求回文子串 O(n) manacher 算法

回文串定义：“回文串”是一个正读和反读都一样的字符串，比如“level”或者“noon”等等就是回文串。

回文子串，顾名思义，即字符串中满足回文性质的子串。

经常有一些题目围绕回文子串进行讨论，比如 HDOJ_3068_最长回文，求最长回文子串的长度。朴素算法是依次以每一个字符为中心向两侧进行扩展，显然这个复杂度是 O(N^2)的，关于字符串的题目常用的算法有 KMP、后缀数组、AC 自动机，这道题目利用扩展 KMP 可以解答，其时间复杂度也很快 O(N*logN)。但是，今天笔者介绍一个专门针对回文子串的算法，其时间复杂度为 O(n)，这就是 manacher 算法。

大家都知道，求回文串时需要判断其奇偶性，也就是求 aba 和 abba 的算法略有差距。然而，这个算法做了一个简单的处理，很巧妙地把奇数长度回文串与偶数长度回文串统一考虑，也就是在每个相邻的字符之间插入一个分隔符，串的首尾也要加，当然这个分隔符不能再原串中出现，一般可以用‘#’或者‘$’等字符。例如：

原串：abaab

新串：#a#b#a#a#b#

这样一来，原来的奇数长度回文串还是奇数长度，偶数长度的也变成以‘#’为中心的奇数回文串了。

接下来就是算法的中心思想，用一个辅助数组 P 记录以每个字符为中心的最长回文半径，也就是 P[i]记录以 Str[i]字符为中心的最长回文串半径。P[i]最小为 1，此时回文串为 Str[i]本身。

我们可以对上述例子写出其 P 数组，如下

新串： # a # b # a # a # b #

P[] ： 1 2 1 4 1 2 5 2 1 2 1

我们可以证明 P[i]-1 就是以 Str[i]为中心的回文串在原串当中的长度。

证明：

1、显然 L=2*P[i]-1 即为新串中以 Str[i]为中心最长回文串长度。

2、以 Str[i]为中心的回文串一定是以#开头和结尾的，例如“#b#b#”或“#b#a#b#”所以 L 减去最前或者最后的‘#’字符就是原串中长度的二倍，即原串长度为(L-1)/2，化简的 P[i]-1。得证。

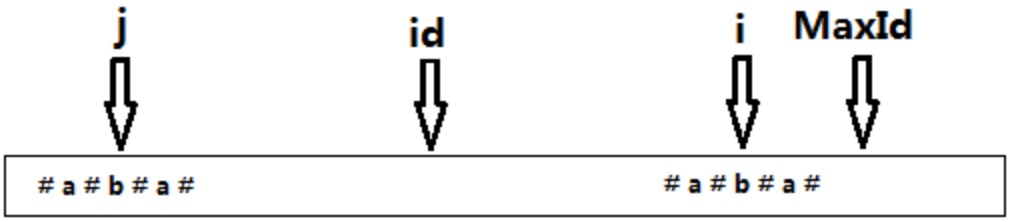
依次从前往后求得 P 数组就可以了，这里用到了 DP(动态规划)的思想，也就是求 P[i]的时候，前面的 P[]值已经得到了，我们利用回文串的特殊性质可以进行一个大大的优化。我先把核心代码贴上：

```
for(i=1;i<n;i++)
{
    if(MaxId>i)
    {
        p[i]=Min(p[2*id-i],MaxId-i);
    }
    else
    {
        p[i]=1;
    }
    while(a[i+p[i]]==a[i-p[i]])
    {
        p[i]++;
    }
    if(p[i]+i>MaxId)
    {
        MaxId=p[i]+i;
        id=i;
    }
}
```

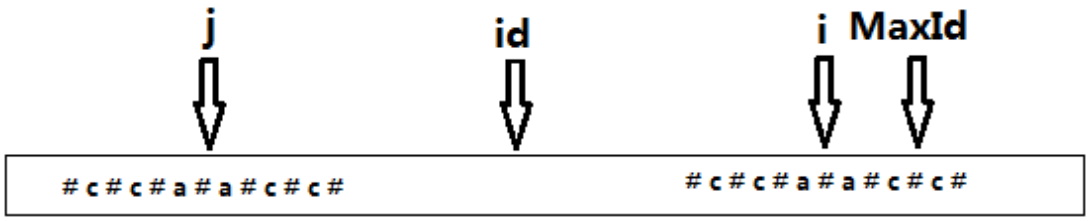
为了防止求 P[i]向两边扩展时可能数组越界，我们需要在数组最前面和最后面加一个特殊字符，令 P[0]= ‘$’ 最后位置默认为 ‘\0’ 不需要特殊处理。此外，我们用 MaxId 变量记录在求 i 之前的回文串中，延伸至最右端的位置，同时用 id 记录取这个 MaxId 的 id 值。通过下面这句话，算法避免了很多没必要的重复匹配。

```
if(MaxId>i)
{
    p[i]=Min(p[2*id-i],MaxId-i);
}
```

那么这句话是怎么得来的呢，其实就是利用了回文串的对称性，如下图，



j=2*id-i 即为 i 关于 id 的对称点，根据对称性，P[j]的回文串也是可以对称到 i 这边的，但是如果 P[j]的回文串对称过来以后超过 MaxId 的话，超出部分就不能对称过来了，如下图，所以这里 P[i]为的下限为两者中的较小者，p[i]=Min(p[2*id-i],MaxId-i)。



算法的有效比较次数为 MaxId 次，所以说这个算法的时间复杂度为 O(n)。

附 HDOJ_3068_最长回文代码：

```
#include <stdio.h>
#define M 110010
char b[M],a[M<<1];
int p[M<<1];
int Min(int a,int b)
{
```

```
    return a<b?a:b;
}
int main()
{
    int i,n,id,MaxL,MaxId;
    while(scanf("%s",&b[1])!=EOF)
    {
        MaxL=MaxId=0;
        for(i=1;b[i]!='\0';i++)
        {
            a[(i<<1)]=b[i];
            a[(i<<1)+1]='#';
        }
        a[0]='?';a[1]='#';
        n=(i<<1)+2;a[n]=0;
        MaxId=MaxL=0;
        for(i=1;i<n;i++)
        {
            if(MaxId>i)
            {
                p[i]=Min(p[2*id-i],MaxId-i);
            }
            else
            {
                p[i]=1;
            }
            while(a[i+p[i]]==a[i-p[i]])
            {
                p[i]++;
            }
            if(p[i]+i>MaxId)
            {
                MaxId=p[i]+i;
                id=i;
            }
            if(p[i]>MaxL)
            {
                MaxL=p[i];
            }
        }
        printf("%d\n",MaxL-1);
    }
    return 0;
}
```