的个数，则由容斥原理得

$$\begin{aligned} E(n,m,k)=m^{n^k} & -\sum_{i=1}^{k}|A_i|+\sum_{1\le i\le j\le k}|A_i\cap A_j| \\ & -\cdots+(-1)^k\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right| \end{aligned}$$

根据A_i的定义，我们得到

$$\begin{aligned} E(n,m,k)=m^{n^k} & -\binom{k}{1}m^{n^{k-1}}+\binom{k}{2}m^{n^{k-2}} \\ & -\cdots+(-1)^k m \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

式中，$m^{n^{k-p}}$为实际不依赖于某 p 个变量的函数的个数；因为从 k 个自变量中取 p 个有$\binom{k}{p}$种选择方法，所以每一项中有系数$\binom{k}{p}$。

如果$E=F=\{0,1\}$，则函数$g:E^k\to F$是 k 个自变量的 Boole 函数，其个数为2^{2^k}。实际依赖于所有 k 个变量的 Boole 函数的个数可从公式（3.3.4）中取$m=n=2$得到，为

$$\begin{aligned} E(2,2,k)=2^{2^k} & -\binom{k}{1}2^{2^{k-1}}+\binom{k}{2}2^{2^{k-2}} \\ & -\cdots+(-1)^k 2 \end{aligned}$$

例如，若 $k=2$，则 $E(2,2,2)=10$，因而在两个变量的 16 个 Boole 函数中，实际依赖于两个变量的有 10 个，见表 3.3.1

表 3.3.1

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0

在表 3.3.1 中，f_1 与 f_2 均为常值函数，不依赖于 x_1 和 x_2；f_3 和 f_5 仅依赖于 x_1，不依赖于 x_2；f_4 和 f_5 仅依赖于 x_2，不依赖于 x_1；其余的 10 个函数则实际依赖于两个变量 x_1 和 x_2。

在 5.3 节中我们还将利用容斥原理的生成函数来讨论有限制位置的棋盘多项式和有限制的排列问题的求解。

3.4 Möbius 反演及可重复的圆排列

本节中，我们将在自然数集 N 上引进一个数论函数，称为 Möbius 数。

对任意自然数 n，若 $n>1$，则 n 可唯一分解为素数幂的乘积，

$$n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_r^{l_r} \tag{3.4.1}$$

其中，$p_1,p_2,\cdots p_k$ 是不同的素数，$l_i\ge 1(1\le i\le r)$。定义 Möbius 函数 $\mu(n)$ 为

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & (\square\ \ n=1)\\ 0 & (\square\square\square(3.4.1)\qquad l_i>1)\\ (-1)^r & (\square\square(3.4.1)\qquad l_1=l_2=\cdots l_r=1)\end{cases} \tag{3.4.2}$$

例如，$30=2\times3\times5, 18=3^2\times2$，于是

$$\mu(30)=(-1)^3=-1,$$
$$\mu(18)=0$$

引理 3.4.1　对任意自然数 n，有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1(\square \quad n=1)\\0(\square \quad n>1)\end{cases} \tag{3.4.3}$$

证明　若$n=1$，则$d=1$是 n 仅有的一个因数，因$\mu(1)=1$，故（3.4.3）式成立。

若$n>1$，且 n 有分解式（3.4.1），令$n^*=p_1p_2\cdots p_r$，则显然n^*的每个因数都是 n 的因数。若 n 的某个因数 d 不是n^*的因数，则 d 在作形如（3.4.1）式的素因子分解时，必有某个因子的次数大于等于 2，所以$\mu(d)=0$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d)&=\sum_{d|n^*}\mu(d)\\&=1+\sum_{1\le k\le r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le r}\mu\left(p_{i_1}\cdots p_{i_k}\right)\\&=\sum_{0\le k\le r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le r}(-1)^k\\&=\sum_{0\le k\le r}(-1)^k\binom{r}{k}\\&=(1-1)^r\\&=0\end{aligned}$$

则可将 g 表示为 f 的函数：

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right) \tag{3.4.5}$$

反之，从（3.4.5）式可以得出（3.4.4）式。

证明　对 n 的每个因数 d，$\frac{n}{d}$是自然数，于是有

$$f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\left|\frac{n}{d}\right.}g(d')$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n}\mu(d)\left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d')\right) \\
&= \sum_{d|n}\sum_{d|\frac{n}{d}}\mu(d)g(d') \\
&= \sum_{d'|n}\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)g(d') \\
&= \sum_{d'|n} g(d')\left(\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)\right)
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

由（3.4.3）式知

$$
\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d) = \begin{cases} 1(\square \quad \dfrac{n}{d'}=1) \\ 0(\square \quad \dfrac{n}{d'}>1) \end{cases}
\tag{3.4.7}
$$

将（3.4.7）代入（3.4.6）式，得

$$
\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n}\mu(d')\sum_{d|\frac{n}{d}}\mu(d)
$$

即（3.4.5）式成立。

同理，若（3.4.5）式成立，将其代入（3.4.4）式的右端，便可得到左端。

例 1　欧拉函数 $\varphi(n)$ 满足

$$
\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}
\tag{3.4.8}
$$

并由 Möbius 反演定理可得

$$
n = \sum_{d|n}\varphi(d) = \sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)
\tag{3.4.9}
$$

证明　先证（3.4.8）式。

如果 $n=1$，等式显然成立。

如果 $n>1$，设 n 有形如（3.4.1）式的展开式，令

$$
n_1 = p_1 p_2 \cdots p_r
$$

则

$$
\begin{aligned}
n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} &= \sum_{d|n_1}\frac{\mu(d)}{d} \\
&= n\left(1+\sum_{1\le k\le r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le r}\frac{\mu\left(p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}\right)}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right) \\
&= n\left(1+\sum_{1\le k\le r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le r}\frac{(-1)^k}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right) \\
&= \varphi(n)
\end{aligned}
$$

下面用 Möbius 反演定理由（3.4.8）式导出（3.4.9）式。因为

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} \\
&= \sum_{d|n}\mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)
\end{aligned}
$$

由定理 3.4.1 知

$$
n=\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)
$$

例 2（可重圆排列问题）　求集合 $S=\{1,2,\cdots,m\}$ 的 n 可重圆排列数。

由定理 2.3.1 知，m 元集合 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的 n 可重排列数为 m^n 。在本例中，我们讨论 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的 n 可重圆排列数。

设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 不可重复圆排列，将其分别从 n 个位置断开，即可得到与之相应的 n 个不同的线排列

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2\cdots a_n, \\
&a_2a_3\cdots a_1, \\
&\cdots, \\
&a_na_1\cdots a_{n-1}
\end{aligned}
$$

然而，一个 n 可重圆排列在 n 个位置断形后形成的 n 个线排列则未必都不相同。例如，当 $d\mid n$ 时，由不重的 $a_1a_2\cdots a_d$ 重复 $\dfrac{n}{d}$ 次构成的圆排列

$$
\underbrace{(a_1a_2\cdots a_d)(a_1a_2\cdots a_d)(a_1a_2\cdots a_d)}_{\frac{n}{d}} \tag{3.4.10}
$$

从 n 个位置断开后只能形成 d 个不同的线排列

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2\cdots a_d\cdots a_1a_2\cdots a_d,\\
&a_2a_3\cdots a_1\cdots a_2a_3\cdots a_1,\\
&\cdots,\\
&\underbrace{\underbrace{a_da_1\cdots a_{d-1}}\cdots\underbrace{a_da_1\cdots a_{d-1}}}_{\frac{n}{d}}
\end{aligned}
\tag{3.4.11}
$$

而且一个圆排列（3.4.10）与一组线排列（3.4.11）之间是一一对应的。

如果一个圆排列可由长度为 k 的线排列重复若干次形成，则这样的 k 的最小值称为圆排列的周期。一个圆排列中元素的个数（重复出现的元素按其重复出现的次数计）称为它的长度。

设由集合$\{1,2,\cdots m\}$中元素形成的长度与周期都是 d 的圆排列的个数为$M(d)$。因为一个圆排列（3.4.10）与一组线排列（3.4.11）对应，若$d\mid n$，每个长度与周期都是 d 的圆排列可在 d 个位置上断开，重复$\frac{n}{d}$次形成 d 个长度为 n 的可重线排列，因此，周期为 d 的全部 n 可重排列对应的 n 可重线排列的总数为$dM(d)$。对所有可能的周期求和，得

$$\sum_{d|n} dM(d)=m^n$$

其右端m^n是集合$\{1,2,\cdots m\}$的 n 可重排列数。对上式施行 Möbius 反演，得

$$nM(n)=\sum_{d|n}\mu(d)m^{\frac{n}{d}} \tag{3.4.12}$$

因而，$\{1,2,\cdots m\}$上长度为 n 的圆排

$$
\begin{aligned}
T(n)&=\sum_{d|n}M(d)\\
&=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}u(d')m^{\frac{d}{d'}}
\end{aligned}
$$

可将$T(n)$化简（略）为

$$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}$$

其中，$\varphi(n)$为欧拉函数。